

Ficha catalográfica automática - SDC/BIF

S586t Silva , Matheus Calvelli Da  
Transições de fase e universalidade no modelo de Sznajd com  
anticonformismo / Matheus Calvelli Da Silva ; Nuno Miguel  
Peregrino , orientador ; Thadeu Penna , coorientador.  
Niterói, 2018.  
47 f.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal Fluminense,  
Niterói, 2018.

DOI: <http://dx.doi.org/10.22409/PPGF.2018.m.14766887700>

1. Física estatística . 2. Transições de fase . 3.  
Análise de tamanho finito . 4. Dinâmicas sociais . 5.  
Produção intelectual. I. Título II. Peregrino ,Nuno Miguel  
, orientador. III. Penna , Thadeu , coorientador. IV.  
Universidade Federal Fluminense. Instituto de Física.

CDD -

**Universidade Federal Fluminense**  
**Instituto de Ciências Exatas - ICEX**  
**Departamento de Física**

*Transições de fase e universalidade no  
modelo de Sznajd com anticonformismo*

Matheus Calvelli

Orientador: Dr. Nuno Miguel Melo Crokidakis Peregrino

Co-Orientador: Dr. Thadeu Josino Pereira Penna



Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do  
título de Mestre em Física

Volta Redonda, Agosto de 2018

”Knowing where you came from is no less important than knowing where you are going.”

Neil DeGrasse Tyson, Astrofísico

À Aduino Pereira, Rosângela Calvelli, minha família, minha namorada e meus amigos, sem os quais isso tudo teria sido muito mais difícil.

# Índice

<b>1</b>	<b>Transições de Fase e Fenômenos Críticos</b>	<b>4</b>
1.1	Transições de fase . . . . .	4
1.2	Expoentes Críticos . . . . .	6
1.3	Transições de Fase e Expoentes Críticos para Tamanho Finito . . . . .	7
1.4	Classes de Universalidade . . . . .	11
<b>2</b>	<b>O Modelo de Sznajd</b>	<b>12</b>
2.1	O sistema . . . . .	13
2.2	Ruído . . . . .	14
<b>3</b>	<b>O Modelo de Sznajd com Anticonformismo</b>	<b>17</b>
3.1	Resultado Analíticos para um Sistema Infinito . . . . .	18
3.2	Resultados Analíticos para o Sistema Finito . . . . .	19
3.3	Simulações de Monte Carlo para o Modelo . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Resultados</b>	<b>25</b>
4.1	Campo Médio com Anti-conformismo . . . . .	26
4.2	Rede Quadrada com Anti-conformismo . . . . .	29
4.3	Rede Cúbica com Anti-Conformismo . . . . .	31
4.4	A Classe de Universalidade do Modelo de Sznajd . . . . .	32
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>36</b>

# Lista de Figuras

1.1	Comportamento da energia livre de Gibbs ( $G$ ), da entropia ( $S$ ) e do calor específico ( $C_p$ ) em duas transições de fase diferentes. Retirado de: [11] . . . . .	6
2.1	Distribuição espacial de variáveis de opinião. (a) estado inicial, (b-e) estados intermediários, (f) estado final. Retirado do artigo original [1]. . . . .	13
2.2	Evolução temporal da decisão $m$ , tomada de dados empíricos (superior) (pergunta: "você acha que o futuro será bom?" para $N=1100$ adultos) e simulação com $N=1000$ para um estado inicial aleatório. Retirado do artigo original [1]. . . . .	14
2.3	$c_b$ é a densidade inicial de estado B (+1 por exemplo). BBBB representa um estado de equilíbrio onde toda a rede possui a mesma opinião B, AAAA o oposto e ABAB um estado de impasse, onde a sociedade se encontra em um estado completamente incapaz de tomar decisões. Média em 1000 simulações. Retirado do artigo original [1]. . . . .	15
2.4	Evolução de um sistema em estado inicial de consenso (AAAA) para diferentes probabilidades de ruído $p$ . Retirado do artigo original [1]. . . . .	16
3.1	Potencial efetivo x Magnetização para diversos valores de $p_2$ . Retirado do artigo original [14]. . . . .	20
3.2	Densidade de probabilidade de magnetização da solução analítica 3.15 (linha sólida) e resultado obtido a partir da solução numérica da equação mestre 3.11 para $N = 25$ (acima) e $N = 100$ (abaixo), com $p_1 = 1$ . Retirado do artigo original [2] . . . . .	22
3.3	Evolução da opinião pública ( $m$ ) para diferentes valores de anti-conformismo. Retirado do artigo original [2]. . . . .	23

3.4	Evolução da densidade de opiniões para $p_2 = 0.2$ . Retirado do artigo original [2].	24
3.5	Evolução da opinião pública - decisão - absoluta para diversos valores de $p_2$ . Retirado do artigo original [2].	24
4.1	Colapso do cumulante ( $U$ ) para o campo médio; $P_{2Crítico} = 1/3$ ; $\nu = 2$ .	27
4.2	Colapso da Magnetização ( $ m $ ) para o campo médio; $\nu = 2$ ; $\beta = 1/2$ .	28
4.3	Colapso da Susceptibilidade ( $\chi$ ) para o campo médio; $\nu = 2$ ; $\gamma = 1.0$ .	28
4.4	Cumulante ( $U$ ) e Ponto Crítico $P_{2Crítico}$ para a rede quadrada; $P_{2Crítico} = 0.09675$ .	30
4.5	Colapso do Cumulante ( $U$ ) para a rede quadrada; $P_{2Crítico} = 0.09675$ ; $\nu = 1.0$ .	30
4.6	Colapso da Magnetização $ m $ para a rede quadrada; $P_{2Crítico} = 0.09675$ ; $\nu = 1$ ; $\beta = 0.125$	31
4.7	Colapso da Susceptibilidade $\chi$ para a rede quadrada; $P_{2Crítico} = 0.09675$ ; $\nu = 1$ ; $\gamma = 1.75$	32
4.8	Cumulante ( $U$ ) e Ponto Crítico $P_{2Crítico}$ para a rede cúbica; $P_{2Crítico} = 0.197$ .	33
4.9	Colapso do Cumulante ( $U$ ) para a rede cúbica; $P_{2Crítico} = 0.197$ ; $1/\nu = 1.58$ .	33
4.10	Colapso da Magnetização $ m $ para a rede cúbica; $P_{2Crítico} = 0.197$ ; $1/\nu = 1.58$ ; $\beta = 0.32$	34
4.11	Colapso da Susceptibilidade $\chi$ para a rede cúbica; $P_{2Crítico} = 0.197$ ; $1/\nu = 1.58$ ; $\gamma = 1.24$	35

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente a minha família pelo apoio inabalável, pela compreensão e por terem me ensinado os valores e me dado as condições que me permitiram perseverar ao longo deste árduo caminho. Aos meus professores e orientadores, por terem me inspirado e por estarem sempre abertos a boas conversas. À CAPES pelo financiamento. E aos meus amigos e namorada, sem os quais nada disso teria sido possível.



# Resumo

Nesta dissertação estudamos o Modelo de opiniões de Sznajd[1] com Anticonformismo, comportamento onde indivíduos intencionalmente tomam uma opinião contrária ao seu grupo, em redes quadrada e cúbica.

Tomando como base os estudos já feitos sobre a rede completamente conectada[2], onde cálculos analíticos para a transição de fase presente no modelo são apresentados, buscamos estender estes resultados estimando os expoentes críticos restantes e analisando a transição de fase do modelo na rede quadrada e cúbica. Para isto, utilizamos técnicas de análise de tamanho finito e simulações computacionais para estimar os pontos críticos e expoentes críticos do modelo a fim de discutirmos sua classe de universalidade. Nossos resultados sugerem que o modelo de Sznajd pertence à classe de universalidade de Ising em suas respectivas dimensões.

# Abstract

In this dissertation we study Sznajd's opinion dynamics model[1] with anticonformity, a behaviour where individuals intentionally take an opinion that is contrary to his group, both in squared and cubic lattices.

Taking as a basis the already known studies and results of the complete graph[2], where analytical calculations for the phase transition of the model have already been made, we seek to extend these results by evaluating the critical exponents left unchecked and by analysing the phase transition of the model in both a squared and cubic lattices. To that end, we use finite-size scaling analysis and computer simulations to estimate the models' critical points and exponents in order to discuss it's universality class. Our results suggests that the Sznajd model belongs to Ising's universality class on it's respective dimensions.

# Introdução

Uma das características mais comuns e importantes entre formas de vida mais complexas é sua capacidade de se organizar socialmente na busca pela sobrevivência, portanto, não é inesperado que diversos animais, dos mais variados tipos e ambientes, possuam um senso de organização social e hierárquica que podem ser traçados há mais de 140 milhões de anos com os primeiros crustáceos[3]. Portanto, seja para entender o comportamento de animais, seja para compreender melhor o processo evolutivo ou para entender como nossas sociedades se estruturam, etc., o estudo de organizações sociais é importante, interessante e complexo.

Ao longo dos anos diversas técnicas têm sido aplicadas buscando compreender a sociedade em que vivemos. Desde historiadores, que buscam entender os paradigmas presentes em nossa sociedade através do passado, publicitários, que buscam por melhores estratégias de venda analisando diferentes grupos dentro de nossa sociedade, até biólogos evolutivos, que buscam explicar os mais variados comportamentos como resultado da evolução Darwiniana. Dentre estas, uma das técnicas mais recentes é a sócio-física.

A sócio-física pode ter seu início datado em 1969 com Thomas Schelling[4] que, buscando entender melhor a segregação racial que se observava em tantos lugares do mundo na época, elaborou o primeiro modelo matemático para estudar a nossa sociedade (Schelling's segregation model). Desde então, uma grande variedade de modelos matemáticos para o estudo dos mais variados aspectos sociais surgem e junto com eles uma nova maneira de analisar a nossa sociedade. É neste meio que surgem os modelos de dinâmicas de opinião.

Entre estes modelos encontra-se o modelo de Sznajd[1], base para este trabalho, que assumindo variáveis binárias  $+1$  e  $-1$  como opiniões, respectivamente a favor e contra, busca entender como opiniões se alteram em um grupo/sociedade fechado(a) quando sujeitos a uma simples regra de interação:

- Se dois vizinhos são a favor ( $+1$ ), então, os vizinhos adjacentes tomam a mesma direção;
- Se dois vizinhos são contra ( $-1$ ), então, os vizinhos adjacentes tomam a mesma direção;

Este comportamento, extremamente comum entre os mais variados grupos, é conhecido como conformismo e representa um aspecto bastante conhecido e recorrente em estudos comportamentais, e está ligado à diversos fatores como pressão cultural, medo de desafio, comprometimento ao grupo, etc[5]. Com esta simples regra o modelo é capaz de mostrar não só que interações locais simples podem dar surgimento à dinâmicas complexas de grupo, mas também permite concluir algo bastante interessante: que comunidades fechadas em um sistema de decisões binário caminham sempre para um estado de impasse, onde a sociedade se encontra em um estado completamente incapaz de tomar decisões, ou ditadura, onde todos têm a mesma opinião e esta não se altera com o tempo.

Desde então, inúmeros trabalhos foram feitos investigando o modelo de Sznajd. Dentre eles Sznajd et al.[6] investigaram a adição de um novo tipo de comportamento, a independência, e Piotr Nyczka, Jerzy Cislo e a própria Sznajd[2] investigaram a adição do anti-conformismo, ambos comportamentos também conhecidos e presentes em grupos e sociedades[5], enquanto D. Stauffer, A. O. Sousa e S. Moss de Oliveira[7] investigaram o comportamento em uma rede quadrada, etc. Este trabalho busca estender estes resultados e analisar a universalidade[8] no modelo de Sznajd, não só revisitando os resultados já conhecidos mas analisando, também, o modelo de Sznajd com anti-conformismo e seus fenômenos críticos em redes de variados tamanhos e dimensionalidades.

Este trabalho é organizado da seguinte maneira: No capítulo 1, apresentamos o que são expoentes críticos, que serão necessários para a nossa análise, e algumas teorias referentes a estes assim como as classes de universalidade. No capítulo 2, apresentamos o modelo de Sznajd original[1]. No capítulo 3, apresentamos o modelo de Sznajd com anti-conformismo e resultados analíticos para o mesmo[2]. No capítulo 4, apresentamos os resultados obtidos e a análise da universalidade no modelo. Por fim, resumimos e concluímos toda a discussão no capítulo final.

# Capítulo 1

## Transições de Fase e Fenômenos Críticos

Transições de fase ocorrem em uma grande variedade de materiais e sistemas, dentre eles, fluídos, misturas, materiais ferromagnéticos e paramagnéticos, superfluídos, supercondutores, cristais de spin, etc. Essas transições ocorrem em regiões onde grandezas físicas apresentam mudanças de comportamento, como apresentado na seção 1.1, ou seja, grandezas como o calor específico, por exemplo, sofrem uma variação brusca. Na busca por entender melhor essas transições e, em especial, entender melhor o que acontece nessas regiões, surgem os expoentes críticos.

### 1.1 Transições de fase

Quando um determinado material encontra-se em um estado físico uniforme, ou seja, com propriedades físicas homogêneas, dizemos que este material está em fase, ao posto que durante uma transição de fase há uma súbita alteração de algumas destas propriedades físicas devido a um alguma mudança externa. De modo mais geral uma transição de fase é qualquer mudança de comportamento, muitas vezes de forma descontínua, que faz com que um sistema mude suas características iniciais. Portanto, uma grande variedade de áreas apresenta transições de fase[9].

Podemos classificar as transições de fase em duas categorias: transições de fase de primeira ordem, definidas por descontinuidades na entropia, e transições de fase de segunda ordem, definidas por uma entropia contínua mas com derivadas de segunda ordem descontínuas. Sendo assim, tomando como exemplo a energia livre de Gibbs, na termodinâmica, teremos transições de fase de primeira ordem quando tivermos descontinuidades na entropia, no volume e no momento de dipolo magnético (1.1-1.3), enquanto transições de fase de segunda ordem ocorrerão quando houverem descontinuidades no calor específico ( $C_p$ ), coeficiente de expansão( $\alpha$ ), compressibilidade ( $k$ ) e na susceptibilidade(1.4-1.7)[10].

$$S = -\left.\frac{dG}{dT}\right|_{N,p,\dots} \quad (1.1)$$

$$V = -\left.\frac{dG}{dp}\right|_{N,T,\dots} \quad (1.2)$$

$$d_z = -\left.\frac{dG}{dH}\right|_{N,T,\dots} \quad (1.3)$$

$$C_p = T\left.\frac{dS}{dT}\right|_p = -T\left.\frac{d^2G}{dT^2}\right|_p \quad (1.4)$$

$$k = -\left.\frac{1}{V}\frac{dV}{dp}\right|_T = -\left.\frac{1}{V}\frac{d^2G}{dp^2}\right|_T \quad (1.5)$$

$$\alpha = \left.\frac{1}{V}\frac{dV}{dT}\right|_p = \left.\frac{1}{V}\frac{d^2G}{dpdT}\right|_p \quad (1.6)$$

$$\chi = \left.\frac{dD_z}{dH}\right|_T = -\left.\frac{d^2G}{dH^2}\right|_T \quad (1.7)$$

É importante ressaltar, no entanto, que existem diversos casos específicos onde o comportamento do sistema pode ser ainda mais singular durante sua transição de fase, como é o caso de algumas transições de primeira ordem que se tornam transições de segunda ordem quando próximas da temperatura crítica ou do vidro que não é

cristalino em seu estado sólido e possui uma estrutura amorfa que não se altera com o aquecimento. Portanto, como o problema fundamental das transições de fase é o comportamento do sistema em torno do ponto crítico e como existem diversas especificidades para cada caso, torna-se importante seu estudo e classificação. Com isso, partindo de observações experimentais e afim de caracterizar as transições de fase de forma mais geral, define-se o parâmetro de ordem  $\lambda$  que é a diferença do principal parâmetro qualitativo que define/diferencia as duas fases, ou seja,  $\lambda$  deve ser zero em uma das fases e diferente de zero na outra [11].

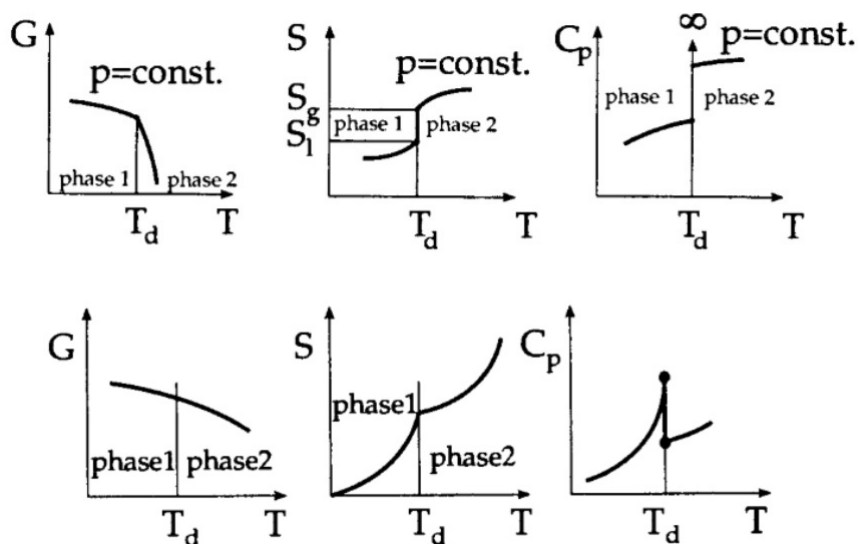


Figura 1.1: Comportamento da energia livre de Gibbs ( $G$ ), da entropia ( $S$ ) e do calor específico ( $C_p$ ) em duas transições de fase diferentes. Retirado de: [11]

## 1.2 Expoentes Críticos

Um diferença bastante clara entre diferentes fases de um sistema é a sua ordenação, a água, por exemplo, em sua forma sólida apresenta cristais de gelo que se ordenam ao longo de distâncias longas, enquanto que em sua forma líquida esta ordenação é perdida. A partir dessas diferenças definimos o parâmetro de ordem que



caracteriza onde ocorre a transição de fase.

Para entendermos melhor as transições de fase buscamos derivar as quantidades mais importantes de um sistema em função de um único parâmetro. No caso de um sistema termodinâmico, que usaremos como exemplo, utilizamos a temperatura. Por fim, uma vez que a análise dos dados experimentais mostram claramente que estes fenômenos se comportam de acordo com leis de potência, usamos estas leis, de onde obtemos os expoentes críticos, e o parâmetro de ordem para caracterizarmos e localizarmos melhor estas transições. Para o caso da transição entre vapor e líquido, por exemplo, o parâmetro de ordem será definido a partir das diferenças da densidade entre as fases ( $\rho_L$  e  $\rho_G$ , densidade da água em fase líquida e gasosa respectivamente) e teremos seis índices:  $\alpha, \alpha', \beta, \gamma, \gamma', \delta$  referentes ao parâmetro de ordem ( $\lambda$ ), ao calor específico ( $C_v$ ), compressibilidade ( $k$ ) e à isoterma crítica. Analisamos então como as quantidades que mudam nessas transições de fase se comportam ao se aproximarem à temperatura crítica e, assim, definimos os expoentes críticos[11].

$$\lambda = \rho_L - \rho_G \propto (T_c - T)^\beta \quad (1.8)$$

$$C_v \propto \begin{pmatrix} (T - T_c)^{-\alpha}; T > T_c \\ (T_c - T)^{-\alpha'}; T < T_c \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

$$k \propto \begin{pmatrix} (T - T_c)^{-\gamma}; T > T_c \\ (T_c - T)^{-\gamma'}; T < T_c \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

$$p - p_c \propto |\rho - \rho_c|^\delta; T = T_c \quad (1.11)$$

### 1.3 Transições de Fase e Expoentes Críticos para Tamanho Finito

Nesta seção apresentaremos apenas os conceitos utilizados para a obtenção dos expoentes críticos necessários através das simulações e, em especial, resultados co-

nhecidos para o modelo de Ising[11] (um visão rápida do modelo é dada no capítulo seguinte 2) que também serão utilizados.

De modo geral, especialmente em simulações, podemos descrever transições de fase analisando o parâmetro de ordem que, como mencionado anteriormente (1.1), é definido pela diferença entre fases do principal parâmetro qualitativo que as define, de forma que este parâmetro seja zero em uma das fases e diferente de zero na outra, o que identifica uma transição de fase. Por exemplo, para a transição líquido-sólido da água teríamos a densidade como parâmetro qualitativo  $\lambda = \rho_L - \rho_S$ .

No modelo de Ising[11] - inicialmente proposto para o estudo do ferromagnetismo - podemos caracterizar uma transição de fase pelo seu comprimento de correlação no limite termodinâmico,  $\xi \sim |t|^{-\nu} = |T - T_c|^{-\nu}$ , uma vez que este diverge nas proximidades da transição de fase. Por outro lado, em uma simulação a rede possui tamanho finito de forma que  $\xi_{max} \sim L$ , portanto, quando  $\xi \approx \xi_{max}$  teremos um transição de fase.

$$\xi \sim |T - T_c|^{-\nu} \approx L \rightarrow |T - T_c| = L^{-1/\nu} \quad (1.12)$$

De forma similar obtemos os expoentes  $\beta$  e  $\gamma$  a partir da magnetização ( $m$ ) e da susceptibilidade magnética ( $\chi$ ):

$$m \sim |T - T_c|^\beta = L^{-\beta/\nu} \quad (1.13)$$

$$\chi \sim |T - T_c|^{-\gamma} = L^{\gamma/\nu} \quad (1.14)$$

$$C \sim |T - T_c|^{-\alpha} = L^{\alpha/\nu} \quad (1.15)$$

Agora, definindo  $\xi_\infty$  como o comprimento de correlação do sistema infinito, sabemos que  $\xi$  deve satisfazer:

$$\xi \sim \left( \begin{array}{l} |T - T_c|^{-\nu}, \xi_\infty \ll L \\ constante(\approx L), \xi_\infty \gg L \end{array} \right) \quad (1.16)$$

Portanto, vemos que para um sistema finito o comprimento de correlação e consequentemente  $\chi$  não irão divergir e que, como em 1.16:

$$\chi \sim \begin{cases} |T - T_c|^{\gamma/\nu}, \xi_\infty \ll L \\ \text{constante}, \xi_\infty \gg L \end{cases} \quad (1.17)$$

Sendo assim, iremos supor que:

$$\chi = \xi^{\gamma/\nu} \chi_0(L/\xi_\infty) \quad (1.18)$$

Onde, apesar de não sabermos o comportamento completo de  $\chi_0$ , sabemos como  $\chi_0$  deve se comportar nos limites, ou seja,  $\chi_0(x) = C$  quando  $x \gg 1$  e  $\chi_0(x) = C.\xi^{-\gamma/\nu}$  quando  $x \ll 1$ , onde  $C$  é uma constante arbitrária. Para simplificar introduzimos mais uma função, definida como:

$$\tilde{\chi}(x) = x^{-\gamma} \chi_0(x^\nu) \quad (1.19)$$

Manipulando-a, obtemos:

$$\chi_0(x) = \chi_0[(x^\nu)^{1/\nu}] = x^{\gamma/\nu} \cdot \tilde{\chi}(x^{1/\nu}) \quad (1.20)$$

Obtemos por fim:

$$\chi = \xi^{\gamma/\nu} \chi_0(L/\xi) = L^{\gamma/\nu} \tilde{\chi}(L^{1/\nu} \xi^{-1/\nu}) \quad (1.21)$$

Assim, identificamos a função  $\tilde{\chi}$  como a função de escala e notamos que esta se torna independente de  $L$  quando o comprimento de correlação se aproxima de  $L$  ( $\xi \approx L$ ). Ou seja, nas condições corretas -  $(\frac{L}{\xi})^{1/\nu} \approx 1$  -, isto nos permitirá analisar as transições de fase de simulações mesmo tendo um número de partículas muito inferior ao número de Avogrado.

$$m \sim L^{-\beta/\nu} \tilde{m}(L^{1/\nu} \xi^{-1/\nu}) \quad (1.22)$$

$$\chi \sim L^{\gamma/\nu} \tilde{\chi}(L^{1/\nu} \xi^{-1/\nu}) \quad (1.23)$$

$$|T - T_c| \sim C.L^{-1/\nu} \quad (1.24)$$

No entanto, antes que possamos analisar estes expoentes precisamos determinar o ponto crítico e  $\nu$ , que pode ser considerado como o parâmetro de correção para o sistema finito, para tal, poderíamos utilizar qualquer quantidade que divergisse nas suas proximidades, no entanto, como em simulações temos efeitos de tamanho finito muitas destas quantidades acabam sofrendo apenas leves variações ao invés de divergirem o que torna a localização do ponto crítico bem mais complicado. Por isso, para facilitar a localização do ponto crítico, fazemos uso do quarto cumulante de Binder[12] (1.25) que é definido a partir do valor médio de duas potências da magnetização ( $\langle M^4 \rangle$  e  $\langle M^2 \rangle$ ), uma grandeza não física que apresenta comportamento similar nas proximidades da transição de fase e tem a vantagem de possuir um único valor em  $T = T_c$  para qualquer valor de  $L$ . O ponto crítico será determinado por onde as curvas de simulações de diferentes tamanhos se cruzam.

Determinado o ponto crítico, definimos o expoente  $\nu$  a partir do colapso do cumulante de Binder.

$$U = 1 - \frac{1}{3} \frac{\langle |M|^4 \rangle}{\langle |M|^2 \rangle^2} \quad (1.25)$$

Já para a susceptibilidade ( $\chi$ ) a divergência ocorre exatamente quando  $T = T_c$ , onde também encontra-se o pico da função, portanto, da eq. (1.23) notamos que nos aproximamos mais do pico conforme o tamanho da rede ( $L$ ) aumenta. Além disso, podemos usar a definição (1.26) para remover a dependência do tamanho e determinar o valor de  $\gamma$  através do colapso das curvas para tamanhos diferentes.

$$\chi = \frac{1}{V} (\langle |M|^2 \rangle - \langle |M| \rangle^2) \quad (1.26)$$

Fazemos de forma similar para a magnetização  $m$  e obtemos  $\beta$ .

Por fim, sabendo os expoentes  $\nu$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  podemos determinar o quarto ( $\alpha$ ) a partir de (1.27)[9] e classificar em qual classe de universalidade o modelo se encontra.

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2 \quad (1.27)$$

## 1.4 Classes de Universalidade

Como apresentado na seção anterior os expoentes críticos são ferramentas poderosas para caracterizar transições de fase e nos permite verificar como determinados materiais ou, de forma mais geral, sistemas, se comportam próximos dos seus pontos críticos. Sendo assim, a partir da análise de uma variedade de sistemas e seus respectivos expoentes críticos surge o que chamamos de classes de universalidade, ou seja, sistemas os quais, por mais diferentes que sejam em prática, possuem um mesmo comportamento durante a transição de fase e, portanto, possuem os mesmos expoentes críticos. Alguns exemplos podem ser visto na tabela abaixo 1.1 [8].

Dimensão	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\nu$	Classe
2D	0	1/8	7/4	1	2D Ising
3D	0.11008(1)	0.326419(3)	1.237075(10)	0.629971(4)	3D Ising
2D	1/3	1/9	13/9	5/6	Potts de 3 Estados
2D	2/3	1/12	7/6	2/3	Potts de 4 Estados (Ashkin-Teller)
2D	-0.12(1)	0.366(2)	1.395(5)	0.707(3)	Heisenberg
	0	1/2	1	2	Ising Campo Médio

Tabela 1.1: Expoentes críticos e classes de universalidade.

# Capítulo 2

## O Modelo de Sznajd

O modelo de Sznajd[1] toma como base o modelo de Ising[11] para ferromagnetos - que busca explicar as transições de fase de ferromagnetos através da interação dos spins ( $\sigma_i = \pm 1$ ) sob a ação de um campo externo - para analisar um sistema fechado onde uma população deve tomar decisões binárias, como em uma eleição bi-partidária, por exemplo.

Sendo assim, similarmente às variáveis de spin do modelo de Ising ( $\sigma_i = \pm 1$ ), o modelo de Sznajd define  $S_i = \pm 1$  como a variável de opinião, cuja regra de interação é dada por:

-Se  $S_i S_{i+1} = 1$  então  $S_{i-1}$  e  $S_{i+2}$  tomam a mesma direção do par, isto é, passam a ter a mesma opinião.

-Se  $S_i S_{i+1} = -1$  então  $S_{i-1}$  toma a mesma opinião de  $S_{i+1}$  e  $S_{i+2}$  toma a mesma opinião de  $S_i$ .

Descrevendo assim, a influência de pares em seus vizinhos. A regra é de acordo com a ideia de "unidos somos mais fortes", o que dá ao nome ao modelo: USDF ("united we stand, divided we fall").

## 2.1 O sistema

O modelo foi implementado originalmente em uma rede unidimensional, de tamanho  $N$ , com condições periódicas de contorno - ou seja, considerando-se que cada extremidade oposta da rede esta conectada entre si - e passos de Monte Carlo[13] aleatórios, onde cada passo consiste em escolher aleatoriamente na rede  $N$  grupos de três vizinhos e aplicar sobre eles a regra de interação. A direção/opinião inicial ( $S_i = \pm 1$ ) de cada sítio é escolhida aleatoriamente, ou seja, todos os sítios da rede recebem uma opinião de forma aleatória. Ao final da simulação, temos três possíveis resultados, todos à favor ( $S_i = +1$ ) com 25% de probabilidade, todos contra ( $S_i = -1$ ) também com 25% de probabilidade ou uma mistura igual, ou seja, 50% à favor e 50% contra com 50% de probabilidade. Em geral, para uma rede de  $N = 1000$  levam-se  $10^4$  passos de Monte Carlo[13] para atingir o estado estacionário (2.1).

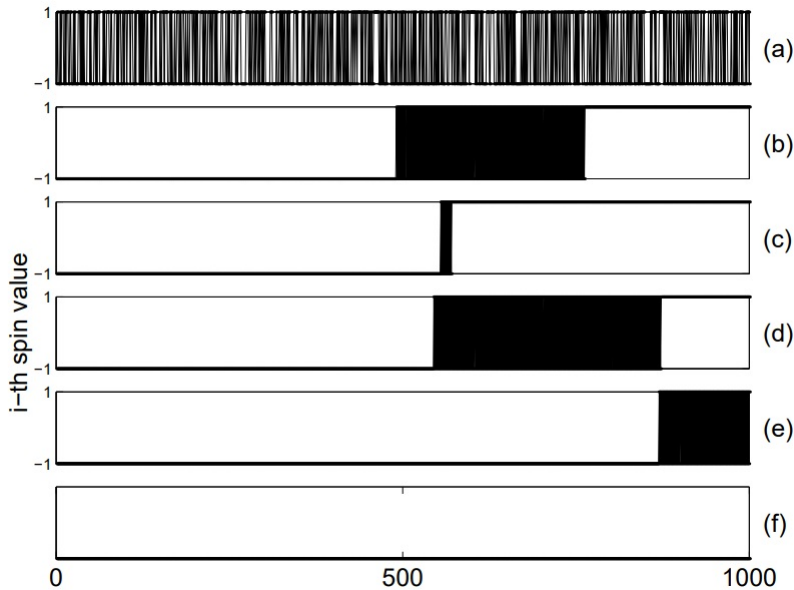


Figura 2.1: Distribuição espacial de variáveis de opinião. (a) estado inicial, (b-e) estados intermediários, (f) estado final. Retirado do artigo original [1].

Definimos a decisão da população como a magnetização da rede, ou seja:

$$m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i \quad (2.1)$$

Na figura 2.2 observamos não só que o modelo se comporta de forma similar aos dados empíricos mas também que, para a configuração atual da rede, as opiniões podem mudar muito rapidamente.

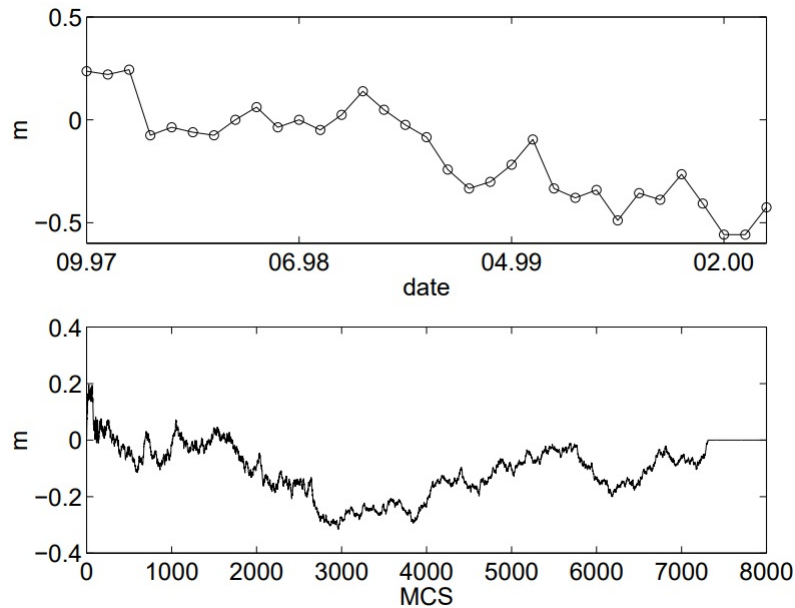


Figura 2.2: Evolução temporal da decisão  $m$ , tomada de dados empíricos (superior) (pergunta: "você acha que o futuro será bom?" para  $N=1100$  adultos) e simulação com  $N=1000$  para um estado inicial aleatório. Retirado do artigo original [1].

A análise do impacto do estado inicial no sistema pode ser observado na figura 2.3

## 2.2 Ruído

Sabemos que a opinião de um indivíduo é influenciada por muito mais fatores que simples contatos um a um, portanto, afim de representar estas variações adiciona-se ao modelo mais uma regra de interação, ou seja, um ruído:



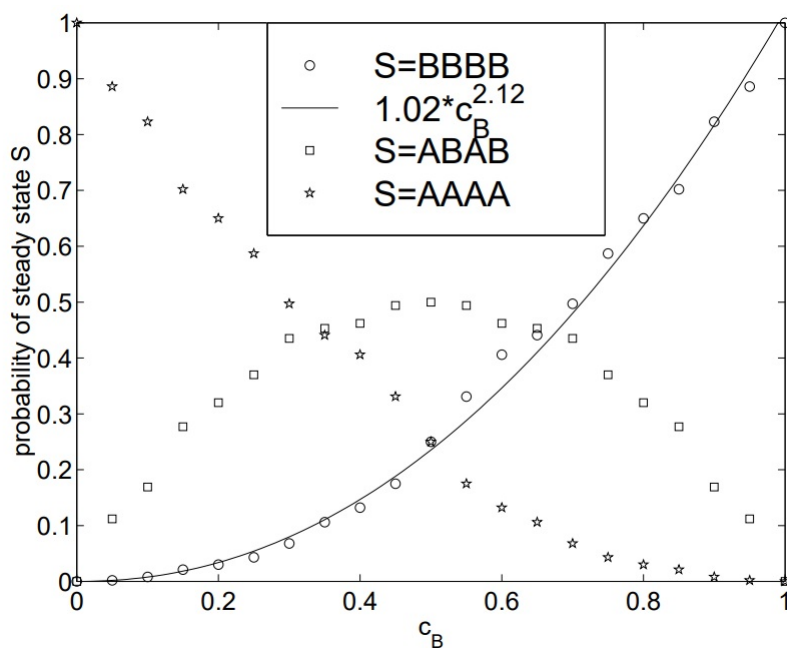


Figura 2.3:  $c_b$  é a densidade inicial de estado B (+1 por exemplo). BBBB representa um estado de equilíbrio onde toda a rede possui a mesma opinião B, AAAA o oposto e ABAB um estado de impasse, onde a sociedade se encontra em um estado completamente incapaz de tomar decisões. Média em 1000 simulações. Retirado do artigo original [1].

-Indivíduos que seriam afetados pela regra do modelo, aqueles selecionados aleatoriamente, irão, com probabilidade  $p$ , tomar uma decisão aleatória. A evolução de um sistema em um estado de consenso (AAAA) é apresentado na figura 2.4.

A partir destes resultados é possível chegar às seguintes conclusões:

- Em uma sociedade fechada somente dois estados são possíveis: ditatorial, onde todos têm a mesma opinião e este não se altera com o tempo, ou um impasse, onde a sociedade se encontra em um estado completamente incapaz de tomar decisões;
- Períodos de grande variabilidade de opiniões são sempre seguidos de períodos de estabilidade;
- São necessários pequenos grupos de uma determinada opinião para que, em virtude de certas coincidências, a sociedade seja capaz de sair de uma situação

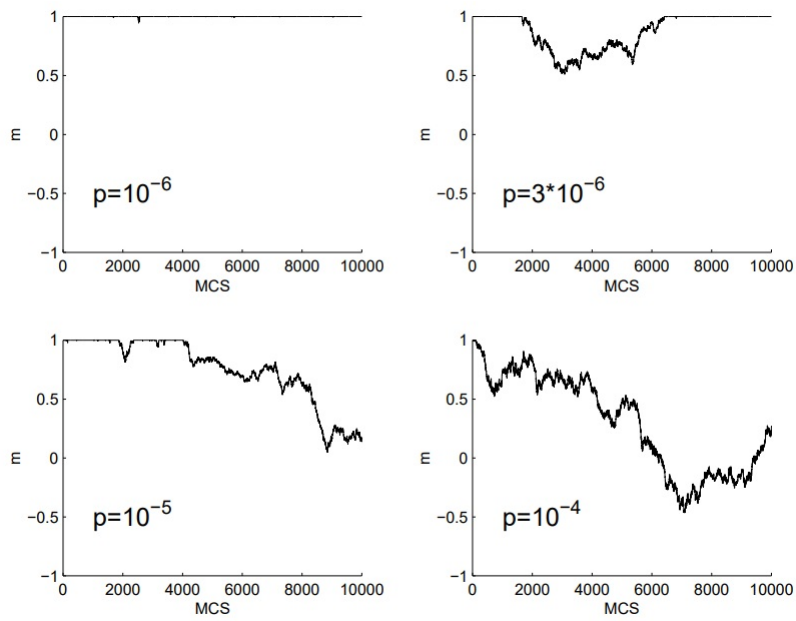


Figura 2.4: Evolução de um sistema em estado inicial de consenso (AAAA) para diferentes probabilidades de ruído  $p$ . Retirado do artigo original [1].

de consenso para um impasse;

- Para que uma determinada opinião ganhe com 50% de certeza são necessários pelo que menos 70% da população tenham esta mesma opinião;

## Capítulo 3

# O Modelo de Sznajd com Anticonformismo

Como visto no capítulo anterior, a ideia de adicionar um ruído ao sistema é algo presente até mesmo no artigo original, portanto, afim de explorar melhor o modelo de Sznajd Piotr Nyczka, Jerzy Cislo e a própria Sznajd[2] investigaram a adição de uma nova regra de interação ao modelo: o anticonformismo que, conforme definido por psicólogos, se refere ao indivíduo que após exposto a determinada informação com a qual ele concorda este muda de opinião espontaneamente. Sendo assim, temos um sistema com as seguintes regras:

- $\uparrow\uparrow\downarrow \rightarrow \uparrow\uparrow\uparrow$ , conformismo com probabilidade  $p_1$
- $\downarrow\downarrow\uparrow \rightarrow \downarrow\downarrow\downarrow$ , conformismo com probabilidade  $p_1$
- $\uparrow\uparrow\uparrow \rightarrow \uparrow\uparrow\downarrow$ , anticonformismo com probabilidade  $p_2$
- $\downarrow\downarrow\downarrow \rightarrow \downarrow\downarrow\uparrow$ , anticonformismo com probabilidade  $p_2$

Onde  $p_1 \in [0, 1]$  e  $p_2 \in [0, 1]$

O modelo é aplicado à uma rede completamente conectada, - ou seja, todos os sítios estão conectados entre si, portanto, a interação ocorre entre quaisquer sítios da

rede e não somente entre vizinhos próximos - um passo de Monte Carlo[13] representa  $N$  aplicações aleatórias da regra, selecionando sítios para a interação também de forma aleatória como anteriormente, e a opinião da população - chamada de decisão - é tomada como a magnetização da rede, isto é,

$$m = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N S_i \quad (3.1)$$

### 3.1 Resultado Analíticos para um Sistema Infinito

Podemos descrever completamente o sistema[2] em seu estado inicial através de sua decisão  $m$ , de forma que,  $N = N_{\uparrow} + N_{\downarrow}$  e  $mN = N_{\uparrow} - N_{\downarrow}$ . Assim podemos derivar a probabilidade, ou densidade, de opiniões favoráveis (+1) para cima  $\uparrow$  como:

$$c = \frac{N_{\uparrow}}{N} = \frac{1 + m}{2} \equiv c \quad (3.2)$$

Portanto, como a probabilidade de que o número de opiniões favoráveis aumente será dada por  $c \rightarrow c + 1/N$ , temos:

$$\begin{aligned} p_{\uparrow\uparrow\downarrow} &= c^2(1 - c) \\ p_{\uparrow\uparrow\uparrow} &= c^3 \\ p_{\downarrow\downarrow\uparrow} &= (1 - c)^2c \\ p_{\downarrow\downarrow\downarrow} &= (1 - c)^3 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Que são as probabilidades de que cada uma das quatro configurações ativas sejam escolhidas. Sendo assim, a probabilidade de que a quantidade de opiniões favoráveis  $\uparrow$  cresça é igual à probabilidade de que a quantidade de opiniões contrárias  $\downarrow$  diminua.

$$\begin{aligned} p_+ &= p_1 p_{\uparrow\uparrow\downarrow} + p_2 p_{\downarrow\downarrow\downarrow} \rightarrow p_+ = p_1 c^2(1 - c) + p_2 (1 - c)^3 \\ p_- &= p_1 p_{\downarrow\downarrow\uparrow} + p_2 p_{\uparrow\uparrow\uparrow} \rightarrow p_- = p_1 (1 - c)^2 c + p_2 c^3 \end{aligned} \quad (3.4)$$

De tal forma que a evolução de  $c$  será dada por:

$$\begin{aligned} c' &= c + \frac{p_+}{N} - + \frac{p_-}{N} \\ &= c + \frac{1}{N}[3(p_1 + p_2)c^2 - 2(p_1 + p_2)c^3 - (p_1 3p_2)c + p_2] \end{aligned} \quad (3.5)$$

Que ao calcularmos os pontos fixos, isto é, onde  $c' = c$ , obtemos:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2} & c_2 &= \frac{(1 + \sqrt{d})}{2} \\ c_3 &= \frac{(1 - \sqrt{d})}{2} & d &\equiv \frac{p_1 + 3p_2}{p_1 + p_2} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Portanto, temos que para  $d < 0 \rightarrow r \equiv \frac{p_1}{p_2} > \frac{1}{3}$  há apenas uma solução para a eq. (3.5):  $c_1$ . Enquanto que para  $d \geq 0 \rightarrow r \equiv \frac{p_1}{p_2} \leq \frac{1}{3}$  existem duas solução estáveis  $c = c_2$  e  $c = c_3$ , de forma que a solução  $c = c_1$  se torna instável. O que nos leva aos estados finais, de equilíbrio, para a decisão:

$$\begin{aligned} m_{st} = m_{\pm} &= \sqrt{d}, r < \frac{1}{3} \\ m_{st} = m_0 &= 0, r \geq \frac{1}{3} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Por fim, se tomarmos  $F = p_+ - p_-$  como uma forma efetiva que leva o sistema para o estado de opiniões favoráveis (+1), podemos calcular um potencial efetivo cujo resultado pode ser visto na figura 3.1 e condiz com o que foi demonstrado anteriormente.

## 3.2 Resultados Analíticos para o Sistema Finito

Reescrevendo as eq. em (3.3) em função de  $N$ , temos:

$$\begin{aligned} p_{\uparrow\uparrow\downarrow} &= \frac{N_{\uparrow}}{N} \cdot \frac{N_{\uparrow} - 1}{N - 1} \cdot \frac{N_{\downarrow}}{N - 2} \\ p_{\uparrow\uparrow\uparrow} &= \frac{N_{\uparrow}}{N} \cdot \frac{N_{\uparrow} - 1}{N - 1} \cdot \frac{N_{\downarrow} - 2}{N - 2} \\ p_{\downarrow\downarrow\uparrow} &= \frac{N_{\downarrow}}{N} \cdot \frac{N_{\downarrow} - 1}{N - 1} \cdot \frac{N_{\uparrow}}{N - 2} \\ p_{\downarrow\downarrow\downarrow} &= \frac{N_{\downarrow}}{N} \cdot \frac{N_{\downarrow} - 1}{N - 1} \cdot \frac{N_{\uparrow} - 2}{N - 2} \end{aligned} \quad (3.8)$$

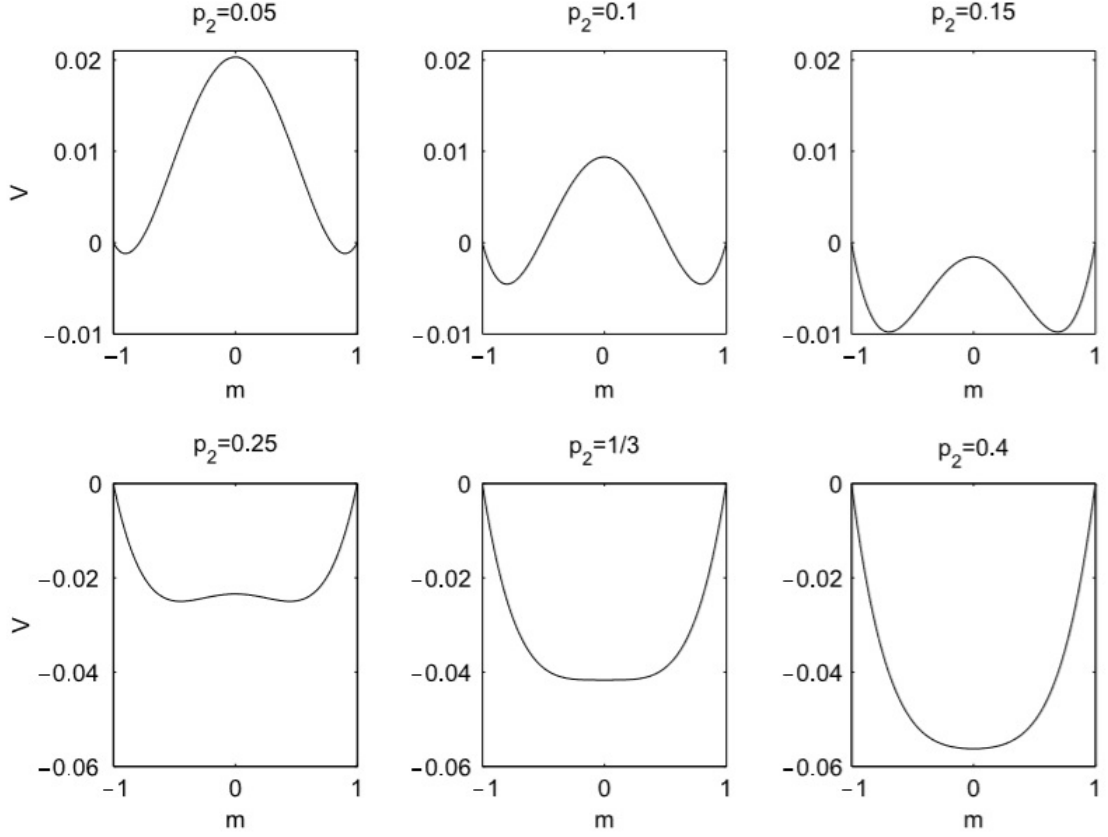


Figura 3.1: Potencial efetivo x Decisão  $m$  para diversos valores de  $p_2$ . Retirado do artigo original [14].

Que, usando (3.4) nos permite encontrar as probabilidade de transição,

$$\begin{aligned}
 p_+ &= \frac{p_1 N_\uparrow (N_\uparrow - 1) N_\downarrow + p_2 N_\downarrow (N_\downarrow - 1) (N_\downarrow - 2)}{N(N-1)(N-2)} \\
 p_- &= \frac{p_1 N_\downarrow (N_\downarrow - 1) N_\uparrow + p_2 N_\uparrow (N_\uparrow - 1) (N_\uparrow - 2)}{N(N-1)(N-2)} \\
 p_0 &= 1 - (p_+ + p_-)
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Agora, como  $N_\uparrow = \frac{1+m}{2}N$  e  $N_\downarrow = \frac{1-m}{2}N$  podemos reescrever as probabilidade (3.9) em função de  $m$  e, assim, podemos escrever a função densidade de probabilidade da magnetização - decisão - ao longo do tempo  $P(m, t)$ . Primeiramente, definimos:

$$\rho(m) = \frac{p_+ + p_-}{2} \quad (3.10)$$

$$F(m) = p_+(m) - p_-(m)$$

Logo,

$$\begin{aligned} P(m, t + \delta_t) - P(m, t) &= [\rho(m + \delta_N)P(m + \delta_N, t) + \rho(m - \delta_N)P(m - \delta_N, t) - 2\rho(m)P(m, t)] \\ &\quad - [F(m + \delta_N)P(m + \delta_N, t) - F(m - \delta_N)P(m - \delta_N, t)]/2 \end{aligned} \quad (3.11)$$

Que é possível ser aproximado para o caso  $1 \ll N < \infty$  por:

$$\frac{1}{N} \frac{\partial}{\partial t} P(m, t) = \frac{4}{N^2} \frac{\partial^2}{\partial m^2} (\rho P(m, t)) - \frac{2}{N} \frac{\partial}{\partial m} (F P(m, t)) \quad (3.12)$$

Que é uma equação de Fokker-Planck com coeficiente de difusão  $\rho = (p_1 + p_2)/8 + (3p_2 - p_1)m^2/8$ , deriva  $F = -2m\rho$  e solução para o caso estacionário dado por:

$$P(m) = \frac{C}{\rho} \exp \int \frac{NF}{2\rho} dm \quad (3.13)$$

Que possui duas soluções qualitativas de acordo com  $d$  (3.6):

- Para  $d = 0$ :

$$P(m) = C \exp(-Nm^4/4) \quad (3.14)$$

- Para  $d > 0$ :

$$P(m) = \frac{C(1 - dm^2)^{(d-2-1)N/2}}{1 - dm^2} \exp(Nm^2/2d) \quad (3.15)$$

$P(m)$ , como esperado de 3.7, possui dois máximos  $m_{max} = \pm \sqrt{d + 2/N}$ .

### 3.3 Simulações de Monte Carlo para o Modelo

Utilizando simulações de Monte Carlo[13] em uma rede totalmente conectada - onde as interações entre sítios são de grande alcance o que, em prática, significa que

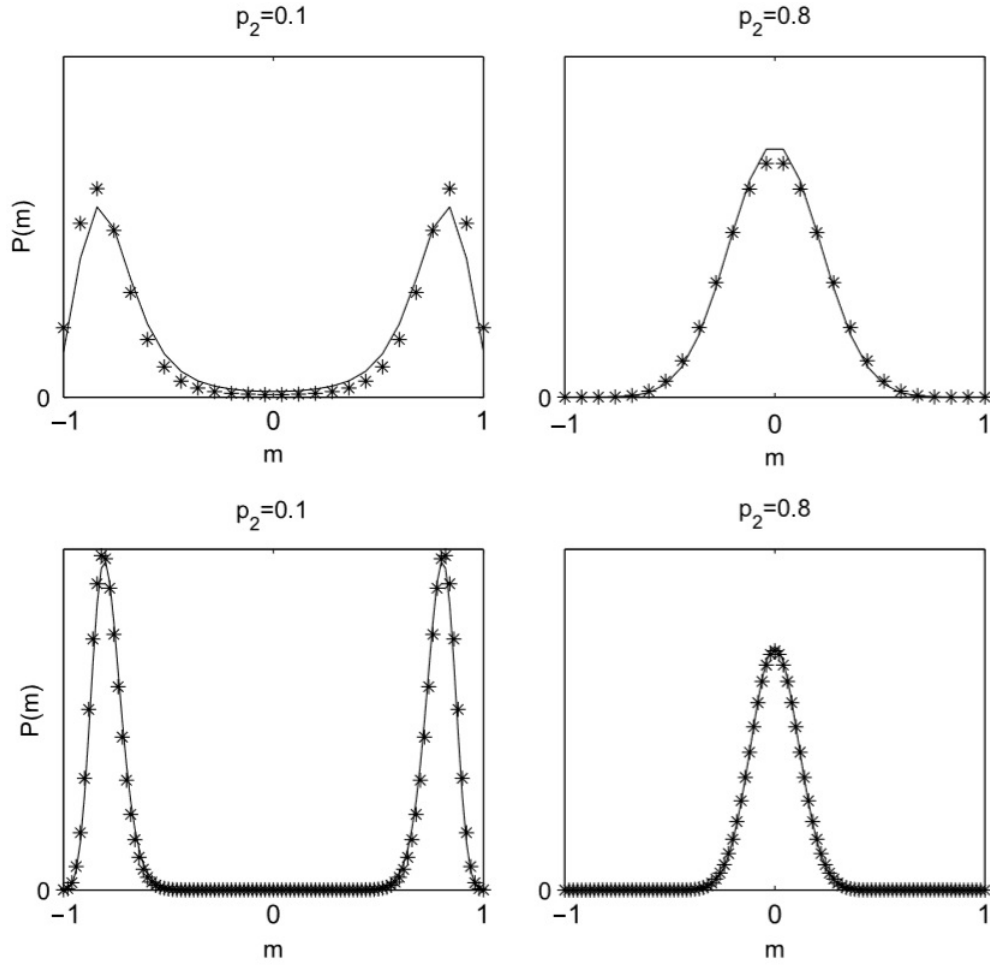


Figura 3.2: Densidade de probabilidade de magnetização/decisão da solução analítica 3.15 (linha sólida) e resultado obtido a partir da solução numérica da equação mestre 3.11 para  $N = 25$  (acima) e  $N = 100$  (abaixo), com  $p_1 = 1$ . Retirado do artigo original [2]

”todos estão conectados à todos- para valores de  $N \in [50, 200]$ ,  $p_1 = 1$  e  $p_2 \in [0, 1]$  pois os resultados analíticos nos mostram que o sistema é regulado pela relação  $r = \frac{p_2}{p_1}$ , o que permite analisar o sistema sem perda nenhuma de generalidade com apenas uma variável. Além disso, desta forma podemos verificar o caso onde  $p_2 = 0$  o que nos retorna ao modelo de Sznajd original[2]. Na figura 3.3 podemos ver que para baixos valores de anti-conformismo temos transições espontâneas entre dois estados estáveis, enquanto que para altos valores de anti-conformismo estados estáveis começam a desaparecer.



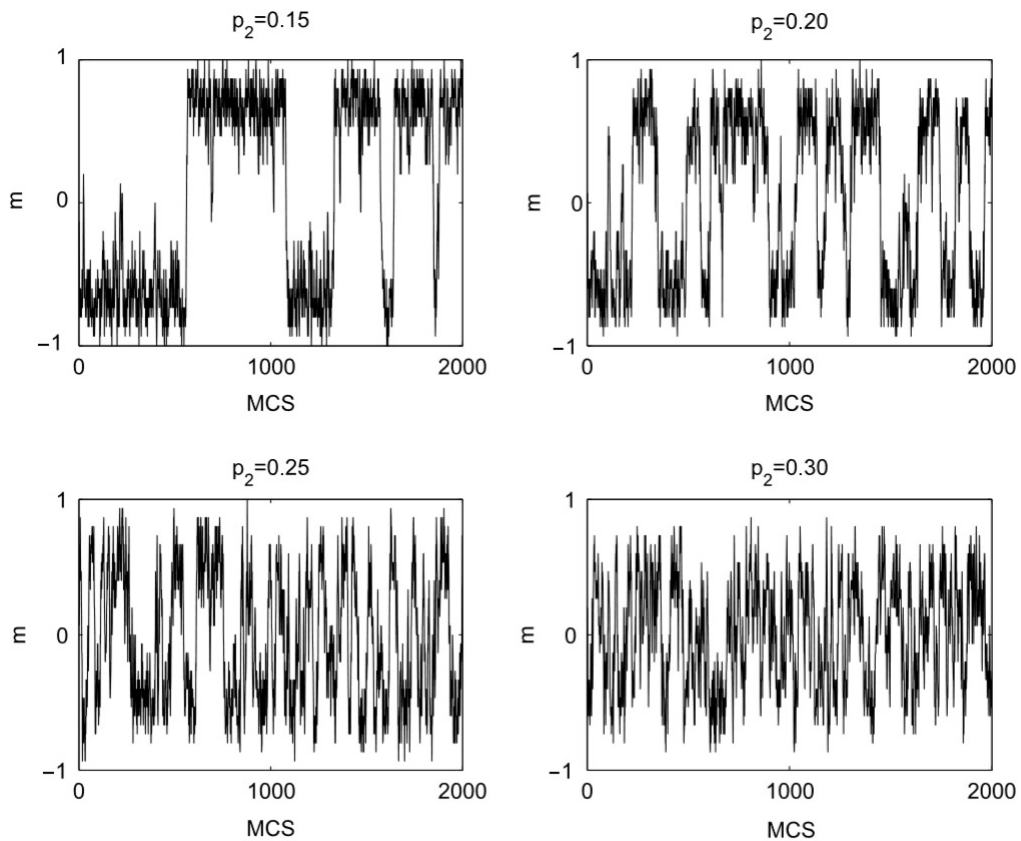


Figura 3.3: Evolução da opinião pública ( $m$ ) para diferentes valores de anti-conformismo. Retirado do artigo original [2].

Já na figura 3.4 vemos que o comportamento da densidade de opinião para diferentes valores de  $N$  condiz com os resultados analíticos.

Por fim, podemos ver na figura 3.5 que existe uma transição de fase contínua ( $p_2 \in [0, 1/3]$ ) onde, conforme a figura 3.3, transições espontâneas ocorrem entre os dois estados estáveis até  $p_2$  atingir, como previsto pelos resultados analíticos,  $1/3$  onde o sistema para de oscilar, ou seja, a população chega a um impasse.

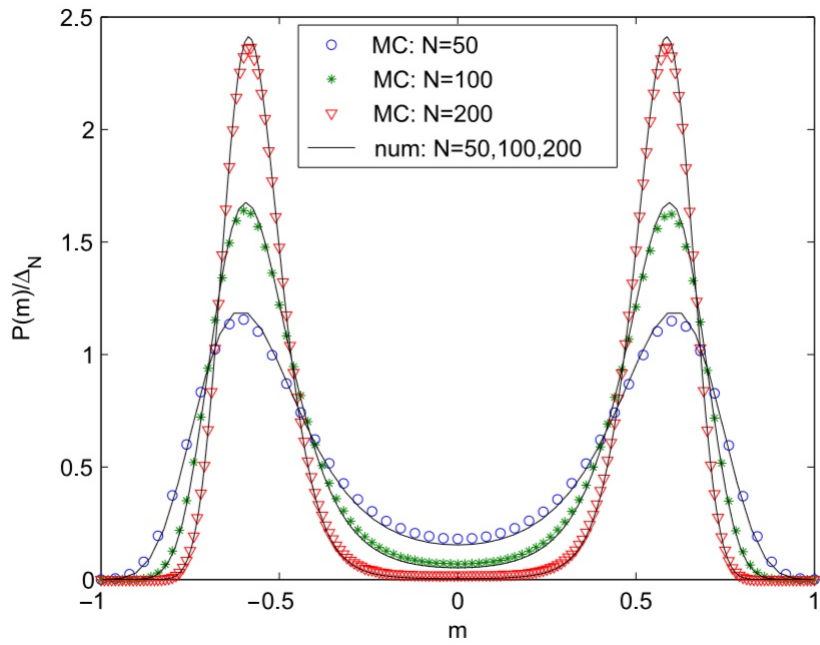


Figura 3.4: Evolução da densidade de opiniões para  $p_2 = 0.2$ . Retirado do artigo original [2].

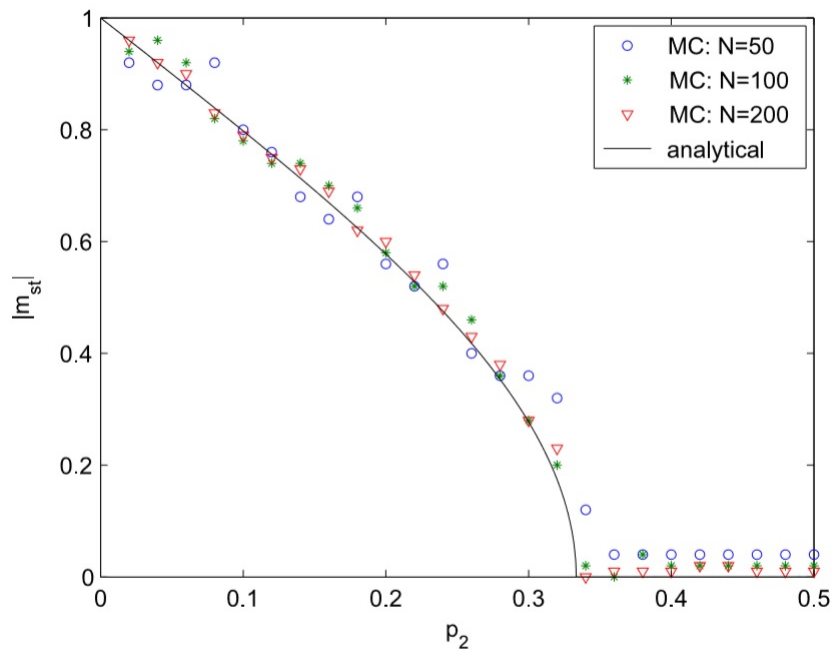


Figura 3.5: Evolução da opinião pública - decisão - absoluta para diversos valores de  $p_2$ . Retirado do artigo original [2].

# Capítulo 4

## Resultados

Neste capítulo apresentamos a análise dos expoentes críticos do modelo de Sznajd para dois casos conhecidos e estudados: O campo médio[2] e a rede quadrada[7], ambos com anti-conformismo. Em seguida apresentamos os resultados para a rede cúbica e analisamos a universalidade no modelo.

De modo geral, como já apresentado na seção 1.3, determinamos em que ponto ocorre a transição de fase (ponto crítico) através do parâmetro de ordem e das mudanças de comportamento das grandezas físicas em suas proximidades e que, em particular para o caso de sistemas de tamanho finito, o cumulante de Binder[12] ( $U$ ) é uma ótima ferramenta para encontrarmos o ponto onde ocorre esta transição devido ao fato de possuir um único valor no ponto crítico independente do tamanho  $L$ , o que nos permite usá-lo para determinar onde ocorre a transição de fase simplesmente analisando curvas para diversos tamanhos de rede e observando onde estas se cruzam.

$$U = 1 - \frac{1}{3} \left( \frac{\langle m^4 \rangle}{\langle m^2 \rangle^2} \right) \quad (4.1)$$

Com o ponto crítico determinado podemos analisar os expoentes críticos  $\nu$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  através do próprio cumulante ( $\nu$ ), da magnetização/decisão ( $\beta$ ) e da susceptibilidade ( $\gamma$ ).

Para  $\nu$  temos que, de forma similar ao apresentado para  $\chi$  na seção 1.3,

$$U_L = \tilde{U}_L(L^{1/\nu}\xi^{-1/\nu}) \quad (4.2)$$

Que podemos, seguindo os mesmo passos da seção 1.3, reescrever de outra maneira afim de remover a dependência explícita com o tamanho  $L$  e com o parâmetro de ordem  $\xi$ , que para este caso toma a forma  $(P_2 - P_{2c})$ , da seguinte forma:

$$U_L \sim (P_2 - P_{2c}).L^{1/\nu} \quad (4.3)$$

Desta forma traçamos (4.3) e procuramos qual o valor de  $\nu$  que faz com que, próximo do ponto crítico, as curvas do cumulante colapsem umas sobre as outras. Com o valor de  $\nu$  podemos analisar  $\chi$  e  $m$  em busca de  $\gamma$  e  $\beta$ . Primeiro calculamos  $\chi$  da seguinte maneira:

$$\chi = N(\langle m^2 \rangle - \langle m \rangle^2) \quad (4.4)$$

E, como visto em 1.23, temos que:

$$\chi \sim L^{\gamma/\nu} \tilde{\chi}(L^{1/\nu}\xi^{-1/\nu}) \quad (4.5)$$

$$\chi.L^{-\gamma/\nu} \sim |P_2 - P_{2c}|.L^{1/\nu} \quad (4.6)$$

Desta forma traçamos (4.6) e procuramos qual o valor de  $\gamma$  que faz com que, próximo do ponto crítico, as curvas da susceptibilidade colapsem.

Similarmente para  $m$ :

$$|m|.L^{\beta/\nu} \sim |P_2 - P_{2c}|.L^{1/\nu} \quad (4.7)$$

## 4.1 Campo Médio com Anti-conformismo

Como visto no capítulo 3 a transição de fase do sistema depende da relação  $r = \frac{p_2}{p_1}$  e, como demonstrado tanto analiticamente quanto numericamente, ocorre

quando  $r = 1/3$ , portanto, neste capítulo demonstraremos que os resultados numéricos condizem com os analíticos, apresentados na seção 3.1, e analisaremos os expoentes críticos para este caso[2].

Uma vez que já conhecemos onde encontra-se o ponto crítico, devido aos resultados analíticos (3.1), basta encontrarmos os expoentes críticos. Nas figuras (4.1-4.3) apresentamos os colapsos dos resultados das simulações com diferentes tamanhos de rede para o campo médio em função  $L$  (tamanho da rede). As simulações são feitas com condições periódicas de contorno, rede totalmente conectada e toma-se  $2 \times 10^4$  passos de Monte Carlo[13] aleatórios para que o sistema atinja o estado estacionário e em seguida são feitas  $2 \times 10^4$  medidas. Inicia-se a população com 50% dos sítios a favor (+1) e 50% contra. A média é tomada sobre 200 simulações.

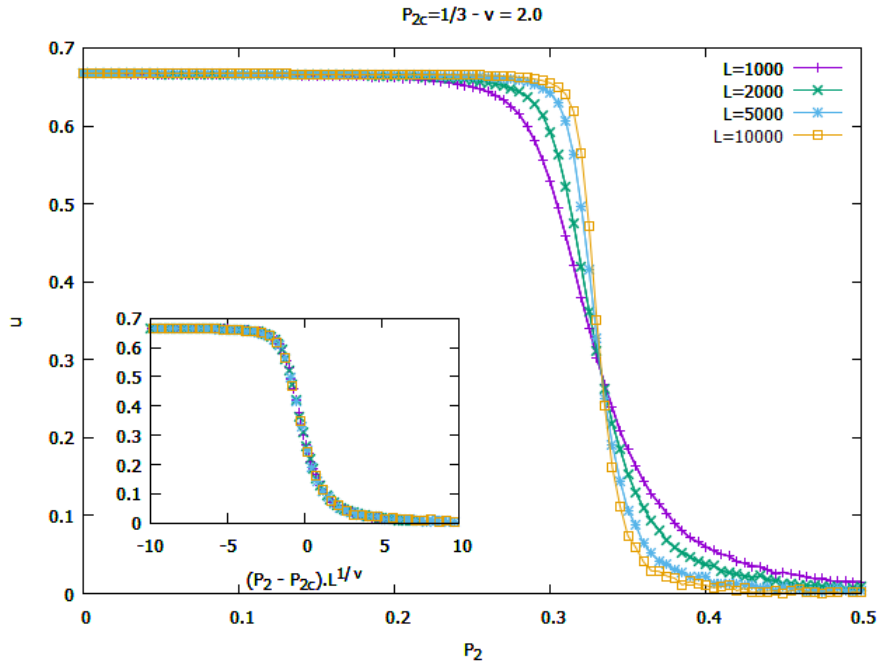


Figura 4.1: Colapso do cumulante ( $U$ ) para o campo médio;  $P_{2Critico} = 1/3$  ;  $\nu = 2$ .

Como explicado na seção 1.3 e no início do capítulo, os expoentes críticos serão aqueles que gerarem o colapso das curvas geradas das quantidades mostradas em (4.3) de onde obtemos  $\nu$ , (4.6) de onde obtemos  $\gamma$ , e (4.7) de onde obtemos  $\beta$ .

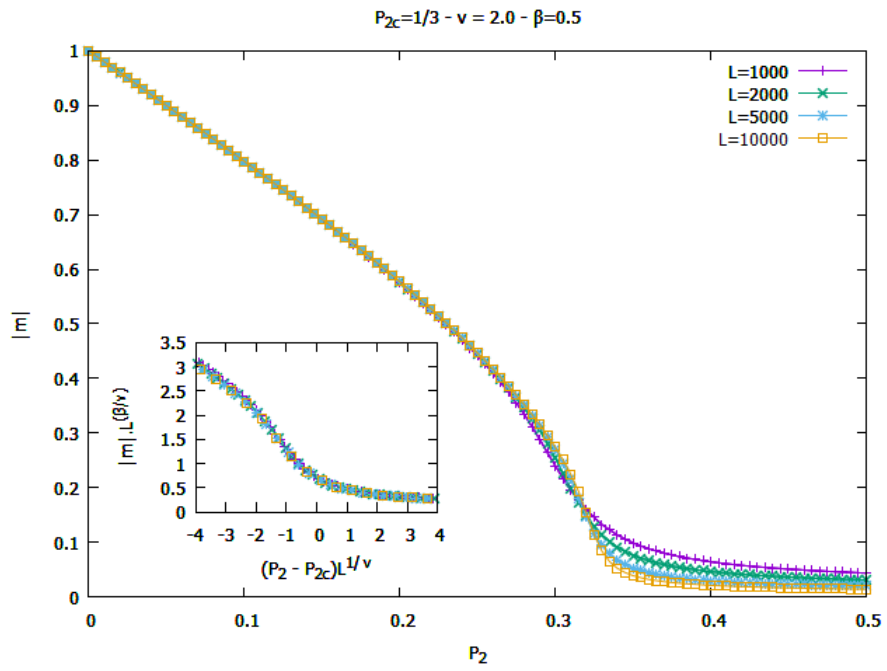


Figura 4.2: Colapso da Decisão absoluta ( $|m|$ ) para o campo médio;  $\nu = 2$ ;  $\beta = 1/2$ .

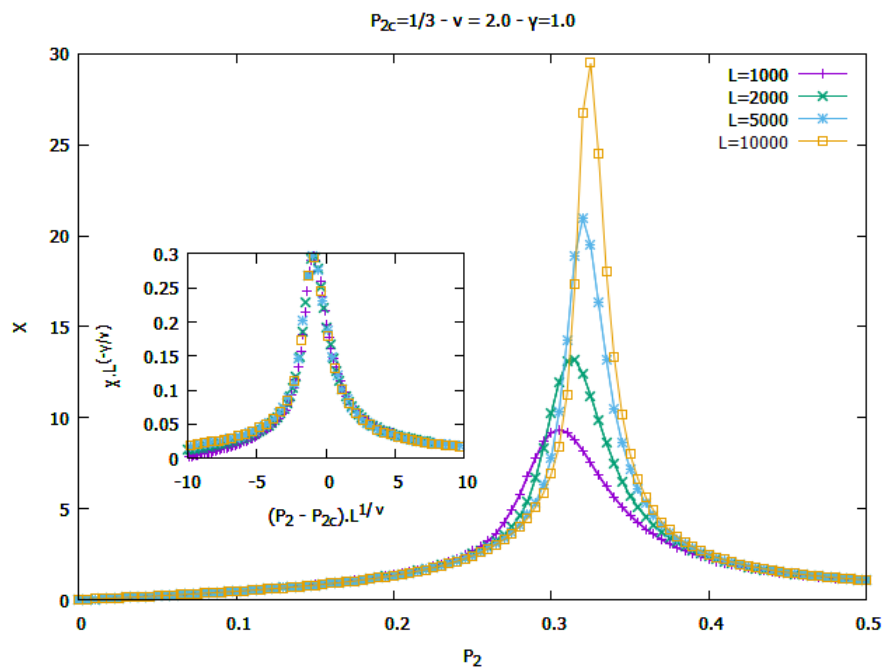


Figura 4.3: Colapso da Susceptibilidade ( $\chi$ ) para o campo médio;  $\nu = 2$ ;  $\gamma = 1.0$ .

Os resultados obtidos foram:  $\nu = 2.0$ ,  $\beta = 0.5$  e  $\gamma = 1.0$ .

## 4.2 Rede Quadrada com Anti-conformismo

Seguindo os mesmo passos da seção anterior (4.1) e tomando como referência [7], apresentamos aqui os resultados dos colapsos para uma rede quadrada de primeiros vizinhos e condições periódicas de contorno. Aqui, consideramos apenas interações de curto alcance, ou seja, somente os primeiros vizinhos - os quatro diretamente conectados a  $S_i$  ( $S_{i+1,j}$ ,  $S_{i-1,j}$ ,  $S_{i,j+1}$  e  $S_{i,j-1}$ ) - após selecionarmos um sítio, selecionamos aleatoriamente outros dois, dentre os quatro conectados a este, para aplicarmos a regra de interação. As simulações foram feitas com os seguintes parâmetros:

- $L = 40$  ( $N = L^2$ )  $\rightarrow 3 \times 10^4$  passos de Monte Carlo para atingir o estado estacionário;  $10^4$  medidas; Média tomada sobre 200 simulações.
- $L = 60$  ( $N = L^2$ )  $\rightarrow 3 \times 10^4$  passos de Monte Carlo para atingir o estado estacionário;  $10^4$  medidas; Média tomada sobre 160 simulações.
- $L = 80$  ( $N = L^2$ )  $\rightarrow 5 \times 10^4$  passos de Monte Carlo para atingir o estado estacionário;  $2 \cdot 10^4$  medidas; Média tomada sobre 120 simulações.
- $L = 100$  ( $N = L^2$ )  $\rightarrow 1 \times 10^5$  passos de Monte Carlo para atingir o estado estacionário;  $2 \times 10^4$  medidas; Média tomada sobre 100 simulações.

Para este caso, uma vez que não temos resultados analíticos para uma rede quadrada[7], precisamos primeiramente encontrar o ponto crítico, portanto, como explicado na seção 1.3 e no início do capítulo basta analisarmos os resultados para o cumulante ( $U$ ) em busca do ponto onde todas as curvas se cruzam. Para os expoentes o procedimento é o mesmo que o da seção anterior. Os resultados são mostrados nas figuras 4.8 à 4.11.

Os resultados obtidos foram:  $P_{2Critico} = 0.9675$ ,  $\nu = 1.0$ ,  $\beta = 0.125$  e  $\gamma = 1.75$ .

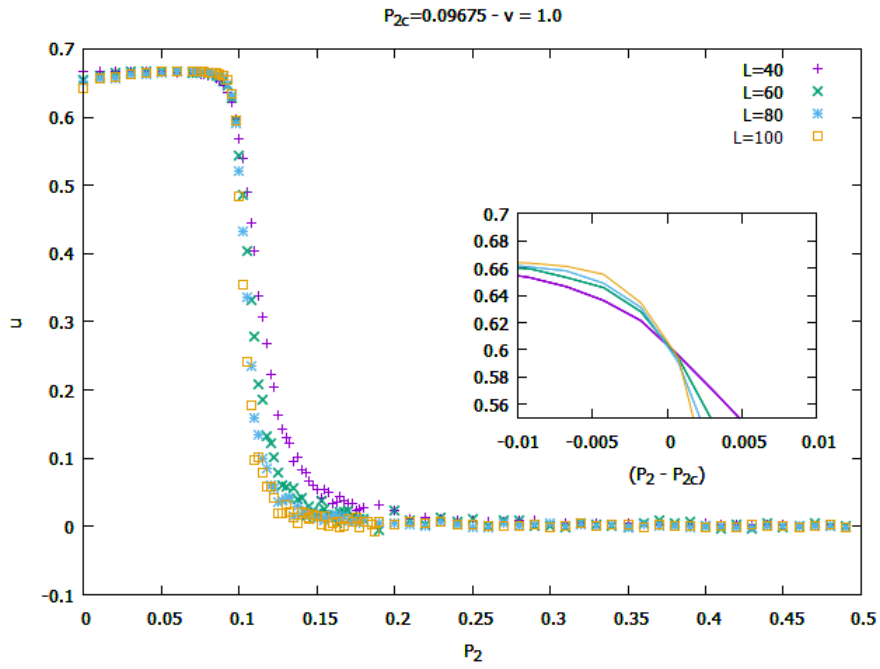


Figura 4.4: Cumulante ( $U$ ) e Ponto Crítico  $P_{2Crítico}$  para a rede quadrada ;  $P_{2Crítico} = 0.09675$ .

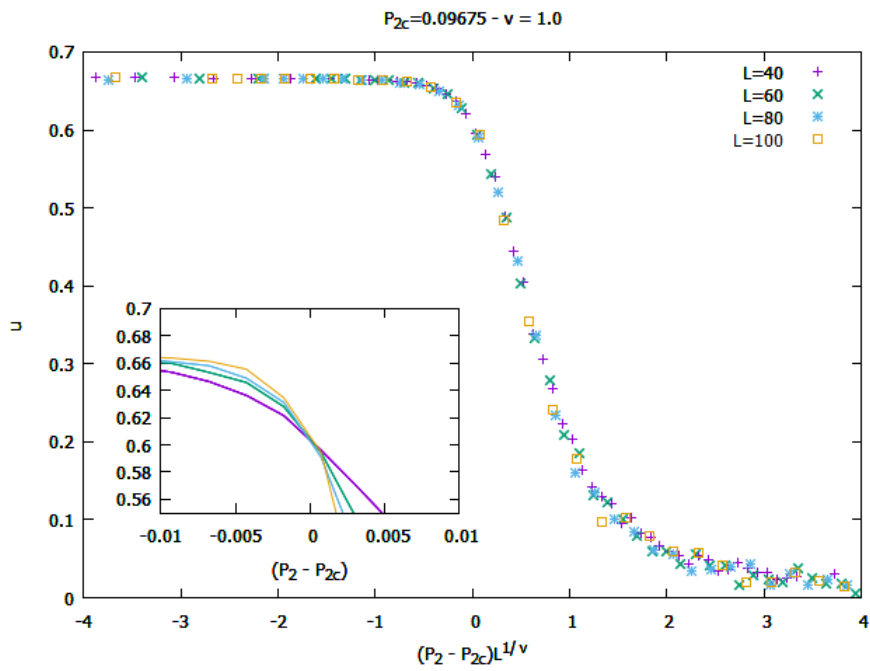


Figura 4.5: Colapso do Cumulante ( $U$ ) para a rede quadrada;  $P_{2Crítico} = 0.09675$ ;  $\nu = 1.0$



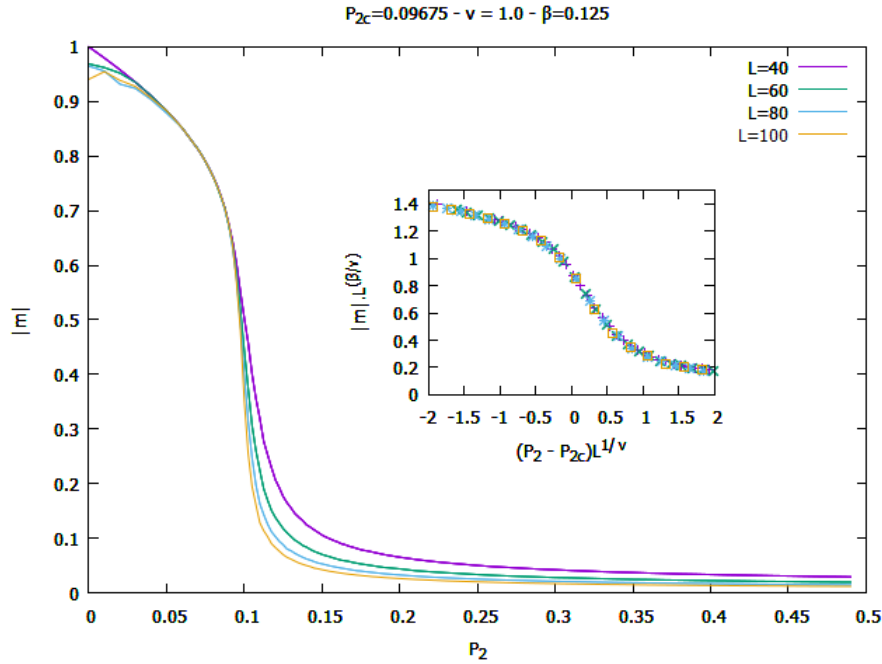


Figura 4.6: Colapso da Decisão absoluta  $|m|$  para a rede quadrada;  $P_{2Critico} = 0.09675$  ;  $\nu = 1$ ;  $\beta = 0.125$

### 4.3 Rede Cúbica com Anti-Conformismo

Seguimos exatamente os mesmo passos e procedimentos da seção anterior fazemos as simulações para a rede cúbica com condições periódicas de contorno, anti-conformismo e considerando apenas primeiros vizinhos, que aqui são seis ( $S_{i+1,j,k}$ ,  $S_{i-1,j,k}$ ,  $S_{i,j+1,k}$ ,  $S_{i,j-1,k}$ ,  $S_{i,j,k+1}$  e  $S_{i,j,k-1}$ ). As simulações foram feitas com os seguintes parâmetros:

- $L = 10$  ( $N = L^3$ )  $\rightarrow 4 \times 10^4$  passos de Monte Carlo para atingir o estado estacionário;  $4 \times 10^4$  medidas; Média tomada sobre 200 simulações.
- $L = 16$  ( $N = L^3$ )  $\rightarrow 5 \times 10^4$  passos de Monte Carlo para atingir o estado estacionário;  $4 \times 10^4$  medidas; Média tomada sobre 175 simulações.
- $L = 24$  ( $N = L^3$ )  $\rightarrow 6 \times 10^4$  passos de Monte Carlo para atingir o estado estacionário;  $4 \times 10^4$  medidas; Média tomada sobre 150 simulações.

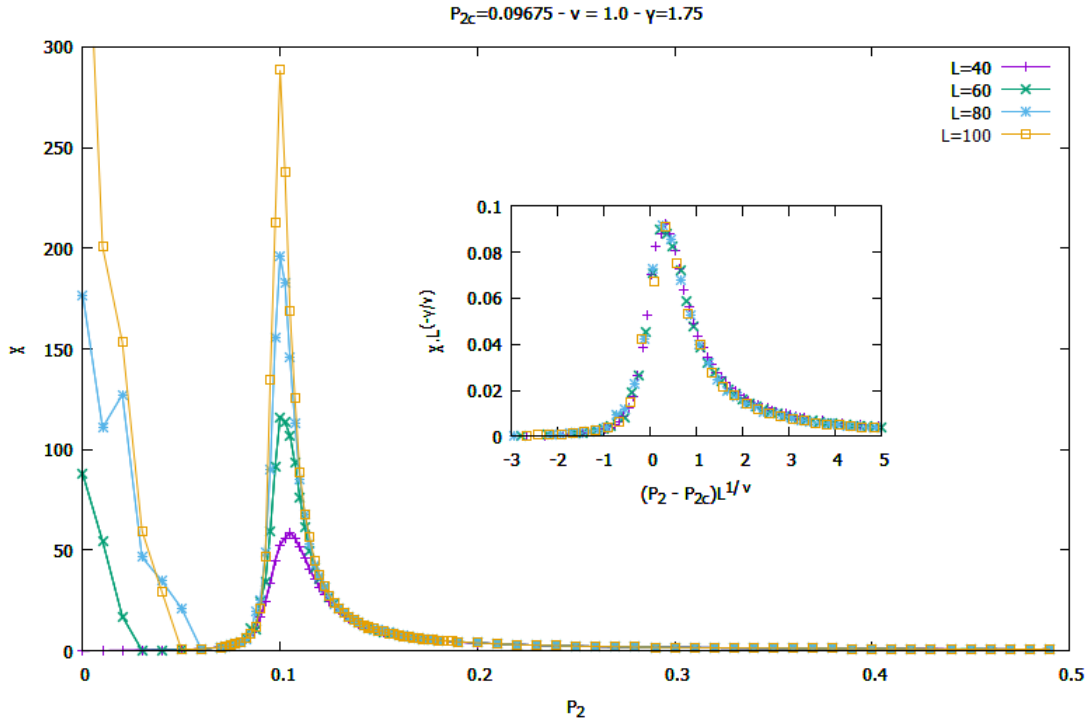


Figura 4.7: Colapso da Susceptibilidade  $\chi$  para a rede quadrada;  $P_{2c} = 0.09675$  ;  $\nu = 1$ ;  $\gamma = 1.75$

- $L = 30$  ( $N = L^3$ )  $\rightarrow 7 \times 10^4$  passos de Monte Carlo para atingir o estado estacionário;  $4 \times 10^4$  medidas; Média tomada sobre 125 simulações.

Os resultados obtidos foram:  $P_{2c} = 0.197$ ,  $\nu = 0.63$ ,  $\beta = 0.32$  e  $\gamma = 1.24$ .

## 4.4 A Classe de Universalidade do Modelo de Sznajd

Portanto, comparando os resultados (4.1) com a tabela 1.1, vemos que os expoentes do modelo de Sznajd com anti-conformismo encontram-se dentro das margens de erro dos expoentes referentes ao modelo de Ising[11] colocando-o, assim, na mesma classe de universalidade.

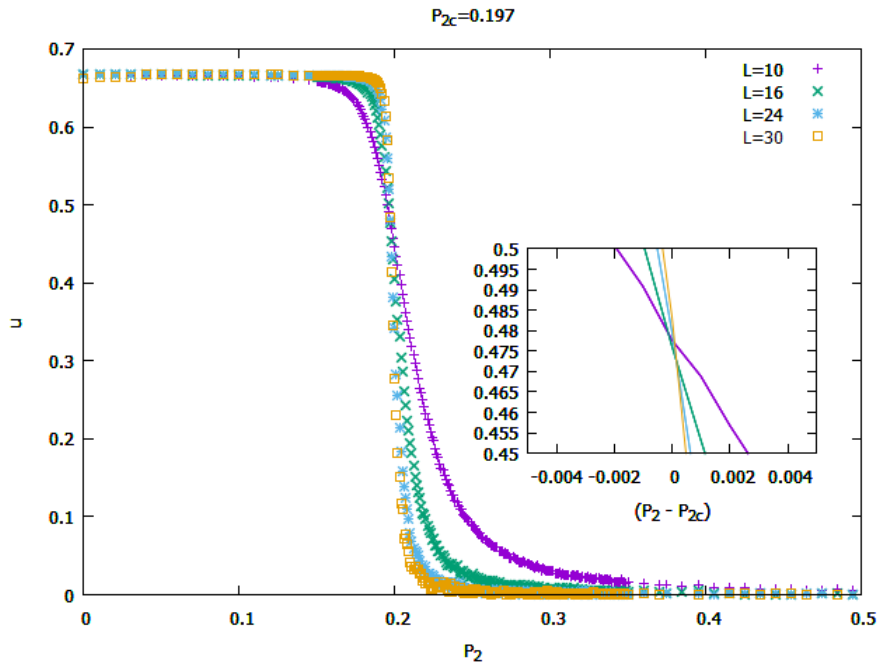


Figura 4.8: Cumulante ( $U$ ) e Ponto Crítico  $P_{2Crítico}$  para a rede cúbica ;  $P_{2Crítico} = 0.197$ .

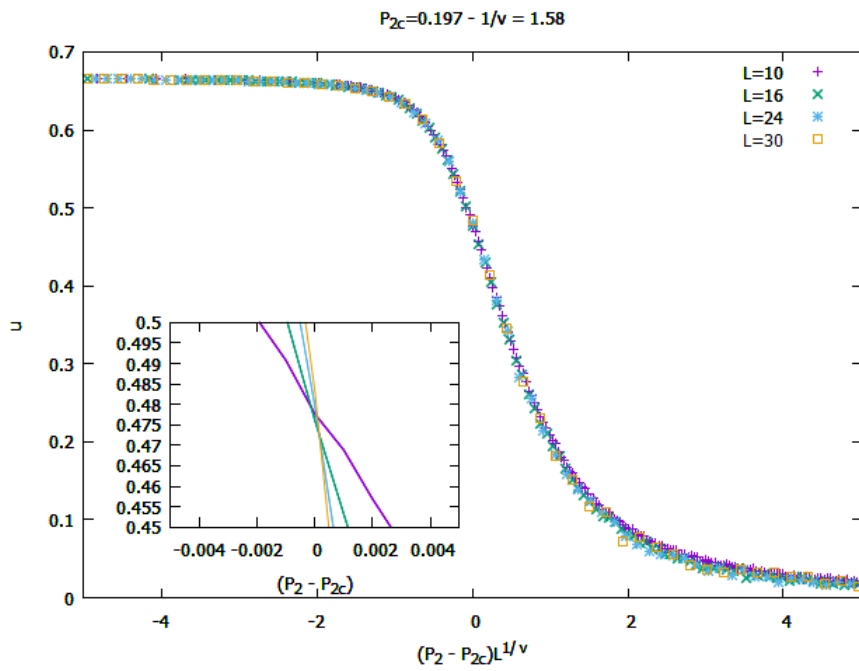


Figura 4.9: Colapso do Cumulante ( $U$ ) para a rede cúbica;  $P_{2Crítico} = 0.197$ ;  $1/\nu = 1.58$

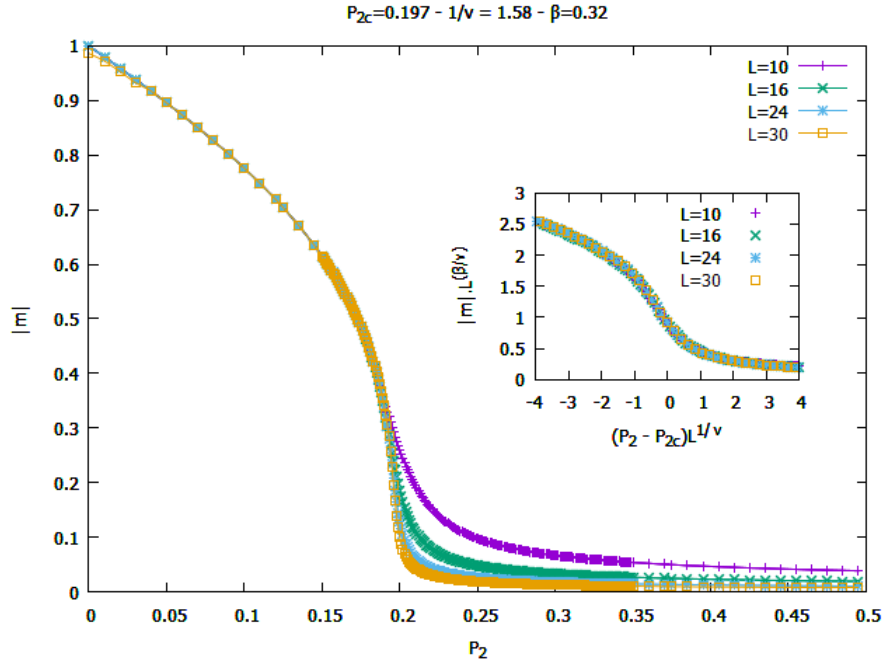


Figura 4.10: Colapso da Decisão absoluta  $|m|$  para a rede cúbica;  $P_{2Criticalo} = 0.197$  ;  $1/\nu = 1.58$ ;  $\beta = 0.32$

Dimensão	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\nu$
2D	0	0.125	1.75	1.0
3D	0.12	0.32	1.24	0.63
Campo Médio	0	1/2	1	2

Tabela 4.1: Resultados.

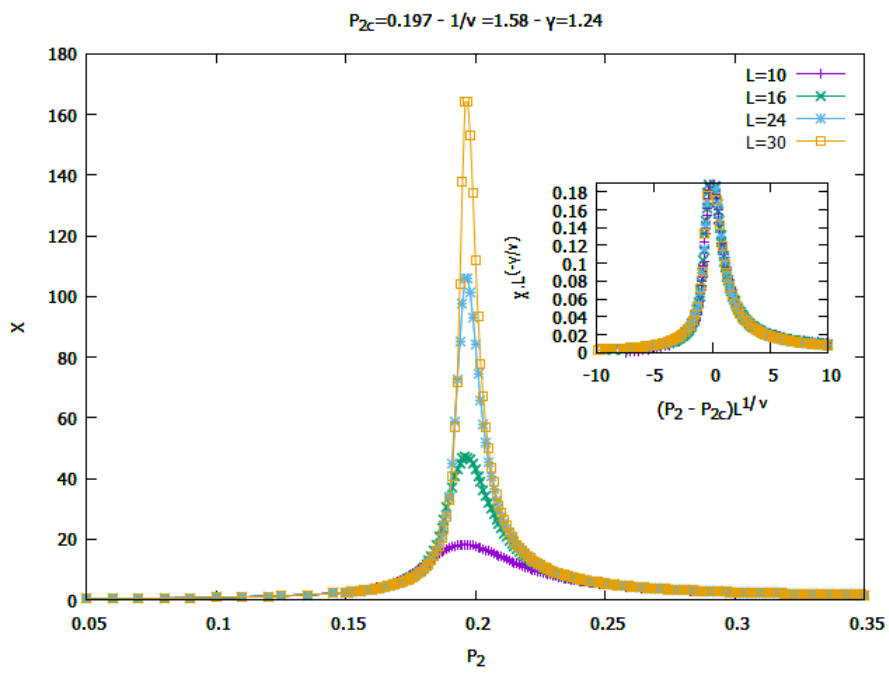


Figura 4.11: Colapso da Susceptibilidade  $\chi$  para a rede cúbica;  $P_{2Criticalo} = 0.197$  ;  $1/\nu = 1.58$ ;  $\gamma = 1.24$

# Capítulo 5

## Conclusões

Nesta dissertação estudamos através de simulações computacionais os comportamentos críticos de um modelo de opiniões binárias ( $S_i = \pm 1$ ), o modelo de Sznajd[1], com dois tipos diferentes de interações: o conformismo e o anticonformismo [2],[5]. Para isto, discutimos o que são os efeitos críticos[9], qual o processo necessário para a análise deles em escalas finitas, o que são classes de universalidade [8] e apresentamos o modelo com e sem anticonformismo[2], assim como todos os resultados necessários já conhecidos da literatura [7]. Enfim, simulamos o modelo nas redes totalmente conectada, quadrada e cúbica e estimamos, utilizando a análise de tamanho finito, os pontos críticos e os expoentes críticos para cada um dos casos. Por fim, nossos resultados finais sugerem que o modelo, em todas as três dimensões estudadas, encontra-se na classe de universalidade de Ising [11].

Futuramente, uma vez que conhecemos uma grande variedade de diferentes comportamentos de grupo - como indivíduos de atitudes independentes, inflexíveis e oportunistas -, seria interessante verificar quais mudanças estes comportamentos gerariam na formação de opiniões. Além disso, aplicar o modelo a redes mais complexas - como redes livres de escala, por exemplo - pode nos dar um nível maior de compreensão sobre as dinâmicas do mundo real.

# Bibliografia

- [1] Katarzyna Sznajd-Weron and Józef Sznajd. Opinion evolution in closed community. *International Journal of Modern Physics*, 11:1157–1165, 2000.
- [2] Jerzy Cislo Piotr Nyczka and Katarzyna Sznajd-Weron. Opinion dynamics as a movement in a bistable potential. *Physica A*, 391:317–327, 2011.
- [3] David M. Buss. *The Hand Book for Evolutionary Psychology*. John Wiley & Sons, 2005.
- [4] Thomas C. Schelling. Models of segregation. *The American Economic Review*., 59:488–493, 1969.
- [5] R.H. Willis. Conformity, independence and anticonformity. *Human Relations*, 18:373–388, 1965.
- [6] M. Tabiszewski<sup>1</sup> K. Sznajd-Weron<sup>1</sup> and A. M. Timpanaro. Phase transition in the sznajd model with independence. *EPL (Europhysics Letters)*, 96:48002, 2011.
- [7] A. O. Sousa D. Stauffer and S. Moss de Oliveira. Generalization to square lattice of sznajd socipysics model. *International Journal of Modern Physics*, 11:1239–1245, 2000.
- [8] J. Marro and R. Dickman. *Nonequilibrium Phase Transitions in Lattice Models*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

- [9] H. Eugene Stanley. *Introduction to Phase Transition and Critical Phenomena*. Clarendon Press - Oxford, Boston, 1971.
- [10] Sílvio R. A. Salinas. *Introdução a Física Estatística*. Editora da USP, São Paulo, 2005.
- [11] Ludwig Neise Walter Greiner and Horst Stöcker. *Thermodynamics and Statistical Mechanics*. Springer, Frankfurt, 1995.
- [12] K. Binder. *Z. Phys.B*, 43:119, 1981.
- [13] Claudio Scherer. *Métodos Computacionais da Física*. Livraria da Física, São Paulo, 2005.
- [14] F. Slanina<sup>1</sup> and H. Lavicka. Analytical results for the sznajd model of opinion formation. *European Physical Journal B*, 35:279–288, 2003.
- [15] Nuno Crokidakis and Paulo Murilo Castro de Oliveira. The first shall be last:selection-driven minority becomes majority. *Phys.A*, 409:48–52, 2014.
- [16] Nuno Crokidakis and João Paulo Gambaro. The influence of contrarians in the dynamics of opinion formation. *Phys.A*, 486:465–472, 2017.
- [17] Nuno Crokidakis. Noise and disorder: phase transitions and universality in a model of opinion formation. *International Journal of Modern Physics.*, 27:1650060, 2016.
- [18] Nuno Crokidakis and Paulo Murilo Castro de Oliveira. Inflexibility and independence: Phase transitions in the majority-rule mode. *Physical Review. E*, 92:062122, 2015.
- [19] R.K.Pathria. *Statistical Mechanics*. Butterworth Heinemann, Waterloo, 1996.
- [20] S.Galam. *Sociophysics: A Physicist's Modelling of Psycho-political Phenomena*. Springer, Berlin, 2012.



- [21] S. Fortunato C. Castellano and V. Loreto. Statistical physics of social dynamics.  
*Reviews of Modern Physics*, 81:591, 2009.