

Gabriel da Costa Santos Rosa

# Defeitos magnéticos e quantização das teorias de Yang-Mills

Niterói - Rj, Brasil  
24 de abril de 2017



Gabriel da Costa Santos Rosa

# Defeitos magnéticos e quantização das teorias de Yang-Mills

Tese de doutorado apresentada ao curso de Física,  
como requisito parcial para a obtenção do  
Título de Doutor em Física

Departamento de Física - Universidade Federal Fluminense

Orientador: Luis Esteban Oxman

Niterói - Rj, Brasil  
24 de abril de 2017



R788d Rosa, Gabriel da Costa Santos.

Defeitos magnéticos e quantização das teorias de Yang-  
Mills

/ Gabriel da Costa Santos ; orientador: Luis Esteban Oxman. -

-

Niterói, 2017.

82 p. : il.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal Fluminense,  
Instituto de Física, Niterói, 2017.

Bibliografia: p. 79-82.

1.VÓRTICE. 2.TEORIA DE CALIBRE. 3.TOPOLOGIA. 4.ENSEMBLE.  
I.Esteban Oxman, Luis, orientador. II.Universidade Federal  
Fluminense. Instituto de Física, Instituição responsável.

III.

Título.

Gabriel da Costa Santos Rosa

# Defeitos magnéticos e quantização das teorias de Yang-Mills

---

Prof. Luis Esteban Oxman  
Orientador

---

Prof. Dr. Rodrigo Ferreira Sobreiro  
Universidade Federal Fluminense

---

Prof. Dr. Daniel Gustavo Barci  
Universidade Estadual do Rio de Janeiro

---

Prof. Dr. Marcelo Santos Guimarães  
Universidade Estadual do Rio de Janeiro

---

Prof. Dr. José Abdalla Helayël-Neto  
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

# Agradecimentos

Agradeço a minha família, a minha namorada, ao meu orientador e aos meus amigos.  
Agradeço ao CNPq e a FAPERJ pelo apoio financeiro.

# Resumo

Nesta tese de doutorado, abordaremos duas formas distintas de tratar a quantização da Teoria de Yang-Mills pura no espaço-tempo contínuo. Inicialmente, motivados pelo desenvolvimento de técnicas de Física de polímeros, relacionaremos um *ensemble* de curvas fechadas que possuem um grau de liberdade interno não Abelianiano com a teoria quântica de um par de campos escalares adjuntos. Esta teoria estará intimamente relacionada com a conhecida proposta de t'Hooft para o modelo do supercondutor dual. Em um segundo momento, introduziremos uma nova fixação de calibre para a teoria de Yang-Mills capaz de particionar a integral funcional em infinitas contribuições de setores topologicamente inequivalentes  $\mathcal{V}(S_0)$ . Um destes setores descreverá a Física perturbativa conhecida, onde Liberdade Assintótica e outros fenômenos podem ser obtidos. Os outros setores devem levar em consideração a presença de configurações topológicas que devem ser somadas no funcional gerador e, portanto, esperamos que uma nova Física possa nos ser revelada quando avaliarmos suas contribuições, de maneira semelhante ao que ocorre na QCD na rede. Analisamos ainda a existência de cópias de Gribov e a estrutura da simetria nilpotente BRST após a aplicação deste procedimento.

# Abstract

In this Ph.D. thesis, we study two distinct ways to treat the quantization of  $SU(N)$  pure Yang-Mills field theory in the continuum space. Firstly, motivated by Polymer Physics techniques, we will relate an ensemble of colored loops to a quantum field theory of adjoint scalar fields. This theory is intimately related to a model proposed by t'Hooft, known as Dual Superconductor, which describes the phases of Yang-Mills' vacuum. In the second part, we introduce a new gauge fixing procedure that split the functional integral into infinitely many sectors  $\mathcal{V}(S_0)$ . One of those sectors describes the perturbative Physics, where we can expand the fields as plane waves, and we can achieve Asymptotic Freedom. The other sectors take into consideration the presence of topological defects and, as it happens in the Lattice QCD, we hope that a new Physics can be revealed when we evaluate the full functional generator.



# Sumário

	<b>Sumário</b> . . . . .	<b>9</b>
	<b>Lista de ilustrações</b> . . . . .	<b>10</b>
<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>TEORIA DE YANG-MILLS</b> . . . . .	<b>17</b>
<b>2.1</b>	<b>Teoria Clássica de Yang-Mills</b> . . . . .	<b>17</b>
<b>2.2</b>	<b>Quantização da Teoria de Yang-Mills</b> . . . . .	<b>18</b>
2.2.1	Simetria BRST . . . . .	22
2.2.2	Identidades de Ward . . . . .	23
2.2.3	Problema de Gribov . . . . .	25
<b>3</b>	<b>QCD NA REDE</b> . . . . .	<b>27</b>
<b>3.1</b>	<b>Definições</b> . . . . .	<b>27</b>
3.1.1	Algoritmo de Metrópolis . . . . .	28
<b>3.2</b>	<b>Vórtices de centro na rede</b> . . . . .	<b>29</b>
3.2.1	Dominância de centro . . . . .	30
3.2.2	Remoção dos vórtices de centro . . . . .	30
<b>3.3</b>	<b>Calibre Laplaciano Adjunto</b> . . . . .	<b>30</b>
<b>4</b>	<b>VÓRTICES DE CENTRO NO ESPAÇO-TEMPO CONTÍNUO</b> . . . . .	<b>33</b>
<b>4.1</b>	<b>Definindo os vórtices de centro</b> . . . . .	<b>33</b>
4.1.1	Formulação inicial . . . . .	33
4.1.2	Deformação diagonal do vórtice fino . . . . .	36
4.1.3	Instabilidade de Savvidy-Nielsen-Olesen . . . . .	37
<b>4.2</b>	<b>Vórtices de centro e a teoria de Yang-Mills-Higgs</b> . . . . .	<b>40</b>
<b>5</b>	<b>LOOPS COLORIDOS EM <math>4D</math> E SUA REPRESENTAÇÃO EM TER-</b> <b>MOS DE UMA TEORIA DE CAMPOS</b> . . . . .	<b>43</b>
<b>5.1</b>	<b><i>Ensemble</i> de vórtices de centro</b> . . . . .	<b>43</b>
<b>5.2</b>	<b>Definição do bloco fundamental</b> . . . . .	<b>43</b>
<b>5.3</b>	<b>Estados coerentes de cor</b> . . . . .	<b>45</b>
<b>5.4</b>	<b>O bloco fundamental para o conjunto de curvas fechadas que pos-</b> <b>suem carga de cor</b> . . . . .	<b>47</b>

5.5	Teoria efetiva para <i>loops</i> extensos . . . . .	51
6	DETECTANDO VÓRTICES DE CENTRO NO CONTÍNUO A PARTIR DA FIXAÇÃO DE CALIBRE . . . . .	53
6.1	O procedimento de fixação de calibre . . . . .	53
6.2	Integral funcional fixada de calibre em um setor $\mathcal{V}(S_0)$ . . . . .	55
6.3	Simetria BRST em um setor $\mathcal{V}(S_0)$ . . . . .	57
6.4	Condições de regularidade e simetria BRST . . . . .	62
6.5	Independência em relação aos parâmetros do potencial . . . . .	63
6.6	Introdução das condições de regularidade no funcional gerador de um setor topologicamente não trivial . . . . .	64
6.7	Equação de cópias . . . . .	66
6.7.1	Vácuo perturbativo . . . . .	67
6.7.2	Vórtices de centro estáticos e infinitos . . . . .	67
7	CONCLUSÃO . . . . .	69
	APÊNDICE A – INTRODUÇÃO À TEORIA DE GRUPOS . . . . .	73
A.1	Decomposição de Cartan . . . . .	75
A.2	$SU(N)$ . . . . .	76
A.2.1	$SU(2)$ . . . . .	76
A.2.2	$SU(3)$ . . . . .	77
	Referências . . . . .	79

## Lista de ilustrações

Figura 1	– Esquemática do modelo de tubo de fluxo no interior de um méson. . . . .	11
Figura 2	– Exemplo de rede tridimensional cúbica. . . . .	27
Figura 3	– Representação para as bases locais do espaço de cor. . . . .	36

# 1 Introdução

Um dos efeitos não perturbativos presentes na teoria de Yang-Mills é o confinamento de quarks e glúons. Este fenômeno se caracteriza pela não observabilidade destas partículas na natureza, exceto quando combinadas para formar partículas maiores, chamadas de hádrons. Um modelo capaz de fornecer uma explicação para a fenomenologia por trás deste fenômeno é o modelo do tubo de fluxo [1].

Primeiramente, consideramos um méson formado por um par quark-antiquark pesados (primeira linha da Figura 1. Ao tentarmos afastar quark e antiquark, um tubo de fluxo cromoeletrico, também conhecido como corda confinante, se forma entre eles. À medida que afastamos ainda mais as partículas, a energia armazenada neste sistema continua a aumentar (segunda linha da mesma figura). Em um dado instante, esta energia supera a massa inercial de dois mésons idênticos ao primeiro, o que faz com que a criação de um novo par quark-antiquark seja energeticamente mais favorável do que a preservação do sistema original. Estas novas partículas criadas se unem às já existentes, fornecendo como resultado final dois mésons ao invés de um quark e um antiquark livres (últimas duas linhas da figura). Apesar do

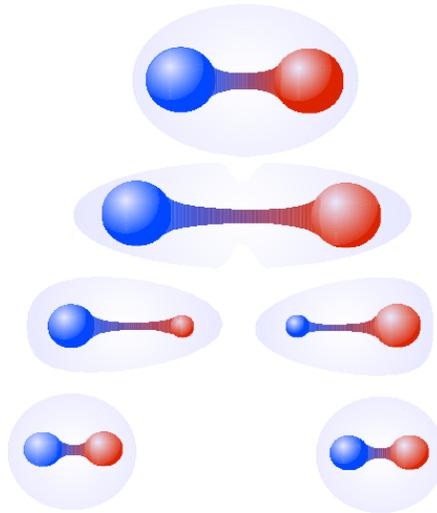


Figura 1 – Esquemática do modelo de tubo de fluxo no interior de um méson.

modelo fornecer uma imagem do porque não conseguimos visualizar estas partículas isoladas, ele não explica o que estaria acontecendo no vácuo da Teoria de Yang-Mills capaz de gerar esse tubo de fluxo cromoeletrico. Uma tentativa nesta direção foi dada por G. t'Hooft em meados dos anos de 1970. Baseando-se na teoria BCS para supercondutores, ele foi capaz de propor que o vácuo da Teoria de Yang-Mills deveria funcionar como um supercondutor dual [2, 3]. Segundo a teoria BCS, os elétrons presentes no material formariam um estado

chamado pares de Cooper, onde dois elétrons se comportariam como uma única partícula bosônica. Desta forma, os pares de Cooper seriam capazes de se condensar para o mesmo estado de energia mínima, dando origem à fase supercondutora. Uma das propriedades mais interessantes para materiais supercondutores é a sua capacidade de expulsar campos magnéticos, conhecida como Efeito Meissner. Em supercondutores tipo II, a eliminação do campo magnético possui um estágio intermediário, onde tubos de fluxo magnético, conhecidos como vórtices de Abrikosov, se formam e quebram localmente as propriedades supercondutoras. Teoricamente, os vórtices de Abrikosov seriam capazes de confinar monopólos magnéticos, de maneira semelhante ao modelo do tubo de fluxo descrito anteriormente. No modelo de G. t'Hooft, o vácuo da Teoria de Yang-Mills deveria ser entendido como um supercondutor tipo II dual que, a partir da condensação de configurações cromomagnéticas, seria capaz de expulsar campos cromoeletrônicos. Em uma fase intermediária do estado supercondutor dual, surgiriam tubos de fluxo cromoeletrico que seriam capazes de confinar quarks e glúons. Nestes mesmos trabalhos, G. t' Hooft também definiu as fases do vácuo da Teoria de Yang-Mills, assim como parâmetros de ordem invariantes de calibre capazes de defini-las. Dentre estes parâmetros, se destaca o conhecido *loop* de Wilson [4, 5], definido como

$$W[C] = \frac{1}{N} \text{tr} P \left\{ \exp \left( ig \oint_C dx_\mu A_\mu \right) \right\}, \quad (1.1)$$

onde  $N$  se refere ao índice do grupo  $SU(N)$ , o traço é tomado sobre o grupo e  $P$  se refere ao operador de ordenamento espacial. Para uma grande parcela da comunidade científica, entender o confinamento é equivalente a investigar quais configurações cromomagnéticas condensam no vácuo da Teoria de Yang-Mills e, simultaneamente, são capazes de produzir a tão falada lei da área para o *loop* de Wilson.

Mas o que significa o *loop* de Wilson obedecer uma lei da área? Para responder esta pergunta, vamos considerar que sobre o vácuo da teoria de Yang-Mills duas fontes externas estáticas, ou muito pesadas, são criadas em um instante  $t = 0$ , um quark na posição  $x = 0$  e um antiquark na posição  $x = R$ . Este sistema é deixado livre para se propagar até um instante  $t = T$ , quando o par quark-antiquark ( $qq'$ ) é aniquilado. O observável físico *loop* de Wilson é o responsável por medir a amplitude de transição deste sistema. Se o tempo  $T$  for suficientemente longo, o estado formado por um quark-antiquark deve relaxar para o estado de menor energia deste sistema, e a contribuição para o valor médio deste observável deve ser comandada por

$$\langle W[R, T] \rangle \propto e^{-V(R)T}, \quad (1.2)$$

onde  $V(R)$  é a energia de ligação do estado fundamental do sistema  $qq'$ . Por outro lado, os únicos parâmetros disponíveis para compor o valor médio deste observável estão associados às características deste retângulo, como área e perímetro. Sendo assim, vamos supor que o

*loop* de Wilson deve ser escrito da seguinte forma

$$\langle W[R, T] \rangle \propto e^{-\sigma RT - \beta(R+T)}, \quad (1.3)$$

onde  $\sigma$  é uma constante de proporcionalidade associada a área do retângulo e  $\beta$  é uma constante de proporcionalidade associada ao perímetro deste retângulo. Ambas constantes dependem da representação na qual foi introduzido o par  $qq'$ . Ao compararmos as equações (1.2) e (1.3), podemos perceber que a energia do estado fundamental do par  $qq'$  é governada por um dos dois comportamentos distintos abaixo

$$V(R) \propto \beta \quad \text{ou} \quad V(R) \propto \sigma R. \quad (1.4)$$

No primeiro caso, a energia armazenada no sistema é independente da separação entre as fontes, o que significa que aumentar, ou diminuir, a separação do par  $qq'$  não gera qualquer mudança energética neste sistema. Em outras palavras, um dos elementos do par não consegue sentir a influência do outro, e cada uma destas fontes podem ser tratadas como partículas independentes. Este fenômeno é característico da fase perturbativa da teoria de Yang-Mills e é conhecido como Liberdade Assintótica. A prova matemática de que a fase perturbativa das teorias de Yang-Mills e Cromodinâmica Quântica apresenta o fenômeno da Liberdade Assintótica foi obtida em 1973 por D. Politzer, D. Gross e F. Wilczek [6, 7] e premiada com o Prêmio Nobel de Física em 2004. Como a energia é diretamente proporcional à constante associada ao perímetro do retângulo, é dito que, neste caso, o *loop* de Wilson obedece uma Lei do perímetro. No segundo caso, a energia é proporcional à distância entre o quark e o antiquark, o que significa que quanto maior a separação entre estas partículas, maior a energia deste sistema. Este é o caso descrito pelo modelo do fluxo de tubo. Portanto, a tão falada Lei da área para o *loop* de Wilson é sinônimo ao surgimento de um potencial linearmente proporcional à distância entre o par  $qq'$ , onde a constante de proporcionalidade está associada à área do retângulo formado pela curva  $C$ .

A investigação sobre quais características  $V(R)$  deveria possuir para ser capaz de representar a fase confinante das teorias de Yang-Mills não se limitou em assumir sua linearidade em  $R$ . Simulações numéricas nos forneceram fortes indícios de que a grandes distâncias, o potencial  $V(R)$  é, de fato, linear [8]. Outra característica do seu comportamento assintótico é conhecido como *N-ality*. O *N-ality* é o fato de que a constante de proporcionalidade  $\sigma$  não depende especificamente da representação na qual foram introduzidos o par  $qq'$ , mas sim de como se revela o centro do grupo para esta representação. Este fenômeno foi verificado, a partir de simulações numéricas, em [9]. No caso do grupo  $SU(N)$ , é conhecido que o centro do grupo pode ser representado de  $N$  maneiras distintas, o que significa que o potencial  $V(R)$  pode possuir, no máximo,  $N$  comportamentos distintos quando  $R$  é suficientemente grande. No caso de  $SU(2)$ , todas as representações possuem o centro trivial da representação adjunta,

ou seja, o elemento identidade, ou possuem o mesmo centro da representação fundamental, o grupo  $Z(2)$ . Fenomenologicamente, podemos entender este fenômeno a partir da blindagem da carga do quark e do antiquark externos pelos glúons. Como glúons são campos que se encontram na representação adjunta de  $SU(N)$ , estes conseguem blindar completamente a carga de um quark ou antiquark nesta mesma representação ou em qualquer representação que possua um centro trivial. Entretanto, quando as cargas externas se encontram em uma representação que não possui centro trivial, os glúons não conseguem fazer o mesmo, pois sua carga não afeta o centro desta representação. Isso implica que, ao introduzirmos um par  $qq'$  na representação adjunta de  $SU(N)$  no vácuo da teoria de Yang-Mills, a corda não deve quebrar e formar um novo par  $qq'$  como ocorre no espaço físico, mas deve quebrar em dois estados ligados formados por um quark estático e glúons, conhecidos como *gluelumps*.

Desta forma, uma nova variável foi introduzida na nossa compreensão sobre o que é o confinamento. A condensação de configurações topológicas no vácuo da teoria de Yang-Mills não deve apenas gerar a lei da área para o *loop* de Wilson, mas também deve apresentar *N-ality*. A partir de simulações numéricas, é conhecido que uma das estruturas capazes de reproduzir ambos os efeitos são os vórtices de centro. Apesar de muito se conhecer sobre estes objetos no mundo particionado, pouco sabe-se sobre eles no espaço-tempo contínuo. Sendo assim, o principal objetivo desta tese é clarificar e apresentar novos tratamentos para teorias e modelos que levem em conta a contribuição de configurações magnéticas nos observáveis físicos. Esta tese se divide da seguinte forma. No capítulo 2, conceitos básicos sobre a teoria de Yang-Mills e sua quantização serão discutidos de maneira breve. No capítulo 3, os conceitos básicos que envolvem os cálculos numéricos mencionados anteriormente serão apresentados, com a definição das variáveis presentes na QCD na rede e um método simples para obter os primeiros resultados. Ainda neste capítulo, apresentaremos o conceito sobre o qual vórtices de centro foram inicialmente apresentados e alguns dos principais resultados que foram descobertos para estas estruturas no vácuo da teoria de Yang-Mills. Discutiremos também os chamados calibres Laplacianos adjuntos, que são calibres definidos na rede e não possuem cópias de Gribov, e ainda são capazes de identificar se uma dada configuração descreve ou não defeitos topológicos. No capítulo 4, a análise sobre os vórtices de centro no contínuo se inicia, onde definiremos estes objetos e mostraremos a sua correlação com a existência de bases locais do espaço de cor. Ainda serão brevemente estudados dois aspectos envolvendo os vórtices de centro: a teoria de Yang-Mills-Higgs com campos escalares na representação adjunta do grupo, onde estes vórtices são soluções clássicas de energia mínima e podem descrever a corda confinante, e a instabilidade de Savvidy-Nielsen-Olesen, onde a descrição em termos das bases locais do espaço de cor para estas estruturas pode nos levar à solução deste problema. No capítulo 5 analisaremos os alguns resultados obtidos em [10], onde baseados nos trabalhos desenvolvidos no contexto da Física de polímeros, iremos caracterizar,

a partir da introdução de parâmetros fenomenológicos, um *ensemble* de curvas fechadas que possuem carga de cor não Abelianas em um espaço  $4D$  e evidenciar a teoria quântica de campos que descreve efetivamente este sistema. Veremos que esta teoria efetiva possui todos os requerimentos para representar uma generalização do modelo do supercondutor dual de t'Hooft. Para tal, será necessário introduzir o conceito de estados coerentes para estados de cor. No capítulo 6 analisaremos os resultados obtidos em [11], onde inspirados pelos calibres Laplacianos adjuntos e pelo surgimento de uma teoria efetiva para um *ensemble* de configurações topológicas, iremos propôr um novo método para fixação de calibre na teoria de Yang-Mills pura. Este método não impõe a condição de fixação sobre o campo de calibre, mas sim sobre campos escalares correlacionados aos mesmo, e é esperado ser livre de cópias de Gribov. Para discussão de tal característica, um resultado preliminar envolvendo a equação de cópias será apresentado. Além da discussão sobre a presença ou não de cópias, a maior contribuição deste calibre é a sua capacidade de identificar setores topologicamente inequivalentes e separar a contribuição de cada um deles, o que nos permite comparar de maneira controlada a influência de defeitos topológicos no funcional gerador da teoria de Yang-Mills no espaço-tempo contínuo. Para este calibre, o conceito de somar sobre um *ensemble* de configurações topológicas, discutido no capítulo 5, é naturalmente introduzido durante o processo de fixação. Por esta razão, espera-se obter da própria teoria de Yang-Mills pura, os parâmetros fenomenológicos necessários para descrever cada tipo de configuração magnética. Ainda no âmbito deste calibre, discutiremos a existência da simetria BRST e o que esta pode nos dizer sobre o espaço assintótico de configurações da teoria em regimes não perturbativos. No apêndice A são apresentados conceitos matemáticos fundamentais sobre teoria de grupos que, como pode ser visto nesta introdução, podem ser necessários ao leitor.

A seguir, seguem algumas convenções adotadas nesta tese. Os procedimentos de integração funcional serão realizados no espaço Euclidiano e de acordo com o sistema de unidades naturais ( $\hbar = c = 1$ ). Os índices maiúsculos  $A, B, \dots, I, J, \dots$  correspondem a todos os índices da álgebra de Lie. Os índices minúsculos  $a, b, \dots, h$  correspondem as direções não diagonais da álgebra de Lie. Os índices minúsculos  $i, j, \dots$  correspondem as direções diagonais da álgebra de Lie. Outras convenções serão definidas e podem ser aplicadas em casos particulares.



## 2 Teoria de Yang-Mills

Iniciaremos esta tese com uma a discussão sobre teorias de calibre não Abelianas. Inicialmente será apresentada uma breve discussão sobre a teoria clássica de Yang-Mills, para então analisarmos as suas propriedades quânticas.

### 2.1 Teoria Clássica de Yang-Mills

É conhecido na literatura, que a teoria de Yang-Mills foi originalmente proposta para preservar, através da introdução de uma simetria de calibre não Abelianas, a simetria  $SU(2)$  de um dubleto de isospin [12]. A transformação de calibre conhecida para o potencial vetor eletromagnético pode ser generalizada para outros grupos de simetria como

$$A_\mu \rightarrow A_\mu^U = U(\alpha)A_\mu U^{-1}(\alpha) + \frac{i}{g}U(\alpha)\partial_\mu U^{-1}(\alpha), \quad (2.1)$$

onde  $A_\mu \equiv A_\mu^a T_a$ . A (densidade de) Lagrangiana invariante de calibre mais simples possível de ser obtida com a simetria descrita acima é a conhecida Lagrangiana de Yang-Mills pura

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}tr\{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\}, \quad (2.2)$$

onde  $g$  é a constante de acoplamento da teoria de Yang-Mills,  $tr$  se refere ao traço no índice de grupo e  $F_{\mu\nu} \equiv F_{\mu\nu}^a T_a$  é o tensor de intensidades. Em termos dos campos de calibre, o tensor de intensidades é definido como

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]. \quad (2.3)$$

Após todas estas definições, vamos fazer algumas observações quanto a física da teoria de Yang-Mills:

- para ficar claro que (2.1) é consistente com a transformação de calibre no caso de uma simetria Abelianas, basta substituir (A.1) em (2.1) e verificar que a transformação obtida para o campo de calibre é a conhecida transformação do potencial vetor;
- assim como a teoria de Maxwell, os campos de calibre de Yang-Mills não possuem massa, ou seja, não existe nenhum termo na Lagrangiana (2.2) do tipo  $A_\mu A_\mu$ . A razão da não existência deste termo continua sendo a mesma do caso Abelianas: este termo não é invariante de calibre, portanto, não pode fazer parte da ação de Yang-Mills;
- o número de campos não massivos é o mesmo que o número de geradores da simetria de calibre;

- a existência de um termo quadrático nos campos de calibre em (2.3) é responsável por gerar carga não Abelianas para os bósons mediadores. Isto significa que, diferentemente da teoria de Maxwell, os campos de calibre são capazes de interagir entre si.

Este último item é o responsável pela introdução de uma Física completamente nova quando comparada à teoria de Maxwell, e motivo de estudo mesmo após mais de 50 anos de seu surgimento.

## 2.2 Quantização da Teoria de Yang-Mills

As dificuldades envolvidas em definir de maneira matematicamente consistente a integração funcional geram lacunas quanto ao entendimento desta operação. O maior exemplo desta falta de conhecimento é o fato de apenas sabermos resolver integrações funcionais gaussianas de maneira exata, ou seja,

$$\int [D\Phi] \exp \left[ \int d^D x \left( -\frac{1}{2} \Phi \cdot \hat{K} \cdot \Phi + J\Phi \right) \right] = \sqrt{\frac{(2\pi)^D}{\det(\hat{K})}} \exp \left[ \frac{1}{2} \int d^D x d^D y J(x) \cdot K^{-1}(x, y) \cdot J(y) \right], \quad (2.4)$$

onde estamos considerando que  $\Phi$  é um campo bosônico real. Para o caso de campos  $\psi$  fermiônicos complexos, o resultado também é conhecido e proporcional a

$$\int [D\Psi][D\bar{\Psi}] \exp \left[ \int d^D x \left( -\bar{\Psi} \cdot \hat{K} \cdot \Psi + \bar{J}\Psi + \bar{\Psi}J \right) \right] \propto \det(\hat{K}) \exp \left[ \int d^D x d^D y \bar{J}(x) \cdot K^{-1}(x, y) \cdot J(y) \right]. \quad (2.5)$$

Em ambos os casos,  $K^{-1}(x, y)$  satisfaz a condição  $\hat{K}K^{-1}(x, y) = \delta^{(D)}(x - y)$ . Logo, qualquer teoria que apresenta termos de interação entre seus campos, não pode ser tratada de maneira exata pelo método de integração funcional. No caso particular das teorias de calibre não Abelianas, outro problema surge durante a tentativa de quantização da teoria de Yang-Mills. Para entender este problema, vamos escrever o funcional gerador da teoria de Yang-Mills

$$Z[J] = \int [DA_\mu] \exp \left[ - \int d^D x (\mathcal{L}_{YM} - J_\mu A_\mu) \right], \quad (2.6)$$

que conta com termos de interação entre os próprios campos de calibre. Para que a integração possa ser performada de maneira equivalente a (2.4), vamos separar a ação em duas partes: uma chamada livre, onde apenas termos gaussianos serão permitidos, e outra chamada interagente, onde todos os outros termos serão condensados. Desta forma, expandindo o setor

interagente em série de potências, é possível escrever o funcional gerador  $Z[J]$ , como

$$Z[J] = \exp \left\{ - S_I \left[ \frac{\delta}{\delta J_\mu} \right] \right\} Z_0[J], \quad (2.7)$$

onde,  $Z_0[J]$  é o funcional gerador livre, definido como

$$Z_0[J] = \int [DA_\mu] \exp \left[ - \int d^D x \left( \frac{1}{2} A_\mu^a (-\partial^2 \delta^{\mu\nu} + \partial^\mu \partial^\nu) \delta_{ab} A_\nu^b - J_\mu A_\mu \right) \right]. \quad (2.8)$$

Neste ponto, precisamos apenas inverter o operador obtido. A inversão do setor envolvendo os índices não Abelianos é trivial, porém o setor referente aos índices do espaço-tempo não pode ser invertido. Podemos reparar em (2.8), que o setor livre das Teoria de Yang-Mills é equivalente a uma teoria que conta com  $N^2 - 1$  campos de calibre Abelianos. Portanto, assim como na Teoria de Maxwell, o procedimento de fixação de calibre se faz necessário neste momento. Com este procedimento visamos isolar um volume infinito presente no domínio de integração, referente ao fato de que as configurações Físicas estão sendo somadas mais do que uma vez em (2.8). A implementação de uma fixação de calibre de maneira correta deve restringir o espaço de configurações do campo de calibre de maneira que a condição

$$f_a[A_\mu^U] = 0, \quad \text{para } a = 1, 2, \dots, N^2 - 1, \quad (2.9)$$

tenha apenas uma única solução perante a transformação de calibre  $U$  definida em (2.1). A equação (2.9) é conhecida como condição de fixação de calibre. Para implementar esta condição de maneira consistente em (2.8), devemos lembrar da propriedade das deltas de Dirac

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(f(x)) = \sum_i \frac{1}{|df/dx|} \Big|_{x=x_i}, \quad (2.10)$$

onde  $x_i$  são os zeros da função de  $f(x)$ . No caso de interesse,  $f_a[A_\mu^U] = 0$  só deve possuir uma única solução, portanto, a generalização da propriedade acima para o caso funcional é

$$1 = \int [D\alpha] \det[\Delta[A_\mu]] \delta[f_a[A_\mu^U]], \quad (2.11)$$

onde,  $\Delta[A_\mu]$ , a resposta de  $f_a[A_\mu^U]$  a uma transformação de calibre é

$$f_a[A_\mu^U] = f_a[A_\mu] + \int d^D y \Delta[A_\mu](x, y) \alpha(y) + \mathcal{O}(\alpha^2), \quad (2.12)$$

e portanto, podemos perceber que (2.11) é a generalização correta da propriedade (2.10), pois

$$\Delta[A_\mu]_{|ab} \equiv \frac{\delta f_a[A_\mu^U]}{\partial \alpha_b} \Big|_{\alpha=0}. \quad (2.13)$$

Um das propriedades mais importantes deste determinante é a sua invariância de calibre, que não será demonstrada. O procedimento para implementação da fixação de calibre no

funcional gerador, conhecido como ansatz de Faddeev-Popov, segue as seguintes etapas. A partir da introdução de (2.11) em (2.6) e, da invariância de calibre dos termos ali presentes, somos capazes de reescrever o funcional gerador sem qualquer dependência na variável de transformação de calibre  $\alpha$ . Desta forma, é permitido isolar o volume infinito, representado por  $\int [D\alpha]$ , e reescrever o funcional gerador de maneira consistente como

$$Z[J] = \int [DA_\mu] \det[\Delta[A_\mu]] \delta[f_a[A_\mu^U]] \exp \left[ - \int d^D x (\mathcal{L}_{YM} - J_\mu A_\mu) \right]. \quad (2.14)$$

Uma outra forma de apresentar a integral funcional acima é através das exponenciações da condição de fixação de calibre e determinante presentes em (2.14). A exponenciação do determinante pode ser entendida por meio da introdução de campos anticomutantes  $c$  e  $\bar{c}$  que pertencem à representação adjunta do grupo como

$$\det[\Delta[A_\mu]] \propto \int [Dc][D\bar{c}] \exp \left[ - \int d^D x d^D y \bar{c}(x) \Delta[A_\mu](x, y) c(y) \right], \quad (2.15)$$

de maneira semelhante ao que ocorre na integração gaussiana de campos fermiônicos. Estes campos anticomutantes são chamados fantasmas de Faddeev-Popov. A exponenciação da delta de Dirac inicia-se com a generalização da condição de calibre  $f_a[A_\mu] = 0$  para  $f_a[A_\mu] - b_a(x) = 0$ , o que não modifica o determinante  $\Delta[A_\mu]$ , e a introdução de um novo número 1,

$$1 = \mathcal{N} \int [Db] \exp \left[ - \frac{1}{2\xi} \int d^D x b_a(x) b_a(x) \right], \quad (2.16)$$

onde  $\mathcal{N}$  é uma constante de normalização e  $\xi$  é conhecido como parâmetro de calibre. O parâmetro de calibre não é um parâmetro físico da teoria, uma vez que ele depende do calibre escolhido para atuar. É conhecido que  $\xi = 0$  implica que o calibre generalizado é na verdade o calibre de Landau, assim como  $\xi = 1$  significa que o calibre adotado é o calibre de Feynman. Com a introdução destes novos termos, e seguindo os mesmo passos que anteriormente, podemos reescrever o funcional gerador (2.14) com  $J = 0$  como

$$Z = \mathcal{N} \int [DA_\mu][Dc][D\bar{c}] \times \exp \left[ - \int d^D x \left( \mathcal{L}_{YM} + \frac{1}{2\xi} (f_a[A_\mu])^2 \right) + \int d^D x d^D y \bar{c}(x) \Delta[A_\mu](x, y) c(y) \right] \quad (2.17)$$

Realizado todo o procedimento, vamos verificar explicitamente a consistência desta formulação ao obtermos o propagador de cada um dos campos da teoria. A condição de fixação de calibre é dada por

$$f^a[A_\mu] = \partial_\mu A_\mu^a. \quad (2.18)$$

Para identificarmos o determinante de Faddeev-Popov, primeiramente é necessário saber a variação infinitesimal do campo de calibre perante a transformação (2.1)

$$\delta A_\mu^a = -\frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a - f^{abc} A_\mu^b \alpha^c = -\frac{1}{g} D_\mu^{ab} \alpha^b, \quad (2.19)$$

onde  $D_\mu^{ab}$  é a conhecida derivada covariante. Dessa forma, podemos identificar que

$$\delta f^a[A] = -\frac{1}{g} \partial_\mu D_\mu^{ab} \alpha^b, \quad (2.20)$$

e, utilizando a equação (2.13), podemos definir o determinante de Faddeev-Popov como

$$\Delta[A_\mu]^{ab}(x, y) = -\frac{1}{g} \partial_\mu D_\mu^{ab} \delta^{(D)}(x - y). \quad (2.21)$$

Portanto, a teoria de Yang-Mills em nível quântico após a fixação de calibre é dada por

$$Z = \mathcal{N} \int [DA_\mu][Dc][D\bar{c}] \exp \left[ - \int d^D x \left( \mathcal{L}_{YM} + \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_\mu)^2 - \bar{c}^a \partial_\mu D_\mu^{ab} c^b \right) \right]. \quad (2.22)$$

Neste ponto, diferentemente de (2.8), a função de partição livre é dada por

$$Z_0[J, \eta, \bar{\eta}] = \int [DA_\mu][Dc][D\bar{c}] \exp \left[ - \int d^D x \left( \mathcal{L}_0 - J_\mu A_\mu - \bar{\eta} c - \bar{c} \eta \right) \right], \quad (2.23)$$

onde,

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} A_\mu^a (-\partial^2 \delta^{\mu\nu} + \partial^\mu \partial^\nu) \delta_{ab} A_\nu^b + \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_\mu)^2 + \bar{c}_a (-\partial^2) \delta^{ab} c_b. \quad (2.24)$$

Após a realização destes cálculos, somos capazes de obter o propagador do campo de calibre. Ao analisarmos (2.24), podemos perceber que a Lagrangiana livre não possui nenhum termo que misture campo de calibre e campos fantasmas, portanto, o propagador de cada um deles pode ser obtido separadamente. Diretamente de (2.24), podemos concluir que o propagador do campo de calibre  $K_{\mu\nu}^{ab}(x, y)$  deve atender a equação

$$\left\{ \left[ -\partial^2 \delta^{\mu\nu} + \left( 1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial^\mu \partial^\nu \right] \delta_{ab} \right\} K_{\nu\rho}^{bc}(x, y) = \delta_{\mu\rho} \delta^{ac} \delta^{(D)}(x - y). \quad (2.25)$$

Portanto, aplicando a transformada de Fourier e utilizando a decomposição  $\tilde{K}_{\mu\nu}^{ab}(k) = (K_1(k) \delta_{\mu\nu} + K_2(k) k_\mu k_\nu) \delta^{ab}$ , somos capazes de escrever o propagador como

$$K_{\mu\nu}^{ab}(x - y) = \delta^{ab} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} e^{-ik(x-y)} \left[ \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) + \xi \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] \frac{1}{k^2}. \quad (2.26)$$

Para os campos fantasmas, podemos seguir o mesmo procedimento e concluir que o propagador  $G^{ab}(x - y)$  é dado por

$$G^{ab}(x - y) = \delta^{ab} \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2}. \quad (2.27)$$

Portanto, o funcional gerador da Teoria de Yang-Mills pode ser escrito como

$$Z[J] = \exp \left\{ - S_I \left[ \frac{\delta}{\delta J_\mu}, \frac{\delta}{\delta \bar{\eta}}, \frac{\delta}{\delta \eta} \right] \right\} Z_0[J, \eta, \bar{\eta}]. \quad (2.28)$$

Para encerrar a seção sobre uma introdução a teoria de Yang-Mills perturbativa, vamos discutir uma simetria que persiste mesmo após a fixação de calibre, a simetria BRST.

### 2.2.1 Simetria BRST

Na década de 1970, foi descoberto por Becchi, Rouet e Stora [13], e separadamente por Tyutin [14], que a Lagrangiana de uma teoria de calibre apresentava uma simetria muito particular, mesmo após a fixação de calibre. A principal peculiaridade desta simetria é o fato da transformação envolvendo os campos ser perfomada a partir de um parâmetro anticomutante. Para entender o que isso significa vamos analisar o caso particular do calibre discutido acima. Por simplicidade, a Lagrangiana (2.22) pode ser reescrita como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a - \frac{\xi}{2}b^a b^a + b^a \partial_\mu A_\mu^a + \bar{c}^a (-\partial_\mu D_\mu^{ab})c^b; \quad (2.29)$$

onde, completando o quadrado perfeito envolvendo os campos  $b^a$  e  $A_\mu$  e realizando a integração gaussiana, podemos perceber que os funcionais geradores de cada uma das teorias são equivalentes. Sobre (2.29), a simetria BRST se realiza através das transformações infinitesimais

$$\begin{aligned} sA_\mu^a &= D_\mu^{ab}c^b, \\ sc^a &= -\frac{1}{2}gf^{abc}c^b c^c, \\ s\bar{c}^a &= b^a, \\ sb^a &= 0, \end{aligned} \quad (2.30)$$

A verificação da simetria BRST para as transformações infinitesimais acima não será realizada neste caso particular. A natureza anticomutante desta simetria assegura que  $s^2\phi = 0$ , onde  $\phi$  representa qualquer campo da teoria. Esta propriedade permite reescrever a Lagrangiana (2.22) de maneira trivialmente invariante BRST, ou seja,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + s \left[ \bar{c}^a \left( \partial_\mu A_\mu^a - \frac{\xi}{2}b^a \right) \right]. \quad (2.31)$$

Esta forma elegante de escrever a Lagrangiana de Yang-Mills estendeu a idéia de fixação de calibre. Em termos da simetria BRST, este procedimento pode ser entendido como a introdução na Lagrangiana de qualquer termo que preserve esta simetria e permita a obtenção de um propagador para os campos de calibre e os fantasmas.

Mas como pode ser visto em (2.22), novos graus de liberdade não físicos foram introduzidos no funcional gerador. A realização do cancelamento dos graus de liberdade não físicos da teoria é uma das principais funcionalidades da aplicação desta simetria. A partir da obtenção das identidades de Ward para a simetria BRST, é possível mostrar que os graus de liberdade dos fantasmas cancela os graus de liberdade não físicos do campo de calibre, preservando a unitariedade da matriz de espalhamento em todos os níveis da teoria de perturbações. Agora,

mostraremos simplesmente o cancelamento destes graus de liberdade com  $g = 0$ . Neste limite, a Lagrangiana da teoria de Yang-Mills com o calibre fixado para  $\xi = 1$  é dada por

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} A_\mu^a (-\partial^2 \delta^{\mu\nu} + \partial^\mu \partial^\nu) \delta_{ab} A_\nu^b + \frac{1}{2} A_\mu^a (-\partial_\mu \partial_\nu) \delta^{ab} A_\nu^b + \bar{c}_a (-\partial^2) \delta^{ab} c_b. \quad (2.32)$$

Para melhor visualizarmos o cancelamento das contribuições, vamos separar o campo de calibre em termos dos modos transversos e longitudinais, ou seja,

$$A_\mu^a = A_\mu^a|^{(T)} + A_\mu^a|^{(L)}, \quad (2.33)$$

onde

$$A_\mu^a|^{(T)} \equiv (\delta^{\mu\nu} - \frac{\partial^\mu \partial^\nu}{\partial^2}) A_\nu^a \quad \text{e} \quad A_\mu^a|^{(L)} \equiv \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\partial^2} A_\nu^a. \quad (2.34)$$

Em termos destes modos, podemos reescrever  $\mathcal{L}_0$ , como

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} A_\mu^a|^{(T)} (-\partial^2) \delta_{ab} A_\mu^b|^{(T)} + \frac{1}{2} A_\mu^a|^{(L)} (-\partial^2) \delta^{ab} A_\mu^b|^{(L)} + \bar{c}_a (-\partial^2) \delta^{ab} c_b. \quad (2.35)$$

Utilizando as propriedades conhecidas para integrais gaussianas dadas por (2.4) e (2.5), e sabendo que existem dois graus de liberdade longitudinais, ou seja, o modo de polarização longitudinal e o modo temporal, temos que

$$Z_0 \propto \det^{-\frac{D-2}{2}}(-\partial^2 \delta^{ab}) \det^{-1}(-\partial^2 \delta^{ab}) \det(-\partial^2 \delta^{ab}), \quad (2.36)$$

onde o primeiro termo do lado direito de (2.36) remete à integração dos  $D - 2$  modos transversos, e o segundo termo vem da integração do modos não físicos, que se cancelam com a contribuição proveniente dos fantasmas, o último termo.

## 2.2.2 Identidades de Ward

Para demonstrar que o cancelamento entre a contribuição do modo longitudinal do campo de calibre e a contribuição dos campos fantasmas de Faddeev-Popov, assim como qualquer informação física, não depende de uma escolha particular do parâmetro  $\xi$ , é necessário um método mais formal, conhecido como Identidades de Ward generalizadas. Estas identidades refletem a simetria BRST da ação fixada de calibre em termos relações entre as funções de Green obtidas a partir da série perturbativa definida em (2.28). Para obter as identidades, devemos introduzir correntes  $J_\mu$ ,  $K$ ,  $\eta$ ,  $\bar{\eta}$  para os campos  $A_\mu$ ,  $b$ ,  $\bar{c}$ ,  $c$ , respectivamente. Também é conveniente introduzir correntes  $\kappa_\mu$ ,  $\nu^a$  para as transformações BRST não lineares nos campos  $D_\mu c$ ,  $f^{abc} c_b c_c$ . Como todas estas correntes são correntes externas ao problema, todas devem ser invariantes via transformações BRST. Com estas adições, o funcional gerador da teoria de Yang-Mills fixada de calibre pode ser reescrito da forma

$$Z[J, \bar{\eta}, \eta, \kappa, \nu] = \int [DA_\mu][Dc][D\bar{c}][Db] \exp\left(-\int d^4x \mathcal{L}_{gf} + \Sigma\right) \quad (2.37)$$

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{gf} &= \mathcal{L}_{YM} + \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A_\mu)^2 - \bar{c}^a \partial_\mu D_\mu^{ab} c^b, \\ \Sigma &= J_\mu A_\mu + Kb + \bar{\eta}c + \bar{c}\eta + \kappa_\mu^a D_\mu^{ab} c_b + \nu_a f^{abc} c_b c_c.\end{aligned}\quad (2.38)$$

Como  $\mathcal{S}_{gf}$  é invariante pelas transformações BRST, o funcional gerador deve atender esta condição por meio de uma inserção, ou seja,

$$\int d^4x \int [DA_\mu][Dc][D\bar{c}][Db] s\Sigma \exp\left(-\int d^4x \mathcal{L}_{gf} + \Sigma\right) = 0, \quad (2.39)$$

onde, utilizando a invariância das correntes via transformação BRST e o fato da transformação ser nilpotente,

$$s\Sigma = J_\mu sA_\mu + Ksb + \bar{\eta}sc + s\bar{c}\eta. \quad (2.40)$$

Portanto, podemos escrever a equação (2.46) como

$$\int d^4x \int [DA_\mu][Dc][D\bar{c}][Db] \left(J_\mu D_\mu^{ab} c_c - \frac{1}{2}g\bar{\eta}_a f^{abc} c_b c_c + b_a \eta^a\right) \exp\left(-\int d^4x \mathcal{L}_{gf} + \Sigma\right) = 0, \quad (2.41)$$

ou

$$\int d^4x \left(J_\mu^a \frac{\delta}{\delta \kappa_\mu^a} - \frac{g}{2}\bar{\eta}_a \frac{\delta}{\delta \nu^a} + \eta^a \frac{\delta}{\delta K^a}\right) Z[J, \bar{\eta}, \eta, \kappa, \nu] = 0. \quad (2.42)$$

Estas são as identidades de Ward generalizadas. Para obter relações entre quaisquer funções de Green particulares, nós devemos diferenciar (2.47) em respeito a alguma das correntes  $J_\mu, \eta, \bar{\eta}$  quantas vezes forem necessárias e, ao final colocá-las igual a zero. Para demonstrar que qualquer resultado independe do parâmetro de calibre  $\xi$ , devemos considerar que as transformações BRST devem ser expandidas para permitir

$$s\xi = \Xi \quad , \quad s\Xi = 0. \quad (2.43)$$

Claramente, a ação  $S_{gf}$  não é invariante perante esta nova transformação BRST. Felizmente, a ação

$$\tilde{S}_{gf} = S_{gf} + \frac{\Xi}{2} \bar{c}^a b^a, \quad (2.44)$$

é invariante perante esta nova transformação e está conectada com  $S_{gf}$  através do limite  $\Xi \rightarrow 0$ . Com o objetivo de obter as Identidades de Ward para este funcional gerador, devemos adicionar uma corrente invariante BRST  $t$  para o parâmetro  $\xi$ , onde

$$\tilde{Z}[J, \bar{\eta}, \eta, \kappa, \nu, t] = \int [DA_\mu][Dc][D\bar{c}][Db] \exp\left(-\left(\int d^4x \tilde{\mathcal{L}}_{gf} + \Sigma\right) - \xi t\right). \quad (2.45)$$

Da mesma forma que realizado anteriormente, a invariância de  $\tilde{S}_{gf}$  implica que

$$\int [DA_\mu][Dc][D\bar{c}][Db] (\Xi t + \int d^4x s\Sigma) \exp\left(-\left(\int d^4x \tilde{\mathcal{L}}_{gf} + \Sigma\right) - \xi t\right) = 0, \quad (2.46)$$

que por sua vez pode ser reescrito como

$$\left[ -\Xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \int d^4x \left( J_\mu^a \frac{\delta}{\delta \kappa_\mu^a} - \frac{g}{2} \bar{\eta}_a \frac{\delta}{\delta \nu^a} + \eta^a \frac{\delta}{\delta K^a} \right) \right] \tilde{Z}[J, \bar{\eta}, \eta, \kappa, \nu, t] = 0. \quad (2.47)$$

Ao derivarmos a identidade acima em relação a  $\Xi$ , tomarmos o limite no qual  $\tilde{S}_{gf}$  é equivalente a  $S_{gf}$  e colocarmos todas as correntes iguais a zero, concluimos que

$$\left. \frac{\partial Z}{\partial \xi} \right|_{J=\eta=\dots=0} = 0, \quad (2.48)$$

ou seja, quando é possível expandir o conceito de simetria BRST para incluir transformações dos parâmetros de calibre e expandir a Lagrangiana de forma que os novos termos dependam das transformações destes parâmetros, os resultados físicos não dependem de uma escolha particular do parâmetro de calibre. Este resultado nos mostra que a teoria quântica é consistente, uma vez que qualquer medida depende apenas dos parâmetros iniciais da teoria.

### 2.2.3 Problema de Gribov

Em todos os passos anteriores para a fixação de calibre dado em (2.18), foi assumido que, assim como na teoria eletromagnética, esta condição é consistente quanto a seleção de apenas um representante entre os campos de calibre para cada configuração física. Entretanto, isso não é verdade para teorias de calibre não Abelianas. De fato, ao assumirmos que um dado campo satisfaz a condição de calibre, e verificarmos a possibilidade de uma transformação de calibre deste campo também satisfazer a mesma condição, descobrimos que esta possibilidade não está proibida. Para visualizar o que está acontecendo, vamos analisar qual condição é imposta sobre um campo de calibre transformado,

$$\partial_\mu A_\mu^U \approx -\partial_\mu D_\mu^{ab} \alpha^b(x) = -[\partial^2 \alpha^a - gf^{abc} \partial_\mu (A_\mu^b \alpha^c)] = 0, \quad (2.49)$$

Esta última equação é conhecida como equação de cópias infinitesimais. Neste caso, podem existir transformações de calibre definidas pelo elemento da álgebra de  $SU(N)$   $\vec{\alpha}$  que atendem a condição (2.49). Esse problema na fixação de calibre foi descoberto na década de 1970 por V. Gribov, ficando conhecido como cópias de Gribov [15]. Mais tarde, no mesmo ano, Singer estendeu este problema para outros calibres que não só o de Landau [16]. Felizmente percebeu-se que no limite perturbativo as configurações do campo de calibre não possuem cópias de Gribov, uma vez que o termo do Laplaciano domina a equação (2.49). Isso significa que o procedimento apresentado anteriormente é válido. Porém, o que fazer quando tratamos de efeitos não perturbativos da teoria de Yang-Mills?



## 3 QCD na rede

Fechamos o último capítulo com uma pergunta central para efetuação dos cálculos em teoria de Yang-Mills. Uma forma de contornar as dificuldades do cálculo no espaço contínuo é através da técnica conhecida como QCD na rede. A QCD na rede faz uso da discretização do espaço-tempo e simulações numéricas para obter resultados físicos sobre a teoria de Yang-Mills e, como o nome sugere, da própria Cromodinâmica Quântica.

### 3.1 Definições

Na figura 2, temos o exemplo de uma rede tridimensional cúbica. Tendo esta figura como exemplo, podemos perceber que a rede é composta por elementos conhecidos como: sítios, *links* e plaquetas. Os sítios são os pontos da rede, onde estão localizados os quarks, as linhas conectando dois sítios vizinhos são os *links*, e as plaquetas são os pequenos quadrados formados pela conexão de quatro *links*. O método está baseado em associar os graus de

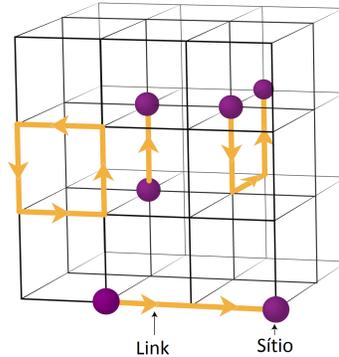


Figura 2 – Exemplo de rede tridimensional cúbica.

liberdade a variáveis de *link*  $U_\mu(x)$  que pertencem ao grupo de simetria interessado, enquanto as transformações de calibre são tomadas de maneira independente em cada sítio. Uma vez que um *link* está univocamente definido pela escolha de um sítio  $x$  e uma direção  $\hat{\mu}$  na rede, podemos associar a variável de link  $U_\mu(x)$  com o *link* que vai do sítio  $x$  ao sítio  $x + \hat{\mu}$ . Quando o *link* é percorrido na direção negativa de  $\hat{\mu}$ , a variável correspondente é a  $U_\mu^\dagger(x)$ , ou seja, aquela que sai do sítio  $x$  até o sítio  $x - \hat{\mu}$ . As variáveis de *link* são definidas como

$$U_\mu(x) = \exp(iagA_\mu(x)) , \quad (3.1)$$

onde  $a$  é o espaçamento entre dois sítios consecutivos,  $g$  é o acoplamento da teoria e  $A_\mu \equiv A_\mu^a T_a$  é uma matriz da dimensão do grupo de simetria. A ação que pesa a influência de uma

variável de *link* para o cálculo de observáveis na teoria de Yang-Mills pura é

$$S[U] = -\frac{\beta}{2N} \sum_{x, \mu < \nu} \{Tr[U_\mu(x)U_\nu(x + \hat{\mu})U_\mu^\dagger(x + \hat{\nu})U_\nu^\dagger(x)] + h.c.\}, \quad (3.2)$$

a conhecida ação de Wilson. A transformação de calibre  $G$  para as variáveis de *link* é dada por

$$U_\mu(x) \rightarrow G(x)U_\mu(x)G^\dagger(x + \hat{\mu}). \quad (3.3)$$

Para entender a relação da ação de Wilson com a ação de Yang-Mills, expande-se  $U_\mu(x)$  em potências de  $A_\mu(x)$ , identifica-se  $\beta = 2N/g^2$  e preserva-se apenas os termos de ordem mais baixa que sobrevivem ao limite  $a \rightarrow 0$ . Com estes passos é possível obter a ação de Yang-Mills no espaço Euclidiano a partir da ação de Wilson. O limite  $a \rightarrow 0$  é conhecido como limite do contínuo, que será analisado com mais detalhes no próximo capítulo.

### 3.1.1 Algoritmo de Metrópolis

Uma vez que os graus de liberdade estão associados às variáveis de *link*, os cálculos em nível quântico realizados na rede visam substituir a integração funcional dada em (2.6) por uma integral sobre um conjunto finito de configurações  $\{U_\mu^{(n)}(x), n = 1, 2, \dots, N_{conf}\}$  com peso dado por

$$Prob[\{U_\mu(x)\}] = \frac{1}{Z} e^{-S[U]}. \quad (3.4)$$

Portanto, o valor médio de um observável  $Q[U]$  é dado por

$$\langle Q \rangle = \int [DU] Q[U] \frac{1}{Z} e^{-S[U]} \approx \frac{1}{N_{conf}} \sum_{n=1}^{N_{conf}} Q[U^{(n)}], \quad (3.5)$$

onde o conjunto de configurações é gerado estocasticamente. Um exemplo simples e bastante geral, apesar de não muito utilizado atualmente devido a baixa eficiência, é o algoritmo de Metrópolis. Este algoritmo funciona da seguinte forma:

1. Comece com qualquer configuração da rede conveniente, por exemplo, todas as variáveis de *link* tomadas com valor 1;
2. Varra a rede *link* por *link*, e em cada um deles escolha de maneira aleatória um elemento do grupo de calibre, vamos chamá-lo de  $\tilde{U}$ , como possível substituto para a variável de *link* ali existente;
3. Calcule a variação  $\Delta S = S[U] - S[\tilde{U}]$ ;
4. Se  $\Delta S \leq 0$ , então substitua a variável de *link* ali presente por  $\tilde{U}$ ;

5. Se  $\Delta S > 0$ , então obtenha um número pseudo-aleatório  $x \in [0, 1]$  a partir de um gerador de números aleatórios usual. Se  $x < \exp[-\Delta S]$ , substitua a variável de *link* ali presente por  $\tilde{U}$ . Se o número  $x$  não atende esta condição, não modifique a variável de *link* e siga para o próximo *link*.

Esse método iterativo pode gerar quantas configurações da rede quanto desejadas com a probabilidade dada por (3.4).

## 3.2 Vórtices de centro na rede

Considere uma configuração das variáveis de *link* na qual o *loop* de Wilson na representação  $r$  valha  $W_r[C]$  para alguma curva fechada  $C$ . Ao criarmos um vórtice de centro que esteja enlaçado pela curva  $C$ , o *loop* de Wilson deve ser modificado da seguinte forma

$$W_r[C] \rightarrow z^k W_r[C], \quad (3.6)$$

onde  $z$  é o elemento de centro de grupo e  $k$  corresponde ao  $N$ -ality da representação. Desta forma, vórtices de centro só afetam o *loop* de Wilson de acordo com o  $N$ -ality da representação. Para o grupo  $SU(2)$ , a representação adjunta, e todas redutíveis a esta, possuem  $k = 0$ , enquanto a representação fundamental, e todas redutíveis a esta, possuem  $k = 1$ . Portanto, *loops* de Wilson na representação adjunta do grupo não são afetados pelos vórtices de centro. No próximo capítulo, veremos que podemos introduzir estes conceitos e a regra de transformação (3.6) no espaço-tempo contínuo através de transformações singulares de  $SU(N)$ .

Na rede, alguns calibres possuem uma propriedade extremamente interessante quando lidamos com vórtices de centro, a capacidade de fatorar variáveis de *link* em elementos de centro, os quais são responsáveis por gerar a lei da área para o *loop* de Wilson, e flutuações não confinantes  $V_\mu(x)$  [17, 18]. Nestes calibres,

$$U_\mu(x) = Z_\mu(x) V_\mu(x), \quad (3.7)$$

onde  $Z_\mu$  é o elemento de centro de  $SU(N)$  na variedade do grupo que se encontra mais próximo a  $U_\mu(x)$ . Esta decomposição nos permite realizar a conhecida projeção de centro, onde mapeamos a rede  $SU(N)$  fixada de calibre em uma rede  $Z(N)$

$$U_\mu(x) \rightarrow Z_\mu(x), \quad (3.8)$$

onde um vórtice de centro é identificado quando o produto dos  $Z_\mu$  sobre uma plaqueta da rede projetada é diferente de 1. Trabalhar sobre a rede projetada permitiu descobrir diversas características sobre os vórtices de centro, entre elas, como a densidade destas configurações

deveria escalar ao tomarmos o limite do contínuo na rede, os efeitos de temperatura finita sobre estes objetos, entre outras. Aqui, vamos apresentar duas das quais considero as mais importantes: a dominância de centro e o efeito da remoção dos vórtices de centro na tensão da corda confinante a longas distâncias.

### 3.2.1 Dominância de centro

A rede projetada carrega a informação responsável pelo mecanismo do confinamento? Esta pergunta é extremamente relevante para termos certeza de que nenhuma informação física relevante da região infravermelha da teoria foi perdida durante este processo. A resposta positiva foi obtida em [18, 19], quando o cálculo da tensão da corda gerada pela rede projetada foi comparada, e demonstrada sua concordância, com valores aceitáveis gerados na rede completa para diferentes valores de  $\beta$ . A concordância entre a tensão da corda confinante gerada pelas diferentes redes é conhecida como dominância de centro, e é uma das principais evidências de que vórtices de centro são estruturas relevantes na região não perturbativa da teoria de Yang-Mills na rede.

### 3.2.2 Remoção dos vórtices de centro

A remoção das configurações do tipo vórtices de centro da rede  $SU(N)$  fixada de calibre pode ser realizada, em  $SU(2)$ , pela multiplicação de todas as variáveis de *link*  $U_\mu(x)$  que consituem a rede por seu próprio elemento de centro, ou seja,

$$U_\mu(x) \rightarrow U'_\mu(x) = Z_\mu(x)U_\mu(x) = V_\mu(x). \quad (3.9)$$

A rede projetada de  $U'_\mu(x)$  não possui qualquer vórtice de centro. Sobre esta rede foi calculada a tensão da corda e comparada com a tensão da corda obtida através da teoria completa. O resultado pode ser visto em [20], onde a tensão da corda se perde quando calculado sobre a rede projetada de  $U'_\mu(x)$  para grandes distâncias.

Estes dois resultados são complementares. Não só a proliferação de vórtices de centro é capaz de fornecer o surgimento da lei da área para o *loop* de Wilson, assim como a remoção destas estruturas implica na perda deste fenômeno.

## 3.3 Calibre Laplaciano Adjunto

Os chamados calibres Laplacianos adjuntos [19, 21, 22, 23, 24] são uma das formas encontradas por teóricos da rede de investigar a influência de vórtices de centro no vácuo da teoria de Yang-Mills. Isso porque, uma das características destes calibres é a capacidade

de identificar quais variáveis de *link* descrevem configurações nas quais vórtices de centro, e outros defeitos topológicos, estão presentes. Nesta seção veremos a formulação proposta em [23], a qual servirá de inspiração para a formulação de um calibre capaz de identificar estruturas topológicas na teoria de Yang-Mills.

Para iniciar este procedimento, considere o operador Laplaciano adjunto  $\Delta_{xy}^{AB}(\dot{U})$  em uma rede 4-dimensional dado por

$$\Delta_{xy}^{AB}(\tilde{U}) = - \sum_{\mu} (2\delta_{x,y}\delta^{AB} - \tilde{U}_{\mu}^{AB}(x)\delta_{y,x+\hat{\mu}} - \tilde{U}_{\mu}^{BA}(x-\hat{\mu})\delta_{y,x-\hat{\mu}}), \quad (3.10)$$

onde  $\tilde{U}_{\mu}^{AB}(x)$  é a variável de *link* na representação adjunta do grupo. Estas se relacionam com as variáveis usuais através de

$$\tilde{U}_{\mu}^{AB}(x) = \text{Tr}(T_A U_{\mu}(x) T_B U_{\mu}^{\dagger}(x)). \quad (3.11)$$

O primeiro passo deste procedimento é encontrar os autovalores  $\lambda_j$  deste operador, definido por

$$\Delta_{xy}^{AB}(\dot{U})\phi_B^{(j)}(y) = \lambda_j\phi_A^{(j)}(x), \quad (3.12)$$

onde para cada ponto da rede se associa um vetor  $N^2 - 1$  dimensional  $\phi^{(j)}(x)$ . A partir destes autovalores, podemos definir matrizes na álgebra de  $SU(N)$   $\Phi^{(j)}(x)$  através de

$$\Phi^{(j)}(x) = \phi_A^{(j)}(x)T_A, \quad (3.13)$$

o qual, perante transformações de calibre  $G(x)$  satisfaz a regra

$$\dot{\Phi}^{(j)}(x) = G(x)\Phi^{(j)}(x)G^{\dagger}(x). \quad (3.14)$$

Isso significa que transformações de calibre rotacionam as componentes do espaço de cor das matrizes  $\Phi^{(j)}(x)$  e, desta maneira, podemos fixar o calibre requerindo que estas componentes se orientem em relação a uma dada direção escolhida de maneira conveniente. Este procedimento pode ser separado em duas etapas. Na primeira, dada uma matriz  $\Phi^{(1)}(x)$ , a rotacione para uma matriz diagonal  $\dot{\Phi}^{(1)}(x)$ . Esta etapa fixa parcialmente a simetria de calibre, de forma a deixar livre uma simetria residual  $U(1)^{N-1}$ . Para eliminar esta simetria residual é necessário trabalhar com uma segunda matriz  $\Phi^{(2)}(x)$ . No segundo passo, rotacione a matriz  $\Phi^{(2)}(x)$  para  $\dot{\Phi}^{(2)}(x)$  com a mesma transformação de calibre do primeiro passo. Vale a pena ressaltar que, diferentemente de  $\dot{\Phi}^{(1)}(x)$ ,  $\dot{\Phi}^{(2)}(x)$  não é uma matriz diagonal, portanto, esta matriz não é invariante perante as transformações de  $U(1)^{N-1}$ . O calibre é então completamente fixado ao realizar uma nova rotação  $\dot{\Phi}^{(2)}(x)$  para  $\ddot{\Phi}^{(2)}(x)$ , de maneira que  $N - 1$  componentes não diagonais de  $\ddot{\Phi}^{(2)}(x)$  se tornem reais e positivas.

A presença dos vórtices de centro é notada nesta segunda etapa da fixação, quando alguma das  $N - 1$  entradas não diagonais previstas para se tornar reais e positivas de  $\dot{\Phi}^{(2)}(x)$ , é nula

sobre uma região do espaço. No próximo capítulo, veremos que uma condição semelhante é aplicada a esta estrutura no espaço contínuo, onde a existência de bases locais do espaço de cor implica que certas direções não diagonais dos campos devem se anular em uma região do espaço.

Portanto, inspirados em um calibre da rede que impõe condições de fixação sobre campos escalares vinculados a um dado campos de calibre, no próximo capítulo iremos propôr uma nova forma de fixar o calibre no contínuo capaz de identificar estruturas topológicas.

## 4 Vórtices de centro no espaço-tempo contínuo

Neste capítulo serão levantados os pontos mais relevantes para o entendimento dos trabalhos que foram realizados ao longo do doutoramento. Em particular, a definição dos vórtices de centro e dos calibres Laplacianos adjuntos serão essenciais para o entendimento dos capítulos seguintes.

### 4.1 Definindo os vórtices de centro

#### 4.1.1 Formulação inicial

A partir de simulações computacionais, é conhecido que uma das estruturas topológicas capazes de produzir o efeito da lei da área para o *loop* de Wilson são os vórtices de centro [20, 25, 26, 27]. Apesar de não ser solução clássica das Teorias de Yang-Mills, pesquisadores da QCD na rede afirmam que o vórtice de centro representa processos virtuais relevantes que ocorrem no vácuo da teoria. Sendo assim, ao realizarmos a integração funcional da teoria de Yang-Mills no espaço-tempo contínuo, não podemos desconsiderar a contribuição destas estruturas topológicas. Com o objetivo de facilitar o entendimento destas estruturas, podemos pensá-las como um tubo de fluxo cromomagnético, tal que, ao calcularmos a sua circulação através do *loop* de Wilson (1.1), obtemos como resultado um elemento do centro do grupo  $SU(N)$  na representação na qual este objeto se encontra.

No espaço-tempo contínuo, o conceito de vórtices de centro foi inicialmente introduzido a partir de transformações singulares  $S$  dos campos de calibre [26], definidas por

$$A_\mu^{VC} = SA_\mu S^{-1} + \frac{i}{g} S \partial_\mu S^{-1} - I_\mu(S), \quad (4.1)$$

onde  $I_\mu(S)$  é conhecido como vórtice ideal, de maneira que as transformações singulares  $S$  são da forma

$$S = \exp(i\chi \vec{\beta} \cdot \vec{T}), \quad (4.2)$$

onde  $\chi$  é uma fase multivalorada com a propriedade  $\partial^2 \chi = 0$  e  $\vec{\beta} = 2N\vec{\omega}$ , sendo  $\vec{\omega}$  um peso de uma dada representação do grupo  $SU(N)$  (ver apêndice A.1). O exemplo mais simples de fase multivalorada é o ângulo polar  $\phi \in [0, 2\pi)$ . A partir da definição dada em (4.1), é possível notar que durante a tentativa de derivação da transformação  $S$ , dois tipos de singularidades são criadas: uma  $D - 2$  dimensional e outra  $D - 1$  dimensional. A singularidade  $D - 2$  dimensional é conhecida como vórtice de centro fino, e está associada ao fato de que a fase  $\chi$  não está bem definida sobre um conjunto de pontos. Tomando como exemplo o ângulo

polar  $\phi$ , sabemos que este não pode ser definido nos pontos onde  $x = 0$  e  $y = 0$ . A outra singularidade é conhecida como vórtice ideal, e está relacionada ao fato da transformação singular  $S$  não é contínua sobre uma superfície que tem como borda o vórtice fino. Como exemplo, considere a transformação singular do grupo  $SU(2)$ , o qual possui um único peso positivo, e a fase multivalorada como o ângulo polar  $\phi$ . Neste caso, a transformação  $S$  é dada por

$$S = \exp(i\phi T_3), \quad (4.3)$$

e as singularidades geradas através dela são

$$-\frac{i}{g}S\partial_\mu S^{-1} = \frac{1}{g}\partial_\mu\phi T_3 + \frac{2\pi}{g}\theta(x_1)\delta(x_2)\delta_{\mu 2}T_3, \quad (4.4)$$

onde  $\partial_\mu\phi$  deve ser entendido como

$$\partial_1\phi = -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad \partial_2\phi = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}. \quad (4.5)$$

O primeiro termo do lado direito da equação (4.4) corresponde ao vórtice de centro fino, enquanto o segundo termo corresponde ao vórtice ideal. Repare então, que a existência do último termo da equação (4.1) elimina a contribuição do vórtice ideal proveniente da derivação da transformação  $S$ . Sendo assim, nenhuma Física dos vórtices de centro deve ser associada ao vórtice ideal.

Estas transformações definidas em (4.2), apesar de pertencerem ao grupo  $SU(N)$ , não podem ser chamadas transformações de calibre. Isso porque ao realizarmos a transformação de um campo de calibre através de (4.1), a Física não permanece invariante. Para verificar este fato, vamos estudar o efeito de uma configuração gerada por uma transformação singular no *loop* de Wilson. Primeiramente, iremos realizar a avaliação deste observável para uma configuração perturbativa do campo de calibre  $A_\mu$ , ou seja  $A_\mu \approx 0$  em todos os pontos do espaço. Utilizando a definição do *loop* de Wilson, é fácil notar que  $W_C[A_\mu \approx 0] \approx 1$  para qualquer curva  $C$ . Em seguida, realizamos a transformação desta configuração perturbativa de acordo com (4.1) e, ao avaliarmos o *loop* de Wilson para esta nova configuração gerada, podemos notar que, não só o valor atribuído ao observável muda, como passa a depender a curva  $C$  considerada. De maneira geral, podemos escrever,

$$W_C[A_\mu^{VC}] = \frac{1}{N} \text{tr} P \left\{ \exp\left(ig \oint_C dx_\mu A_\mu^{VC}\right) \right\} \approx z^l, \quad (4.6)$$

onde  $z$  é um elemento do centro do grupo na dada representação do peso  $\vec{\omega}$  e  $l$  é chamado de número de laços entre a curva  $C$  e o vórtice de centro fino. Desta propriedade, podemos entender que a palavra "centro" presente no nome dado a estes vórtices, refere-se ao centro do grupo da simetria de calibre. Por consequência do resultado dado em (4.6), não é correto

denominar as transformações singulares como transformações de calibre. Antes de prosseguir, vale a pena lembrar que os vórtices de centro fino são estruturas singulares, e a contribuição destas configurações para o cálculo do funcional gerador das teorias de Yang-Mills é nula. Com o objetivo de sobrepujar este problema, foi introduzida a noção de vórtice de centro grosso, ou seja, um vórtice de centro que possua uma escala na direção do espaço-tempo onde o vórtice fino é singular. Em termos do campo de calibre, esta nova estrutura é introduzida como um campo de fundo na presença de flutuações quânticas  $q_A$  usuais. Em particular, para o exemplo considerado no grupo  $SU(2)$

$$A_\mu^{VCG} = q_\mu^1 T_1 + q_\mu^2 T_2 + \left( \frac{1}{g} f(\rho) \partial_\mu \phi + q_\mu^3 \right) T_3, \quad (4.7)$$

onde  $\rho$  é definido como  $\rho = +\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$  e  $f(\rho)$  é chamado de perfil do vórtice de centro grosso. Para garantir que a configuração seja livre de singularidades, o perfil  $f(\rho)$  deve atender as seguintes condições

$$\rho \rightarrow 0 \Rightarrow f(\rho) \rightarrow 0 \quad , \quad \rho > \rho_v \Rightarrow f(\rho) = 1, \quad (4.8)$$

onde  $\rho_v$  é o raio do vórtice de centro grosso. Em relação a esta nova estrutura, podemos notar que qualquer curva  $C$  capaz de enlaçar o vórtice externamente a região delimitada pelo raio  $\rho_v$  fornece como resultado para o *loop* de Wilson o mesmo resultado proposto para um vórtice de centro fino.

Com isso, finalizamos a introdução sobre vórtices de centro no espaço contínuo. Na próxima seção será apresentada uma forma mais moderna de introdução destes objetos e que será importante para o desenvolvimento desta tese.

Antes de prosseguir, ainda podemos discutir o surgimento das fases confinante e desconfiante do vácuo da teoria de Yang-Mills, à luz do modelo do supercondutor dual. Estas fases podem ser entendidas através da percolação e a não percolação de vórtices extensos, respectivamente. Na ocorrência de um grande número de vórtices de centro extensos, a superfície de Wilson, ou seja, qualquer superfície que tenha como borda o *loop* de Wilson, deve ser atravessada uma única vez por cada vórtice. A grande concentração de vórtices implica que o fluxo do campo cromomagnético calculado a partir de (1.1) leva em consideração a presença de todos os vórtices, o que gera para este parâmetro uma lei proporcional à área desta superfície, e portanto, o confinamento. Já a fase não confinante, ocorre quando há percolação de vórtices curtos. Nesta configuração, os únicos vórtices que contribuirão efetivamente para o cálculo do *loop* de Wilson são aqueles que se encontram próximos à borda da superfície de Wilson. Aqueles que se encontrarem distantes desta borda atravessarão a superfície duas vezes, uma em cada sentido, e desta forma, não contribuirão para o cálculo (1.1). De maneira semelhante ao surgimento da lei da área vista no caso anterior, esta situação implica que uma lei do perímetro rege esta fase da teoria.

### 4.1.2 Deformação diagonal do vórtice fino

Em [27] é apresentada uma possibilidade mais natural de definir o vórtice de centro grosso ao propor uma reinterpretação dos campos que permeiam o vácuo da teoria de Yang-Mills na presença de um vórtice de centro. Esse procedimento é conhecido como deformação diagonal do vórtice de centro fino.

Inicialmente, devemos definir novas bases para o espaço de cor  $n_a$  da seguinte forma

$$n_A = ST_A S^{-1}. \quad (4.9)$$

Estas novas bases são ditas bases locais do espaço de cor, uma vez que, diferentemente das bases de Lie usuais  $T_A$ , elas são dependentes da fase multivalorada  $\chi$  que define o vórtice de centro fino. No caso da matriz  $S$  dada de acordo com a definição (4.3), estas novas bases podem ser escritas como

$$n_1 = ST_1 S^{-1} = \cos(\phi)T_1 - \sin(\phi)T_2, \quad (4.10)$$

$$n_2 = ST_2 S^{-1} = \sin(\phi)T_1 + \cos(\phi)T_2, \quad (4.11)$$

$$n_3 = ST_3 S^{-1} = T_3, \quad (4.12)$$

e podem ser visualizadas abaixo.

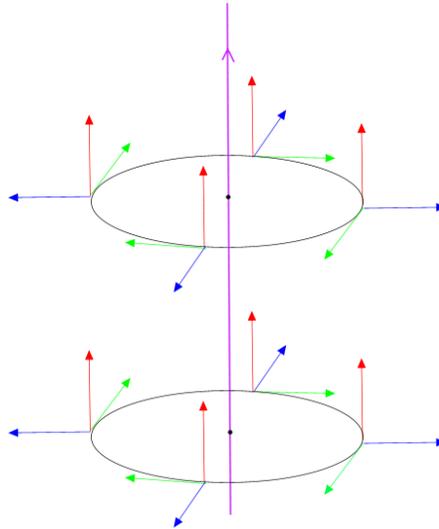


Figura 3 – Representação para as bases locais do espaço de cor.

Na figura 3, o elemento  $n_1$  é representada pela seta verde, o elemento  $n_2$  é representada pela seta azul e o elemento  $n_3$  é representada pela seta vermelha. Podemos perceber que duas bases deste conjunto estarão mal definidos sobre a linha vertical. Esta má definição pode ser entendida como a codificação de que o vórtice de centro fino já foi introduzido no sistema antes mesmo de falarmos em campos de calibre. Um dos pontos que sustentam esta

afirmação se deve ao fato de que bases não diagonais  $n_1$  e  $n_2$  não são bem definidas no mesmo conjunto de pontos onde o vórtice de centro fino se localiza. Em termos destas novas bases, o vórtice de centro fino é reescrito como

$$A_\mu^{VC} = (-C_\mu^A + \mathcal{A}_\mu^A) n_A, \quad (4.13)$$

onde

$$C_\mu^A = -\frac{1}{g} f^{ABC} n_B \cdot \partial_\mu n_C, \quad (4.14)$$

e  $\mathcal{A}_\mu^A$  são as perturbações usuais sobre as quais o vórtice de centro foi definido. Através de uma pequena manipulação algébrica, é possível mostrar que ambas as definições (4.1) e (4.13) são equivalentes quando lidamos com vórtices finos, uma vez que

$$-C_\mu^A n_A = \frac{i}{g} S \partial_\mu S^{-1} - I_\mu(S). \quad (4.15)$$

Entretanto, esta equivalência não é mantida quando lidamos com vórtices de centro grossos. Isso porque, com a introdução destas novas bases, este objeto deve ser escrito da seguinte maneira,

$$A_\mu^{VCG} = (B_\mu^i + \mathcal{A}_\mu^i) n_i + \mathcal{A}_\mu^a n_a, \quad (4.16)$$

onde,  $B_\mu^i$  é o campo responsável por parametrizar o vórtice de centro grosso. No caso considerado como exemplo, temos que  $B_\mu^3 = \frac{1}{g} f(\rho) \partial_\mu \phi$ , implicando que o setor diagonal de ambas formulações são equivalentes. O mesmo não ocorre quando lidamos com o setor não diagonal de ambas definições. A definição utilizada na seção anterior não é uma boa definição do vórtice de centro grosso, uma vez que o limite entre o vórtice de centro fino e o vórtice de centro grosso não pode ser realizado de maneira contínua. Como foi mostrado anteriormente, as bases locais de cor são naturalmente introduzidas quando lidamos com vórtices de centro. Logo, ao substituir as bases locais  $n_A$  por bases globais  $T_A$ , somente é possível estabelecer uma relação entre os vórtices de centro fino e grosso quando  $q_\mu^a = 0$ . Na formulação apresentada nesta seção, o vórtice de centro grosso pode ser obtido a partir de uma deformação do vórtice de centro fino, de acordo a preservar o limite em que  $\rho_v \rightarrow 0$ ,  $B_\mu^i \rightarrow -C_\mu^i$ .

### 4.1.3 Instabilidade de Savvidy-Nielsen-Olesen

A descrição apresentada nesta seção ainda apresenta a possível solução para o problema conhecido como instabilidade de Savvidy-Nielsen-Olesen [28] no âmbito dos vórtices de centro. Este fenômeno foi estudado mais cuidadosamente em [29] e aqui apresentaremos apenas uma breve discussão, focando nas diferenças entre as duas formulações propostas para o vórtice de centro grosso. Esta instabilidade se configura pela existência de modos ligados no operador

das flutuações quânticas sobre um campo de fundo clássico. No caso das teorias de Yang-Mills, vimos duas maneiras inequivalentes de representar um vórtice de centro grosso meio as flutuações quânticas

$$A_\mu^{(I)} = (B_\mu^i + Q_\mu^i) T_i + Q_\mu^a T_a, \quad (4.17)$$

$$A_\mu^{(II)} = (B_\mu^i + \mathcal{Q}_\mu^i) n_i + \mathcal{Q}_\mu^a n_a. \quad (4.18)$$

onde  $(I)$  refere-se ao procedimento usual e  $(II)$  refere-se ao procedimento de deformação diagonal. A partir do procedimento  $I$ , a contribuição a  $1-loop$  para o operador do campo de flutuações no calibre maximal Abelian,  $D_\mu^{ab}(B)Q_\mu^b = 0$ , é fornecida pela ação

$$S^{1-loop} = -\frac{1}{2} Q_\nu^c D_\mu^{ca}(B) D_\mu^{ab}(B) Q_\nu^b + g f^{ibc} H_{\mu\nu}^i(B) Q_\mu^b Q_\nu^c, \quad (4.19)$$

onde  $D_\mu^{ab}(B) \equiv \partial_\mu \delta^{ab} - i g f^{abc} B_c$  e  $H_{\mu\nu}^i = \partial_\mu B_\nu^i - \partial_\nu B_\mu^i$ . A partir do procedimento  $(II)$ , o resultado apresenta uma pequena diferença, uma vez que as bases do espaço de cor são locais. Então

$$\mathcal{S}^{1-loop} = -\frac{1}{2} \mathcal{Q}_\nu^c D_\mu^{ca}(B+C) D_\mu^{ab}(B+C) \mathcal{Q}_\nu^b + \frac{1}{2} g f^{ibc} [2H_{\mu\nu}^i(B) + H_{\mu\nu}^i(C)] \mathcal{Q}_\mu^b \mathcal{Q}_\nu^c. \quad (4.20)$$

Ao realizarmos a comparação entre (4.19) e (4.20), podemos perceber que ambas apresentam uma estrutura semelhante. De fato, o caso  $I$  pode ser entendido em termos do caso no  $(II)$  quando  $C_\mu = 0$ . Em  $SU(2)$ , levando em conta esta consideração, a estabilidade de um vórtice de centro grosso estático é definida pela não existência de autovalores negativos dos operadores

$$K_\pm = -D^2(B+C) \pm \Gamma, \quad (4.21)$$

onde

$$B_\mu^3 = \frac{1}{g} f(\rho) \partial_\mu \phi, \quad \Gamma = g [2H_{12}^3(B) + H_{12}^3(C)]. \quad (4.22)$$

Em particular para o caso  $(II)$ ,  $C_\mu^3 = -\frac{1}{g} \partial_\mu \phi$ , e portanto,

$$H_{12}^3(C) = -\frac{1}{g} [\partial_1, \partial_2] \phi = -\frac{2\pi}{g} \delta^{(2)}(x, y). \quad (4.23)$$

Primeiramente, vamos avaliar o surgimento de estados ligados para a situação  $(I)$ . Como estamos tratando de configurações estáticas, os autoestados associados a qualquer direção fora do plano  $xy$  são ondas planas. No plano  $xy$ , a solução de estados ligados deve ser do tipo

$$\psi_m^{(I)} = R_m(\rho) e^{im\phi}, \quad (4.24)$$

e a solução radial satisfaz a equação

$$\left[ -\frac{1}{\rho} \partial_\rho \rho \partial_\rho + \frac{(m + y^{(I)}(\rho))^2}{\rho^2} \pm \Gamma^{(I)} \right] R_m = -\kappa^2 R_m, \quad (4.25)$$

onde  $y^{(I)}(\rho) = f(\rho)$  e  $\Gamma^{(I)} = (2/\rho)\partial_\rho f$ . Considerando, como exemplo,  $f(\rho) = \Theta(\rho - \rho_v)$ , isto é, a função de Heaviside,

$$\Gamma^{(I)} = \frac{2}{\rho}\delta(\rho - \rho_v), \quad (4.26)$$

e a solução da equação (4.25) é dada por

$$\psi_m^{(I)} = \begin{cases} I_{|m|}(\kappa\rho)e^{im\phi}, & \rho < \rho_v \\ K_{|m+1|}(\kappa\rho)e^{im\phi}, & \rho > \rho_v. \end{cases}$$

onde  $I_{|m|}(\kappa\rho)$  e  $K_{|m+1|}(\kappa\rho)$  são duas das funções de Bessel de segunda espécie. Realizado o tratamento computacional, somos capazes de perceber que, obviamente, apenas o caso repulsivo possui soluções com autoenergia negativa. Estes modos são definidos pelo estado fundamental  $m = 0$  e pelo estado  $m = -1$ .

No caso (II), a equação de autovalores é equivalente àquela do caso (I) uma vez realizada a troca

$$y^{(I)}(\rho) \rightarrow y^{(II)}(\rho) = f(\rho) - 1 \quad , \quad \Gamma^{(I)} \rightarrow \Gamma^{(II)} = \frac{1}{\rho}[2\partial_\rho f - \delta(\rho)]. \quad (4.27)$$

Como podemos perceber, este problema está associado ao problema de uma partícula na presença de um potencial delta em duas dimensões, o qual exige um método de regularização e renormalização para ser devidamente bem definido. Um procedimento de regularização possível é transformar o potencial singular em um poço cilíndrico de raio  $a$  e, uma vez encontradas as soluções, tomar o limite em que este raio vai a zero. Sendo assim, considerando  $f(\rho) = \Theta(\rho - \rho_v)$ , resolveremos a equação de autoestados com

$$y^{(II)}(\rho) = \Theta(\rho - \rho_v) - \Theta(\rho - a) \quad , \quad \Gamma^{(II)} = \frac{1}{\rho}[2\delta(\rho - \rho_v) - \delta(\rho - a)]. \quad (4.28)$$

Propondo a solução

$$\psi_m^{(II)} = X_m e^{im\phi}, \quad (4.29)$$

as soluções possíveis para  $\rho > a$  são

$$\psi_m^{(II)} = \begin{cases} I_{|m|}(\kappa\rho)e^{i(m+1)\phi}, & a < \rho < \rho_v \\ K_{|m+1|}(\kappa\rho)e^{i(m+1)\phi}, & \rho > \rho_v. \end{cases}$$

com  $m = 0, -1$ . Ao tomarmos o limite  $a \rightarrow 0$ , podemos notar que as soluções de ambos os procedimentos estão relacionadas por  $\psi_m^{(II)} = \psi_m^{(I)} e^{i\phi}$ . Note também, que devido ao fato de  $I_0(\kappa\rho)$  não é nula para  $\rho = 0$ , a solução do estado fundamental com  $m = 0$  não é aceitável como solução do problema de autovalores, uma vez que a sua fase não é bem definida nestes pontos. Sendo assim, o procedimento (II), ou seja, aquele no qual o vórtice de centro grosso é descrito através da deformação diagonal do vórtice fino, o número de autoestados que contribuem para a instabilidade deste objeto é reduzida em 1. Vale a pena notar, que

as configurações consideradas aqui ainda são instáveis, uma vez que possuem 1 estado valor negativo para o operador das flutuações. Apesar deste resultado, foi encontrado em [29], uma configuração com fluxo nulo, a qual possuía apenas um modo com autovalor negativo. Esta configuração atendia a condições equivalentes às apresentadas para a configuração anterior, o que nos permitiu eliminar qualquer modo ligado e propor uma configuração para vórtices de centro que não apresentavam a instabilidade de Savvidy-Nielsen-Olesen.

Por essas razões, ao longo desta tese iremos adotar o procedimento de deformação diagonal dos vórtices de centro fino como forma de escrever de maneira coerente estas estruturas topológicas.

## 4.2 Vórtices de centro e a teoria de Yang-Mills-Higgs

Em [30] foi introduzido um modelo baseado na ação de Yang-Mills-Higgs com  $N^2 - 1$  campos escalares na adjunta, onde objetos topológicos surgem como soluções clássicas das equações de campo. Dentre as conhecidas soluções deste modelo, existe uma solução que apresenta a mesma estrutura matemática dos vórtices de centro da teoria de Yang-Mills pura, o qual denominaremos como cordas de centro. Apesar desta semelhança, vale a pena ressaltar que as cordas de centro do modelo de Yang-Mills-Higgs são fisicamente diferentes dos vórtices de centro da teoria de Yang-Mills pura. Enquanto os vórtices de centro representam processos que devem ocorrer no vácuo quântico da teoria de Yang-Mills capazes de fornecer uma explicação para formação e caracterização do potencial confinante a um nível fundamental, as cordas de centro são soluções clássicas de um modelo que possui os elementos necessários para descrever fenomenologicamente uma teoria efetiva do vácuo não perturbativo da teoria de Yang-Mills pura.

A ação que descreve este modelo é dada por

$$S_{YMH} = S_{YM} + S_H, \quad (4.30)$$

onde  $S_{YM}$  é a ação de Yang-Mills usual. O setor de Higgs  $S_H$  é definido por

$$S_H = \int d^4x \left( \frac{1}{2} \langle D_\mu \psi_I, D_\mu \psi_I \rangle + V_H \right), \quad (4.31)$$

$$V_H(\psi) = \frac{\mu^2}{2} \langle \psi_I, \psi_I \rangle + \frac{\kappa}{3} f_{IJK} \langle \psi_I, \psi_J \wedge \psi_K \rangle + \frac{\lambda}{4} \langle \psi_I \wedge \psi_J, \psi_I \wedge \psi_J \rangle \quad (4.32)$$

onde  $\mu, \kappa, \lambda$  são parâmetros e  $D_\mu \psi_I = \partial_\mu \psi_I - ig[A_\mu, \psi_I]$ . A simetria de calibre sobre transformações regulares  $U \in SU(N)$  é dada por

$$A_\mu \rightarrow A_\mu^U, \quad \psi_I \rightarrow U \psi_I U^{-1}. \quad (4.33)$$

onde  $I = 1, 2, \dots, N^2 - 1$ ,  $f_{IJK}$  são as constantes de estrutura da álgebra de  $SU(N)$  e  $\psi_I \wedge \psi_J = -i[\psi_A, \psi_B]$ . Por consequência da escolha desta estrutura para o potencial, além da simetria de calibre, esta ação ainda apresenta uma simetria global nos índices de sabor  $Ad(SU(N))$ .

A fase de quebra espontânea de simetria (SSB) é caracterizada pela seguinte relação entre os parâmetros do potencial

$$\mu^2 < \frac{2\kappa^2}{9\lambda}. \quad (4.34)$$

Nesta fase, a variedade de vácuo é definida por

$$\mathcal{M} = \{\psi_I = v n_I, n_I = S T_I S^{-1}, S \in SU(N)\}. \quad (4.35)$$

Para  $\kappa < 0$ , o parâmetro  $v$  é dado por  $v = -\frac{\kappa}{2\lambda} \pm [(\frac{\kappa}{2\lambda})^2 - \frac{\mu^2}{\lambda}]^{\frac{1}{2}}$ . Como podemos perceber, a variedade de vácuo é definida a partir das bases locais de cor, indicando que estas bases são as ideais para expandir quaisquer campos da nossa álgebra de Lie. Nestas bases, temos que

$$D_\mu \psi_I = \mathcal{D}_\mu^{AB} q_I^B, \quad \mathcal{D}_\mu^{AB} = \delta^{AB} \partial_\mu - g f^{ABC} (A_\mu^C + C_\mu^C), \quad (4.36)$$

onde  $C_\mu$  é dado de acordo com (4.14) e  $\psi_I = S q_I S^{-1} = q_{IJ} n_J$ . À vista disso, podemos concluir que as equações de campo para  $A_\mu$  e  $q_I$  são, respectivamente,

$$\mathcal{D}_\mu^{BC} \mathcal{D}_\mu^{CD} q_{AD} = \mu^2 q_{AB} + \kappa f^{BCD} f^{AEF} q_{EC} q_{FD} + \lambda f^{BCD} f^{DEF} q_{GC} q_{AE} q_{GF}. \quad (4.37)$$

Na região assintótica devemos impôr  $A_\mu \rightarrow -C_\mu$  e  $h_{AB} \rightarrow v \delta_{AB}$  como garantia de que as configurações possuem energia finita.

O estudo numérico de soluções estáticas destas equações foi realizado em [31]. Neste trabalho foram plotados os perfis das soluções do tipo cordas de centro grosso para os grupos de simetria  $SU(2)$  e  $SU(3)$  com diversas condições de contorno, como cordas de tamanho infinito e de tamanho finito delimitados por monopólos.



## 5 *Loops* coloridos em $4D$ e sua representação em termos de uma teoria de campos

Inspirados pela obtenção de uma teoria de campos para descrever a teoria efetiva Abelianizada para um *ensemble* de vórtices de centro [32], neste capítulo iremos explorar a representação de estruturas tipo linha de mundo que possuem graus de liberdade não-Abelianos. Em particular no caso  $4D$  Euclidiano, os vórtices de centro são superfícies de dimensão 2, logo as estruturas unidimensionais que estaremos tratando podem ser associadas à monopólos não-Abelianos.

### 5.1 *Ensemble* de vórtices de centro

Em [32], foi demonstrado que conjuntos de vórtices de centro conectados a monopólos externos em um espaço  $(2 + 1)D$  está intimamente relacionado à teoria de campos descrita por

$$\overline{D}_\mu \bar{V} D_\mu V + m^2 \bar{V} V + \alpha (\bar{V} V)^2 + \beta (V^N + \bar{V}^N) + \frac{\gamma}{2} \lambda_\mu \lambda_\mu + \frac{\delta}{2} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} , \quad (5.1)$$

$$D_\mu V = [\partial_\mu + i(2\pi/g) \lambda_\mu] V \quad , \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu \lambda_\nu - \partial_\nu \lambda_\mu , \quad (5.2)$$

onde  $V$  representa o setor de vórtices, o campo dual  $\lambda_\mu$  representa o setor não diagonal das teorias de Yang-Mills. Para obtenção do resultado acima, foi necessária a implementação de técnicas desenvolvidas no contexto da Física de Polímeros [33], onde as curvas são descritas a partir de parâmetros fenomenológicos julgados necessários. Em  $4D$ , a obtenção da teoria efetiva destes objetos é uma tarefa mais complicada, uma vez que vórtices de centro são superfícies de 2 dimensões, e a teoria de campos é naturalmente associada a configurações unidimensionais. Sendo assim, neste capítulo iremos nos ater a estudar a teoria efetiva que representa a integração de um conjunto de curvas fechadas em  $4D$  Euclidiano que interagem com campos não Abelianos.

### 5.2 Definição do bloco fundamental

De acordo com a referência [34], o acoplamento de uma partícula que se comporte como uma linha de mundo em  $D$  dimensões e interage com um campo não Abelianos externo  $\Lambda$ , é

implementada pela Lagrangiana

$$\mu (\dot{x}_\mu \dot{x}_\mu)^{1/2} + \frac{1}{2} (\bar{z}_c \dot{z}_c - \dot{\bar{z}}_c z_c) - ig \dot{x}_\mu I^A \Lambda_\mu^A \quad , \quad I^A = T_{cd}^A \bar{z}_c z_d \quad , \quad (5.3)$$

onde  $z_c$ .  $c = 1, \dots, N^2 - 1$ , descrevem os graus de liberdade de cor, ou não Abelianos. Portanto, seria natural introduzir a função de partição de um conjuntos de *loops* coloridos como

$$Z = \sum_n \int [Dm]_n e^{-[S^0 + S^{int}]} \quad , \quad (5.4)$$

onde  $\sum_n$  soma sobre o número de *loops*, enquanto  $S^0$  e  $S^{int}$  são as partes livre e interagente da ação, contendo respectivamente os termos,

$$\mu (\dot{x}_\mu^{(k)} \dot{x}_\mu^{(k)})^{1/2} \quad , \quad - ig \dot{x}_\mu^{(k)} I^A \Lambda_\mu^A(x^{(k)}) \quad , \quad (5.5)$$

onde  $k = 1, \dots, n$  denota cada um dos *loops* no  $n$ -ésimo sector. Assim como em [32], consideramos que uma melhor descrição de uma curva pode ser obtida com a adição de informação sobre a sua curvatura, mensurada por  $1/\kappa$  e deixaremos em aberto a possibilidade de que haja interação entre os *loops*, descrita através dos campos  $\psi(x)$  e  $\Phi^A(x)$ .

Portanto, a função de partição (5.4) é dada por

$$\begin{aligned} Z &= \int [D\phi][D\Phi] e^{-W} \sum_n Z_n \\ Z_n &= \int [Dm]_n \exp \left[ \sum_{k=1}^n \oint_{L_k} ds \left( ig \dot{x}_\mu^{(k)} I^A \Lambda_\mu^A(x^{(k)}) - I^A \Phi^A(x^{(k)}) - \phi(x^{(k)}) \right) - S^0 \right] \quad , \\ S^0 &= \sum_{k=1}^n \oint_{L_k} ds \left[ \mu + \frac{1}{2} (\bar{z}_c \dot{z}_c - \dot{\bar{z}}_c z_c) + \frac{1}{2\kappa} \dot{x}_\mu^{(k)} \dot{x}_\mu^{(k)} \right] \quad , \end{aligned} \quad (5.6)$$

onde  $s$  é o parâmetro do comprimento de arco,  $u^{(k)} = \dot{x}^{(k)}$  é o vetor tangente unitário e  $W$  é o fator sobre o qual os campos  $\psi(x)$  e  $\Phi^A(x)$  devem ser integrados com o objetivo de fornecer a interação desejada entre os *loops*. A medida  $[Dm]_n$  integra sobre todas as possíveis  $n$  curvas fechadas, incluindo os diferentes comprimentos e formatos. Sendo assim, segue das referências [32, 35], que podemos definir esta variável de integração como

$$\begin{aligned} [Dm]_n &\equiv \frac{1}{n!} \int_0^\infty \frac{dL_1}{L_1} \frac{dL_2}{L_2} \dots \frac{dL_n}{L_n} \int_{\mathbb{R}^4} d^4 x_1 d^4 x_2 \dots d^4 x_n \\ &\times \int [Dx^{(1)}(s)]_{(x_1, L_1)} [Dx^{(2)}(s)]_{(x_2, L_2)} \dots [Dx^{(n)}(s)]_{(x_n, L_n)} \\ &\times \int \sum_{a_1} [Dz^{(1)}]_{(a_1, a_1)} \sum_{a_2} [Dz^{(2)}]_{(a_2, a_2)} \dots \sum_{a_n} [Dz^{(n)}]_{(a_n, a_n)} \quad . \end{aligned} \quad (5.7)$$

Como as curvas são indistinguíveis, o fator  $1/n!$  surge para impedir recontagens. A medida  $[Dx^{(k)}(s)]_{(x_k, L_k)}$  representa a integração sobre todas as curvas fechadas de comprimento fixo

$L_k$ , tal que, em  $s = 0$  e  $s = L_k$ , é verificado  $x(s) = x_k$ . Note que a mesma curva pode ser parametrizada de diversas formas pela simples escolha de um novo  $x_k$ , logo, o fator  $1/L_k$  é introduzido para corrigir estas sobrecontagens de curvas [35]. A medida  $[Dz^{(k)}]_{a_k, a_k}$  age na integração dos graus de liberdade internos e está construído de maneira a implementar a propagação de um estado inicial de cor bem definida  $a_k$ , em  $s = 0$ , para a mesma cor final em  $s = L_k$ . Em nosso caso de interesse,

$$\hat{H} = -ig u_\mu \Lambda_\mu^A T_{cd}^A \hat{a}_c^\dagger \hat{a}_d + \Phi^A T_{cd}^A \hat{a}_c^\dagger \hat{a}_d, \quad (5.8)$$

onde a discussão para tratamento deste termo será realizada na seção 5.3.

Note que, com o auxílio da equação (5.7), podemos reescrever a função de partição como

$$Z = \int [D\phi][D\Phi] e^{-W} e^{\int_0^L \frac{dL}{L} \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \sum_a Q^{aa}(x, x, L)}, \quad (5.9)$$

onde introduzimos o bloco fundamental,

$$Q^{ba}(x, x_0, L) = \int [Dx(s)]_{x_0, x, L} [Dz(s)]_{(a, b)} \\ \times e^{-\int_0^L ds \left[ \mu + \frac{1}{2} (\bar{z}_c \dot{z}_c - \dot{\bar{z}}_c z_c) + \frac{1}{2\kappa} \dot{u}_\mu \dot{u}_\mu + \phi(x) - ig \dot{x}_\mu \Lambda_\mu^A T_{cd}^A \bar{z}^c z^d + \Phi^A T_{cd}^A \bar{z}^c z^d \right]}, \quad (5.10)$$

responsável por descrever a probabilidade de ponta a ponta para um único objeto pontual que se propaga desde a localização  $x_0$  e cor  $a$ , em  $s = 0$ , para  $x$  e  $b$ , em  $s = L$ . Portanto, a obtenção de informação sobre o bloco fundamental é tudo que necessitamos para definir a representação deste conjunto de curvas fechadas em termos de uma teoria quântica de campos.

### 5.3 Estados coerentes de cor

Nesta seção, iremos mostrar que a melhor espaço de representar a evolução dos graus de liberdade internos é o espaço definido pela bases de estados coerentes. Inicialmente, considere operadores de criação e aniquilação  $\hat{a}_c^\dagger$  e  $\hat{a}_c$ , que satisfazem as seguintes regras de comutação,

$$[\hat{a}_c, \hat{a}_d^\dagger] = \delta_{cd}, \quad [\hat{a}_c, \hat{a}_d] = [\hat{a}_c^\dagger, \hat{a}_d^\dagger] = 0. \quad (5.11)$$

Quando aplicado ao vácuo da teoria,  $\hat{a}_c^\dagger$  cria um estado com cor bem definida  $c$ . No espaço de estados, uma base pode ser definida em termos dos diferentes números de ocupação, para cada cor existente,  $|N_1, \dots, N_{\mathfrak{D}}\rangle$ . Como de costume,

$$|N_1, \dots, N_{\mathfrak{D}}\rangle = \prod_{c=1}^{\mathfrak{D}} \frac{1}{\sqrt{n_c!}} (\hat{a}_c^\dagger)^{n_c} |0, \dots, 0\rangle, \quad (5.12)$$

e podemos definir estados coerentes  $|z\rangle = |z^1, \dots, z^{\mathfrak{D}}\rangle$ ,  $z^a \in C$ , com as propriedades,

$$\hat{a}_c |z\rangle = z^c |z\rangle, \quad \hat{a}_c^\dagger |z\rangle = \frac{\partial}{\partial z^c} |z\rangle. \quad (5.13)$$

Por simplicidade, iremos adotar a notação  $z = (z^1, \dots, z^{\mathfrak{D}})$  e  $\bar{z} = (\bar{z}^1, \dots, \bar{z}^{\mathfrak{D}})$  para denotar o conjunto de variáveis e suas conjugações, respectivamente. Um estado coerente pode ser escrito como,

$$|z\rangle = e^{z \cdot \hat{a}^\dagger} |0, \dots, 0\rangle, \quad (5.14)$$

e seu produto interno é

$$\langle z|z'\rangle = \langle 0|e^{\bar{z} \cdot \hat{a}} e^{z' \cdot \hat{a}^\dagger}|0\rangle = e^{\bar{z} \cdot z'}. \quad (5.15)$$

Qualquer estado  $|\psi\rangle$  pode ser expandido em termos das bases de número de ocupações como

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \sum_{n_1, \dots, n_{\mathfrak{D}}} \frac{\psi_{n_1, \dots, n_{\mathfrak{D}}}}{\sqrt{n_1!} \dots \sqrt{n_{\mathfrak{D}}!}} |n_1, \dots, n_{\mathfrak{D}}\rangle \\ &= \sum_{n_1, \dots, n_{\mathfrak{D}}} \psi_{n_1, \dots, n_{\mathfrak{D}}} \prod_{c=1}^{\mathfrak{D}} \frac{(\hat{a}_c^\dagger)^{n_c}}{n_c!} |0, \dots, 0\rangle, \end{aligned} \quad (5.16)$$

e sua projeção em estados coerentes é,

$$\langle z|\psi\rangle = \sum_{n_1, \dots, n_{\mathfrak{D}}} \psi_{n_1, \dots, n_{\mathfrak{D}}} \frac{(\bar{z}^1)^{n_1} \dots (\bar{z}^{\mathfrak{D}})^{n_{\mathfrak{D}}}}{n_1! \dots n_{\mathfrak{D}}!}, \quad (5.17)$$

isto é,  $\langle z|\psi\rangle = \psi(\bar{z})$  é uma função antiholomorfa. No espaço de estados de cor, o operador identidade é,

$$\hat{I} = \int dz d\bar{z} e^{-\bar{z} \cdot z} |z\rangle\langle z|; \quad \int dz d\bar{z} \equiv \int \prod_{c=1}^{\mathfrak{D}} \left[ \frac{dz^c d\bar{z}^c}{2\pi i} \right], \quad (5.18)$$

ou seja,

$$\psi(\bar{z}) = \langle z|\hat{I}|\psi\rangle = \int dz' d\bar{z}' e^{(\bar{z} - \bar{z}') \cdot z'} \psi(\bar{z}'). \quad (5.19)$$

Agora, considere o peso  $\langle f|e^{-\hat{H}L}|i\rangle$  referente à propagação de um estado inicial  $|i\rangle$  para um estado final  $|f\rangle$ .

Como de costume, o  $L$  pode ser dividido em  $M$  partes de comprimento  $\Delta L$ ,  $L = M\Delta L$ , com  $M \rightarrow \infty$  e  $\Delta L \rightarrow 0$ . Ao inserirmos  $M$  identidades  $\hat{I}$ , obtemos

$$\langle z|e^{-\hat{H}L}|z_0\rangle = \int \prod_{i=1}^M dz_i d\bar{z}_i e^{-\bar{z}_i \cdot z_i} \langle z_{i+1}|e^{-\hat{H}\Delta L}|z_i\rangle \langle z_1, z_0\rangle, \quad (5.20)$$

onde  $z_{M+1} = z$ . Em nosso caso, o operador Hamiltoniano é dado pela equação (5.8), e assim, podemos obter, para  $\Delta L$  pequeno,

$$\begin{aligned} \langle z_{i+1}|e^{-\hat{H}\Delta L}|z_i\rangle &\approx \langle z_{i+1}|z_i\rangle (1 - H(\bar{z}_{i+1}, z_i)\Delta L) \\ &\approx e^{\bar{z}_{i+1} \cdot z_i} e^{-H(\bar{z}_{i+1}, z_i)\Delta L}, \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$H(\bar{z}, z') = -igu_\mu \Lambda_\mu^A T_{cd}^A \bar{z}^c z'^d + \Phi^A T_{cd}^A \bar{z}^c z'^d . \quad (5.22)$$

Portanto,

$$\langle z | e^{-\hat{H}L} | z_0 \rangle = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \int \prod_{i=1}^M dz_i d\bar{z}_i e^{\sum_{j=1}^M [(\bar{z}_{j+1} - \bar{z}_j) \cdot z_j - H(\bar{z}_{j+1}, z_j) \Delta L]} e^{\bar{z}_1 \cdot z_0} , \quad (5.23)$$

Para a transição entre estados inicial e final geral,

$$|\psi\rangle = \int dz_0 d\bar{z}_0 e^{-\bar{z}_0 \cdot z_0} \psi(\bar{z}_0) |z_0\rangle \quad , \quad \langle\phi| = \int dz d\bar{z} e^{-\bar{z} \cdot z} \bar{\phi}(z) \langle z| , \quad (5.24)$$

podemos definir,

$$\begin{aligned} \langle\phi| e^{-\hat{H}L} |\psi\rangle &= \int dz d\bar{z} dz_0 d\bar{z}_0 e^{-\bar{z} \cdot z} e^{-\bar{z}_0 \cdot z_0} \bar{\phi}(z) \psi(\bar{z}_0) \langle z | e^{-\hat{H}L} | z_0 \rangle \\ &= \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \int [Dz]_{(\psi, \phi)} e^{\sum_{j=0}^M [\frac{1}{2}(\bar{z}_{j+1} - \bar{z}_j) \cdot z_j + \frac{1}{2}\bar{z}_{j+1} \cdot (z_j - z_{j+1})] - \sum_{j=1}^M H(\bar{z}_{j+1}, z_j) \Delta L} , \\ [Dz(s)]_{(\psi, \phi)} &\equiv \prod_{i=0}^{M+1} dz_i d\bar{z}_i e^{-(\bar{z} \cdot z)/2} e^{-(\bar{z}_0 \cdot z_0)/2} \bar{\phi}(z) \psi(\bar{z}_0) , \end{aligned} \quad (5.25)$$

Ao tomar o limite do contínuo, a equação (5.25) pode ser reescrita como

$$\langle\phi| e^{-\hat{H}L} |\psi\rangle \equiv \int [Dz]_{(\psi, \phi)} e^{-\int_0^L ds \mathcal{L}_E} , \quad (5.26)$$

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{2} (\bar{z}_c \dot{z}_c - \dot{\bar{z}}_c z_c) + H(\bar{z}, z) , \quad (5.27)$$

Em particular, para a transição entre estados de cor bem definida,  $|\psi\rangle = |a\rangle$  and  $|\phi\rangle = |b\rangle$ , a medida de integração é,

$$[Dz(s)]_{(a,b)} \equiv \frac{1}{\mathcal{M}} \prod_{i=0}^{M+1} dz_i d\bar{z}_i e^{-(\bar{z} \cdot z)/2} e^{-(\bar{z}_0 \cdot z_0)/2} z^b \bar{z}_0^a , \quad (5.28)$$

onde, o fator de normalização  $\mathcal{M}$  é tal que, para  $L = 0$ , a eq. (6.15) fornece  $\delta_{ab}$ .

## 5.4 O bloco fundamental para o conjunto de curvas fechadas que possuem carga de cor

A obtenção do bloco fundamental para as características físicas das curvas que compõem este sistema foi minuciosamente realizada em [36], a partir da utilização de técnicas de Física

de polímeros. Sem a adição da informação sobre a cor, a equação de Chapman-Kolmogorov que nos fornece o bloco fundamental é dada por

$$q_j(x, x_0, u, u_0) = \int d^n x' d^{n-1} u' \psi(u - u') e^{-\phi(x)\Delta L} \delta(x - x' - u\Delta L) q_{j-1}(x', x_0, u', u_0), \quad (5.29)$$

onde,

$$\psi(u - u') = \mathcal{N} e^{-\frac{1}{2\kappa}\Delta L \left(\frac{u-u'}{\Delta L}\right)^2}, \quad (5.30)$$

é a distribuição angular de velocidades que tende a orientar a direção  $u$  de um dado passo com a direção  $u'$  do passo anterior. A recorrência está submetida as seguintes condições,

$$q_0(x, x_0, u, u_0) = \delta(x - x_0)\delta(u - u_0). \quad (5.31)$$

$$q(x, x_0, u, u_0, L) \equiv q_M(x, x_0, u, u_0). \quad (5.32)$$

Para introduzirmos a informação sobre os graus de liberdade internos no procedimento apresentado, devemos utilizar o fato de que a amplitude de propagação entre dois estados de cor bem definidos pode ser escrito em termos de bases de estados coerentes como

$$q_j(\bar{z}, z_0) = \int dz' d\bar{z}' e^{(\bar{z}-\bar{z}')\cdot z'} e^{-H(\bar{z}, z')\Delta L} q_{j-1}(\bar{z}', z_0), \quad (5.33)$$

com a condição inicial

$$q_0(\bar{z}_1, z_0) = \langle z_1 | z_0 \rangle = e^{\bar{z}_1 \cdot z_0}. \quad (5.34)$$

Após  $M$  interações, obtemos

$$q_M(\bar{z}_{M+1}, z_0) = \langle z | e^{-\hat{H}L} | z_0 \rangle. \quad (5.35)$$

Sendo assim, a equação de Chapman-Kolmogorov para curvas fechadas que possuem carga de cor é dada por

$$q_j(x, x_0, u, u_0, \bar{z}, z_0) = \int d^n x' d^{n-1} u' dz' d\bar{z}' e^{-\mu\Delta L} e^{(\bar{z}-\bar{z}')\cdot z'} \psi(u - u') \times \\ \times e^{-\omega(x, u, \bar{z}, z')\Delta L} \delta(x - x' - u\Delta L) q_{j-1}(x', x_0, u', u_0, \bar{z}', z_0), \quad (5.36)$$

onde

$$\omega(x, u, \bar{z}, z') = \phi(x) - igu_\mu \Lambda_\mu^A(x) T_{cd}^A \bar{z}^c z'^d + \Phi^A(x) T_{cd}^A \bar{z}^c z'^d. \quad (5.37)$$

Após a projeção dos estados coerentes em estados inicial e final de cor bem definidos, obtemos a versão discretizada da integral de caminho,

$$Q^{ba}(x, x_0, u, u_0, L) = \int [Dx(s)]_{x_0, x, u, u_0, L} [Dz(s)]_{(a, b)} \\ \times e^{-\int_0^L ds \left[ \mu + \frac{1}{2}(\bar{z}_c \dot{z}_c - \dot{\bar{z}}_c z_c) + \frac{1}{2\kappa} \dot{u}_\mu \dot{u}_\mu + \phi(x) - ig \dot{x}_\mu \Lambda_\mu^A T_{cd}^A \bar{z}^c z^d + \Phi^A T_{cd}^A \bar{z}^c z^d \right]}, \quad (5.38)$$

onde  $[Dx(s)]_{x_0, x, u, u_0, L}$  representa a integração sobre todos os caminhos de comprimento fixo  $L$ , tais que,  $x(0) = x_0$ ,  $x(L) = x$ ,  $u(0) = u_0$ ,  $u(L) = u$  [32]. Sendo assim,

$$\begin{aligned} Q^{ba}(x, x_0, u, u_0, L) &= \\ &= \frac{1}{\mathcal{M}} \int dz d\bar{z} dz_0 d\bar{z}_0 e^{-(\bar{z}\cdot z)/2} e^{-(\bar{z}_0\cdot z_0)/2} z^b \bar{z}_0^a q(x, x_0, u, u_0, \bar{z}, z_0, L) . \end{aligned} \quad (5.39)$$

Como de costume, a solução da equação de Chapman-Kolmogorov para as características espaciais nos remete a resolver uma equação de difusão. No limite do contínuo,

$$\begin{aligned} \partial_L q + u_\mu \partial_\mu q &= -(\mu + \phi(x)) q + \frac{\kappa\sigma}{2} \hat{L}_u^2 q \\ &+ \bar{z}^c \int dz' d\bar{z}' e^{(\bar{z}-\bar{z}')\cdot z'} (igu_\mu \Lambda_\mu^A - \Phi^A) T_{cd}^A z'^d q(x, x_0, u, u_0, \bar{z}', z_0, L) , \end{aligned} \quad (5.40)$$

onde  $\hat{L}_u^2$  é o operador Laplaciano sobre uma esfera  $S^{D-1}$ . Note que

$$e^{(\bar{z}-\bar{z}')\cdot z'} z'^d = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^d} e^{(\bar{z}-\bar{z}')\cdot z'} ,$$

implica que podemos reescrever um dos termos da equação de difusão como

$$\int dz' d\bar{z}' e^{(\bar{z}-\bar{z}')\cdot z'} z'^d q(x, x_0, u, u_0, \bar{z}', z_0, L) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^d} q(x, x_0, u, u_0, \bar{z}, z_0, L) . \quad (5.41)$$

Sendo assim, a equação da difusão que estamos interessados é

$$\partial_L q = \left[ -\mu - \phi(x) + \frac{\kappa\sigma}{2} \hat{L}_u^2 - u_\mu \partial_\mu + (igu_\mu \Lambda_\mu^A - \Phi^A) T_{cd}^A \bar{z}^c \frac{\partial}{\partial \bar{z}^d} \right] q, \quad (5.42)$$

perante a condição inicial

$$q(x, x_0, u, u_0, \bar{z}, z_0, 0) = \delta(x - x_0) \delta(u - u_0) e^{\bar{z}\cdot z_0} . \quad (5.43)$$

O próximo passo para obtenção de  $Q^{ba}(x, x_0, u, u_0, L)$  é expandir  $q(x, x_0, u, u_0, \bar{z}, z_0, L)$  em potências de  $\bar{z}$  e  $z_0$ ,

$$q(x, x_0, u, u_0, \bar{z}, z_0, L) = \sum_{m,n} (\bar{z})^m (z_0)^n Q_{mn}(x, x_0, u, u_0, L) \quad (5.44)$$

E integrar ambos os lados da equação de difusão pelos fatores definidos em (5.24), no caso onde  $|\psi\rangle$  e  $|\phi\rangle$  representam estados de uma única cor bem definida. Ou seja, devemos multiplicar a equação de difusão pelo termo

$$\frac{1}{\mathcal{M}} \int dz d\bar{z} dz_0 d\bar{z}_0 e^{-(\bar{z}\cdot z)/2} e^{-(\bar{z}_0\cdot z_0)/2} z^b \bar{z}_0^a \times , \quad (5.45)$$

Uma vez que o operador que define a equação de difusão não causa desbalanço entre o número de potências de  $\bar{z}$ , o único termo da expansão de  $q(x, x_0, u, u_0, \bar{z}, z_0, L)$  que sobrevive a integração pelo fator acima é aquele que contém uma potência em  $\bar{z}$  e uma potência em  $z_0$ . Sendo assim,  $Q^{ba}(x, x_0, u, u_0, L)$  é obtido através de  $q(x, x_0, u, u_0, \bar{z}, z_0, L)$  pela relação

$$q(x, x_0, u, u_0, \bar{z}, z_0, L) \rightarrow \bar{z}^c z_0^d Q^{cd}(x, x_0, u, u_0, L) , \quad (5.46)$$

e precisa satisfazer, em notação matricial, a seguinte equação da difusão

$$\left[ \partial_L - (\kappa\sigma/2) \hat{L}_u^2 + (\mu + \phi) 1 + \Phi^A T^A + u \cdot D \right] Q(x, x_0, u, u_0, L) = 0 , \quad (5.47)$$

onde  $\sigma$  é uma constante dependente da dimensão da esfera  $S^{D-1}$ . Para  $D = 4$ ,  $\sigma = 2/\pi$ , e para  $D = 3$ ,  $\sigma = 1$ .

$$D_\mu = 1 \partial_\mu - ig \Lambda_\mu^A T^A . \quad (5.48)$$

A equação acima está submetida as seguintes condições iniciais,

$$Q(x, x_0, u, u_0, 0) = \delta(x - x_0) \delta(u - u_0) 1 , \quad (5.49)$$

sendo,  $1$  é a matriz identidade  $(N^2 - 1) \times (N^2 - 1)$ . Em termos desta matriz, o bloco fundamental descrito em (5.10) é dado por

$$Q(x, x_0, L) = \int d^{n-1}u Q(x, x_0, u, u, L) , \quad (5.50)$$

o que reduz nosso problema a encontrar a equação de difusão no espaço de coordenadas  $x$ , sabendo que o integrando satisfaz a eq. (5.47). Expandindo  $Q(x, x_0, u, u_0, L)$  tem termos dos autovalores do operador  $\hat{L}_u^2$ ,

$$Q(x, x_0, u, u_0, L) = \sum_l \mathcal{Q}_l(x, x_0, u, u_0, L) , \quad (5.51)$$

cada componente de número quântico  $l$  obedece a equação

$$h_l \mathcal{Q}_l + \mathcal{R}_l = -\partial_L \mathcal{Q}_l , \quad (5.52)$$

onde

$$\sum_{l=0} \mathcal{R}_l = \sum_{l=0} (u \cdot D) \mathcal{Q}_l , \quad (5.53)$$

$$h_l = [\phi + \mu + l(l + D - 2) \kappa\sigma/2] 1 + \Phi^A T^A . \quad (5.54)$$

Repare que da definição de  $\mathcal{R}_l$ , ao usarmos as regras de adição de momento angular e que as componentes de  $u$  possuem  $l = 1$ ,  $\mathcal{R}_0$  depende de  $\mathcal{Q}_1$ , enquanto  $\mathcal{R}_1$  depende de  $\mathcal{Q}_0$  e  $\mathcal{Q}_2$ . Se adotarmos que nossas curvas devam atender o limite semiflexível, isto é  $\kappa$  assume

valores grandes, em outras palavras, a memória em relação a orientação inicial  $u_0$  é perdida para grandes valores de  $L$ , a distribuição das orientações finais de  $u$  serão praticamente isotrópicas. Neste limite, podemos considerar que  $\mathcal{Q}_l \approx 0$  para  $l \geq 2$ , o que torna (5.52) um sistema fechado de equações. Resolver o sistema é equivalente a resolver a equação diferencial

$$O\mathcal{Q}_0 + \partial_L \mathcal{Q}_0 + \frac{\alpha}{\kappa} \partial_L^2 \mathcal{Q}_0 \approx 0, \quad (5.55)$$

$$O = -\frac{\alpha}{\kappa D} D_\mu D_\mu + (\phi + \mu) 1 + \Phi^A T^A, \quad (5.56)$$

onde  $\alpha^{-1} = (D-1)\sigma/2$ . Resolvendo a equação diferencial de segunda ordem em  $L$  no limite semiflexível, as soluções são

$$\mathcal{Q}_0^{(A)}(L) = e^{-LO} \mathcal{Q}_0^{(A)}(0) \quad , \quad \mathcal{Q}_0^{(B)}(L) = e^{-\frac{\kappa}{\alpha} (1 - \frac{\alpha}{\kappa} O)L} \mathcal{Q}_0^{(B)}(0), \quad (5.57)$$

de maneira que a opção  $B$  é suprimida quando comparada a opção  $A$ , uma vez que os autovalores de  $O$  são independentes de  $\kappa$ . A condição inicial é dada por

$$\mathcal{Q}_0(x, x_0, u, u_0, 0) = \Omega_{D-1}^{-1} \delta(x - x_0) 1, \quad (5.58)$$

onde  $\Omega_{D-1}^{-1}$  é o ângulo sólido de uma esfera  $S^{D-1}$ . Portanto, utilizando o resultado acima em conjunto com a equação (5.50), o bloco fundamental no limite semiflexível é dado por

$$Q(x, x_0, L) \approx \langle x | e^{-LO} | x_0 \rangle, \quad (5.59)$$

## 5.5 Teoria efetiva para *loops* extensos

Uma vez determinado o bloco fundamental, a obtenção da teoria efetiva segue diretamente da eq. (5.9), onde

$$\begin{aligned} Z &= \int [D\phi][D\Phi] e^{-W} e^{\sum_a \int_{\mathbb{R}^4} d^4x \langle x | \int_0^\infty \frac{dL}{L} e^{-LO} | x \rangle_{aa}} \\ &= \int [D\phi][D\Phi] e^{-W} e^{-Tr \ln O} = \int [D\phi][D\Phi] e^{-W} (\det O)^{-1}, \end{aligned} \quad (5.60)$$

onde " $Tr$ " significa o traço matricial nos índices de cor e o traço funcional no espaço de coordenadas  $x$ , e foi absorvido um termo constante gerado a partir da integração sobre  $L$ . Desta forma, podemos exponenciar o determinante acima em termos de campos bosônicos adjuntos  $\zeta = \zeta_A T^A$ ,

$$Z = \int [D\phi][D\Phi] e^{-W} \int [D\zeta][D\zeta^\dagger] e^{-\int d^Dx \mathcal{L}(\zeta, \Lambda, \phi, \Phi)}, \quad (5.61)$$

$$\mathcal{L}(\zeta, \Lambda, \phi, \Phi) = \langle D_\mu \zeta, D_\mu \zeta \rangle + m^2 \langle \zeta, \zeta \rangle + \frac{\kappa D}{\alpha} \langle \Phi, [\zeta, \zeta^\dagger] \rangle + \frac{\kappa D}{\alpha} \phi \langle \zeta, \zeta \rangle, \quad (5.62)$$

onde  $m^2 = \frac{D}{\alpha} \kappa \mu$  e a derivada covariante adjunta é definida em respeito ao campo  $\Lambda$ . Ao escolhermos que a interação entre os *loops* seja regida por

$$W = -\frac{1}{\tilde{\lambda}} \int d^D x \langle \Phi, \Phi \rangle - \frac{1}{\tilde{\eta}} \int d^D x \phi^2, \quad (5.63)$$

$\tilde{\lambda} = \frac{\alpha^2}{\kappa^2 D^2} \lambda$ ,  $\tilde{\eta} = \frac{\alpha^2}{\kappa^2 D^2} \eta$ , obtemos a representação de campos para um conjunto de *loops* coloridos que carregam carga de cor adjunta

$$Z = \int [D\zeta][D\zeta^\dagger] e^{-\int d^4 x \mathcal{L}_{ef}(\zeta, \Lambda)}, \quad (5.64)$$

$$\mathcal{L}_{ef}(\zeta, \Lambda) = \langle D_\mu \zeta, D_\mu \zeta \rangle + m^2 \langle \zeta, \zeta \rangle + \frac{\lambda}{4} \langle \zeta \wedge \zeta^\dagger, \zeta \wedge \zeta^\dagger \rangle + \frac{\eta}{4} \langle \zeta, \zeta \rangle^2, \quad (5.65)$$

ou, em termos de pares de campos hermitianos adjuntos,  $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1 + i\psi_2)$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ef}(\zeta, \Lambda) &= \frac{1}{2} \langle D_\mu \psi_I, D^\mu \psi_I \rangle \\ &+ \frac{m^2}{2} \langle \psi_I, \psi_I \rangle + \frac{\lambda}{4} \langle \psi_I \wedge \psi_J, \psi_I \wedge \psi_J \rangle + \frac{\eta}{4} \langle \psi_I, \psi_I \rangle \langle \psi_J, \psi_J \rangle. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Como podemos perceber, este resultado está intimamente relacionado com o modelo apresentado em 4.2, e portanto deve apresentar uma lei da área para o *loop* de Wilson. Entretanto, o desenvolvimento deste resultado nos obriga a escolher quais parâmetros fenomenológicos deveriam ser necessários para descrever a evolução destas estruturas. No próximo capítulo, veremos uma nova fixação de calibre das teorias de Yang-Mills, onde se espera ser possível sobrepujar esta dificuldade e obter informações fenomenológicas sobre defeitos topológicos, tais como vórtices de centro e monopólos, diretamente do funcional gerador da teoria de Yang-Mill pura.

## 6 Detectando vórtices de centro no contínuo a partir da fixação de calibre

Como pode ser visto no capítulo 3, pesquisadores que trabalham com QCD na rede desenvolveram uma fixação de calibre capaz de identificar vórtices de centro. Neste capítulo, inspirados pelas idéias apresentadas, vamos propôr uma nova fixação de calibre capaz de alcançar este mesmo objetivo no espaço contínuo e discutir alguns resultados que podem ser obtidos através da aplicação desta técnica.

### 6.1 O procedimento de fixação de calibre

Nos calibres Laplacianos adjuntos, ao relacionarmos as variáveis de *link* e os campos escalares nos foi permitido impôr a condição de fixação de calibre sobre estes campos auxiliares. Sobre estes campos auxiliares, a detecção de vórtices de centro e outros defeitos topológicos podia ser percebido como defeitos na fixação do calibre. No espaço-tempo contínuo, a relação entre campo de calibre  $\mathfrak{A}_\mu$  e campos hermitianos  $\psi_I$  não será estabelecida por um operador Laplaciano adjunto, mas sim pela minimização de uma ação  $S_H$  que apresente SSB  $SU(N) \rightarrow Z(N)$ ,

$$\left. \frac{\delta S_H}{\delta \psi_I} \right|_{\zeta_I} = 0 \quad , \quad S_H = \int d^4x \frac{1}{2} \langle \mathfrak{D}_\mu \psi_I \rangle^2 + V_H \quad , \quad (6.1)$$

$\mathfrak{D}_\mu \psi_I = \partial_\mu \psi_I - ig[\mathfrak{A}_\mu, \psi_I]$ . Na seção 4.2, apresentamos uma ação que corresponde às características requeridas neste procedimento, sendo assim, iremos adotá-la como ação auxiliar para fixação do calibre. A principal razão para a escolha de (4.31) é o fato de que soluções topológicas, como vórtices de centro e junções entre vórtices de centro e monopólos, são soluções clássicas de energia finita da ação  $S_H$ .

Uma vez que associamos um dado campo de calibre  $N^2 - 1$  campos escalares  $\psi_I$ , o próximo passo é organizar estes campos escalares em uma tupla  $(\psi_1, \dots, \psi_{N^2-1})$  e caracterizar os conceitos de módulo  $(q_1, \dots, q_{N^2-1})$  de uma tupla e fase  $S$  na qual  $\psi_I$  pode ser decomposto como  $\psi_I = S q_I S^{-1}$  para todo  $I$ . Matematicamente, o conceito de módulo e fase são definidos, em geral, para campos complexos ou matrizes através da conhecida decomposição polar. A decomposição polar de uma matriz quadrada complexa  $M$  é da forma

$$M = UQ \quad , \quad (6.2)$$

onde  $U$  é uma matriz unitária e  $Q$  é uma matriz hermitiana definida positiva. Esta decomposição sempre existe, e é única desde que  $M$  seja invertível. A noção de módulo está associada

a matriz  $Q$ , enquanto o ângulo é definido pela matriz  $U$ . No nosso caso de interesse, podemos organizar as componentes da tupla de forma a montar uma matriz  $\Psi$ , cujo os elementos são dados por

$$\Psi|_I^A = \psi_I^A = q_I^B \mathcal{R}(S)|_{BA}, \quad (6.3)$$

onde  $\mathcal{R}(S)$  é uma matriz que pertence a representação adjunta de  $SU(N)$ . Em um caso geral, não há muito sobre o que falar em relação a matriz  $q$ ,  $q|_{IA} = q_I^A$ . Se focarmos o nosso interesse para o grupo de simetria  $SU(2)$ , cuja representação adjunta da álgebra é isomórfica à do grupo  $SO(3)$ , podemos garantir que a  $\mathcal{R}(S)$  é uma matriz ortogonal. Sendo assim, a decomposição representada em (6.3) é equivalente a decomposição polar da matriz  $\Psi$ , e podemos garantir que  $q$  é uma matriz real, simétrica e definida positiva. Infelizmente, este resultado só é válido para o caso  $N = 2$  e para grupos maiores, o conceito de módulo e ângulo deve ser obtido de outra maneira. Com foi visto anteriormente, esta ação  $S_H$  apresenta uma variedade de vácuo totalmente definida a partir de um mapa  $S \in SU(N)$ , sendo assim, o conceito de fase de uma tupla  $(\psi_1, \dots, \psi_{N^2-1})$  pode ser definido a partir da minimização do funcional

$$\sum_I \langle \psi_I - v n_I \rangle^2, \quad (6.4)$$

ou seja, o ângulo é definido através do elemento de  $\mathcal{M}$  mais próximo à tupla considerada. Escrevendo  $\psi_I = \Psi_I^A U n_A U^{-1}$  e realizando a minimização de (6.4) em relação a fase  $U$ , obtemos que a fase de uma tupla é definida a partir da expressão

$$\sum_I [\psi_I, n_I] = 0. \quad (6.5)$$

A condição que determina o módulo de uma tupla pode ser obtida diretamente de (6.5) ao reescrevermos as bases locais a partir de sua definição dada em (4.9). O resultado é

$$\sum_I [q_I, T_I] = 0 \quad , \quad q_I^A f_{AIK} = 0 \forall K, \quad (6.6)$$

o que significa que a matriz  $q$  obtida através da decomposição (6.3) é simétrica para qualquer  $N \geq 2$ .

Portanto, segundo o procedimento descrito acima, dado um campo de calibre  $\mathfrak{A}_\mu$ , a solução  $(\zeta_1, \dots, \zeta_{N^2-1})$  que satisfaz as condições de contorno impostas na seção 4.2 deve ser única e corresponde a um mínimo estável da ação  $S_H$ . Continuando, por causa da SSB, o ângulo polar  $S$  correspondente a  $(\zeta_1, \dots, \zeta_{N^2-1})$  é único, exceto por uma transformação de centro, em todos os pontos do espaço. Uma vez que este fator é global, a sequência,

$$\mathfrak{A}_\mu \rightarrow \zeta_I \rightarrow v \phi_I \rightarrow Ad(S), \quad (6.7)$$

fornece um mapa bem definido de  $\mathfrak{A}_\mu \rightarrow Ad(S)$ . E mais, devido a covariância da equação de campos clássica, a solução do campo transformado de calibre  $\mathfrak{A}_\mu^U$  é dada por  $U \zeta U^{-1}$ , o

qual, segundo a sequência (6.7), está conectado ao mapa  $Ad(US)$ . Ao fixar o calibre, será requerido que  $Ad(S) = Ad(S_0)$ , onde  $S_0$  é o mapa que define as características topológicas do campo de calibre. Por consequência, a fixação de calibre não leva somente à eliminação das configurações equivalentes do campo de calibre, mas também à separação da integral funcional em infinitos setores  $\mathcal{V}(S_0)$ . Obviamente, um destes setores está associados a campos livres de defeitos, e neste setor podemos simplesmente escolher  $S_0 \equiv I$ . Em outros setores,  $S_0$  pode descrever vórtices de centro, onde o mapa  $S_0$  pode ser dado de acordo com a definição da transformação singular que parametriza o vórtice fino (4.2).

## 6.2 Integral funcional fixada de calibre em um setor $\mathcal{V}(S_0)$

Como foi mencionando anteriormente, este procedimento de fixação de calibre separa os campos da teoria de Yang-Mills em setores topologicamente inequivalentes. Sendo assim, a integral funcional da teoria completa pode ser reescrita como

$$Z_{YM} = \sum_{\mathcal{V}(S_0)} Z_{YM}^{(S_0)}, \quad (6.8)$$

onde a soma é tomada sobre os infinitos setores topológicos,

$$Z_{YM}^{(S_0)} = \int_{\mathcal{V}(S_0)} [D\mathfrak{A}_\mu] e^{-S_{YM}(\mathfrak{A})}, \quad (6.9)$$

$$S_{YM}(\mathfrak{A}) = \int d^4x \frac{1}{4} \langle \mathfrak{F}_{\mu\nu}, \mathfrak{F}_{\mu\nu} \rangle, \quad \mathfrak{F}_{\mu\nu} = \frac{i}{g} [\mathfrak{D}_\mu, \mathfrak{D}_\nu], \quad (6.10)$$

é a integral funcional computada sobre os campos que pertencem ao setor  $\mathcal{V}(S_0)$  onde  $\mathfrak{A}_\mu \rightarrow Ad(S)$  e  $S = US_0$ , onde  $U$  é um mapa regular. A solução  $\zeta_I$  da equação de campo (6.1) na presença de  $\mathfrak{A}_\mu$ , pode ser introduzida na integral funcional a partir de técnicas semelhantes às aplicadas no contexto de campos estocásticos (ver referências [37], [38]). Com o objetivo de não modificar o funcional gerador no dado setor, podemos introduzir a identidade

$$1 = \int [D\psi_I] \prod_I \delta(\psi_I - \zeta_I). \quad (6.11)$$

A delta funcional pode ser reescrita como

$$\prod_I \delta(\psi_I - \zeta_I) = \det \left( \frac{\delta^2 S_H}{\delta\psi_J \delta\psi_I} \right) \prod_I \delta \left( \frac{\delta S_H}{\delta\psi_I} \right), \quad (6.12)$$

onde, para o potencial de interesse

$$\frac{\delta V_H}{\delta\psi_I} = \mu^2 \psi_I + \kappa f^{IJK} \psi_J \wedge \psi_K + \lambda \psi_J \wedge (\psi_I \wedge \psi_J), \quad (6.13)$$

$$\frac{\delta^2 V_H}{\delta\psi_J \delta\psi_I} = \mu^2 \delta_{IJ} - 2\kappa f^{IJK} (\psi_K \wedge \cdot) + \lambda [2\psi_J \wedge (\psi_I \wedge \cdot) - \psi_K \wedge (\psi_K \wedge \cdot) \delta_{IJ} - \psi_I \wedge (\psi_J \wedge \cdot)]. \quad (6.14)$$

O fato de introduzirmos uma ação  $S_H$  com SSB nos leva a afirmar que a solução  $\zeta_I$  é única e um mínimo estável da ação. Portanto, esperamos que a expressão (6.12) esteja bem definida quanto a representação de uma delta funcional. A partir do que foi apresentado, a função de partição (6.9) pode ser reescrita como

$$Z_{YM}^{(S_0)} = \int_{\mathcal{V}(S_0)} [D\mathfrak{A}_\mu][D\psi_I][D\xi_I][D\bar{\omega}_I][D\omega_I] e^{-\mathfrak{S}_f} , \quad (6.15)$$

onde  $\mathfrak{S}_f$  é a ação de Yang-Mills ação extendida pela introdução de campos bosônicos adjuntos  $\xi_I$  e fermiônicos  $\bar{\omega}_I, \omega_I$ ,

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_f &= S_{YM}(\mathfrak{A}) \\ &+ \int d^4x \left( \langle \mathfrak{D}_\mu \bar{\omega}_I, \mathfrak{D}_\mu \omega_I \rangle + \langle \bar{\omega}_I, \frac{\delta^2 V_H}{\delta \psi_J \delta \psi_I} \omega_J \rangle \right) \\ &+ \int d^4x \left( \langle \mathfrak{D}_\mu \xi_I, \mathfrak{D}_\mu \psi_I \rangle + \langle \xi_I, \frac{\delta V_H}{\delta \psi_I} \rangle \right) . \end{aligned} \quad (6.16)$$

Apesar de introduzir estes novos campos no funcional gerador, o calibre não foi fixado e eles não introduzem nenhuma Física nova a teoria de Yang-Mills, uma vez que os modos fantasmas são introduzidos com o objetivo de cancelar os modos bosônicos. Para fixar o calibre, é necessário escolher uma direção com a qual todas as tuplas irão se alinhar. Anteriormente, a noção de módulo de uma tupla foi definida sobre o conceito de alinhar-se, na média, com uma tupla da variedade de vácuo. Utilizando este conceito, podemos garantir que as tuplas relevantes para o cálculo da função de partição em um dado setor  $\mathcal{V}(S_0)$  são aquelas da forma  $\psi_I = Sq_I S^{-1}$  e  $f_A(q) = \langle T_A, [q_I, T_I] \rangle = 0$ ,  $S = US_0$ , onde  $U$  é uma transformação regular. A partir daí, podemos escrever a seguinte identidade

$$\int [D\psi_I] F[\psi_I] = \int [DU][Dq_I] \delta(f_A(q)) \det(J(q)) F[Sq_I S^{-1}] , \quad (6.17)$$

$$J(q)|_{AB} = \left. \frac{\partial f_A(q + [\varepsilon, q])}{\partial \varepsilon_B} \right|_{\varepsilon=0} . \quad (6.18)$$

Em nosso caso,  $F[Sq_I S^{-1}]$  pode ser identificado com

$$F[Sq_I S^{-1}] \equiv \int_{\mathcal{V}(S_0)} [D\mathfrak{A}_\mu][D\xi_I][D\bar{\omega}_I][D\omega_I] e^{-\mathfrak{S}_f} , \quad (6.19)$$

onde realizando as transformações de variáveis

$$\mathfrak{A}_\mu = A_\mu^U , \quad \xi_I = b_I^U , \quad \bar{\omega}_I = \bar{c}_I^U , \quad \omega_I = c_I^U , \quad (6.20)$$

as invariâncias dos elementos de volume,  $[DA_\mu^U] = [DA_\mu]$ ,  $[D\bar{c}_I^U] = [D\bar{c}_I]$ ,  $[Dc_I^U] = [Dc_I]$  e  $[Db_I^U] = [Db_I]$ , e da ação  $\mathfrak{S}_f$ , nos permite fatorar o volume infinito  $\int [DU]$ . Dessa forma, o

funcional gerador fixado de calibre é

$$\begin{aligned} Z_{YM}^{(S_0)} &= \mathcal{N} \int [DA_\mu][Dq_I][Db_I][D\bar{c}_I][Dc_I] \times \\ &\times \delta[f_A(q)] \det[J(q)] e^{-S_f} , \end{aligned} \quad (6.21)$$

$$\begin{aligned} S_f &= S_{YM}(A) + \\ &+ \int d^4x \left( \langle D_\mu \bar{c}_I, D_\mu c_I \rangle + \left\langle \bar{c}_I, \frac{\delta^2 V_H}{\delta \psi_J \delta \psi_I} \Big|_{\psi_I=q_I^{S_0}} c_J \right\rangle \right) \\ &+ \int d^4x \left( \langle D_\mu b_I, D_\mu q_I^{S_0} \rangle + \left\langle b_I, \frac{\delta V_H}{\delta \psi_I} \Big|_{\psi_I=q_I^{S_0}} \right\rangle \right) \end{aligned} \quad (6.22)$$

$$q_I^{S_0} = S_0 q_I S_0^{-1} \quad , \quad D_\mu = \partial_\mu - ig[A_\mu, ] . \quad (6.23)$$

A presença de  $S_0$  ocorre devido ao fato de que, em geral, não podemos utilizar o mapa  $S$  para performar transformações de calibre.

### 6.3 Simetria BRST em um setor $\mathcal{V}(S_0)$

Antes de analisar a simetria BRST da ação fixada, podemos notar que a ação  $\mathfrak{S}_f$  em (6.16) é invariante perante as seguintes transformações nilpotentes,

$$s\mathfrak{A}_\mu = 0 \quad , \quad s\psi_I = \omega_I \quad , \quad s\xi_I = 0 \quad , \quad s\bar{\omega}_I = -\xi_I \quad , \quad s\omega_I = 0 . \quad (6.24)$$

Procedimentos equivalentes ao que vamos utilizar aqui podem ser vistos nas referências [39] e [40]. A partir da definição do fantasma de Faddeev-Popov  $sU = Uc$ ,  $sU^{-1} = -cU^{-1}$ ,  $sS_0 = 0$  e da relação entre os campos antes e depois de fixar o calibre, podemos concluir que

$$s\mathfrak{A}_\mu = sA_\mu^U = s(UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{g}U\partial_\mu U^{-1}) = 0 , \quad (6.25)$$

implica que

$$UsA_\mu U^{-1} = \frac{i}{g}U(\partial_\mu c)U^{-1} + UcA_\mu U^{-1} - UA_\mu cU^{-1} . \quad (6.26)$$

Procedendo da mesma forma para todos os outros campos da teoria, concluimos que as seguintes transformações são uma simetria de  $S_f$ ,

$$sA_\mu = \frac{i}{g}D_\mu c , \quad (6.27)$$

$$sq_I^{S_0} = [q_I^{S_0}, c] + c_I , \quad (6.28)$$

$$sb_I = [b_I, c] , \quad (6.29)$$

$$s\bar{c}_I = -\{\bar{c}_I, c\} - b_I , \quad (6.30)$$

$$sc_I = -\{c_I, c\} \quad (6.31)$$

$$sc = -\frac{1}{2}\{c, c\} = -\frac{1}{2}c_a c_b [n_a^{S_0}, n_b^{S_0}] . \quad (6.32)$$

Diferentemente do caso (6.24), a demonstração da nilpotência para estes campos não é trivial. Primeiramente, para demonstrar que  $s^2 A_\mu = 0$ ,

$$\begin{aligned}
s^2 A_\mu &= \frac{i}{g} s D_\mu c = \frac{i}{g} \left( \partial_\mu s c - i g [s A_\mu, c] - i g \{A_\mu, s c\} \right) \\
&= \frac{i}{g} \left( -\frac{1}{2} \partial_\mu \{c, c\} + \{D_\mu c, c\} + \frac{1}{2} i g [A_\mu, \{c, c\}] \right) \\
&= \frac{i}{g} \left( -\frac{1}{2} \partial_\mu \{c, c\} + \{\partial_\mu c, c\} - i g \{[A_\mu, c], c\} + \frac{1}{2} i g [A_\mu, \{c, c\}] \right) \\
&= \frac{i}{g} \left( -\frac{1}{2} \{c, \partial_\mu c\} + \frac{1}{2} \{\partial_\mu c, c\} - i g \{[A_\mu, c], c\} + \frac{1}{2} i g [A_\mu, \{c, c\}] \right). \quad (6.33)
\end{aligned}$$

No termo envolvendo as derivadas do campo fantasma,

$$\begin{aligned}
\left\{ -\{c, \partial_\mu c\} + \{\partial_\mu c, c\} \right\}_C &= i(-f^{ABC} c^A \partial_\mu c^B + f^{ABC} \partial_\mu c^A c^B) \\
&= i(-f^{ABC} c^A \partial_\mu c^B + f^{BAC} \partial_\mu c^B c^A) = 0, \quad (6.34)
\end{aligned}$$

onde foi utilizada a regra de anticomutação pela troca de duas componentes de campos de Grassmann, em conjunto com a antisimetria das constantes de estrutura. No termo envolvendo o campo de calibre,

$$\begin{aligned}
\left\{ -\{[A_\mu, c], c\} + \frac{1}{2} [A_\mu, \{c, c\}] \right\}_E &= f^{ABD} f^{DCE} A_\mu^A c^B c^C - \frac{1}{2} f^{BCD} f^{ADE} A_\mu^A c^B c^C \\
&= \frac{1}{2} (f^{ABD} f^{DCE} + f^{ABD} f^{DCE} - f^{BCD} f^{ADE}) A_\mu^A c^B c^C \\
&= \frac{1}{2} (f^{DAB} f^{DCE} + f^{ABD} f^{DCE} + f^{DBC} f^{DAE}) A_\mu^A c^B c^C \\
&= \frac{1}{2} (-f^{DCA} f^{DBE} + f^{ABD} f^{DCE}) A_\mu^A c^B c^C \\
&= \frac{1}{2} (-f^{DCA} f^{DBE} A_\mu^A c^B c^C + f^{ACD} f^{DBE} A_\mu^A c^C c^B) = 0, \quad (6.35)
\end{aligned}$$

onde utilizamos a mesma propriedade do caso anterior e a identidade de Bianchi para as constantes de estrutura. Portanto, está demonstrado que  $s^2 A_\mu = 0$ . Para a transformação do campo  $q_I^{S_0}$ , temos que

$$\begin{aligned}
s^2 q_I^{S_0} &= s[q_I^{S_0}, c] + s c_I = [s q_I^{S_0}, c] + [q_I^{S_0}, s c] + s c_I \\
&= [[q_I^{S_0}, c], c] + \{c_I, c\} - \frac{1}{2} [q_I^{S_0}, \{c, c\}] - \{c_I, c\} \\
&= [[q_I^{S_0}, c], c] - \frac{1}{2} [q_I^{S_0}, \{c, c\}], \quad (6.36)
\end{aligned}$$

mais uma vez, ao analisarmos cada componente separadamente,

$$\{s^2 q_I^{S_0}\}_E = - \left( f^{ABD} f^{DCE} - \frac{1}{2} f^{BCD} f^{ADE} \right) q_I^{S_0} |^A c^B c^C = 0, \quad (6.37)$$

como já foi visto em (6.35). Para todos os outros campos, as demonstrações da nilpotência da transformação  $s$  é equivalente a demonstração para o campo  $q_I^{S_0}$ . Desta forma, podemos garantir que  $s$  é uma transformação nilpotente. Ainda podemos concluir que, uma vez que todas as transformações BRST descritas acima são combinações de translações e rotações infinitesimais, os elementos de volume  $[DA_\mu]$ ,  $[Dq_I]$ , ... são invariantes perante essa transformação. As transformações definidas em (6.27) - (6.32), nos permitem reescrever  $S_f$  de maneira trivialmente invariante

$$S_f = S_{YM} - \int d^4x s \left\langle \bar{c}_I, \frac{\delta S_H}{\delta \psi_I} \Big|_{\psi_I=q_I^{S_0}} \right\rangle. \quad (6.38)$$

Para demonstrar a equivalência entre ambas as formulações, podemos escrever o integrando da seguinte forma

$$\left\langle \bar{c}_I, \frac{\delta S_H}{\delta \psi_I} \Big|_{\psi_I=q_I^{S_0}} \right\rangle = \left\langle D_\mu \bar{c}_I, D_\mu q_I^{S_0} \right\rangle + \left\langle \bar{c}_I, \frac{\delta V_H}{\delta \psi_I} \Big|_{\psi_I=q_I^{S_0}} \right\rangle, \quad (6.39)$$

ao atuarmos a transformação BRST no segundo termo do lado direito da equação acima, onde a derivada do potencial é dada por (6.14)

$$\begin{aligned} -s \left\langle \bar{c}_I, \frac{\delta V_H}{\delta \psi_I} \Big|_{\psi_I=q_I^{S_0}} \right\rangle &= \left\langle -s \bar{c}_I, \frac{\delta V_H}{\delta \psi_I} \Big|_{\psi_I=q_I^{S_0}} \right\rangle + \left\langle \bar{c}_I, s \frac{\delta V_H}{\delta \psi_I} \Big|_{\psi_I=q_I^{S_0}} \right\rangle \\ &= \left\langle (\{\bar{c}_I, c\} + b_I), \frac{\delta V_H}{\delta \psi_I} \Big|_{\psi_I=q_I^{S_0}} \right\rangle + \left\langle \bar{c}_I, s \frac{\delta V_H}{\delta \psi_I} \Big|_{\psi_I=q_I^{S_0}} \right\rangle. \end{aligned} \quad (6.40)$$

A atuação da transformação BRST sobre o potencial pode ser calculada termo a termo

$$s(\mu^2 q_I^{S_0}) = \mu^2 ([q_I^{S_0}, c] + \delta_{IJ} c_J), \quad (6.41)$$

$$\begin{aligned} s(\kappa f^{IJK} q_J^{S_0} \wedge q_K^{S_0}) &= \kappa f^{IJK} (([q_J^{S_0}, c] + c_J) \wedge q_K^{S_0} + q_J^{S_0} \wedge ([q_K^{S_0}, c] + c_K)) \\ &\quad 2\kappa f^{IJK} ([q_J^{S_0}, c] \wedge q_K^{S_0} - q_K^{S_0} \wedge c_J), \end{aligned} \quad (6.42)$$

$$\begin{aligned} s(\lambda q_J^{S_0} \wedge (q_I^{S_0} \wedge q_J^{S_0})) &= \lambda ([q_J^{S_0}, c] \wedge (q_I^{S_0} \wedge q_J^{S_0}) + q_J^{S_0} \wedge ([q_I^{S_0}, c] \wedge q_J^{S_0}) + q_J^{S_0} \wedge (q_I^{S_0} \wedge [q_J^{S_0}, c]) \\ &\quad + 2q_J^{S_0} \wedge (q_I^{S_0} \wedge c_J) - q_K^{S_0} \wedge (q_K^{S_0} \wedge c_J) \delta_{IJ} - q_I^{S_0} \wedge (q_J^{S_0} \wedge c_J)], \end{aligned} \quad (6.43)$$

Podemos reparar que os termos

$$\left\langle \bar{c}_I, \frac{\delta^2 V_H}{\delta \psi_J \delta \psi_I} \Big|_{\psi_I=q_I^{S_0}} c_J \right\rangle + \left\langle b_I, \frac{\delta V_H}{\delta \psi_I} \Big|_{\psi_I=q_I^{S_0}} \right\rangle \quad (6.44)$$

presentes na ação  $S_f$  já surgem deste cálculo inicial. Sendo assim, para demonstrar a equivalência entre as formulações, devemos mostrar que todos os outros termos provenientes de (6.40) se anulam. Analisando o termo proporcional a  $\mu^2$

$$\langle \{\bar{c}_I, c\}, q_I^{S_0} \rangle + \langle \bar{c}_I, [q_I^{S_0}, c] \rangle = i(f^{ABC} + f^{CBA}) \bar{c}_I^A c^B q_I^{S_0|C} = 0. \quad (6.45)$$

Analisando o termo proporcional a  $\kappa$

$$\begin{aligned} \langle \{\bar{c}_I, c\}, f^{IJK} q_J^{S_0} \wedge q_K^{S_0} \rangle + \langle \bar{c}_I, 2f^{IJK} [q_J^{S_0}, c] \wedge q_K^{S_0} \rangle = \\ i f^{IJK} (f^{ABE} f^{CDE} + 2f^{CBE} f^{EDA}) \bar{c}_I^A c_B q_J^{S_0} |^C q_K^{S_0}|^D, \end{aligned} \quad (6.46)$$

trabalhando com as constantes de estrutura

$$\begin{aligned} f^{IJK} (f^{ABE} f^{CDE} + 2f^{CBE} f^{EDA}) = f^{IJK} (f^{EAB} f^{ECD} + f^{ECB} f^{EDA} + f^{CBE} f^{EDA}) \\ = f^{IJK} (-f^{EDB} f^{EAC} + f^{CBE} f^{EDA}), \end{aligned} \quad (6.47)$$

onde, realizando as trocas dos índices  $C \leftrightarrow D$  e  $J \leftrightarrow K$  no primeiro termo e utilizando o fato de que os campos  $q^{S_0}$  são bosônicos,

$$i(-f^{IKJ} f^{ECB} f^{EAD} + f^{IJK} f^{CBE} f^{EDA}) \bar{c}_I^A c_B q_J^{S_0} |^C q_K^{S_0}|^D = 0, \quad (6.48)$$

Analisando o termo proporcional a  $\lambda$

$$\begin{aligned} \langle \{\bar{c}_I, c\}, q_J^{S_0} \wedge (q_I^{S_0} \wedge q_J^{S_0}) \rangle + \langle \bar{c}_I, [q_J^{S_0}, c] \wedge (q_I^{S_0} \wedge q_J^{S_0}) + q_J^{S_0} \wedge ([q_I^{S_0}, c] \wedge q_J^{S_0}) \rangle \\ + \langle \bar{c}_I, q_J^{S_0} \wedge (q_I^{S_0} \wedge [q_J^{S_0}, c]) \rangle = i(f^{ABF} f^{CDG} f^{EGF} + f^{EBF} f^{CDG} f^{FGA} \\ + f^{CBF} f^{FDG} f^{EGA} + f^{DBF} f^{CFG} f^{EGA}) \bar{c}_I^A c_B q_I^{S_0} |^C q_J^{S_0}|^D q_J^{S_0}|^E, \end{aligned} \quad (6.49)$$

trabalhando com as constantes de estrutura

$$\begin{aligned} f^{CDG} (f^{ABF} f^{EGF} + f^{EBF} f^{FGA}) = f^{CDG} (f^{FAB} f^{FEG} + f^{FEB} f^{FGA}) = -f^{CDG} f^{FGB} f^{FAE}, \\ (f^{CBF} f^{FDG} + f^{DBF} f^{CFG}) f^{EGA} = (f^{FCB} f^{FDG} + f^{FDB} f^{FGC}) f^{EGA} = -f^{FGB} f^{FCD} f^{EGA}, \\ f^{CDG} f^{FGB} f^{FAE} + f^{FGB} f^{FCD} f^{EGA} = f^{CDF} f^{GFB} f^{GAE} + f^{FGB} f^{FCD} f^{EGA} = 0. \end{aligned} \quad (6.50)$$

Com isso finalizamos a demonstração de que

$$-s \left\langle \bar{c}_I, \frac{\delta V_H}{\delta \psi_I} \Big|_{\psi_I=q_I^{S_0}} \right\rangle = \left\langle \bar{c}_I, \frac{\delta^2 V_H}{\delta \psi_J \delta \psi_I} \Big|_{\psi_I=q_I^{S_0}} c_J \right\rangle + \left\langle b_I, \frac{\delta V_H}{\delta \psi_I} \Big|_{\psi_I=q_I^{S_0}} \right\rangle. \quad (6.51)$$

Agora, basta demonstrar que

$$-s \langle D_\mu \bar{c}_I, D_\mu q_I^{S_0} \rangle = \langle -s(D_\mu \bar{c}_I), D_\mu q_I^{S_0} \rangle + \langle D_\mu \bar{c}_I, s(D_\mu q_I^{S_0}) \rangle = \langle D_\mu \bar{c}_I, D_\mu c_I \rangle + \langle D_\mu b_I, D_\mu q_I^{S_0} \rangle. \quad (6.52)$$

Primeiramente, podemos perceber que para um campo  $\Phi$  que obedece uma álgebra bosônica ou fermiônica,

$$s(D_\mu \Phi) = \partial_\mu s\Phi + g s(A_\mu \wedge \Phi) = D_\mu s\Phi + g(sA_\mu) \wedge \Phi = D_\mu s\Phi + iD_\mu c \wedge \Phi, \quad (6.53)$$

o que implica que

$$\begin{aligned} \langle -s(D_\mu \bar{c}_I), D_\mu q_I^{S_0} \rangle &= \langle -D_\mu s\bar{c}_I - iD_\mu c \wedge \bar{c}_I, D_\mu q_I^{S_0} \rangle \\ &= \langle D_\mu \{\bar{c}_I, c\} - iD_\mu c \wedge \bar{c}_I, D_\mu q_I^{S_0} \rangle + \langle D_\mu b_I, D_\mu q_I^{S_0} \rangle, \end{aligned} \quad (6.54)$$

$$\langle D_\mu \bar{c}_I, s(D_\mu q_I^{S_0}) \rangle = \langle D_\mu \bar{c}_I, D_\mu [q_I^{S_0}, c] + iD_\mu c \wedge q_I^{S_0} \rangle + \langle D_\mu \bar{c}_I, D_\mu c_I \rangle. \quad (6.55)$$

E portanto, para finalizar a demonstração, basta mostrar que

$$\langle D_\mu \{ \bar{c}_I, c \} - i D_\mu c \wedge \bar{c}_I, D_\mu q_I^{S_0} \rangle + \langle D_\mu \bar{c}_I, D_\mu [q_I^{S_0}, c] + i D_\mu c \wedge q_I^{S_0} \rangle = 0. \quad (6.56)$$

O primeiro passo é entender

$$D_\mu (\Phi \wedge c) = -i D_\mu (\Phi c \pm c \Phi) = -i D_\mu \Phi \wedge c - i \Phi \wedge D_\mu c, \quad (6.57)$$

logo, o lado esquerdo da equação (6.56) pode ser reescrita como

$$\langle \{ D_\mu \bar{c}_I, c \}, D_\mu q_I^{S_0} \rangle + \langle D_\mu \bar{c}_I, [D_\mu q_I^{S_0}, c] \rangle = i (f^{ABC} + f^{CBA}) (D_\mu \bar{c}_I)^A c_B (D_\mu \bar{q}_I^{S_0})^C = 0. \quad (6.58)$$

Desta forma, está mostrado que ambas as formulações são equivalentes.

Para completar a investigação sobre a invariância da simetria BRST, somente nos resta avaliar a invariância do termo que introduz a condição de módulo de uma tupla. Podemos representá-lo como

$$\begin{aligned} \delta[f_A(q)] \det[J(q)] &= \int [Db][D\bar{c}][Dc] \\ &\times \exp - \int d^4x \left( \langle b, [n_I^{S_0}, q_I^{S_0}] \rangle + \langle \bar{c}, [n_I^{S_0}, [q_I^{S_0}, c]] \rangle \right), \end{aligned} \quad (6.59)$$

onde  $n_I^{S_0} = S_0 T_I S_0^{-1}$ . É então proposta a simetria BRST dos campos restantes como

$$sb = 0 \quad , \quad s\bar{c} = -b, \quad (6.60)$$

a qual não é uma simetria do termo exponenciado de (6.59) devido a atuação da transformação BRST em  $q_I^{S_0}$ . Por outro lado, o termo extra é dado por

$$s \left( \langle b, [n_I^{S_0}, q_I^{S_0}] \rangle + \langle \bar{c}, [n_I^{S_0}, [q_I^{S_0}, c]] \rangle \right) = \left( \langle b, [n_I^{S_0}, c_I] \rangle + \langle \bar{c}, [n_I^{S_0}, [c_I, c]] \rangle \right). \quad (6.61)$$

Uma vez realizada a integração sobre os campos fantasmas  $\bar{c}_I$  e  $c_I$ , podemos perceber que os termos responsáveis por quebrar a simetria BRST no expoente de (6.59) não produzem nenhuma nova contribuição ao funcional gerador  $Z_{YM}^{(S_0)}$ . Para evidenciar a existência desta simetria, podemos incluir no integrando de (6.59) o fator  $\exp(-\int d^4x \langle \bar{c}, [n_I^{S_0}, c_I] \rangle)$ , o qual pode ser expandido como  $1 - \int d^4x \langle \bar{c}, [n_I^{S_0}, c_I] \rangle + \dots$ . Ao integrarmos todos os campos fantasmas, fica claro que apenas o primeiro termo da série contribui para o cálculo do funcional gerador. Sendo assim, também podemos escrever

$$\delta[f_A(q)] \det[J(q)] = \int [Db][D\bar{c}][Dc] e^{\int d^4x s \langle \bar{c}, [n_I^{S_0}, q_I^{S_0}] \rangle}, \quad (6.62)$$

e obter

$$\begin{aligned} Z_{YM}^{(S_0)} &= \mathcal{N} \int_{\mathcal{V}(S_0)} [DA_\mu][Dq_I][Db_I][D\bar{c}_I][Dc_I][Db][D\bar{c}][Dc] \\ &\times e^{-S_{YM} + \int d^4x s \left( \langle \bar{c}, [n_I^{S_0}, q_I^{S_0}] \rangle + \left\langle \bar{c}_I, \frac{\delta S_H}{\delta \psi_I} \Big|_{\psi_I = q_I^{S_0}} \right\rangle \right)}. \end{aligned} \quad (6.63)$$

## 6.4 Condições de regularidade e simetria BRST

No setor definido pelos campos de calibre livres de defeitos  $\mathcal{V}(I)$ , onde  $q_I^{S_0} = q_I$  nenhuma condição de regularidade sobre os campos é necessária. Entretanto, em quaisquer outros setores, ainda é necessário investigar quais os efeitos de requerer a invariância BRST nas regiões onde estão definidas as condições de regularidade sobre os campos. Discussões intimamente relacionadas com a proposta nesta seção são conhecidas no contexto de efeito Casimir, onde a verificação da simetria BRST sobre as condições de contorno é um dos responsáveis por modificar os estados assintóticos da teoria livre de fronteiras [41].

Por exemplo, vamos considerar variáveis  $A_\mu$  no setor que contenha vórtices de centro fechados. Portanto, podemos escolher  $S_0$  de acordo com a definição dada em (4.2), e geradores de Cartan em conjunto com vetores raiz como os geradores da álgebra de Lie. Utilizando a notação condensada  $\vec{\beta} = 2N\vec{\omega}$ , as bases locais são definidas a partir de

$$S_0 T_p S_0^{-1} = T_p \quad , \quad S_0 E_\alpha S_0^{-1} = \cos(\vec{\beta} \cdot \vec{\alpha}) \chi E_\alpha + \sin(\vec{\beta} \cdot \vec{\alpha}) \chi E_{-\alpha}. \quad (6.64)$$

De acordo com [30], para termos campos  $\psi_I$  bem definidos é necessário impor a seguinte condição de regularidade sobre o núcleo do vórtice de centro,

$$\langle E_\gamma, q_I^{S_0} \rangle|_n = 0 \quad , \quad \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} \neq 0. \quad (6.65)$$

Isso significa que certas componentes não diagonais de  $q_I$  precisam ser nulas sobre estes pontos do espaço. Aplicando a transformação BRST (6.28) em (6.65) e requerindo a invariância da condição de regularidade

$$\langle E_\gamma, [q_I^{S_0}, c] \rangle|_n + \langle E_\gamma, c_I \rangle|_n = 0 \quad , \quad \vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} \neq 0. \quad (6.66)$$

Ao expandir  $c = p + r$ ,  $q_I = p_I + r_I$ , onde  $p, p_I$  contém os elementos da base de Lie  $T_p$  e  $E_\sigma$  com  $\vec{\beta} \cdot \vec{\sigma} = 0$ , enquanto  $r, r_I$  contém  $E_\gamma$  com  $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} \neq 0$ , notamos que  $q_I^{S_0} = p_I + r_I^{S_0}$ . Sobre o núcleo do vórtice, a regularidade impõe que  $r_I^{S_0}|_n = 0$ , logo  $q_I^{S_0}|_n = p_I$ . Utilizando as propriedades da decomposição de Cartan, podemos perceber que  $[p_I, p]$  é formado apenas por combinações de termos associados às direções  $E_\sigma$ , e portanto, este termo não contribui para o produto escalar presente em (6.66). Como consequência, a manutenção da simetria BRST nas regiões onde estão impostas as condições de regularidade requer que as componentes não diagonais  $E_\gamma$  de  $c$  e  $c_I$  também sejam nulas sobre a dada região.

Em um setor topologicamente não trivial, as bases locais são as bases naturais para decompor os campos deste setor, e como vimos, algumas direções destas bases não são bem definidas em todos os pontos do espaço. Sendo assim, condições de regularidade devem ser impostas sobre certas componentes em todos os campos da ação (6.63).

## 6.5 Independência em relação aos parâmetros do potencial

Como foi discutido no capítulo 2, para a fixação de calibre  $\partial_\mu A_\mu^a = 0$ , um dos quesitos para que uma teoria, após fixado o calibre, seja considerada consistente é que seus resultados não dependam de qualquer parâmetro introduzido durante o processo de fixação. Durante o processo de fixação do calibre discutido neste capítulo, alguns parâmetros foram introduzidos durante a descrição do potencial  $V_H$ , e são estes os parâmetros os quais estaremos interessados em demonstrar a invariância do funcional gerador. Como vimos anteriormente, a demonstração deste resultado depende da construção de Identidade de Ward para um funcional gerador definido acima de uma ação estendida  $S_f^{ext.}$ . Esta ação estendida deve apresentar duas características. Primeiramente,  $S_f^{ext.}$  deve ser invariante perante as transformações BRST estendidas, ou seja,  $S_f^{ext.}$  deve ser invariante perante as transformações BRST definidas para  $S_f$  adicionadas pelas transformações dos parâmetros do potencial

$$s\mu^2 = M^2 \quad , \quad sM^2 = 0, \quad (6.67)$$

$$s\kappa = K \quad , \quad sK = 0, \quad (6.68)$$

$$s\lambda = \Lambda \quad , \quad s\Lambda = 0. \quad (6.69)$$

A segunda característica que  $S_f^{ext.}$  deve atender é recair sobre a ação fixada de calibre no limite em que fizermos  $M^2 = K = \Lambda = 0$ . Portanto, a demonstração da invariância dos parâmetros está intimamente relacionada a demonstrar a existência de  $S_f^{ext.}$ .

Ao aplicarmos a transformação BRST estendida sobre a ação dada em (6.63), podemos perceber que o único termo onde há parâmetros do potencial é aquele associado a ação  $S_f$ . Sendo assim, a ação fixada não é invariante via as transformações BRST estendidas devido ao termo extra

$$sS_f = \left\langle \bar{c}_I, \frac{\delta^2 \tilde{V}_H}{\delta\psi_J \delta\psi_I} \Big|_{\psi_I=q_I^{S_0}} c_J \right\rangle + \left\langle b_I, \frac{\delta \tilde{V}_H}{\delta\psi_I} \Big|_{\psi_I=q_I^{S_0}} \right\rangle, \quad (6.70)$$

onde

$$\tilde{V}_H = \frac{M^2}{2} \langle \psi_I, \psi_I \rangle + \frac{K}{3} f^{IJK} \langle \psi_I, \psi_J \wedge \psi_K \rangle + \frac{\Lambda}{4} \langle \psi_I \wedge \psi_J, \psi_I \wedge \psi_J \rangle, \quad (6.71)$$

ou seja,  $\tilde{V}_H$  possui a mesma estrutura funcional do potencial  $V_H$ , porém é definido através da transformações BRST dos parâmetros de  $V_H$ . O próximo passo é determinar que termo  $\tilde{S}$  deve ser adicionado na ação  $S_f$  de maneira que

$$S_f^{ext.} = S_f + \tilde{S}, \quad (6.72)$$

possua uma simetria BRST estendida. Vale a pena notar que ao escrevermos  $S_f^{ext.}$  desta forma, a segunda característica necessária para demonstrar a invariância dos parâmetros é

naturalmente atendida se  $\tilde{S} = 0$  quando  $M^2 = K = \Lambda = 0$ . Da imposição da invariância perante as transformações BRST extendidas podemos concluir que  $s\tilde{S} = -sS_f$  e, conhecendo a igualdade (6.51), obtemos

$$S_f^{ext.} = S_f + \int d^4x \left\langle \bar{c}_I, \frac{\delta \tilde{V}_H}{\delta \psi_I} \Big|_{\psi_I = q_I^{S_0}} \right\rangle. \quad (6.73)$$

Sendo assim, ao escrevermos a Identidade de Ward extendida e seguirmos os passos apresentados no capítulo 2, podemos demonstrar que

$$\frac{\partial Z_{YM}^{(S_0)}}{\partial \mu^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial Z_{YM}^{(S_0)}}{\partial \kappa} = 0 \quad , \quad \frac{\partial Z_{YM}^{(S_0)}}{\partial \lambda} = 0. \quad (6.74)$$

Devido a inexistência de uma simetria BRST que atenda a todas as condições de contorno, o resultado acima só é garantido para um dado setor  $\mathcal{V}\mathcal{S}_I$ . Felizmente, a forma funcional das transformações BRST entre os campos é a mesma, logo, o resultado acima pode ser aplicado separadamente em cada setor. Desta forma, nos é garantido que o funcional gerador completo da teoria de Yang-Mills fixada de calibre é independente dos parâmetros do potencial  $V_H$ .

## 6.6 Introdução das condições de regularidade no funcional gerador de um setor topologicamente não trivial

A imposição de condições sobre os campos de uma teoria sobre uma dada região, ou regiões, do espaço é geralmente estudada no contexto do efeito Casimir [42]. Neste conhecido efeito, a introdução de fronteiras reais, tais como placas condutoras em uma teoria eletromagnética, modifica o espectro de energia da teoria. Em nosso sistema, não existem fronteiras físicas, mas sim condições de regularidade sobre os campos que pertencem aos setores topologicamente não triviais da teoria. Nesta seção não iremos resolver o problema para um funcional gerador  $Z_{YM}^{S_0}$ , mas motivar como as condições de regularidade devem ser introduzidas no funcional gerador. Este método foi desenvolvido em [43] no contexto do efeito Casimir e utiliza as deltas funcionais como estruturas matemáticas responsáveis para introduzir estas condições.

Analisando o caso mais simples de um campo escalar de massa  $m$  que deve atender a condição de Dirichlet em uma região  $\mathfrak{P}$ , ou seja,

$$Z(J) = \int [D\phi] \prod_{x \in \mathfrak{P}} \delta(\phi(x)) \exp(-S), \quad (6.75)$$

$$S = \int dx \frac{1}{2} \phi(x) (-\partial^2 + m^2) \phi(x) + J(x) \phi(x), \quad (6.76)$$

o primeiro passo é reescrever a delta funcional a partir de sua representação de Fourier,

$$\prod_{x \in \mathfrak{P}} \delta(\phi(x)) = \int [Db] \exp\left(i \int_{\mathfrak{P}} dz b(z) \phi(f(z))\right), \quad (6.77)$$

onde a região  $\mathfrak{P}$  é parametrizada pela função  $f(z)$ , ou seja  $x = f(z)$  se  $x \in \mathfrak{P}$ . Devido ao fato de que a ação do campo escalar é quadrática, o funcional gerador desta teoria pode ser reescrito como

$$Z(J) = \int [D\phi][Db] \exp(-\tilde{S}), \quad (6.78)$$

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= \frac{1}{2} \int dx \phi(x) (-\partial^2 + m^2) \phi(x) + \frac{1}{2} \int_{\mathfrak{P}} dz \int_{\mathfrak{P}} dz' b(z) K(z, z') b(z) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int dx \int dy J(x) D^{\mathfrak{P}}(x, y) J(y), \end{aligned} \quad (6.79)$$

onde

$$K(z, z') = \int dx \int dy \delta(x - f(z)) D(x, y) \delta(y - f(z')) = D(f(x), f(y)), \quad (6.80)$$

sendo  $D(x, y)$  a função de dois pontos da teoria livre, ou seja,

$$(-\partial^2 + m^2) D(x, y) = \delta(x - y), \quad (6.81)$$

e o propagador de uma teoria com condições de fronteira é dado por

$$D^{\mathfrak{P}}(x, y) = D(x, y) - \int_{\mathfrak{P}} dz \int_{\mathfrak{P}} dz' D(x, f(z)) K^{-1}(z, z') D(f(z'), y). \quad (6.82)$$

A obtenção da inversa de  $K$  sobre  $\mathfrak{P}$  não é uma tarefa trivial. Por esta razão, os propagadores de uma teoria com condições de contorno só são conhecidos para casos onde a geometria da fronteira é simples, como por exemplo, placas paralelas ou esferas. Realizando as integrais Gaussianas em (6.78), o funcional gerador pode ser representado como

$$\begin{aligned} Z(J) &\propto [\det(-\partial^2 + m^2)]^{-1/2} [\det(K(z, z'))]^{-1/2} \times \\ &\quad \exp\left(-\frac{1}{2} \int dx \int dy J(x) D^{\mathfrak{P}}(x, y) J(y)\right), \end{aligned} \quad (6.83)$$

onde o primeiro fator é exatamente o mesmo que deve obtido a partir do cálculo para a teoria ausente de fronteiras. O segundo fator é mais interessante e está intimamente relacionado com a energia de Casimir deste sistema. Uma vez que ele surge a partir da integração sobre os campos auxiliares  $b(z)$ , este determinante deve depender de características geométricas da região  $\mathfrak{P}$ , como seu volume, área, comprimento, curvatura, etc.

Portanto, a análise de um setor  $Z_{YM}^{S_0}$  específico pode nos ser útil na determinação de quais parâmetros fenomenológicos são relevantes na descrição do defeito definido por este setor. Em particular, estaremos interessados em impôr condições de regularidade em curvas fechadas e descobrir a relação do funcional gerador com o comprimento e curvatura das mesmas, de acordo com o modelo do capítulo 5.

## 6.7 Equação de cópias

Como vimos, para realizar a fixação do calibre através deste procedimento, é necessária a introdução de deltas de Dirac funcionais em dois momentos distintos. A primeira acontece ao relacionarmos o campo de calibre  $\mathcal{A}_\mu$  a um conjunto de campos  $\psi_I$  através da minimização da ação  $S_H$ , enquanto a segunda ocorre ao restringirmos o domínio de integração à campos  $\psi_I$  que satisfazem a condição de módulo em relação a uma direção privilegiada da variedade de vácuo.

Para a primeira delta de Dirac introduzida, a existência de cópias de Gribov significa que uma tupla  $(\zeta_1, \dots, \zeta_{N^2-1})$  é solução da equação de campo para dois ou mais campos de calibre conectados por transformações regulares. Ou seja,

$$\left. \frac{\delta S_H(\mathcal{A}_\mu)}{\delta \psi_I} \right|_{\zeta_I} = 0 \Rightarrow \left. \frac{\delta S_H(\mathcal{A}_\mu^U)}{\delta \psi_I} \right|_{\zeta_I} = 0, \quad (6.84)$$

o que, devido a covariância da equação de campos, requer que

$$\zeta_I = U \zeta_I U^{-1}, \forall I = 1, 2, \dots, N^2 - 1. \quad (6.85)$$

Esta condição é muito forte e dificilmente existe uma solução da equação de campos que a atenda, pois requer que  $N^2 - 1$  parâmetros do espaço de cor atendam  $(N^2 - 1)^2$  condições.

No contexto da segunda delta de Dirac introduzida, a existência, ou não, de cópias de Gribov está relacionada com a possibilidade de mais de uma tupla  $(q_1, \dots, q_{N^2-1})$ , conectadas por transformações na adjunta, atenderem a definição de módulo  $f_A(q) = 0$ . Em outras palavras,

$$\langle n_A^{S_0}, [n_I^{S_0}, q_I^{S_0}] \rangle = 0 \Rightarrow \langle n_A^{S_0}, [n_I^{S_0}, U q_I^{S_0} U^{-1}] \rangle = 0. \quad (6.86)$$

o que resulta em  $N^2 - 1$  condições que devem ser atendidas por  $N^2 - 1$  parâmetros. Ou seja, a condição para existência de cópias neste contexto é menos rigorosa do que a condição do caso anterior. Não apenas isso, mas qualquer cópia proveniente do processo anterior, também satisfaz a equação de cópias da condição de fixação de calibre. Sendo assim, a análise da equação de cópias (6.86) é suficiente para discussão deste problema. A equação de cópias infinitesimais é dada por

$$\alpha_K q_{IJ} f_{BKJ} f_{BAI} = 0, \forall A = 1, 2, \dots, N^2 - 1, \quad (6.87)$$

onde  $q_I^{S_0} = q_{IJ} n_J^{S_0}$ . Utilizando o fato de que a matriz  $q_{IJ}$  é simétrica pela troca dos índices  $I \leftrightarrow J$ , podemos reescrever a equação de cópias para o grupo de simetria  $SU(2)$ , como

$$\begin{pmatrix} q_{22} + q_{33} & -q_{12} & -q_{13} \\ -q_{12} & q_{11} + q_{33} & -q_{23} \\ -q_{13} & -q_{23} & q_{11} + q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = 0,$$

ou, em notação matricial  $Q\alpha = 0$ . Deste modo, se a matriz  $Q$  for invertível em todos os pontos do espaço, a solução para  $\alpha$  é única e trivial, ou seja  $\alpha = 0$ . Portanto, se o determinante de  $Q$  é diferente de zero, podemos concluir que a configuração do campo de calibre associada a tupla  $(q_1, q_2, q_3)$  não apresenta cópias de Gribov. Em particular, estaremos interessados em verificar a existência de cópias para duas configurações: as configurações perturbativas e aquelas que possuem vórtices de centro estáticos e infinitos.

### 6.7.1 Vácuo perturbativo

Como vimos na seção 4.2, a variedade de vácuo clássico na fase de SSB é dada por

$$\mathcal{M} = \{\psi_I = v n_I, n_I = S T_I S^{-1}, S \in SU(N)\}. \quad (6.88)$$

Neste caso, a matriz  $Q$  é simplesmente  $Q_v = \text{diag}(2v, 2v, 2v)$ , a qual claramente é invertível. Como estamos interessados na existência de cópias em nível perturbativo, flutuações em torno deste vácuo são permitidas. Desta forma, para configurações perturbativas em torno do vácuo, a matriz  $Q$  é dada por

$$Q_{pert.} = \begin{pmatrix} 2v + \eta & -\eta & -\eta \\ -\eta & 2v + \eta & -\eta \\ -\eta & -\eta & 2v + \eta \end{pmatrix}$$

onde  $|\eta| \ll |v|$ . A priori não há qualquer justificativa para que todas as perturbações sejam idênticas, e utilizamos este exemplo apenas por simplicidade. O cálculo do determinante nos retorna

$$\det Q_{pert.} = 8v^3 + Av^2\eta + Bv\eta^2 + C\eta^3 \neq 0, \quad (6.89)$$

onde  $A, B, C$  são constantes reais. Com este resultado, podemos garantir que a classe de configurações de campo perturbativas não possua cópias de Gribov após a implementação do procedimento de fixação de calibre

### 6.7.2 Vórtices de centro estáticos e infinitos

Como vimos no capítulo 4, as soluções do tipo vórtice de centro grosso precisam satisfazer certas condições onde as bases de cor estão mal definidas. No caso de  $SU(2)$ , isso significa que  $q_{ab}|_n. = q_{3a}|_n. = q_{a3}|_n. = 0$ . Sobre a curva que define o vórtice de centro fino, a matriz  $Q$  é dada por

$$Q_{VC}|_n. = \begin{pmatrix} q_{33}|_n. & 0 & 0 \\ 0 & q_{33}|_n. & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

onde podemos perceber que  $Q_{VC}$  não é invertível. Este resultado está relacionado com a impossibilidade, sobre estes pontos, de definir univocamente uma tupla  $(\psi_1, \psi_2, \psi_3)$  que deve estar alinhada com uma tupla convenientemente escolhida da variedade de vácuo. Apesar do resultado apontar a possibilidade de existências de cópias de Gribov, só podemos garantir que a transformação  $U$  seja uma transformação de calibre se verificarmos que  $Q_{VC}$  não é invertível em uma variedade  $\mathcal{P}$  em torno dos pontos definidos pelo núcleo do vórtice. Sobre os pontos desta variedade esperamos que

$$q_{ab}|_{\mathcal{P}} = q_{3a}|_{\mathcal{P}} = q_{a3}|_{\mathcal{P}} = f(\epsilon) \quad , \quad \epsilon = 0 \rightarrow f(\epsilon) = 0, \quad (6.90)$$

$$q_{33}|_{\mathcal{P}} = q_{33}|_n + g(\epsilon) \quad , \quad \epsilon = 0 \rightarrow g(\epsilon) = 0, \quad (6.91)$$

onde  $\epsilon$  é uma medida de distância de um ponto da variedade  $\mathcal{P}$  em relação ao núcleo do vórtice de centro. As funções  $f(\epsilon)$  e  $g(\epsilon)$  devem ser diferenciáveis sobre os pontos da variedade  $\mathcal{P}$ . Sendo assim, sobre esta variedade

$$Q_{VC}|_{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} q_{33}|_{\mathcal{P}} + f(\epsilon) & -f(\epsilon) & -f(\epsilon) \\ -f(\epsilon) & q_{33}|_{\mathcal{P}} + f(\epsilon) & -f(\epsilon) \\ -f(\epsilon) & -f(\epsilon) & 2f(\epsilon) \end{pmatrix}$$

onde podemos garantir que  $Q_{VC}|_{\mathcal{P}}$  é invertível desde que  $f(\epsilon) \neq 0$  e  $q_{33}|_{\mathcal{P}} \approx v$  para  $\epsilon$  pequeno, porém não nulo. De acordo com este resultado,  $\alpha$  deve ser nulo em um conjunto de pontos ao redor do núcleo do vórtice de centro. Uma vez que as transformações de calibre devem ser contínuas, a única possibilidade permitida para  $\alpha$  sobre o núcleo do vórtice é  $\alpha = 0$ . Portanto, podemos garantir que a necessidade em impôr condições de regularidade sobre os campos não introduz cópias de Gribov no sistema. Por uma questão de rigorosidade, a equação de cópias também deveria ser avaliada em distâncias intermediárias em relação ao núcleo do vórtice de centro. Não é esperado que a equação de cópias seja satisfeita nesta região, uma vez que não devemos encontrar problemas em definir o conjunto de tuplas sobre o qual a condição de módulo se aplica.

## 7 Conclusão

A partir da revisão dos resultados obtidos numericamente, motivamos que os vórtices de centro são configurações essenciais para que possamos compreender o mecanismo que gera a lei da área para o *loop* de Wilson. A dominância de centro nos mostrou que a informação necessária para o surgimento da corda confinante entre o par  $qq'$  se encontra no centro do grupo de simetria. Na rede, não ficamos limitados a possuir cargas do par  $qq'$  na representação fundamental de  $SU(N)$ , de fato, as cargas podem ser introduzidas em qualquer representação desejada. O efeito conhecido como *N-ality* explicita que, no regime infravermelho da teoria, o comportamento para a tensão da corda confinante é totalmente dominado pelo centro da representação escolhida para as cargas do quark e do antiquark. Em particular, cargas introduzidas em qualquer representação com centro trivial são completamente blindadas por glúons virtuais, o que resulta na quebra da corda em dois estados ligados entre quark e glúon, ao invés de dois pares  $qq'$ . A técnica de remoção dos vórtices de centro é certamente uma das evidências mais poderosas em relação à importância destas estruturas para o entendimento do confinamento. Como foi apresentado, a eliminação dos vórtices das configurações da rede resultou na perda da tensão da corda, e conseqüentemente, a perda da fase confinante da teoria.

Em um segundo momento, as idéias apresentadas na rede foram traduzidas para o espaço-tempo contínuo através da introdução do conceito de transformações singulares. Estas transformações de  $SU(N)$  são as responsáveis por modificar o *loop* de Wilson por um elemento de centro, e ao transformar um campo de calibre, introduzem um vórtice de centro fino sobre a configuração existente. A possibilidade de definir um vórtice livre da instabilidade de Savvidy-Nielsen-Olesen, e a transição contínua do vórtice de centro fino em um objeto massivo e regular, foram apresentadas com o objetivo de solidificar uma nova forma de descrever os vórtices de centro grossos, conhecida como deformação diagonal do vórtice de centro fino. Este procedimento se baseia na ideia de que configurações do campo de calibre que descrevem defeitos topológicos devem ser expandidas na álgebra de cor através de bases locais. Desta forma, a informação sobre uma configuração que descreve um defeito magnético estaria introduzida de maneira natural no campo de calibre. Este conceito estava presente na definição dos vórtices de centro finos, porém era perdida quando se discutia as configurações não singulares.

A quantização das teorias de calibre e a relevância de configurações topológicas foram analisadas em dois processos distintos. O primeiro envolveu a caracterização de um *ensemble* de objetos unidimensionais capazes de interagir entre si e com qualquer campo não-Abeliano

externo em um espaço  $4D$ , e o segundo foi a introdução de uma nova técnica de fixação de calibre nas teorias de Yang-Mills capaz de identificar e especificar a contribuição de setores topologicamente inequivalentes para a função de partição da teoria. Em um primeiro momento, a utilização de procedimentos estocásticos nos permitiu definir um peso estatístico para cada configuração. Ao realizarmos a soma sobre todas as configurações com o dado peso, na verdade estamos realizando a integração funcional sobre configurações que fazem parte deste *ensemble*. Por esta razão, este primeiro procedimento está intimamente relacionado com o cálculo do funcional gerador de um setor  $\mathcal{V}(S_0)$  obtido através do segundo método de estudo. O processo de somas sobre *ensemble* de configurações topológicas é comum na rede, porém nunca havia sido considerada a possibilidade de realização no espaço-tempo contínuo de primeiros princípios, ou seja, diretamente do funcional gerador da teoria de Yang-Mills. Com o procedimento de fixação de calibre apresentado no capítulo 6, não só podemos analisar a soma de um tipo de configuração topológica, mas de todas as configurações topológicas desejadas. Este procedimento nos permitirá, pela primeira vez, comparar alguns resultados bem estabelecidos, obtidos através de simulações numéricas, com aqueles gerados diretamente no espaço contínuo.

No trabalho "*Coloured loops in 4D and their effective field representation*", discutido no capítulo 5, fizemos uma análise controlada sobre como lidar com um *ensemble* de loops interagentes que carregam carga de cor, e obtivemos a teoria efetiva que descreve este sistema. Como podemos perceber, a teoria efetiva que surge deste problema está intimamente relacionada com a ação de Yang-Mills-Higgs com campos adjuntos, apresentada na seção 4.2, assim como a teoria generalizada, proposita em [32], para descrição do modelo do supercondutor dual para o vácuo da teoria de Yang-Mills através da soma sobre um *ensemble* de vórtices de centro correlacionados com monopólos externos. Por esta razão, a integração sobre monopolos não Abelianos que possuem dinâmica, pode apresentar um cenário alternativo ou complementar ao cenário do confinamento gerado através da proliferação de vórtices de centro. Na rede, sistemas envolvendo correntes de vórtices de centro e monopólos foram estudados [44] e foi mostrado que estes objetos estão fortemente correlacionados, ou seja, os monopólos se localizam na borda dos vórtices de centro. No espaço-tempo contínuo, o modelo discutido em 4.2 apresenta soluções onde a correlação entre monopólos não abelianos e vórtices de centro está naturalmente introduzida, conhecida como junções. Uma vez que junções são soluções de energia mínima para a ação de Yang-Mills-Higgs, o procedimento de fixação de calibre discutido no artigo "*Detecting topological sectors in continuum Yang-Mills theory and the fate of BRST symmetry*" também será capaz de separar a integral funcional em um conjunto de setores onde estas configurações estarão representadas. Fenomenologicamente, as junções descrevem uma estrutura onde monopólos não Abelianos são responsáveis por conectar cordas de centro que possuem cargas de cor diferentes e criar um objeto de cor

branca conhecido como méson híbrido. Portanto, no âmbito da teoria de Yang-Mills pura, este procedimento de fixação de calibre será capaz de dar resposta ao questionamento deixado em aberto sobre qual o papel desempenhado por estas configurações para o surgimento da fase confinante.

Diferentemente dos chamados calibres covariantes, onde a condição de fixação é imposta sobre o campo de calibre, o procedimento estudado nesta tese impõe a condição sobre um conjunto de  $N^2 - 1$  campos escalares  $\psi_I$  relacionados ao campo de calibre  $\mathfrak{A}_\mu$  através da minimização da ação de Yang-Mills-Higgs. Ao rearranjarmos os campos escalares em tuplas  $(\psi_1, \dots, \psi_{N^2-1})$ , a fase desta ação onde ocorre a SSB  $SU(N) \rightarrow Z(N)$  nos permite correlacionar  $\mathfrak{A}_\mu$  com um mapa  $S \in SU(N)$  através de uma espécie de decomposição polar para elementos da álgebra de Lie. O ponto principal para identificação dos diversos setores topológicos se encontra neste passo. A integral funcional deve somar sobre todas as configurações possíveis para o campo de calibre, e portanto, configurações do tipo vórtice de centro, monopólos ou arranjos formados por ambos objetos, não podem ser ignorados. Estes defeitos topológicos estão associados a mapas  $S$  contendo singularidades que não podem ser eliminadas da teoria via transformações regulares, ou seja, via transformações de calibre. Sendo assim, a fixação de calibre deve requerir que qualquer mapa  $S$  seja transformado em um dado mapa referência  $S_0$  definido de acordo com o tipo de configuração descrita pelo campo de calibre. Durante este processo, a integral funcional é particionada em infinitos setores topologicamente inequivalentes  $\mathcal{V}(S_0)$ , onde a fixação de calibre pode ser implementada ao requerir que a fase regular  $U$  associada a  $S = US_0$  seja a identidade. Com o objetivo de assegurar que nenhuma Física da teoria auxiliar de Yang-Mills-Higgs modifique a Física da teoria de Yang-Mills, este processo introduz versões dos campos fantasmas que possuem um grau de liberdade de sabor, os quais devem ser responsáveis por cancelar os modos provenientes dos campos escalares adjuntos  $\psi_I$ . Como de costume, o procedimento de fixação de calibre também introduz os fantasmas de Faddeev-Popov  $c, \bar{c}$ , os quais devem cancelar qualquer contribuição proveniente dos modos não propagantes do campo de calibre. Também demonstramos que após a fixação de calibre, que apesar de cada setor possuir uma simetria nilpotente própria, a sua estrutura funcional das transformações é preservada em todos os setores. Por um lado, o fato de não conhecermos uma simetria BRST global nos impede de discutirmos os estados físicos da teoria,  $|phys\rangle$ , através da definição de uma carga conservada  $Q_{BRST}$ , tal que

$$Q_{BRST}|phys\rangle = 0 \quad , \quad |phys\rangle \neq Q_{BRST}|n - phys\rangle, \quad (7.1)$$

sendo  $|n - phys\rangle$  um estado da teoria onde  $Q_{BRST}|n - phys\rangle \neq 0$ . Por outro lado, o conhecimento de uma simetria BRST definida sobre cada setor é importante em outro aspecto, como a demonstração da consistência em nível quântico da teoria. Através da aplicação das Iden-

tidades de Ward obtidas para cada setor, fomos capazes de demonstrar que os parâmetros provenientes do potencial da ação de Yang-Mills-Higgs não interferem nos resultados físicos que podem ser obtidos da teoria. Outro ponto que pode ser analisado é a renormazabilidade de cada setor  $Z_{YM}^{(S_0)}$  através do método da Renormalização Algébrica [45]. Basicamente, a obtenção das Identidades de Ward nos permite trabalhar cada setor como uma teoria independente e com as suas próprias condições de regularidade. De maneira independente, também foi realizada uma análise preliminar sobre a existência de cópias de Gribov. Mostramos que a equação de cópias pode ser obtida para qualquer grupo  $SU(N)$  e, em particular para o grupo  $SU(2)$  possui um tratamento muito agradável. Neste âmbito motivamos que, assim como os calibres Laplacianos adjuntos, este calibre deve ser livre da existência de cópias de Gribov.

Como pontos a serem analisados futuramente, esta tese de doutorado nos deixa alguns pontos em aberto. Primeiramente, a possibilidade de reescrever a ação fixada de calibre de forma que os fantasmas de Faddeev-Popov  $c, \bar{c}$  apresentem propagadores suaves. Como pode ser visto, este propagador não apresenta termos de derivada, e uma descrição desta forma pode dificultar o entendimento quanto a eliminação dos graus de liberdade não físicos do campo de calibre. Outro ponto de interesse no futuro é a análise dos setores de topologia não trivial. Nesta tese motivamos o procedimento a ser adotado nestes setores através de um resultado já conhecido para implementação, no funcional gerador, de condições sobre os campos em determinadas regiões do espaço. Realizado o estudo de cada setor, o funcional gerador da teoria de Yang-Mills completo poderá ser entendido como a soma sobre um *ensemble* de setores topologicamente inequivalentes, de maneira semelhante ao resultado obtido em [10].

# APÊNDICE A – Introdução à Teoria de Grupos

Um grupo é definido como todo conjunto  $G$  formado pelos elementos  $(a, b, c, d, \dots)$  que apresenta, perante uma regra de multiplicação  $*$ , as seguintes propriedades:

1. Fechamento: Se  $a \in G$  e  $b \in G$ , então  $c = a * b \in G$ .
2. Associativa:  $a * (b * c) = (a * b) * c$ .
3. Existência da identidade: Existe um elemento  $I \in G$  tal que  $a * I = I * a = a$  para todo  $a \in G$ .
4. Inversa: Para todo elemento  $a \in G$  existe o elemento  $a^{-1}$  tal que  $a * a^{-1} = a^{-1} * a = I$ .

A partir destes axiomas também é possível definir o conceito de subgrupo. Um subgrupo  $H$  de um grupo  $G$  é um subconjunto deste grupo que também atende aos quatro axiomas enunciados acima. Como podemos perceber, a comutação entre os elementos do grupo ( $a * b = b * a$ ) não faz parte dos axiomas acima. Portanto, podemos classificar os grupos quanto à regra de comutação entre seus elementos. Os grupos onde todos os elementos comutam entre si são classificados como Abelianos, e, os grupos que a propriedade comutativa não é atendida, são chamados não-Abelianos. Aos grupos não Abelianos ainda é permitida a existência de subconjuntos onde os elementos podem comutar entre si, e até mesmo, com todos os elementos do grupo. O subgrupo de um grupo não Abeliano, onde todos seus elementos comutam com todos os elementos do grupo  $G$ , é conhecido como centro do grupo,  $Z(G)$ .

Para aplicação na Física, uma classe de grupos é particularmente interessante. Estes grupos são conhecidos como grupos de Lie, que são grupos contínuos sobre os quais os métodos analíticos usuais podem ser aplicados, apesar da definição abstrata que envolve o conceito de grupo. Um exemplo de grupo de Lie que nos acompanha desde o estudo da Física Básica é o grupo  $U(1)$ , nos quais os elementos  $U(\alpha) \in U(1)$  podem ser representados como

$$U(\alpha) = \exp(i\alpha(x)), \quad (\text{A.1})$$

ou seja, descrevem transformações através da multiplicação por uma fase, ou transformações de calibre no eletromagnetismo. De maneira geral, um elemento  $U(\vec{\alpha})$  de um grupo de Lie pode ser representado como uma matriz a partir do mapa exponencial

$$U(\alpha) = \exp(i\vec{\alpha} \cdot \vec{T}) = I + i\alpha_j T_j + \dots, \quad (\text{A.2})$$

onde  $\vec{T}$  é um conjunto de operadores hermitianos linearmente independentes, os quais são conhecidos como geradores do grupo. Em termos destes geradores se define a álgebra de Lie

$$[T_j, T_k] = i f_{jk}^l T_l, \quad (\text{A.3})$$

onde  $f^{ljk}$  é conhecido como constante de estrutura. Assim como os grupos, as álgebras de Lie podem ser classificadas de acordo com as suas propriedades. Uma álgebra de Lie  $g$  é dita:

- compacta, se o grupo  $G$  é uma variedade compacta;
- semi-simples, se nenhum dos seus geradores comuta com todos os outros, ou seja, o grupo  $G$  não possui um subgrupo  $U(1)$  invariante;
- simples ou simplesmente conexo, se é o grupo  $G$  é semi-simples e seus geradores não podem ser divididos em duas álgebras mutuamente comutantes.

Sobre álgebras de Lie semi-simples, é possível definir univocamente uma condição de normalização entre seus geradores

$$\text{tr}(T_i, T_j) = \lambda \delta_{ij}, \quad (\text{A.4})$$

onde  $\lambda$  é uma constante. A partir da definição da álgebra do grupo (A.3) e da normalização entre geradores (A.4), temos que

$$f_{ljk} = -\frac{i}{\lambda} \text{tr}\{[T_l, T_j]T_k\}. \quad (\text{A.5})$$

A partir de (A.3) podemos garantir que as constantes de estrutura são antisimétricas em relação aos índices inferiores. A propriedade (A.5) nos assegura que as constantes de estruturas de álgebras de Lie semi-simples são totalmente antissimétricas em relação a permutações não cíclicas dos índices. Outra propriedade conhecida das constantes de estrutura é que elas também satisfazem uma Identidade de Jacobi própria. A partir da Identidade de Jacobi usual,

$$[T_j, [T_k, T_n]] + [T_n, [T_j, T_k]] + [T_k, [T_n, T_j]] = 0, \quad (\text{A.6})$$

e da definição da álgebra de um grupo (A.3), segue que

$$f_{jk}^l f_{nl}^m + f_{nj}^l f_{kl}^m + f_{kn}^l f_{jl}^m = 0. \quad (\text{A.7})$$

Percebeu-se então, que um conjunto de matrizes  $T_j$ , com elementos  $T_j|_k^m = -i f_{jk}^m$ , satisfazem a relação de comutação (A.3). Isso significa que é possível representar a álgebra de um grupo a partir das suas constantes de estrutura. Esta representação é conhecida como representação adjunta. A representação adjunta apresenta uma série de características interessantes.

Particularmente estaremos interessados no produto fechado  $\wedge$  entre de dois elementos  $\xi$  e  $\theta$  na representação adjunta da álgebra de  $SU(N)$ ,

$$\xi \wedge \theta \equiv -i[\xi, \theta], \quad (\text{A.8})$$

e na métrica de Killing, um bilinear invariante definido como

$$\langle \xi, \theta \rangle = \text{tr}(Ad(\xi) Ad(\theta)) \quad , \quad \langle \xi \rangle^2 = \langle \xi, \xi \rangle \quad (\text{A.9})$$

onde  $Ad(\xi)$  é um mapa de  $\xi$  na representação adjunta deste elemento da álgebra. Uma vez que este bilinear é definido em termos do traço, a simetria perante a inversão dos índices do grupo é garantida. A partir da normalização (A.4) para geradores na representação adjunta  $\text{tr}(Ad(T_i)Ad(T_j)) = \delta_{ij}$ , podemos definir

$$\langle T_i, T_j \rangle = \delta_{ij} \quad , \quad f_{ikl}f_{jkl} = \delta_{ij}. \quad (\text{A.10})$$

## A.1 Decomposição de Cartan

Uma álgebra de Lie compacta e simplesmente conexa pode ser decomposta em termos de geradores diagonais  $H_q$ ,  $q = 1, \dots, r$ , responsáveis por gerar o subgrupo de Cartan  $\mathcal{H}$ , e geradores não diagonais  $E_a$  definidos pelas raízes  $\vec{a} = (a_1, \dots, a_r)$ , satisfazendo as seguintes condições de comutação

$$[H_q, H_p] = 0 \quad , \quad [H_q, E_a] = a_q E_a \quad , \quad [E_a, E_{-a}] = a_q T_q,$$

$$[E_a, E_b] = N_{ab} E_{a+b} \quad \text{se} \quad \vec{a} + \vec{b} \neq 0, \quad (\text{A.11})$$

onde  $N_{ab} = 0$  se  $\vec{a} + \vec{b}$  não é uma raiz. Em termos desta decomposição, os geradores hermitianos podem ser escritos como

$$T_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_a + E_{-a}) \quad , \quad T_{\vec{a}} = \frac{-i}{\sqrt{2}}(E_a - E_{-a}). \quad (\text{A.12})$$

Os pesos de uma dada representação da álgebra de Lie  $\vec{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_r)$  são definidos como os autovalores dos geradores diagonais em relação a um dado autovetor  $\vec{v}$ , ou seja,

$$H_q v_i = \omega_q v_i \quad (\text{A.13})$$

A estrutura da álgebra de Lie para esta decomposição será estudada com mais detalhes para os grupos  $SU(2)$  e  $SU(3)$ .

## A.2 $SU(N)$

Uma das classes de grupos mais importantes para a Física de Partículas e Campos são os chamados grupos unitários especiais, ou  $SU(N)$ . O grupo  $SU(N)$  é aquele formado por matrizes unitárias de  $N \times N$  com determinante 1, ou seja,  $U^\dagger U = U U^\dagger = 1$  e  $\det(U) = 1$ . Diversas propriedades são conhecidas sobre estas classes de grupo. As mais importantes para esta tese são:

- Os geradores de  $SU(N)$  são um conjunto formado por  $N^2 - 1$  matrizes com traço nulo;
- A álgebra de  $SU(N)$  tem dimensão  $N^2 - 1$ , onde  $N - 1$  geradores são diagonais e  $N(N - 1)$  são não-diagonais;
- O centro de  $SU(N)$  é o grupo  $Z(N) = \{z \in Z(N) / z = e^{i\frac{2\pi n}{N}} \mathbf{I}, n = 1, 2, \dots, N\}$ , onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade  $N \times N$ .

Para álgebras de  $SU(N)$ , os pesos da representação fundamental podem ser definidos de forma a atender as seguintes condições

$$\vec{\omega}_q \cdot \vec{\omega}_q = \frac{N-1}{2N^2} \quad \text{e} \quad \vec{\omega}_q \cdot \vec{\omega}_p = -\frac{1}{2N^2} \quad (\text{A.14})$$

se  $p \neq q$ . As raízes positivas se relacionam com os pesos da seguinte forma

$$\vec{a}_{qp} = \vec{\omega}_q - \vec{\omega}_p, \quad (\text{A.15})$$

onde definimos que  $\vec{\omega}_q > \vec{\omega}_p$  e as raízes satisfazem a condição  $\text{veca} \cdot \vec{a} = 1/N$ .

### A.2.1 $SU(2)$

O grupo  $SU(2)$  é conhecido por representar a simetria de calibre da interação nuclear fraca do Modelo Padrão da Física de Partículas. Na sua representação fundamental, os geradores atendem às regras de comutação

$$[T_a, T_b] = i\epsilon_{abc} T_c, \quad (\text{A.16})$$

onde  $\epsilon_{abc}$  é o símbolo de Levi-Civita e os geradores são definidos como  $T_i = \frac{\sigma_i}{2}$ , onde  $\sigma_i$  são as matrizes de Pauli usuais, ou seja,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Em termos da decomposição de Cartan, primeiramente podemos perceber que  $r = 1$ . Definindo  $H_1 = \frac{\sigma_3}{2\sqrt{2}}$ , os pesos da representação representação fundamental de  $SU(2)$  são  $\vec{\omega}_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

e  $\vec{\omega}_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ . Como  $r = 1$ , a raiz positiva de  $SU(2)$  é um vetor de uma única componente, ou seja, um número real positivo. Os geradores não diagonais são

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podemos notar que estes geradores nada mais são do que os geradores escada para partículas de momento angular total  $J = 1/2$  definidos em cursos de Mecânica Quântica. Isso acontece porque a representação fundamental do grupo  $SU(2)$  também pode ser conhecida por ser o grupo de simetria de partículas de spin  $1/2$ . Para definir a raiz de  $SU(2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

o que implica  $[H_1, E_1] = \frac{1}{\sqrt{2}}E_1$ , ou seja,  $\vec{a}_{12} = 1/\sqrt{2} = \vec{\omega}_1 - \vec{\omega}_2$ .

### A.2.2 $SU(3)$

Este é o grupo de simetria da Cromodinâmica Quântica. Ao longo desta tese, este é o grupo no qual estaremos nos baseando ao analisar as simetrias da Teoria de Yang-Mills. Em termos das conhecidas matrizes de Gell-Mann  $\lambda_a$ ,

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

os geradores da representação fundamental de  $SU(3)$  são definidos como  $T_a = \frac{\lambda}{2}$ . As constantes de estruturas não nulas são

$$f_{123} = 1,$$

$$f_{147} = f_{165} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{376} = 1/2,$$

$$f_{458} = f_{678} = \sqrt{3}/2,$$

e permutações das mesmas.

Em termos da decomposição de Cartan, podemos perceber que  $r = 2$ , implicando que as raízes desta álgebra são vetores com duas componentes. Os geradores diagonais são dados por  $H_1 = \frac{\lambda_3}{2\sqrt{3}}$  e  $H_2 = \frac{\lambda_8}{2\sqrt{3}}$ . Os pesos da representação fundamental são dados por

$$\omega_{\vec{1}} = (1/2\sqrt{3}, 1/6) \quad , \quad \omega_{\vec{1}} = (-1/2\sqrt{3}, 1/6) \quad , \quad \omega_{\vec{1}} = (0, -1/3) \quad (\text{A.17})$$

e as raízes positivas dadas por

$$\vec{a}_{13} = (1/2\sqrt{3}, 1/2) \quad , \quad \vec{a}_{23} = (-1/2\sqrt{3}, 1/2) \quad , \quad \vec{a}_{12} = (1/\sqrt{3}, 0) . \quad (\text{A.18})$$

# Referências

- [1] GREENSITE, Jeff. Introduction. In: **An Introduction to the Confinement Problem**. Springer, Berlin Heidelberg, 2010.
- [2] T HOOFT, Gerardus. On the phase transition towards permanent quark confinement. **Nuclear Physics: B**, v. 138, n. 1, p. 1-25, 1978.
- [3] T HOOFT, Gerardus. Topology of the gauge condition and new confinement phases in non-Abelian gauge theories. **Nuclear Physics B**, v. 190, p. 455-478, 1981.
- [4] WILSON, Kenneth G. Confinement of quarks. **Physical Review D**, v. 10, n. 8, p. 2445, 1974;
- [5] BANDER, Myron. Theories of quark confinement. **Physics Reports**, v. 75, n. 4, p. 205-286, 1981.
- [6] POLITZER, H. David. Asymptotic freedom: An approach to strong interactions. **Physics Reports**, v. 14, n. 4, p. 129-180, 1974.
- [7] GROSS, David J.; WILCZEK, Frank. Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories. **Physical Review Letters**, v. 30, n. 26, p. 1343, 1973.
- [8] BALI, Gunnar S. QCD forces and heavy quark bound states. **Physics Reports**, v. 343, n. 1, p. 1-136, 2001.
- [9] KRATOCHVILA, Slavo; DE FORCRAND, Philippe. Observing string breaking with Wilson loops. **Nuclear Physics B**, v. 671, p. 103-132, 2003.
- [10] OXMAN, L. E.; SANTOS-ROSA, G. C.; TEIXEIRA, B. F. I. Coloured loops in 4D and their effective field representation. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, v. 47, n. 30, p. 305401, 2014.
- [11] OXMAN, L. E.; SANTOS-ROSA, G. C. Detecting topological sectors in continuum Yang-Mills theory and the fate of BRST symmetry. **Physical Review D**, v. 92, n. 12, p. 125025, 2015.
- [12] YANG, Chen-Ning; MILLS, Robert L. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. **Physical Review**, v. 96, n. 1, p. 191, 1954.
- [13] BECCHI, Carlo; ROUET, Alain; STORA, Raymond. Renormalization of gauge theories. **Annals of Physics**, v. 98, n. 2, p. 287-321, 1976.

- [14] IOFA, Mikhail Zinov'evich; TYUTIN, Igor Viktorovich. Gauge invariance of spontaneously broken non-Abelian theories in the Bogolyubov-Parasyuk-Hepp-Zimmermann method. **Theoretical and Mathematical Physics**, v. 27, n. 1, p. 316-322, 1976.
- [15] GRIBOV, Vladimir Naumovich. Quantization of non-Abelian gauge theories. **Nuclear Physics B**, v. 139, n. 1-2, p. 1-19, 1978.
- [16] SINGER, Isadore M. Some remarks on the Gribov ambiguity. **Communications in Mathematical Physics**, v. 60, n. 1, p. 7-12, 1978.
- [17] DEL DEBBIO, L. et al. Detection of center vortices in the lattice Yang-Mills vacuum. **Physical Review D**, v. 58, n. 9, p. 094501, 1998.
- [18] DEL DEBBIO, L. et al. Center dominance and  $Z_2$  vortices in SU (2) lattice gauge theory. **Physical Review D**, v. 55, n. 4, p. 2298, 1997.
- [19] FABER, Manfred; GREENSITE, Jeff; OLEJNIK, Stefan. Direct laplacian center gauge. **Journal of High Energy Physics**, v. 2001, n. 11, p. 053, 2001.
- [20] DE FORCRAND, Philippe; D'ELIA, Massimo. Relevance of center vortices to QCD. **Physical Review Letters**, v. 82, n. 23, p. 4582, 1999.
- [21] VINK, Jeroen C. Investigation of Laplacian gauge fixing for U (1) and SU (2) gauge fields. **Physical Review D**, v. 51, n. 3, p. 1292, 1995.
- [22] VINK, Jeroen C.; WIESE, Uwe-Jens. Gauge fixing on the lattice without ambiguity. **Physics Letters B**, v. 289, n. 1-2, p. 122-126, 1992.
- [23] DE FORCRAND, Ph; PEPE, M. Center vortices and monopoles without lattice Gribov copies. **Nuclear Physics B**, v. 598, n. 3, p. 557-577, 2001.
- [24] ALEXANDROU, C.; DE FORCRAND, Ph; D'ELIA, M. The role of center vortices in QCD. **Nuclear Physics A**, v. 663, p. 1031c-1034c, 2000.
- [25] ENGELHARDT, M. et al. Deconfinement in SU (2) Yang-Mills theory as a center vortex percolation transition. **Physical Review D**, v. 61, n. 5, p. 054504, 2000.
- [26] ENGELHARDT, M.; REINHARDT, H. Center projection vortices in continuum Yang-Mills theory. **Nuclear Physics B**, v. 567, n. 1, p. 249-292, 2000.
- [27] OXMAN, L. E. Diagonal deformations of thin center vortices and their stability in Yang-Mills theories. **Journal of High Energy Physics**, v. 2011, n. 7, p. 1-20, 2011.

- [28] SAVVIDY, G. K. Infrared instability of the vacuum state of gauge theories and asymptotic freedom. **Physics letters B**, v. 71, n. 1, p. 133-134, 1977. NIELSEN, N K; OLESEN, P. An unstable Yang-Mills field mode. **Nuclear Physics B**, v. 144, n. 2-3, p. 376-396, 1978.
- [29] SANTOS-ROSA, G. C.; Vórtices de Centro nas Teorias de Yang-Mills. Dissertação de mestrado defendida em 28/02/2013 e disponível no endereço: <<http://if.uff.br/pt/teses-pradua/521>>.
- [30] OXMAN, L. E. Confinement of quarks and valence gluons in SU (N) Yang-Mills-Higgs models. **Journal of High Energy Physics**, v. 3, 2013.
- [31] OXMAN, L. E.; VERCAUTEREN, D. Exploring center strings in S U (2) and S U (3) relativistic Yang-Mills-Higgs models. **Physical Review D**, v. 95, n. 2, p. 025001, 2017.
- [32] DE LEMOS, A. L. L.; OXMAN, L. E.; TEIXEIRA, B. F. I. Derivation of an Abelian effective model for instanton chains in 3D Yang-Mills theory. **Physical Review D**, v. 85, n. 12, p. 125014, 2012.
- [33] FREDRICKSON, Glenn. **The equilibrium theory of inhomogeneous polymers**. Oxford University Press on Demand, 2006.
- [34] BALACHANDRAN, A. P. et al. Classical description of a particle interacting with a non-Abelian gauge field. **Physical Review D**, v. 15, n. 8, p. 2308, 1977.
- [35] BARDAKCI, K.; SAMUEL, S. Local field theory for solitons. **Physical Review D**, v. 18, n. 8, p. 2849, 1978.
- [36] TEIXEIRA, B. F. I.; Equações de difusão para objetos unidimensionais no contexto das teorias de Yang-Mills. Tese de doutorado defendida em 11/03/2014 e disponível no endereço: <<http://if.uff.br/pt/teses-pradua/522>>.
- [37] ZINN-JUSTIN, Jean. **Quantum field theory and critical phenomena**. 2002.
- [38] ARENAS, Zochil González; BARCI, Daniel G. Functional integral approach for multiplicative stochastic processes. **Physical Review E**, v. 81, n. 5, p. 051113, 2010.
- [39] TUPPER, G. B.; SCHOLTZ, F. G. Quantizing SU (N) gauge theories without gauge fixing. **arXiv preprint hep-th/9501089**, 1995.
- [40] SCHOLTZ, F. G.; TUPPER, G. B. Avoiding the Gribov problem by dynamical gauge fixing. **Physical Review D**, v. 48, n. 4, p. 1792, 1993.

- [41] MOSS, Ian G.; SILVA, Pedro J. BRST-invariant boundary conditions for gauge theories. **Physical Review D**, v. 55, n. 2, p. 1072, 1997.
- [42] CASIMIR, Hendrick BG. On the attraction between two perfectly conducting plates. In: **Proceedings of the KNAW**. 1948. p. 793-795.
- [43] BORDAG, M.; ROBASCHIK, D.; WIECZOREK, E. Quantum field theoretic treatment of the Casimir effect. **Annals of Physics**, v. 165, n. 1, p. 192-213, 1985.
- [44] AMBJØRN, Jan; GIEDT, Joel; GREENSITE, Jeff. Vortex structure vs. monopole dominance in Abelian-projected gauge theory. **Journal of High Energy Physics**, v. 2000, n. 02, p. 033, 2000.
- [45] PIGUET, Olivier; SORELLA, Silvio P. **Algebraic renormalization: Perturbative renormalization, symmetries and anomalies**. Springer Science & Business Media, 2008.
- [46] PESKIN, Michael E.; SCHROEDER, Daniel V.; MARTINEC, Emil. **An introduction to quantum field theory**. 1996.
- [47] CHENG, Ta-Pei; LI, Ling-Fong; CHENG, Ta-Pei. **Gauge theory of elementary particle physics**. 1984.