

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Estudo da Estrutura de Anãs Estranhas Cristalinas

JONATHAN JOÁS ZAPATA CAMPOS

NITERÓI
2018

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE FÍSICA
COORDENAÇÃO DO CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Estudo da Estrutura de Anãs Estranhas Cristalinas

JONATHAN JOÁS ZAPATA CAMPOS

Dissertação apresentada ao Departamento de Física da Universidade Federal Fluminense, em complementação aos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Picanço Negreiros.

NITERÓI
2018

Dedicatória

Esta Dissertação está dedicada aos meus queridos pais e meus irmãos pelo grande apoio, encorajamento e amor que sempre me mostraram.

Agradecimentos

Antes de tudo, ofereço a minha mais profunda gratidão a Deus pela oportunidade de vir para o Brasil e continuar com minha trajetória profissional, por renovar minhas forças nos momentos difíceis e me mostrar Sua vontade.

- A minha família: especialmente a meus pais *Amaro Zapata* e *Martha Campos* e meus irmãos *Benjamín* e *Josué*, pelas suas orações que sempre me acompanham.
- A meu orientador *Rodrigo Picanço Negreiros*, pela oportunidade que me deu ao aceitar ser meu orientador e, com sua excelente formação acadêmica revelar-me seus conhecimentos em Astrofísica de Objetos Compactos.
- Aos professores da pós-graduação que ajudaram na minha formação nos períodos 2016-2017.
- A meus pais americanos *Robert* e *Jane Kilko*, pelo apoio incondicional e recebimento no seu lar, também aos irmãos e amigos da Igreja Batista Regular Vida & Paz.
- Também gostaria de agradecer alguns dos meus colegas, em especial o Thiago Sales, pelo apoio na programação em MATLAB, o Carlos Coronado, na redação da dissertação na linguagem Latex e Guilherme Augusto de Oliveira, pelas correções gramaticais de redação.
- Por último, agradeço a esta grande universidade e a este grande País que me acolhe e me faz sentir em casa.

Ficha catalográfica automática - SDC/BIF

Z35t Zapata Campos, Jonathan Joás
Título da Tese Estudo da Estrutura de Anãs Estranhas
Cristalinas / Jonathan Joás Zapata Campos; Rodrigo Picanço
Negreiros, orientador. Niterói, 2018.
83 f.

Dissertação (Mestrado)-Universidade Federal Fluminense,
Niterói, 2018.

1. Anãs brancas. 2. Equação de estado. 3. Rede de Wigner-
Seitz. 4. Matéria estranha-strangelets.. 5. Produção
intelectual. I. Título II. Picanço Negreiros, Rodrigo,
orientador. III. Universidade Federal Fluminense. Instituto de
Física.

CDD -

Bibliotecária responsável: Danieli Brabo de Moraes - CRB7/5805

Este trabalho contou com o apoio financeiro do CNPq.

"Após conhecer e obedecer à vontade de Deus,
o próximo alvo deve ser conhecer algo
dos Seus atributos de sabedoria,
poder e bondade evidenciados
nas obras de Suas mãos."

James Prescott Joule.

Zapata Campos, J. J. **Estudo da Estrutura de Anãs Estranhas Cristalinas**. 2018. 82 f. (Dissertação de Mestrado em Física)– Instituto de Física, Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2018.

RESUMO

Na presente dissertação a estrutura de estrelas anãs brancas são investigadas resolvendo as equações de equilíbrio hidrostático, não só newtonianas, mas também as de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (relativísticas). Começamos com o modelo para a equação de estado mais simples, isto é, o modelo do gás ideal de férmions, para logo implementar um modelo mais avançado, levando em conta a possibilidade de estruturas cristalinas descritas pela teoria de Wigner-Seitz. Neste contexto, serão investigadas as massas estelares para diferentes espécies nucleares. Consideramos também, a hipótese da *matéria estranha*, proposta por Bodmer, Witten e Terazawa, na qual se propõe que o verdadeiro estado fundamental da matéria consiste em aquela feita de três sabores de quarks, a saber, *up*, *down* e *strange* e que pode existir em pequenas peças ou *nuggets*, conhecidos como *strangelets*. Em seguida, investigamos uma expressão para a fórmula de massa para espécies *strangelets*, a fim de explorar suas massas. Com isto, desenvolvemos a ideia de substituir espécies nucleares ordinárias pelos *strangelets* na teoria de Wigner-Seitz, com a finalidade de estudar a estrutura da estrela. Assim, a partir das equações de equilíbrio hidrostático relativísticas, contrário ao que se esperariam espécies *strangelets* com massas menores produzem estrelas mais massivas, em contraste com aqueles *strangelets* de massas maiores. Particularmente, obtemos uma máxima massa de 2.39 massas solares, superando assim, o limite de massa de Chandrasekhar para anãs brancas. Portanto, com os nossos resultados de anãs brancas com massas superiores à massa de Chandrasekhar, estas são candidatas para explicar fenômenos como as supernovas super luminosas tipo Ia.

PALAVRAS-CHAVE: Anãs brancas, equação de estado, rede de Wigner-Seitz, matéria estranha, strangelets.

Zapata Campos, J. J. **Study of the Structure of Strange Crystalline Dwarfs**. 2018. 82 f. Dissertation (Master in Physics) – Instituto de Física, Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2018.

ABSTRACT

In this dissertation, the structure of white dwarf stars is investigated by solving the hydrostatic equilibrium equations, not only Newtonian but also Tolman-Oppenheimer-Volkoff (relativistic) equations. We start with the model for the simplest equation of state, that is, the ideal fermion gas model, and then implement a more advanced model, taking into account the possibility of crystalline structures described by Wigner-Seitz theory, in this context, stellar masses will be investigated for different nuclear species. We also consider the hypothesis of *strange matter* proposed by Bodmer, Witten and Terazawa, in which it is proposed that the true ground state of matter consists of that made up of three quark flavors, namely, *up*, *down* and *strange* and which can exist in small pieces or *nuggets*, known as *strangelets*. We then investigated an expression for the mass formula for *strangelet* species in order to explore their masses. With this, we developed the idea of replacing ordinary nuclear species by the *strangelets* in the Wigner-Seitz theory, in order to study the structure of the star. Thus, from the relativistic hydrostatic equilibrium equations, contrary to what one would expect, *strangelet* species with smaller masses produce more massive stars, in contrast to those *strangelets* of larger masses. Particularly, we obtain a maximum mass of 2.39 solar mass thus exceeding the mass limit of Chandrasekhar for white dwarfs. Therefore, with our results of white dwarfs with masses higher than the mass of Chandrasekhar, they are candidates to explain phenomena such as type Ia supernova supernovae.

KEYWORDS: White dwarfs, state equation, Wigner-Seitz lattice, stranger matter, strangelets.

Lista de Figuras

1.1	Diagrama H-R, que apresenta a relação existente entre a luminosidade de uma estrela e sua temperatura efetiva. As estrelas normais estão na sequência principal (SP). As anãs brancas estão no canto inferior esquerdo. Estas têm temperaturas que vão de $200.000K$ até as mais frias de apenas $3.500K$. (Fonte: http://astro.if.ufrgs.br/estrelas/node2.htm).	17
2.1	Representação gráfica de uma estrela com simetria esférica (a) Diagrama de forças sobre o elemento de massa e , (b) Casca esférica (área sombreada).[30]	23
2.2	Equação de estado politrópica para os limites de altas (curva azul) e baixas (curva vermelha) densidades.	31
2.3	Relação massa-raio: sequência de 100 WDs newtonianas com equação de estado politrópica em altas e baixas densidades com ϵ_c : $1 \times 10^5 - 1 \times 10^6 g/cm^3$ e $1 \times 10^6 - 1 \times 10^8 g/cm^3$, respectivamente.	32
2.4	Perfil massa-raio para uma WD newtoniana com equação de estado politrópica: ultra relativística com $\epsilon_c = 10^7 g/cm^3$ (curva azul) e, não relativística com $\epsilon_c = 3 \times 10^5 g/cm^3$ (curva vermelha).	33
2.5	(a) Representação da rede de Wigner e Seitz, (b) Célula de raio R , os pontos pretos são elétrons. (Recuperado de [82]).	35
2.6	Raios das anãs brancas em comparação com a sequência de estrelas da equação de estado BPS (curva sólida) que representa a matéria de equilíbrio em cada densidade. Também para anãs brancas de Carbono curva tracejada. [para comparação usou-se $R_\odot \simeq 7 \times 10^5 km$] (Tomado de [65]).	37
2.7	Equações de estado para cada uma das três espécies atômicas consideradas.	38
2.8	Relação massa-raio para as sequências de estrelas para as três espécies com densidades ϵ_c entre $10^6 - 10^8 g/cm^3$	39
2.9	Perfil massa-raio das três espécies nucleares para $\epsilon_c = 10^7 g/cm^3$	40
2.10	Relação massa-raio para uma família de estrelas com composições atômicas diferentes, os pontos pretos são as massa máximas para cada espécie.	40
3.1	Relação massa-raio para família de estrelas com EoS politrópica em baixas densidades, com $\epsilon_c = 1 \times 10^5 - 1 \times 10^6 g/cm^3$	45
3.2	Perfil massa-raio para uma WD das equações TOV com EoS Politrópica: altas densidades com $\epsilon_c = 1 \times 10^7 g/cm^3$ (curva azul) e, em baixas densidades com $\epsilon_c = 3 \times 10^5 g/cm^3$ (curva vermelha).	46

3.3	Relação massa-raio para família de estrelas cristalinas para cada espécie, com ϵ_c entre $10^6 - 10^8 g/cm^3$	47
3.4	Perfil massa-raio de uma anã branca cristalina para cada espécie com $\epsilon_c = 10^7 g/cm^3$	48
3.5	Relação massa-raio para uma sequência de estrelas de composições atômicas diferentes, os pontos pretos marcam as massas máximas.	48
3.6	Perfil massa-raio para duas estrelas (a) politrópicas com $\epsilon_c = 5 \times 10^5 g/cm^3$ e, (b) de Carbono com $\epsilon_c = 1 \times 10^7 g/cm^3$	49
4.1	Desenvolvimento dos modelos atômicos ao longo dos anos. (Fonte: https://saintschemistry10.weebly.com/of-the-atom.html).	51
4.2	Modelo Padrão das Partículas Elementares. (Fonte: https://www.dreamstime.com/royalty-free-stock-photography-standard-model-elementary-particles-diagram-particle-physics-fundamental-make-up-matter-fundamental-force-carriers-image36590417).	54
4.3	Hipótese da matéria estranha: estado fundamental de interação forte (adaptado de [122]).	56
5.1	Equações de estado para três espécies <i>strangelets</i>	62
5.2	Relação da pressão e densidade de energia frente a A	63
5.3	Comparação das equações de estado para espécies ordinárias e <i>strangelets</i>	63
5.4	Perfil massa-raio para as três espécies <i>strangelets</i> , com $\epsilon_c = 10^7 g/cm^3$	64
5.5	Relação massa-raio para famílias de estrelas para cada espécie <i>strangelet</i> considerado.	65
5.6	Relação massa-raio para as três espécies <i>strangelets</i> , os pontos pretos representam as massas máximas.	65
5.7	Relação massa-raio para sequência de estrelas compostas do <i>strangelet</i> ₁ com $\epsilon_c = 10^6 - 10^9 g/cm^3$	66

Lista de Tabelas

1.1	Classificação espectral das anãs brancas. (Extraído de [24]).	16
2.1	Valores das massas e raios para WDs em baixas densidades tomados da Figura 2.3.	32
2.2	Valores das massas e raios para WDs newtonianas politrópicas em altas densidades centrais.	33
2.3	Valores das massas e raios para WDs newtonianas de Carbono.	39
2.4	Valores das massas máximas para anãs brancas newtonianas cristalinas compostas de He , C e O	39
3.1	Valores das massas-raios para anãs brancas relativísticas com EoS Politrópicas em baixas densidades.	45
3.2	Valores das massas e raios para anãs brancas Relativísticas Politrópicas (em altas densidades), para diferentes densidades centrais.	46
3.3	Valores das massas e raios para anãs brancas cristalinas de Carbono.	47
3.4	Valores das massas máximas para anãs brancas cristalinas.	47
4.1	Propriedades dos Quarks.	54
4.2	Massas para 15 <i>strangelets</i> , $r = Z/A$ é a razão carga/bárion.	59
5.1	Valores das massas e raios para anãs brancas Cristalinas com strangelets da Figura 5.4, com $\epsilon_c = 1 \times 10^7 g/cm^3$	64
5.2	Valores das massas máximas para anãs brancas cristalinas com as espécies <i>strangelets</i> consideradas.	65
5.3	Valores das anãs brancas com possíveis massas super Chandrasekhar.	66

Conteúdo

1	Introdução	15
1.1	Contexto Histórico	15
1.2	Objetivo	18
1.3	Motivação	18
1.4	Metodologia e Desenvolvimento do Trabalho	19
1.5	Organização do Trabalho	19
2	Anãs Brancas Newtonianas	20
2.1	Visão Geral	20
2.2	Estrelas Newtonianas	22
2.3	Equações de Estrutura Estelar	22
2.4	Equação de Estado do Gás de Fermi	24
2.4.1	Limites de Altas e Baixas Densidades	27
2.4.2	Anãs Brancas Newtonianas Politrópicas	27
2.4.3	Resultados: Anãs Brancas Newtonianas Politrópicas	31
2.5	Melhoramento em Modelos de Anãs Brancas	33
2.5.1	Natureza da Matéria nas Densidades das Estrelas Anãs Brancas	33
2.5.2	Anãs Brancas Cristalinas	34
2.5.3	Resultados: Anãs Brancas Newtonianas Cristalinas	38
3	Anãs Brancas Relativísticas	41
3.1	Equação de Equilíbrio Hidrostático TOV	41
3.2	Aplicação para Anãs Brancas	44
3.2.1	Anãs Brancas Relativísticas Politrópicas	44
3.2.2	Anãs Brancas Relativísticas Cristalinas	46
4	Matéria de Quarks	50
4.1	Introdução: Modelo Padrão da Física das Partículas	50
4.2	Modelo dos Quarks e suas Propriedades	53
4.3	Hipótese da Matéria Estranha	55
4.4	Fórmula de Massa para <i>Strangelets</i>	57
5	Anãs Estranhas Cristalinas	61
5.1	Descrição do Modelo e do Método	61

5.2	Resultados e Discussões	62
5.2.1	Equações de Estado	62
5.2.2	Relação Massa-Raio	64
6	Conclusões finais	67
A	Constantes Físicas e Astronômicas	69
B	Convenção de Unidades	70
C	Método de Runge-Kutta de ordem 4	72
D	Fórmula de Massa	74
	Referências Bibliográficas	75

Capítulo 1

Introdução

Nesta primeira parte, antes de tudo, definimos uma anã branca e apresentamos uma breve história da descoberta delas. Isto nos permitirá ter um panorama geral da origem, da evolução e do destino final destes objetos, como também, das suas principais características. Finalmente, expomos os nossos objetivos e motivações.

1.1 Contexto Histórico

Uma anã branca (WD: White Dwarf) é um remanescente estelar. De fato, trata-se de uma etapa da evolução estelar que é gerada de estrelas da sequência principal com massas menores que $10M_{\odot}$ (apêndice A) e que esgotaram seu combustível nuclear, o que significa dizer que cerca de 98% de todas as estrelas evoluirão até a fase de anã branca, entretanto, somente 6% dos objetos nas vizinhanças do Sol são anãs brancas [1]. Tradicionalmente, uma WD é composta por núcleos completamente ionizados e, como não há nenhuma fonte de energia que equilibre o colapso gravitacional, ela vai se comprimindo sobre si mesma devido ao seu próprio peso. Como consequência, a distância entre átomos diminui, de maneira que a densidade aumenta até a ordem de $\sim 10^6 g/cm^3$. Nestas densidades, o princípio de Heisenberg e de exclusão de Pauli tornam-se importantes. Os elétrons que adquirem alto momento geram a chamada pressão de degenerescência eletrônica que efetivamente contra-balanceia o colapso da estrela, mantendo assim sua estabilidade. Anãs brancas emitem somente energia térmica armazenada do processo evolutivo, por isso elas têm luminosidade muito fraca [2]. 99% das WDs estão constituídas basicamente por carbono e oxigênio, que resultam da fusão do hélio, no entanto, pode ser o caso que na superfície existe um envelope de hidrogênio e hélio parcialmente degenerados, formando assim uma atmosfera. Só umas poucas são formadas inteiramente de hélio [3, 4], ou oxigênio, carbono, neônio e magnésio [5], produtos da fusão nuclear. Quando recém formadas, as WDs possuem temperaturas muito altas, mas, sem fonte de energia, elas vão se resfriando gradualmente tornando-se anãs negras [6]. De fato, as WDs mais frias observadas têm vários milhares de Kelvin [2, 7]. O termo *Anã Branca* foi cunhado por Willem Luyten em 1922 [8], embora o nome mais apropriado seja *Estrelas Degeneradas*.

A primeira WD descoberta foi 40 Eridani B, na constelação de Eridanus, por William Herschel em 1783 [9]. Esta mesma foi observada posteriormente por Friedrich Georg e Otto Wilhelm em 1825 e 1851, respectivamente [10, 11]. Depois, em 1910, Henry N. Russell, Edward

C. P. e, F. Williamina descobriram seu tipo espectral *A*, ou branca [8], que logo se confirmou em 1914 por Walter Adams [12]. A segunda WD descoberta foi Sirio B em 1844, conhecida como "*O cachorrinho*", com uma temperatura superficial de $25.000K$ [13]. Posteriormente, em 1917 Adriaan Van Maanen descobriu a estrela Van Maanen que se tornou a terceira no seu tipo [14]. Estas três primeiras foram chamadas de *anãs brancas clássicas* [15], descobertas na década de 1930. Desde então, o *Sloan Digital Sky Survey* tem achado mais de 9.000 novas WDs[16].

As WDs provêm de estrelas normais da sequência principal (do diagrama H-R 1.1), com massas entre 0.07 e $10M_{\odot}$ [17]. A composição das WDs difere da massa inicial da estrela geradora: se esta é de pouca massa ($< 0.5M_{\odot}$) teremos uma WD feita de hélio [4, 6, 18, 19]. Para estrelas de massa média ($0.5M_{\odot} < M < 8M_{\odot}$), WDs de carbono e oxigênio, que são as mais comumente observadas no universo [20]. Por último, as estrelas com massas entre média e alta ($9M_{\odot} < M < 10M_{\odot}$) podem ter composição final de elementos mais pesados como neônio, magnésio ou inclusive até o ferro [21, 22].

A classificação espectral das WDs, relacionadas à composição de suas camadas externas, foi proposta em 1983 por Edward M. Sion junto com outros [23]. Tal sistema classifica o espectro com uma *D* inicial (para Degenerado), seguido de uma das sequências das letras mostradas na Tabela 1.1, acompanhado de um índice de temperaturas que é calculada dividindo $54.000K$ pela temperatura efetiva, desde que a temperatura superficial está relacionada com o espectro. Por exemplo, uma anã branca com linhas de absorção de He I e temperatura efetiva de $15.000K$, terá a seguinte notação *DB3*.

Tabela 1.1: Classificação espectral das anãs brancas. (Extraído de [24]).

Classe Espectral	Características espectrais
A	Linhas de H. Não têm linhas de metais ou de He I
B	Linhas de He I. Não têm linhas de metais ou de H.
C	Espectro contínuo. Não há linhas
O	Linhas de He II, acompanhadas com linhas de H ou de He I
Z	Linhas de He II, acompanhadas com linhas de H ou de He I
Q	Linhas de Carbono
X	Espectro não classificável

A característica principal das WDs é que elas possuem um limite superior de massa, isto é, o limite de Chandrasekhar, que é de $M_{Ch} \simeq 1.44M_{\odot}$ [25]. Conhecem-se anãs brancas desde $0.17M_{\odot}$ até $1.33M_{\odot}$ [26], embora a maioria delas estejam entre 0.5 e $0.7M_{\odot}$ [27]. O raio estimado situa-se entre 0.008 e $0.02R_{\odot}$ (onde R_{\odot} é o raio do Sol) [28]. Desta forma, elas têm densidades médias da ordem de $10^6 g/cm^3$ e formam parte do grupo de estrelas compactas, pois são uma das formas da matéria mais densas conhecidas, junto com as Estrelas de Nêutron, Buracos Negros e, hipoteticamente, as Estrelas de Quarks [29]. Vale a pena mencionar que a luminosidade das anãs brancas é muito fraca pelo que se situam na parte inferior esquerda do diagrama Hertzsprung-Russell (H-R) como mostra a Figura 1.1.

Portanto, uma WD é o resíduo de uma estrela da sequência principal (diagrama H-R) que completou o seu ciclo de vida normal e cessou sua fusão nuclear. Cabe notar também que anãs brancas em sistemas binários, do tipo comum de carbono ou oxigênio, (em sistemas binários), são capazes de futuras reações de fusão que liberam uma grande quantidade de energia se sua

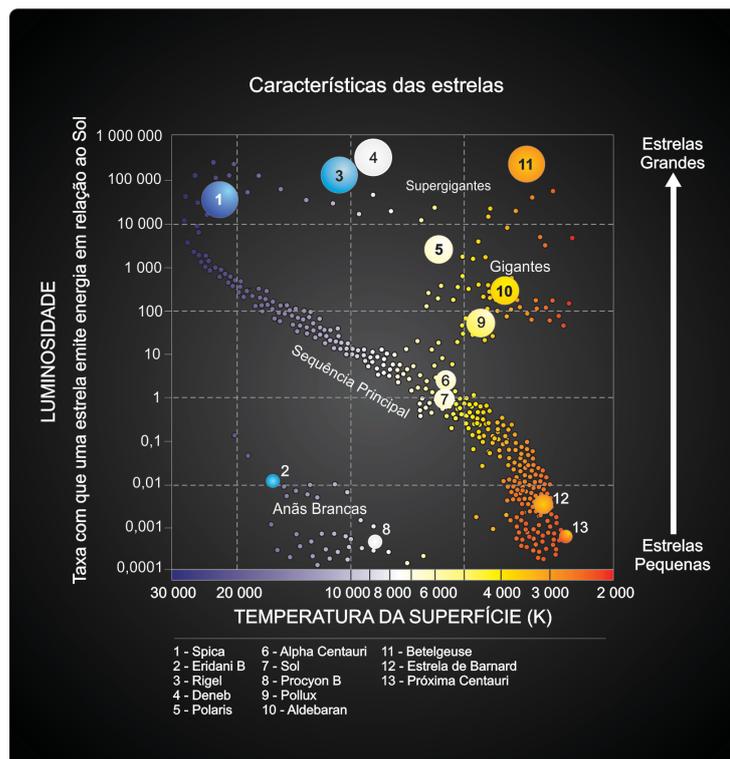


Figura 1.1: Diagrama H-R, que apresenta a relação existente entre a luminosidade de uma estrela e sua temperatura efetiva. As estrelas normais estão na sequência principal (SP). As anãs brancas estão no canto inferior esquerdo. Estas têm temperaturas que vão de 200.000K até as mais frias de apenas 3.500K. (Fonte: <http://astro.if.ufrgs.br/estrelas/node2.htm>).

temperatura estiver alta o suficiente, resultando assim, em violentas explosões chamadas de supernova tipo Ia (SNe Ia) [30]. Fisicamente, as anãs brancas de baixo índice de rotação [31] são limitadas a massas de cerca de $1.38M_{\odot}$ [25], abaixo do limite de Chandrasekhar (M_{Ch}). Além deste limite, a anã branca entraria em colapso. Se uma WD forma parte de uma *dupla degenerada*, (sistema composto de duas anãs brancas), que por perda gradual de momento angular do sistema em forma de radiação gravitacional, se aproximam em suas órbitas e terminam por sofrer uma fusão, de maneira que a soma de suas massas seja maior ou igual que o limite de M_{Ch} então entram em colapso elevando, igualmente, sua temperatura até o ponto de ignição da fusão nuclear. Logo, dentro de poucos segundos, após o início da fusão nuclear, uma fração substancial de matéria da anã branca sofre uma reação nuclear que libera energia suficiente, de $1 - 2 \times 10^{44} \text{ Joules}$ [32] para iniciar uma explosão de supernova tipo Ia (SNe Ia)[33]. Esta categoria de supernovas produz um consistente pico de luminosidade muito bem conhecido devido à massa uniforme das anãs brancas que as geram. A estabilidade desse valor permite que essas explosões sejam usadas como velas-padrão para medir a distância de suas galáxias hospedeiras, já que a magnitude aparente das supernovas depende, sobretudo, da distância.

As supernovas tipo Ia (SNe Ia) formam uma classe de eventos relativamente homogêneos em termos de seus espectros, luminosidades de pico e curvas de luz [34, 35, 36, 37]. Surpreendentemente, observações recentes evidenciam uma distribuição das propriedades SNe Ia mais ampla do que o antecipado anteriormente [38], inclusive aquela de eventos altamente peculiares conhecidos de SNe Ia super luminosas, tais como o SN 2007ax [39], SN 2005hk [40] e SN 2003fg

[41]. O último, em particular, foi interpretado em termos de uma explosão de uma anã branca de rotação rápida com uma massa super Chandrasekhar [42]. Assim, as anãs brancas com massas super Chandrasekhar entre $2.1 - 2.8M_{\odot}$ [43, 44, 45], naturalmente, podem explicar as propriedades observadas de algumas supernovas Ia super luminosas peculiares. As razões podem ser vistas em [46, 47].

Alguns trabalhos, por exemplo, foram feitos para explicar estes fenômenos [48, 49, 50]. Em outros, é dito que uma explosão de uma anã branca em rotação rápida com uma massa super Chandrasekhar entre $1.5 - 1.8M_{\odot}$ é um progenitor desses eventos [51]. Por outro lado, é sugerido na referência [52] que anãs brancas com fortes campos magnéticos, da ordem de $10^{18}G$, alcançam massas máximas de $M_{max} \approx 2.58M_{\odot}$, valor que excede significativamente o limite de Chandrasekhar, e também podem ser possíveis geradores de tais fenômenos.

1.2 Objetivo

Neste cenário, o presente trabalho tem como objetivo principal estudar a estrutura mecânica de uma anã branca isolada, com baixa rotação e sem campos magnéticos. Este estudo se dará principalmente sob duas visões fundamentadas na aproximação da rede tipo Wigner-Seitz que consiste em anãs brancas cristalinas constituídas de uma única espécie nuclear. Por um lado, modelamos anãs brancas com espécies atômicas ordinárias para obter a estrutura da estrela, isto é, as massas e raios nos regimes newtoniano e relativístico. Sob outra perspectiva, baseados na hipótese da matéria estranha, iremos substituir as espécies atômicas ordinárias por espécies *strangelets* e, semelhantemente, calcular a estrutura da estrela.

1.3 Motivação

Nas últimas décadas, os modelos estelares têm explicado a origem e a evolução das estrelas em acordo com as observações. Um exemplo disso: as estrelas anãs brancas, que são objetos exóticos e que dão origem a fenômenos como supernovas tipo Ia. No entanto, nos primórdios das observações delas, o problema principal era revelar a natureza da matéria dentro delas, sendo que altas densidades dominavam seus interiores. Dessa forma, modelos da matéria em altas densidades surgiram para explicar a estrutura das WDs, desde os mais simples até modelos considerando a hipótese da matéria estranha. Neste quadro, a motivação do presente trabalho pode ser resumida em três pontos principais: *(i)* já que não há conformidade sobre a natureza final da matéria em altas densidades dentro das anãs brancas, é importante trabalhos que visem entender e validar alguns dos protótipos propostos, *(ii)* tendo em evidência estudos da matéria em ambientes extremos, há uma carência de pesquisas para modelos baseados especificamente na hipótese da matéria estranha, finalmente, *(iii)* atendendo a recentes observações de supernovas super luminosas tipo Ia, anãs brancas compostas de espécies *strangelets* que resultam em massas maiores do que o limite de M_{Ch} podem ser identificadas como possíveis progenitoras de tais acontecimentos.

1.4 Metodologia e Desenvolvimento do Trabalho

Começamos calculando uma equação de estado no modelo mais simples para a matéria em densidades do domínio das anãs brancas, isto é, um gás ideal de Fermi degenerado a temperatura zero composto de íons e elétrons, que nos limites de altas e baixas densidades reduz-se a equação de estado politrópica. Em seguida, inserimos correções para a equação de estado do gás ideal de Fermi, ou seja, um modelo melhorado na aproximação da rede tipo Wigner-Seitz, que consiste em anãs brancas cristalinas feitas de uma única espécie nuclear. Logo, usando o método de Runge-Kutta de quarta ordem, procederemos resolvendo numericamente, na linguagem de programação de MATLAB, as equações de equilíbrio hidrostático, tanto newtonianas quanto relativísticas, com as correspondentes equações de estado mencionadas, obtendo assim a estrutura da estrela, a saber, a relação massa-raio. Para o modelo melhorado temos a estrela composta unicamente de He, ou C ou O. Consideramos também, a hipótese da matéria estranha tal que pequenas porções ou *nuggets*, conhecidos como *strangelets*, compostas de quarks *up*, *down* e *strange*, podem ser o verdadeiro e absoluto estado fundamental. Com isto, calcular-se-á uma fórmula de massa para *strangelets*, que designaremos de espécies *strangelets* e, semelhantemente, com o modelo da aproximação da rede, substituiremos as espécies nucleares ordinárias por espécies *strangelets* a fim de obter a estrutura da estrela no contexto da relatividade geral. Neste último, as estrelas são compostas de uma única espécie *strangelet* e chamaremos de *Anãs Estranhas Cristalinas*. Finalmente, interpretaremos nossos resultados comparando-os com o intervalo de massas super Chandrasekhar.

1.5 Organização do Trabalho

Este trabalho está organizado em seis capítulos. Os resultados originais da pesquisa e as contribuições do autor à temática são incluídos no capítulo 5.

Neste capítulo, introduzimos algumas características relevantes das anãs brancas, assim como a motivação, objetivo principal e a metodologia.

No próximo capítulo, abordaremos o modelo tradicional para WDs no cenário da teoria newtoniana. Partimos da equação de estado do gás ideal de Fermi estudando os limites de altas e baixas densidades, em forma particular propomos as politrópicas. Em seguida, introduzimos um melhoramento para essa equação usando a aproximação da rede tipo Wigner-Seitz. Afinal, apresentamos os resultados.

No capítulo 3, no contexto da teoria da relatividade geral de Einstein, estudaremos a equação de equilíbrio hidrostático para objetos compactos, aplicando-o para as anãs brancas.

No capítulo 4, voltamos nossa atenção para o modelo padrão da física das partículas e para a hipótese da matéria estranha. Com isto, estuda-se uma fórmula de massa para espécies *strangelets* tipo Bethe-Weizaecker.

No capítulo 5, determinaremos a estrutura das anãs brancas na aproximação da rede de Wigner-Seitz no âmbito da teoria da relatividade geral, usando espécies *strangelets* e, expõem-se os resultados e discussões.

Por último, no capítulo 6, são feitas as conclusões e considerações dos modelos vistos nos capítulos anteriores, bem como algumas sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Anãs Brancas Newtonianas

Os objetos compactos como as anãs brancas existem como resultado de um balanço entre a pressão interna do gás degenerado de elétrons e a pressão oriunda da gravitação. Nesta seção serão discutidas anãs brancas no contexto da teoria newtoniana, assim como, a equação de equilíbrio hidrostático e a equação de estado para o gás de elétrons livres. Desta última, propomo-nos a equação de estado politrópica. Além disso, adotaremos um melhoramento para a equação de estado do gás de elétrons (correções da rede), usando a aproximação da rede de Wigner-Seitz. Dessa forma, modelamos anãs brancas cristalinas compostas de uma única espécie nuclear ordinária. Por fim, mostramos a relação massa-raio da estrela para cada equação de estado.

2.1 Visão Geral

Da teoria da evolução estelar, se conhece três estados finais para uma estrela dependendo da sua massa inicial, temos: Buracos Negros (BH: Black Hole), Estrela de Nêutron (NS: Neutron Star) e Anãs Brancas (WD: White Dwarfs) [53]. A grande maioria de todas as estrelas (aproximadamente 90%), incluindo o nosso Sol, irão se tornar anãs brancas [54]. As WDs têm tamanho da ordem da Terra, com densidades interiores típicas de $10^6 g/cm^3$. Por outro lado, a população das WDs contém uma riqueza de informações sobre a evolução das estrelas individuais desde o nascimento até a morte, bem como a história da galáxia e a taxa da formação de estrelas [86]. De acordo com o nosso entendimento, o parâmetro principal que determina o estado final de uma estrela é sua massa inicial. As estrelas normais, abaixo de $10M_{\odot}$, irão se tornar anãs brancas enquanto que estrelas mais massivas se converterão em estrelas de nêutron ou buracos negros. Considerando que a máxima massa de uma anã branca é $1.44M_{\odot}$, que é muito menor do que o valor inicial da estrela progenitora, então uma grande fração da massa estelar original deve ser perdida para o meio interestelar circundante. Essa perda de massa é realmente confirmada por observações de estrelas nos estágios antecessores, embora ainda não exista uma derivação teórica ou uma estimativa da perda total de massa durante a vida de uma estrela [56].

Embora uma WD seja o estado final, no sentido que nenhuma geração de energia nuclear ocorre, estas ainda evoluem. Desde que elas *nascem* com altas luminosidades e se não estão em sistemas binários, gradualmente vão se esfriando tornando-se invisíveis em um tempo de 5 a 10 bilhões de anos. Portanto, WDs pouco luminosas são muito antigas e contêm informações sobre as fases primordiais da nossa galáxia [57].

Além daquelas implicações para a galáxia, no entanto, as anãs brancas também são objetos bastante interessantes por si sós. Com densidades extremamente altas, os elétrons se tornam degenerados e sua natureza quântica (através do princípio Pauli) determina a equação de estado (EoS) e, por conseguinte, a existência de uma massa limitante M_{Ch} . Essas densidades extremas não podem ser reproduzidas em laboratórios terrestres, logo, as propriedades da matéria sob estas condições devem, portanto, ser calculadas teoricamente. Na medida em que as previsões podem ser confirmadas por observações, as WDs podem ser consideradas como um *laboratório de física* para a matéria em densidades e pressões extremas.

O espectro emitido pela atmosfera de uma anã branca mostra um padrão bastante variado ao contrário de outros grupos estelares. A maioria delas têm somente linhas de hidrogênio extremamente ampliado pelos altos campos gravitacionais e conseqüentemente altas pressões nas atmosferas. Outros indicam apenas as linhas espectrais de hélio neutro. Contudo, existem algumas que manifestam presença de cálcio, magnésio e ferro, especialmente no espectro ultravioleta. A análise detalhada, entretanto, revela uma simplicidade subjacente: com poucas exceções, o principal constituinte da atmosfera é hidrogênio ou hélio que são os dois elementos mais abundantes do universo, porém, traços de outros elementos podem estar presentes [58].

O mecanismo básico responsável pela composição incomum delas foi proposta por Schatzman em 1958 [15]. Devido à combinada influência dos campos gravitacional e elétrico nas camadas interiores, elementos com diferentes pesos atômicos separam-se por difusão: elementos pesados se movimentam para "baixo", enquanto que os mais leves (hidrogênio ou hélio) se apresentam no topo da atmosfera. A escala de tempo para este processo de difusão é sempre pequena quando comparada à escala de tempo para a evolução da anã branca [59]. Podemos, portanto, em muitos casos supor que o estado de equilíbrio foi atingido nos objetos observados. Este quadro simples, contudo, se complica pela ação de processos tais como convecção, vento estelar e disco de acreção da massa por uma companheira binária [58].

Vale a pena relembrar que restringimos o escopo deste trabalho à discussão de anãs brancas não binárias, mesmo que se tenha observações de WDs membros de sistemas binários. Mas, nesses casos, os binários são sistemas mais complexos, o que significa que a estrutura e a evolução da WD são significativamente influenciadas pela presença de uma companheira. Nós desejamos excluir, todavia, variáveis cataclísmicas que incluem supernovas, onde a interação entre as duas estrelas, normalmente pela transferência de matéria e a formação de um disco de acreção em torno da anã branca, domina a evolução e as características observacionais. As avaliações deste grande e interessante campo podem ser encontradas em Patterson (1984) [60], Bath (1985) [61] e Mauche (1990)[62].

2.2 Estrelas Newtonianas

A maioria das estrelas são adequadamente descritas pela física newtoniana, sem levar em conta a Relatividade Geral. Porém, tais estrelas servem como casos limite de objetos mais simples que são de interesse para a Relatividade Geral e, evidentemente, eles podem nos guiar no entendimento das propriedades qualitativas desses objetos [63].

A razão da aproximação newtoniana se pode derivar do seguinte argumento. Conhece-se que no limite de altas velocidades é válida a mecânica formulada por Einstein em sua Teoria Especial da Relatividade. A lei da gravitação de Newton, em que a força é inversamente proporcional à distância, também falha em condições de gravidade muito intensas, assim a teoria correta para descrever a gravidade em condições extremas seria a Teoria da Relatividade Geral, também formulada por Einstein em 1915 [64]. O critério para decidir até que ponto pode-se usar a gravitação de Newton, envolve a velocidade da luz. Analisemos dois corpos atraindo-se gravitacionalmente, se a distância entre eles for tal que a velocidade de escape de um deles em relação ao outro seja muito menor que a velocidade da luz c , sua interação é descrita pela teoria de Newton. Caso contrário, temos que usar a teoria da gravitação de Einstein.

Consideremos um corpo de massa M , para pontos a uma distância R desde seu centro, a teoria de Newton pode ser usada se for atendida a seguinte condição [65]:

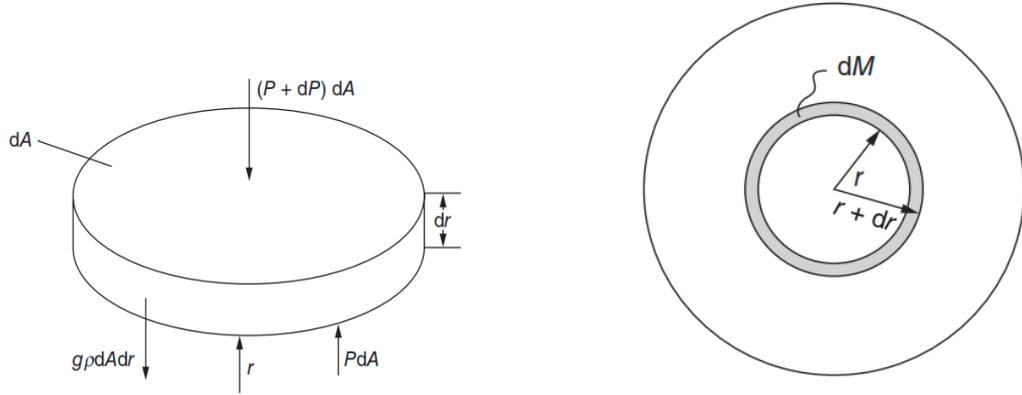
$$\sqrt{\frac{2GM}{R}} \ll c, \quad \Rightarrow \quad \frac{2GM}{Rc^2} \ll 1,$$

sendo G a constante da gravitação de Newton. Para uma anã branca típica observada temos que o raio é da ordem de $\approx 0.01R_{\odot}$ com massa média de $\approx 0.6M_{\odot}$, o que indica uma densidade média de cerca de $10^6 g/cm^3$ [66]. Assim, pode-se estimar a ordem na relação de validade da teoria de Newton como sendo: $2GM/Rc^2 \approx 10^{-4} \ll 1$ (muito menor do que um). Portanto, as WDs pertencem ao grupo de estrelas newtonianas no sentido que podem ser estudadas no contexto da gravitação de Newton.

2.3 Equações de Estrutura Estelar

O estudo teórico da estrutura estelar, juntamente com dados observacionais, mostra claramente que as estrelas são objetos dinâmicos, geralmente mudando a uma taxa imperceptivelmente lenta para os padrões humanos, embora, às vezes possam mudar de forma muito rápida e dramática, como durante uma explosão de supernova. Que tais mudanças devem ocorrer, pode ser visto simplesmente considerando a produção de energia observada de uma estrela. Como as estrelas não possuem infinita fonte de energia, elas devem eventualmente usar suas reservas e "morrer". A evolução estelar é o resultado de uma luta constante contra a implacável atração da gravidade.

Para obter as equações de estrutura estelar, modelamos a estrela como um fluido esfericamente simétrico em equilíbrio hidrostático tal como mostra a Figura 2.1. O diagrama de forças sobre um elemento de fluido dentro da estrela a uma distância r do centro da mesma, é mostrado na Figura 2.1 (a), sendo que a força gravitacional é sempre atraiante então uma força oposta deve existir para evitar o colapso, logo, aplicando as condições de equilíbrio obtemos a



(a) Elemento de massa de área dA e espessura dr a (b) Ilustração da massa dM da casca esférica uma distância r desde o centro da estrela. achado entre os raios r e $r + dr$.

Figura 2.1: Representação gráfica de uma estrela com simetria esférica (a) Diagrama de forças sobre o elemento de massa e, (b) Casca esférica (área sombreada).[30]

variação da pressão com a profundidade [67],

$$\frac{dP}{dr} = -G \frac{M_r \rho}{r^2}, \quad (2.1)$$

onde $g = GM_r/r^2$ é a aceleração da gravidade a uma distância r desde seu centro, ρ a densidade do gás e, M_r é a massa contida numa esfera de raio r .

A equação acima é chamada equação de *Equilíbrio Hidrostático* e representa a primeira das equações fundamentais da estrutura estelar para uma simetria esférica. Esta equação claramente indica que, para a estrela ser estática, o gradiente de pressão dP/dr deve existir para contrabalançar a força gravitacional. Não é a pressão que suporta uma estrela, mas a mudança de pressão com o raio. Além disso, o sinal negativo na frente significa que a pressão deve diminuir com o aumento do raio. Assim, a pressão é maior no centro da estrela do que na superfície dela.

Uma segunda relação envolvendo a massa M , o raio R e a densidade ρ também deve existir. Novamente, para uma estrela simetricamente esférica, Figura 2.1 (b), consideramos uma casca de massa dM_r e de espessura dr , localizada a uma distância r desde o centro. Assumindo que a casca é suficientemente fina (i.e., $dr \ll r$), o volume da casca é aproximadamente $dV = 4\pi r^2 dr$. Se a densidade local do gás é ρ , a massa da casca é dada por [30]: $dM_r = \rho(4\pi r^2 dr)$, que pode-se escrever como

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho. \quad (2.2)$$

Esta equação é conhecida como *equação da continuidade da massa* e indica como a massa interior de uma estrela deve mudar com a distância desde seu centro. A equação acima é a segunda das equações fundamentais da estrutura estelar. As equações (2.1) e (2.2) permitem conhecer as propriedades macroscópicas das estrelas. No entanto, para descrever estas manifestações, é necessário uma equação de estado que faz a ponte entre a estrutura macroscópica e o mundo microscópico. Falaremos disto na próxima seção.

2.4 Equação de Estado do Gás de Fermi

Consideremos um gás contendo nêutrons, prótons e elétrons que não interagem entre si, com proporções para cada densidade de número de bárions, tal que, o gás tenha sua energia mais baixa possível. Tal situação é chamada de *equilíbrio- β* , ou simplesmente equilíbrio (onde os nêutrons não fazem decaimento beta nem tem-se captura de elétrons pelos prótons). Pode-se demandar que a energia mínima a ser encontrada está sujeita à restrição da neutralidade de carga.

A densidade bariônica é usualmente tratada como uma variável independente ao calcular uma equação de estado, já que o número de bárions é conservado. Assim, espécies de bárions podem ser transformadas de um a outro, de modo a minimizar a energia, mas a carga total de bárions permanece inalterável.

Sendo nêutrons, prótons e elétrons férmions (partículas de spin meio), eles obedecem ao princípio de exclusão de Pauli (não mais que um férmion pode ocupar um mesmo estado quântico). Trabalha-se, então, com um gás ideal de Fermi degenerado (ideal porque a interação é ignorada, e degenerado porque todos os estados quânticos até uma determinada energia, chamada de energia de Fermi, estão ocupados).

Portanto, ao somar sobre todos os estados ocupados (que em ausência de interação são os autoestados de momentos) ou, em relação ao número de partículas ou, também, as energias, precisamos somar ou integrar sobre estados de momentos. Da mecânica quântica lembramos a normalização dos estados de momentos em uma caixa de dimensão L , assim [68]

$$\frac{1}{L^3} \sum_k \dots \implies \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \dots = \frac{1}{2(\pi)^2} \int_0^{k_F} k^2 dk, \quad (2.3)$$

para um sistema degenerado, todos os estados de energia estão preenchidos em ordem até um máximo chamado energia de Fermi, ou no caso de autoestados de momento, até o momento de Fermi (k_F). Lembrando a relação entre o momento da partícula p e o número de onda k : $p = \hbar k$, usando as unidades naturais (apêndice B) onde $\hbar = c = 1$, refere-se a k como momento com unidade inversa do comprimento (em cálculos numéricos usa-se $\hbar c = 197.33 \text{ MeV} \cdot \text{fm}$).

A condição de degenerescência tem validade para baixas temperaturas (muito menor do que a energia de Fermi), logo

$$T \ll E_F = \sqrt{k_F^2 + m^2}. \quad (2.4)$$

O limite mais baixo sobre a energia de Fermi pode ser achado ignorando o momento. Para o elétron, a energia de Fermi é $E_F > m_e = 0.511 \text{ MeV} \simeq 6 \times 10^9 \text{ K}$, que é grande quando comparada com a temperatura interna da maioria das WDs ($T \approx 10^6 - 10^7 \text{ K}$) [53]. Deste modo, a energia de Fermi dos elétrons (e também dos núcleons) facilmente satisfaz a condição de degenerescência, e pode-se considerar as WDs como estrelas frias e completamente degeneradas no sentido acima.

Deseja-se calcular a equação de estado, de maneira que a pressão P e a densidade de energia ϵ sejam função da densidade numérica ρ , ou a pressão em função da densidade de energia $P(\epsilon)$. Para isto, a densidade numérica, ρ , é obviamente obtida somando em relação a todos os estados ocupados em (2.3) e multiplicando pela degenerescência do estado do momento. A densidade de

energia, ϵ , é obtida somando sobre $\sqrt{k^2 + m^2}$. Cada tipo de férmion (n, p^+, e^-) contribui para a densidade de energia, pressão e densidade numérica, então temos

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{f}{2\pi^2} \int_0^{k_F} k^2 \sqrt{k^2 + m^2} dk, \\ P &= \frac{1}{3} \frac{f}{2\pi^2} \int_0^{k_F} \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + m^2}} k^2 dk, \\ \rho &= \frac{f}{2\pi^2} \int_0^{k_F} k^2 dk.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Na equação acima, f denota a degenerescência de cada estado de momento ($f = 2$ para cada tipo de férmions que corresponde às duas projeções do spin $\pm 1/2$). O limite superior nas integrais é o momento de Fermi, k_F .

Escolher um valor para k_F é equivalente escolher a densidade numérica de férmions que, de acordo com as unidades de ϵ e P , pode ser convenientemente escrito em unidades fm^{-4} ou convertidos para $MeV \cdot fm^3$ multiplicando por $\hbar c$.

As integrais podem ser obtidas [69]

$$\begin{aligned}\int_0^{k_F} k^2 \sqrt{k^2 + m^2} dk &= \frac{1}{4} \left[k_F (k_F^2 + m^2)^{3/2} - \frac{1}{2} m^2 k_F \sqrt{k_F^2 + m^2} - \frac{1}{2} m^4 \ln \left(\frac{\sqrt{k_F^2 + m^2} + k_F}{m} \right) \right], \\ \int_0^{k_F} \frac{k^4}{\sqrt{k^2 + m^2}} dk &= \frac{1}{4} \left[k_F^3 \sqrt{k_F^2 + m^2} - \frac{3}{2} m^2 k_F \sqrt{k_F^2 + m^2} + \frac{3}{2} m^4 \ln \left(\frac{\sqrt{k_F^2 + m^2} + k_F}{m} \right) \right], \\ \int_0^{k_F} \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + m^2}} dk &= \frac{1}{2} \left[k_F \sqrt{k_F^2 + m^2} - m^2 \ln \left(\frac{\sqrt{k_F^2 + m^2} + k_F}{m} \right) \right],\end{aligned}$$

e como $f = 2$ para cada tipo de férmion, obtemos

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{1}{4\pi^2} \left[\mu k_F \left(\mu^2 - \frac{1}{2} m^2 \right) - \frac{1}{2} m^4 \ln \left(\frac{\mu + k_F}{m} \right) \right], \\ P &= \frac{1}{12\pi^2} \left[\mu k_F \left(\mu^2 - \frac{5}{2} m^2 \right) + \frac{3}{2} m^4 \ln \left(\frac{\mu + k_F}{m} \right) \right], \\ \rho &= \frac{k_F^3}{3\pi^2},\end{aligned}\tag{2.6}$$

com $\mu = \sqrt{k_F^2 + m^2}$ sendo o potencial químico e k_F é o momento de Fermi. Pode-se eliminar k_F em favor de ρ nas equações acima, produzindo então $\epsilon(\rho)$ e $P(\rho)$.

Continuando com o cálculo da equação de estado, queremos minimizar a densidade de energia total dos nêutrons, prótons e elétrons $\epsilon(\rho_n, \rho_p, \rho_e) = \epsilon(\rho_n) + \epsilon(\rho_p) + \epsilon(\rho_e)$ para uma densidade de bárions fixa $\rho = \rho_n + \rho_p$, sujeito à condição de neutralidade de carga $\rho_p = \rho_e$. Isto pode ser feito pelo método dos multiplicadores de Lagrange [70], construindo a função que se deseja extremizar. Portanto, pode-se obter uma expressão para o equilíbrio químico

$$\mu_e + \mu_p = \mu_n.\tag{2.7}$$

Uma vez que μ_e é o potencial químico do elétron, ele corresponde a uma unidade de carga elétrica negativa, enquanto que μ_n corresponde à unidade sem carga elétrica, isto é, o nêutron.

Portanto, a expressão (2.7) garante que os níveis de partículas são preenchidos a tal ponto que, nenhuma energia pode ser extraída do gás por um nêutron sofrendo um decaimento beta ou um próton (decaimento beta inverso). Naturalmente todos os níveis são Fermi–bloqueados debaixo das energias de Fermi.

Prosseguindo com a busca pelo mínimo de energia total em densidade de bárions fixa e sujeita à neutralidade de carga, observamos que os momentos de Fermi dos núcleons, k_n e k_p e a densidade de bárions estão relacionados por

$$\frac{1}{3\pi^2}(k_n^3 + k_p^3) = \rho, \quad (2.8)$$

a condição de neutralidade de carga pode ser escrita como

$$k_p = k_e. \quad (2.9)$$

As equações (2.8) e (2.9) junto com (2.7) podem ser usadas para determinar k_n , k_p e k_e , tal que a energia é minimizada sujeita às condições declaradas. Fazendo uma análise de k_p e k_n , achamos que $k_p^2 = 1.40 MeV^2 = 3.60 \times 10^{-5} fm^{-2}$ é o mínimo valor positivo de k_p , para que $k_n = 0$ possa ser finita.

Assim, abaixo da densidade $\rho = k_p^3/3\pi^2 = 7.29 \times 10^{-9} fm^{-3}$ ou da densidade de energia $\epsilon \sim \rho m_p = 3.47 \times 10^{-8} fm^{-4} = 1.22 \times 10^7 g/cm^3$, um gás de Fermi com carga neutra é uma mistura igual de prótons e elétrons sem nêutrons. Portanto, abaixo deste limiar de nêutrons temos simplesmente $k_p = (3\pi^2\rho)^{1/3}$, $k_e = k_p$ e $k_n = 0$ e, conseqüentemente, podemos computar a densidade de energia e a pressão a partir de (2.6) ou na aproximação de baixas densidades.

O modelo do gás de Fermi para uma equação de estado introduz alguns princípios importantes para a matéria densa tais como: a composição de equilíbrio da matéria, neutralidade de carga e o papel do princípio de Pauli. As direções em que o modelo pode ser melhorado incluem:

1. Introdução de espécies adicionais de bárions, tais como híperons.
2. Considerar interação nuclear.
3. Uma propriedade da matéria nuclear, a saber, a preferência energética por um número igual de nêutrons e prótons, efeitos do módulo da força de Coulomb (preferência pela simetria de isospin).
4. Transições de fase, tais como quarks desconfiados ou condensação de káons [71, 72].
5. A possibilidade de que os núcleons se juntem formando núcleos numa rede cristalina onde os elétrons estão nos interstícios. Este melhoramento veremos mais adiante.

Uma observação final em relação à formulação para a densidade de energia e pressão é que as equações (2.6) são expressões exatas para a equação de estado dentro das limitações do modelo do gás de Fermi, embora seja uma base pobre para a computação numérica no caso em que o momento da partícula é muito pequeno em comparação com sua massa. Nesta situação, devemos derivar os limites não relativísticos das expressões exatas e usá-las para calcular as contribuições para a densidade de energia e pressão.

2.4.1 Limites de Altas e Baixas Densidades

Tanto pela razão numérica mencionada acima quanto para uma interessante discussão parcialmente analítica de anãs brancas como politrópicas, derivamos os limites de altas e baixas densidades das expressões do gás de Fermi exatas, equações (2.6) e (2.5), respectivamente

O limite de *altas densidades* ou limite relativístico ($k \gg m$) é quando m não é ignorado, e ultra relativístico se m é ignorado. Logo, os resultados são

$$\begin{aligned}\epsilon &\cong \frac{1}{4\pi^2} \left[k^4 - \frac{1}{2} m^4 \ln \left(\frac{2k}{m} \right) \right], \\ P &\cong \frac{1}{12\pi^2} \left[k^4 + \frac{3}{2} m^4 \ln \left(\frac{2k}{m} \right) \right].\end{aligned}\quad (2.10)$$

Os termos logarítmicos são pequenos quando comparados com k^4 no limite ultra relativístico, de modo que

$$\epsilon \rightarrow 3P \cong \frac{1}{4\pi^2} (3\pi^2 \rho)^{4/3}, \quad (\text{altas densidades, } k \gg m), \quad (2.11)$$

onde ρ é a densidade do tipo de férmions considerados.

Para o limite de *baixas densidades* ($k \ll m$), expandindo em k/m , podemos achar diretamente da expressão integral (2.5) o seguinte

$$\begin{aligned}\epsilon &\cong \frac{m^4}{\pi^2} \left[\frac{1}{3} \left(\frac{k}{m} \right)^3 + \frac{1}{10} \left(\frac{k}{m} \right)^5 - \frac{1}{56} \left(\frac{k}{m} \right)^7 + \frac{1}{144} \left(\frac{k}{m} \right)^9 \right], \\ P &\cong \frac{m^4}{3\pi^2} \left[\frac{1}{5} \left(\frac{k}{m} \right)^5 - \frac{1}{14} \left(\frac{k}{m} \right)^7 + \frac{1}{24} \left(\frac{k}{m} \right)^9 \right].\end{aligned}$$

Para densidades muito baixas, a aproximação não relativística envolve somente os termos para k^5 , assim, quando escrevemos em termos de ρ , eles aparecem como

$$\begin{aligned}\epsilon &\cong \rho m + \frac{1}{10\pi^2 m} (3\pi^2 \rho)^{5/3}, \\ P &\cong \frac{1}{15\pi^2 m} (3\pi^2 \rho)^{5/3}, \quad (\text{baixas densidades, } k \ll m).\end{aligned}\quad (2.12)$$

Observa-se que o termo de ϵ proporcional a ρ não contribui à pressão. Essas são as contribuições de cada tipo de férmion para a equação de estado. Naturalmente, densidades “*baixas*” e “*altas*” têm significados diferentes para elétrons e núcleons. Por exemplo, no domínio $m_e < k_e = k_p < m_p$, os elétrons são relativísticos ($k_e > m_e$), mas os prótons não são relativísticos ($k_p < m_p$). Portanto, o modelo do gás de Fermi é pensado ser uma mistura igual de prótons e elétrons abaixo do limiar de nêutrons ($\epsilon \approx 10^7 \text{ g/cm}^3$).

2.4.2 Anãs Brancas Newtonianas Politrópicas

Os resultados obtidos para uma equação de gás ideal podem servir para um modelo simples da estrutura das anãs brancas. No entanto, o derivado na seção precedente pode ser usado para uma descrição que reconheça que as WDs não consistam em um gás de núcleons e elétrons, mas sim que os núcleons são agrupados em núcleos (ou íons) como hélio, carbono e oxigênio.

Para neutralidade de carga, se requer: $\rho_p = \rho_e$ ou, equivalentemente, $k_p = k_e$. Lembre-se que a matéria de carga neutra, consiste apenas em prótons e elétrons abaixo de certa densidade nuclear. O momento correspondente ao limiar de nêutrons, com $\rho = k_p^3/3\pi^2 = 7.29 \times 10^{-9} fm^{-3}$, é

$$k_p = k_e = 0.00605 fm^{-1}, \quad (\text{limiar de nêutrons}). \quad (2.13)$$

Isto, se comparado com a massa dos elétrons e prótons

$$m_e = 0.511 MeV = 0.511/197 fm^{-1} = 0.00259 fm^{-1}, \quad m_p = 4.76 fm^{-1}, \quad (2.14)$$

mostra que, muito abaixo do limiar de nêutrons, os elétrons não são relativísticos. Logo, abaixo do limiar de nêutrons (2.13) e (2.12), temos que a pressão do elétron é muito maior do que a dos prótons

$$\frac{P_e}{P_p} = \frac{m_p}{m_e} \gg 1, \quad (k_e \ll m_e). \quad (2.15)$$

Por outro lado, os elétrons são relativísticos acima do limiar de nêutrons como visto: ($k_e > m_e$). Acima do limiar até a condição onde as densidades de nêutrons e prótons são iguais (como nos núcleos), os elétrons são relativísticos e os núcleons não são relativísticos, $k_n, k_p \ll m_p$. Para elétrons relativísticos das relações (2.13) e (2.11) pode-se achar

$$\frac{P_e}{P_p} = \frac{5m_p}{4k_e} \gg 1, \quad (m_e \ll k_e \ll m_p). \quad (2.16)$$

As duas equações acima mostram que no domínio das anãs brancas definido por

$$k_p \text{ e } k_n \ll m_p, \quad (\text{Domínio das Anãs Brancas}), \quad (2.17)$$

os elétrons (sejam eles relativísticos ou não) contribuem praticamente para toda a pressão, enquanto que os núcleons contribuem para a densidade de energia. Este é um fato fundamental da física das anãs brancas, proposta por R. H. Fowler [73], quem reconheceu que elas são apoiadas contra o colapso gravitacional pela pressão de elétrons degenerados como se discutiu no domínio das anãs brancas até o ponto onde as densidades de nêutrons e prótons são aproximadamente iguais.

No entanto, energeticamente falando, devido à atração de curto alcance entre os núcleons, um gás diluído de núcleos é um estado de menor energia do que um gás diluído de nêutrons, prótons e elétrons, ou seja, os núcleons são ligados em núcleos por cerca de $8 MeV$ por núcleon. Como os núcleons não contribuem de forma apreciável para a pressão, logo, podemos considerar que eles estão ligados em núcleos. Expressamos a densidade de energia como um múltiplo da massa nominal m_N de um núcleon ligado em um núcleo vezes seu número. Logo, o número de núcleons no núcleo é expressado como um múltiplo $\nu = (\rho_p + \rho_n)/\rho_e$ vezes a densidade eletrônica ρ_e . Assim, a densidade de energia é $\epsilon = \rho_e m_N \nu$, com ν um parâmetro usado para representar a proporção núcleon-elétron da espécie nuclear dominante, em particular, para anãs brancas de 4He , ${}^{12}C$ ou ${}^{16}O$, $\nu = 2$.

Portanto, notamos que desde sua definição podemos escrever: $\rho_n = \rho_p(\nu - 1)$ para $\nu \geq 1$. No domínio das anãs brancas (2.17), pode-se confirmar que a pressão de elétrons é sempre menor que a densidade de energia do elétron

$$\begin{aligned}\frac{P_e}{\epsilon_e} &\approx \frac{1}{5} \left(\frac{k_e}{m_e} \right)^2 \ll 1, \quad (k_e < m_e), \\ \frac{P_e}{\epsilon_e} &\approx \frac{1}{3}, \quad (k_e > m_e).\end{aligned}\tag{2.18}$$

A própria densidade de energia dos elétrons é pequena no tocante à densidade de massa em repouso dos núcleons, logo pode-se escrever

$$P \ll \epsilon, \quad 4\pi r^3 P \ll M(r), \quad \frac{2M(r)}{r} \ll 1,\tag{2.19}$$

as quais asseguram que a aproximação newtoniana é válida. A última relação decorre do fato de que nenhuma região da estrela pode estar dentro de seu raio de Schwarzschild [74].

Considerando que a pressão em r suporta todo o material acima de r , ela deve aumentar monotonicamente da borda para o centro da estrela. No âmbito da aproximação newtoniana, as equações (2.1) e (2.2) podem ser manipuladas convenientemente para obter-se

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\epsilon} \frac{dP}{dr} \right) = 4\pi r^2 \epsilon,\tag{2.20}$$

que é a equação que governa a estrutura de uma estrela newtoniana. Estas definem um parâmetro de família de estrelas, às vezes referida como *sequência* para qualquer equação de estado específica. A densidade de energia central $\epsilon_c = \epsilon(0)$ é um meio conveniente de parametrizar o contínuo de estrelas pertencentes à sequência. Neste instante, pode-se derivar uma sequência de anãs brancas. A equação de estado pode ser aproximada pela seguinte equação no domínio das anãs brancas (2.17).

$$P = K\epsilon^{1+1/n} = K\epsilon^\gamma,\tag{2.21}$$

com n o índice politrópico, γ o expoente politrópico e K a constante politrópica. As estrelas com tal equação de estado são conhecidas como *politrópicas*. O expoente gama γ na equação (2.21) é uma constante que tem dois valores limitantes dependendo se os elétrons são relativísticos (altas densidades) ou não (baixas densidades). O caso em que eles são não relativísticos temos o índice adiabático $n = 3/2$ ($\gamma = 5/3$) e K_{nr} (constante politrópica não relativística), e o caso onde são ultra relativísticos, $n = 3$ ($\gamma = 4/3$) e K_{ur} (constante politrópica ultra relativística) [75]

$$\begin{aligned}K_{nr} &= 3.125 \times 10^{12} \text{cm}^2 / \text{erg}^{2/3}, \\ K_{ur} &= 4.889 \times 10^{14} \text{erg}^{2/3} \cdot \text{cm.s}.\end{aligned}\tag{2.22}$$

As condições de contorno para (2.20) podem ser achadas tomando $r \rightarrow 0$, e mostra que para $\epsilon(0)$ finito, poderemos obter $P'(0) = dP/dr = 0$. Para um politrópo, $P' = \gamma(\epsilon'/\epsilon)P$ é claro que

$\epsilon(0) \neq 0$ e, poderemos ter $\epsilon'(0) = 0$. Portanto, as condições sobre (2.20) são

$$\epsilon(0) = \epsilon_c \quad e \quad \epsilon'(0) = 0. \quad (2.23)$$

É possível também parametrizar a equação (2.20) para obter a equação de Lane-Emden que pode ser integrada numericamente para vários índices politrópicos e achar a estrutura da estrela [56, 63].

Com o domínio das anãs brancas, podem-se discutir duas regiões de acordo se k_e é maior ou menor do que a massa do elétron. Em ambos os casos, a densidade de energia é dominada pela densidade de massa de repouso dos núcleons se eles estão livres ou ligados formando núcleos, ademais, a pressão dos elétrons domina sobre a pressão dos prótons inclusive na região $k_p = k_e \ll m_e \ll m_p$. Por outro lado, os nêutrons estão completamente ausentes nesta região (na equação de estado no modelo do gás de Fermi) porque, como foi mostrado, o valor de k_e para o limiar de nêutrons é maior do que m_e .

Assim temos o valor de K_{nr} em (2.21) para $\gamma = 5/3$ (região de elétrons não relativísticos) e entendemos que estamos lidando com anãs brancas mais leves. Um limite da densidade destas estrelas pode ser estimado para o regime $k_e < m_e$, isto é (ver referência [63])

$$\epsilon \cong m_p \frac{m_e^3}{3\pi^3} = 9.8 \times 10^5 g/cm^3 \sim 1 \times 10^6 g/cm^3. \quad (2.24)$$

Nesta faixa de anãs brancas com $\gamma = 5/3$, a massa é uma função crescente da densidade central, e o raio é uma função decrescente (para qualquer $\gamma < 2$). Uma diminuição do raio com um aumento de massa é uma propriedade geral das estrelas degeneradas, e a razão física é que a atração gravitacional cresce à medida que a massa aumenta, causando uma maior compactação da estrela.

Na região ultra relativística ($m_e \rightarrow 0$), se encontra o famoso valor limite de massa de Chandrasekhar para anãs brancas. Posto que a pressão dos elétrons domina sobre as pressões nucleares, podemos dizer que os núcleos fornecem para a massa, mas com pouca pressão em comparação aos elétrons que são leves e rápidos. Dessa forma, temos o valor de K_{ur} para $\gamma = 4/3$ em (2.21), que representa a equação de estado no limite de elétrons ultra relativísticos através da estrela. Neste limite, a massa é independente da densidade central e o raio tende para zero quando $\gamma \rightarrow 4/3$ [65]. Assim, obtém-se a massa limite

$$M = 5.87\nu^{-2}M_\odot, \quad (2.25)$$

com ν que representa a relação núcleon-elétron (A/Z) da espécie nuclear dominante. Para anãs brancas feitas de: He, C ou O, esse parâmetro é $\nu = 2$. Logo, a equação (2.25) para o limite de massa de Chandrasekhar é o valor numérico na região $m_e \ll k_e = k_p \ll m_p$ que é bem acima do limiar de nêutrons. Portanto, poderemos ter números aproximadamente iguais de nêutrons e prótons para o caso de 4He , ${}^{12}C$ e ${}^{16}O$. Assim, de (2.25) encontramos que $M_{Ch} \approx 1.44M_\odot$, sendo uma estimativa simples da massa máxima para as anãs brancas [76, 77].

Finalmente, uma sequência de anãs brancas que vai desde baixas até altas densidades ou, correspondentemente, de $k \ll m_e$ até $k \gg m_e$, tem uma equação de estado em dois limites

politrópicos, e que o índice politrópico cai desde $\gamma = 5/3$ até $\gamma = 4/3$ ao longo da sequência de aumento na densidade central. Cabe resaltar que o índice politrópico alcança o valor $\gamma = 4/3$ só com todos os elétrons da estrela tornando-se ultra relativísticos. Neste limite, o raio é zero e a densidade infinita. Ao longo da sequência de anãs com densidades centrais crescentes, o raio diminui à medida que a massa aumenta em direção ao valor limite M_{Ch} em (2.25). A condição para a validade do limite de Chandrasekhar é que todos os elétrons sejam ultra relativísticos. Vale notar que o limite newtoniano obtido pelo Chandrasekhar é um limite assintótico, no entanto, o limite de anãs brancas reais é de natureza diferente [65]. A massa limitante para WDs reais é atingida ao longo da sequência de configurações de equilíbrio, mas para densidades finitas. Contudo, Chandrasekhar descobriu que uma configuração completamente degenerada tem um limite de massa quando se leva em consideração a relatividade especial para a equação de estado.

2.4.3 Resultados: Anãs Brancas Newtonianas Politrópicas

Lembrando nosso objetivo, estamos interessados nas propriedades estáticas globais da estrela, a saber, a relações massa-raio. Isto é possível a partir das equações de estrutura newtonianas (2.1) e (2.2), juntamente com a equação de estado politrópica (2.21), tanto para altas, quanto para baixas densidades, dadas as constantes politrópicas (2.22). Este sistema de equações diferenciais acopladas em $P(r)$ e $M(r)$ é integrado numericamente usando o método de Runge Kutta de quarta ordem (apêndice C). Com a densidade de energia central $\epsilon(r = 0) = \epsilon_c$, integramos de $r = 0$ até $r = R$. Na superfície, a pressão é nula: $P(r = R) = 0$. Com isso, obtemos o raio R da estrela e, posteriormente a sua massa gravitacional M . O código numérico foi feito em MATLAB. Desta forma, a equação de estado politrópica para os dois limites é mostradas na Figura 2.2. Observamos que a curva vermelha é mais *suave*. Por conseguinte, teremos estrelas mais leves desde que pouco aumento na densidade central tem pouco aumento na pressão suportando assim, menor massa.

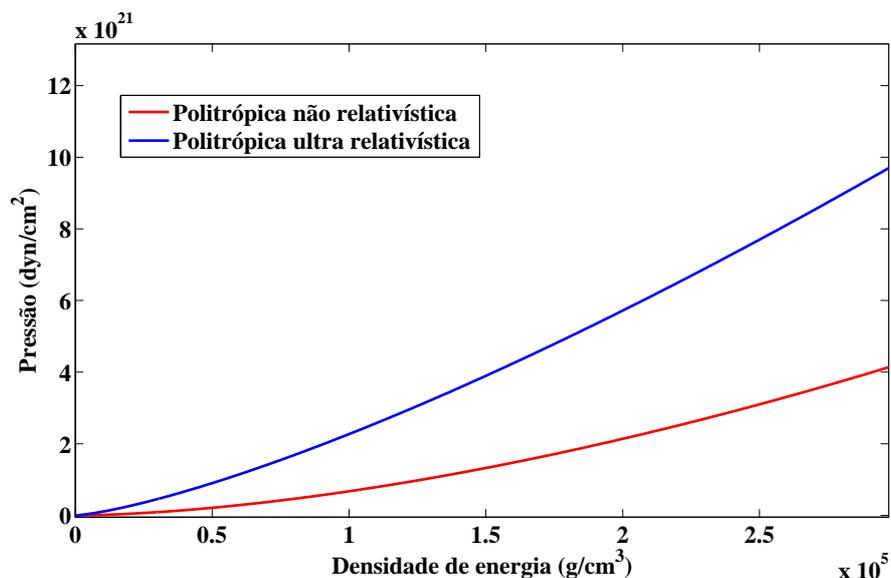


Figura 2.2: Equação de estado politrópica para os limites de altas (curva azul) e baixas (curva vermelha) densidades.

A Figura 2.3 mostra uma sequência de 100 estrelas anãs brancas com equação de estado politrópica para altas e baixas densidades com ϵ_c entre $1 \times 10^5 - 1 \times 10^6 g/cm^3$ e $1 \times 10^6 - 1 \times 10^8 g/cm^3$ nessa ordem. Também, na Tabela 2.1 apresentamos alguns valores das massas e raios para estrelas em baixas densidades da Figura 2.3. Estes resultados mostram que para elétrons ultra relativísticos, a massa independe da densidade central e temos um único valor para massa: M_{Ch} . Em contrapartida, para elétrons não relativísticos, enquanto aumenta a densidade central, a massa aumenta mais o raio diminui, isto é uma característica das estrelas degeneradas.

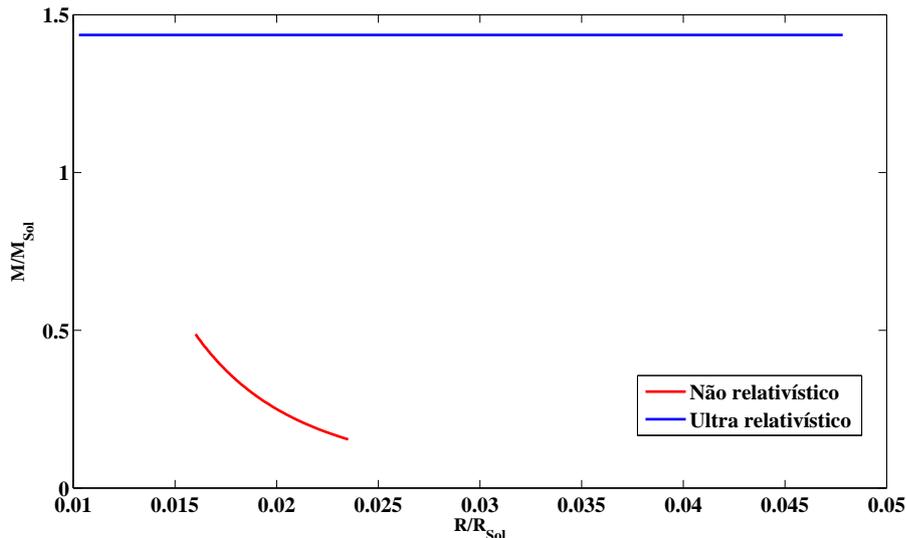


Figura 2.3: Relação massa-raio: sequência de 100 WDs newtonianas com equação de estado politrópica em altas e baixas densidades com ϵ_c : $1 \times 10^5 - 1 \times 10^6 g/cm^3$ e $1 \times 10^6 - 1 \times 10^8 g/cm^3$, respectivamente.

Por outro lado, na Figura 2.4 mostramos o perfil massa-raio para uma anã branca newtoniana politrópica no limite de altas e baixas densidades. Elas atingem massas e raios dados por: $M = 1.436M_{\odot}$, $R = 0.0022R_{\odot}$ para $\epsilon_c = 1 \times 10^7 g/cm^3$ e, $M = 0.2671M_{\odot}$, $R = 0.01958R_{\odot}$ para $\epsilon_c = 3 \times 10^5 g/cm^3$, nessa ordem. Além do mais, na Tabela 2.2 temos que para qualquer densidade central dentro do domínio das anãs brancas, esperamos que elas sempre atinjam a massa limite de Chandrasekhar tal como revela a curva azul na Figura 2.3, sendo que a massa independe da densidade central.

Tabela 2.1: Valores das massas e raios para WDs em baixas densidades tomados da Figura 2.3.

M/M_{\odot}	R/R_{\odot}
0.2504	0.01999
0.3084	0.01866
0.3541	0.01781
0.3999	0.01710
0.4507	0.01643
0.4831	0.01606

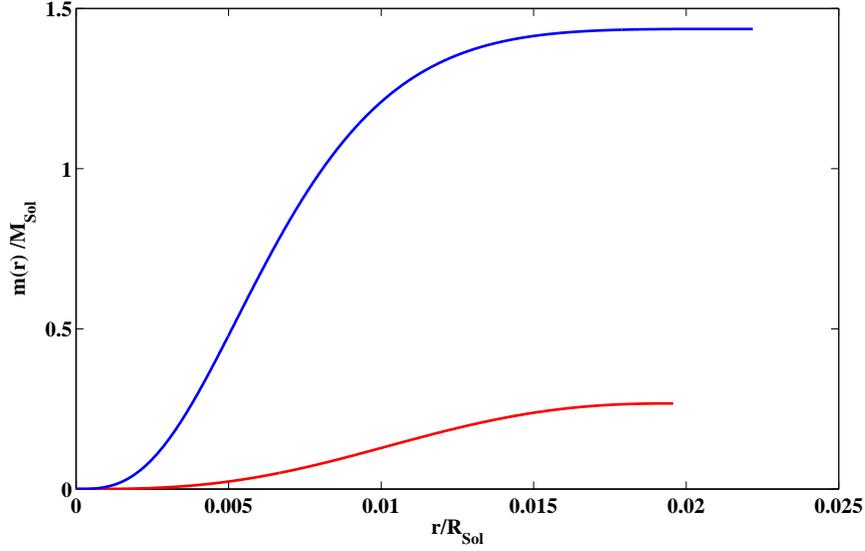


Figura 2.4: Perfil massa-raio para uma WD newtoniana com equação de estado politrópica: ultra relativística com $\epsilon_c = 10^7 g/cm^3$ (curva azul) e, não relativística com $\epsilon_c = 3 \times 10^5 g/cm^3$ (curva vermelha).

Tabela 2.2: Valores das massas e raios para WDs newtonianas politrópicas em altas densidades centrais.

$\epsilon_c(g/cm^3)$	M/M_\odot	R/R_\odot
10^6	1.436	0.04784
10^7	1.436	0.02218
10^8	1.436	0.01028

2.5 Melhoramento em Modelos de Anãs Brancas

Até agora, temos considerado a relação nêutron-próton fixa. No entanto um processo importante foi negligenciado nessa aproximação. À medida que a energia de Fermi do elétron aumenta, os elétrons de alta energia são absorvidos pelos prótons no processo de decaimento beta inverso. Este processo é referido também como neutronização e diminui a pressão dos elétrons de suporte ao longo da sequência de estrelas pelo aumento da massa, levando a sequência de anãs brancas até um fim de densidades centrais da ordem de $10^9 g/cm^3$. Portanto, o limite de massa para anãs brancas tem a ver com a sua composição interna de mudança [78], onde é questionada a instabilidade ocasionada pela captura eletrônica de elétrons energéticos. Assim, as densidades centrais das anãs brancas variam aproximadamente duas ordens de magnitude acima e abaixo de $10^7 g/cm^3$.

2.5.1 Natureza da Matéria nas Densidades das Estrelas Anãs Brancas

Alguns dos princípios envolvidos foram encontrados no modelo simples de um gás de Fermi degenerado de nêutrons, prótons e elétrons livres em equilíbrio. No entanto, a principal objeção que se pode levantar contra o modelo, no que diz respeito às anãs brancas, é que em densidades inferiores às dos núcleos normais, e de fato as densidades das WDs estão muito abaixo, é ener-

geticamente mais favorável para os núcleons se juntarem em núcleos e explorar a força nuclear atraente a curto alcance do que estarem uniformemente dispersos a uma densidade mais baixa [79, 80].

Uma WD tem uma enorme faixa de densidades desde seu centro até sua superfície. Por exemplo Sirius B, com $M = 1.053M_{\odot}$ e $R = 5400km$, a sua densidade média é

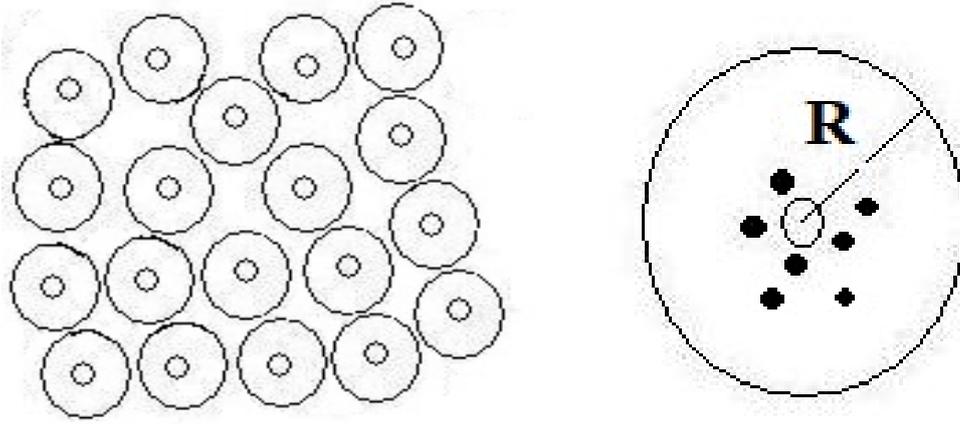
$$\bar{\epsilon} = \frac{M}{(4\pi/3)R^3} = 3.17 \times 10^6 g/cm^3 = 4.03 \times 10^5 \epsilon_{Fe} = 1.26 \times 10^{-8} \epsilon_0,$$

sendo $\epsilon_0 = 2.51 \times 10^{14} g/cm^3$ a densidade de saturação nuclear e ϵ_{Fe} a densidade do ferro. Como a densidade central é mais alta do que a média, o caráter da matéria varia apreciavelmente nesta vasta faixa de densidades. Para WDs, a constituição da matéria é influenciada pelo progenitor estelar e a extensão da queima nuclear procedente da formação delas. A combustão nuclear para as WDs cessa nas estrelas de algumas massas solares em algum elemento intermediário nos progenitores de baixa massa, de modo que as WDs são compostas de 4He , ${}^{12}C$ ou ${}^{16}O$, ou alguma mistura deles. Embora tal composição não seja o estado de energia mais baixo possível, este estado nem sempre é alcançável em um tempo finito, mesmo astronômico. Portanto, o estado mais favorecido energeticamente não é realmente alcançado em WD's. Elas são muito mais particulares (dependendo dos detalhes da evolução do progenitor em particular) do que seria se a queima nuclear tivesse alcançado até o ferro como acontece nas estrelas mais massivas [79, 81]. A condição de pressão zero na borda da estrela e densidade de energia baixa se mantém qualquer que sejam os elementos presentes na superfície. Assim, WDs podem ser constituídas de átomos que são possivelmente ionizados pelas altas temperaturas. Ao aumentar a densidade, os átomos se tornam progressivamente mais ionizados e os elétrons enchem os interstícios. Dessa forma, um arranjo na rede de Coulomb dos núcleos, no gás de elétrons, minimiza a energia. A matéria perto da superfície das WDs é semelhante exceto que o elemento mais pesado é o He , C , O ou Mg dependendo do grau da queima do progenitor.

2.5.2 Anãs Brancas Cristalinas

Sabe-se que as anãs brancas constituem a forma final para a qual as estrelas de massas $< 10M_{\odot}$ evoluem. Essa perda de massa ocorre durante sua evolução e devido à sua baixa massa, as reações termonucleares não queimam até o ferro, mas terminam em núcleos mais leves como: hélio, carbono, oxigênio, magnésio ou mistura desses elementos. Aqui se faz um cálculo simples da equação de estado para WDs compostas de uma única espécie nuclear.

Exceto nas densidades mais baixas das anãs, os átomos são comprimidos até o ponto em que os núcleos são completamente ionizados. Portanto, para uma aproximação de energia mais baixa, consideramos uma única espécie nuclear completamente ionizada imersa em um fundo de elétrons de densidade uniforme. Os núcleos carregados positivamente irão se arranjar em uma rede com estes em um sítio da rede de forma a minimizar a energia de Coulomb. Aproximamos desta situação de maneira sugerida por Wigner e Seitz [65, 53], ou seja, considerando uma esfera envolvendo cada núcleo e tocando as esferas vizinhas. Cada esfera contendo um núcleo e elétrons, será eletricamente neutra. Para uma boa aproximação, não temos interação entre núcleos e elétrons de esferas diferentes como ilustrado na Figura 2.5 (a).



(a) Aproximação da rede de Wigner e Seitz

(b) Célula contendo o núcleo e elétrons

Figura 2.5: (a) Representação da rede de Wigner e Seitz, (b) Célula de raio R , os pontos pretos são elétrons. (Recuperado de [82]).

Agora, considere-se uma esfera como da Figura 2.5 (b). A maior parte da sua massa é contribuída pelos núcleos, enquanto que a maior parte da pressão pelos elétrons. A energia total em cada esfera é formada por: a massa nuclear, a massa do elétron e a energia cinética, a energia de repulsão de Coulomb entre os elétrons e a energia de Coulomb atrativa entre o mar de elétrons e o núcleo.

Em primeiro lugar, calculamos a energia necessária para manter os elétrons na “célula” de raio R , que é um cálculo familiar. Para isto, precisamos integrar a interação entre a carga dentro do raio r e a carga em uma casca esférica em r de espessura dr , assim

$$E_{self} = e^2 \int_0^R \frac{1}{r} \left(\frac{4\pi r^3}{3} \right) (4\pi r^2 dr \rho_e) = \frac{3(Ze)^2}{5R}, \quad (2.26)$$

onde a densidade numérica de elétrons é dada por

$$Z = V \rho_e, \quad e \quad V = \frac{4\pi}{3} R^3. \quad (2.27)$$

Em segundo lugar, como Z é o número atômico dos núcleos e, portanto, o número de elétrons por “célula”, o gás de elétrons terá uma interação atrativa com os núcleos no centro da célula

$$E_{int} = - \int \frac{1}{r} (Ze) (4\pi r^2 dr e \rho_e) = - \frac{3}{2} \frac{(Ze)^2}{R}, \quad (2.28)$$

Finalmente, somando as equações (2.26) e (2.28), obtemos a energia da rede

$$E_{lat} = - \frac{9}{10} \frac{(Ze)^2}{R}. \quad (2.29)$$

Eliminando R de (2.29) em termos de V , obtemos a contribuição da rede para a pressão

$$P_{lat} = - \frac{\partial E_{lat}}{\partial V} = - \frac{3}{10} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} Z^{2/3} e^2 \rho_e^{4/3}. \quad (2.30)$$

Para calcular a equação de estado na presente aproximação para uma espécie nuclear pura, poderemos escolher a densidade de bárions $\rho = A/V$ para o caso em que a célula de raio R é dada pela solução de

$$A = \frac{4\pi}{3} R^3 \rho \quad \Rightarrow \quad R = \left(\frac{3A}{4\pi\rho} \right)^{1/3}, \quad (2.31)$$

com A o número atômico da espécie nuclear (número total de núcleons) e Z o número de prótons. Para tal densidade escolhida ρ , a densidade de elétrons é $\rho_e = (Z/A)\rho$. Se consideramos os elétrons livres, como um gás de Fermi degenerado com número de onda máximo

$$k_e = (3\pi^2 \rho_e)^{1/3} = \left(3\pi^2 \frac{Z}{A} \rho \right)^{1/3}, \quad (2.32)$$

tal que, a densidade de energia e a pressão são denotadas por $\epsilon_e(k_e)$ e $P_e(k_e)$ respectivamente, podemos calculá-las das relações (2.6), (2.11) e (2.12).

As massas dos núcleos são medidas experimentalmente. Essas massas são medidas tipicamente em massas atômicas, assim, subtraímos as massas de repouso dos elétrons, mas ignoramos as suas ligações atômicas.

A densidade de energia é: $\epsilon = E_{Total}/V$ com $V = A/\rho$ o volume. Desse modo, a densidade de energia e a pressão são

$$\begin{aligned} \epsilon(\rho) &= \frac{\rho}{A} \left(m(A, Z) - Zm_e - \frac{9}{10} \frac{(Ze)^2}{R} \right) + \epsilon_e(k_e), \\ P(\rho) &= P_e(k_e) - \frac{3}{10} \left(\frac{4\pi}{3} \right)^{1/3} Z^{2/3} e^2 \rho_e^{4/3}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

onde $m(A, Z)$ é a massa atômica. Por exemplo, para o hélio, carbono e oxigênio têm-se respectivamente: $m(^4He) = 4.00260326u$, $m(^{12}C) = 12u$ e $m(^{16}O) = 15.99491502u$, em unidades de massa atômica ($1u = 931.504MeV$).

A equação de estado (2.33) não pode ser válida acima da densidade na qual os elétrons de alta energia são capturados por prótons nos núcleos, pois provocaria uma diminuição da pressão de suporte dos elétrons. Para explicar este processo, deve-se avaliar a diferença de energia em (2.33) entre um meio composto por qualquer das espécies nucleares (A, Z) , $(A - 1, Z - 1)$, ... $(A, Z - 1)$... para descobrir a menor diferença e em quais densidades.

Para estimar a menor faixa de densidades na qual a aproximação dos núcleos completamente ionizados é válida, podemos comparar o raio de Bohr da órbita interna das espécies atômicas que temos em mente com o raio da “célula” que depende da densidade do núcleon, como na relação entre A e o volume da “célula”. Para simplificar, seja $2Z \cong A$, que é exato no caso de estrelas feitas de He , C ou O , portanto, os dois raios são

$$r_Z = \frac{r_{Bohr}}{Z} = \frac{\hbar}{m_e Z e^2}, \quad R = \left(\frac{3Z}{2\pi\rho} \right)^{1/3}. \quad (2.34)$$

Assim, temos que $r_Z > R$ para densidades de bárions que satisfazem

$$\rho > \frac{3Z^4}{2\pi} \frac{1}{r_{Bohr}^3}, \quad (2.35)$$

ou densidades de energias

$$\epsilon > \rho U = 5.4Z^4 g/cm^3. \quad (2.36)$$

A gama calculada para o qual os núcleos completamente ionizados ocupam os locais da rede de Coulomb é válida para as anãs brancas de He , C , O e Mg .

A seguir, a Figura 2.6 mostra a relação massa-raio para anãs brancas de carbono, com uma equação de estado como calculada da maneira descrita nesta seção. Observam-se também, os limites de massa para as equações de estado BPS (Bethe-Baym Pethick-Sutherland-Siemens) [80, 83, 84] com uma descrição precisa de uma anã real são respectivamente $\simeq 1M_\odot$ e $1.4M_\odot$ que ilustra a dependência das propriedades primitivas das WDs na sua composição. Os dados observados sobre massa-raio delas [85] situam-se principalmente à direita da região onde se encontram os dois tipos diferentes de sequências de anãs. Os (●) mostram medidas de binários

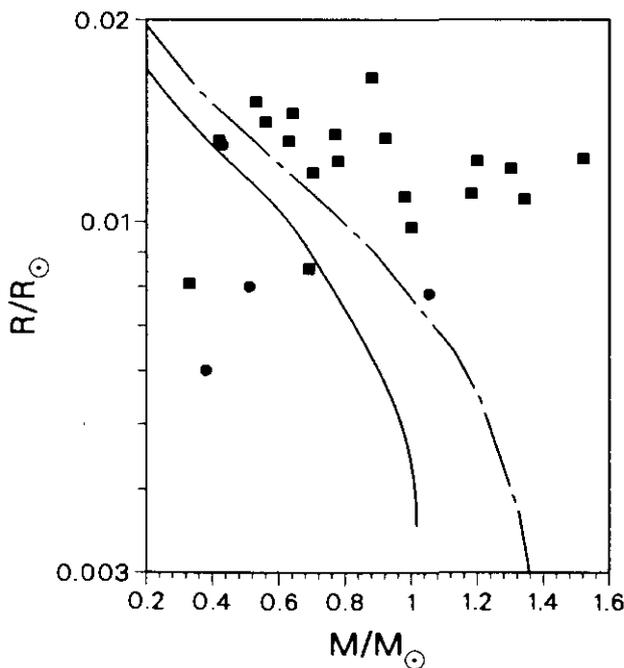


Figura 2.6: Raios das anãs brancas em comparação com a sequência de estrelas da equação de estado BPS (curva sólida) que representa a matéria de equilíbrio em cada densidade. Também para anãs brancas de Carbono curva tracejada. [para comparação usou-se $R_\odot \simeq 7 \times 10^5 km$] (Tomado de [65]).

(dando M), combinadas com medições de *redshift* (obtendo a relação M/R) que são bastante precisas. Os (■), são provavelmente, muito menos incertas. Novamente, eles envolvem a medição do deslocamento para o vermelho (ou *redshift*), mas a outra determinação independente, esta vez o raio, é obtido através da cadeia menos certa envolvendo cor e fluxo, distâncias medidas pelo paralaxe e modelos atmosféricos [85, 86].

A curva *BPS*, corresponde a uma equação de estado constituída por uma rede de Coulomb de várias espécies nucleares dependendo da densidade e, incorporado em um gás de elétrons. Assim, as espécies nucleares arranjados em uma rede representam o estado de energia mais baixo da matéria eletricamente neutra no domínio das anãs brancas. Tal equação de estado, deve produzir um sequência de anãs brancas mais compactas do que pode ser realizada na natureza dada a evolução dos progenitores. A equação de estado para o carbono, representa uma rede de núcleos de Carbono com elétrons livre. Isto é apropriado que uma anã branca seja produzida antes que o ponto final da nucleossíntese seja alcançado na evolução de seu progenitor. Essencialmente, obtém-se os mesmos resultados para estrelas puras de *He* e *O* como *C*. A razão é que o resultado pode ser racionalizado como um politrópico com uma fração de elétrons-núcleons $Z/A = 1/2$ e, com índice politrópico mudando desde não relativístico (5/3) para relativístico (4/3) ou, de baixa para altas densidades. Portanto, as equações de estado diferem apenas na pequena energia da rede e a pressão em ir do *He* para *O*.

2.5.3 Resultados: Anãs Brancas Newtonianas Cristalinas

Agora, somos capazes de computar as equações de estado para cada uma das três espécies atômicas, a saber, ${}^4\text{He}$, ${}^{12}\text{C}$ e ${}^{16}\text{O}$ como mostra a Figura 2.7. Para isto, substituímos os valores de cada massa das espécies atômicas na equação (2.33) e temos a figura abaixo.

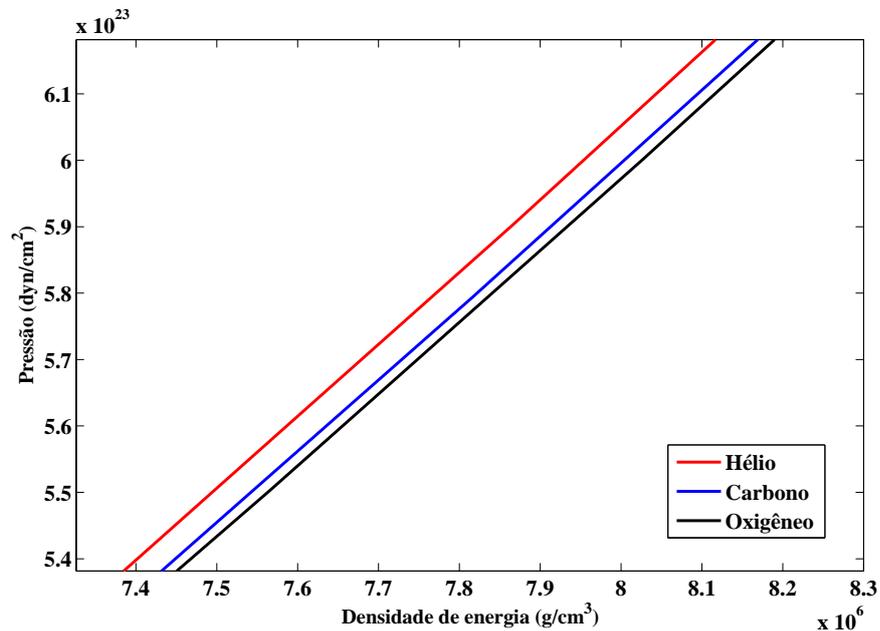


Figura 2.7: Equações de estado para cada uma das três espécies atômicas consideradas.

Com as equações de estado acima, na Figura 2.8 mostramos sequências de 100 estrelas para cada espécie, com densidades centrais entre $10^6 - 10^8 \text{ g/cm}^3$. Além disso, na Tabela 2.3 mostramos valores das massas e raios de algumas estrelas feitas de átomos de carbono tomadas daquela figura. Observamos, mais uma vez, que um aumento na massa ocasiona raios menores.

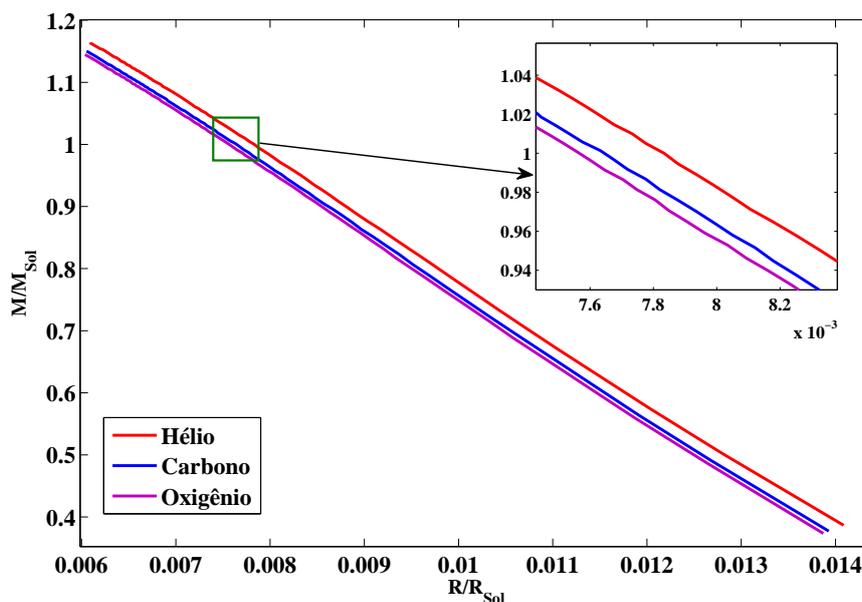


Figura 2.8: Relação massa-raio para as sequências de estrelas para as três espécies com densidades ϵ_c entre $10^6 - 10^8 \text{ g/cm}^3$.

Tabela 2.3: Valores das massas e raios para WDs newtonianas de Carbono.

M/M_\odot	R/R_\odot
0.3773	0.01393
0.4913	0.01268
0.6169	0.01138
0.7222	0.01033
0.8227	0.009372
0.9814	0.007819

Podemos comparar o perfil massa-raio para cada uma das três espécies atômicas, para isto usamos as equações de estado para cada espécie. Deste modo, temos a Figura 2.9 com densidade de energia central $\epsilon_c = 10^7 \text{ g/cm}^3$ para cada estrela, assim, os valores das massas atingidas foram: $M_{He} = 0.8013M_\odot$, $M_C = 0.7890M_\odot$ e $M_O = 0.7841M_\odot$.

Finalmente, poderemos obter as massas máximas aumentando a faixa nas densidades centrais (até $5 \times 10^{11} \text{ g/cm}^3$) para as famílias de estrelas com composições diferentes, dessa forma, obtemos a Figura 2.10 onde os pontos pretos salientam as massas máximas cujos valores estão sintetizados na Tabela 2.4.

Tabela 2.4: Valores das massas máximas para anãs brancas newtonianas cristalinas compostas de He , C e O .

Espécie nuclear	M_{max}
Hélio	$1.4211M_\odot$
Carbono	$1.4062M_\odot$
Oxigênio	$1.4003M_\odot$

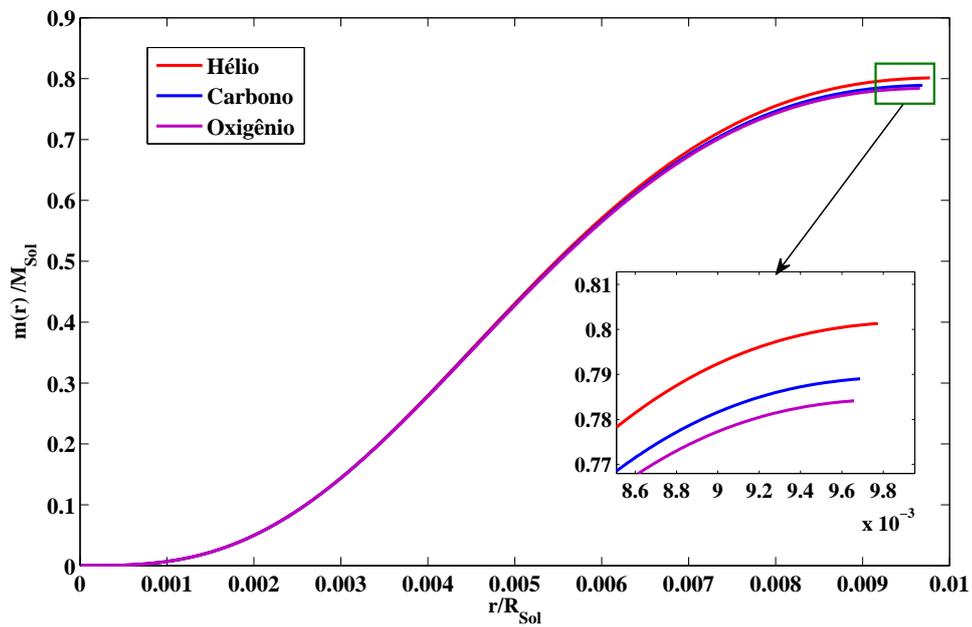


Figura 2.9: Perfil massa-raio das três espécies nucleares para $\epsilon_c = 10^7 \text{ g/cm}^3$.

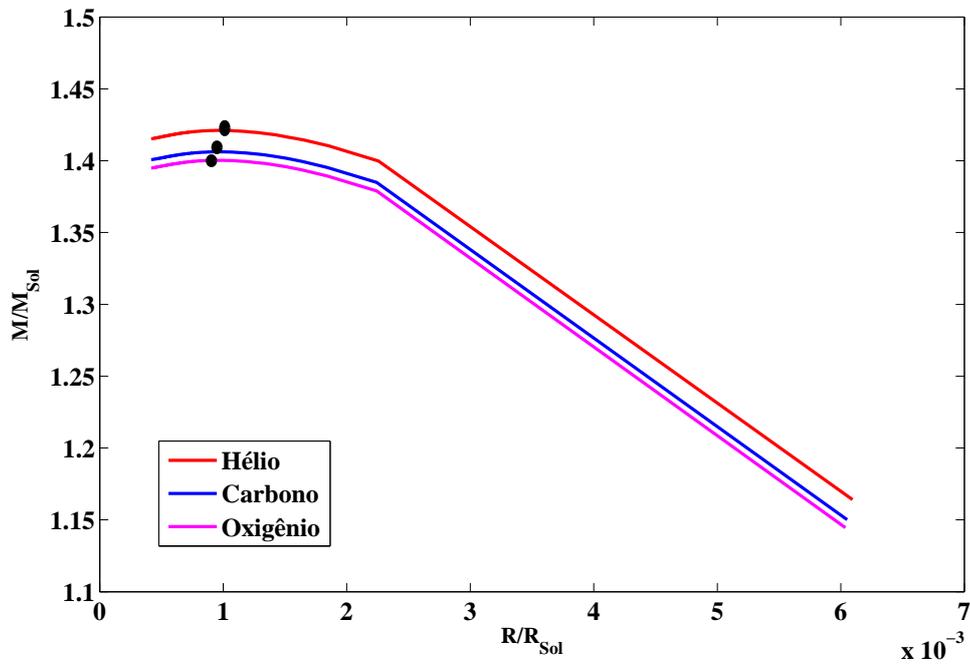


Figura 2.10: Relação massa-raio para uma família de estrelas com composições atômicas diferentes, os pontos pretos são as massa máximas para cada espécie.

Capítulo 3

Anãs Brancas Relativísticas

Dando continuidade à nossa pesquisa, neste capítulo iremos deduzir as equações de equilíbrio de Tollman-Oppenheimer-Volkoff a partir das equações de Einstein, conhecidas como equações TOV. As estrelas que seguem estas equações chamamos de estrelas relativísticas. Posteriormente, com as equações de estado vistas no capítulo 2, a saber, politrópicas e equação melhorada para o gás de Fermi, calculamos as relações massa-raio.

3.1 Equação de Equilíbrio Hidrostático TOV

No caso de uma estrela muito compacta, como as estrelas de nêutrons e de quarks, a equação (2.1) de equilíbrio hidrostático newtoniano é modificada por correções relativísticas que surgem por mudanças da métrica do espaço-tempo devidas ao efeito das altas densidades. Propostas por Tollman-Oppenheimer-Volkoff [87, 88], a solução dessas equações fornece a estrutura interna de uma estrela relativística, a saber, a massa M e o raio R . Tais estrelas são relativísticas, pois seus potenciais gravitacionais envolvidos possuem tal intensidade que a formulação newtoniana deixa de ter validade. Para verificarmos as equações TOV, faremos algumas hipóteses no sentido de simplificar a solução das equações de Einstein.

A primeira hipótese será que a matéria no interior da estrela se comporte como um fluido perfeito. Desta forma o tensor energia-momento é dado por [89]:

$$T^{\mu\nu} = -pg^{\mu\nu} + (p + \epsilon)u^\mu u^\nu, \quad (3.1)$$

onde $g^{\mu\nu}$ é o tensor métrico, p é a pressão, ϵ é a densidade de energia e $u^\mu \equiv dx^\mu/d\tau$ é a quadri-velocidade de um elemento do fluido.

A segunda hipótese é que a estrela seja esférica e estacionária. A métrica mais geral nesta condição é dada por:

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = e^{2\nu(r)}dt^2 - e^{2\lambda(r)}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2. \quad (3.2)$$

Com essa métrica podemos identificar os componentes do tensor métrico

$$\begin{aligned}
g_{00} &= e^{2\nu(r)}, \\
g_{11} &= -e^{2\lambda(r)}, \\
g_{22} &= -r^2, \\
g_{33} &= -r^2 \sin^2 \theta.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Com estas relações em mente, após alguma álgebra, podemos obter todas as componentes não nulas do tensor covariante de Ricci, assim obtém-se

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \left(-\nu'' + \lambda'\nu' - \nu'^2 - \frac{2\nu'}{r} \right) e^{2(\nu-\lambda)}, \\
R_{11} &= -\nu'' - \lambda'\nu' + \nu'^2 - \frac{2\nu'}{r}, \\
R_{22} &= (1 + r\nu - r\lambda)e^{2\lambda} - 1, \\
R_{33} &= R_{22} \sin^2 \theta.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Fora da estrela, que é o espaço vazio, as equações de Einstein são

$$R^{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R. \tag{3.5}$$

O que conduz à definição da curvatura escalar

$$R = g_{\mu\nu}R^{\mu\nu}, \tag{3.6}$$

à $R = 0$ e $R^{\mu\nu} = 0$. Aplicando estas relações na equação (3.4), encontramos a mesma solução obtida por Schwarzschild [90] para a região exterior da estrela ($r \geq R$), ou seja:

$$\begin{aligned}
g_{00}(r) &= \left(1 - \frac{2M}{r} \right), \\
g_{11} &= -\left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Agora para a região interna da estrela ($r \leq R$), devido à presença de matéria, as equações de Einstein precisam incluir o tensor energia momento ($T^{\mu\nu}$) da forma

$$G^{\mu\nu} = -8\pi T^{\mu\nu}, \tag{3.8}$$

onde $G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R$ é o tensor de Einstein. Com isso a curvatura escalar não mais se anula e precisamos calculá-la. A partir da definição da curvatura escalar equação (3.6) encontramos

$$R = e^{-2\lambda} \left(-2\nu'' + 2\lambda'\nu' - 2\nu'^2 - \frac{2}{r^2} + 4\frac{\lambda'}{r} - 4\frac{\nu'}{r} \right) + \frac{2}{r^2}, \tag{3.9}$$

com isto, podemos obter as componentes de $G^{\mu\nu}$, uma vez que já temos os elementos de $R^{\mu\nu}$, equação (3.4).

A última hipótese é de que a estrela seja estática, isto é

$$u^m = 0, \quad (m = 1, 2, 3). \quad (3.10)$$

Observando que $u_\mu u^\mu = 1$, temos que

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}. \quad (3.11)$$

Substituindo esses resultados na equação (3.1), obtemos

$$\begin{aligned} T_0^0 &= \epsilon, \\ T_m^m &= -p. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Combinando as equações (3.4), (3.9) e (3.12) encontramos as componentes do tensor de Einstein

$$G_0^0 = e^{-2\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2\lambda'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = 8\pi\epsilon(r). \quad (3.13)$$

$$G_1^1 = e^{-2\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{2\lambda'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = 8\pi p(r). \quad (3.14)$$

$$G_2^2 = e^{-2\lambda} \left(\nu'' + \nu'^2 - \lambda'\nu' + \frac{\nu' - \lambda'}{r} \right) = 8\pi p(r). \quad (3.15)$$

$$G_3^3 = G_2^2 = 8\pi p(r) \quad (3.16)$$

Integrando a equação (3.13), temos

$$e^{-2\lambda(r)} = 1 - \frac{8\pi}{r} \int_0^r \epsilon(r) r^2 dr. \quad (3.17)$$

Definiremos a massa gravitacional da estrela contida num volume de raio r como

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \epsilon(r) r^2 dr. \quad (3.18)$$

Agora, é necessário expressarmos λ' , ν' e ν'' em função de grandezas físicas como massa, raio, densidade de energia e pressão. Desta forma, isolando λ' da equação (3.13), temos

$$2r\lambda' = (1 - 8\pi r^2 \epsilon) e^{2\lambda} - 1. \quad (3.19)$$

e ν' da equação (3.14)

$$2r\nu' = (1 + 8\pi r^2 \epsilon) e^{2\lambda} - 1. \quad (3.20)$$

Tomando a derivada radial da equação (3.20), achamos

$$2r^2\nu'' = 1 + (16\pi r^2 p + 8\pi r^3 p')e^{2\lambda} - (1 - 8\pi r^2 \epsilon)e^{4\lambda}. \quad (3.21)$$

Finalmente, substituindo (3.19), (3.20) e (3.21) na equação (3.15) para obter

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{M(r)\epsilon(r)}{r^2} \left(1 + \frac{p(r)}{\epsilon(r)}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^2 p(r)}{M(r)}\right) \left(1 - \frac{2M(r)}{r}\right)^{-1}. \quad (3.22)$$

As equações (3.18) e (3.22) são conhecidas como equações Tollman-Oppenheimer-Volkoff, ou TOV (veja nas referências [87, 88]), no qual trabalhamos com $G = c = 1$ (unidades naturais). Estas equações devem ser integradas desde a origem, onde $M(0) = 0$ e $\epsilon(0) = \epsilon_c$, até que se atinja um raio R , em que a pressão é nula. Não sendo possível suportar mais massa, define-se este raio como o raio da estrela e $M(R)$ como a massa gravitacional medida nas observações. Estas equações são aplicáveis para uma distribuição de matéria relativística, composta por um fluido ideal, esfericamente simétrico e estático.

Semelhantemente, como nas equações de estrutura newtonianas, para cada equação de estado (EoS) que introduzimos nas equações TOV, obtemos uma relação única entre a massa da estrela e sua densidade central. Os três termos entre parênteses no lado direito da equação (3.22) são os fatores de correção relativísticos à teoria newtoniana provenientes da Teoria da Relatividade [91]. Todos esses termos são positivos garantindo, assim, que o gradiente de pressão seja sempre negativo, isto é, tanto maior quanto mais nos aproximamos do centro da estrela.

3.2 Aplicação para Anãs Brancas

Todas as estrelas devem respeitar leis de equilíbrio para que elas possam manter sua estrutura. Portanto, no interior das anãs brancas devem ser estabelecidas relações de equilíbrio de carga, equilíbrio químico e equilíbrio hidrostático. As duas primeiras relações de equilíbrio são impostas a partir da equação de estado dos modelos empregados já estudadas no capítulo 2, inclusive o equilíbrio hidrostático no contexto newtoniano. Resta-nos, portanto, estabelecer aqui a relação de equilíbrio entre gravidade e pressão no interior da estrela. Como o campo gravitacional de uma anã branca é intenso, o espaço-tempo fica distorcido em seu interior e à sua volta. Assim, a relação de equilíbrio deve ser estabelecida no ambiente da relatividade geral na qual aplicaremos a seguir.

3.2.1 Anãs Brancas Relativísticas Politrópicas

Da mesma forma que tratamos as equações de estrutura para estrelas newtonianas, usamos neste ponto, as equações de equilíbrio hidrostático TOV para estrelas relativísticas, levando em conta as condições de contorno para estas. Consideremos da seção anterior, as equações TOV, ou seja, (3.18) e (3.22), junto com a equação de estado politrópica (2.21) do capítulo 2. A seguir, resolvemos numericamente estas equações para achar a estrutura de uma anã branca, a saber, as relações massa-raio. Aqui mostramos os resultados numéricos, tanto para politrópos com elétrons não relativísticos quanto politrópos com elétrons ultra relativísticos.

Dese modo, na Figura 3.1 mostramos uma seqüência de 100 estrelas politrópicas para altas e baixas densidades, com valores das mesmas entre $1 \times 10^5 - 1 \times 10^6 g/cm^3$ e $1 \times 10^6 - 1 \times 10^8 g/cm^3$ respectivamente. Também, na Tabela 3.1 temos os valores das massas e raios para algumas estrelas da Figura 3.1. Onde podemos apreciar a característica das estrelas degeneradas, alías, à medida que aumenta a densidade central, a massa aumenta e o raio diminui.

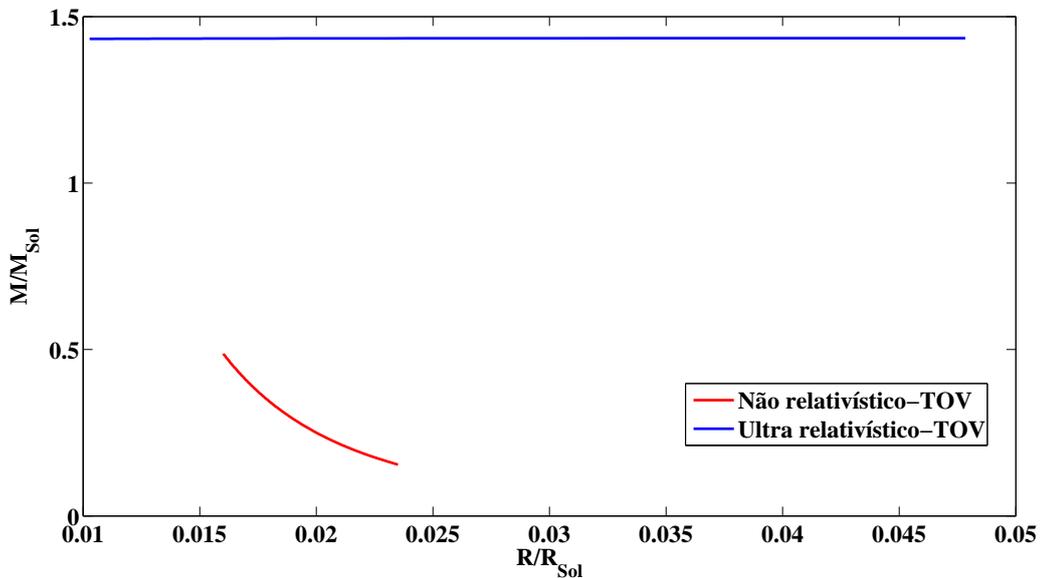


Figura 3.1: Relação massa-raio para família de estrelas com EoS politrópica em baixas densidades, com $\epsilon_c = 1 \times 10^5 - 1 \times 10^6 g/cm^3$.

Tabela 3.1: Valores das massas-raios para anãs brancas relativísticas com EoS Politrópicas em baixas densidades.

M/M_{\odot}	R/R_{\odot}
0.2503	0.01999
0.3083	0.01866
0.3540	0.01781
0.3998	0.01710
0.4506	0.01643
0.4830	0.01606

Por outro lado, a Figura 3.2, exibe o perfil massa-raio de uma anã branca relativística em altas e baixas densidades com massas e raios como segue $M = 1.435M_{\odot}$, $R = 0.02218R_{\odot}$ para $\epsilon_c = 1 \times 10^7 g/cm^3$ e, $M = 0.267M_{\odot}$, $R = 0.01958R_{\odot}$ para $\epsilon_c = 3 \times 10^5 g/cm^3$, nessa ordem. Ao mesmo tempo, se observa na Tabela 3.2 que, para qualquer densidade dentro do domínio das anãs brancas, elas atingem à massa limite de Chandrasekhar, onde todos os elétrons são ultra relativísticos dentro da estrela.

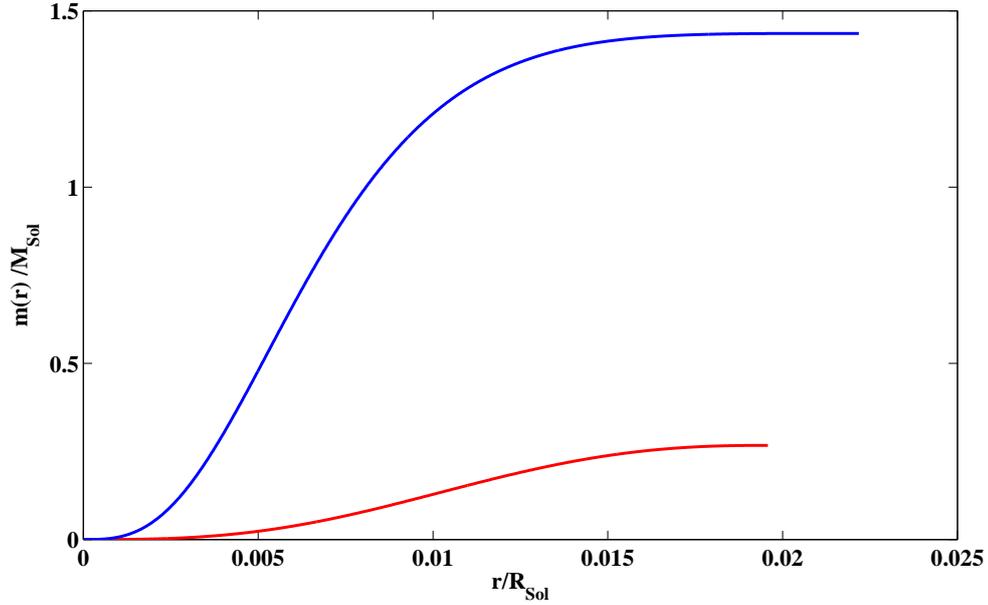


Figura 3.2: Perfil massa-raio para uma WD das equações TOV com EoS Politrópica: altas densidades com $\epsilon_c = 1 \times 10^7 g/cm^3$ (curva azul) e, em baixas densidades com $\epsilon_c = 3 \times 10^5 g/cm^3$ (curva vermelha).

Tabela 3.2: Valores das massas e raios para anãs brancas Relativísticas Politrópicas (em altas densidades), para diferentes densidades centrais.

$\epsilon_c(g/cm^3)$	M/M_\odot	R/R_\odot
10^6	1.435	0.04784
10^7	1.435	0.02218
10^8	1.433	0.01028

3.2.2 Anãs Brancas Relativísticas Cristalinas

Considerando-se as correções da rede tipo Wigner-Seitz para a equação de estado já obtida na seção 2.5.3, temos as soluções das equações TOV para uma anã branca feita de uma única espécie nuclear, para o hélio, carbono e oxigênio com suas respectivas massas atômicas: $m(^4He) = 4.00260326u$, $m(^{12}C) = 12u$ e $m(^{16}O) = 15.99491502u$, em unidades de massa atômica (lembrando que $1u = 931.504MeV$). Desta forma, temos uma sequência de 100 estrelas para as três espécies mostradas na Figura 3.3, com densidades centrais entre $10^6 - 10^8 g/cm^3$. Além do mais, na Tabela 3.3 temos alguns valores para as massas e raios para as estrelas feitas de carbono da Figura 3.3.

De maneira particular, na Figura 3.4 apresentamos o perfil massa-raio para estrelas cristalinas para as três espécies. Com densidade central $\epsilon_c = 10^7 g/cm^3$, as massas e raios foram: $M_{He} = 0.8001M_\odot$ e $R_{He} = 0.00976R_\odot$; $M_C = 0.7879M_\odot$ e $R_C = 0.009688R_\odot$; e em fim, $M_O = 0.783M_\odot$ e $R_O = 0.009659R_\odot$.

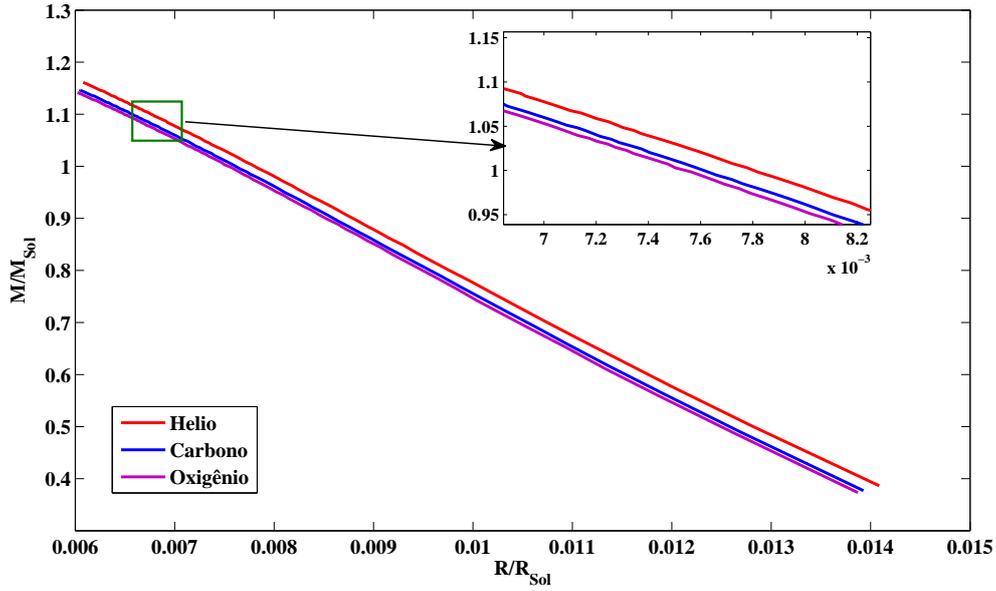


Figura 3.3: Relação massa-raio para família de estrelas cristalinas para cada espécie, com ϵ_c entre $10^6 - 10^8 \text{ g/cm}^3$.

Tabela 3.3: Valores das massas e raios para anãs brancas cristalinas de Carbono.

M/M_{\odot}	R/R_{\odot}
0.3770	0.01393
0.4908	0.01268
0.6162	0.01137
0.7213	0.01033
0.8215	0.009357
0.9742	0.007877

Da mesma forma, como no caso newtoniano, achamos as massas máximas para as três espécies atômicas das equações TOV aumentando a faixa nas densidades centrais (até $5 \times 10^{11} \text{ g/cm}^3$) para uma sequência de estrelas. Na Figura 3.5 os pontos pretos representam os máximos nas massas cujos valores estão resumidos na Tabela 3.4.

Tabela 3.4: Valores das massas máximas para anãs brancas cristalinas.

Espécie Nuclear	M_{max}
Hélio	$1.3996M_{\odot}$
Carbono	$1.3849M_{\odot}$
Oxigênio	$1.3791M_{\odot}$

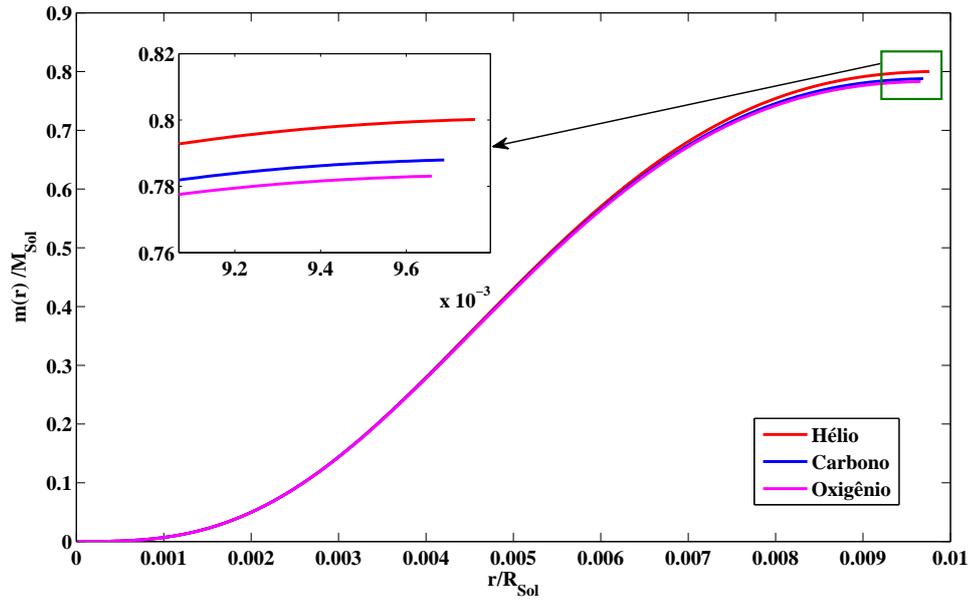


Figura 3.4: Perfil massa-raio de uma anã branca cristalina para cada espécie com $\epsilon_c = 10^7 g/cm^3$.

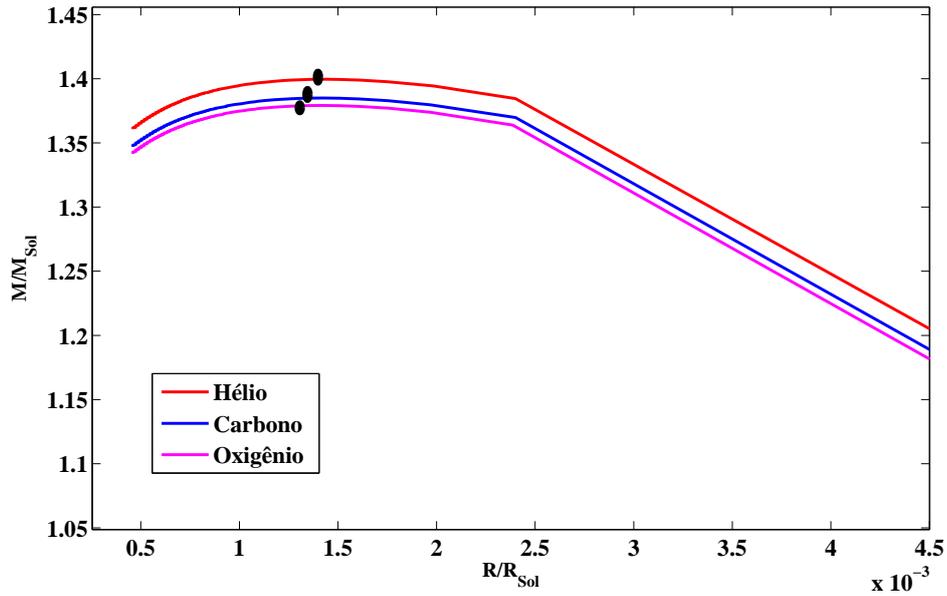
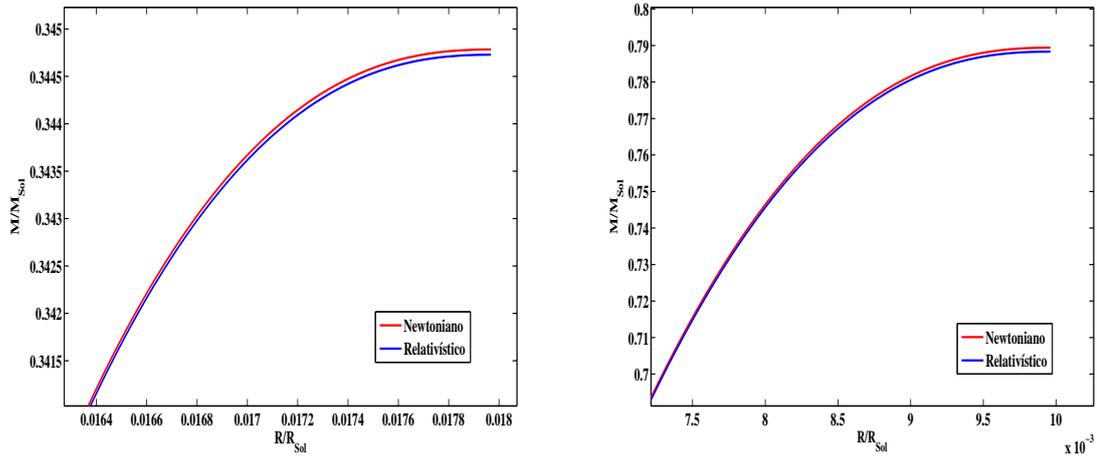


Figura 3.5: Relação massa-raio para uma sequência de estrelas de composições atômicas diferentes, os pontos pretos marcam as massas máximas.

Com o fim de observar as diferenças entre as equações de equilíbrio hidrostático, ou seja, newtoniano e as TOV, na Figura 3.6 comparamos ambos os casos. Como resultado, na Figura 3.6 (a) temos o perfil massa-raio de duas estrelas que seguem a equação de estado politrópica em baixas densidades, para isto, tomamos $\epsilon_c = 5 \times 10^5 g/cm^3$. Temos assim, que a massa da estrela, para o caso newtoniano é $0.3448M_\odot$ e com as equações TOV $0.3447M_\odot$.

Em contrapartida, com o uso da equação de estado melhorada, temos os seguintes valores das massas para estrelas com densidade de energia central $1 \times 10^7 g/cm^3$ da Figura 3.6 (b): $0.7894M_{\odot}$ para newtoniano e $0.7883M_{\odot}$ para a relatividade geral. De fato, notamos que a diferença é mínima devido à que os fatores de correção relativísticos das equações de equilíbrio hidrostático da relatividade geral são muito pequenas para estrelas newtonianas [91].



(a) Newtoniano vs TOV para uma estrela politrópica. (b) Newtoniano vs TOV para uma estrela cristalina.

Figura 3.6: Perfil massa-raio para duas estrelas (a) politrópicas com $\epsilon_c = 5 \times 10^5 g/cm^3$ e, (b) de Carbono com $\epsilon_c = 1 \times 10^7 g/cm^3$.

Capítulo 4

Matéria de Quarks

Neste capítulo, apresentaremos resumidamente a física nuclear e de partículas sob uma perspectiva histórica, enfatizando alguns fatos importantes e descobertas que levaram à construção do modelo atualmente aceito para o núcleo atômico e para as partículas fundamentais. Em seguida apresentaremos a hipótese da matéria estranha proposta por Bodmer, Witten e Terazawa e, com isto, iremos estudar uma expressão da fórmula de massa para “pedaços” de matéria estranha chamados de *strangelets* formados pelos quarks *up*, *down* e *strange* (análogo à fórmula semi-empírica de massa para núcleos ordinários). Com isso, obtemos as massas para *strangelets* dado o número bariônico (A), a carga (Z). Estes resultados serão úteis no capítulo 5.

4.1 Introdução: Modelo Padrão da Física das Partículas

Em 1897, J. J. Thomson [92] descobriu o elétron, cujas cargas e massas foram posteriormente determinadas. Ele observou a importância que tais partículas deveriam ter na constituição do átomo, tidos na época como elementos básicos formadores da matéria. Assim, ele imaginou então que o átomo deveria ser formado por uma espécie de *pudim* com carga positiva e muito mais pesada que os elétrons (carga negativa), este modelo foi chamado de Modelo de “Pudim de Ameixas”. Poucos anos mais tarde, o dito modelo foi refutado pelo físico neozelandês Rutherford [93] em seu experimento com partículas alfa, cujos resultados foram apresentados à comunidade em 1911. Este último concluiu que o átomo deve ser formado por uma distribuição de carga positiva e de pequena dimensão (quando comparada com as dimensões totais do átomo). Este fato importante serviu para a formulação do Modelo planetário do átomo, proposto mais tarde por Niels Bohr [94][ver Figura 4.1]. Assim, com os experimentos de Rutherford, nasce a Física nuclear e com ela o aparecimento de uma série de novas partículas, dando origem a um ramo da física conhecida como Física das Partículas Elementares.

No início da década de 1930, sabia-se que o núcleo atômico era composto por duas partículas diferentes: o próton (carga positiva) e o nêutron (carga nula). De acordo com o modelo de Bohr, os elétrons orbitavam em torno do núcleo graças à ação da força eletromagnética, mas a mesma força que mantém os elétrons em volta do núcleo deve causar uma violenta repulsão entre os prótons dentro do núcleo, já que esses ocupam um volume muito menor que o átomo como um todo. A resposta para este problema foi que prótons e nêutrons devem *sentir* dentro do núcleo uma força suficientemente forte para evitar a repulsão entre os prótons e, ao mesmo

tempo, esta força deve ser de curto alcance, ou seja, deve agir apenas para distâncias da ordem do tamanho do núcleo.

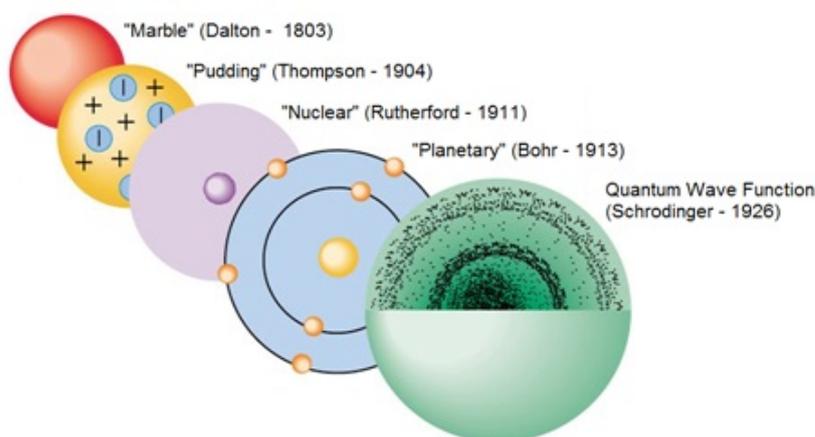


Figura 4.1: Desenvolvimento dos modelos atômicos ao longo dos anos. (Fonte: <https://saintschemistry10.weebly.com/history-of-the-atom.html>).

Nesta altura, já se conhecia o papel do fóton ou quantum de energia eletromagnética. De fato, de acordo com a concepção moderna do conceito de força, cada uma das interações básicas da natureza se manifesta através da troca de partículas (ou campos), conhecida como *bósons de gauge*. No caso da força eletromagnética, o fóton é o “bóson de gauge” correspondente e pode ser visto como uma espécie de mediador da força eletromagnética (ou partícula transportadora de força) sentida por duas partículas eletricamente carregadas. Assim, dois elétrons interagem por que estão constantemente trocando fótons entre si.

Em 1934, Yukawa [95, 96, 97], baseado nesta mesma ideia, propôs a existência de uma nova partícula capaz de fazer esta mesma mediação para o caso da força nuclear ou força forte. Ele chamou de méson e previu inclusive a massa dela, que, 10 anos mais tarde (em 1946), foi detectada experimentalmente [98]. Surgia, assim, a primeira teoria para a força forte. Atualmente, o méson de Yukawa é conhecido como méson π ou simplesmente pión. Posteriormente, mais de algumas dezenas de tipos diferentes de mésons foram observados experimentalmente.

As partículas que interagem entre si através da chamada força forte são genericamente conhecidas como Hádrons. Os mésons se enquadram nesta classificação, assim como os chamados bárions. Exemplos de bárions são o próton e o nêutron. Os mésons e os bárions se encaixam de forma diferente em outra classificação das partículas. Segundo esta outra classificação, proveniente de um princípio fundamental da Mecânica Quântica, conhecida como Princípio de Exclusão de Pauli [99, 100], onde as partículas podem ser bósons ou férmions. Assim, enquanto os mésons se comportam como bósons, os bárions têm todas as características de férmions (por exemplo, os elétrons). De acordo com o princípio de Pauli, dois férmions não podem ocupar o mesmo estado quântico em um sistema, enquanto que dois bósons podem fazê-lo. Embora mésons e bárions se comportem de forma diversa, eles interagem através do mesmo tipo de força.

Voltando à década de 1920, Paul Dirac [101] desenvolveu uma teoria para os elétrons, incorporando à Mecânica quântica as ideias introduzidas por Einstein em sua teoria da Relatividade Restrita. Como resultado, Dirac obteve que, mesmo para um elétron livre, sua energia

poderia ser negativa. Dirac tentou encontrar uma interpretação satisfatória e, assim, suas ideias levaram para o conceito de **antipartícula**. Colocando de forma simplificada, podemos dizer que as soluções de energia negativa, encontradas por Dirac, correspondem na verdade a soluções de energia positiva não para o elétron, mas para outra partícula com exatamente a mesma massa, porém, com carga positiva. Esta seria então o antielétron ou pósitron, que em 1933 [102] foi descoberta. Mas, a teoria desenvolvida por Dirac pode ser aplicada a outras partículas do tipo férmion, como próton ou o nêutron. Desta forma, a toda partícula do tipo férmion deve corresponder sua antipartícula, fato que foi sendo comprovado com o passar do tempo.

Em 1960, o número de partículas e suas antipartículas eram tão grandes que os físicos começaram a realizar uma classificação segundo suas propriedades conhecidas. As evidências associadas à classificação citada levaram à hipótese de que os hádrons fossem de fato compostos por partículas ainda “mais elementares” e que receberam o nome de **quarks** [103, 104]. Uma análise muito semelhante à realizada por Rutherford, mas, desta vez com feixes de elétrons, concluiu que o próton é formado por partículas “pontuais” (sem estrutura interna), estas seriam os quarks previstos anteriormente. A princípio, para explicar a diversidade de mésons e bárions conhecidos, era necessário admitir a existência de três tipos diferentes de quarks, mas logo este número aumentou para seis. Assim, podemos dizer que todos os hádrons são formados por quarks, dos quais podem existir apenas seis tipos diferentes.

Vale a pena mencionar o fenômeno da Radioatividade, descoberto ao final do século XIX, que se apresenta principalmente em três formas: radioatividade alfa, gama e beta. Esta última correspondia à emissão de pósitrons a partir de algum tipo de processo ocorrido no núcleo. O problema com este tipo de reação é que nem a energia e nem o momento total eram conservados a partir da observação das partículas envolvidas. A solução para este problema foi proposta pelo alemão Wolfgang Pauli [105], que sugeriu que deveria existir outra partícula participante no processo. Tal partícula deveria ter carga nula e massa zero. Esta nova partícula recebeu o nome de neutrino (observado experimentalmente em 1956). Como consequência disso, Enrico Fermi formulou uma teoria para o decaimento beta, na qual tal processo, embora ocorra dentro do núcleo, não deve ter sua origem na força forte, mas sim num outro tipo de interação que ficou conhecida como força nuclear fraca, já que ela não precisa ocorrer necessariamente dentro do núcleo. Sabe-se hoje que, os neutrinos, assim como a força fraca, têm um papel importante em vários processos da natureza, tanto do ponto de vista das partículas elementares, como em vários fenômenos astrofísicos (por exemplo nas supernovas).

O conhecimento atual sobre as partículas elementares permite formular um modelo conhecido como Modelo Padrão. Nele, todos os hádrons são formados por seis tipos diferentes de quarks. Além disso, os elétrons e o neutrino formam parte de outra família conhecida como Léptons. Os fótons, por sua vez, pertencem a uma categoria de partículas chamadas bósons de calibre (gauge) ou partículas mediadoras [106]. Neste modelo, os hádrons podem interagir entre si através das forças eletromagnéticas forte e fraca, enquanto que os Léptons só interagem via forças fraca e eletromagnética. O neutrino, ao mesmo tempo, só interage via força fraca.

4.2 Modelo dos Quarks e suas Propriedades

À medida que as técnicas experimentais foram progredindo, em particular, com o advento dos aceleradores de partículas, começou a surgir um número imenso de partículas. Até 1932 apenas eram conhecidas quatro partículas, consideradas elementares, a saber, o fóton, o elétron, o próton e o nêutron. Todavia, a partir de pesquisas dos raios cósmicos, em 1947 o número de partículas elementares havia saltado para 14, consistindo então do próton, nêutron, elétrons, neutrino, muon e suas respectivas antipartículas além do fóton e dos mésons. Posteriormente, no ano de 1947 [107] traços estranhos apareceram nas fotografias dos raios cósmicos e, em 1952, com a operação do acelerador *cosmotron* (no Laboratório Nacional Brookhaven, EUA), ficou clara a existência de outras partículas. Dessa forma, as partículas que iam surgindo podiam ser divididas em dois grupos: partículas de spin zero (os Kaons), e partículas de spin semi-inteiro (os híperons), sendo que todas interagiam por meio da força forte. Devido ao seu comportamento inesperado, os Kaons e híperons foram chamados de “estranhos”. Após várias tentativas, os físicos mostraram que a classificação de todas as partículas podia ser feita com base em duas propriedades, isto é: o spin e a susceptibilidade quanto à interação forte. Logo, as partículas foram então classificadas em quatro famílias: *a)* Bárions: partículas que interagem pela força forte e que possuem spin semi-inteiro. *b)* Mésons: partículas que interagem pela força forte e que possuem spin inteiro. *c)* Léptons: partículas que não interagem por interação forte e possuem spin semi-inteiro, e finalmente, *d)* Bósons intermediários: partículas que não interagem por interação forte e possuem spin inteiro.

Até o ano 1960, novas partículas foram descobertas e, no ano 1961, foi proposto por Murray Gell-Mann [115] e Yuval Ne’eman [109] um modelo novo para classificá-las. Este era baseado na ideia de que os hádrons se dividiam em famílias ou super-multipletos, onde os vários membros de uma mesma família eram conectados por certas propriedades. Este modelo também previu a existência de outros hádrons que logo foram observados.

A existência de centenas de novas partículas reforçou a ideia de que essas partículas não poderiam ser elementares e, sim, deveriam ter uma subestrutura. A resposta para esta confusão inicial foi o modelo padrão, desenvolvido nos anos 1970 e, hoje em dia, é a teoria oficial das partículas elementares [110, 111, 112, 113, 114]. Os seus ingredientes básicos são: seis quarks, seis léptons, as respectivas antipartículas e os bósons de calibre (fótons e glúons), interagindo através das forças fraca e eletromagnética que, neste modelo, são descritas de forma unificada através da teoria eletro-fraca e da força forte. Os quarks, léptons e os bósons de calibre são imaginados como partículas **fundamentais ou elementares**.

A seguir, a Tabela 4.1 apresenta as propriedades principais dos quarks. Os seis quarks foram batizados por letras associadas a palavras inglesas, *u* (up), *d* (down), *c* (charm), *s* (strange), *t* (top) e *b* (bottom), em que esses rótulos são chamados de sabor. Como a carga do elétron foi tomada como referência, as cargas dos quarks possuem valores fracionários. Assim, carga fracionária é uma característica peculiar dessas novas partículas. Outra propriedade é que todos os quarks possuem spin intrínseco $\frac{1}{2}\hbar$. A todo quark, corresponde uma antipartícula com a mesma massa e spin, mas, com carga elétrica oposta. Representamos o antiquark acrescentando uma barra ao símbolo do quark correspondente. Por exemplo, \bar{u} , é a antipartícula correspondente ao quark *u*.

STANDARD MODEL OF ELEMENTARY PARTICLES



Figura 4.2: Modelo Padrão das Partículas Elementares. (Fonte: <https://www.dreamstime.com/royalty-free-stock-photography-standard-model-elementary-particles-diagram-particle-physics-fundamental-make-up-matter-fundamental-force-carriers-image36590417>).

Tabela 4.1: Propriedades dos Quarks.

Nome	Símbolo	Energia de Repouso (MeV)	Carga (Q)
Up	u	5	$+2/3e$
Down	d	8	$-1/3e$
Charm	c	1500	$+2/3e$
Strange	s	150	$-1/3e$
Top	t	174000	$+2/3e$
Bottom	b	4200	$-1/3e$

Na tabela acima mostramos ainda as energias de repouso dos quarks em vez das massas. No modelo de quarks, os hádrons são subdivididos em duas famílias: a) os bárions, que são formados por combinações de três quarks (qqq) e, b) os mésons, formados por um par quark-antiquark ($q\bar{q}$).

De acordo com a regra de acoplamento de momento angular da mecânica quântica, discutida em qualquer livro de estrutura da matéria, os hádrons vão se dividir em dois tipos distintos de partículas, no que se refere à estatística quântica:

a) Bárions, formados por três férmions, vão ter spin semi-inteiro e se comportar como férmions. A carga elétrica, Q , é uma grandeza aditiva e, portanto

$$Q(n) = Q(u) + Q(d) + Q(d) = 0e,$$

$$Q(p) = Q(u) + Q(u) + Q(d) = 1e.$$

b) Mésons, formados por dois férmions, vão ter spin inteiro e se comportar como bósons.

Ademais, os quarks têm outras propriedades, a saber: Número Bariônico, Estranheza, Hiper carga, Isospin e Cor. Esses números quânticos são especialmente importantes para a classificação das partículas elementares e serão definidos a seguir. Numa colisão entre dois prótons, em um acelerador de partículas, pode ser produzida uma enorme variedade de partículas, no

entanto, algumas reações jamais foram observadas. Esses fatos, sugerem a existência de uma lei de conservação. Portanto, com uma lei adequada, será proibida a ocorrência de certas reações e, conseqüentemente, poderemos entender os resultados experimentais.

O número bariônico (A): grandeza aditiva que associamos às partículas. A todo bárion (antibárion) associamos o número bariônico $A = 1$ ($A = -1$), e a todo méson e demais partículas, o número bariônico é zero. Quando os kaons e os híperons foram observados em 1950, foram chamados de partículas estranhas, uma vez que essas partículas não se comportavam de maneira esperada. Com o objetivo de compreender a criação de kaons e híperons, M. Gell-Mann nos EUA e Nishijima no Japão, em 1952, associaram a estas partículas uma nova propriedade, que foi batizada por Gell-Mann de *estranheza*, e que, mais uma vez, era uma grandeza conservada nas reações envolvendo a força forte. Segundo Gell-Mann e Nishijima [115, 116], os kaons possuíam estranheza $S = 1$, os sigmas e o lambda $S = -1$, e os píons, prótons e nêutrons $S = 0$. Uma grandeza que pode ser obtida a partir da estranheza e do número bariônico é a hipercarga, que é definida como a soma do número bariônico e da estranheza: $Y = A + S$. O isospin, I , do ponto de vista formal, é análogo ao spin na mecânica quântica e, portanto, possui três componentes (I_1, I_2, I_3). A carga elétrica da partícula está associada à componente do isospin na direção 3 através da expressão: $Q = I_3 + \frac{Y}{2} = I_3 + \frac{A+S}{2}$.

Mas surpreendentemente, surgiu um problema. Sendo que os quarks são férmions, portanto, eles têm que respeitar o Princípio de Exclusão de Pauli (PEP), que afirma que dois férmions idênticos não podem ocupar o mesmo estado quântico. Se considerarmos um bárion formado pela combinação de três quarks iguais, este viola o PEP, então se sugeriu uma propriedade física adicional para distingui-los, o qual denominaram de “cor” ou carga de cor, associada à interação forte. Os quarks podem se apresentar na forma de três cores diferentes, r (red), b (blue) e g (green). Com isso, está resolvido o problema da violação do PEP. Obviamente a cor do quark não tem nenhuma relação com o sentido visual a que estamos habituados. Essa propriedade é apenas um novo grau de liberdade intrínseco, que foi postulado pela necessidade e de forma completamente arbitrária. Dessa maneira, aos antiquarks associamos as anticolors: anti-red, anti-blue, e anti-green, e postulamos, com base nos dados experimentais, que os hádrons só existem em combinações de cores neutras. Isto implica, que os quarks de um bárion têm que ser de cores diferentes, de modo a formarem uma combinação neutra de cor, ou chamada também de cor “branca”.

4.3 Hipótese da Matéria Estranha

É usualmente suposto que o estado fundamental da matéria hadrônica é o estado o qual os quarks são confinados em hádrons individuais que ocupam o universo observável. Mas existe uma hipótese, entretanto, que supõe que o estado confinado simplesmente pode ser um estado de vida longa, mas não absolutamente estável [117].

Vamos considerar a hipótese da matéria estranha. De acordo com a hipótese, o verdadeiro estado fundamental da matéria consiste de uma combinação, aproximadamente, de igual número de quarks u , d e s , conhecido como *matéria estranha* e que a matéria nuclear observada pode, na verdade, ser metaestável. A matéria estranha, baixo hipótese, pode existir como peças macroscópicas, conhecidas como estrelas estranhas [118], até pequenas porções (*nuggets*), conhecidos

como *strangelets*. Aquela hipótese foi proposta por Bodmer [119], Witten [?] e Terazawa [121]. Assim matéria com quarks de três sabores sempre tem energia mais baixa do que matéria com quarks de dois sabores devido a níveis de Fermi extras, acessíveis aos quarks estranhos, conforme ilustramos na figura abaixo.

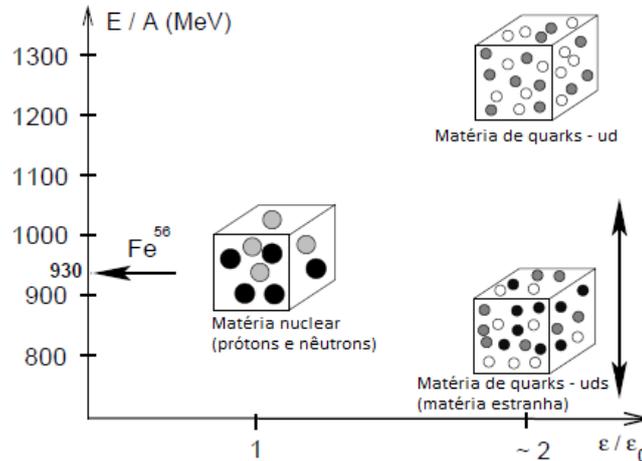


Figura 4.3: Hipótese da matéria estranha: estado fundamental de interação forte (adaptado de [122]).

Argumentos teóricos indicam que a energia da matéria de quarks com três sabores pode até ser menor do que 930MeV e, neste caso, a matéria estranha seria mais estável que a matéria nuclear e os núcleos atômicos. Este aspecto particular faz da hipótese da matéria estranha uma das especulações mais surpreendentes da física moderna e que, se for correta, teria implicações de importância fundamental para nossa compreensão do universo, dos objetos compactos astrofísicos e da física de laboratório [123, 124, 125]. Mencionamos apenas os resultados da possível estabilidade da matéria com quarks estranhos para um gás de quarks u , d e s sem massa, dentro de uma sacola confinante a temperatura zero [126]. Obtém-se, então, para a energia por bárion da matéria com quarks de dois sabores, $\frac{E}{A}|_2 = 934\text{MeV} \times B_{145}^{1/4}$, onde $B_{145}^{1/4} = B^{1/4}/145$. Valores da constante da sacola, $B^{1/4}$, menores do que 145MeV são excluídos. De outra maneira, a matéria de quarks com dois sabores teria uma energia mais baixa do que o Ferro-56, o qual seria então feito de quarks up e $down$, em contradição com o que é observado. Se acrescentarmos quarks estranhos sem massa ao sistema, para uma mesma constante da sacola, a energia por bárion é, portanto, dada por [127], $\frac{E}{A}|_3 = 829\text{MeV} \times B_{145}^{1/4}$. Segue-se assim que a energia por bárion de um gás com quarks de três sabores, sem massa e sem interação, é da ordem de 100MeV por bárion mais baixa do que para a matéria com quarks de dois sabores. A diferença tem a sua origem no fato de que os bárions podem ser compactados de forma mais densa na matéria de quarks com três sabores, devido ao poço de Fermi extra-acessível aos quarks estranhos.

Resumindo, a questão da estabilidade depende se seria ou não possível diminuir a energia de um sistema composto apenas de quarks up e $down$, convertendo aproximadamente um terço de seus componentes, em quark *strange* e, como o momento de Fermi da matéria de quarks up e $down$ é da ordem de 300MeV na região de coexistência com a matéria hadrônica em $T = 0$, ou seja, maior massa estimada para o quark *strange*, então, seria energeticamente favorável a

conversão de uma parcela dos quarks não strange, deste sistema, em quarks *strange* via interações fracas devido à introdução deste terceiro mar de Fermi [128].

4.4 Fórmula de Massa para *Strangelets*

De acordo com Berger e Jaffe [129], nos referimos à matéria de quarks contendo quarks *strange* como “*matéria estranha*” e os pedaços de matéria estranha com número de bárions $A \leq 10^7$ como “*strangelets*”. Se a matéria estranha está, realmente, no limite do bulk, então strangelets com número de bárions entre $10^2 \leq A \leq 10^7$ podem ser estáveis. A carga dos strangelets cresce muito suavemente com o número de bárions $Z \approx A^{1/3}$ [129], assim, strangelets se comportam quimicamente como isótopos muito massivos de átomos nucleares ordinários. Portanto, muitos strangelets como isótopos estáveis, poderiam existir para cada valor de Z . A estranheza S cresce linearmente com A , com uma constante de proporcionalidade $f_s = S/A$, com valores típicos de $0.5 \leq f_s \leq 1$ [130, 131, 132], dependendo da massa do quark strange. Dessa forma, esperamos alguns strangelets estáveis para uma dada estranheza. Para um dado A , processos fracos conduzem em direção ao equilíbrio de sabor, onde a energia do strangelet é minimizada. Aqui apresentamos a fórmula de massa semi-quantitativa para strangelets. A massa de um strangelet é representada em termos do número de bárions (A), a hipercarga (Y) e a carga (Z). Incluiremos efeitos de tensão superficial e energia de Coulomb, mas negligenciando as correções radiativas da QCD (Cromodinâmica quântica). A tensão superficial surge dinamicamente em strangelets finitos, e podem ser calculados da modificação superficial da densidade de estados dos férmions. A densidade de estados, $dN/dk[k \equiv (\epsilon^2 - m^2)^{1/2}]$, de um gás de Fermi degenerado, obedecendo as condições de borda, confinados em um volume V e com área superficial S pode ser expressa [129]

$$\frac{dN}{dk} = g \left[\frac{k^2 V}{2\pi^2} - \frac{kS}{16\pi} \left(1 - \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \frac{k}{m} \right) \right],$$

em que m é a massa do quark *strange* e g a degenerescência ($g = 6$ para cada sabor). Os quarks u, d , são extremamente relativísticos, $m \ll k$, assim, suas densidades não estão modificadas significativamente pela superfície. A contribuição unicamente apreciável para as correções relativísticas surge do quark *strange*. Logo, efeitos de superfície são altamente dependentes do sabor. A seguir apresentamos de maneira qualitativa a fórmula de massa para strangelets (veja o apêndice D para cada termo).

$$E(A, Y, Z) \sim \epsilon_0 A + \frac{1}{2} \delta_Y (Y - Y_{min})^2 + \frac{1}{2} \delta_Z (Z - Z_{min})^2 + 4\pi\sigma R^2, \quad (4.1)$$

e é válido para strangelets com composição perto do equilíbrio de sabor, $Y = Y_{min}$ e $Z = Z_{min}$ (veja apêndice D). O ϵ_0 é a energia por bárion no bulk ($A \rightarrow \infty$), σ é a tensão superficial do strangelet, e os deltas δ_Y e δ_Z são as curvaturas para um mínimo em Y e Z . R é o raio do strangelet que é proporcional a $A^{1/3}$ e, $R = r_0 A^{1/3}$ para grandes A .

A equação (4.1) é uma expansão assintótica para A . E contém todas as correções $O(A^{2/3})$. Também aparecem os primeiros termos não triviais na expansão (em ambos Z e Y), perto do mínimo de energia para um A fixo. Para A suficientemente grandes, a energia superficial, $4\pi\sigma R^2$

é pequena ($\sim A^{2/3}$) comparada à energia de volume $\epsilon_0 A$. A energia de Coulomb é mais pequena ainda ($\sim A^{1/3}$) e pode ser omitida na fórmula de massa. Fica claro que efeitos de Coulomb são essenciais para determinar a dependência Z_{min} sobre A . Nesta ordem, os coeficientes na equação (4.1), a saber, δ_Y , δ_Z , ϵ_0 , σ e r_0 , podem ser calculados no limite do bulk.

Dessa forma, escolhemos descrever as propriedades no bulk da matéria estranha em termos dos parâmetros: ϵ_0 e m_s , a fim de, minimizar as correções da QCD. Onde ϵ_0 é a energia por bárion no bulk, e define a escala global de decaimento de emissão de bárions de strangelet, também, determina o valor de A abaixo do qual strangelets são instáveis, por outro lado, m_s , a massa do quark *strange*, determina a fração deste, f_s , no bulk, ademais, a carga do strangelet para um A finito. Para stranglets estáveis no equilíbrio de sabor, escolhemos $m_s = 150 MeV$ e $\epsilon_0 = 930 MeV$.

O funcional da energia para a matéria estranha, inclui as primeiras correções não triviais para o limite do Bulk (termos na energia que cresce com $A^{2/3}$) e os primeiros termos não triviais na expansão acima (4.1). Assim nós não consideramos strangelets longe da energia mínima. A tensão superficial, efeitos de Coulomb e energia de simetria são as fontes dessas correções.

Portanto, consideremos *strangelets* com carga suficientemente pequena tais que, os elétrons associados estão fora do núcleo do strangelet. Dessa forma, os elétrons formam uma nuvem similar aos átomos ordinários. O relevante limite no *bulk* para esse sistema é um gás de Fermi degenerado composto de quarks *up*, *down* e *strange* sem elétrons e confinados num volume, onde a carga do sistema *bulk* deve ser zero para um mínimo de energia (como em [126]). *Strangelets* não estão sujeitos à restrição de carga zero para energia mínima, de fato, esta é pequena e positiva. A pequena carga dos *strangelets* finitos é uma consequência direta dos efeitos de Coulomb em *strangelets*. Portanto, a energia de Coulomb não pode ser omitida no cálculo da composição dos *strangelets* à energia mínima. Porém, para o mínimo no *bulk*, a energia de Coulomb é pequena e pode ser negligenciada.

Essa fórmula de massa do tipo Bethe–Weizsäcker para *strangelets*, foi desenvolvido na referência [129]. Assim, a energia $E(A, Y, Z)$ de um *strangelet* de número de bárions A , hipercarga $Y = A + S$ com (S estranheza) e, carga elétrica Z , assume a forma final

$$E(A, Y, Z) = \epsilon_0 A + 4\pi\sigma r_0^2 A^{2/3} + \frac{1}{2} \frac{\delta_Y}{A} (Y - Y_{min})^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{\delta_Z}{A} + \frac{6}{5} \frac{\alpha}{r_0 A^{1/3}} \right] (Z - Z_{min})^2, \quad (4.2)$$

onde $\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$, é a constante de estrutura fina [133], os dois parâmetros da teoria são a energia por bárion ϵ_0 na matéria no *bulk* e a massa do quark *strange*: m_s . Os *strangelets* mais estáveis tem (Y, Z) perto de (Y_{min}, Z_{min}) , e o mínimo *strangelet* acontece quando $Y = Y_{min}$ e $Z = Z_{min}$. A tensão superficial para *strangelets*, σ , parâmetro de raio r_0 , como os parâmetros δ_Y , Y_{min} , δ_Z , Z_{min} da expansão de Taylor acima, pode ser expressada em termos de m_s e um ângulo θ definido por

$$\frac{\epsilon_0}{m_s} = \frac{1}{\sin \theta} \left(2 + \left[\frac{1}{2} (1 + \cos^3 \theta) \right]^{1/3} \right), \quad (4.3)$$

Tabela 4.2: Massas para 15 *strangelets*, $r = Z/A$ é a razão carga/bárion.

Número	A	Z	Y	S	$E/A(MeV)$	$m (MeV)$	$r = Z/A$
1	100	8	19	81	862.6826	1.1287×10^4	0.0800
2	150	11	29	121	871.1935	1.7279×10^4	0.0733
3	200	14	38	162	876.5694	2.3423×10^4	0.0700
4	250	17	48	202	880.4002	2.9420×10^4	0.0680
5	300	20	57	243	883.3248	3.5567×10^4	0.0667
6	350	22	67	283	885.6623	4.1567×10^4	0.0629
7	400	25	76	324	887.5928	4.7712×10^4	0.0625
8	450	27	86	364	889.2254	5.3711×10^4	0.0600
9	500	29	95	405	890.6322	5.9859×10^4	0.0580
10	550	31	105	445	891.8634	6.5858×10^4	0.0564
11	600	33	114	486	892.9534	7.2007×10^4	0.0550
12	650	35	124	526	893.9290	7.8006×10^4	0.0538
13	700	37	133	567	894.8090	8.4155×10^4	0.0529
14	750	39	142	608	895.6091	9.0304×10^4	0.0520
15	800	40	152	648	896.3408	9.6304×10^4	0.0500

em particular

$$y_{min} = \frac{Y_{min}}{A} = \frac{1 - \cos^3 \theta}{1 + \cos^3 \theta},$$

$$r_0 = \frac{1}{m_s} \left[\frac{2}{3\pi} (1 + \cos^3 \theta) \right]^{1/3}.$$

Tipicamente, a densidade dos strangelets, $\rho = \frac{3\pi}{4} r_0^3$ (com r_0 : raio da célula), é da ordem de duas vezes superior à matéria nuclear não estranha. As características qualitativas dos strangelets, como uma função de $y = Y/A$ e A , para $\epsilon_0 = 930 MeV$, $m_s = 150 MeV/c^2$ e $Z = Z_{min}$ fixos, são mostrados na referência [129], (ver apêndice D para os demais termos da fórmula de massa).

A fórmula de massa (4.2), em analogia a fórmula semi empírica de massa para núcleos ordinários, representa a energia de ligação dos quarks em função do número de bárions, hipercarga e carga. A validade desta fórmula é

$$|Y - Y_{min}| \ll A, \quad |Z - Z_{min}| \ll A. \quad (4.4)$$

Com número de bárions entre $10^2 \leq A \leq 10^7$. Por conseguinte, a “energia por núcleon” para strangelets é $E(A, Y, Z)/A$. Logo, pode-se computar a massa para um particular espécie *strangelet* como segue

$$m(A, Z) = m_s S - \frac{E(A, Y, Z)}{A}. \quad (4.5)$$

Onde temos ignorado as massas dos quarks *up* e *down*, e $S = Y - A$, representa o número de quarks *strange* em virtude da referência [129].

A partir da equação (4.2), obtemos na Tabela 4.2 a energia por bárion de 15 *strangelets* para diferentes A , Z e Y e, simultaneamente, as massas deles com (4.5) e $m_s = 150MeV$. Note-se que $E/A|_{strangelets} < 930MeV$, inclusive para A grandes, reforçando assim a hipótese da matéria estranha. Uma das diferenças entre *strangelets* e núcleos ordinários é a impressionante assinatura experimental, isto é, a relação *carga/bárion* é muito pequena (ver Tabela 4.2) quando comparada aos núcleos ordinários usados nos capítulos anteriores, ou normalmente $|Z| \ll A$. Isto é uma característica genérica, válida para todos os valores de nossos parâmetros, inclusive para grandes massas do quark *strange* [134, 135].

Vale comentar que por matéria de quarks no *bulk*, entende-se a matéria de quarks em agregados grandes o suficiente para que os efeitos de superfície possam ser ignorados e numerosos para serem tratados como um gás de Fermi degenerado. As condições para que a matéria estranha no *bulk*, a temperatura e pressão zero, seja o verdadeiro estado fundamental da interação forte requerem, por certo, que a energia por bárion E/A da matéria estranha seja menor do que do núcleon, isto é, $\frac{E}{A} < 939MeV$ como pode-se observar na Tabela 4.2 (ver referência [126]).

Agregamos também, que o modelo do gás de Fermi que descreve a matéria estranha estável no *bulk* contém suficientemente quarks para que a aproximação seja válida, porém, pequena o suficiente para que os efeitos de tensão superficial não sejam negligenciados no *strangelet* [126]. Desse modo, limitamos nossa atenção para *strangelets* esféricos com número de bárions entre $10^2 \leq A \leq 10^7$, que tipicamente terão raios entre 5 e 20 *fm* [126], que é menor que o comprimento de onda Compton dos elétrons, assim, assumimos que não há elétrons dentro do *strangelets*, logo, eles tem carga e, efeitos de Coulomb podem ser considerados. Por último, matéria estranha com baixo A (< 100), não é adequadamente descrito por um modelo simples do gás de Fermi, em vez disso, substitui-se o gás de Fermi pelo modelo da sacola esférica hadrônica, no entanto, esta abordagem fugue do escopo do trabalho [126].

Capítulo 5

Anãs Estranhas Cristalinas

Finalmente, neste capítulo descrevemos nosso modelo, com o propósito de achar a estrutura das anãs brancas composto de uma particular espécie *strangelet* na aproximação da rede de Wigner e Seitz, razão pela qual chamamos de *Anãs Estranhas Cristalinas*. Expomos também nossos resultados e discussões relevantes.

5.1 Descrição do Modelo e do Método

Antes de tudo, é necessário diferenciar o modelo proposto neste trabalho em relação com outros já feitos. Nos últimos anos, na literatura há vários trabalhos propondo matéria de quarks no centro de objetos compactos, como, por exemplo, estrelas de quarks ou estrelas híbridas [136, 137], estrelas anãs estranhas (ou auto-ligadas) com crosta nuclear [138, 139], entre outros [140, 141, 142, 143, 144]. Uma característica genérica de todos aqueles modelos é que, as anãs brancas são estruturadas por um núcleo denso de matéria de quarks estranha, sem crosta ou envolvidos por camadas de matéria hadrônica ordinária ligados gravitacionalmente. Estes modelos, apresentam diferentes equações de estado para cada tipo de matéria, considerando os fatores envolvidos. Também se sabe que, as estrelas compactas feitas de matéria estranha absolutamente estáveis, se distinguem das estrelas compactas confinadas gravitacionalmente por meio da relação massa-raio $M \propto R^3$, a qual é geral para matéria auto-confinada [124, 145]. Ademais, descartamos possíveis transições de matéria para a fase de quarks ou, transições de estrelas estranhas para anãs brancas estranhas com núcleo de matéria estranha [146] já proposto por Glendenning [147].

Uma outra possibilidade não considerada aqui, com a hipótese da matéria de quarks, é que ela pode estar em um estado de supercondutor de cor [148, 149, 150, 151], neste caso, é de esperar que pares de quarks formem os pares de Cooper. Assim, o condensado resultante formará o que é chamado de supercondutor de cor [152, 153] (se $m_s \rightarrow 0$, é a fase CFL: Color-Flavor-Locked, de cor e sabor interconectados), e isto, devido as diferenças de cores, massas e sabores dos quarks.

Em contrapartida a aqueles esquemas, no entanto, nosso modelo é descrito na aproximação de Wigner e Seitz, lembrando do capítulo 2, a rede imaginada é construída por "*células*" esféricas de carga elétrica neutra. Cada esfera contém um núcleo ordinário de uma única espécie e, em torno dele Z elétrons. Como as células são neutras, a interação entre elétrons e núcleos de diferentes células são ignorados. Agora, nossa proposta é a seguinte: substituimos os núcleos

ordinários por espécies *strangelets*. Desse modo, temos uma rede composta de uma única espécie de *strangelet*, centrada nas esferas e mantendo os Z elétrons em torno deles. De modo que o novo sistema considerado (Esfera = elétrons + strangelet) é eletricamente neutro. Portanto, temos uma estrela anã branca cristalina, composta de uma única espécie de *strangelet*.

Neste quadro, o próximo passo é achar a estrutura da estrela. Para isto, escolhemos um particular *strangelet* da Tabela 4.2, e substituímos sua massa, $m(A, Z)$, na equação de estado melhorada (2.33) obtendo-se, assim, o perfil de pressão-densidade de energia. Este último, nos serve para calcular a relação massa-raio da estrela a partir das equações de estrutura TOV. Finalmente, os resultados das massas nos permitiram fazer a comparação com a faixa de valores de massas super Chandrasekhar, a saber, entre $2.1 - 2.8M_{\odot}$ [43, 44, 45, 46, 47]).

5.2 Resultados e Discussões

5.2.1 Equações de Estado

Agora somos capazes de obter as equações de estado para uma espécie *strangelet*. Em particular, da Tabela 4.2, escolhemos três espécies *strangelets* que etiquetados com números, a saber, o *strangelet*₁, *strangelet*₈ e *strangelet*₁₅, com as suas respectivas massas, $m(\text{strangelet}_1) = 1.1287 \times 10^4 \text{ MeV}$, $m(\text{strangelet}_8) = 5.3711 \times 10^4 \text{ MeV}$ e $m(\text{strangelet}_{15}) = 9.6304 \times 10^4 \text{ MeV}$. A figura abaixo mostra as equações de estado para cada uma das três espécies *strangelets*.

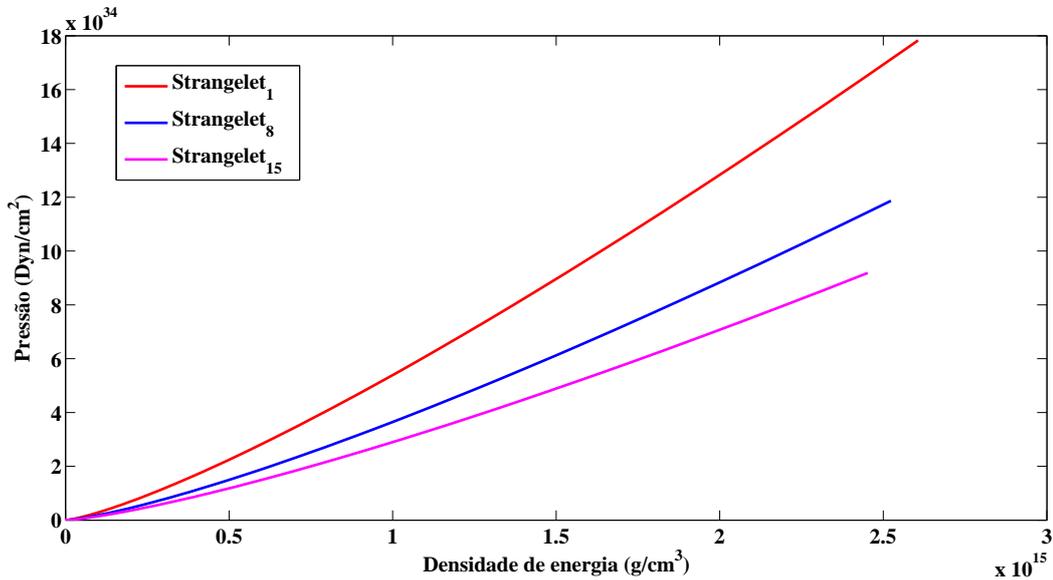


Figura 5.1: Equações de estado para três espécies *strangelets*.

Na Figura 5.1, mostramos as equações de estado para as três espécies *strangelets* considerados a partir das equações (2.33). Pode-se observar que, quanto menor é a massa do *strangelet*, a curva da equação de estado se torna mais *dura*, ou seja, para poucos incrementos na densidade de energia, a pressão aumenta muito. Uma análise da pressão e a densidade de energia, em termos de A para os *strangelets*, põe em evidência isto. Fixando a densidade $\rho = 1 \times 10^{34} \text{ cm}^{-3}$, observamos na Figura 5.2 que conforme aumenta A , a densidade de energia aumenta, posto

que a massa da espécie contribui para a densidade de energia, em contrapartida, lembrando a relação $\rho_e = (Z/A)\rho$, à medida que aumenta A , diminui o número de elétrons que aportam para a pressão logo, temos redução na pressão.

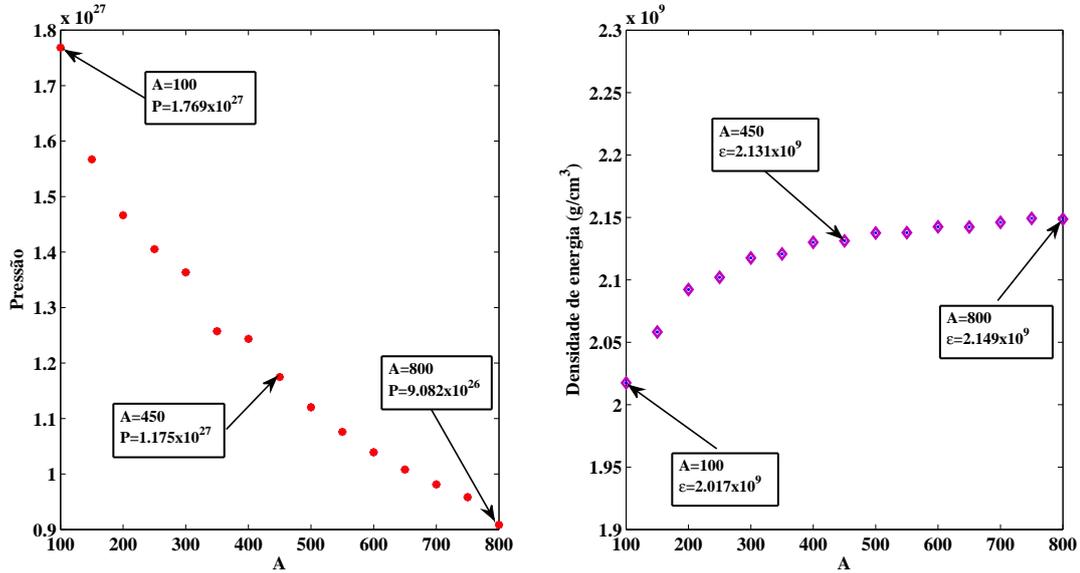


Figura 5.2: Relação da pressão e densidade de energia frente a A .

Ademais, em contraste com as EoS das espécies nucleares ordinárias, a diferença em relação aos *strangelets* é mostrada na Figura 5.3. Assim, comparando as equações de estado das espécies nucleares ordinárias com os *strangelets*, vemos naquela figura que elas se ajustam para equações de estado com massas de *strangelets* intermediárias. No entanto, quando comparadas com massas baixas de *strangelets*, elas são levemente *duras*.

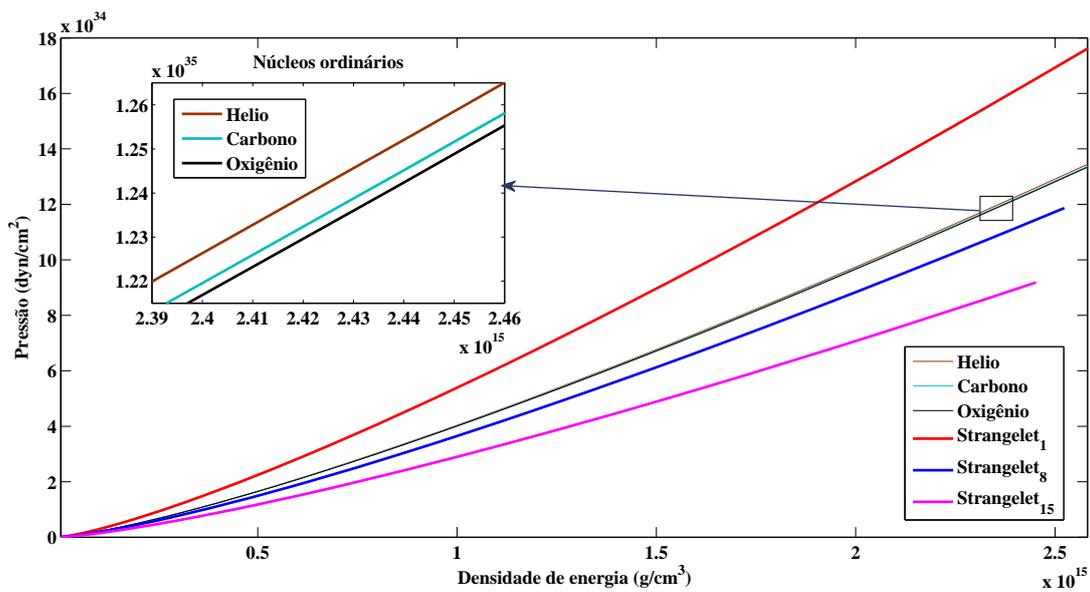


Figura 5.3: Comparação das equações de estado para espécies ordinárias e *strangelets*.

5.2.2 Relação Massa-Raio

Basicamente, a pressão e densidade de energia servem como *inputs* para resolver um conjunto de equações acopladas. Para computar o perfil massa-raio para as três espécies *strangelets*, com suas respectivas equações de estado mostradas na Figura 5.1, resolvemos as equações TOV (3.18), (3.22), obtendo assim, as propriedades da estrela na Figura 5.4. A seguir, mostraremos as curvas que resultaram da TOV. Os valores alcançados para as massas e raios estão na Tabela 5.1, e foram achados para uma densidade de energia central $\epsilon_c = 1 \times 10^7 g/cm^3$.

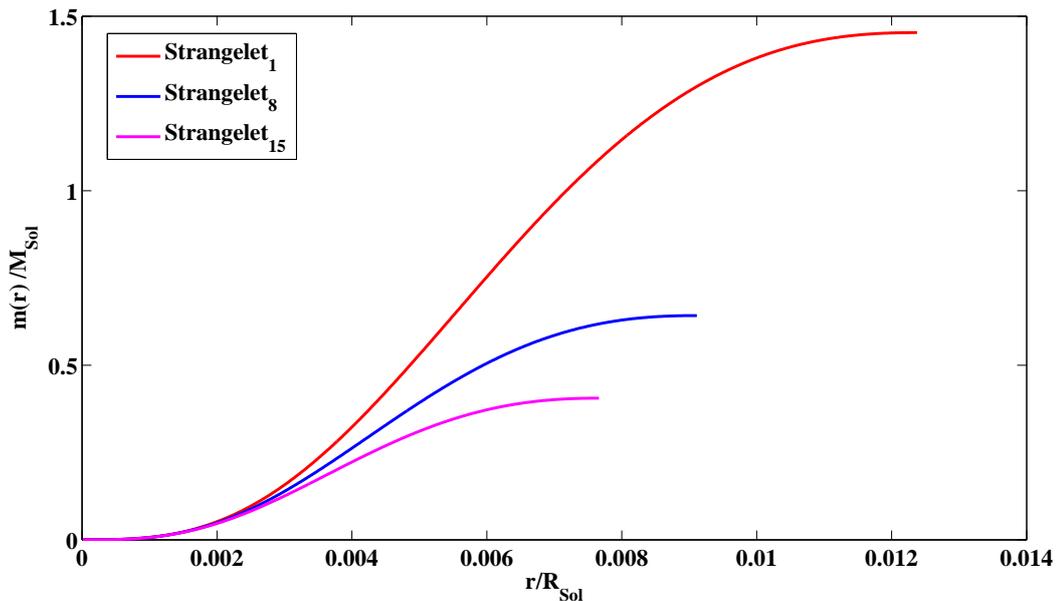


Figura 5.4: Perfil massa-raio para as três espécies strangelets, com $\epsilon_c = 10^7 g/cm^3$.

Tabela 5.1: Valores das massas e raios para anãs brancas Cristalinas com strangelets da Figura 5.4, com $\epsilon_c = 1 \times 10^7 g/cm^3$.

Nome do strangelet	M/M_\odot	R/R_\odot
<i>Strangelet</i> ₁	1.4529	0.01238
<i>Strangelet</i> ₈	0.6424	0.009113
<i>Strangelet</i> ₁₅	0.4058	0.007661

Tal como mostra a Figura 5.4, pode-se afirmar que as equações de estado "*moles*", correspondem a estrelas de baixas massas, enquanto que as mais "*duras*" resultam em estrelas massivas. Em particular, estamos interessados nestas últimas para explicar estrelas anãs brancas com massas que ultrapassam a massa de Chandrasekhar.

Além disto temos na Figura 5.5 uma sequência de 200 estrelas para densidade de energia centrais entre $10^6 - 10^8 g/cm^3$. Assim, vemos que para o *strangelet*₈ e *strangelet*₁₅ resultam em estrelas com massas esperadas para anãs brancas, salvo para o *strangelet*₁ que acabam em estrelas massivas. Conjuntamente, podemos achar a massa máxima, para cada composição, aumentando o hiato nas densidades centrais (até $5 \times 10^{11} g/cm^3$), assim obtemos a Figura 5.6. Estes valores são resumidas na Tabela 5.2.

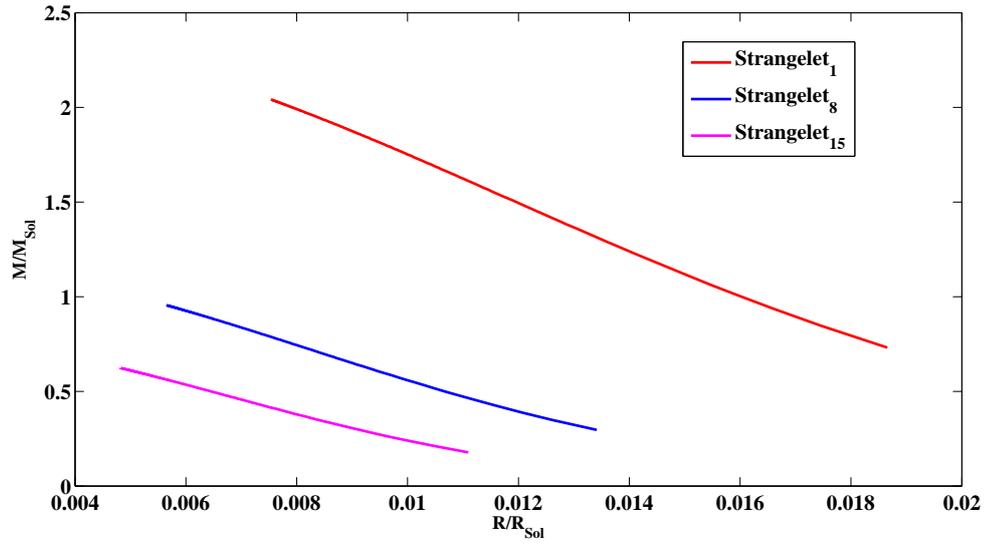


Figura 5.5: Relação massa-raio para famílias de estrelas para cada espécie *strangelet* considerado.

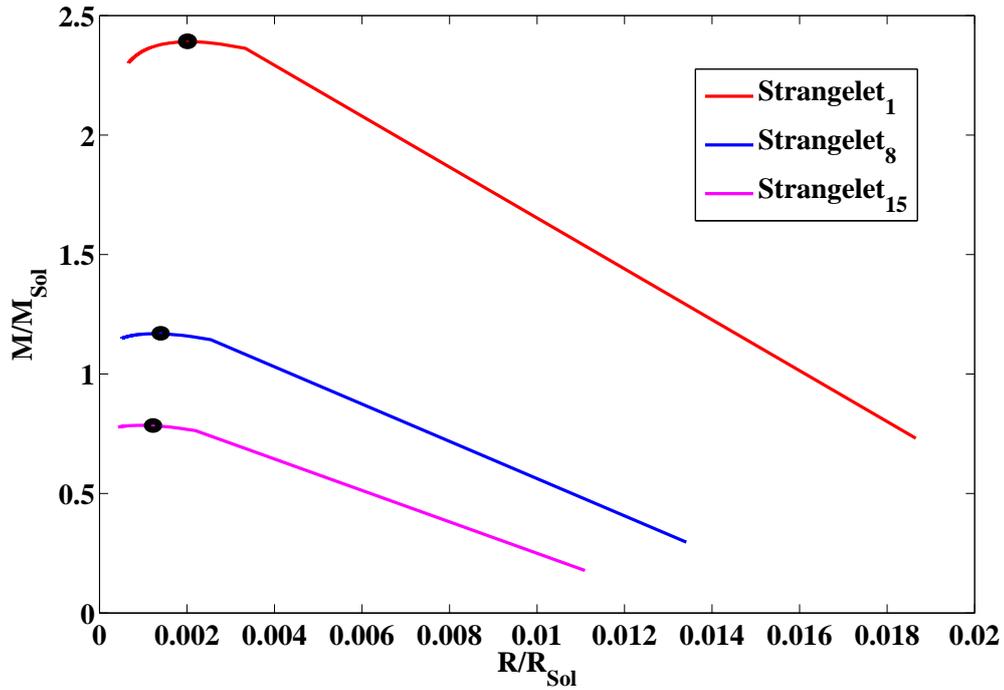


Figura 5.6: Relação massa-raio para as três espécies strangelets, os pontos pretos representam as massas máximas.

Tabela 5.2: Valores das massas máximas para anãs brancas cristalinas com as espécies *strangelets* consideradas.

Espécie strangelet	M_{max}
<i>Strangelet</i> ₁	$2.3900M_{\odot}$
<i>Strangelet</i> ₈	$1.1686M_{\odot}$
<i>Strangelet</i> ₁₅	$0.7851M_{\odot}$

Posto que para baixas massas de *strangelets* temos EoS relativamente mais *duras*, o que implica estrelas massivas, focamos nossa atenção em achar a relação massa-raio das mesmas. Para este fim, escolhemos de forma particular o *strangelet*₁. Com isto encontramos a relação massa-raio para uma sequência de estrelas com densidade centrais entre $\epsilon_c = 10^6 - 10^9 g/cm^3$ e selecionamos as mais massivas.

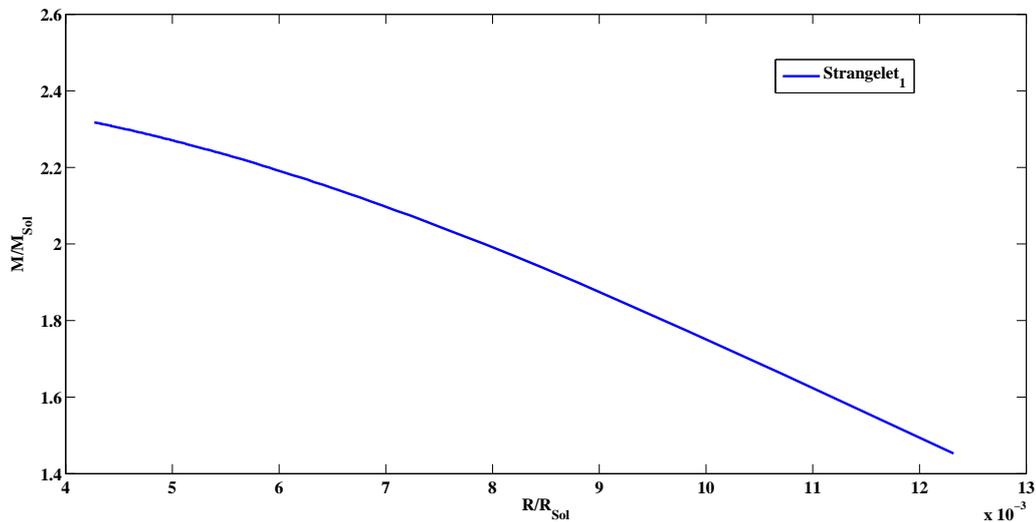


Figura 5.7: Relação massa-raio para sequência de estrelas compostas do *strangelet*₁ com $\epsilon_c = 10^6 - 10^9 g/cm^3$.

As possíveis candidatas para estrelas com massas super Chandrasekhar são mostradas na Tabela 5.3. Lembrando que a massa máxima que estas estrelas podem atingir é $M_{max} = 2.39M_{\odot}$.

Tabela 5.3: Valores das anãs brancas com possíveis massas super Chandrasekhar.

$\epsilon_{central}(g/cm^3)$	M/M_{\odot}	R/R_{\odot}
1.5×10^8	2.1218	0.006856
2.8×10^8	2.2040	0.005908
4.4×10^8	2.2502	0.005275
7.8×10^8	2.3002	0.004557
1.0×10^9	2.3175	0.004557

Finalmente, como já apontado na motivação, a evidência das supernovas tipo Ia super luminosas é um fenômeno que até agora não se tem uma explicação concreta. Acredita-se que elas surjam de explosões de anãs brancas progenitoras com massas super Chandrasekar entre $2.1 - 2.8M_{\odot}$. Em vista dos nossos resultados, uma conclusão relevante em nosso trabalho é que anãs brancas massivas feitas de *strangelet*₁ possivelmente seriam os progenitores viáveis para explicar aqueles fenômenos, supondo que a hipótese da matéria estranha fosse correta.

Capítulo 6

Conclusões finais

Esta dissertação teve como finalidade principal estudar as relações massa-raio a partir de duas equações de estado, a saber, politrópicas e o melhoramento do gás de Fermi degenerado na aproximação tipo Wigner-Seitz para matéria estelar densa, nesta última, não só para núcleos ordinários, mas também, para espécies *strangelets*. Isto foi feito, através do uso das equações de equilíbrio hidrostático newtoniano e das equações TOV. Deste trabalho concluímos que:

Como foi mostrado no capítulo 2, a equação de estado para um gás ideal de Fermi a $T = 0$, constituído de nêutrons, prótons e elétrons em equilíbrio- β e sujeito à restrição da neutralidade de carga, é bem entendida tal que quando aplicada para as anãs brancas, devido à interação nuclear, os núcleons se juntam em íons e a pressão dos elétrons degenerados domina sobre as pressões dos íons. A equação de estado do gás de Fermi tem dois limites (dentro do domínio das anãs brancas): em baixas densidades, onde os elétrons são não relativísticos, que decorrem em anãs brancas leves. Por outro lado, para o limite de altas densidades (acima de $\sim 10^7 g/cm^3$), os elétrons se tornam relativísticos, obtendo assim o limite de massa de Chandrasekhar (M_{Ch}).

A massa de Chandrasekhar é entendida como a massa máxima que a pressão dos elétrons degenerados pode sustentar, a condição para isto é que os elétrons se tornem ultra relativísticos ($m_e \rightarrow 0$). Dessa forma, $M_{Ch} = 1.44M_{\odot}$ pode ser interpretado como um limite assintótico, onde a densidade central tende ao infinito e o raio da estrela vai para zero. No entanto, a massa limitante para anãs brancas reais é atingida para densidades finitas. Contudo, Chandrasekhar descobriu que uma configuração eletrônica completamente degenerada, tem um limite de massa quando se leva em conta a relatividade especial para a equação de estado.

Tendo em vista que as densidades das anãs brancas estão muito abaixo das densidades dos núcleos normais, o modelo do gás de Fermi degenerado pode ser modificado: é energeticamente mais favorável que os núcleons se juntem em núcleos do que ser uniformemente dispersos em densidades baixas. No entanto, ao aumentar a densidade, os átomos se tornam progressivamente mais ionizados e os elétrons enchem os interstícios, dessa maneira, um arranjo na rede minimiza a energia de Coulomb. Aproximamo-nos a uma rede tipo Wigner-Seitz na qual fornece um melhoramento para a EoS do gás de Fermi, válida abaixo das densidades na qual os elétrons de alta energia são capturados pelos prótons nos núcleos. Como resultado, temos anãs brancas compostas de uma única espécie nuclear, por exemplo 4He , ${}^{12}C$ ou ${}^{16}O$. Neste contexto, obtemos configurações estáveis com valores máximos das massas de estrelas compostas de uma das espécies nucleares, não obstante, menores do que M_{Ch} .

As equações de equilíbrio hidrostático newtoniana se ajusta muito bem para as anãs brancas, de forma que elas são consideradas como estrelas newtonianas. Em contraste com as equações TOV, mostradas no capítulo 3, os fatores de correções para a equação de equilíbrio hidrostático newtoniano são muito pequenos para estrelas newtonianas. Portanto, a diferença dos resultados de ambos tratamentos é pequena.

No capítulo 4 exploramos a hipótese da matéria estranha proposta por Bodmer, Witten e Terazawa que sugere que o verdadeiro estado fundamental absoluto da matéria consiste em uma combinação, aproximadamente, de igual número de quarks u , d e s conhecidos como *matéria estranha* e que a matéria nuclear observada pode, na verdade, ser metaestável. Matéria estranha pode existir em pequenas porções chamados de *strangelets*. De acordo com Berger e Jaffe pode-se estudar uma fórmula de massa tipo Bethe-Weizaecker, para espécies *strangelets* que são estáveis no *bulk*, assim, calculamos as massas para um particular *strangelet* dado um A e Z .

Conforme apresentado no capítulo 5, em nosso modelo, as equações de estado no contexto da aproximação da rede, para o *strangelet*₁₅, é a mais *mole* em relação para os outros *strangelets* como também para os núcleos ordinários (Figura 5.3). Este fato, fazendo uso das equações TOV, resulta em uma sequência de anãs cristalinas com massas menores que o limite de Chandrasekhar. Já para *strangelets* de massa intermédia, como o *strangelets* 8, obtemos valores dentro das massas observadas que batem com estrelas anãs compostas de espécies ordinárias. Em alternativa, anãs cristalinas feitas do *strangelet*₁, para densidades das anãs brancas, decorrem em estrelas massivas, com massa máxima de $2.39M_{\odot}$. Por certo, este valor está na faixa de valores de massas super Chandrasekhar, a saber, entre $2.1 - 2.8M_{\odot}$. Portanto, é possível que essas estrelas sejam potenciais progenitoras das SNe Ia super luminosas.

Finalmente, com esta nova proposta para anãs cristalinas feitas de um particular *strangelets*, abordagens futuras a partir dos resultados desta dissertação podem ser feitos. Por exemplo, achar um equivalente à massa de Chandrasekhar para tais estrelas (como no caso das estrelas de quarks em [159]), estudar a estabilidade destas estrelas. Além disso, pode-se analisar propriedades térmicas, anãs estranhas em rotação com campos magnéticos, anãs estranhas tipos pulsares, anãs com composições diferentes de espécies *strangelets*, entre outros. Além disto, poderemos teorizar a possível origem e formação destas estrelas.

Apêndice A

Constantes Físicas e Astronômicas

Velocidade da luz no vácuo	c	$2.99793458 \times 10^{10} \text{cm/s}$
Constante Gravitacional	G	$6.6720 \times 10^{-8} \text{cm}^3/\text{g/s}^2$
Constante de Planck	h	$6.6260755 \times 10^{-27} \text{erg}\cdot\text{s}$
Constante de Boltzmann	k	$1.380658 \times 10^{-16} \text{erg/K}$
Raio de Bohr	r_{Bohr}	$5.291771 \times 10^{-9} \text{cm}$
Carga do elétron	e	$-1.602189 \times 10^{-19} \text{C}$
Unidade de massa atômica	u	$931.504 \text{MeV}/c^2$
Massa do elétron	m_e	$0.511 \text{MeV}/c^2$
Massa do próton	m_p	$938.3 \text{MeV}/c^2$
Massa do nêutron	m_n	$939.6 \text{MeV}/c^2$
Estrutura fina	α	$1/137$
<hr/>		
Massa Solar	M_{\odot}	$1.9891 \times 10^{33} \text{g}$
Raio Solar	M_{\odot}	$6.95508 \times 10^{10} \text{cm}$
Luminosidade Solar	L_{\odot}	$3.8458 \times 10^{33} \text{erg/s}$
Massa da Terra	M_{\oplus}	$5.9742 \times 10^{27} \text{g}$
Raio da Terra	R_{\oplus}	$6.378136 \times 10^8 \text{cm}$

Apêndice B

Convenção de Unidades

Unidades gravitacionais, fazendo $G = c = k = 1$ (onde k é a constante de Boltzmann), são frequentemente muito úteis, não somente porque elas facilitam os cálculos mas também, as nossas equações não sobrecarregam as combinações ou potências das mesmas. As unidades gravitacionais (ou geométricas) são definidas como

$$\begin{aligned} 1 &= c = 2.9979 \times 10^{10} \text{cm}/s, \\ 1 &= G = 6.6720 \times 10^{-8} \text{cm}^3 \text{g}^{-1} \text{s}^{-2}, \\ 1 &= k = 1.3807 \times 10^{-16} \text{erg}/K, \end{aligned} \tag{B.1}$$

onde K denota Kelvin. Estas definições podem ser tratadas como equações assim, por exemplo, temos

$$\begin{aligned} 1s &= 2.9979 \times 10^{10} \text{cm}, \\ 1g &= 7.4237 \times 10^{-29} \text{cm}, \\ 1K &= 1.3807 \times 10^{-16} \text{erg}, \\ 1s^{-2} &= 1.4988 \times 10^7 \text{g}/\text{cm}^3, \\ 1\text{erg} &= 1\text{gcm}^2 \text{s}^{-2} = 8.2601 \times 10^{-50} \text{cm}, \\ 1\text{dyne}/\text{cm}^2 &= 8.2601 \times 10^{-40} \text{km}^{-2}, \\ 1\text{g}/\text{cm}^3 &= 7.4237 \times 10^{-19} \text{km}^{-2}, \end{aligned} \tag{B.2}$$

As duas últimas são usadas regularmente em astrofísica como unidades de pressão e densidade de energia, respectivamente. A massa pode ser expressa em unidades de quilômetros, por exemplo, a massa do Sol é $\sim 1.5\text{km}$.

Em física nuclear e de partículas uma unidade conveniente de energia (ou massa, Mc^2) é MeV . As vezes, também é usado GeV desde que isto é perto da massa do núcleon de $\sim 939MeV$. Os valores em $ergs$ e outras unidades são

$$\begin{aligned} MeV &= 1.6022 \times 10^{-6} \text{erg} = 1.3234 \times 10^{-55} \text{cm}, \\ &= 1.7827 \times 10^{-27} \text{g} = 1.1604 \times 10^{10} K. \end{aligned} \tag{B.3}$$

O alcance da força nuclear é $\sim 10^{-13}cm$ que é definido como um fermi e denotado por fm , assim, $1fm = 10^{-13}cm$. Duas constantes importantes são a constante de Plank $h = 2\pi\hbar$ e a carga elementar e , $\hbar c = 197.33MeVfm$, e $e^2 = 1.44MeVfm = (1.3805 \times 10^{-34}cm)^2$. Note que a constante de estrutura fina é $e^2/\hbar c$. No presente trabalho, também temos manipulado as expressões assumindo a convenção do sistema natural de unidades SN. Este sistema é bastante utilizado em astrofísica, inclusive em teoria de campos, assim

$$c = \hbar = 1. \quad (B.4)$$

Lembrando que no S.I. (Sistema Internacional), $c = 2.99792458 \times 10^8 m/s$ é a velocidade da luz no vácuo e a constante de Planck reduzida, $\hbar = 1.05457266 km.m^2/s$. Abaixo, segue uma tabela de conversão de unidades para SI e SN.

Quantidade Física	SI	SN	Fator SI \rightarrow SN
distância	m	m	1
tempo	s	m	c
massa	kg	m^{-1}	c/\hbar
velocidade	m/s	<i>adimensional</i>	$1/c$
momento linear	$kg.m/s$	m^{-1}	$1/\hbar$
momento angular	$kg.m^2/s$	<i>adimensional</i>	$1/\hbar$
energia	$kg.m^2/s^4$	m^{-1}	$1/\hbar c$
ação	$kg.m^2/s$	<i>adimensional</i>	$1/\hbar$
pressão	$kg/(m.s^2)$	m^{-4}	$1/\hbar c$
densidade de energia	$kg/(m.s^2)$	m^{-4}	$1/\hbar c$

onde o fator de conversão é

$$\hbar c = 3.1615 \times 10^{-26} J.m. \quad (B.5)$$

Em física nuclear, porém, a escala de comprimento mais apropriada é o Fermi, também chamado de fentômetro (fm), sendo que $1fm = 10^{-15}m$, e a energia e massas são comumente expressas em MeV , usando $E = mc^2$. As massas atômicas medidas em u (unidade de massas atômica). Logo, temos o fator

$$1u = 931.504 MeV. \quad (B.6)$$

Apêndice C

Método de Runge-Kutta de ordem 4

Nos estudos dos métodos numéricos, sabe-se que o método de Euler é chamado de método de um passo, ou seja, precisa somente do conhecimento de um ponto para calcular o próximo. Já no método de Milne é chamado de muitos passos, pois exige conhecer vários pontos anteriores. Num sentido, os métodos de Runge-Kutta são uma combinação dos dois, e adotam os melhores aspectos de cada um. A vantagem sobre os métodos de Euler é uma exatidão maior para o mesmo número de cálculos e, em relação ao método de Milne é, por um lado, sua estabilidade, e por outro, podem ser inicializados sem ajuda de outros métodos para achar os primeiros pontos [154]. Em alternativa, uma análise de erros nos métodos de Runge-Kutta é menos óbvio do que outros métodos, ou seja, apresentam a desvantagem de não ter uma estimativa simples para o erro, o que inclusive poderia ajudar na escolha do passo [155]. O método de Runge-Kutta de ordem 4 é o mais conhecido, e a ideia deste é aproveitar as qualidades dos métodos de série de Taylor e eliminar seu maior defeito que é o cálculo das derivadas da função [156].

Mostramos a seguir as fórmulas do método de Runge Kutta de ordem 4 para um sistema de equações diferenciais ordinárias com condições iniciais.

Seja o sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem e acopladas, na qual definimos como novas funções, $f(t, x, y)$ e $g(t, x, y)$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(t, x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= g(t, x, y),\end{aligned}\tag{C.1}$$

sujeita às condições iniciais

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \quad e \quad t(0) = 0.\tag{C.2}$$

Assim, temos para a função f

$$f_{i+1} = f_i + \frac{1}{6}(k_{1x} + 2k_{2x} + 2k_{3x} + k_{4x}),\tag{C.3}$$

onde os k 's estão definidos

$$\begin{aligned}
k_{1x} &= hf(t_i, x_i, y_i), \\
k_{2x} &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{1}{2}l_{1y}, y_i + \frac{1}{2}k_{1x}\right), \\
k_{3x} &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{1}{2}l_{2y}, y_i + \frac{1}{2}k_{2x}\right), \\
k_{4x} &= hf(t_i + h, x_i + l_{3y}, y_i + k_{3x}).
\end{aligned} \tag{C.4}$$

Do mesmo modo, para a função g , temos

$$g_{i+1} = g_i + \frac{1}{6}(l_{1y} + 2l_{2y} + 2l_{3y} + l_{4y}), \tag{C.5}$$

sendo os l 's definimos

$$\begin{aligned}
l_{1y} &= hg(t_i, x_i, y_i), \\
l_{2y} &= hg\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{1}{2}l_{1y}, y_i + \frac{1}{2}k_{1x}\right), \\
l_{3y} &= hg\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{1}{2}l_{2y}, y_i + \frac{1}{2}k_{2x}\right), \\
l_{4y} &= hg(t_i + h, x_i + l_{3y}, y_i + k_{3x}).
\end{aligned} \tag{C.6}$$

O valor do passo é h e $t_{i+1} = t_i + h$. As vantagens deste método é ser auto-iniciantes porque tem um passo, e é adaptável no sentido de que o passo h pode ser modulado razoavelmente em qualquer instante em acordo com estimativas do erro local, mas não é simples tal estimativa [157, 158]. Não exigem o cálculo de qualquer derivada das funções f ou g , em contraste, calcula f ou g em vários pontos.

Apêndice D

Fórmula de Massa

Da referência [129], tem-se calculadas as propriedades no *bulk* da matéria estranha e as correções deste limite em termos dos parâmetros do bulk. A fórmula de massa é

$$E_0 = \epsilon_0 A + 4\pi\sigma r_0^2 A^{2/3} + \Delta_Y (Y - Y_{min})^2 + \Delta_Z (Z - Z_{min})^2 \quad (\text{D.1})$$

junto com a perturbação da superfície dado por

$$\sigma = \frac{3}{8\pi} \left(\frac{m_s}{\sin \theta} \right)^3 \left\{ \frac{\cos^2 \theta}{6} - \frac{\sin^2 \theta (1 - \sin \theta)}{3} - \frac{1}{3\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \theta - \sin 2\theta + \sin^3 \theta \ln \left(\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} \right) \right] \right\}. \quad (\text{D.2})$$

onde Δ_Y e Δ_Z são as curvaturas definidas pelas equações

$$\Delta_Y = \left. \frac{\partial \mu_Y}{\partial Y} \right|_0, \quad \Delta_Z = \left. \frac{\partial \mu_Z}{\partial Z} \right|_0 + \frac{6}{5} \frac{\alpha}{\rho A^{1/3}}. \quad (\text{D.3})$$

Para fazer a lógica da nossa aproximação mais transparente, definimos

$$\delta_Y = A \left. \frac{\partial \mu_Y}{\partial Y} \right|_0, \quad \delta_Z = A \left. \frac{\partial \mu_Z}{\partial Z} \right|_0, \quad (\text{D.4})$$

que são independentes de A e dependem só da escolha de ϵ_0 e m_s através das equações

$$\left. \frac{\partial \mu_Y}{\partial Y} \right|_0 = \frac{m_s (1 + \cos^3 \theta)^3}{6A \sin \theta} \frac{\left\{ 1 + \frac{1 + \cos \theta}{[4(1 + \cos^3 \theta)]^{2/3}} \right\}}{\cos^6 \theta + \cos \theta + \cos \theta \left[\frac{1}{2} (1 + \cos^3 \theta) \right]^{4/3}}, \quad (\text{D.5})$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mu_Z}{\partial Z} \right|_0 &= \frac{m_s}{A \sin \theta} \beta^{1/3} \cos^2 \theta [\cos^4 \theta (1 + \beta^{2/3}) + (1 + \beta)^2] \\ &\times \{ [2 \cos^2 \theta + \beta^{1/3}] [\cos^4 \theta (1 + \beta^{2/3}) + (1 + \beta)^2] \\ &- [\cos^4 \theta + \beta^{1/3} (1 + \beta)] [(2\beta^{2/3} - 1) \cos^2 \theta + (1 + \beta)] \}^{-1}, \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

onde $\beta = \frac{1}{2}(1 + \cos^3 \theta)$. Logo, a fórmula de massa é

$$E(A, Y, Z) = \epsilon_0 A + 4\pi\sigma r_0^2 A^{2/3} + \frac{1}{2} \frac{\delta_Y}{A} (Y - Y_{min})^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{\delta_Z}{A} + \frac{6\alpha}{5\rho A^{1/3}} \right] (Z - Z_{min})^2, \quad (\text{D.7})$$

onde ϵ_0 é definido pela equação (4.3), $\Omega_{s,S,0}$ pela equação (D.2), e ρ_0 definido como

$$r_0 = \frac{1}{m} \frac{\sin \theta}{\left[\left(\frac{2}{3\pi} \right) (1 + \cos^3 \theta) \right]^{1/3}}. \quad (\text{D.8})$$

δ_Y pelas equações (D.4) e (D.5) e, finalmente, δ_Z pelas equações (D.4) e (D.6). O mínimo *strangelet* acontece para valores de Y_{min} e Z_{min} no *bulk* dados respectivamente por

$$Y_{min} = Ay_0 = \frac{1 - \cos^3 \theta}{1 + \cos^3 \theta}, \quad Z_{min} = -\frac{\mu Z_0}{\partial\mu_Z/\partial Z|_0 + 6\alpha/5\rho A^{1/3}}. \quad (\text{D.9})$$

Bibliografia

- [1] G. Fontaine, P. Brassard, P. Bergeron. «The Potential of White Dwarf Cosmochronology». *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* 113 (782). p. 409-435. (2001).
- [2] J. Johnson, «Extreme Stars: White Dwarfs and Neutron Stars». Ohio State University. *Lectura* 22. (2007).
- [3] J. Liebert, P. Bergeron, D. Eisenstein, H.C. Harris, S.J. Kleinman, A. Nitta, and J. Krzesinski. «How Degenerate Stars Came to be Known as White Dwarfs». *The Astrophysical Journal* 606. p. L147-L149.(2007).
- [4] Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics. «Cosmic weight loss: The lowest mass white dwarf» (press release) (em inglês). (Consultado o 17 de abril 2007).
- [5] K. Werner, N. J. Hammer, T. Nagel, T. Rauch, e S. Dreizler. «On Possible Oxygen/Neon White Dwarfs: H1504+65 and the White Dwarf Donors in Ultracompact X-ray Binaries». *14th European Workshop on White Dwarfs; Proceedings of a meeting held at Kiel*. p. 165. (2004).
- [6] M. Richmond. «Late stages of evolution for low-mass stars». Rochester Institute of Technology. (Consultado o 3 de maio 2007).
- [7] D. N. Spergel, R. Bean, O. Doré, M. R. Nolta, C. L. Bennett, J. Dunkley, G. Hinshaw, N. Jarosik, E. Komatsu, L. Page, H. V. Peiris, L. Verde, M. Halpern, R. S. Hill, A. Kogut, M. Limon, S. S. Meyer, N. Odegard, G. S. Tucker, J. L. Weiland, E. Wollack, E. L. Wright. «Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Three Year Results: Implications for Cosmology». *arXiv:astro-ph/0603449v2*. (Consultado el 27 de febrero de 2007).
- [8] J. B. Holberg. «How Degenerate Stars Came to be Known as White Dwarfs». *Bulletin of the American Astronomical Society* 37. p. 1503. (2005).
- [9] W. Herschel. VI. Catalogue of double stars. *Philosophical transactions of the Royal Society of London*, 75, 40-126 (1785).
- [10] W. H. van den Bos. The orbit and the masses of 40 Eridani BC. *Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands*, 3, 128 (1926).
- [11] W. D. Heintz. Astrometric study of four visual binaries. *The Astronomical Journal*, 79, 819-825 (1974).

- [12] W. S. Adams. «An A-Type Star of Very Low Luminosity». *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* 26 (155). p. 198. (1914).
- [13] C. Flammarion. «The Companion of Sirius». *The Astronomical Register* 15 (176). p. 186-189 (1877).
- [14] A. van Maanen. «Two Faint Stars with Large Proper Motion». *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* 29 (172). p. 258-259. (1917).
- [15] E. Schatzman, *White Dwarfs*. Amsterdam: North-Holland. (1958).
- [16] D. J. Eisenstein, J. Liebert, H. C. Harris, S. J. Kleinman, A. Nitta, N. Silvestri, S. A. Anderson, J. C. Barentine, H. J. Brewington, J. Brinkmann, M. Harvanek, J. Krziesiński, E. H. Neilsen, Jr., Dan Long, D. P. Schneider, S. A. Snedden. «A Catalog of Spectroscopically Confirmed White Dwarfs from the Sloan Digital Sky Survey Data Release 4». *The Astrophysical Journal Supplement Series* 167 (1). p. 40-58. (2006).
- [17] A. Heger, C. L. Fryer, S. E. Woosley, N. Langer, D. H. Hartmann. «How Massive Single Stars End Their Life». *The Astrophysical Journal* 591 (1). p. 288-300. (2003).
- [18] M. J. Sarna, E. Ergma, J. Gerskevits. «Helium core white dwarf evolution—including white dwarf companions to neutron stars». *Astronomische Nachrichten* 322 (5-6). p. 405-410. (2001).
- [19] O. G. Benvenuto, M. A. De Vito. «The formation of helium white dwarfs in close binary systems - II». *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 362 (3). p. 891-905. (2005).
- [20] V. Dhillon. «The evolution of low-mass stars» (lecture notes). Physics 213, University of Sheffield. Arquivado desde o original o 13 de outubro 2007. (Consultado o 3 de maio de 2007).
- [21] Ken'ichi Nomoto. «Evolution of 8–10 solar mass stars toward electron capture supernovae. I - Formation of electron-degenerate O + Ne + Mg cores». *The Astrophysical Journal* 277. p. 791-805. (1984).
- [22] S. E. Woosley, A. Heger, T. A. Weaver. «The evolution and explosion of massive stars». *The Astrophysical Journal* 74 (4). p. 1015-1071. (2002).
- [23] E. M. Sion, J. L. Greenstein, J. D. Landstreet, J. Liebert, H. L. Shipman, G. A. Wegner. «A proposed new white dwarf spectral classification system». *The Astrophysical Journal* 269 (1). p. 253-257. (1983).
- [24] G. P. McCook, E. M. Sion. «A Catalog of Spectroscopically Identified White Dwarfs». *The Astrophysical Journal Supplement Series* 121 (1). p. 1-130. (1999).
- [25] P. A. Mazzali, F. K. Röpke, S. Benetti, W. Hillebrandt. «A Common Explosion Mechanism for Type Ia Supernovae». *Science* 315 (5813). p. 825-828. (2007).

- [26] M. Kulic, C. A. Prieto, W. R. Brown, D. Koester. «The Lowest Mass White Dwarf». *The Astrophysical Journal* 660 (2). p. 1451-1461. (2007).
- [27] S. O. Kepler, S. J. Kleinman, A. Nitta, D. Koester, B. G. Castanheira, O. Giovannini, A. F. M. Costa, L. Althaus. «White dwarf mass distribution in the SDSS». *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 375 (4). p. 1315-1324. (2007).
- [28] H. L. Shipman. «Masses and radii of white-dwarf stars. III - Results for 110 hydrogen-rich and 28 helium-rich stars». *The Astrophysical Journal* 228. p. 240-256. (1979).
- [29] F. Sandin (2007). Exotic phases of matter in compact stars (Doctoral dissertation, Luleå tekniska universitet).
- [30] F. Leblanc. «An Introduction to Stellar Astrophysics». Université de Moncton, Canada, Jhon Wiley and Sons, Ltd.(2010).
- [31] S. C. Yoon and N. Langer. Presupernova evolution of accreting white dwarfs with rotation. *Astronomy & Astrophysics* 419.2 623-644. (2004).
- [32] A. Khokhlov, E. Mueller, and P. Höflich. "Light curves of Type IA supernova models with different explosion mechanisms." *Astronomy and Astrophysics* 270 223-248 (1993).
- [33] Staff. "Introduction to Supernova Remnants", NASA Goddard/SAO (2006).
- [34] M. Orellana, M. C. Bersten, O. G. Benvenuto. Curvas de luz de supernovas superluminosas: modelos hidrodinámicos. *Boletín de la Asociación Argentina de Astronomía La Plata Argentina*, v. 58, p. 108-110, (2016).
- [35] K. J. Shen, T. Silvia, Or Graur. The Evolution of the Type Ia Supernova Luminosity Function. *The Astrophysical Journal Letters*, v. 851, n. 2, p. L50, (2017).
- [36] D. Branch, G. A. Tammann. Type Ia supernovae as standard candles. *Annual review of astronomy and astrophysics*, v. 30, n. 1, p. 359-389, (1992).
- [37] N. Wygoda, Y. Elbaz, B. Katz. Type Ia supernovae have two physical width-luminosity relations and they favor sub-Chandrasekhar and direct collision models. I. Bolometric. arXiv preprint arXiv:1711.00969, (2017).
- [38] A. Gal-Yam. Luminous supernovae. *Science*, 337(6097), 927-932 (2012).
- [39] M. M. Kasliwal, E. O. Ofek, A. Gal-Yam, A. Rau, & P. J. Brown, *ApJ*, 683, L29, e. a. 2008.
- [40] V. Stanishev, S. Taubenberger, G. Blanc, G. C. Anupama, & S. Benetti, in *American Institute of Physics Conference Series*, Vol. 924, *The Multicolored Landscape of Compact Objects and Their Explosive Origins*, ed. T. di G. L. Salvo, Israel, L. Piersant, L. Burderi, G. Matt, A. Tornambe, & M. T. Menna, 336–341. e. a. 2007.
- [41] D. A. Howell, M. Sullivan, P. E. Nugent, et al. *Nature*, 443, 308, (2006).
- [42] D. J. Jeffery, D. Branch, & E. Baron, (2006), eprint ArXiv:astro-ph/0609804.

- [43] M. Hicken, P. M. Garnavich, & Prieto, et al., *J. L. ApJ*, 669, L17 (2007).
- [44] M. Yamanaka, K. S. Kawabata, & Kinugasa, et al., *K. ApJ*, 707, L118, (2009).
- [45] R. A. Scalzo, G. Aldering, & Antilogus, et al., *P. ApJ*, 713, 1073, (2010).
- [46] J. M. Silverman, M. Ganeshalingam, & Li, et al., *W., MNRAS*, 410, 585, (2011).
- [47] S. Taubenberger, S. Benetti, & Childress, et al., *M., MNRAS*, 412, 2735, (2011).
- [48] Taubenberger, Stefan et al. Super-Chandrasekhar Type Ia Supernovae at nebular epochs. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, v. 432, n. 4, p. 3117-3130, (2013).
- [49] D. Shlomo & D. Arnon. Analytical expressions for light-curves of ordinary and superluminous supernovae type ia. *arXiv preprint arXiv:1301.3333*, (2013).
- [50] O. Rachid et al. Quark-Noave in binaries: Observational signatures and implications to astrophysics. *arXiv preprint arXiv:1601.04235*, (2016).
- [51] J. M. M. Pfannes, J. C. Niemeyer, W. Schmidt. Thermonuclear explosions of rapidly rotating white dwarfs-II. Detonations. *Astronomy & Astrophysics*, v. 509, p. A75, (2010).
- [52] J. G. Coelho, et al. Dynamical instability of white dwarfs and breaking of spherical symmetry under the presence of extreme magnetic fields. *The Astrophysical Journal*, v. 794, n. 1, p. 86, (2014).
- [53] S. L. Shapiro and S. A. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars. The Physics of Compact Objects* (New York: Wiley 1983).
- [54] D. Koester and V. Weidemann, *Astron. Astrophys.* 81 145 (1980).
- [55] D. Koester and V. Weidemann, *Astron. Astrophys.* 219 276 (1989).
- [56] S. Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure*, Cambridge: University of Cambridge Press (1939).
- [57] D. E Winget, C. J. Hansen, J. Liebert, H. M. Van Horn, G. Fontaine, R. E. Nather, S. O. Kepler and D. Q. Lamb, *Astrophys. J.* 307 659 (1987a).
- [58] D. Koester, *The Second Conference on Faint Blue Stars IAU Coll. No. 95* ed A. G. D. Philip, D. S. Hayes and J. Liebert (Schenectady: L. Davis Press) p 329 (1987a).
- [59] C. Paquette, C. Pelletier, G. Fontaine, & G. Michaud. Diffusion in white dwarfs-New results and comparative study. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 61, 197-217 (1986).
- [60] J. Patterson. The evolution of cataclysmic and low-mass X-ray binaries. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 54, 443-493 (1984).
- [61] G. T. Bath, *Rep. Progr. Phys.* 48 483 (1985).
- [62] C. W. Mauche (ed) *Proc. 11th North American Workshop on CVs and LMXRBS* (Cambridge: Cambridge University Press) in press (1990).

- [63] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, New York John Wiley, (1972).
- [64] A. Einstein, Notes on the origin of the general theory of relativity (1933), in Einstein, *Ideas and opinions* (London), 285–290, on 286–287 (1973).
- [65] N. K. Glendenning, “COMPACT STARS Nuclear Physics, Particle Physics, and General Relativity”. Second Edition, Springer, A&A Libray. (2000).
- [66] O. Kepler de Souza, O. Maria de Fátima. “ASTRONOMÍA & ASTROFÍSICA”. Departamento de astronomia-IF da UFRGS, Segunda edição São Paulo, Editora livraria da física (2004).
- [67] B. W. Carroll and D. A. Ostile. “AN INTRODUCTION TO MODERN ASTROPHYSICS”, Second Edition, Pearson Addison Wesley San Francisco (2007).
- [68] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics* (McGraw Hill Book Co., 1949).
- [69] I. S. Gradshteyn and L. M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series and Products* (Academic Press, New York, 1965).
- [70] P. M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, (McGraw-Hill, New York, 1953).
- [71] N. K. Glendenning, *Phys. Lett.* 114B (1982) 392.
- [72] N. K. Glendenning, *Astrophys. J.* 293 (1985) 470.
- [73] R. H. Fowler, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 87 (1926) 114.
- [74] J. B. Hartle in *Relativity, Astrophysics and Cosmology*, ed. by W. Israel (D. Riedel, Dordrecht, Holland, 1973).
- [75] G. C. Emanuel. “Estrelas Politrópicas Relativistas”, Instituto tecnológico de Aeronáutica. São Paulo Brasil.(2007).
- [76] S. Chandrasekhar, *Astrophys. J.* 74 (1931) 81.
- [77] S. Chandrasekhar. The highly collapsed configurations of a stellar mass (Second paper). *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 95, 207-225 (1935).
- [78] B. K. Harrison, K. S. Thome, M. Wakano and J. A. Wheeler, *Gravitation Theory and Gravitational Collapse*, (University of Chicago Press, 1965).
- [79] T. Hamada and E. E. Salpeter, *Astrophys. J.* 134 (1961) 683.
- [80] G. Baym, C. Pethick and P Sutherland, *Astrophys. J.* 170 (1971) 299.
- [81] V. Weidemann, *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* 28 (1990) 103.
- [82] MADERO RAMÍREZ, DIEGO A. Relación Masa-Radio para estrellas enanas blancas a temperatura cero. 2006. 51 f. Tese (Graduação em Física)-Facultad de Ciencias: Escuela de Física, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga. 2006

- [83] P. J. Siemens, Nucl. Phys. A141 (1970) 225.
- [84] G. Baym, H. A. Bethe, and C. J. Pethick, Nucl. Phys. A175 (1971) 225.
- [85] K. R. Lang, Astrophysical Data, Planets and Stars (Springer-Verlag, New York, 1992).
- [86] D. Koester, H. Shultz and V. Weidemann, Astron. Astrophys. 76 (1979) 262.
- [87] R. C. Tolman, Phys. Rev. 55 (1939) 364.
- [88] J. R. Oppenheimer e G. M. Volkoff, Astrophys. J. 74 (1939) 81.
- [89] L. Landau e E. Lifshitz, The Classical Theory of Fields. Addison-Wesley, (1951).
- [90] Schwarzschild, Sitzungsberichte Preuss, 422, (1916).
- [91] S. Chandrasekhar, Phys. Rev. Lett. 12 (1964) 114; op. cit. p. 437.
- [92] J. J. Thomson, Philos. Mag. 44 (1897) 293.
- [93] E. Rutherford, "The Scattering of α and β Particles and the Structure of the Atom", Philosophical Magazine 21 (6) pp. 669-688 (1911).
- [94] N. Bohr. On the Constitution of Atoms and Molecules. Phil. Mag. 26: 1-25 (1913).
- [95] Hideki, Yukawa, "On the Interaction of Elementary Particles. I.", Proc. Phys.-Math. Soc. Jupun I7, 48-57, (Also read Nov. 17, 1934, at a regular monthly meeting of the Society at the Tokyo Imperial University.)(1935).
- [96] H. Yukawa, Proc. Phys. Math. Soc. Japan 17, 48 (1935).
- [97] H. Yukawa and S. Sakata, ibid. 19, 1084 (1938)
- [98] Y. Tanikawa, Progr. Theoret. Phys. Kyoto, 2 (1947) 220; S. Sakata and K. Inouye, ibid., I (1946) 143.
- [99] T. Cohen, Claude, B. Diu, F. Laloë. Quantum Mechanics. vol.1 (3^a edición). París, Francia: Hermann. p. 898. (1977).
- [100] W. Pauli, Z. Physik, 31 373 (1925).
- [101] P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A114, 243 (1927); idem, A114, 710 (1927).
- [102] C. D. Anderson, The Positive Electron, Physical Review (43), p 491-494 (1933).
- [103] M. Gell-Mann, Physics 1, 63 (1964).
- [104] G. Zweig, CERN Reports No. 8182/TH. 401 and No. 8419/TH. 412, (1964).
- [105] W. Pauli, in Septi'eme Conseil de Physique, Solvay (Gauthier- Villars, Paris), p. 324. (1934).
- [106] F.J. Yndurain, The Theory of Quark and Gluon Interactions. Springer-Verlag, Heilderberg, (1999).

- [107] L. Jánossy, G. D. Rochester, and D. Broadbent, *Nature*, 155,1 42 (1945).
- [108] M. Gell-Mann, California Institute of Technology Synchrotron Laboratory Report CTSL-20, 1961 (unpublished); *Phys. Rev.* 125, 1067 (1962).
- [109] Y. Ne'eman, *Nucl. Phys.* 26, 222 (1961).
- [110] K. S. Krane, *Introductory Nuclear Physics*. New York: John Wiley, (1988).
- [111] K. C. Chung, *Introdução à Física Nuclear*. Rio de Janeiro: Ed. Uerj, (2001).
- [112] B. L. Cohen, *Concepts of Nuclear Physics*. New York: McGraw-Hill, (1971).
- [113] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*. New York: Ed. John Wiley, (1987).
- [114] P. E. Hodgson, E. Gadioli, E. Erba, *Introductory Nuclear Physics*. Oxford, Inglaterra: Oxford Science Publications, (2000).
- [115] M. Gell-Mann, *Phys. Rev.* 92, 833 (1953).
- [116] K. Nishijima, *Prog. Theor. Phys.* 13, 285 (1955).
- [117] M. K. Glendenning, *Compact Stars*, N.Y., Springer-Verlag (1997)
- [118] F. Weber, *Strange Quark Matter and Compact Stars*, *Prog. Part. Nucl. Phys.* 54, 193–288, (2005).
- [119] A. R. Bodmer, *Phys. Ver. D* 4 1601 (1971).
- [120] E. Written, *Phys. Rev. D* 30 272 (1984).
- [121] H. Terazawa, INS-Report-338 (INS, Univ. of Tokyo, 1979); *J. Phys. Soc. Japan*, 58 (1989) 3555; 58 (1989) 4388; 59 1199 (1990).
- [122] GOMEZ, Rosana de Oliveira. *Transições de fase hádrons-quarks em estrelas de nêutrons*. 2011. 172 f. Dissertação (Mestre em Física)-Instituto de Física, Universidade Federal Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2011.
- [123] E. Weber, *Prog. Part. Nucl. Phys.* 54 193 (2005).
- [124] B. Alcock, E. Farhi, and A. V. Olinto, *Astrophys. J.* 310 261 (1986).
- [125] J. Madsen and P. Haensel, *Stranger Quarks Matter in Physics and Astrophysics*, *Proc. Of the International Workshop*, ed. *Nucl. Phys. B. (Proc. Suppl.)* 24B (1991).
- [126] E. Farhi and R. L. Jaffe, *Phys. Rev. D* 30 2379 (1984).
- [127] J. Madsen, *Lectures Notes in Physics* 516 162 (1999).
- [128] L. P. Machado, *Matéria de quarks (stranelets) de origem astrofísica e sua detecção por experimentos terrestres*. Tese (Doutorado em Física)-Instituto de Física, Universidade de São Paulo. São Paulo, p. 10. (2008).

- [129] M. S. Berger and R. L. Jaffe, *Phys. Rev. C* 35 213 (1987).
- [130] S. A. Chin and A. K. Kerman, *Phys. Rev. Lett.* 43, 1292(1979).
- [131] H. C. Lui and G. L. Shaw, *Phys. Rev. D* 30, 1137 (1984).
- [132] J. Rafelski, *Nucl. Phys. A* 41S, 215 (1984).
- [133] A. Sommerfeld, *Atomic Structure and Spectral Lines*. Londres: Mathuen & Co. (1934).
- [134] J. Madsen, Institute of Physics and Astronomy, University of Aarhus, DK-8000 Århus C, Denmark, (1995).
- [135] J. Madsen, Institute of Physics and Astronomy, University of Aarhus, DK-8000 Århus C, Denmark, *Phys. Rev. Lett.* 87. 17 (2003).
- [136] J. J. Drake. et al. *ApJ*, 572, 996 (2002).
- [137] P. O. Slane, D. J. Helfand, & S. S. Murray, *ApJL*, R571, L4 (2002).
- [138] G. J. Mathews, I. S. Suh, B. O’Gorman, N. Q. Lan, W. Zech, K. Otsuki, & F. Weber. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 32(6), 747. (2006).
- [139] M. G. Alford, S. Han and S. Reddy. *Strangelet Dwarfs. Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics* 39.6: 065201. (2012).
- [140] M. Bagchi, S. Ray, M. Dey, & J. Dey. *MNRAS* in press, astro-ph/0602348. (2006).
- [141] A. Majczyna, & J. Madej. *Acta Astron.*, 55, 1. (2005).
- [142] J. Schaffner-Bielich. *J. Phys. G* 31, S651 (2005).
- [143] F. Weber. *Prog. Particle & Nucl. Phys.*, 54, 193 (2005).
- [144] R. X. Xu. *MNRAS*, 356, 359 (2005).
- [145] C. Alcock and A. V. Olinto, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* 38 161 (1988).
- [146] N. K. Glendenning, Ch. Kettner, and F. Weber, *Astrophys. J.* 450 253 (1995b).
- [147] N. K. Glendenning, Ch. Kettner, and F. Weber. *Phys. Rev. Lett.* 74 3519 (1995a).
- [148] K. Rajagopal and F. Wilczek, *The Condensed Matter Physics of QCD, At the Frontier of Particle Physics/Handbook of QCD*, ed. M. Shifman, (World Scientific, 2001).
- [149] M. Alford, *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* 51 131 (2001).
- [150] M. Alford, K. Rajagopal and F. Wilczek, *Phys. Lett.* 422B 247 (1998).
- [151] R. Rapp, T. Schäfer, E. V. Shuryak, and M. Velkovsky, *Phys. Rev. Lett.* 81 53(1998); *Ann. Phys.* 280 35 (2000).
- [152] M. G. Alford, A. Schmitt, K. Rajagopal and T. Schäfer, *Rev. Mod. Phys.* 80 1455 (2008).

- [153] D. B. Kaplan and S. Reddy, Phys. Rev. D65 054042 (2002).
- [154] P. A. Stark, “INTRODUÇÃO AOS MÉTODOS NUMÉRICOS”, editora intercência, Rio de Janeiro, Brasil, (1984).
- [155] M. A. Gomes Ruggiero, V. Lucia da Rocha Lopez, “CÁLCULO NUMÉRICO: ASPECTOS TEÓRICOS Y COMPUTACIONALES”, Segunda edição, São Paulo, Pearson Makron Books, (1996).
- [156] F. Scheid, Ph. D., “ANÁLISE NUMÉRICA”, Segunda edição, McGraw-Hill, Boston University, printed in Portugal, (1991).
- [157] D. Sperandio, J.T. Mendes, L.H. Monken & Silva, “CÁLCULO NUMÉRICO CARACTERÍSTICAS MATEMÁTICAS E COMPUTACIONAIS DOS MÉTODOS NUMÉRICOS”, Editor Roger Trimer, Pearson Education do Brasil, São Paulo (2003).
- [158] G. E. Forsythe, M. A. Malcol, & C. B. Moler, “COMPUTER METHODS FOR MATHEMATICS COMPUTATIONS”, Printice Hall, Inc. (1977).
- [159] Shibaji Banerjee. J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 26 L1. et al (2000).