



**INSTITUTO DE FÍSICA**  

---

**Universidade Federal Fluminense**

**Thiago José Sales Gonçalves de Souza**

**Evolução Rotacional de Estrelas Compactas  
com Desacoplamento de Matéria Superfluida**

**Niterói**

**Março de 2017**

Thiago José Sales Gonçalves de Souza

# Evolução Rotacional de Estrelas Compactas com Desacoplamento de Matéria Superfluida

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Física da Universidade Federal Fluminense como requisito para a obtenção do Grau de Mestre em Física.

**Orientador:** Rodrigo Picanço Negreiros

Niterói

Março de 2017

S719 Souza, Thiago José Sales Gonçalves de.  
Evolução rotacional de estrelas compactas com  
desacoplamento de matéria superfluida / Thiago José Sales  
Gonçalves de Souza ; orientador: Rodrigo Picanço Negreiros. --  
Niterói, 2017.  
147 p. : il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Fluminense,  
Instituto de Física, Niterói, 2017.  
Bibliografia: p. 113-118.

1.ESTRELA DE NÊUTRONS. 2.PULSAR. 3.EVOLUÇÃO TÉRMICA.  
4.EVOLUÇÃO ROTACIONAL. 5.BRAKING INDEX. I.Negreiros, Rodrigo  
Picanço, orientador. II.Universidade Federal Fluminense.  
Instituto de Física, Instituição responsável. III.Título.

CDD 523.8874

Dedico este trabalho a Deus pela graça a mim concedida de fazer o curso de Mestrado em Física. Igualmente aos povos do Brasil, por me proporcionar tal formação.

# Agradecimentos

Agradeço aos meus pais e ao meu irmão, por todo o apoio ao longo do curso, bem como a todos os meus parentes e amigos que colaboraram e acreditaram na minha formação. De igual modo, agradeço a meu orientador assim como a todos os meus professores, desde os de meu ensino básico até os do superior, por todo o conhecimento compartilhado, tempo dedicado e grande incentivo a um aprofundamento sempre maior do conhecimento.

*“A nossa busca por verdades mais profundas  
continua.”*

*(Leonard Mlodinow).*

# Resumo

Lida-se com dois objetos de estudo neste trabalho, um teórico e um observacional. Este último é um objeto astronômico conhecido como pulsar e consiste numa fonte pontual externa ao sistema solar que emite pulsos de ondas eletromagnéticas, principalmente na faixa das ondas de rádio, pulsos esses com período bem definidos e ligeiramente constantes. Evidências indicam que estes sejam oriundos de um teórico objeto astrofísico conhecido como estrela de nêutrons que consiste num corpo compacto, gravitacionalmente ligado, sustentado hidrosticamente contra a ação atrativa de sua própria gravidade por meio da pressão de degenerescência dos bárions que o compõe e do regime repulsivo da interação nuclear-forte, ou até mesmo dos quarks num estado da matéria em que eles não se encontram mais confinados em hádrons. Por isso trabalha-se com dois modelos de estrelas de nêutrons: uma composta exclusivamente por hádrons, conhecida como estrela de hádrons ou estrela hadrônica; e outra composta parcialmente por matéria de hádrons e em parte por matéria de quarks desconfinados, conhecida como estrela híbrida. Após se mostrar evidências de que os pulsares são tão somente manifestações astronômicas das estrelas de nêutrons, estuda-se brevemente as teorias físicas de caráter fundamental utilizadas na descrição macroscópica (Teoria Geral da Relatividade) e microscópica (Teoria de Campo Quântico Relativística) dessas estrelas de nêutrons; bem como um modelo que descreve a evolução térmica desses objetos teóricos. Tudo isso a fim de se estudar a evolução da rotação de uma estrela de nêutrons, a medida que esta evolui termicamente. Assume-se que, ao longo dessa evolução térmica haverá uma transição de partes da matéria do interior da estrela de uma fase normal para uma fase superfluida, cuja região se desacopla, como supõe o modelo utilizado nesta obra, da região onde ainda há matéria no estado normal, de maneira que tais regiões possuirão evoluções distintas em sua rotação, muito embora haja interferência de uma sobre a outra. Isto se trata de um modelo alternativo ao que se toma como canônico, pois prevê uma mudança do momento de inércia efetivo

da estrela, e dessa forma valores próprios para algumas grandezas observadas experimentalmente, como o *braking index* e a idade característica de um pulsar, cujas medidas se desviam ligeiramente dos valores previstos pelo modelo canônico. Este trabalho objetiva, pois, justificar uma eventual razão da existência desses desvios por causa do momento de inércia não ser constante ao longo da evolução rotacional de uma estrela de nêutrons, diferentemente do modelo clássico que o supõe constante.

Palavras-chave: Estrelas de Nêutrons. Pulsares. Relatividade Geral. Matéria Nuclear Relativística. Evolução Térmica. Evolução Rotacional. Braking Index. Idade característica.

# Abstract

We deal with two objects in this study, one theoretical and one experimental. The latter is an astronomical object known as pulsar and consists in a punctual source external to the solar system which emits pulses of electromagnetic waves, mostly in radio frequency, pulses with periods slightly constant. The former is a theoretical astrophysical object known as neutron star that consists in a gravitational bound body supported hydrostatically against the attractive action of its own gravity by means of the degeneracy pressure of the baryons which compose it and of the repulsive regime of the nuclear-strong interaction, or even of the quarks in a matter state in which they are not confined in hadrons anymore. Due to this, we work with two different models for neutron star: one composed exclusively by hadrons, known as hadronic star; and one composed partially by hadronic matter and partially by deconfined quark matter, known as hybrid star. After we show some evidences that the pulsars are astronomical manifestations of neutron stars, we study briefly the fundamental physical theories used in the macroscopic description (General Theory of Relativity) and microscopic one (Relativistic Quantum Fields Theory) of those stars; as well as a model which describes the thermal evolution of those theoretical objects. All of this in order to study the spin evolution of a neutron star, as it evolves thermically. We assume that, over this thermal evolution there will be a phase transition of some parts of the inner star matter from a normal phase to a superfluid one, whose region decouples, as our model assumes in this work, from the region where still exists matter in normal state, in such a way that those regions will evolve distinctly in its rotation, even though one rotation interferes in the other. This consists in a alternative model to that which is taken as canonical, because it previews a change in the effective moment of inertia of the star, and thus different values for some observational quantities, for example, the braking index and the characteristic age of a pulsar, whose measures differ slightly from their canonical prediction. This work intends, thus, to justify a pro-

bable reason of the existence of those deviations due to the moment of inertia not to be constant during the spin evolution of a neutron star, differently of the classical model which supposes it to be constant.

Keywords: Neutron Stars. Pulsars. General Relativity. Relativistic Nuclear Matter. Thermal Evolution. Spin Evolution. Braking Index. Characteristic Age.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>11</b>
1.1	Pulsares e estrelas de nêutrons . . . . .	11
1.2	A problemática da evolução rotacional das estrelas de nêutrons . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Relatividade</b>	<b>18</b>
2.1	Raio de Schwarzschild de estrelas de nêutrons . . . . .	18
2.2	Princípios da relatividade geral . . . . .	20
2.3	Espaço-tempo e matéria . . . . .	22
2.4	Equações de estrutura . . . . .	26
<b>3</b>	<b>Estrutura e Composição de Estrelas de Nêutrons</b>	<b>32</b>
3.1	Natureza da matéria que compõe as estrelas de nêutrons . . . . .	33
3.2	Descrição relativística da matéria nuclear . . . . .	36
3.2.1	Aproximação de campo médio . . . . .	39
3.3	<i>MIT bag model</i> . . . . .	41
3.4	Equações de estado . . . . .	44
3.4.1	Resolução das equações de estrutura e as famílias de estrelas . . . . .	46
3.4.2	Modelos de estrelas utilizadas . . . . .	48
<b>4</b>	<b>Resfriamento</b>	<b>49</b>
4.1	Evolução térmica . . . . .	50
4.1.1	Principais mecanismos microscópicos . . . . .	51
4.1.2	Calor específico e condutividade térmica . . . . .	56
4.2	Superfluidez e supercondutividade na estrela de nêutrons . . . . .	58
4.2.1	Modelos adotados . . . . .	60
4.3	Resultados do resfriamento para cada modelo de estrela . . . . .	63

<b>5</b>	<b>Evolução da Rotação da Estrela de Nêutrons</b>	<b>66</b>
5.1	Modelo canônico . . . . .	66
5.2	Rotação com variação do momento de inércia . . . . .	70
5.3	Resultados . . . . .	75
5.3.1	Estrela de hádrons com massa de $1,74M_{\odot}$ . . . . .	76
5.3.2	Estrela híbrida com massa de $1,96M_{\odot}$ . . . . .	92
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>110</b>
<b>A</b>	<b>Estimativas para Grandezas de Pulsares e Estrelas de Nêutrons</b>	<b>119</b>
A.1	Densidade média de um pulsar . . . . .	119
A.2	Raio de Schwarzschild de um pulsar e de uma estrela de nêutrons . . . . .	120
A.3	Campo magnético de um pulsar . . . . .	121
<b>B</b>	<b>Gás de férmions</b>	<b>124</b>
B.1	Sistema de partículas indistinguíveis . . . . .	124
B.2	Gás de férmions livres . . . . .	129
B.2.1	Gás relativístico de quarks completamente degenerado . . . . .	137
B.2.2	Aproximação de primeira ordem para a interação forte entre os quarks	140
<b>C</b>	<b>Correções Devidas à Superfluidez</b>	<b>142</b>
C.1	Expressões para os fatores de redução . . . . .	142
C.1.1	Processo URCA direto . . . . .	142
C.1.2	Processo URCA modificado . . . . .	143
C.1.3	<i>Bremsstrahlung</i> nêutron-próton singletos . . . . .	144
C.1.4	<i>Bremsstrahlung</i> próton-próton singletos . . . . .	144
C.1.5	Calor específico . . . . .	144
C.2	Cálculo da redução . . . . .	145
C.2.1	Emissividade . . . . .	145
C.2.2	Calor específico . . . . .	147

# Capítulo 1

## Introdução

Apresenta-se neste capítulo inicial o objeto experimental e o teórico estudados neste trabalho. O primeiro trata-se de um objeto astronômico conhecido como pulsar, enquanto que o último é uma estrela de nêutrons. Acredita-se que esse tipo de estrela é o corpo por detrás dessa manifestação astronômica, por motivos esclarecidos ao longo desta introdução. Por fim, expõe-se a problemática existente no processo de evolução temporal da rotação da estrela de nêutrons, cujo modelo canônico não satisfaz certos resultados experimentais obtidos para os mais diversos pulsares.

### 1.1 Pulsares e estrelas de nêutrons

Em 1967, a então estudante de pós-graduação, Jocelyn Bell, observou pulsos periódicos de ondas de rádio oriundos de uma fonte pontual exterior ao sistema solar. Sua equipe de pesquisadores, liderados pelo professor doutor Anthony Hewish, publicou a descoberta desse objeto, que juntamente a outros objetos semelhantes descobertos posteriormente por vários cientistas viriam a ser conhecidos como pulsares (Cf. HEWISH, 1968).

O pulsar de Bell e Hewish, rotulado agora por PSR 1919+21<sup>1</sup>, tinha um período de 1,337 segundos. Logo após sua descoberta, foram encontrados dois outros importantes pulsares, nomeados como Crab (Cf. STAELIN; REIFENSTEIN, 1968) e Vela (Cf. LARGE; VAUGHAN; MILLS, 1968). Tais pulsares receberam nomes devidos ao fato de se localizarem no interior da nebulosa do Caranguejo e no da nebulosa da constelação Vela respectivamente. Ocorre que as nebulosas do Caranguejo e da constelação Vela são rema-

---

<sup>1</sup>A sigla PSR vem da expressão inglesa *Pulsating Source of Radio*

nescentes de uma explosão de supernova tipo “core collapse”, as quais marcam o fim de uma estrela ordinária com massa maior do que oito massas solares. Esses remanescentes consistem do envelope dessas estrelas, jogado espaço afora devido a onda de choque gerada pela supernova, restando, dessas estrelas, apenas o seu núcleo. Desse modo, esses pulsares poderiam, pelo menos a princípio, serem justamente uma manifestação astronômica desses núcleos.

De maneira geral, os núcleos estelares remanescentes da morte de estrelas ordinárias podem vir a se tornar, dependendo das massas de suas estrelas progenitoras, dois tipos diferentes de objetos: um buraco negro, ou uma estrela compacta. Estas estrelas compactas são corpos que se sustentam não mais pelo equilíbrio entre a atração gravitacional e a pressão interna, proveniente principalmente da energia liberada nos processos de fusão nuclear, mas, por não serem capazes de produzirem elementos químicos mais pesados por fusão termonuclear, são corpos degenerados, e, portanto, equilibram-se contra sua gravidade por meio da pressão de degenerescência dos férmions que as compõe, além da repulsão nuclear. Se a massa da estrela progenitora for um pouco maior do que oito massas solares, a pressão de degenerescência dos elétrons será baixa e o núcleo se colapsa, os núcleos atômicos se desintegram em seus componentes mais básicos por causa da transformação expressiva dos prótons em nêutrons via captura eletrônica. O processo termina quando a pressão de degenerescência, agora dos bárions, e a repulsão nuclear equilibram a atração gravitacional, dando origem a uma estrela de nêutrons. Se a massa, porém, da estrela original for ainda maior, nem mesmo os bárions conseguirão sustentar a estrela compacta e o seu colapso progredirá, formando um buraco negro. Os pulsares, poderiam ser, então, estrelas de nêutrons. (GLENDEENING, 2000, pp. 65-68)

Os pulsares poderiam, a princípio, ser anãs-brancas também, todavia o pulsar Crab possui um período de  $33ms$ , e o Vela, um período de  $89ms$ . Estes valores para o período de um pulsar foram decisivos para descartar a possibilidade de esses objetos se tratarem de anãs brancas. Para se visualizar isto, estima-se a densidade média desses pulsares, por meio do equilíbrio entre a força gravitacional, de natureza atrativa, e a força centrífuga, de caráter repulsivo. Sabe-se que um astro não pode ter uma frequência de rotação qualquer, pois existe para aquele determinado astro um valor de frequência rotacional acima do qual a força centrífuga se torna mais intensa do que a gravitacional, fazendo com que a matéria desse astro passe a ser ejetada. Este limite superior para a frequência de rotação de um

astro é conhecido como frequência de Kepler. Desse modo haverá uma frequência de Kepler para o pulsar, e a partir dessa frequência haverá também um limite inferior para a sua densidade média.

Toma-se o pulsar mais rápido já descoberto, isto é, o pulsar de menor período: o PSR 1937+21, descoberto em 1982 com um valor de período igual a  $1,56ms$  (BACKER et al, 1982). Supõe-se que a frequência de rotação associada a este período é a frequência de Kepler típica para um pulsar. Do equilíbrio entre a força centrífuga e a gravitacional estima-se (ver apêndice A) um limite inferior para a densidade média do pulsar:

$$\bar{\epsilon} > 1,37 \cdot 10^{14} g/cm^3 \quad (1.1)$$

O resultado encontrado em (1.1) é uma grande evidência de que a natureza da matéria que constitui esses pulsares se assemelhe à da matéria que forma os núcleos atômicos, isto porque a densidade típica da matéria nuclear é de aproximadamente  $2,5 \cdot 10^{14} g/cm^3$ , com exatamente a mesma ordem de grandeza de (1.1). Como o núcleo atômico é composto de prótons e nêutrons, é razoável esperar que a matéria que compõe um pulsar seja formada de núcleons, quiçá bárions mais pesados, preenchendo continuamente o pulsar sem estarem arranjados em átomos. Em teoria, esse é o mesmo tipo de matéria que compõe uma estrela de nêutrons. Assim, o pulsar poderia ser simplesmente a manifestação astronômica de uma estrela de nêutrons.

Até agora, mostrou-se duas evidências que conectam possivelmente um pulsar a uma estrela de nêutrons: a descoberta de pulsares no interior de algumas nebulosas remanescentes de supernova, sabendo-se que em teoria espera-se que o antigo núcleo da estrela que morreu num processo de supernova possa vir a se tornar uma estrela compacta; a descoberta de pulsares com períodos na ordem dos milissegundos, o que implica um limite inferior para a densidade média desses objetos, limite este com a mesma ordem de grandeza da matéria encontrada nos núcleos atômicos, ao passo que uma estrela de nêutrons também contém uma matéria similar à matéria nuclear.

Lista-se a seguir ainda mais duas evidências de que tais corpos não passam do mesmo objeto.

Alguns pulsares encontram-se em sistemas binários, como por exemplo o pulsar PSR B1913+16 (também conhecido como binário Hulse-Taylor). Foi descoberto por Russel Alan Hulse e Joseph Hooten Taylor Jr. (1974, 1975a, 1975b). O pulsar emite pulsos com

um período de  $59ms$ . Constatou-se que sua companheira é uma estrela de nêutrons, cujos eventuais pulsos não são observados talvez por questão de o cone de radiação não estar direcionado para a Terra. A análise do sistema por meio de sua dinâmica possibilitou a determinação da massa desses dois corpos, 1,4 massa solar - supondo que as massas de ambos sejam aproximadamente iguais. Tomando essa massa como valor típico para a massa de um pulsar, estima-se (ver A.2), com uso da equação (1.1), o limite superior para raio desse objeto:

$$R < 17km \quad (1.2)$$

E agora faz-se um novo paralelo com as estrelas de nêutrons. Estes objetos teóricos foram concebidos primeiramente por Baade e Zwicky (1934), em seus estudos sobre a origem da enorme quantidade de energia liberada numa supernova. Supunham que ela provinha da energia de ligação do núcleo estelar remanescente depois de este sofrer um colapso, tornando-se um corpo bem compacto, composto de nêutrons. Mais tarde, Tolman (1939), Oppenheimer e Volkoff (1939), por meio da Relatividade Geral de Albert Einstein, estudaram a possível estrutura de um objeto compacto, esfericamente simétrico e composto de nêutrons (ver seção 2.4). Encontraram um valor de cerca 0,75 massa solar e  $10km$  para a massa e o raio desse tipo de objeto. Note que essas grandezas têm a mesma ordem de grandeza de seus respectivos valores estimados para o pulsar. A semelhança fica ainda mais acentuada, quando se compara a razão entre o raio de Schwarzschild (ver seções 2.1 e A.2) e o raio desses corpos, 24% e 22% para o pulsar e para a estrela de nêutrons respectivamente.

É possível se estimar também um valor para o campo magnético de um pulsar. Para tanto, assume-se que o mecanismo por detrás da produção de radiação eletromagnética que constitui os pulsos observados advém da rotação desse objeto. Poder-se-ia pensar num mecanismo oriundo de um tipo de vibração do pulsar, mas ocorre que o que se é medido é um lento e gradual aumento do período, portanto diminuição da frequência. Porém, quando um sistema vibrante, perde energia com o tempo, espera-se que apenas a amplitude da radiação emitida diminua com o tempo, enquanto que a frequência permaneça constante. Já um sistema girante com perda contínua de energia emitiria radiação com frequência cada vez menor. Logo, supõe-se que o pulsar emite radiação eletromagnética devido a rotação de um dipolo magnético, cujo eixo magnético não coincide com o eixo

de rotação. Este modelo é mais discutido na seção 5.1.

Tem-se que a potência de irradiação de um dipolo magnético girante é dado por:

$$P_{dip} = \frac{2}{3} R^6 B^2 \Omega^4 \sin^2 \alpha \quad (1.3)$$

Onde  $R$  é o raio do pulsar,  $B$  seu campo magnético superficial,  $\Omega$  sua frequência de rotação, e  $\alpha$ , o ângulo entre os eixos de rotação e magnético (Cf. PACINI, 1968).

Espera-se ainda que a energia irradiada provenha, por conservação de energia, da energia cinética de rotação do pulsar, esta última dada por ( $I$  sendo o momento de inércia do pulsar):

$$E_{rot} = \frac{1}{2} I \Omega^2 \quad (1.4)$$

A partir de (1.3) e (1.4) estima-se (ver seção A.3) um valor para o campo magnético de um pulsar:

$$B = 0,7 \cdot 10^{12} gauss \quad (1.5)$$

O surpreendente, é que por meio de uma derivação teórica, Woltjer (1964) estimou que a conservação de fluxo magnético gerasse, após o colapso de uma supergigante vermelha, um objeto compacto com campos magnéticos elevadíssimos, da ordem de  $10^{12} gauss$ . Em outras palavras, caso o núcleo remanescente da antiga supergigante vermelha se transformasse numa estrela de nêutrons, a ordem de grandeza do campo magnético desses objetos seria igual a ordem de grandeza do campo de um pulsar.

Em suma, pulsares e estrelas de nêutrons encontram-se no interior de nebulosas remanescentes de supernovas; a ordem de grandeza da massa, do raio e do campo magnético de um pulsar são os mesmos que a de suas respectivas grandezas esperada para uma estrela de nêutrons; a densidade média de um pulsar é da mesma ordem da matéria contida nos núcleos atômicos, sugerindo uma semelhança entre a matéria que compõe estes núcleos e o pulsar, enquanto que a as estrelas de nêutrons é composta continuamente por nêutrons e até outros bárions cuja pressão de degenerescência é que as sustenta contra sua gravidade. Por essas evidências é que se assume o fato de que os pulsares são manifestações astronômicas de estrelas de nêutrons.

## 1.2 A problemática da evolução rotacional das estrelas de nêutrons

Assumiui-se, na seção anterior, que o mecanismo de perda de energia (rotacional) do pulsar se dá por meio da radiação de um dipólo magnético. O modelo canônico, descrito na seção 5.1, ainda estabelece que o momento de inércia da estrela permanece constante ao longo do tempo. Tal modelo prevê que a taxa de variação da frequência angular seja negativa e proporcional ao cubo da própria frequência.

De fato, seria ainda possível a existência de outro mecanismo para a perda de energia rotacional baseado na radiação de quadrupolo gravitacional, o que ainda faria a taxa de variação da frequência ser negativa, mas proporcional a quinta potência da própria frequência. Sendo assim, toma-se de modo geral que essa taxa é, para algum mecanismo de desaceleração da rotação, proporcional a uma potência  $n$  da frequência (GLENDENNING, 2000, p.226).

Esta grandeza  $n$  é, por sua vez, conhecida como *braking index*. É possível medir essa grandeza para determinado pulsar. A seguir, alguns exemplos:

Nome	$n$
Crab	$2,515 \pm 0,005$
Vela	$1,4 \pm 0,2$
PSR 1509-58	$2,837 \pm 0,001$
PSR 0540-69	$2,01 \pm 0,02$

Fonte: Glendenning, *Compact Stars*, p. 228

Tabela 1.1: *Braking Indices* de alguns Pulsares

Observe que os valores dos *braking indices* são menores que 3. Poderia se esperar que tais valores se encontrassem entre o característico de dipolo magnético e o de quadrupolo gravitacional, caso ambos esses mecanismos estivessem presentes na perda de energia do pulsar. No entanto, para esses pulsares acima e para a maioria dos outros já encontrados o seu *braking index* é inferior a 3, mostrando, talvez, a presença dum desconhecido processo de perda de energia. (GLENDENNING, 2000, p.227)

Outra grandeza normalmente medida para um determinado pulsar é a chamada idade característica. Na seção 5.1 deriva-se com mais detalhes a expressão que dá a idade característica do pulsar. A título de exemplo, a idade do pulsar Crab segundo registros históricos é de 960 anos, enquanto que a sua idade característica é de 1240 anos, havendo,

pois, uma ligeira diferença entre a idade real desse pulsar e a idade prevista pelo modelo canônico (caso este modelo descrevesse a evolução do pulsar de modo completamente fiel a idade característica coincidiria com a real). Outro pulsar, PSR J1119-6127, por sua vez, possui uma idade real estimada de  $7100^{+500}_{-2900}$  anos (KUMAR et al, 2012), com uma idade característica de 1610 anos. Estes resultados mostram que falta algo no modelo canônico para uma descrição mais fiel à evolução de um pulsar.

O modelo adotado neste trabalho considera a hipótese de que o momento de inércia não seja constante ao longo da evolução da rotação de uma estrela de nêutrons. Ele se baseia no modelo adotado por Ho & Anderson (2012), descrito na seção 5.2.

Viu-se, neste capítulo introdutório, que os objetos conhecidos como pulsares são manifestações astronômicas de objetos teóricos chamados de estrelas de nêutrons. Adota-se, portanto, no capítulo 5, um modelo não canônico para uma estrela de nêutrons que descreva a evolução temporal de sua rotação com o objetivo de se ver as consequências desse modelo no *braking index* aparente e na idade característica dessa estrela, comparando finalmente os resultados com os dados experimentais obtidos de alguns pulsares. Entretanto estuda-se antes, de maneira breve, as teorias fundamentais utilizadas na descrição das estrelas de nêutrons. O capítulo 2 trata da teoria por detrás das características macroscópicas da estrela, isto é, seu perfil estrutural. Já o capítulo 3 considera o aspecto microscópico, ou seja, a descrição microscópica da matéria que compõe a estrela de nêutrons com o objetivo de se encontrar a equação de estado dessa matéria. Esta equação de estado mais as equações de estrutura encontradas no capítulo 2 são usadas para se encontrar dois diferentes modelos de estrela de nêutrons: um estrela hadrônica e uma estrela híbridas. O modelo alternativo para a rotação da estrela depende de outro processo evolutivo da estrela, a sua evolução térmica. Assim, o capítulo 4 apresenta também o modelo adotado, com seus vários mecanismos, na descrição da evolução térmica dessa estrela.

# Capítulo 2

## Relatividade

Antes de ir a fundo no estudo de estrelas compactas é necessário primeiramente estabelecer as bases teóricas as quais descreverão a estrutura do espaço-tempo bem como a física a nível microscópico. Este capítulo atém-se à primeira destas duas parcelas da realidade.

### 2.1 Raio de Schwarzschild de estrelas de nêutrons

Ao se trabalhar com corpos astronômicos utiliza-se ou a Teoria Universal da Gravitação, de Isaac Newton, ou a Teoria Geral da Relatividade, de Albert Einstein, dependendo das circunstâncias do problema em questão. Por exemplo, para o tratamento da dinâmica dos planetas do sistema solar, a gravitação newtoniana é suficiente, pois o campo gravitacional produzido é fraco.

Uma evidência de que se pode considerar tal campo pequeno é a análise do raio de Schwarzschild. Este parâmetro surge quando se resolve as equações de campo de Einstein para a região do espaço-tempo externa a um corpo estático com simetria esférica de massa  $M$  e raio  $R$ . A solução exata para tal problema pode ser escrita por meio da expressão para o tempo próprio contendo a métrica de Schwarzschild (GLENDENNING, 2000, p.48):

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} \frac{dr^2}{c^2} - r^2 \frac{d\theta^2}{c^2} - r^2 \sin^2 \theta \frac{d\phi^2}{c^2}, r > R \quad (2.1)$$

Note que a métrica acima possui uma singularidade quando  $r = r_S = \frac{2GM}{c^2}$ . Este

é justamente o valor para o raio de Schwarzschild deste corpo esférico, onde  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$  é a constante universal da gravitação, e  $c = 3,00 \cdot 10^8 ms^{-1}$  é a velocidade da luz no vácuo. É importante ressaltar aqui que essa singularidade não é física, ela é apenas uma consequência do tipo de coordenadas escolhido para descrever o problema (GLENDENNING, 2000, p.48).

Ocorre que as estrelas, tanto as ordinárias quanto as compactas, possuem um raio maior que o raio de Schwarzschild. Isto porque o raio de Schwarzschild marca o limite para o raio estelar abaixo do qual a estrela se torna instável, não sendo mais capaz de suportar sua atração gravitacional, e colapsa dando origem a um buraco negro cujo horizonte de eventos possui um raio exatamente igual ao raio de Schwarzschild (GLENDENNING, 2000, p.48).

Pode-se, portanto, estimar o quão relativístico é um problema apenas analisando o raio de Schwarzschild da estrela: caso ele seja uma fração considerável do raio estelar, os efeitos relativísticos serão intensos e a Teoria Geral da Relatividade é indispensável para se descrever o problema, caso contrário a teoria newtoniana já será o suficiente para tanto.

Para o caso do sistema solar, tem-se que o Sol, com massa  $M_{\odot} = 1,99 \cdot 10^{30} kg$  e raio  $R_{\odot} = 6,96 \cdot 10^5 km$ , assumindo que ele é estático e esférico, possui um raio de Schwarzschild igual a:

$$r_{S_{\odot}} = \frac{2 \cdot (6,67 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}) \cdot (1,99 \cdot 10^{30} kg)}{(3,00 \cdot 10^8 ms^{-1})^2} \quad (2.2)$$

$$r_{S_{\odot}} = 2,95 km \quad (2.3)$$

Logo,  $r_{S_{\odot}}$  é apenas 0,00042% de  $R_{\odot}$  e o tratamento relativístico é prescindível no estudo da dinâmica do sistema solar e da estrutura do próprio Sol.

Já para uma estrela de nêutrons, com massa  $M \approx 1,4M_{\odot}$ , e raio  $R \approx 17 km$ , o raio de Schwarzschild é:

$$r_S = \frac{2G(1,4M_{\odot})}{c^2} = 1,4 \cdot \frac{2GM_{\odot}}{c^2} = 1,4 \cdot r_{S_{\odot}} \quad (2.4)$$

$$r_S = 4,1 km \quad (2.5)$$

Desse modo, o raio de Schwarzschild de uma estrela de nêutrons típica é 24% do raio da estrela. Este valor expressivo faz com que o tratamento do problema envolvendo a estrutura de estrelas de nêutrons além da estrutura do espaço-tempo em sua vizinhança seja somente viável por meio do uso da Teoria Geral da Relatividade .

Isto posto, fica claro que se utiliza neste trabalho a teoria da gravitação de Einstein para se descrever a estrutura tanto do espaço-tempo como da própria estrela.

## 2.2 Princípios da relatividade geral

A Teoria Geral da Relatividade, de Albert Einstein, admite alguns princípios e identificações entre conceitos matemáticos e o mundo físico. São eles:

**Pressuposto 2.1.** O espaço-tempo é descrito matematicamente como se tratando de um *manifold* diferenciável e quadridimensional, contendo uma métrica  $\mathbf{g}$ , com componentes denotadas por  $g_{\mu\nu}$  (SCHUTZ, 2009, p.171).

**Pressuposto 2.2.** Tal métrica é medida por meio de réguas e relógios (SCHUTZ, 2009, p.171).

**Pressuposto 2.3.** A métrica e, portanto, suas componentes são funções de cada ponto do *manifold*, isto é, de cada evento do espaço-tempo:  $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(\mathcal{P})$ , onde  $\mathcal{P}$  é um evento qualquer. Assume-se ainda que as componentes  $g_{\mu\nu}$  dessa métrica, para um dado ponto  $\mathcal{P}$  qualquer do espaço-tempo, podem sempre ser escritas na forma como aparecem na Teoria Restrita da Relatividade, cuja métrica para o espaço-tempo é a conhecida métrica de Minkowski e denotada por  $\eta_{\mu\nu}$  cuja forma, por exemplo em coordenadas cartesianas  $\{x^0, x^1, x^2, x^3\} \equiv \{x^\alpha\} = \{ct, x, y, z\}$ , é a seguinte (SCHUTZ, 2009, p.171):

$$(\eta_{\mu\nu}(x^\alpha)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \forall (x^\alpha) \in \mathcal{E}; \mathcal{E} \text{ é o espacotempo de Minkowski.} \quad (2.6)$$

Desse modo, sempre existe um sistema de coordenadas  $\{x^{\bar{0}}, x^{\bar{1}}, x^{\bar{2}}, x^{\bar{3}}\}$  tal que, num evento

$\mathcal{P}$  de coordenadas  $(x_0^{\bar{0}}, x_0^{\bar{1}}, x_0^{\bar{2}}, x_0^{\bar{3}})$ , a métrica é dada por:

$$g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(\mathcal{P}) = g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(x_0^{\bar{0}}, x_0^{\bar{1}}, x_0^{\bar{2}}, x_0^{\bar{3}}) = \eta_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \quad (2.7)$$

No entanto, em geral, para outros pontos senão  $\mathcal{P}$ ,  $g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \neq \eta_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ .

As duas primeiras suposições também valem para a Teoria Restrita da Relatividade. Mas é este terceiro pressuposto que introduz o fato de que o espaço-tempo não é absoluto, ou seja, ele pode depender das circunstâncias físicas. Como se verá mais à frente a presença de matéria e energia afeta a estrutura do *manifold*, e esta estrutura, por sua vez, está estritamente relacionada à métrica do espaço-tempo. Assim, diferentemente do que ocorre no espaço-tempo de Minkowski com uma métrica que confere a este espaço uma estrutura universalmente plana, sem nenhuma curvatura intrínseca, e portanto uma estrutura absoluta, independente da configuração e dinâmica da matéria e da energia, a métrica do espaço-tempo de fato sofre influência da matéria e da energia, concedendo uma estrutura a este *manifold* com uma curvatura intrínseca.

Esta última pressuposição também assume que, qualquer que seja a posição do espaço-tempo e as circunstâncias físicas presentes, a assinatura da métrica será sempre  $-2$ , o que matematicamente significa que para todo ponto do espaço-tempo a métrica, por ter quatro dimensões, possui um autovalor positivo e três negativos; e fisicamente, expressa o fato de que em qualquer local do Universo, haverá uma única dimensão temporal e três dimensões espaciais (SCHUTZ, 2009, pp.145-146).

**Pressuposto 2.4** (Princípio da Equivalência de Einstein). Qualquer experimento físico local, não envolvendo gravitação, terá, para um sistema de referência em queda livre, os mesmos resultados obtidos como se estivesse sendo realizado no espaço-tempo livre de gravidade, isto é no espaço-tempo de Minkowski (SCHUTZ, 2009, p.173).

A métrica medida nalgum local, para um dado sistema referencial em queda livre, será, pois, igual a métrica de Minkowski (2.6). No entanto, em termos matemáticos, da pressuposição 2.3, sempre há pelo menos um sistema de coordenadas  $\mathcal{O}$  com relação ao qual as componentes da métrica do *manifold*, que representa o espaço-tempo, serão, em um local específico, idênticas as da métrica de Minkowski. Logo, conclui-se que este sistema  $\mathcal{O}$ , por causa do princípio de equivalência se trata justamente de um sistema em queda livre.

**Pressuposto 2.5** (Princípio da Covariância Geral). As leis da física, escritas em forma tensorial, devem ser independentes do sistema de coordenadas adotado; além de depender da posição do espaço-tempo, isto é, não depende do campo gravitacional (GLEN-DENNING, 2000, p.34).

## 2.3 Espaço-tempo e matéria

Até o momento, viu-se que será utilizado nesse trabalho a Teoria Geral de Relatividade para descrever o espaço-tempo na presença de uma estrela de nêutrons, bem como a estrutura desta.

Na seção anterior, foi discutido como a teoria modela matematicamente o espaço-tempo, com algumas das conexões entre conceitos matemáticos e físicos; por exemplo a identificação dos eventos como sendo pontos de cujo conjunto forma um *manifold*. Assim cada elemento (evento) é univocamente identificado por quatro parâmetros ou coordenadas, mesmo valor do número de dimensões de tal *manifold*, ou seja, do espaço-tempo. Foi citada também a conexão do conceito de distância ente duas posições do espaço e do conceito de duração, ou intervalo de tempo, entre dois eventos com o conceito matemático da métrica do *manifold*, a qual, por sua vez, está relacionada à estrutura e à curvatura desse espaço.

Falta agora as relações entre os conceitos citados acima que estabelecem, primeiro o comportamento da matéria dada uma certa estrutura do espaço-tempo; e segundo a origem de uma estrutura qualquer para o espaço-tempo, ou seja, a influência que a própria matéria exerce sobre o espaço-tempo em seu derredor.

O comportamento da matéria na presença de certo campo gravitacional, de maneira resumida, se dá, por exemplo para uma partícula massiva e livre de quaisquer interações, exceto a gravitacional, de maneira tal que sua trajetória consistirá numa geodésica. Para um dado sistema de coordenadas  $\{x^\alpha\}$ , a trajetória dessa partícula será, pois, descrita pela seguinte equação:

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \frac{dx^\gamma}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \quad (2.8)$$

A equação acima pode ser obtida utilizando-se o pressuposto 2.3, mais os princípios da equivalência e da covariância geral (GLEN-DENNING, 2000, pp.35-36).

Uma vez mostrado o como o espaço-tempo determina o movimento de uma partícula massiva livre - tornar a sua trajetória uma geodésica nesse espaço - resta saber o modo pelo qual se dá a origem de uma estrutura qualquer para o espaço-tempo, isto é, a deformação nesse espaço gerada por causa da presença de matéria e energia.

Sem se estender muito na motivação que levou Einstein a postular as suas equações de campo gravitacional, o tipo de deformação provocada no espaço-tempo consiste no fato de que ele adquire uma curvatura intrínseca, ao contrário do que se tem na Relatividade Restrita, em que ele não possui curvatura alguma, sendo plano em todo lugar e, portanto, absoluto.

Por meio da geometria diferencial, se sabe que a curvatura de um *manifold* é determinada pelo que se chama de tensor de Riemann, um tensor de *rank*  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ , cujas componentes são denotadas por  $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$ . Dada a ordem deste tensor, ele é uma função de um quadri-vetor covariante  $\tilde{\omega}^\alpha$  e de três quadri-vetores contravariantes,  $\vec{V}$ ,  $\delta a\vec{e}_\mu$ ,  $\delta b\vec{e}_\nu$ , de modo que ao atuar nestes vetores resulta no incremento  $\delta V^\alpha$  ao vetor  $\vec{V}$  quando este sofre um transporte paralelo em um *loop*, primeiro ao longo de  $\delta a\vec{e}_\mu$ , seguida de um transporte ao longo de  $\delta b\vec{e}_\nu$ , e retornando ao ponto inicial ao longo de  $-\delta a\vec{e}_\mu$  e  $-\delta b\vec{e}_\nu$ , respectivamente. Desse modo, as componentes do tensor de Riemann são dadas pela seguinte expressão (SCHUTZ, 2009, p.159):

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\beta\nu,\mu} - \Gamma^\alpha_{\beta\mu,\nu} + \Gamma^\alpha_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\beta\mu} \quad (2.9)$$

A relação entre curvatura intrínseca e o tensor de Riemann vem do fato de que num *manifold* totalmente plano nenhum transporte paralelo em *loop*, qualquer que seja o local onde é realizado, será capaz de modificar o vetor que está sofrendo tal transporte; já num espaço curvo é possível realizar tais transportes de maneira que o vetor sofra alteração, não sendo mais igual ao que era anteriormente ao transporte. Logo, o tensor de Riemann está estritamente relacionado a curvatura do *manifold*, e somente quando as componentes desse tensor forem identicamente nulas em todo o espaço ( $R^\alpha_{\beta\mu\nu} \equiv 0$ ) é que não haverá qualquer desvio do vetor num transporte como esse, sinal de que o espaço é plano em todo lugar (SCHUTZ, 2009, p.160).

Portanto, as equações de campo gravitacional terão, de alguma forma, a presença do tensor de Riemann. Antes de enunciar essas equações é importante notar que, como é

de se esperar, o tensor de Riemann está relacionado à métrica  $g_{\mu\nu}$  via os símbolos de Christoffel, posto que estes podem ser encontrados por meio das componentes da métrica (SCHUTZ, 2009, p.151):

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{g^{\alpha\lambda}}{2} \{g_{\lambda\beta,\gamma} + g_{\lambda\gamma,\beta} - g_{\beta\gamma,\lambda}\} \quad (2.10)$$

Finalmente, as equações de campo de Einstein são:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu} \quad (2.11)$$

Acima,  $R_{\mu\nu}$  e  $R$  são contrações do tensor de Riemann, conhecidos como tensor de Ricci e escalar de Ricci respectivamente. São dados por:

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu} \quad (2.12)$$

$$R = R^\lambda_{\lambda} = g^{\alpha\lambda}R_{\alpha\lambda} \quad (2.13)$$

Uma outra forma de se escrever as equações de campo é utilizando-se componentes covariantes, obtida por levantamento de índices:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = kT^{\mu\nu} \quad (2.14)$$

Antes de se ir à natureza de  $T^{\mu\nu}$ , a expressão do lado esquerdo da equação (2.14) é, dentre muitas possíveis, uma combinação de termos que envolvem a métrica e contrações do tensor de Riemann com a finalidade de se construir um outro tensor de *rank*  $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ , denotado por  $G^{\mu\nu}$ , e conhecido como tensor de Einstein:

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \quad (2.15)$$

Esta combinação para  $G^{\mu\nu}$  foi a escolhida, pois é uma das combinações que fazem com que o divergente do tensor de Einstein seja nulo qualquer que seja a solução para o tensor métrico  $g^{\mu\nu}$ :

$$G^{\mu\nu}{}_{;\mu} \equiv 0 \quad (2.16)$$

O porquê de (2.16) é para que se garanta a nulidade também do divergente de  $T^{\mu\nu}$ . Isto porque o tensor  $\mathbf{T}$  é o tensor energia-momento, que representa a presença de matéria e é tomado como fonte do campo gravitacional. Suas componentes  $T^{\mu\nu}$ , dependendo dos valores de  $\mu$  e  $\nu$ , representam quer densidades, ou de energia, ou de momento, quer densidades de corrente de energia, ou de momento (SCHUTZ, 2009, p.92). por isso a expressão para o divergente  $T^{\mu\nu}{}_{;\mu}$  nada mais é do que a equação de continuidade, ou de conservação local de energia ou momento. Sabe-se que no espaço plano de Minkowski, a expressão para a conservação local de energia, por exemplo, tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial T^{00}}{\partial t} + \frac{\partial T^{10}}{\partial x} + \frac{\partial T^{20}}{\partial y} + \frac{\partial T^{30}}{\partial z} &= 0, \quad \text{usando a notação } \{x^0 = ct, x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z\} \Rightarrow \\ \frac{\partial T^{00}}{\partial x^0} + \frac{\partial T^{10}}{\partial x^1} + \frac{\partial T^{20}}{\partial x^2} + \frac{\partial T^{30}}{\partial x^3} &= 0 \\ \frac{\partial T^{\alpha 0}}{\partial x^\alpha} &= 0 \\ T^{\alpha 0}{}_{,\alpha} &= 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

O mesmo vale para as demais componentes de  $\mathbf{T}$  referentes ao momento. Assim, tem-se num espaço plano:

$$T^{\alpha\beta}{}_{,\alpha} = 0 \tag{2.18}$$

Como já se viu, haverá em torno de um ponto  $\mathcal{P}$  qualquer do espaço-tempo um sistema de coordenadas no qual o espaço é localmente minkowskiano. E, devido ao princípio da equivalência de Einstein, a física neste local é idêntica ao que ocorre no espaço-tempo plano da Relatividade Especial. Logo, no ponto  $\mathcal{P}$ :

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta}{}_{,\alpha} = 0 \quad \text{mas } \Gamma^\alpha{}_{\lambda\beta} \Big|_{\mathcal{P}} &= 0 \quad \forall \alpha, \lambda, \beta \Rightarrow \\ T^{\alpha\beta}{}_{,\alpha} + T^{\lambda\beta} \Gamma^\alpha{}_{\lambda\alpha} + T^{\lambda\alpha} \Gamma^\beta{}_{\lambda\alpha} &= 0 \\ T^{\alpha\beta}{}_{;\alpha} &= 0 \quad \text{em } \mathcal{P} \end{aligned} \tag{2.19}$$

A equação (2.19), além de independer do sistema de coordenadas, tem pelo, princípio geral da covariância, a mesma forma em todo o espaço-tempo. Logo, para toda distri-

buição de matéria e energia, tem-se que:

$$T^{\alpha\beta}{}_{;\alpha} = 0 \quad (2.20)$$

Devido a este último fato, é que se busca um tensor de Einstein cujo divergente seja também nulo. Tal tensor adotado em (2.15) não é o único que satisfaz (2.16) e, portanto, (2.20), mas, por razões também estéticas, foi adotado por Albert Einstein para se descrever a estrutura do espaço-tempo. Ocorre que, até o presente momento, com a confrontação de um significativo número de experimentos, tal escolha para o tensor de Einstein corresponde de fato com a realidade. (SCHUTZ, 2009, p.186)

Último ponto a se esclarecer é o valor da constante  $k$  que aparece em (2.14). Seu valor é tal que quando se toma o limite newtoniano, recupera-se a equação de campo gravitacional clássico, a saber ( $G$  sendo a constante gravitacional):

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \quad (2.21)$$

Com tal finalidade, encontra-se:

$$k = -\frac{8\pi G}{c^4} \quad (2.22)$$

Reescrevendo as equações de campo de Einstein com o valor acima para  $k$ , tem-se:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = -\frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu} \quad (2.23)$$

É precisamente esta última equação que será utilizada neste trabalho para se calcular tanto a estrutura do espaço-tempo ao redor da estrela de nêutrons como o perfil estrutural da própria estrela.

## 2.4 Equações de estrutura

Esta presente seção tem como objetivo mostrar o modelo que é tomado para o estudo, neste trabalho, de uma estrela de nêutrons, bem como as primeiras aplicações das equações de campo de Einstein, (2.23), sobre esse modelo.

Falou-se, no capítulo introdutório, da identificação de objetos conhecidos como pulsares como sendo manifestações astronômicas de estrelas de nêutrons. Os pulsos observados

oriundos desses pulsares são originados pela radiação provocada pela rotação do campo magnético dipolar da estrela de nêutrons, uma vez que seu eixo de rotação não coincide em geral com o eixo magnético. Isso tudo, apenas para lembrar duas das principais características dessas estrelas, os extremos valores para a sua velocidade de rotação e para a intensidade de seu campo magnético.

Todavia, é importante ressaltar que essas duas principais características não serão consideradas na resolução das equações de campo gravitacional. O modelo adotado consiste em tratar a estrela de nêutrons como sendo um corpo estático e esférico, sem campo magnético nem carga elétrica líquida.

Caso se assumisse a expressiva rotação da estrela, a simetria esférica teria de ser preterida à simetria axial, visto que a rotação achataria os polos da estrela tornando-a um elipsoide ao invés de uma esfera. Já, para se considerar campos elétricos e magnéticos, haveria também a necessidade de se resolver as equações do eletromagnetismo de Maxwell (em sua forma tensorial) simultaneamente às de Einstein. Um modelo que incorpore tais efeitos é consideravelmente mais complexo. Entretanto, não faz parte do escopo deste trabalho a sua abordagem, uma vez que seria um passo seguinte ao que é estudado nessa dissertação.

Quanto à matéria constitutiva da estrela, modela-se a mesma como um fluido ideal. As características de um fluido desse tipo são a ausência de viscosidade e de transmissão de calor. Das equações (2.23), a presença de matéria é representada pelo tensor energia-momento  $T^{\mu\nu}$ , fonte do campo gravitacional. O dever, agora, é obter o tensor energia-momento de um elemento de fluido ideal.

Para facilitar o raciocínio, toma-se um sistema de coordenadas  $\{x^{\bar{\alpha}}\}$  que, primeiramente, faça a descrição do espaço-tempo, num ponto  $(x_{\mathcal{P}}^{\bar{1}}, x_{\mathcal{P}}^{\bar{2}}, x_{\mathcal{P}}^{\bar{3}})$ , ser idêntica ao espaço-tempo de Minkowski, e, em segundo lugar, faça com que o elemento de fluido esteja em repouso com relação a este sistema no dado instante de tempo  $x_{\mathcal{P}}^{\bar{0}}$ .

Desse modo, a componente  $T^{\bar{0}\bar{0}}$  representa a densidade de energia total, denotada por  $\epsilon$ . A componente  $T^{\bar{0}\bar{i}}$  é a componente  $\bar{i}$  da densidade de corrente de energia, isto é, o fluxo de energia por área através de uma superfície de coordenada  $x^{\bar{i}}$  constante. Como exemplo, tem-se o seguinte incremento de fluxo de energia:

$$\delta\Phi_{energia}^{\bar{1}} = T^{\bar{0}\bar{1}}\delta x^{\bar{2}}\delta x^{\bar{3}} \quad (2.24)$$

A transmissão de energia só ocorre, ou por meio de trabalho, ou por troca de calor. Como o elemento de fluido está em repouso no sistema de referência utilizado, não há trabalho sendo realizado sobre o elemento. Além disso, num fluido ideal não há troca de calor. Logo, neste elemento de fluido:

$$T^{\bar{0}\bar{i}} = 0 ; \quad i = 1,2,3 \quad (2.25)$$

As componentes  $T^{\bar{i}\bar{0}}$  representam a densidade da componente  $\bar{i}$  do momento do elemento de fluido. Como, com relação ao sistema de referência adotado, esse elemento de fluido se encontra em repouso, ao menos no instante de tempo  $x^{\bar{0}}$ , a densidade do momento será nula. Assim:

$$T^{\bar{i}\bar{0}} = 0 ; \quad i = 1,2,3 \quad (2.26)$$

Quanto às componentes  $T^{\bar{i}\bar{j}}$ , elas significam o fluxo por unidade de área da componente  $\bar{i}$  do momento através de uma superfície de coordenada  $x^{\bar{j}}$  constante. Exemplo de incremento de fluxo de momento seria:

$$\delta\Phi_{px}^{\bar{3}} = T^{\bar{1}\bar{3}}\delta x^{\bar{1}}\delta x^{\bar{2}} \quad (2.27)$$

Sendo um fluxo do momento por área,  $T^{\bar{i}\bar{j}}$  pode ser matematicamente expressa por:

$$T^{\bar{i}\bar{j}} \sim \frac{\delta p^{\bar{i}}}{\delta t \delta a} \quad (2.28)$$

Acima,  $\delta a$  é a área de um elemento de superfície com coordenada  $x^{\bar{j}}$  constante. Mas  $\frac{\delta p^{\bar{i}}}{\delta t} \approx F^{\bar{i}}$ , onde  $F^{\bar{i}}$  seria a componente  $\bar{i}$  da força exercida pela vizinhança sobre o elemento de fluido em questão. Logo,

$$T^{\bar{i}\bar{j}} \sim \frac{\delta p^{\bar{i}}}{\delta t \delta a} \approx \frac{F^{\bar{i}}}{\delta a} \quad (2.29)$$

Quando  $j \neq i$ ,  $F^{\bar{i}}$  é paralelo à superfície, se tratando, portanto, de uma força de cisalhamento, a qual está relacionada à viscosidade do fluido. Porém, o fluido ideal não apresenta viscosidade, de maneira tal que:

$$T^{\bar{i}\bar{j}} = 0 ; i \neq j \quad (2.30)$$

Entretanto, com  $i = j$ ,  $F^{\bar{i}}$  é normal à superfície, por conseguinte  $\frac{F^{\bar{i}}}{\delta a} \approx p$ , onde  $p$  é a pressão do fluido nesse local. Assume-se que o fluido é isotrópico. Obtém-se finalmente o tensor energia-momento nesse elemento de fluido:

$$(T^{\bar{\mu}\bar{\nu}}) = \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

Note que a última equação é equivalente a (GLENDENNING, 2000, p.17):

$$T^{\bar{\mu}\bar{\nu}} = -p\eta^{\bar{\mu}\bar{\nu}} + (p + \epsilon)u^{\bar{\mu}}u^{\bar{\nu}} \quad (2.32)$$

Em (2.32),  $u^{\bar{\mu}}$  é a quadri-velocidade do elemento de fluido. Até aqui se usou um sistema de coordenadas em que, no evento  $\mathcal{P}$ ,  $g^{\bar{\mu}\bar{\nu}} = \eta^{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ . Escrevendo, pois, (2.32) de modo geral:

$$T^{\bar{\mu}\bar{\nu}} = -pg^{\bar{\mu}\bar{\nu}} + (p + \epsilon)u^{\bar{\mu}}u^{\bar{\nu}} \quad (2.33)$$

A equação (2.33) é uma equação tensorial, portanto independente de coordenadas. Indo para um sistema de coordenadas qualquer  $\{x^\alpha\}$ , tem-se que:

$$T^{\mu\nu} = -pg^{\mu\nu} + (p + \epsilon)u^\mu u^\nu, \quad \text{em } \mathcal{P} \quad (2.34)$$

No entanto, pelo princípio da covariância geral, a última equação é válida para todo ponto do espaço-tempo:

$$T^{\mu\nu} = -pg^{\mu\nu} + (p + \epsilon)u^\mu u^\nu \quad (2.35)$$

Como dito acima, a estrela é tomada como sendo esférica e estática. Isso implica que a solução das equações de campo para a métrica terá uma simetria esférica além de ser constante no tempo. A partir daqui utiliza-se unidades tais que  $c = G = 1$ . Assim, a expressão para o tempo próprio  $\tau$  terá a seguinte forma em coordenadas esféricas (GLENDENNING, 2000, p.46):

$$d\tau^2 = e^{2\nu(r)} dt^2 - e^{2\lambda(r)} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (2.36)$$

Os termos  $e^{2\nu}$  e  $e^{2\lambda}$  são chamados de funções métricas e dependem da distância radial  $r$ . O objetivo é, pois, resolver essas funções primeiro para a região externa à estrela e depois para a região interna.

Para a região externa à estrela, cujo raio será denotado por  $R_e$ , não há matéria, de modo que o tensor energia-momento é portanto nulo. As equações de Einstein tomam, pois, a seguinte forma:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \equiv 0 \quad (2.37)$$

Como já foi citado no início do capítulo, a solução para essas equações é a conhecida solução de Schwarzschild:

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \quad , r > R_e \quad (2.38)$$

Já a solução para a região interna deve levar em conta a presença de matéria, com o tensor energia-momento dado por (2.35). Contudo, é útil reescrever as equações diferenciais (2.23) de modo que ao invés de dar o resultado da métrica  $g^{\mu\nu}$  elas dão a solução para o comportamento de grandezas relacionadas à estrutura da estrela de nêutrons, como a sua pressão em função da distância radial  $r$  por exemplo. Com esse intuito é possível derivar das equações de Einstein as seguintes equações de estrutura da estrela (GLENDENNING, 2000, p.52):

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \epsilon(r) \quad (2.39)$$

$$\frac{dp}{dr} = - \frac{[p(r) + \epsilon(r)][M(r) + 4\pi r^3 p(r)]}{r[r - 2M(r)]} \quad (2.40)$$

Esta última equação (2.40) é conhecida como equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, em que  $M(r)$  é a massa gravitacional da estrela desde o centro até a distância radial  $r$ ;  $p$  e  $\epsilon$  são a pressão e a densidade de energia em cada ponto respectivamente.

Ambas as equações acima geram uma solução para a estrutura da estrela uma vez

supridas das duas condições de contorno que estabelecem o valor da densidade de energia para  $r = 0$ , e o fato de que a estrela termina quando a pressão vai a zero; mais a equação de estado da matéria que conecta a pressão à densidade de energia.

Desse modo obtém-se o raio  $R_e$  da estrela de nêutrons, isto é, a distância radial  $r$  no qual a pressão  $p$  é igual a zero. Consequentemente obtém-se a massa gravitacional  $M$  da estrela, dada por  $M = M(r = R_e)$ . Estes valores, evidentemente, dependerão da densidade central de energia, de maneira que ao se variar continuamente esta condição, obter-se-á uma sequência de soluções para cada tipo de modelo microscópico adotado.

A física que está envolvida no tratamento microscópico da matéria que compõe as estrelas de nêutrons será descrita pela teoria nuclear relativística, assunto este do próximo capítulo. Dessa teoria é que surgem os diferentes modelos e suas equações de estado para a matéria dentro dessas estrelas.

## Capítulo 3

# Estrutura e Composição de Estrelas de Nêutrons

Uma vez esclarecida a teoria que lida com a configuração macroscópica das estrelas de nêutrons, considera-se no presente capítulo a natureza microscópica da matéria que compõe essas mesmas estrelas.

A Teoria Geral da Relatividade por si só não é capaz de resolver a configuração estrutural de uma estrela de nêutrons, já que, no modelo estático e esférico tomado anteriormente para a estrela, além do modelo de ela ser composta de um fluido ideal, aparece nas equações de estrutura (2.39) e (2.40) a pressão e a densidade de energia da matéria. Com efeito a teoria de Einstein não estabelece a relação entre essas duas grandezas como uma sendo função da outra, função esta mais comumente chamada por equação de estado da matéria. Como foi dito, esta relação e mais duas condições de contorno são essenciais para se encontrar uma solução única para essas equações diferenciais. Logo, faz-se extremamente necessário determinar primeiramente a conexão entre a pressão e a densidade de energia da matéria que compõe as estrelas de nêutrons.

A equação de estado por sua vez é encontrada por meio de um tratamento estatístico tal como se faz na Física Estatística. Ela, partindo de um suposto modelo microscópico para descrição da matéria, gera relações entre grandezas macroscópicas dessa matéria, tais como a pressão, temperatura, potencial químico, densidade de energia e outras. Sendo assim, as próximas seções se encarregam de estudar a natureza da matéria que eventualmente forma as estrelas de nêutrons, bem como de propor modelos e teorias a nível microscópico com o objetivo de determinar as equações de estado.

### 3.1 Natureza da matéria que compõe as estrelas de nêutrons

Encontrou-se no capítulo introdutório uma estimativa para a densidade média da matéria que compõe as estrelas de nêutrons:

$$\bar{\epsilon} = 1,37 \cdot 10^{14} g/cm^3 \quad (3.1)$$

Sabe-se que a densidade da matéria dos núcleos atômicos é da ordem de:

$$\bar{\epsilon}_0 \approx 2,5 \cdot 10^{14} g/cm^3 \quad (3.2)$$

A densidade média da matéria dessas estrelas compactas e da matéria presente nos núcleos atômicos são da mesma ordem de grandeza. Logo aquele tipo de matéria deve ser muito similar à que constitui os núcleos dos átomos. Como estes núcleos são formados de núcleons - prótons e nêutrons - é razoável presumir que a matéria que forma as estrelas de nêutrons também seja composta de núcleons, num estado da matéria em que estes núcleons não estão mais agrupados em átomos, mas preenchem continuamente a estrela.

É evidente que além de semelhanças, as matérias desses dois tipos de sistemas também apresentam diferenças. A primeira é o papel da gravidade: na escala dos núcleos atômicos a interação gravitacional tem sua intensidade extremamente baixa se comparada às demais interações, especialmente a forte; enquanto que numa estrela de nêutrons sua dimensão macroscópica permite o acúmulo da interação gravitacional - que é de longo alcance - entre toda a matéria-energia que a constitui, ao contrário da interação forte - que é de curto alcance - que se torna saturada exercendo influência direta apenas entre partículas vizinhas. Tal influência também traz consequências macroscópicas via equação de estado, mas a grande diferença mesmo entre as duas matérias é quanto ao tipo de interação que exerce papel decisivo em manter o respectivo sistema ligado: a forte mantém os núcleos coesos, ao passo que a gravitacional mantém as estrelas coesas. (GLENDENNING, 2000, p.232)

Outra diferença bastante significativa é o fato de os núcleos serem carregados eletricamente, enquanto que a carga elétrica líquida nas estrelas de nêutrons deve ser muito pequena, se não nula, a fim de se manter a estrela estável, visto que ambas as interações

eletromagnética e gravitacional são de longo alcance, sendo a primeira muito mais intensa que a segunda. Portanto, espera-se que a matéria das estrelas de nêutrons seja muito mais povoada por partículas neutras, como os nêutrons, do que carregadas eletricamente. Não é necessário, porém, que a estrela seja completamente desprovida de prótons. É possível haver uma certa quantidade dessas partículas positivas desde que haja também partículas eletricamente negativas a fim de neutralizar esses prótons. Um primeiro candidato é certamente o elétron. Isto é também uma grande diferença entre esses dois tipos de matéria, porque os núcleos atômicos, primeiramente não possuem elétrons, e depois preservam a simetria de isospin, fazendo com que o número de prótons seja aproximadamente igual ao de nêutrons, ao contrário das estrelas que possuem mais nêutrons do que prótons. Daí dizer que a matéria dessas estrelas compactas é bastante antissimétrica. (GLENDEENING, 2000, p.232)

Uma última diferença aqui mencionada diz respeito às diferentes espécies de partículas presentes nesses dois sistemas. Ambas compartilham prótons e nêutrons, mas, como dito logo acima, as estrelas contêm também os elétrons. Mas não para por aí. A equação (3.1) é uma estimativa para uma densidade média. Espera-se, no entanto, devido às equações de estrutura, que as estrelas possuam todo um perfil de densidade, com valores em seu centro entre três a dez vezes a densidade típica dos núcleos atômicos até valores muito baixos em sua superfície, eventualmente composta de elementos químicos oriundos da fase termonuclear de suas estrelas progenitoras. Elevadas densidades podem fazer com que a energia de Fermi de um tipo de partícula seja maior que a massa de uma partícula mais pesada, tornando energeticamente mais favorável a conversão da partícula mais leve para esta mais massiva. Por exemplo, o elétron se convertendo em um lépton de segunda geração, o múon. Da mesma forma o próton e nêutron podem se converter em bárions mais pesados. Como a escala temporal da evolução de uma estrela de nêutrons é muito maior que o tempo característico da interação fraca, é bem possível que esta atue de modo a não conservar a carga total de estranheza da estrela, de modo que a presença de híperons também seja possível. Em suma, enquanto que os núcleos atômicos possuem apenas núcleons, a matéria em estrelas de nêutrons contém uma ligeira diversidade de hádrons e léptons, apresentadas na tabela (3.1) (GLENDEENING, 2000, p.147).

Um parêntese a ser feito diz respeito a uma propriedade muito peculiar da interação forte. Quando a densidade e a temperatura estão na mesma ordem de grandeza do

Bárions					
Partícula	Massa( $MeV$ )	Projeção do isospin	Spin	Carga Elétrica ( $e$ )	Estranheza
próton	$m_p = 938$	+1/2	1/2	+1	0
nêutron	$m_n = 938$	-1/2	1/2	0	0
$\Lambda^0$	$m_\Lambda = 1115$	0	1/2	0	-1
$\Sigma^+$	$m_\Sigma = 1190$	+1	1/2	+1	-1
$\Sigma^0$	$m_\Sigma = 1190$	0	1/2	0	-1
$\Sigma^-$	$m_\Sigma = 1190$	-1	1/2	-1	-1
$\Xi^0$	$m_\Xi = 1315$	+1/2	1/2	0	-2
$\Xi^-$	$m_\Xi = 1315$	-1/2	1/2	-1	-2
Mésons					
Partícula	Massa( $MeV$ )	Isospin	Spin	Carga Elétrica ( $e$ )	Estranheza
$\sigma$	$m_\sigma = 550$	0	0	0	0
$\omega$	$m_\omega = 783$	0	1	0	0
$\rho$	$m_\rho = 769$	1	1	+1, 0, -1	0
Léptons					
Partícula	Massa( $MeV$ )	Isospin	Spin	Carga Elétrica ( $e$ )	Estranheza
$e^-$	$m_e = 0,511$	-	1/2	-1	-
$\mu^-$	$m_\mu = 105$	-	1/2	-1	-

Fonte: Negreiros, *Numerical Study of the Properties of Compact Stars*, pp. 16-17

Tabela 3.1: Eventuais hádrons e léptons presentes numa estrela de nêutrons

cotidiano humano essa matéria se encontra numa fase em que os quarks estão confinados em hádrons, e se encontra na forma de núcleos atômicos constituídos de núcleons que interagem entre si por meio de uma espécie de resíduo da interação forte, a força nuclear, que é uma manifestação da troca de mésons entre os núcleons. Mas quando a densidade é muito alta, cerca de três ou quatro vezes a densidade do núcleo atômico, ou mesmo a temperatura, quando essa possui uma ordem maior do que centenas de MeV, a interação entre as partículas se torna fraca. Isto é conhecido como liberdade assintótica, quanto maior a densidade ou a transferência de momento, menor a intensidade da interação entre as partículas que interagem via força forte. (KHRIPLOVICH, 1969; GROSS; WILCZEK, 1973; POLITZER, 1973)

No interior das estrelas compactas, espera-se que a densidade atinja valores maiores do que três ou quatro vezes a densidade de um núcleo atômico nas regiões mais próximas do núcleo dessas estrelas. Com a liberdade assintótica ocorrendo em regiões de elevadas densidades, comparadas à densidade dos núcleos atômicos, é razoável a expectativa de que haja uma transição de fase da matéria nuclear composta de hádrons, para uma matéria na qual os quarks estejam livres assintoticamente, isto é, uma matéria na qual os quarks não estão mais confinados em hádrons, mas estão livres para se locomoverem nessa região

superdensa, formando uma matéria de quarks. Com isso acontecendo, estas estrelas possuem um núcleo feito de matéria de quarks desconfiados e um manto de matéria hadrônica, consistindo numa estrela híbrida.

## 3.2 Descrição relativística da matéria nuclear

Viu-se na seção anterior as semelhanças e diferenças entre a matéria que compõe os núcleos atômicos e a que compõe as estrelas de nêutrons. Trabalha-se a partir de agora com um conceito mais geral, chamado de matéria nuclear, que nada mais é do que um sistema formado por núcleons, e demais bárions, híperons e mésons, em que a força nuclear possui papel principal, havendo também a possibilidade da existência de léptons. Isto é, a matéria nuclear é tão somente um modo de se generalizar a matéria dos núcleos atômicos para condições físicas em que a densidade e/ou a temperatura vão além das presentes nesses mesmos átomos.

Precisa-se, pois, de uma teoria que descreva esse tipo de matéria. Como ela envolve a força forte em um importante papel na interação entre as partículas que a constitui, poder-se-ia pensar em usar a teoria da Cromodinâmica Quântica na descrição da matéria nuclear. No entanto, os graus de liberdade dessa teoria são as partículas elementares do modelo padrão que interagem via força forte, isto é, os quarks e os glúons com seus diferentes sabores e cores. Porém, as partículas que compõe a matéria nuclear são partículas compostas dessas elementares. Logo, os quarks e glúons estão confinados em hádrons. Sendo assim, seria mais prático trabalhar tomando-se como graus de liberdade da teoria os hádrons. Supõe-se, por conseguinte, que os bárions interagem entre si via troca de mésons.

Extrapolar a matéria nuclear desde o regime encontrado em núcleos atômicos até regimes de elevadas densidades não é uma tarefa unívoca. Fato teórico advindo da nossa incerteza empírica sobre o comportamento da matéria nuclear nessas condições extremas. Como Glendenning (2000, p. 239) expressa “essencialmente nada é conhecido acerca da matéria superdensa a partir de experimentos diretos. Nenhum único ponto na equação de estado de matéria simétrica nuclear ou de nêutrons acima da densidade de saturação foi medida. Na verdade, é possível que nunca tenhamos conhecimento direto vindo do laboratório”. Tem-se, entretanto, alguns princípios físicos que ajudam a guiar esse processo

de extrapolação. São eles (GLENDEENING, 2000, p. 240):

1. Relatividade geral;
2. Covariância de Lorentz;
3. Equação de estado causal ( $v^2 = dp/d\epsilon \leq 1$ );
4. Estabilidade microscópica conhecida como princípio de Le Chatelier ( $dp/d\rho \geq 0$ );
5. Conservação de carga elétrica e de número bariônico;
6. Princípio de Pauli;
7. Equilíbrio beta generalizado;
8. Equilíbrio de fase;
9. Liberdade assintótica dos quarks;
10. Propriedades da matéria na densidade de saturação.

O primeiro ponto acima já foi abordado no capítulo 2. A fim de se atender aos dois pontos seguintes lança-se mão de uma teoria quântica de campo relativística, da qual esses dois princípios brotam naturalmente. Os demais pontos são igualmente considerados ao longo desse estudo, tal como a liberdade assintótica que é levada em conta para o caso da estrela híbrida.

Desse modo, utiliza-se a seguinte densidade lagrangiana para se descrever a matéria nuclear, em que os bárions serão os campos fermiônicos e os mésons os campos bosônicos (GLENDEENING, 1982, 1985, 1987a, 1987b):

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \sum_B \bar{\psi}_B (i\gamma_\mu \partial^\mu - m_B + g_{\sigma B} \sigma + g_{\omega B} \gamma_\mu \omega^\mu - \frac{1}{2} g_{\rho B} \gamma_\mu \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\rho}^\mu) \psi_B \\
& + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma - m_\sigma^2 \sigma^2) - \frac{1}{4} \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu \\
& - \frac{1}{4} \boldsymbol{\rho}_{\mu\nu} \cdot \boldsymbol{\rho}^{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_\rho^2 \boldsymbol{\rho}_\mu \cdot \boldsymbol{\rho}^\mu - \frac{1}{3} b m_n (g_{\sigma n} \sigma)^3 - \frac{1}{4} c (g_{\sigma n} \sigma)^4 \\
& + \sum_\lambda \bar{\psi}_\lambda (i\gamma_\mu \partial^\mu - m_\lambda) \psi_\lambda
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Na equação (3.3),  $B$  se refere a um dado tipo de bárion, e o somatório em  $B$  é, portanto, sobre todos os tipos de bárions listados na tabela (3.1). O mesmo ocorre para o somatório em  $\lambda$ , contanto que agora o somatório é sobre todos os léptons também listados na tabela (3.1).  $\psi_B$  e  $\psi_\lambda$  são os campos fermiônicos ( $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma_0$  é o conjugado);  $\sigma$ ,  $\omega^\mu$  e  $\rho^\mu$  os campos do respectivo méson ( $\omega_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu$ , idem para  $\rho_{\mu\nu}$ , tal que  $\rho^\mu = (\rho_1^\mu, \rho_2^\mu, \rho_3^\mu)$ , ou seja,  $\rho^\mu$  representa o tripleto de isospin do méson  $\rho$ );  $\tau$  é o vetor isospin;  $m_n$ ,  $m_\sigma$ ,  $m_\omega$ ,  $m_\rho$  são as massas do núcleon e dos dados mésons;  $\partial^\mu = \partial/\partial x_\mu$ ;  $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ ; além das matrizes de Dirac  $\gamma^\mu$ :

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3), \quad \gamma^0 = \beta, \quad \gamma^i = \beta \alpha^i \quad (3.4)$$

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Sendo, nesta última equação,  $\sigma^i$  as matrizes de Pauli, e  $\mathbb{I}$  a matriz identidade.

Por fim, as constantes de acoplamento  $g_{\sigma B}$ ,  $g_{\omega B}$ ,  $g_{\rho B}$ ,  $b$  e  $c$  são parâmetros do modelo. Os parâmetros associados a dado multipletto de isospin são todos iguais para cada projeção de isospin. Há o fato também de que os três parâmetros referentes ao núcleon ( $g_{\sigma n}$ ,  $g_{\omega n}$ ,  $g_{\rho n}$ ) mais o  $b$  e o  $c$  são tomados a fim de se atender precisamente ao último dos princípios listados acima, o de que a matéria nuclear deve apresentar as propriedades empiricamente conhecidas na densidade de saturação, isto é, no regime da matéria presente nos núcleos atômicos. Esses cinco parâmetros são, pois, ajustados de modo que cinco grandezas físicas se aproximem de seus respectivos valores determinados empiricamente na densidade de saturação; são elas dadas na tabela (3.2). (GLENDENNING, 2000, p. 181; NEGREIROS, 2009, p.13)

Energia de ligação por núcleon	$E/N$	$-16 MeV$
Massa efetiva do núcleon	$m^*/m_n$	$0,796$
Coefficiente de energia de simetria	$a_{sim}$	$32,5 MeV$
Módulo de compressibilidade	$K$	$265 MeV$
Densidade de saturação	$\rho_0$	$0,16 fm^{-3}$

Fonte: Negreiros, *Numerical Study of the Properties of Compact Stars*, p. 13

Tabela 3.2: Propriedades coletivas do núcleo atômico utilizadas para restringir modelos para a matéria de estrelas de nêutrons.

O modelo de equação de estado adotado neste trabalho é o G300 (GLENDENNING,

1989). Os valores adotados por este modelo para essas grandezas são dados na tabela (3.3).

Modelo G300	
$E/N$	$-16,3MeV$
$m^*/m_n$	$0,78$
$a_{sim}$	$32,5MeV$
$K$	$300MeV$
$\rho_0$	$0,16fm^{-3}$

Fonte: Negreiros, *Numerical Study of the Properties of Compact Stars*, p. 39

Tabela 3.3: Propriedades coletivas do núcleo atômico estipuladas pelo modelo G300 para a matéria de estrelas de nêutrons.

Por fim, os valores adotados para os parâmetros citados anteriormente estão na tabela (3.4).

Constante de acoplamento	Modelo G300
$g_{\sigma n}$	$9,1373$
$g_{\sigma \Lambda}$	$9,1373$
$g_{\sigma \Sigma}$	$9,1373$
$g_{\sigma \Xi}$	$9,1373$
$g_{\omega n}$	$8,6324$
$g_{\omega \Lambda}$	$8,6324$
$g_{\omega \Sigma}$	$8,6324$
$g_{\omega \Xi}$	$8,6324$
$g_{\rho n}$	$8,3029$
$g_{\rho \Lambda}$	$8,3029$
$g_{\rho \Sigma}$	$8,3029$
$g_{\rho \Xi}$	$8,3029$
$b$	$0,00414$
$c$	$0,01529$

Fonte: Negreiros, *Numerical Study of the Properties of Compact Stars*, p. 39

Tabela 3.4: Constantes de acoplamento utilizadas neste trabalho.

### 3.2.1 Aproximação de campo médio

Trabalha-se com a equação (3.3) da maneira como é de costume no formalismo lagrangiano, extremizando a ação por meio das equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial\phi)} = 0$$

Nesta equação acima,  $\phi$  representa um campo qualquer. Haverá uma equação deste

tipo para cada espécie de partícula, os oito bárions, os três mésons e os dois léptons da tabela (3.1), cada qual representado por um campo.

A seguir, após se encontrar as equações de movimento de todos esses campos, faz-se uma importante aproximação. Supõe-se que a matéria nuclear das estrelas de nêutrons está distribuída infinitamente, e ainda que esteja numa situação estacionária e uniforme. Supõe-se assim que a estrela de nêutrons se encontre no seu estado fundamental. Nesse contexto é possível utilizar a aproximação de campo médio com a finalidade de as equações de movimento assumirem formas mais simples e de fácil resolução numérica. Desse modo substitui-se os valores dos campos dos mésons pelos seus valores médios, e as correntes de fonte dos bárions assumem seus valores esperados no estado fundamental. Define-se estado fundamental, como sendo o caso em que os autoestados de momento de partícula única para um dado tipo de bárion está preenchida até o seu nível de Fermi. (GLENDENNING, 2000, p. 243)

Por meio dessas últimas suposições e a aproximação de campo médio é possível resolver as diferentes equações de movimento dos mésons e férmions. A resolução de tais equações não é simples, uma vez que se lida com um sistema de equações acopladas, mas é perfeitamente possível de ser feita por meio de métodos numéricos (Cf. GLENDENNING, 2000, pp.189-191,242-248).

Uma vez resolvidas, calcula-se o valor esperado no estado fundamental do tensor energia-momento a partir da seguinte expressão (GLENDENNING, 2000, p. 244):

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} \mathcal{L} + \sum_{\phi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}\phi)} \partial^{\nu} \phi$$

Usa-se a expressão (2.35), ou melhor a expressão (2.32) posto que a matéria está estacionária, para se encontrar a densidade de energia  $\epsilon$  e a pressão  $p$ .

Por fim utiliza-se também aquele princípio supracitado acerca de o sistema inteiro estar em equilíbrio beta generalizado. Dessa forma ambos os sentidos das reações e decaimentos quaisquer existentes entre as partículas ocorrem na mesma taxa. Isto significa que haverá relações entre os potenciais químicos das diferentes espécies de partículas, de modo que haverá apenas duas grandezas independentes, por causa de haver apenas duas cargas conservadas, a elétrica e o número bariônico. Somado à exigência da neutralidade local de carga elétrica na estrela de nêutrons, e às relações entre as densidades de número bariônico e os potenciais químicos via momento de Fermi, haverá no final de tudo apenas

uma grandeza independente, para a qual escolhe-se a densidade de número total  $\rho$ .

A partir de então, basta escolher um valor para a densidade de número total, para ficar completamente determinado quaisquer outras grandezas, incluindo a densidade de energia  $\epsilon$  e a pressão  $p$ . Faze-se isso para vários valores de  $\rho$ . E conclui-se expressando a relação entre a pressão e a energia  $p(\epsilon)$ , que é a tão desejada equação de estado.

### 3.3 *MIT bag model*

A matéria de quarks será tratada neste trabalho por meio do modelo conhecido como *MIT bag model*. Nesse modelo os quarks estão livres de qualquer interação, podendo se mover livremente dentro de uma região com volume  $V$ . Os quarks só não podem sair dessa região, ou seja, apesar de não estarem mais confinados em hádrons, continuam confinados, só que agora numa região “sem cor” bem maior. (CHODOS et al, 1974)

Desse modo, esse modelo descreve os quarks como um gás de férmions livres. Só há apenas um porém: a cromodinâmica quântica diz que o vácuo é completamente ausente de quarks, e a presença destes só ocorre, pois, a custo de energia. Tal energia é proporcional ao volume ocupado pelos quarks, em que a constante de proporcionalidade  $B$  é conhecida como *bag constant*. (GLENDEENING, 2000, p. 323)

É difícil se obter um valor preciso para  $B^{1/4}$ , mas estima-se que tal constante possua uma ordem de grandeza de  $10^2 MeV$ . Neste trabalho adota-se que:

$$B^{1/4} = 139 MeV \quad (3.6)$$

Por causa disso, a energia total  $U$  do sistema será a energia devida à presença de quarks nessa região de volume  $V$ , isto é,  $BV$ ; mais a energia do gás de férmions  $U_{gás}$ . Tem-se pois:

$$\begin{aligned} U &= BV + U_{gás} \\ \Rightarrow u &= \frac{U}{V} = B + \sum_f \frac{\gamma^{(f)}}{2\pi^2} \int_0^\infty g^{(f)}(k) \epsilon(k) k^2 dk \end{aligned} \quad (3.7)$$

Alguns dos resultados e fórmulas usados neste capítulo são demonstrados no apêndice B, que estuda brevemente as propriedades de um gás de férmions. Uma dessas fórmulas

é justamente a integral (B.54) usada acima para a densidade de energia do gás de quarks. Nessa fórmula, a função  $g^{(f)}$  é definida em (B.40) e significa o número de ocupação médio, referente à  $f$ -ésima espécie de partícula, do nível de energia com momento igual a  $k$  e energia  $\epsilon(k)$ ;  $\gamma^{(f)}$  é o fator de degenerescência da  $f$ -ésima espécie de partícula que é igual a  $\gamma_{spin}^{(f)} \cdot \gamma_{cor}^{(f)} = 2 \cdot 3 = 6$  no caso dos quarks, e igual a  $\gamma_{spin}^{(f)} = 2$  no caso dos léptons. Apesar de se ter referido até o momento apenas à presença de quarks na matéria que eventualmente está presente no núcleo de estrelas híbridas, não se pode esquecer o fato de que também há alguns elétrons e possivelmente até múons nesse núcleo. Isto para que haja a neutralidade local de carga elétrica na matéria de quarks e a estrela seja estável. Logo, o somatório na equação (3.7) é sobre todas as espécies de partículas, onde  $f$  pode ser os quarks up, down e strange, mas também os léptons elétron e mesmo o múon. Estas partículas mais pesadas, o strange e o múon, aparecem porque a energia de Fermi do up e do down nesse sistema pode atingir valores maiores que a massa do quark strange, fazendo com que a conversão dos quarks up e down em quarks strange seja energeticamente mais favorável; o mesmo ocorrendo para a energia de Fermi do elétron, fazendo com que a sua conversão para múon também possa ser energeticamente mais favorável.

Outra grandeza importante é a densidade de número bariônico  $\rho_b$ , dada por:

$$\begin{aligned}
 \rho_b &= \frac{1}{V} \sum_f q^{(f)} N^{(f)} \\
 &= \sum_f q^{(f)} \frac{N^{(f)}}{V} \\
 &= \sum_f q^{(f)} \nu^{(f)} \\
 &= \sum_f q^{(f)} \frac{\gamma^{(f)}}{2\pi^2} \int_0^\infty g^{(f)}(k) k^2 dk
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Acima foi utilizado a equação (B.48). O número bariônico do  $f$ -ésimo tipo de partícula, denotado por  $q^f$  é igual, no caso dos quarks up, down e strange, a  $1/3$ , enquanto que o dos léptons é evidentemente nulo.

A mesma expressão (3.8) pode ser utilizada para se calcular outras densidades de carga, como a elétrica, a de estranheza e a de número de léptons  $\rho_e$ , utilizada mais abaixo (apesar da possibilidade da existência de múons nesse tipo de matéria, considera-se aqui

apenas a presença de elétrons).

Por fim a pressão é dada por:

$$p = -B + \sum_f \frac{\gamma^{(f)}}{6\pi^2} \int_0^\infty g^{(f)}(k) \frac{d\epsilon(k)}{dk} k^3 dk \quad (3.9)$$

A fim de se resolver as equações (3.7), (3.8) e (3.9), considera-se que o sistema está a temperatura de zero absoluto. Isto é equivalente a  $\beta = (k_B T)^{-1}$  tender a infinito, que por sua vez faz com que a função  $g(k)$ , definida em (B.40), tenda também a uma função degrau:

$$g^{(f)}(k) = \frac{1}{e^{\beta[\epsilon(k) - \mu_f]} + 1} \rightarrow \Theta(\mu_f - \epsilon(k)), \quad \beta \rightarrow \infty \quad (3.10)$$

Logo, para temperatura a zero kelvin, a ocupação dos níveis é igual a:

$$g^{(f)}(k) = \Theta(\mu_f - \epsilon(k)) = \begin{cases} 1, & \text{se } \epsilon(k) \leq \mu_f \\ 0, & \text{se } \epsilon(k) > \mu_f \end{cases} \quad (3.11)$$

O significado dessa última equação é que na temperatura de zero kelvin todos os níveis de energia de uma determinada espécie de partícula estarão ocupados com uma partícula caso a energia desses níveis seja menor ou igual a  $\mu_f$ , o potencial químico do respectivo tipo de partícula; ou estarão desocupados, caso a energia desses níveis seja maior que  $\mu_f$ . O último nível ocupado, com energia igual a  $\mu_f$  é conhecido como nível de Fermi e sua energia correspondente como energia de Fermi. Desse modo, diz-se que o sistema se encontra completamente degenerado, uma vez que é impossível extrair dele qualquer quantidade de energia, posto que todos os níveis menos energéticos já estão ocupados, e o princípio de exclusão de Pauli impede que uma partícula de um nível superior caia para um inferior, emitindo radiação, por este nível já estar ocupado.

A equação de estado que é obtida para um gás relativístico degenerado formado por partícula livres, não contempla, porém, a interação via força forte entre os quarks. A fim de se levar em conta essa interação faz-se uma aproximação até primeira ordem na constante de acoplamento da interação forte, denotada por  $\alpha_c$ , no cálculo da equação de estado para a matéria de quarks. Pode-se até dizer que a equação de estado oriunda do modelo de gás de quarks livres vem de uma aproximação de ordem zero para a interação

entre os quarks, uma vez que se introduziu no modelo a constante  $bag$ ,  $B^{1/4} = 139MeV$ . Mas dá-se um passo além neste trabalho, lançando-se mão dessa aproximação de primeira ordem em  $\alpha_c$ . Mais detalhes sobre o modelo de gás relativístico completamente degenerado, bem como a correção feita pela aproximação de primeira ordem citada, são encontrados no apêndice B.

### 3.4 Equações de estado

Na seção 3.1 mencionou-se que a estrela de nêutrons é composta por uma região de matéria feita exclusivamente de hádrons e, no caso das estrelas híbridas, também por uma região de matéria de quarks desconfinados. Há, entretanto, tanto para a estrela hadrônica como para a híbrida, uma outra região: a crosta dessas estrelas. Devido às equações de estrutura (2.40) e (2.39), a densidade de energia irá variar desde valores de três ou quatro vezes a densidade de saturação ( $\epsilon_0 = 2,51 \cdot 10^{14}g/cm^3$ ) no seu centro até valores muito baixos na superfície. Esse valor baixo da densidade fará com que a matéria da superfície, isto é, da crosta tenha características diferentes das regiões mais internas.

A estrela de nêutrons tem como origem uma estrela termonuclear massiva a qual consegue sintetizar o ferro em seu núcleo, que por sua vez colapsa se transformando numa proto-estrela de nêutrons. Como o núcleo atômico do ferro é o estado mais estável da matéria nuclear quando a temperatura e a pressão são iguais a zero, tem-se que a camada mais externa da crosta, onde a pressão é justamente zero, será composta de átomos de ferro provenientes da época termonuclear. A medida que se adentra a crosta a pressão aumenta, bem como a compressão dos átomos, de modo que não haverá mais espaço para a estrutura atômica comum e os átomos vão sendo ionizados dependendo da profundidade. Haverá um ponto em que os átomos estarão completamente ionizados. Os íons se arranjarão em uma rede cristalina imersa num fluido de elétrons. Mais adentro, os íons se tornam cada vez mais pesados e ricos em nêutrons até a densidade atingir o valor de  $\epsilon_{drip} \approx 4 \cdot 10^{11}g/cm^3$ , em que os nêutrons mais fracamente ligados passam a se liberar dos seus íons formando um fluido de nêutrons. Quando a densidade atinge valores maiores que a densidade de saturação  $\epsilon_0$ , todos os núcleos já estão dissolvidos dando origem à matéria de hádrons (Cf. GLENDENNING, 2000, pp.249-251). Maiores detalhes sobre a crosta de estrelas de nêutrons podem ser encontradas nos trabalhos de Baym, Pethick

e Sutherland (1971); Negele e Vautherin (1973); Vautherin e Bonche (1981); Lamb et al (1981); Ravenhall, Pethick e Wilson (1983); Ravenhall, Pethick e Lattimer (1983); Williams e Koonin (1985).

O modelo utilizado para se descrever a matéria composta exclusivamente de hádrons é o G300, o qual descreve a matéria de hádrons a partir de uma teoria quântica de campo relativística para a matéria nuclear com aproximação de campo médio, descrita na seção 3.2. Suas suposições para certas propriedades de tal matéria se encontram na tabela (3.3). Já o modelo usado na descrição da matéria de quarks é o *MIT bag model* com correção de primeira ordem na constante de acoplamento  $\alpha_c$ , descrito na seção 3.3.

Desses modelos extraíram-se as equações de estado que serão utilizadas no cálculo das equações de estrutura das estrelas de hádrons e híbrida. Para a primeira a equação de estado usada é apenas a mesma equação de estado encontrada para a matéria feita exclusivamente de hádrons. Já para a estrela híbrida, adotou-se um limite ( $\epsilon = 1,93\epsilon_0$ ) para a densidade de energia da matéria que compõe tal estrela abaixo do qual, usa-se a equação de estado da matéria de hádrons, e acima do qual usa-se a equação de estado gerada pelo *MIT bag model*. A crosta de ambos os tipos de estrelas é descrita pela equação de estado de Baym, Pethick e Sutherland ( $P_{BPS}(\epsilon)$ ) e vale desde densidades próximas a zero até a densidade  $\epsilon = 0,5\epsilon_0$ , a partir da qual começa a equação de estado da matéria de hádrons.

A seguir os gráficos (3.1), que relacionam a pressão com a densidade de energia da matéria para o caso de uma estrela de hádrons e de uma híbrida.

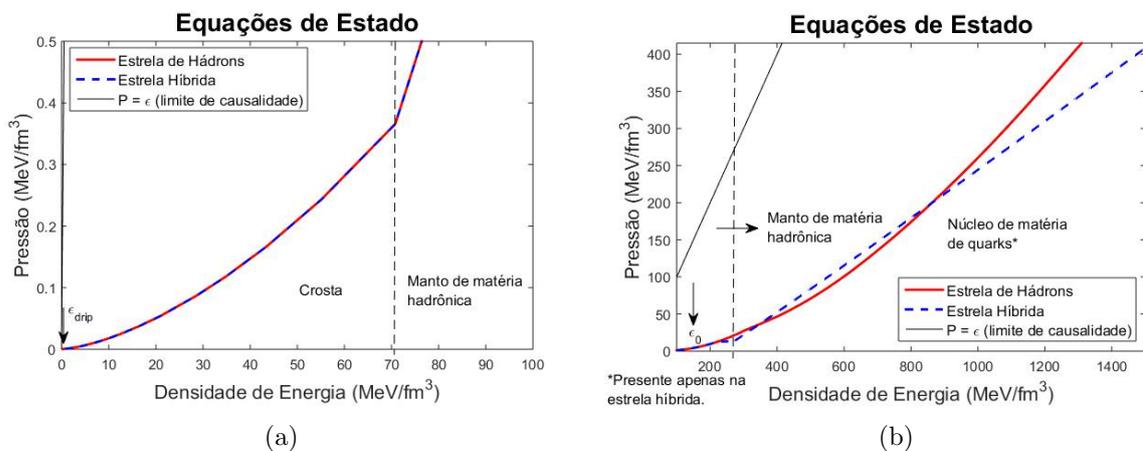


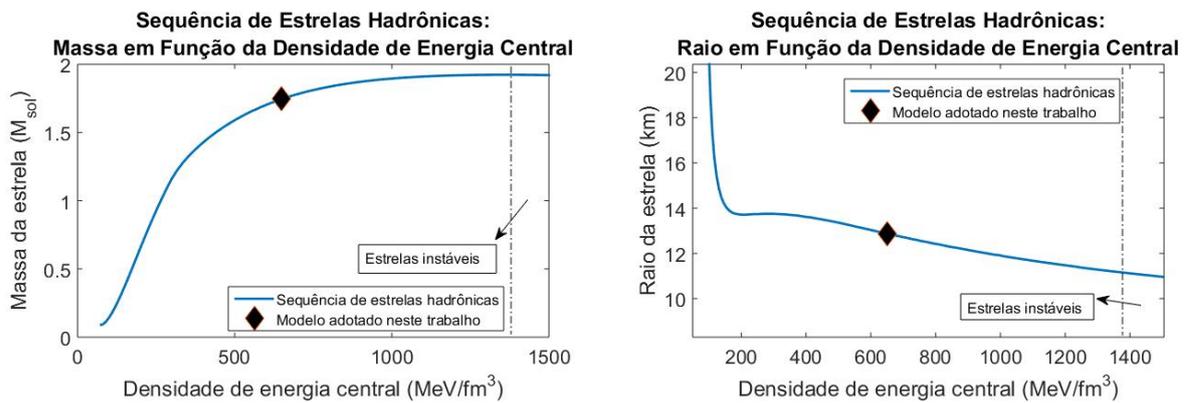
Figura 3.1: Equações de estado utilizadas neste trabalho

### 3.4.1 Resolução das equações de estrutura e as famílias de estrelas

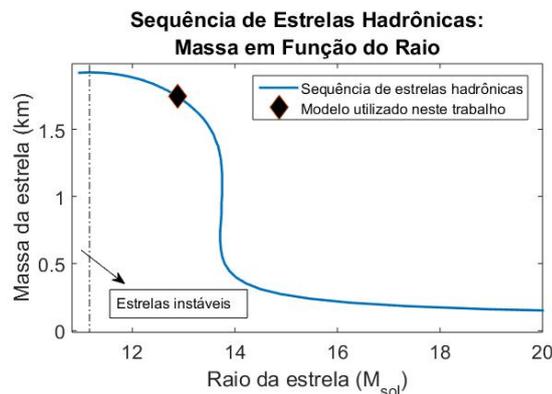
Com as equações de estado encontradas no gráfico (3.1), pode-se finalmente resolver as equações de estrutura (2.40), dadas as condições de contorno que são a densidade de energia central  $\epsilon(r = 0)$  e o fato de que a pressão da estrela é zero na superfície  $p(r = R) = 0$ , onde  $R$  é o raio da estrela.

- Estrelas de hádrons

Resolve-se as equações de estrutura de uma estrela de hádrons com a equação de estado puramente hadrônica para diferentes valores da densidade de energia central. Seguem-se os resultados:



(a) Massa de uma estrela para uma dada densidade de energia central. (b) Raio de uma estrela para uma dada densidade de energia central.

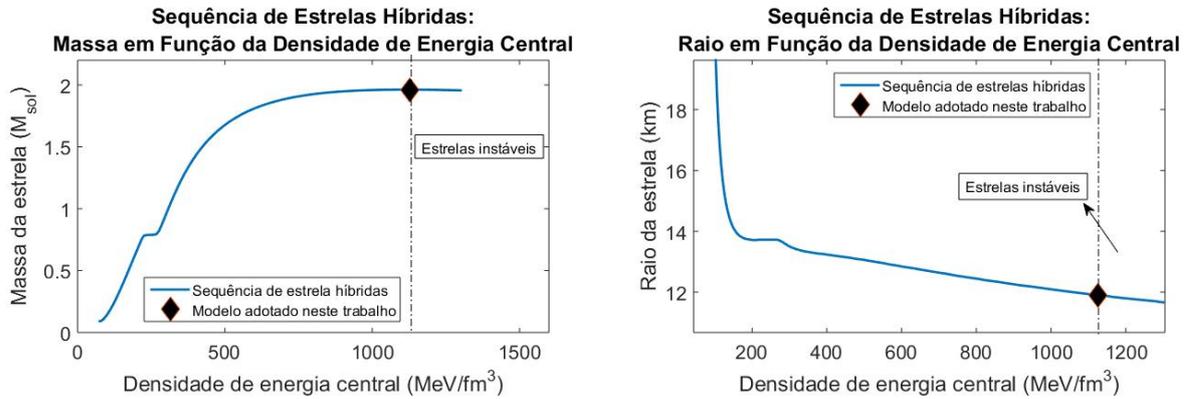


(c) Raio de uma estrela em função de sua massa.

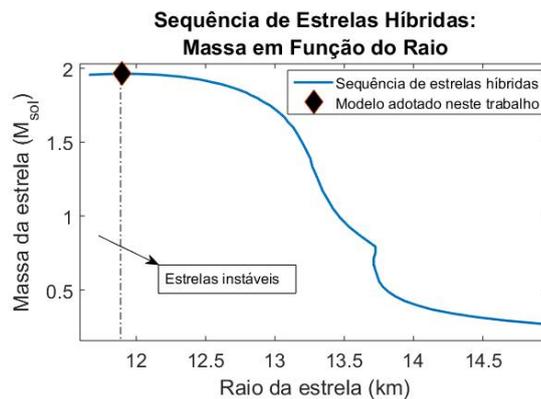
Figura 3.2: Sequência ou família de estrelas de hádrons. Cada ponto nos gráficos representa uma estrela de hádrons diferente. As estrelas que estão na região de instabilidade, delimitada pela linha vertical, terminam por colapsar num buraco negro.

- Estrelas híbridas

Resolve-se as equações de estrutura de uma estrela híbrida com a equação de estado híbrida para diferentes valores da densidade de energia central. Seguem-se os resultados:



(a) Massa de uma estrela para uma dada densidade de energia central. (b) Raio de uma estrela para uma dada densidade de energia central.



(c) Raio de uma estrela em função de sua massa.

Figura 3.3: Sequência ou família de estrelas híbridas. Cada ponto nos gráficos representa uma estrela híbrida diferente. As estrelas que estão na região de instabilidade, delimitada pela linha vertical, terminam por colapsar num buraco negro. Note que a estrela adotada neste trabalho é a última da sequência estável, e possui a maior massa

### 3.4.2 Modelos de estrelas utilizadas

Neste trabalho toma-se apenas uma estrela de hádrons, destacada nos gráficos (3.2), e também apenas uma estrela híbrida, também destacada nos gráficos (3.3). Note que o modelo de estrela híbrida é o de máxima massa, que fica no final da sequência de estrelas estáveis. Este valor máximo é tomado como sendo a massa limite de uma estrela de nêutrons. Cada modelo de equação de estado terá o seu próprio valor de massa limite. As estrelas além desse limite possuem uma instabilidade no modo fundamental de vibração, fazendo com que a amplitude da oscilação radial da estrela aumente progressivamente até que o raio de uma região interna da estrela fique menor que seu correspondente raio de Schwarzschild, fazendo com que toda a estrela colapse num buraco negro (Cf. GLENDENNING, 2000, pp.134-136).

Suas propriedades estruturais estão na tabela (3.5):

Propriedades	Estrela de Hádrons	Estrela Híbrida
Massa( $M_{\odot}$ )	1,74	1,96
Raio(km)	12,9	11,9
$\epsilon(r=0)(MeV/fm^3)$	649	1126

Tabela 3.5: Propriedades estruturais dos modelos de estrelas adotados neste trabalho.

Nos gráficos (3.4(a)) e (3.4(b)) encontram-se a composição de partículas para a estrela de hádrons e para a estrela híbrida respectivamente.

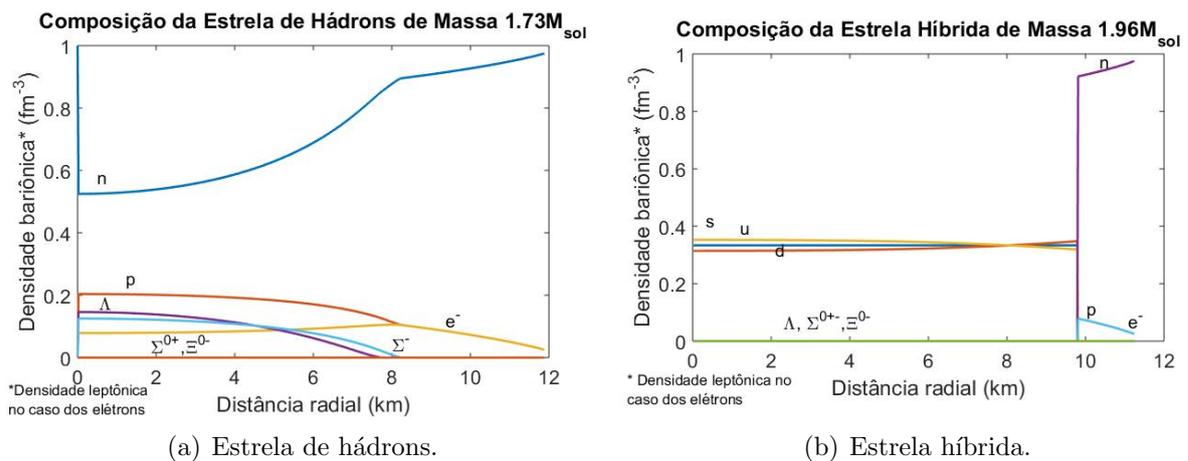


Figura 3.4: Composição dos modelos de estrelas adotados neste trabalho.

# Capítulo 4

## Resfriamento

No capítulo anterior obteve-se o perfil estrutural de dois modelos de estrelas de nêutrons, um de estrela hadrônica e outro de estrela híbrida. Têm-se, assim, o raio e a massa gravitacional dessas estrelas. Ocorre, porém, que o perfil estrutural de uma estrela de nêutrons por si mesmo não é capaz de lidar com a problemática apresentada no capítulo introdutório quanto ao desvio do valor do *braking index* e da idade característica de seus valores esperados, uma vez que a evolução temporal dessas grandezas envolve a evolução da rotação da estrela, sendo que modelou-se essas mesmas estrelas como corpos estáticos e esféricos, portanto sem rotação, no cálculo de suas estruturas. Além do mais, supôs-se que a matéria que constitui as estrelas de nêutrons possui uma temperatura muito inferior a temperatura de Fermi de cada tipo de partícula, aproximando-se, pois, a temperatura dessa matéria ao valor de zero kelvin. Assumiu-se também que tal matéria consistia de um fluido ideal, não possuindo assim, fluxo de calor entre seus pontos. Fica, então, evidente que o modelo até o momento não contempla qualquer tipo de evolução térmica para a estrela de nêutrons.

Não obstante o modelo adotado para a estrela e sua composição deixe de considerar a evolução térmica e rotacional diretamente no cálculo do perfil estrutural da estrela, se põe *a posteriori* neste e no próximo capítulo modelos que descrevem a evolução temporal da temperatura e da rotação de uma estrela de nêutrons.

Em outras palavras, considera-se neste trabalho que o resfriamento da estrela e sua desaceleração não interferem no seu perfil estrutural ao longo do tempo, logo podendo ser tratados de modo separado e após o cálculo da estrutura. Justifica-se esta aproximação pelo fato de que a estrutura da estrela é dominada pela interação forte, ao passo que o

processo de resfriamento é regida pela interação fraca.

## 4.1 Evolução térmica

Como já foi discutido, não há mais queima de combustível nas estrelas de nêutrons, não havendo mais significativa produção de energia térmica. A energia térmica da estrela de nêutrons remanescente de sua fase anterior será, então, progressivamente dissipada para o espaço, fazendo com que a estrela sofra um contínuo processo de resfriamento.

A peculiaridade do processo de resfriamento das estrelas de nêutrons é que ele será dominado pela emissão de neutrinos nos primeiros milhares de anos para só então a emissão de fótons ter uma significância. (NEGREIROS, 2009, p.67)

Como se estuda neste trabalho o resfriamento nos primeiros anos de formação das estrelas de nêutrons, os mecanismos mais importantes para evolução térmica dessas estrelas envolvem reações que liberam neutrinos, os quais terminarão por escapar facilmente para o espaço, devido à sua fraca interação com as demais partículas, levando consigo a energia da estrela.

A emissividade de neutrinos  $\epsilon_\nu = \epsilon_\nu(r, T)$  gerada por esses mecanismos, juntamente com a condutividade térmica  $\kappa = \kappa(r, T)$  e o calor específico  $c_v = c_v(r, T)$  da matéria presente nas estrelas de nêutrons, por meio das seguintes equações relativísticas para o transporte de energia e o balanço de energia, governarão o resfriamento da estrela de nêutrons (WEBER, 1999; THORNE, 1977; VAN RIPER, 1991):

$$\frac{\partial(Le^{2\phi})}{\partial m} = -\frac{1}{\epsilon\sqrt{1-2m/r}} \left( \epsilon_\nu e^{2\phi} + c_v \frac{\partial(Te^\phi)}{\partial t} \right) \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial(Te^\phi)}{\partial m} = -\frac{Le^{-\phi}}{16\pi^2 r^4 \kappa \epsilon \sqrt{1-2m/r}} \quad (4.2)$$

Nas equações acima  $\epsilon$  é a densidade de energia,  $m(r)$  a massa gravitacional até a distância radial  $r$ ,  $e^{2\phi(r)}$  é a componente zero da métrica,  $T(r, t)$  a temperatura, e  $L(r, t)$  a luminosidade. As condições de contorno necessárias para a resolução dessas equações diferenciais são a não existência de fluxo de calor no centro da estrela e de que a temperatura na superfície da estrela é igual a temperatura da atmosfera descrita por um determinado modelo. Tais condições são expressas matematicamente como:

$$L(r = 0) = 0 \quad (4.3)$$

$$T(r = R) = T_S \quad (4.4)$$

### 4.1.1 Principais mecanismos microscópicos

Os seguintes mecanismos são responsáveis por liberarem neutrinos os quais, como dito anteriormente, fugirão para o espaço carregando a energia térmica residual da estrela. Tal emissão de neutrinos é caracterizada pela grandeza física conhecida como emissividade. Cada mecanismo contribuirá com essa emissividade. Os mecanismos, porém, diferem entre si dependendo da região da estrela de nêutrons, isto é, do tipo de matéria que a compõe. Por exemplo, a estrela hadrônica é dividida em crosta e núcleo, com a primeira composta de íons pesados dispostos em uma rede cristalina imersa em um fluido de elétrons e, para regiões mais internas, um fluido de nêutrons; enquanto que o núcleo é composto por matéria hadrônica tal como descrita da seção 3.1. Para as estrelas híbridas, sua parte hadrônica compõe o manto da estrela, enquanto que o núcleo é feito de matéria desconfiada de quarks descrita na seção 3.3.

#### Região hadrônica

A região hadrônica das estrelas de nêutrons terá sua emissividade de neutrinos dada por três tipos de mecanismos: o processo URCA direto, o processo URCA modificado, e o processo de *bremstrahlung*. A emissividade pode, então, ser escrita como:

$$\epsilon_\nu = \epsilon_{DU} + \epsilon_{MU} + \epsilon_{BR} \quad (4.5)$$

- Processo URCA direto

O processo URCA direto ocorre nas seguintes reações:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu} \quad (4.6)$$

$$\Lambda \rightarrow p + e^- + \bar{\nu} \quad (4.7)$$

$$\Sigma^- \rightarrow n + e^- + \bar{\nu} \quad (4.8)$$

$$\Sigma^- \rightarrow \Lambda + e^- + \bar{\nu} \quad (4.9)$$

$$\Sigma^- \rightarrow \Sigma^0 + e^- + \bar{\nu} \quad (4.10)$$

$$\Xi^- \rightarrow \Lambda + e^- + \bar{\nu} \quad (4.11)$$

$$\Xi^- \rightarrow \Sigma^0 + e^- + \bar{\nu} \quad (4.12)$$

$$\Xi^+ \rightarrow \Sigma^+ + e^- + \bar{\nu} \quad (4.13)$$

$$\Xi^- \rightarrow \Xi^0 + e^- + \bar{\nu} \quad (4.14)$$

A emissividade de neutrinos das reações acima é dada por (PRAKASH et al, 1992):

$$\epsilon_{DU} = 4,0 \times 10^{27} \left( \frac{Y_e \rho}{\rho_s} \right)^{1/3} \frac{m_{B1}^* m_{B2}^*}{m_n^2} R T_9^6 \Theta \text{ ergs cm}^{-3} \text{ s}^{-1} \quad (4.15)$$

Onde  $m_B^*$  é a massa efetiva do bárion,  $T_9$  a temperatura em unidade de  $10^9 K$ ,  $Y_e = \rho_e/\rho$  é fração de elétrons,  $\rho$  a densidade bariônica, e  $\rho_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$  é a densidade de equilíbrio da matéria nuclear. Além disso  $R$  é a matriz quadrada bariônica, normalizada à quantidade correspondente de nêutrons e seu valor para as reações 4.6 - 4.14 são respectivamente 1; 0,0394; 0,0125; 0,2055; 0,6052; 0,0175; 0,0282; 0,0564; e 0,2218. Terminando por  $\Theta$  sendo o fator limiar, o qual é igual a 1 se a reação ocorre, e 0 caso contrário.

Na verdade, apesar de as reações acima ocorrerem muito provavelmente nas estrelas de nêutrons, despreza-se, neste trabalho, as contribuições à emissividade daquelas que envolvem bárions pesados, visto sua baixa intensidade comparada com a contribuição da primeira das reações listadas, que envolve apenas prótons e nêutrons; além de a composição, na estrela, desses bárions mais pesados ser relativamente baixa.

- Processo URCA modificado

O processo URCA modificado, por sua vez, ocorre por meio das reações:

$$n + n \rightarrow n + p + e^- + \bar{\nu} \quad (4.16)$$

$$p + n \rightarrow p + p + e^- + \bar{\nu} \quad (4.17)$$

Note que elas são semelhantes às equações do processo URCA direto, com o acréscimo de outro bárion, presente no intuito de se conservar o momento. Reações como essas podem ocorrer também com bárions mais pesados, mas são muito menos intensas, de modo que elas não serão consideradas. As emissividades de neutrinos das duas reações acima são dadas por (NEGREIROS, 2009, p. 71):

$$\epsilon_{MU_n} = 8,53 \times 10^{21} \left( \frac{m_n^*}{m_n} \right)^3 \left( \frac{m_p^*}{m_p} \right) \left( \frac{\rho_e}{\rho_0} \right)^{1/3} T_9^8 \alpha_n \beta_n \text{ ergs cm}^{-3} \text{ s}^{-1} \quad (4.18)$$

$$\epsilon_{MU_p} = 8,53 \times 10^{21} \left( \frac{m_p^*}{m_p} \right)^3 \left( \frac{m_n^*}{m_n} \right) \left( \frac{\rho_e}{\rho_0} \right)^{1/3} T_9^8 \alpha_p \beta_p F_p \text{ ergs cm}^{-3} \text{ s}^{-1} \quad (4.19)$$

$$\text{tal que } F_p = \frac{(\rho_e^{1/3} + 3\rho_p^{1/3} - \rho_n^{1/3})^2}{8\rho_e^{1/3} \rho_p^{1/3}}, \alpha_n = \alpha_p = 1,76 - 0,63 \left( \frac{\rho_n}{\rho_0} \right)^{-2/3} \quad (4.20)$$

- Processo de *bremstrahlung*

As emissividades de neutrinos produzidos no espalhamento entre núcleons - aqui também não serão levadas em conta possíveis espalhamentos entre bárions mais pesados - são dadas por (NEGREIROS, 2009, p. 71):

$$\epsilon_{BRnn} = 7,33 \times 10^{19} \left( \frac{m_n^*}{m_n} \right)^4 \left( \frac{\rho_n}{\rho_0} \right)^{1/3} T_9^8 \text{ ergs cm}^{-3} \text{ s}^{-1} \quad (4.21)$$

$$\epsilon_{BRpp} = 1,70 \times 10^{19} \left( \frac{m_p^*}{m_p} \right)^4 \left( \frac{\rho_p}{\rho_0} \right)^{1/3} T_9^8 \text{ ergs cm}^{-3} \text{ s}^{-1} \quad (4.22)$$

$$\epsilon_{BRnp} = 3,14 \times 10^{20} \left( \frac{m_n^* m_p^*}{m_n m_p} \right)^2 \left( \frac{\rho_p}{\rho_0} \right)^{1/3} T_9^8 \text{ ergs cm}^{-3} \text{ s}^{-1} \quad (4.23)$$

## Região da matéria de quarks desconfiados

Essa região só está presente nas estrelas híbridas e compõe o núcleo dessas estrelas. Os mecanismos que geram neutrinos são os mesmos da seção anterior, mas agora envolvendo reações entre quarks. A emissividade de neutrinos para essa região é dada por:

$$\epsilon_\nu = \epsilon_{QDU} + \epsilon_{QMU} + \epsilon_{QBR} \quad (4.24)$$

- Processo URCA direto

As reações do processo URCA direto da matéria de quarks são as seguintes:

$$d \rightarrow u + e^- + \bar{\nu} \quad (4.25)$$

$$u + e^- \rightarrow d + \nu \quad (4.26)$$

A emissividade de tais processos é dada por (IWAMOTO, 1982):

$$\epsilon_{QDU} = 8,8 \times 10^{26} \alpha_c \left( \frac{\rho_b}{\rho_0} \right) Y_e^{1/3} T_9^6 \text{ ergs cm}^{-3} \text{ s}^{-1} \quad (4.27)$$

Onde  $\alpha_c$  é a constante de acoplamento forte.

- Processo URCA modificado

Assim como anteriormente, as reações do processo URCA modificado serão semelhantes às do processo direto com a diferença de que há um quark a mais:

$$d + q \rightarrow u + q + e^- + \bar{\nu} \quad (4.28)$$

A emissividade desse tipo de processo é dada por (IWAMOTO, 1982):

$$\epsilon_{MQU} = 2,83 \times 10^{19} \alpha_c^2 \left( \frac{\rho_b}{\rho_0} \right) T_9^8 \text{ ergs cm}^{-3} \text{ s}^{-1} \quad (4.29)$$

- Quark *bremstrahlung*

A emissividade de neutrinos devida ao espalhamento entre quarks é dada por (IWAMOTO, 1982):

$$\epsilon_{QBR} = 2,98 \times 10^{19} \left( \frac{\rho_b}{\rho_0} \right) T_9^8 \text{ ergs cm}^{-3} \text{ s}^{-1} \quad (4.30)$$

## Crosta

Os mecanismos na crosta da estrela responsáveis pela emissão de neutrinos são o *bremsstrahlung* dos elétrons, a aniquilação de pares elétron-pósitron e o decaimento de plasmon. A emissividade de neutrinos na região da crosta será, pois, a soma da emissividade gerada por cada um desses mecanismos:

$$\epsilon_\nu = \epsilon_{BR} + \epsilon_{pair} + \epsilon_{pl} \quad (4.31)$$

- *Bremsstrahlung* dos elétrons

O espalhamento dos elétrons devido aos íons pesados presentes na crosta termina por produzir neutrinos que escapam da estrela. A emissividade desses neutrinos gerada por esse mecanismo é dada por (KAMINKER et al, 1999):

$$\epsilon_{BR} = 10^x \text{ ergs cm}^{-3} \text{ s}^{-1} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \text{onde } x = & 11,204 + 7,304\tau + 0,2976r - 0,37\tau^2 + 0,188\tau r \\ & - 0,103r^2 + 0,0547\tau^2 r - 6,77 \ln(1 + 0,228\epsilon/\epsilon_0) \end{aligned} \quad (4.33)$$

Acima  $\tau = \log T_8$ ,  $r = \ln \rho_{12}$  e  $\epsilon_0 = 2,8 \times 10^{14} \text{ g cm}^{-3}$  é a densidade nuclear padrão.

- Aniquilação elétron-pósitron

A emissividade de neutrinos produzidos pela aniquilação de pares elétron-pósitron é dada por uma complexa expressão que pode ser encontrada na seguinte referência (YAKOVLEV, 2001). Aqui será apenas tomado a sua ordem de grandeza (NEGREIROS, 2009, p. 72):

$$\epsilon_{pair} \propto 10^{23} \text{ ergs cm}^{-3} \text{ s}^{-1} \quad (4.34)$$

- Decaimento dos plasmons

Os plasmons, que nada mais são do que os quanta de energia dos níveis de oscilação do plasma formado na crosta das estrelas de nêutrons, podem sofrer decaimento produzindo também neutrinos. A emissividade desses neutrinos para esse mecanismo é expressa por (YAKOVLEV, 2001):

$$\epsilon_{pl} = Q_c \frac{C_V^2}{96\pi^4\alpha} \left(\frac{T}{T_r}\right)^9 (16,23f_p^6 + 4,604f_p^{7,5})e^{-f_p} \quad (4.35)$$

Onde,

$$Q_c \equiv \frac{G_F^2}{\hbar} \left(\frac{m_e c}{\hbar}\right)^9 \approx 1,023 \times 10^{23} \text{ g cm}^{-3} \quad (4.36)$$

é a emissividade de neutrinos por meio do efeito Compton com elétrons;  $G_F$  é a constante de Fermi da interação fraca;  $T_r \equiv m_e c^2 / k_B \approx 5,93 \times 10^9 \text{ K}$  é a temperatura relativística do elétron; e

$$f_p \equiv \frac{\hbar\omega_{pe}}{k_B T} = \frac{\hbar\sqrt{4^2 n_e / m_e^*}}{k_B T} \quad (4.37)$$

é o parâmetro do elétron do plasma.

Uma vez determinadas as emissividades de neutrinos, resta saber o calor específico e a condutividade térmica de cada uma das regiões que compõe a estrela.

## 4.1.2 Calor específico e condutividade térmica

### Região hadrônica

O calor específico da região feita de hádrons pode ser escrita como sendo a soma do calor específico devido aos bárions e do devido aos léptons:

$$C_{v\text{hadrônica}} = \sum_l C_{vl} + \sum_b C_{vb} \quad (4.38)$$

Na equação acima  $l$  e  $b$  se referem aos léptons e aos bárions respectivamente. Para os léptons, tem-se (NEGREIROS, 2009, p. 73):

$$C_{vl} = \frac{K_B^2}{3\hbar^3} T \sqrt{m_l^2 + k_l^2} k_{fl} \quad (4.39)$$

Já para os bárions (NEGREIROS, 2009, p. 73):

$$C_{vb} = \frac{K_B^2}{3\hbar^3} T m_b^* k_{fb} \quad (4.40)$$

Nessas equações  $K_B$  é a constante de Boltzmann,  $k_{fl}$  e  $k_{fb}$  são o momento de Fermi do lépton e do bárion respectivamente e  $m_b^*$  a massa efetiva do bárion.

A condutividade térmica por sua vez dos elétrons e dos nêutrons nessa região hadrônica é dada por (FLOWERS; ITOH, 1981):

$$\kappa_{hadrônica} = 10^{23} \epsilon_{14} T_8^{-1} \text{ erg cm}^{-1} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-1} \quad (4.41)$$

onde  $\epsilon_{14} = \epsilon/10^{14}$  e  $T_8 = T/10^8$ .

### Região de quarks desconfiados

O calor específico no núcleo das estrelas híbridas é devido aos elétrons e aos quarks. A contribuição dos elétrons é dada pela mesma expressão (4.39). Já a dos quarks é dada por (IWAMOTO, 1982):

$$C_q = 0,6 \times 10^{20} \left( \frac{Y_e \rho_b}{\rho_0} \right)^{2/3} T_9 \text{ erg cm}^{-3} \text{ K}^{-1} \quad (4.42)$$

A condutividade térmica para a matéria de quarks é dada por (HAENSEL, 1991):

$$\kappa_{quark} = 3,4 \times 10^{32} \left( \frac{\alpha_c}{0,2} \right)^{-1/2} T^{-1} \frac{\rho}{\rho_0} \text{ erg cm}^{-1} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-1} \quad (4.43)$$

### Crosta

Como já mencionado anteriormente, a crosta da estrela consiste de elétrons e nêutrons livres em meio a uma rede cristalina de íons pesados. Logo o calor específico da crosta é dado pela soma da contribuição de cada um desses tipos de partículas:

$$C_{vcrosta} = C_{ve} + C_{vn} + C_{vi} \quad (4.44)$$

Novamente o calor específico devido ao elétron será dado pela mesma expressão (4.39), o devido ao nêutron pela equação (4.40), e o calor específico devido aos íons dependerá de propriedades tais como o momento de Fermi, o número de massa  $A$ , e do número atômico

$Z$  do respectivo íon.

A condutividade térmica na crosta oriunda do espalhamento de elétrons e nêutrons com os íons é dada por (POTEKHIN et al, 1999):

$$\kappa_{crosta} = \frac{\pi^2 K_B^2 T \rho_e}{3 \sqrt{m_l^2 + k_l^2 \nu_e}} \quad (4.45)$$

Onde  $\nu_e$  depende das propriedades do íon para uma dada densidade.

## 4.2 Superfluididez e supercondutividade na estrela de nêutrons

Uma das principais hipóteses deste trabalho é de que parte da matéria que constitui a estrela de nêutrons sofre uma transição de fase, passando a ter um comportamento de um superfluido ou de um supercondutor.

Para a matéria composta de hádrons, será suposto que apenas o nêutron e o próton possam formar pares, dando origem a uma matéria superfluida, no caso dos nêutrons por não possuírem carga elétrica, e a uma matéria supercondutora, no caso dos prótons por serem eletricamente carregados. Nem todos os tipos de pares entre as partículas que formam a estrela de nêutrons são estáveis, ou seja, possuem interações atrativas entre os membros do par. Por isso os únicos pares a serem considerados serão de nêutrons singletos, nêutrons tripletos e prótons singletos.

Já para a matéria feita de quarks desconfiados, presente no núcleo das estrelas híbridas, assume-se que a mesma sofre uma transição para uma fase com padrão supercondutor conhecido como *color-flavor-locked* (*cfl*). Nesta fase, todas as partículas, com suas cores e sabores, formam pares de cooper (ALFORD, 2001; RAJAGOPAL; WILCZEK, 2000; ALFORD et al, 2001; RAJAGOPAL; WILCZEK, 2001).

O tipo de fase - normal ou superfluida - da matéria dentro das estrelas de nêutrons dependerá de duas grandezas intensivas: sua temperatura e sua densidade bariônica, de modo que a temperatura crítica será função da densidade bariônica. Evidentemente, para cada tipo de estado - nêutron singlete, nêutron triplete e próton singlete - haverá uma relação própria entre a sua temperatura crítica e a densidade. As expressões matemáticas que fornecem estas relações possuem uma origem semi-empírica, isto é, não advêm de uma

dedução mais fundamental e seus parâmetros são ajustáveis, com os resultados implicados confrontados posteriormente com os dados experimentais. São elas (HO et al, 2015, e referências nela):

- Nêutron singleto

$$T_{cns}(\rho_b) = T_{0ns} \times \frac{(k_{ns}(\rho_b) - k_{0ns})^2}{(k_{ns}(\rho_b) - k_{0ns})^2 + k_{1ns}^2} \times \frac{(k_{2ns} - k_{ns}(\rho_b))^2}{(k_{2ns} - k_{ns}(\rho_b))^2 + k_{3ns}^2} \quad (4.46)$$

- Nêutron tripleto

$$T_{cnt}(\rho_b) = T_{0nt} \times \frac{(k_{nt}(\rho_b) - k_{0nt})^2}{(k_{nt}(\rho_b) - k_{0nt})^2 + k_{1nt}^2} \times \frac{(k_{2nt} - k_{nt}(\rho_b))^2}{(k_{2nt} - k_{nt}(\rho_b))^2 + k_{3nt}^2} \quad (4.47)$$

- Próton singleto

$$T_{cps}(\rho_b) = T_{0ps} \times \frac{(k_{ps}(\rho_b) - k_{0ps})^2}{(k_{ps}(\rho_b) - k_{0ps})^2 + k_{1ps}^2} \times \frac{(k_{2ps} - k_{ps}(\rho_b))^2}{(k_{2ps} - k_{ps}(\rho_b))^2 + k_{3ps}^2} \quad (4.48)$$

Nessas últimas equações,  $T_c(\rho_b)$  e  $k(\rho_b)$  são respectivamente a temperatura crítica e o momento de Fermi do determinado tipo de par, ambas funções da densidade de número bariônico  $\rho_b$ . As constantes  $T_0$ ,  $k_0$ ,  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  de cada tipo de par são os já mencionados parâmetros ajustáveis.

Haverá também uma relação para a temperatura crítica da matéria de quarks, abaixo da qual ela sofre transição para a fase *cfl*. Todavia, ela será bem mais simples ( $k_B$  é a constante de Boltzmann):

$$T_{ccfl} = \frac{0,4\Delta}{k_B} \quad (4.49)$$

Nesta equação (4.49),  $\Delta$  é o *gap* de energia que possui um valor constante.

Último ponto a ser posto acerca da existência de superfluidez na matéria que compõe a estrela de nêutrons é de que ela interferirá tanto na evolução térmica como na evolução da rotação da estrela. A influência sobre esta última será abordada na próxima seção e, de fato, constitui a segunda principal hipótese deste trabalho. Por hora, atém-se a evolução térmica.

A superfluidez exerce influência sobre os mecanismos que liberam neutrinos, descritos anteriormente, de maneira que ameniza a emissividade de neutrinos desses processos. Outra grandeza alterada devido a superfluidez é a contribuição da matéria que se encontra nessa fase superfluida para o calor específico. A condutividade térmica, porém, mantém-se inalterada. Deste modo, a evolução térmica da estrela de nêutrons termina por ser diferente do que seria caso não houvesse a presença de matéria superfluida dentro dessa estrela.

De modo a não se tumultuar muito o texto, as correções às emissividades dos diversos processos, e ao calor específico das diferentes regiões devido a presença de matéria superfluida estão postas no apêndice C desta obra.

## 4.2.1 Modelos adotados

### Superfluidez do nêutron

Valores adotados para os parâmetros das equações (4.46) e (4.47):

$$T_{0ns} = 1,02 \cdot 10^9 K \quad (4.50)$$

$$T_{0nt} = 6,4614 \cdot 10^{10} K \quad (4.51)$$

$$k_{0ns} = 1,3 \quad (4.52)$$

$$k_{1ns} = 0,6 \quad (4.53)$$

$$k_{2ns} = 1,7 \quad (4.54)$$

$$k_{3ns} = 0,1 \quad (4.55)$$

$$k_{0nt} = 1,638 \quad (4.56)$$

$$k_{1nt} = 0,58818 \quad (4.57)$$

$$k_{2nt} = 1,9285 \quad (4.58)$$

$$k_{3nt} = 0,714725 \quad (4.59)$$

### Supercondutividade do próton

Foram supostos três diferentes cenários para a ocorrência da supercondutividade do próton singlete, chamados de cenários raso, médio e fundo. A diferença entre eles está

no limite máximo para a densidade, para uma dada temperatura, em que ainda há a presença de matéria supercondutora; no cenário fundo esse limite máximo será maior que o do cenário raso. Como a densidade é cada vez maior em regiões mais profundas da estrela de nêutrons, no cenário fundo a fase supercondutora dos prótons conseguirá adentrar mais profundamente do que no cenário raso, daí esses nomes.

Parâmetros adotados para a equação (4.48):

- Cenário fundo

$$T_{0ps} = 1,7 \cdot 10^{13} K \quad (4.60)$$

$$k_{0ps} = 0,54 \quad (4.61)$$

$$k_{1ps} = 14,952 \quad (4.62)$$

$$k_{2ps} = 1,56 \quad (4.63)$$

$$k_{3ps} = 0,55895 \quad (4.64)$$

- Cenário médio

$$T_{0ps} = 1,7 \cdot 10^{13} K \quad (4.65)$$

$$k_{0ps} = 0,54 \quad (4.66)$$

$$k_{1ps} = 14,952 \quad (4.67)$$

$$k_{2ps} = 1,3455 \quad (4.68)$$

$$k_{3ps} = 0,301833 \quad (4.69)$$

- Cenário raso

$$T_{0ps} = 1,7 \cdot 10^{13} K \quad (4.70)$$

$$k_{0ps} = 0,5625 \quad (4.71)$$

$$k_{1ps} = 14,952 \quad (4.72)$$

$$k_{2ps} = 1,014 \quad (4.73)$$

$$k_{3ps} = 0,055895 \quad (4.74)$$

### Superfluidez dos quarks

$$\Delta = 10 MeV \quad (4.75)$$

A seguir os gráficos que mostram a temperatura crítica para a transição à fase superfluida/supercondutora das partículas já citadas tanto para a estrela de hádrons como para a estrela híbrida de maior massa com as quais se trabalha nesta dissertação. A temperatura crítica para a superfluidez da matéria de quarks é, de acordo com (4.75) e (4.49)

$$T_{ccfl} = 4,642 \cdot 10^{10} K$$

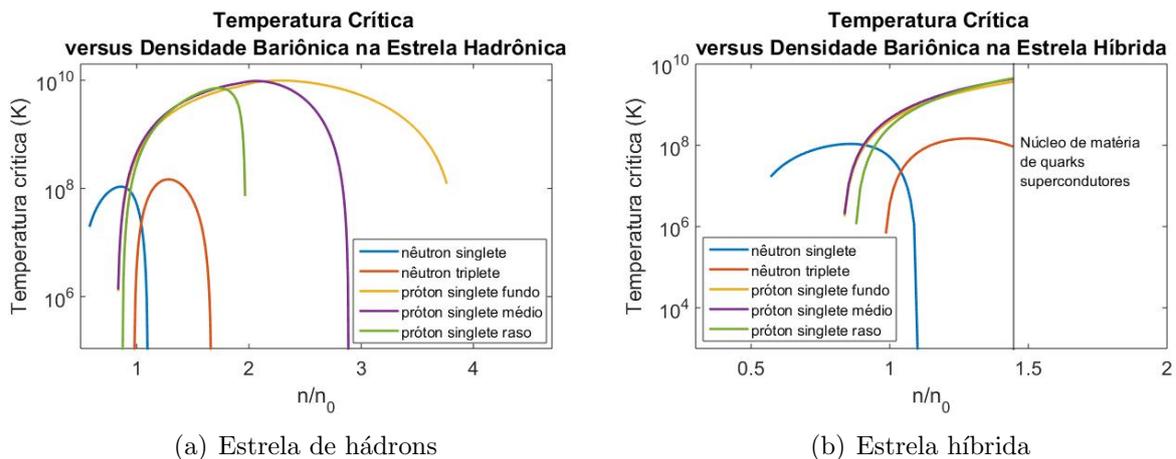


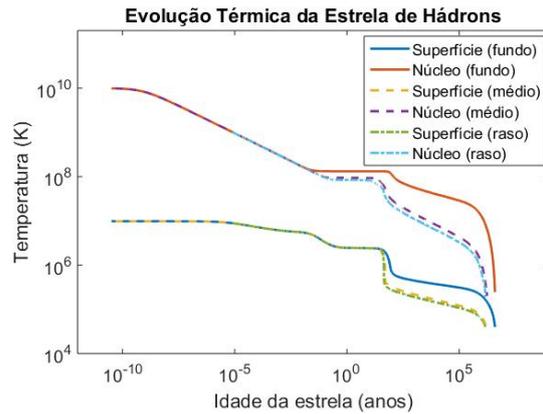
Figura 4.1: Temperatura crítica em função da densidade bariônica para os pares de nêutrons singletos e tripletos e também para os de prótons singletos em cada um dos três supostos cenários.

### 4.3 Resultados do resfriamento para cada modelo de estrela

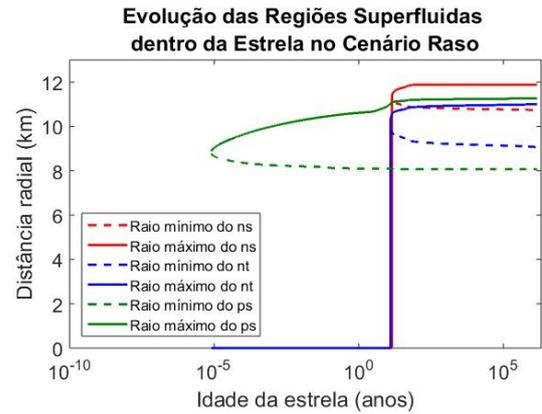
Para cada uma das duas equações de estado apresentadas na figura 3.1, cada qual representando um modelo de estrela adotado (hadrônica e híbrida), calcula-se as equações de balanço e de transporte de energia (4.1) e (4.2). Esse cálculo deve ser feito juntamente com as expressões para as emissividades de neutrinos, para o calor específico e para a condutividade térmica apresentadas ao longo deste capítulo, expressões essas tomadas de acordo com a região da estrela (crosta, matéria de hádrons, ou matéria de quarks desconfiados). Deve-se igualmente considerar as condições de contorno (4.3) e (4.4), que estabelecem a ausência de luminosidade na posição central ( $r = 0$ ) e a temperatura superficial da estrela, igual a temperatura da atmosfera. Tal atmosfera é descrita pelo modelo de Potekhin et al (1997). Obtém-se desse modo a evolução e o perfil térmico de cada modelo de estrela. Registra-se também, ao longo desse cálculo, as regiões da estrela que possuem uma temperatura abaixo da temperatura crítica (ver figuras (4.1(a)) e (4.1(b))) seja dos pares de nêutrons singletos, de nêutrons tripletos, de prótons singletos, ou de quarks da fase *cff*, isto é, registra-se as regiões da estrela de nêutrons que sofreram transição de uma fase normal para uma fase superfluida.

#### Estrela de hádrons com massa de $1,74M_{\odot}$

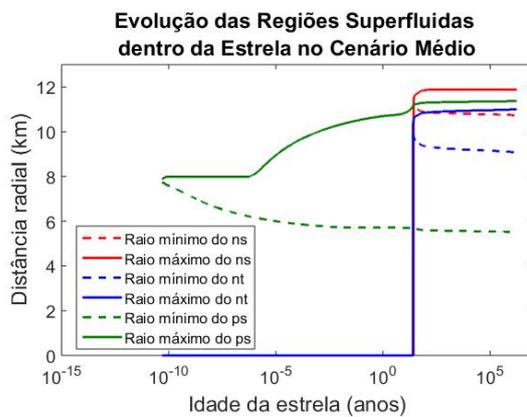
A seguir os resultados obtidos para a evolução da temperatura e das regiões superfluidas para o modelo de estrela de hádrons em cada um dos três cenários de superfluidadez do próton singlete.



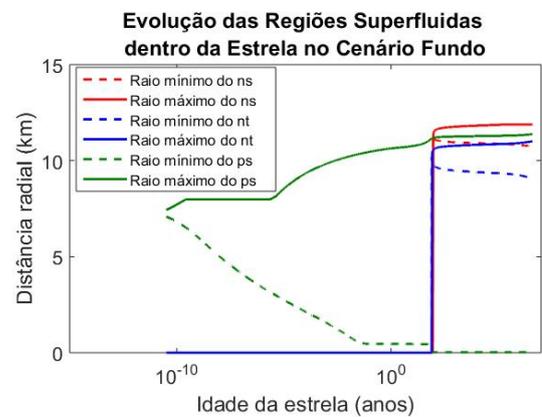
(a) Evolução do resfriamento



(b) Evolução das regiões superfluidas para cada tipo de par no cenário raso.



(c) Evolução das regiões superfluidas para cada tipo de par no cenário médio.

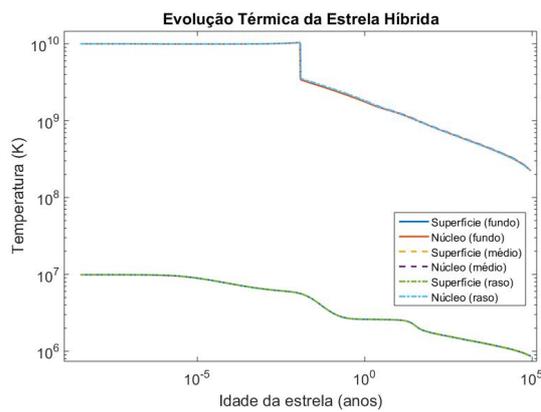


(d) Evolução das regiões superfluidas para cada tipo de par no cenário fundo.

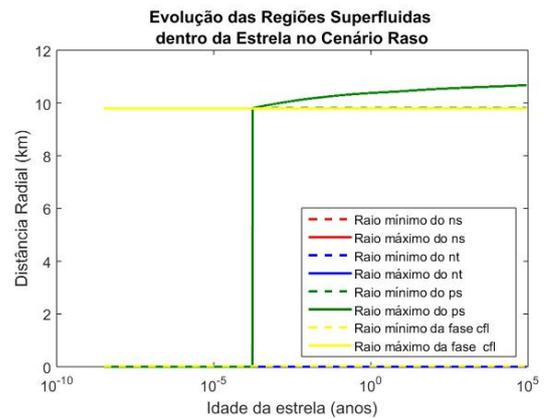
Figura 4.2: Resultados para a evolução térmica da estrela de hádrons.

### Estrela híbrida com massa de $1,96M_{\odot}$

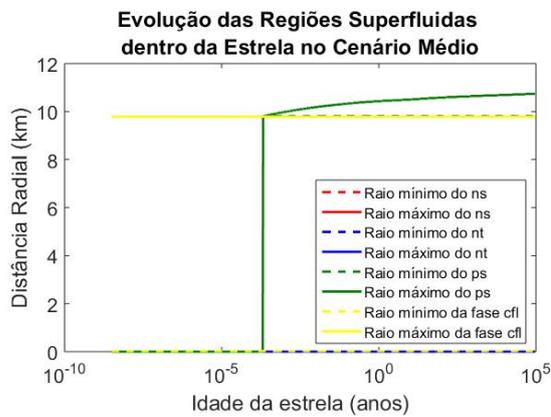
A seguir os resultados obtidos para a evolução da temperatura e das regiões superfluidas para o modelo de estrela híbrida em cada um dos três cenários de superfluidez do próton singleto.



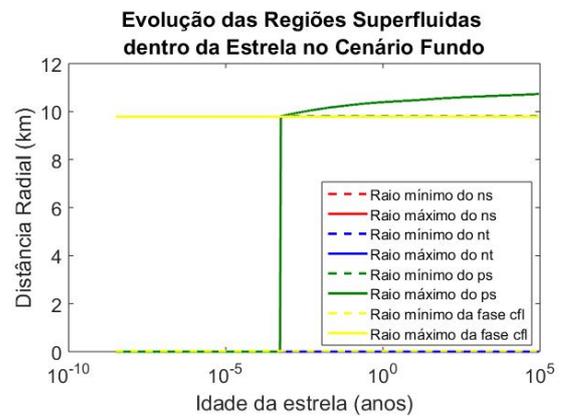
(a) Evolução do resfriamento



(b) Evolução das regiões superfluidas para cada tipo de par no cenário raso.



(c) Evolução das regiões superfluidas para cada tipo de par no cenário médio.



(d) Evolução das regiões superfluidas para cada tipo de par no cenário fundo.

Figura 4.3: Resultados para a evolução térmica da estrela híbrida.

# Capítulo 5

## Evolução da Rotação da Estrela de Nêutrons

A resolução das equações de estrutura (2.39) e (2.40) não provê qualquer dinâmica da rotação da estrela, posto que a mesma fora modelada como sendo um corpo estático, de simetria esférica e desprovido de campo magnético. Como já mencionado no início do capítulo anterior, a evolução da rotação é considerada após o cálculo da estrutura, acreditando-se que ela não interfere no perfil estrutural da estrela, bem como na métrica do espaço-tempo. Tal evolução é, pois, posta à mão *a posteriori*.

### 5.1 Modelo canônico

O modelo canônico para a evolução da rotação de uma estrela de nêutrons consiste no fato de que parte da energia irradiada pela estrela na forma de ondas eletromagnéticas, estas por sua vez observadas diretamente nos pulsares e indiretamente no seu efeito sobre a nebulosa remanescente da supernova, advém da irradiação de dipolo magnético girante, causada pela não coincidência do eixo magnético da estrela com o seu eixo de rotação. A grosso modo, esta não coincidência faz com que o campo magnético da estrela exerça um torque sobre a mesma, desacelerando-a. Em suma, o modelo canônico estabelece que a energia de rotação da estrela é convertida em energia eletromagnética via irradiação de dipolo magnético girante.

Seja  $E$  a energia de rotação da estrela:

$$E = \frac{1}{2} I \Omega^2 \quad (5.1)$$

onde  $I$  é o momento de inércia da estrela e  $\Omega$  a sua frequência de rotação.

Pela lei da conservação de energia, a variação de energia rotacional com o tempo será igual a potência irradiada pelo dipolo magnético girante (JACKSON, 1998). Matematicamente, tem-se que:

$$-\frac{dE}{dt} = P_{dip} = \frac{2}{3} B^2 R^6 \Omega^{n+1} \sin^2 \alpha \quad (5.2)$$

onde  $B$  é o campo magnético na superfície,  $R$  o raio da estrela,  $\alpha$  o ângulo entre o eixo de rotação e o eixo magnético, e  $n = 3$  é o *braking index*.

O momento de inércia é tomado como sendo constante de modo que a equação (5.2) pode ser trabalhada da seguinte forma:

$$-\frac{dE}{dt} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} I \Omega^2 \right) = \frac{2}{3} B^2 R^6 \Omega^{n+1} \sin^2 \alpha \quad (5.3)$$

$$-I \Omega \dot{\Omega} = \frac{2}{3} B^2 R^6 \Omega^{n+1} \sin^2 \alpha \quad (5.4)$$

$$\dot{\Omega} = -\frac{2}{3} \frac{B^2 R^6}{I} \Omega^n \sin^2 \alpha \quad (5.5)$$

Obtém-se, assim, a seguinte equação diferencial que regerá a evolução da frequência de rotação da estrela:

$$\frac{d\Omega(t)}{dt} = -k \Omega^n; \quad k = \frac{2}{3} \frac{B^2 R^6}{I} \sin^2 \alpha \quad (5.6)$$

A partir da diferenciação desta última equação, é possível escrever o *braking index* em termos da frequência de rotação e de suas duas primeiras derivadas:

$$\frac{d\dot{\Omega}}{dt} = \frac{d}{dt}(-k\Omega^n) \quad (5.7)$$

$$\ddot{\Omega} = -nk\Omega^{n-1}\dot{\Omega} \quad (5.8)$$

$$\ddot{\Omega} = n\frac{-k\Omega^n}{\Omega}\dot{\Omega} \quad (5.9)$$

$$\ddot{\Omega} = n\frac{\dot{\Omega}^2}{\Omega} \quad (5.10)$$

$$n = \frac{\Omega\ddot{\Omega}}{\dot{\Omega}^2} \quad (5.11)$$

Por meio de (5.11) é possível medir o valor do *braking index* de uma estrela de nêutrons uma vez medidas a frequência de rotação e suas duas primeiras derivadas. Caso a irradiação dipolar fosse o mecanismo dominante na frenagem da estrela tal valor deveria ser muito próximo de três. A título de exemplificação, se fosse a irradiação de ondas gravitacionais o principal mecanismo nesse processo de desaceleração, o valor para  $n$  ficaria próximo de cinco. Sendo assim, caso ambos os últimos processos ocorrem, o *braking index* teria um valor entre três e cinco. Para a surpresa geral, a maioria esmagadora dos *braking indices* medidos são menores do que três, sendo alguns até mesmo negativos. Esta é justamente a problemática apresentada no capítulo introdutório. A tabela (5.1) mostra os dados observacionais de alguns pulsares jovens, isto é, com idade com ordem de grandeza de até  $10^4$  anos.

Nome do Pulsar	Remanescente de Supernova	Período (s)	Derivada do período (ss <sup>-1</sup> )	Idade Característica (anos)	<i>Braking Index</i>	Idade (anos)
B0531+21	Crab	0,0331	$4,23 \cdot 10^{-13}$	1240	2,51(1)	958
J0537-6910	N157B	0,0161	$5,18 \cdot 10^{-14}$	4930	-1,5(1)	$2000^{+3000}_{-1000}$
B0540-69	0540-69.3	0,0505	$4,79 \cdot 10^{-13}$	1670	2,140(9)	$1000^{+660}_{-240}$
B0833-45	Vela	0,0893	$1,25 \cdot 10^{-13}$	11300	1,4(2)	$11000^{+5000}_{-5600}$
J1119-6127	G292.2-0.5	0,408	$4,02 \cdot 10^{-12}$	1610	2,684(2)	$7100^{+500}_{-2900}$
B1509-58	G320.4-1.2	0,151	$1,54 \cdot 10^{-12}$	1550	2,839(3)	< 21000
J1846-0258	Kesteven 75	0,325	$7,08 \cdot 10^{-12}$	729	2,65(1)	$1000^{3300}_{-100}$
J1734-3333	G354.8-0.8	1,17	$2,28 \cdot 10^{-12}$	8120	0,9(2)	> 1300

Fonte: Ho; Anderssom, *Rotational evolution of young pulsars due to superfluid decoupling*.

Tabela 5.1: Dados experimentais de alguns pulsares.

Na tabela (5.1) estão listados também os valores medidos para a idade característica dos pulsares. Ela é mais uma grandeza, assim como o *braking index*, que permite testar o

modelo canônico, de modo que quanto mais próximo ela estiver do valor real da idade do pulsar, também listado na última coluna, melhor esse modelo descreve o pulsar. Obtém-se uma expressão para a idade característica em termos das quantidades observáveis, o período e sua derivada, ou equivalentemente a frequência de rotação e a sua derivada, integrando-se a equação (5.6) desde  $t = 0$  (nascimento da estrela) até um instante de tempo  $t$  tomado como sendo a idade atual da estrela. O resultado é:

$$t = -\frac{1}{n-1} \frac{\Omega}{\dot{\Omega}} \left[ 1 - \left( \frac{\Omega}{\Omega(0)} \right)^{n-1} \right] \quad (5.12)$$

No entanto, esta não é ainda a idade característica. Note que para um certo instante de tempo, o valor de  $\Omega$  será bem menor que o seu valor inicial  $\Omega(0)$ , uma vez que a rotação diminui progressivamente. Considera-se então o limite no qual a razão entre essas duas grandezas vai a zero, de modo que a equação (5.12) toma a seguinte forma:

$$\tau = -\frac{1}{n-1} \frac{\Omega}{\dot{\Omega}} = -\frac{1}{2} \frac{\Omega}{\dot{\Omega}} = \frac{1}{2} \frac{P}{\dot{P}} \quad (5.13)$$

Esta é a expressão da idade característica  $\tau$  em termos do período  $P$ , e de sua derivada  $\dot{P}$ . Voltando à tabela (5.1), percebe-se que mesmo a idade característica se distancia do valor real da idade da estrela, revelando a incompletude do modelo canônico.

Vários modelos alternativos foram então propostos no intuito de se explicar as divergências encontradas para os *braking indices* e idades características dos diversos pulsares. Alguns deles são:

- Radiação eletromagnética multipolar ( $n \geq 5$ ) (MUSLIMOV; PAGE, 1996)
- Radiação gravitacional quadripolar ( $n = 5$ ) (MUSLIMOV; PAGE, 1996)
- Decaimento do campo magnético ( $n > 3$ ) (MUSLIMOV; PAGE, 1996)
- Deformação radial das linhas de campo magnético ( $1 \leq n \leq 3$ ) (MUSLIMOV; PAGE, 1996)
- Ventos relativísticos ( $n < 3$ ) (MUSLIMOV; PAGE, 1996)
- Velocidade transversal do pulsar ( $n < 3$ ) (MUSLIMOV; PAGE, 1996)
- Intensa emissão de neutrinos no período inicial da evolução do pulsar ( $n < 0$ ) (ALPAR; OEGELMAN, 1990)

- Movimento de placas tectônicas na crosta do pulsar ( $n > 3$  ou  $n < 3$ ) (RUDERMAN, 1991)
- Crescimento do campo magnético devido a instabilidades termomagnéticas na crosta da estrela ( $n < 3$ ) (BLANDFORD; ROMANI, 1988)
- Crescimento intenso de um campo magnético - submergido na crosta da estrela de nêutrons em sua fase hiper crítica de acreção - que vem a emergir via difusão ôhmica ( $n < 3$ ) (MUSLIMOV; PAGE, 1996; BERNAL et al, 2010; BERNAL et al, 2013; VIGANÒ; PONS, 2012)
- Mudança no momento de inércia ( $n < 3$ ) (WEBER, 1999; GLENDENNING, 2003; HO; ANDERSSON, 2012)

Adotou-se neste trabalho o modelo segundo o qual o momento de inércia sofre uma evolução, portanto não permanecendo constante como supõe o canônico.

## 5.2 Rotação com variação do momento de inércia

O modelo que descreve a evolução da rotação da estrela de nêutrons neste trabalho é o proposto por Ho & Anderson (2012). Tal modelo ainda considera que a frenagem da rotação da estrela é por causa da irradiação eletromagnética de um dipolo girante. Como dito anteriormente, a falta de coincidência do eixo magnético com o eixo de rotação, faz com que o campo magnético exerça um torque sobre a estrela, diminuindo, pois, seu momento angular.

A real diferença entre o modelo canônico e o modelo de Ho & Anderson é de que, em primeiro lugar, haverá uma região interna da estrela de nêutrons que sofrerá uma transição de uma fase normal para uma fase superfluida a medida que ocorre o resfriamento da estrela por meio de sua evolução térmica descrita no capítulo 4. Em segundo lugar, ele assume que tal região de matéria superfluida, uma vez presente, se desacoplará da região de matéria normal. Por desacoplamento entre essas duas regiões, entende-se que cada uma delas terá uma velocidade de rotação específica e que cada uma delas possuirá uma evolução rotacional distinta apesar de uma interferir na outra.

Tem-se, abaixo, as equações que dão a evolução do momento angular da região de matéria normal  $L = I\Omega$  e a do momento angular da de matéria superfluida  $L_{SF} = I_{SF}\Omega_{SF}$ :

$$\frac{d}{dt}(I\Omega) = -\beta\Omega^3 - \tau_{pin} - \tau_f \quad (5.14)$$

$$\frac{d}{dt}(I_{SF}\Omega_{SF}) = \tau_{pin} + \tau_f \quad (5.15)$$

onde o termo  $-\beta\Omega^3$ , conforme Pacini (1968) e Gunn & Ostriker (1969), corresponde ao torque exercido pela irradiação dipolar, com  $\beta \approx B^2 R^6 / 6c^3$  ( $B$  sendo o campo magnético na superfície da estrela e  $R$  o raio estelar);  $\tau_{pin}$  e  $\tau_f$  são eventuais torques provenientes de *pinning* dos vórtices (LINK, 2003) e do atrito (ALPAR et al, 1984) respectivamente.

De acordo com Ho & Anderson, essas últimas equações possuem três limites. O primeiro é quando se considera que o torque exercido devido à fricção entre essas duas regiões é intenso o suficiente para que a diferença entre as velocidades de rotação se anule rapidamente em comparação com a ação do torque devido à irradiação dipolar e com o torque devido ao *pinning* dos vórtices, tomado como sendo desprezível. As velocidades são portanto iguais em todo instante de tempo, isto é, as duas regiões voltam a estar acopladas. Esse limite é, na verdade, o retorno ao modelo canônico e prevê um *braking index* igual a 3 para toda evolução rotacional da estrela.

O segundo limite é quando tanto o torque devido ao *pinning* dos vórtices, como o devido à fricção são desprezíveis. Ainda conforme Ho & Anderson, esse limite prevê um *braking index* superior a 3, em contraste com o que é observado na natureza.

O terceiro limite, o qual será tratado neste trabalho, é quando o *pinning* dos vórtices é significativamente forte, exercido possivelmente por meio de interações entre os tubos causados pela supercondutividade dos prótons ou quarks, tubos pelos quais passam as linhas de fluxo do campo magnético e os vórtices presentes na matéria superfluida. Como a distribuição espacial desses vórtices de matéria superfluida é o que caracteriza o que se chamou de velocidade de rotação da matéria superfluida  $\Omega_{SF}$ , e o *pinning* intenso faria com que essa distribuição permanecesse constante, assume-se nesta obra que  $\dot{\Omega}_{SF} \approx 0$ , ou seja, a rotação da matéria superfluida é tomada como sendo constante no tempo. Com isto, as equações (5.15) podem ser combinadas resultando na equação diferencial que determinará a evolução da frequência de rotação da matéria normal. A seguir está essa equação, para cuja derivação usou-se também que  $\dot{I}_{SF} = -\dot{I}$  já que o momento de inércia total não muda:

$$\frac{d\Omega(t)}{dt} = \frac{(\Omega_{SF} - \Omega(t))}{I(t)} \frac{dI(t)}{dt} - \beta \frac{\Omega(t)^3}{I(t)} \quad (5.16)$$

Como, ao longo do resfriamento da estrela a matéria normal sofre progressivamente transição para a fase superfluida, maior será a região de matéria superfluida no interior da estrela e, por conseguinte, menor será a região de matéria normal. Logo, o momento de inércia da matéria normal  $I(t)$  diminuirá com o tempo. Isso ocorre durante todo o intervalo em que o resfriamento propicia essa transição. Depois de uma certa idade, que depende dos diagramas de fases (4.1) e do quão avançado está o resfriamento, tal transição deixa de ocorrer, ou ocorre a uma taxa desprezível, e a região de matéria normal não mais diminui, fazendo com que o momento de inércia devido à matéria normal volte a ficar constante.

O momento de inércia da matéria superfluida, para um dado instante de tempo, é calculado por meio da seguinte expressão (GLENDENNING, 2000):

$$I_{SF}(t) = \frac{8\pi}{3} \int_0^{r_{max}(t)} \frac{\epsilon(r) + p(r)}{1 - \frac{2M(r)}{r}} r^4 e^{-\nu(r)} dr \quad (5.17)$$

Os termos  $\epsilon(r)$ ,  $p(r)$ ,  $M(r)$  e  $e^{\nu(r)}$  são respectivamente a densidade de energia e a pressão da matéria que compõe a estrela na posição radial  $r$ , a massa gravitacional da estrela contida desde o centro até essa mesma posição radial  $r$ , e uma das duas funções métricas utilizadas na equação do tempo próprio (2.36) para o cálculo das equações de estrutura. Por fim,  $r_{max}(t)$  é o valor do raio mais externo da região de matéria superfluida, onde começa a matéria normal se estendendo até a superfície. Este raio máximo é dado nos gráficos (4.2) para a estrela de hádrons, e (4.3) para a híbrida. Note que, a despeito de haver um raio mínimo, mais interno na estrela, que também separa a matéria normal, que vem desde o centro, da matéria superfluida que começa nesse raio mínimo, a integração em (5.17) vai do centro ( $r = 0$ ) até o raio máximo da matéria superfluida, ignorando a eventual possibilidade de ainda haver matéria normal no núcleo da estrela. Na verdade, a equação (5.17) não está calculando o momento de inércia devido apenas a região de matéria superfluida, mais sim devido a toda região interna à camada mais externa de matéria superfluida. Não obstante, continua-se rotulando este momento como sendo da matéria superfluida.

Essa eventual região interna de matéria normal não é discriminada numa equação

particular nas equações do momento angular (5.15), mas está de fato incorporada na equação que diz respeito à matéria superfluida, ou seja, assim como no caso do momento de inércia, o que se chamou de momento angular da matéria superfluida em (5.15) é na realidade, o momento angular de toda matéria interna à camada mais externa de matéria superfluida; em outras palavras, neste trabalho supõe-se a não ocorrência do desacoplamento entre a matéria normal do núcleo da estrela e a matéria superfluida acima desta, mas apenas entre toda essa região interna à camada mais externa de matéria superfluida e a matéria normal localizada próxima à superfície da estrela. Isto nada mais é do que uma simplificação, para que não aparecessem neste momento mais parâmetros e grandezas tais como: a velocidade angular dessa matéria normal mais interna; a distribuição do campo magnético no interior dessa matéria e o torque que esse campo talvez exerça sobre a rotação dessa região, etc.

O momento de inércia  $I$  da matéria normal é simplesmente a diferença entre o momento de inércia total da estrela (calculado também a partir de (5.17) só que com  $r$  variando entre 0 e o raio da estrela) e o momento da matéria superfluida:

$$I(t) = I_{total} - I_{SF}(t) \quad (5.18)$$

Da mesma forma que na seção anterior derivou-se a equação (5.6) a fim de se encontrar uma expressão para o *braking index*, deriva-se a equação (5.16) ( $n = 3$  é o *braking index* no cenário canônico):

$$\begin{aligned}\ddot{\Omega} &= -\frac{\dot{\Omega}\dot{I}}{I} + (\Omega_{SF} - \Omega)\frac{\ddot{I}}{I} - (\Omega_{SF} - \Omega)\frac{\dot{I}^2}{I^2} + \\ &+ n\frac{\dot{\Omega}}{\Omega}\left(-\frac{\beta\Omega^n}{I}\right) - \frac{\dot{I}}{I}\left(-\frac{\beta\Omega^n}{I}\right)\end{aligned}\quad (5.19)$$

$$\begin{aligned}\ddot{\Omega} &= -\frac{\dot{\Omega}\dot{I}}{I} + (\Omega_{SF} - \Omega)\frac{\ddot{I}}{I} - (\Omega_{SF} - \Omega)\frac{\dot{I}^2}{I^2} + \\ &+ n\frac{\dot{\Omega}}{\Omega}\left(\dot{\Omega} - (\Omega_{SF} - \Omega)\frac{\dot{I}}{I}\right) - \frac{\dot{I}}{I}\left(\dot{\Omega} - (\Omega_{SF} - \Omega)\frac{\dot{I}}{I}\right)\end{aligned}\quad (5.20)$$

$$\begin{aligned}\ddot{\Omega} &= -\frac{\dot{\Omega}\dot{I}}{I} + (\Omega_{SF} - \Omega)\frac{\ddot{I}}{I} - (\Omega_{SF} - \Omega)\frac{\dot{I}^2}{I^2} + \\ &+ n\frac{\dot{\Omega}^2}{\Omega} - n(\Omega_{SF} - \Omega)\frac{\dot{\Omega}\dot{I}}{\Omega I} - \frac{\dot{I}\dot{\Omega}}{I} + (\Omega_{SF} - \Omega)\frac{\dot{I}^2}{I^2}\end{aligned}\quad (5.21)$$

$$\ddot{\Omega} = n\frac{\dot{\Omega}^2}{\Omega}\left(1 - \frac{(\Omega_{SF} - \Omega)\dot{I}}{\dot{\Omega}I}\right) - 2\frac{\dot{I}\dot{\Omega}}{I} + (\Omega_{SF} - \Omega)\frac{\dot{I}}{I}\quad (5.22)$$

Multiplicando a equação (5.22) por  $\Omega/\dot{\Omega}^2$ , obtém-se a evolução do *braking index* aparente da estrela, isto é, o valor do *braking index* quando este é calculado por meio de (5.11), a partir da medição da frequência de rotação e de suas duas primeiras derivadas:

$$n(t) = \frac{\Omega\ddot{\Omega}}{\dot{\Omega}^2} = n\left(1 - \frac{(\Omega_{SF} - \Omega)\dot{I}\Omega}{\Omega I\dot{\Omega}}\right) - 2\frac{\dot{I}\Omega}{I\dot{\Omega}} + \frac{(\Omega_{SF} - \Omega)\dot{I}\Omega^2}{\Omega I\dot{\Omega}^2}\quad (5.23)$$

Assim, caso este modelo descreva bem a evolução da rotação dos pulsares, a evolução do *braking index* aparente  $n(t)$  irá evoluir tal como em (5.23), podendo ter valores diferentes do canônico. Note que quando o momento de inércia torna a ficar constante, e portanto as suas duas primeiras derivadas são identicamente nulas, a evolução retorna ao caso canônico, como é esperado para estrelas muito velhas:

$$n(t) = n = 3\quad (5.24)$$

### 5.3 Resultados

Nesta seção encontram-se os resultados obtidos para a evolução da rotação de uma estrela de hádrons e para a de uma estrela híbrida, calculadas de acordo com as equações (5.16), quando o momento de inércia  $I(t)$  varia conforme a mudança de  $I_{SF}(t)$  que ocorre, por sua vez, com as mudanças do raio máximo da região de matéria superfluida  $r_{max}(t)$ , região essa que se altera conforme a evolução térmica da estrela ao longo do tempo. É importante notar que a equação (5.16) possui dois parâmetros livres,  $\Omega_{SF}$  e  $\beta$  que está relacionado ao campo magnético na superfície da estrela. Assim, foram calculados vários resultados tomando-se diferentes valores tanto para  $\Omega_{SF}$  quanto para o campo magnético, contrastados com as medições experimentais da tabela (5.1). Os valores encontrados nas legendas dos gráficos com dimensão em hertz são justamente os diferentes valores assumidos para  $\Omega_{SF}$ . Cada gráfico dum mesmo tipo refere-se a um campo magnético superficial distinto.

As curvas descontínuas de mesma cor presentes em alguns resultados se devem não por a evolução de uma determinada grandeza ser descontínua, mas tão somente pelo uso de escalas logarítmicas, fazendo com que os valores negativos da grandeza envolvida sejam omitidos. Nos gráficos do período versus primeira derivada do período indica-se o sentido da evolução temporal dessas curvas. Nos demais tipos de gráficos, nos quais se mostra a evolução temporal de uma certa grandeza, fica, pois, subentendido que a parte omitida dessa evolução se deve a valores negativos.

### 5.3.1 Estrela de hádrons com massa de $1,74M_{\odot}$

#### Cenário fundo

- Momento de inércia da matéria normal e suas derivadas versus idade da estrela

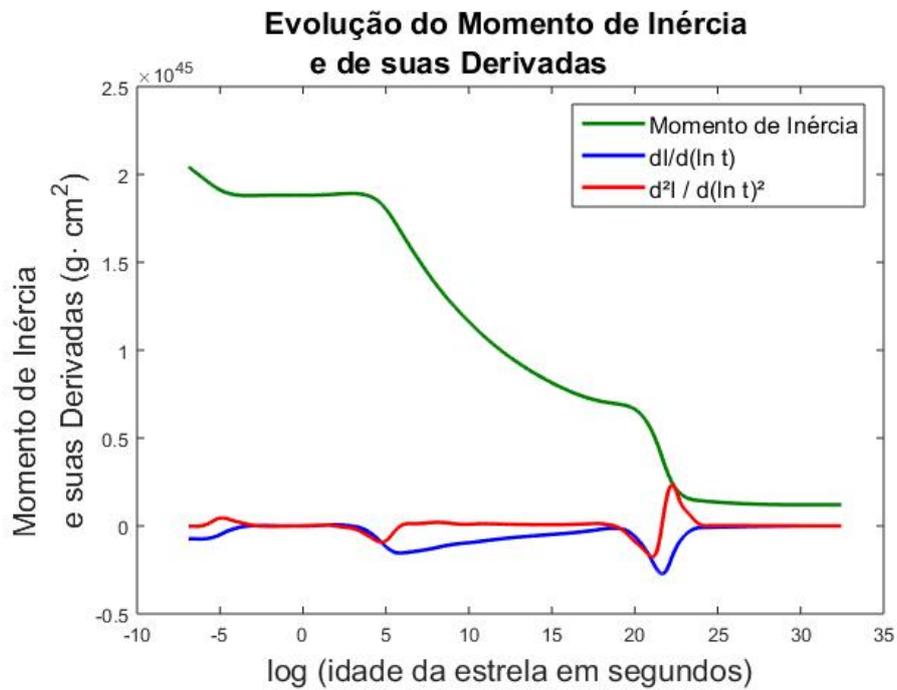


Figura 5.1: Evolução do momento de inércia da matéria normal no cenário fundo.

- Período de rotação versus derivada do período<sup>1</sup>

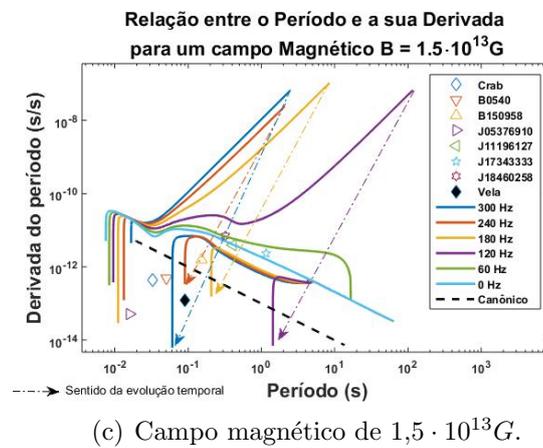
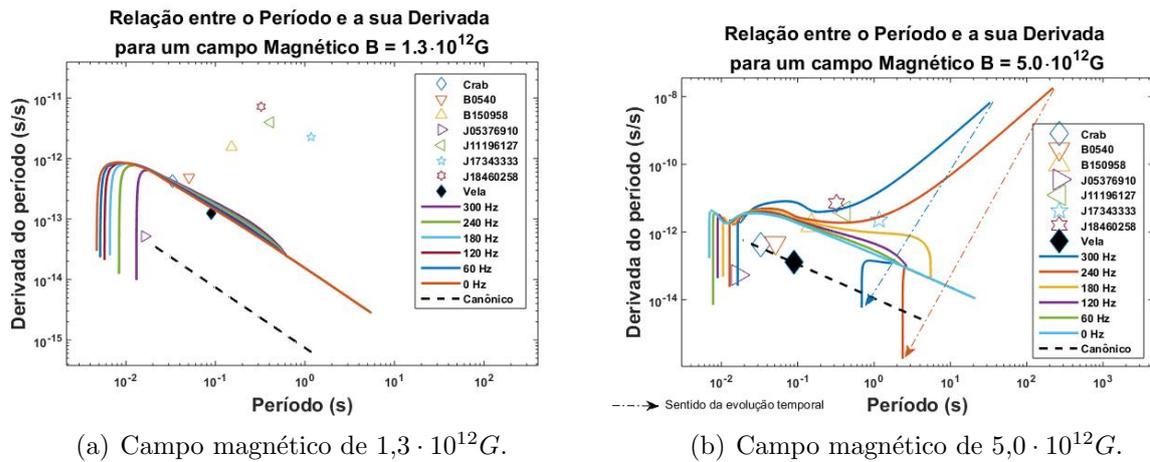
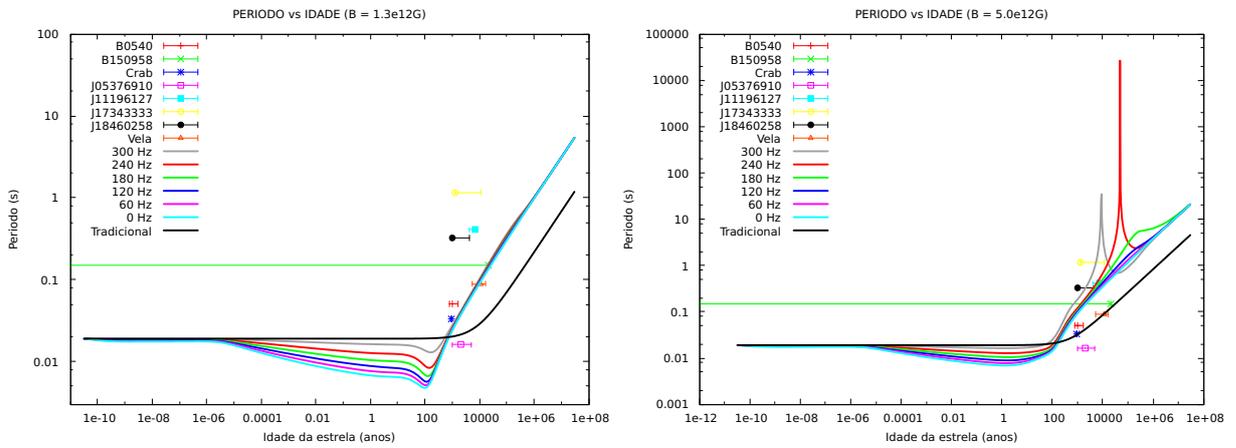


Figura 5.2: Relação entre o período de rotação e a sua primeira derivada da estrela de hádrons com massa de 1,74 massas solares ao longo da evolução de sua rotação para diferentes valores do campo magnético.

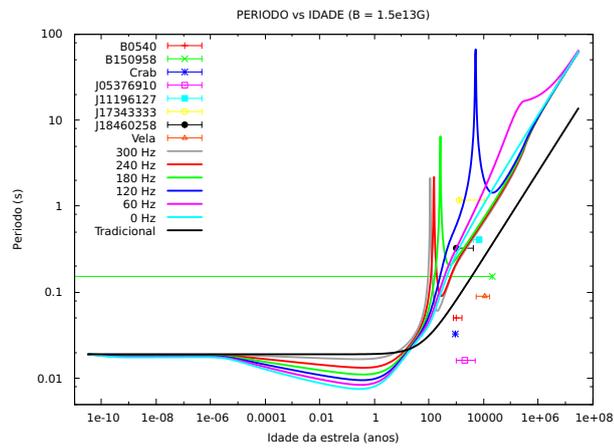
<sup>1</sup>Na verdade os resultados que envolvem o período e/ou sua primeira derivada são gráficos do módulo do período e/ou da primeira derivada desse módulo, uma vez que não se mede o sentido do giro da estrela, mas somente o intervalo entre os pulsos e sua taxa de variação.

• Período de rotação versus idade da estrela



(a) Campo magnético de  $1,3 \cdot 10^{12} G$ .

(b) Campo magnético de  $5,0 \cdot 10^{12} G$ .



(c) Campo magnético de  $1,5 \cdot 10^{13} G$ .

Figura 5.3: Evolução do período de rotação da estrela de hádrõs com massa de 1,74 massas solares para diferentes valores do seu campo magnético.

- Derivada do período versus idade da estrela

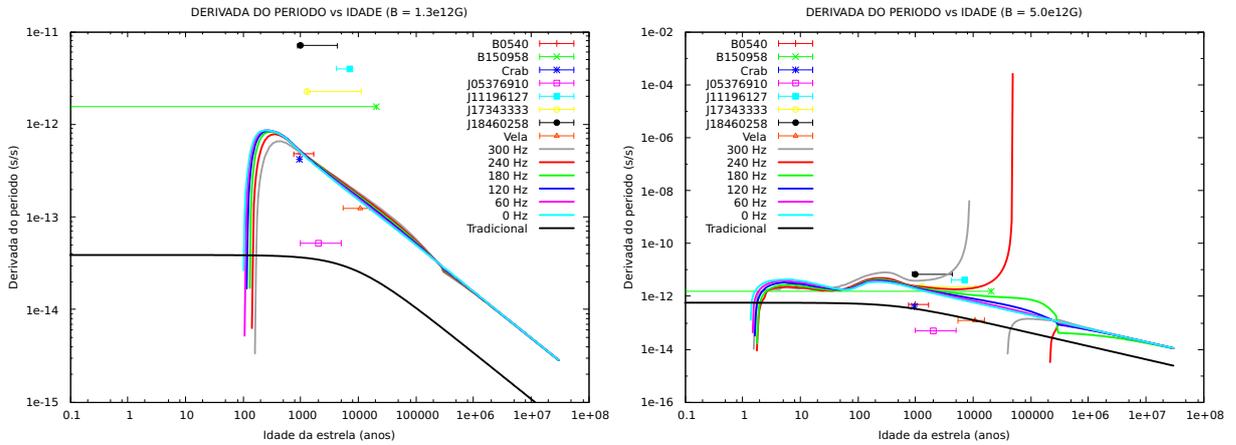
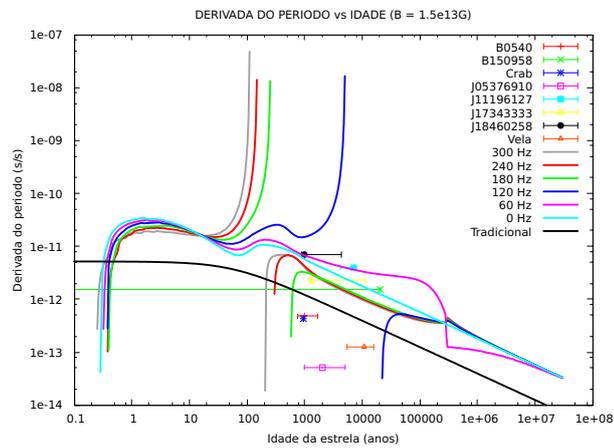
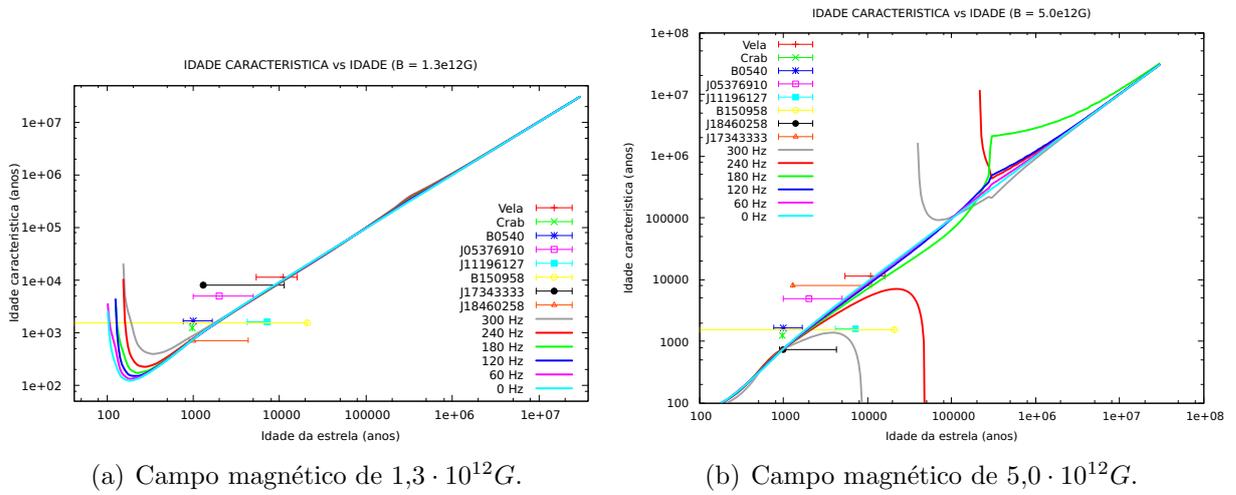
(a) Campo magnético de  $1,3 \cdot 10^{12}G$ .(b) Campo magnético de  $5,0 \cdot 10^{12}G$ .(c) Campo magnético de  $1,5 \cdot 10^{13}G$ .

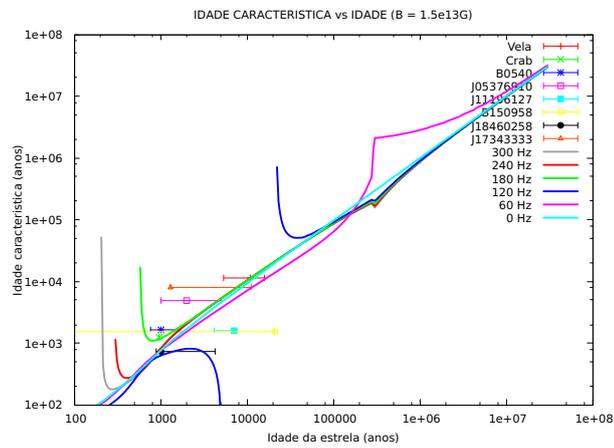
Figura 5.4: Evolução da derivada do período de rotação da estrela de hádrons com massa de 1,74 massas solares para diferentes valores do seu campo magnético.

- Idade característica versus idade da estrela



(a) Campo magnético de  $1,3 \cdot 10^{12} G$ .

(b) Campo magnético de  $5,0 \cdot 10^{12} G$ .



(c) Campo magnético de  $1,5 \cdot 10^{13} G$ .

Figura 5.5: Evolução da idade dipolar da estrela de hádrons com massa de  $1,74$  massas solares para diferentes valores do seu campo magnético.

- *Braking index* versus idade da estrela

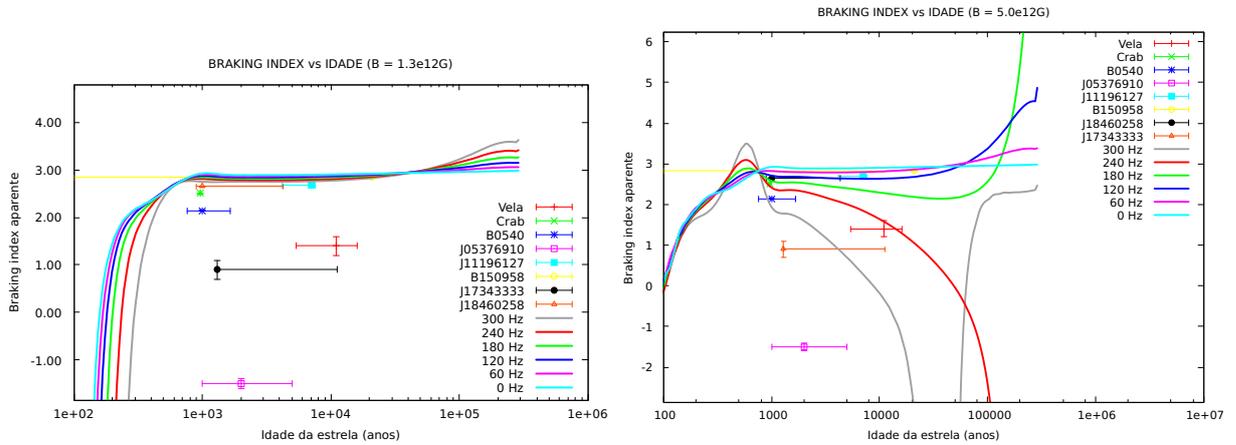
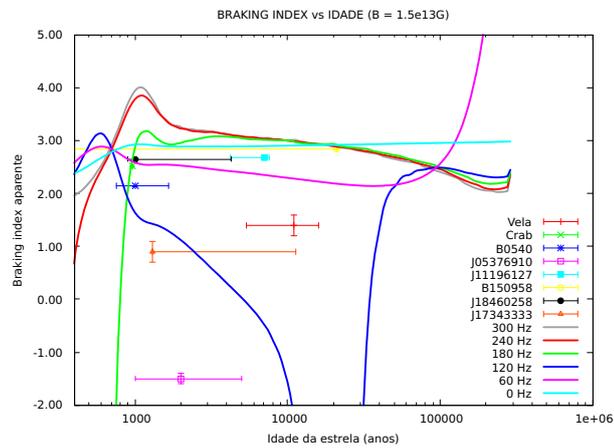
(a) Campo magnético de  $1,3 \cdot 10^{12}G$ .(b) Campo magnético de  $5,0 \cdot 10^{12}G$ .(c) Campo magnético de  $1,5 \cdot 10^{13}G$ .

Figura 5.6: Evolução do *braking index* aparente da estrela de hádrõs com massa de 1,74 massas solares para diferentes valores do seu campo magnético.

### Cenário médio

- Momento de inércia da matéria normal e suas derivadas versus idade da estrela

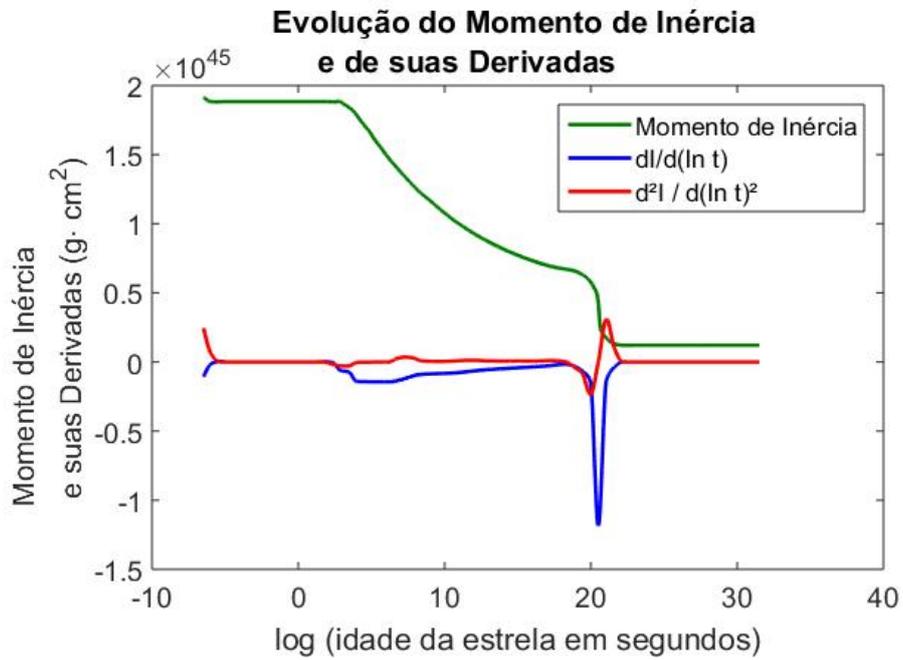


Figura 5.7: Evolução do momento de inércia da matéria normal no cenário médio.

- Período de rotação versus derivada do período

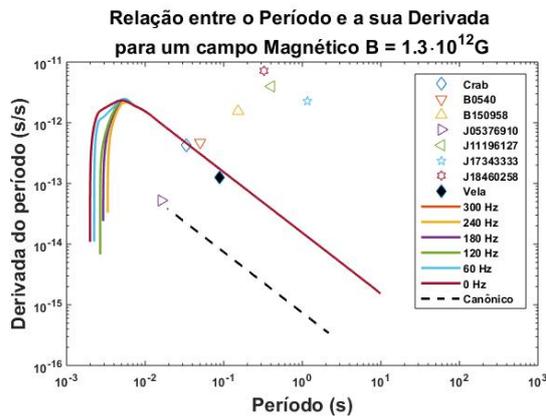
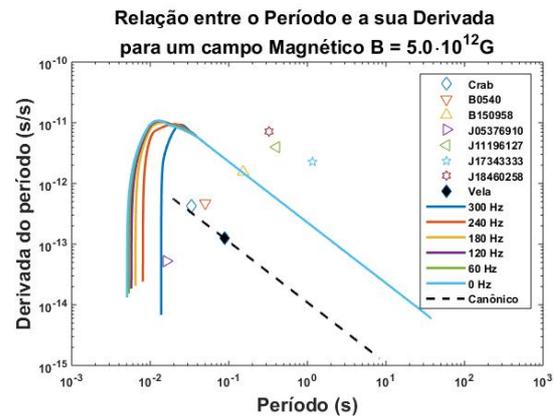
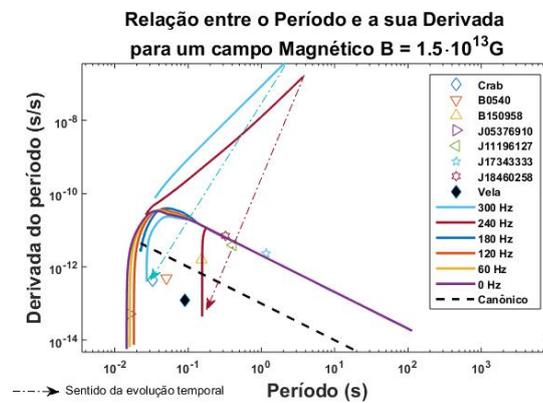
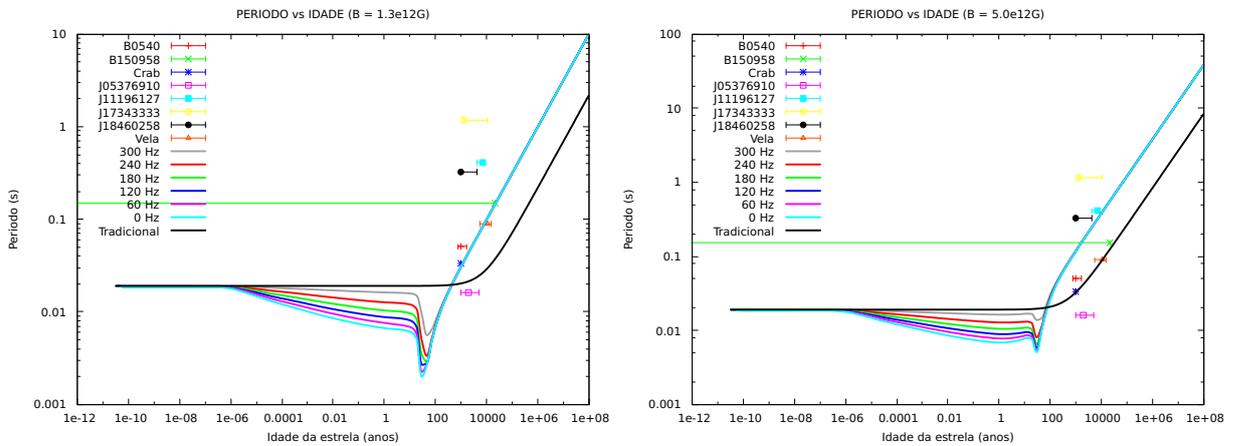
(a) Campo magnético de  $1,3 \cdot 10^{12} G$ .(b) Campo magnético de  $5,0 \cdot 10^{12} G$ .(c) Campo magnético de  $1,5 \cdot 10^{13} G$ .

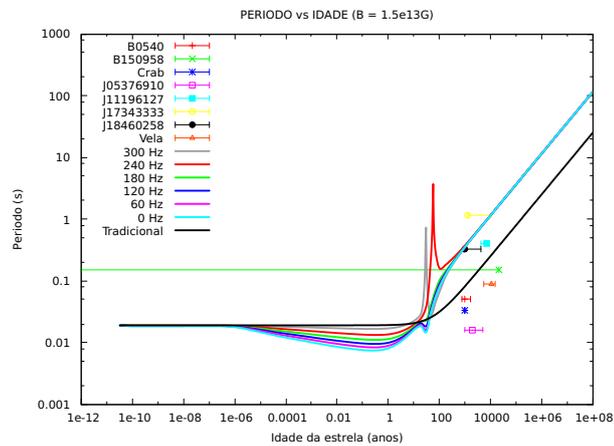
Figura 5.8: Relação entre o período de rotação e a sua primeira derivada da estrela de hádrons com massa de 1,74 massas solares ao longo da evolução de sua rotação para diferentes valores do campo magnético.

• Período de rotação versus idade da estrela



(a) Campo magnético de  $1,3 \cdot 10^{12}G$ .

(b) Campo magnético de  $5,0 \cdot 10^{12}G$ .



(c) Campo magnético de  $1,5 \cdot 10^{13}G$ .

Figura 5.9: Evolução do período de rotação da estrela de hádrons com massa de 1,74 massas solares para diferentes valores do seu campo magnético.

- Derivada do período versus idade da estrela

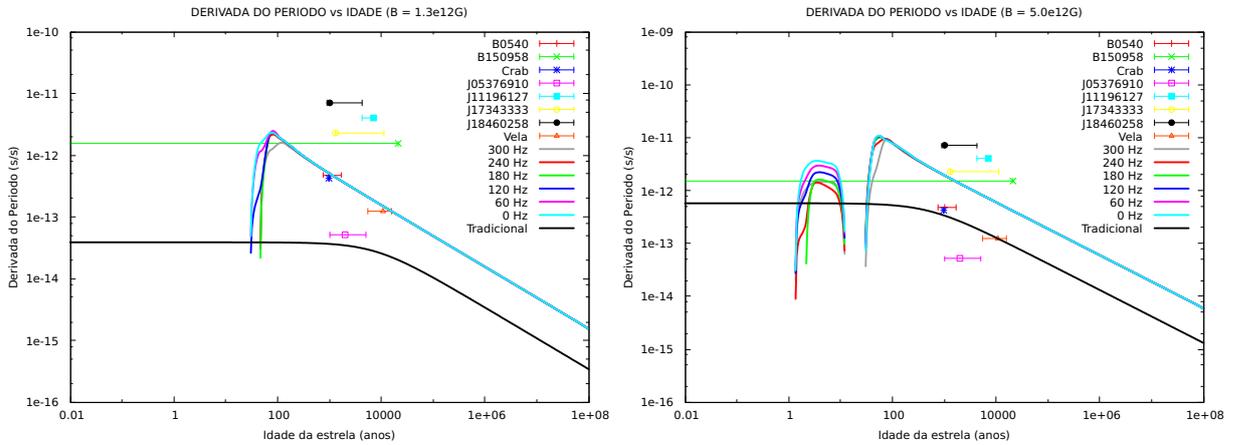
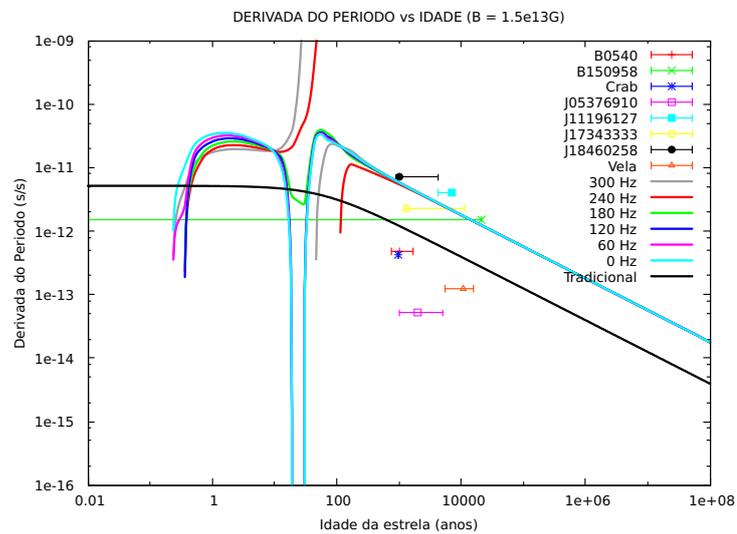
(a) Campo magnético de  $1,3 \cdot 10^{12} G$ .(b) Campo magnético de  $5,0 \cdot 10^{12} G$ .(c) Campo magnético de  $1,5 \cdot 10^{13} G$ .

Figura 5.10: Evolução da derivada do período de rotação da estrela de hádrõs com massa de 1,74 massas solares para diferentes valores do seu campo magnético.

- Idade característica versus idade da estrela

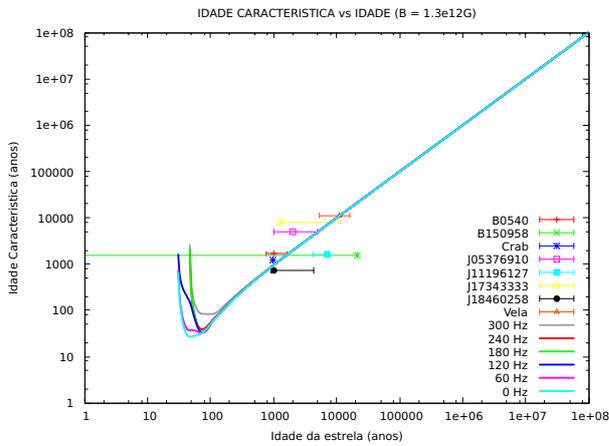
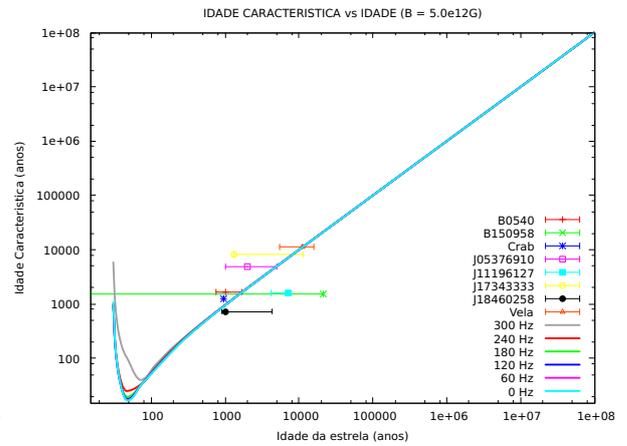
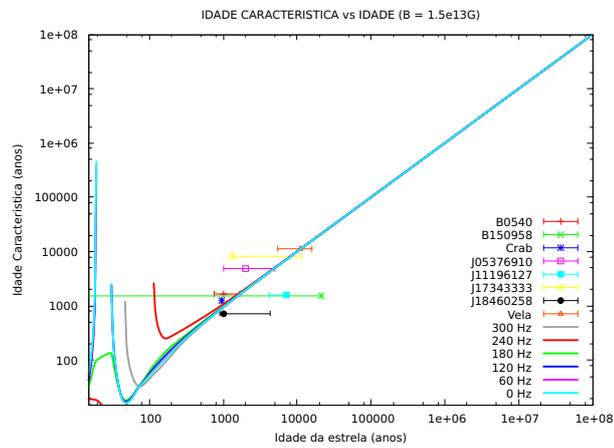
(a) Campo magnético de  $1,3 \cdot 10^{12}G$ .(b) Campo magnético de  $5,0 \cdot 10^{12}G$ .(c) Campo magnético de  $1,5 \cdot 10^{13}G$ .

Figura 5.11: Evolução da idade dipolar da estrela de hádrons com massa de 1,74 massas solares para diferentes valores do seu campo magnético.

### Cenário raso

- Momento de inércia da matéria normal e suas derivadas versus idade da estrela

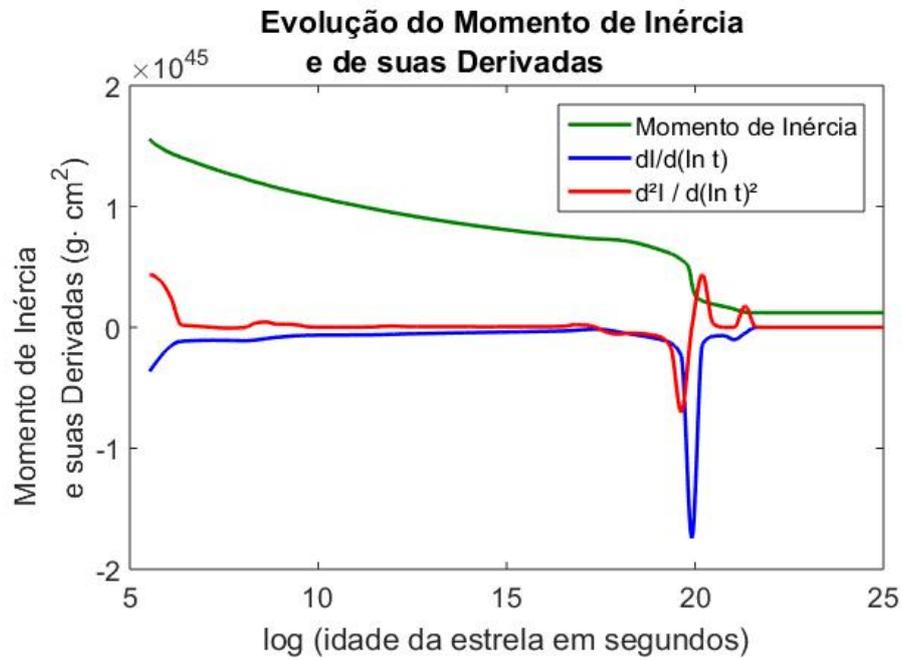


Figura 5.12: Evolução do momento de inércia da matéria normal no cenário raso.

- Período de rotação versus derivada do período

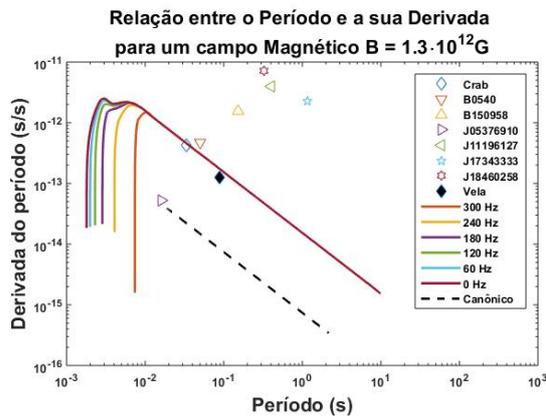
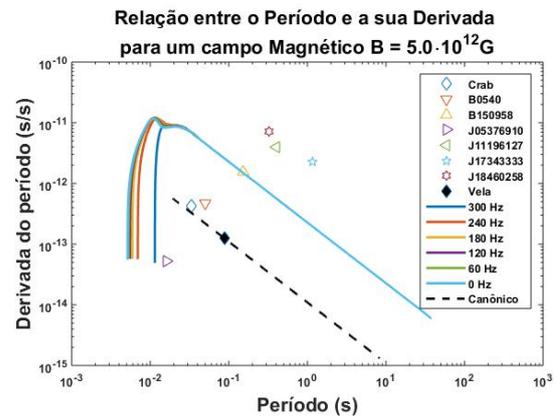
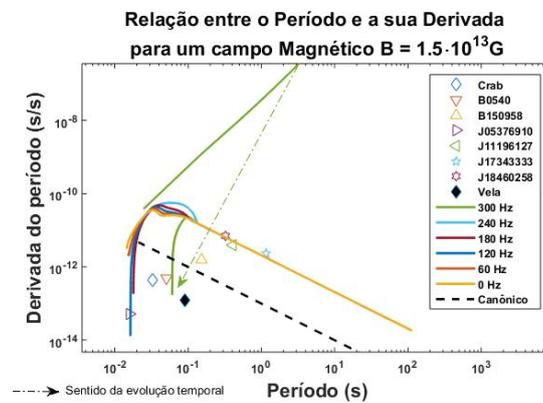
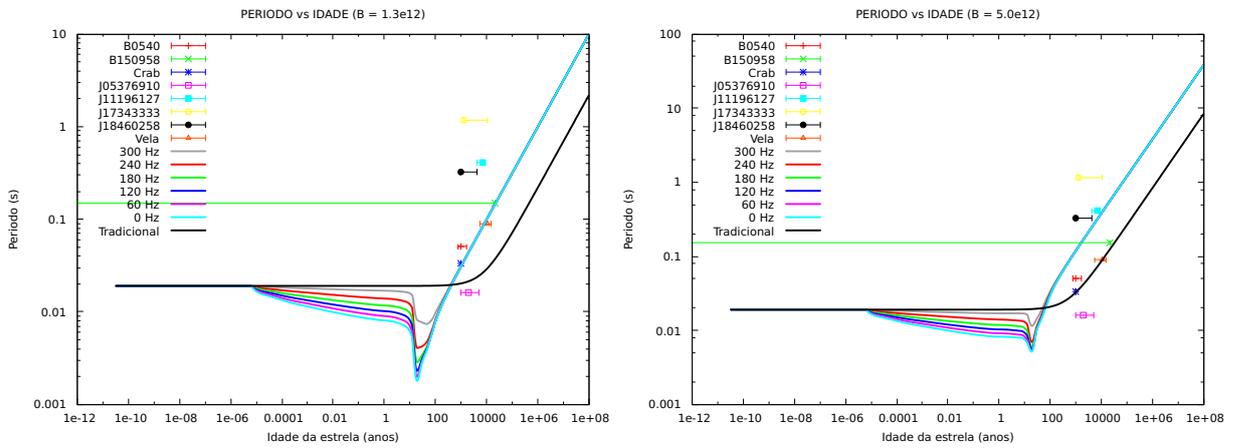
(a) Campo magnético de  $1,3 \cdot 10^{12} G$ .(b) Campo magnético de  $5,0 \cdot 10^{12} G$ .(c) Campo magnético de  $1,5 \cdot 10^{13} G$ .

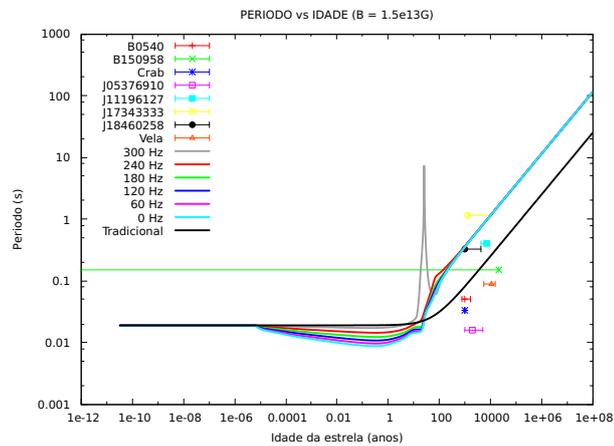
Figura 5.13: Relação entre o período de rotação e a sua primeira derivada da estrela de hádrons com massa de 1,74 massas solares ao longo da evolução de sua rotação para diferentes valores do campo magnético.

• Período de rotação versus idade da estrela



(a) Campo magnético de  $1,3 \cdot 10^{12} G$ .

(b) Campo magnético de  $5,0 \cdot 10^{12} G$ .



(c) Campo magnético de  $1,5 \cdot 10^{13} G$ .

Figura 5.14: Evolução do período de rotação da estrela de hádrõs com massa de 1,74 massas solares para diferentes valores do seu campo magnético.

- Derivada do período versus idade da estrela

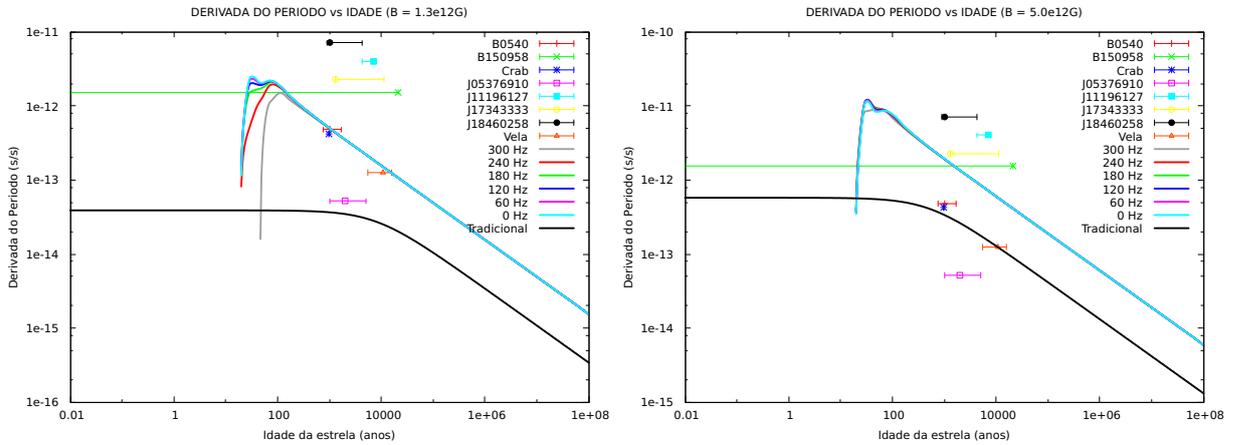
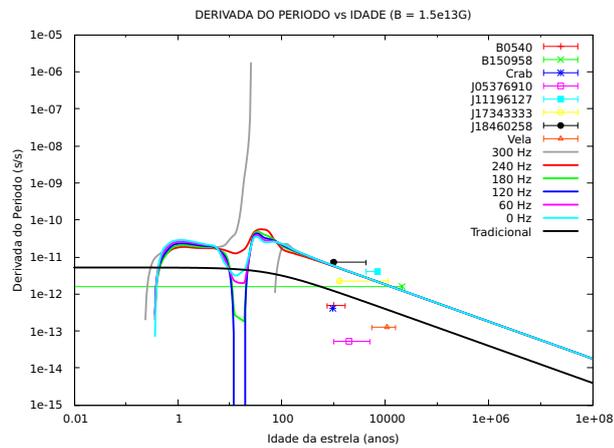
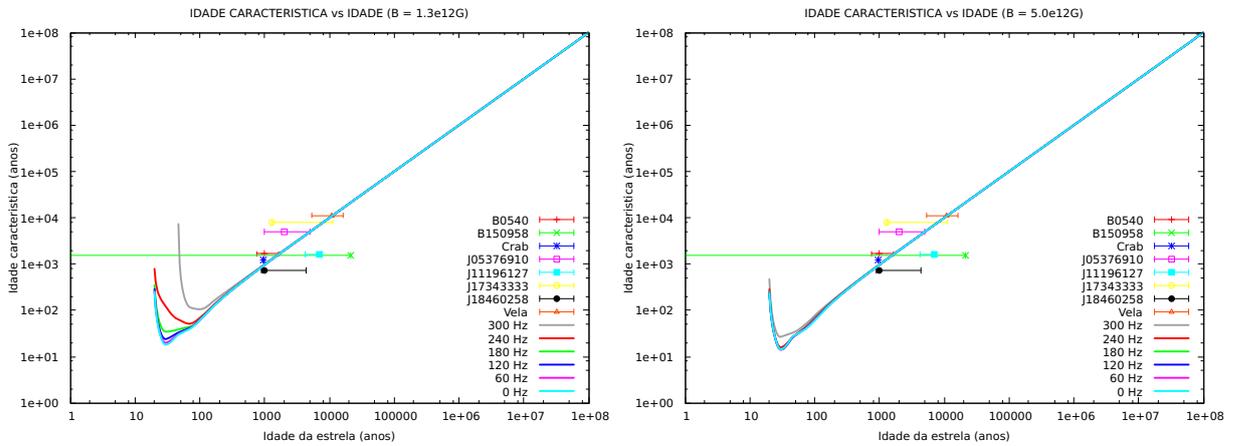
(a) Campo magnético de  $1,3 \cdot 10^{12} G$ .(b) Campo magnético de  $5,0 \cdot 10^{12} G$ .(c) Campo magnético de  $1,5 \cdot 10^{13} G$ .

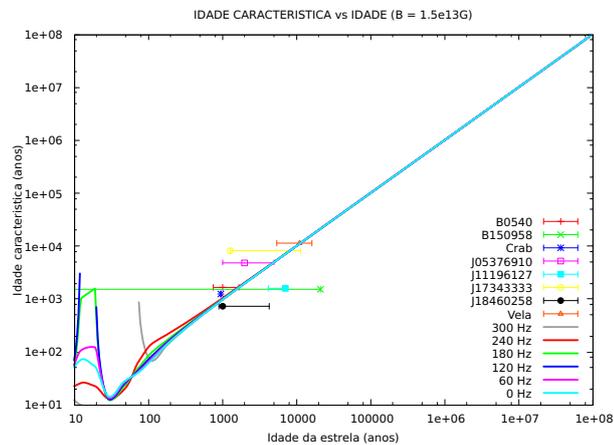
Figura 5.15: Evolução da derivada do período de rotação da estrela de hádrons com massa de 1,74 massas solares para diferentes valores do seu campo magnético.

• Idade característica versus idade da estrela



(a) Campo magnético de  $1,3 \cdot 10^{12} G$ .

(b) Campo magnético de  $5,0 \cdot 10^{12} G$ .



(c) Campo magnético de  $1,5 \cdot 10^{13} G$ .

Figura 5.16: Evolução da idade dipolar da estrela de hádrons com massa de 1,74 massas solares para diferentes valores do seu campo magnético.

### 5.3.2 Estrela híbrida com massa de $1,96M_{\odot}$

#### Cenário fundo

- Momento de inércia da matéria normal e suas derivadas versus idade da estrela

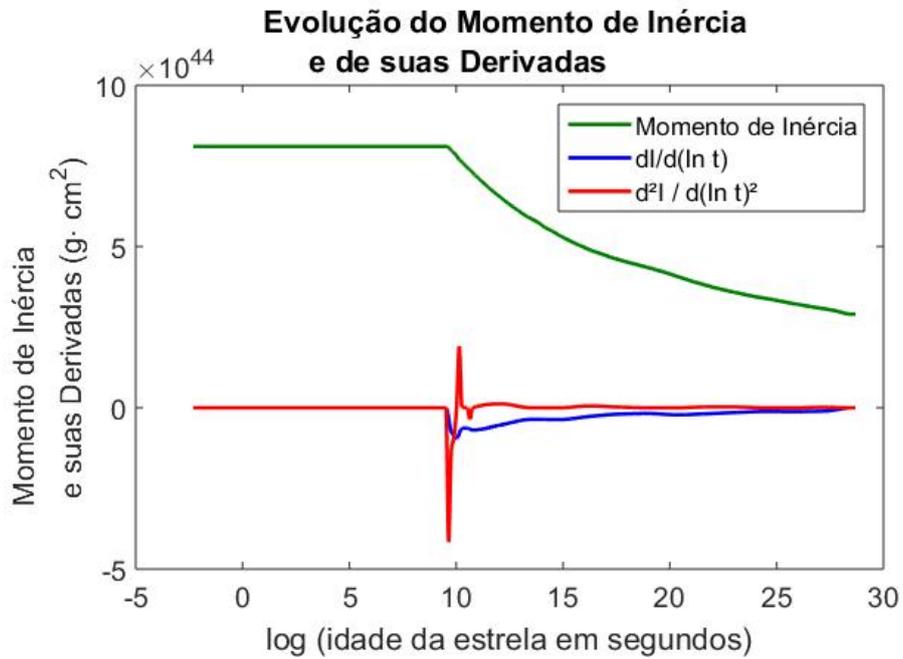


Figura 5.17: Evolução do momento de inércia da matéria normal no cenário fundo.

- Período de rotação versus derivada do período

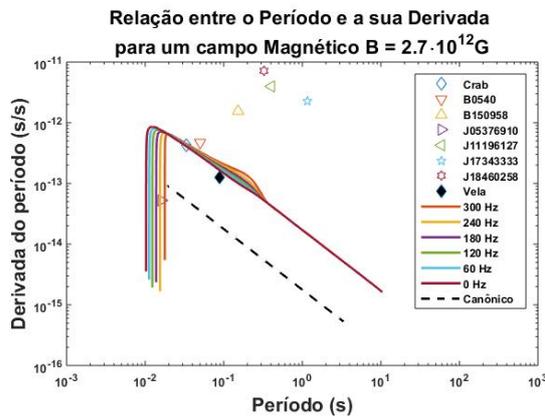
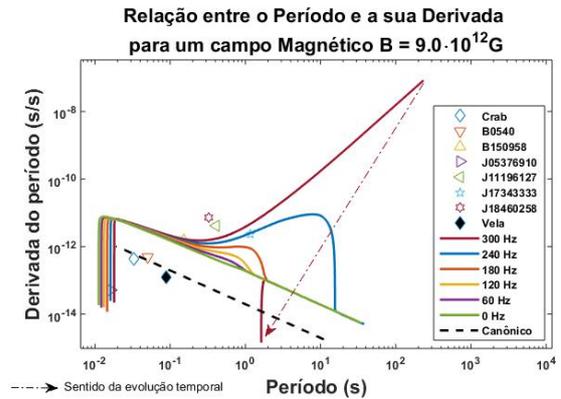
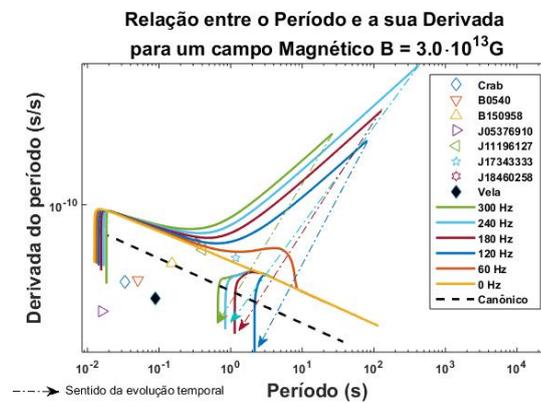
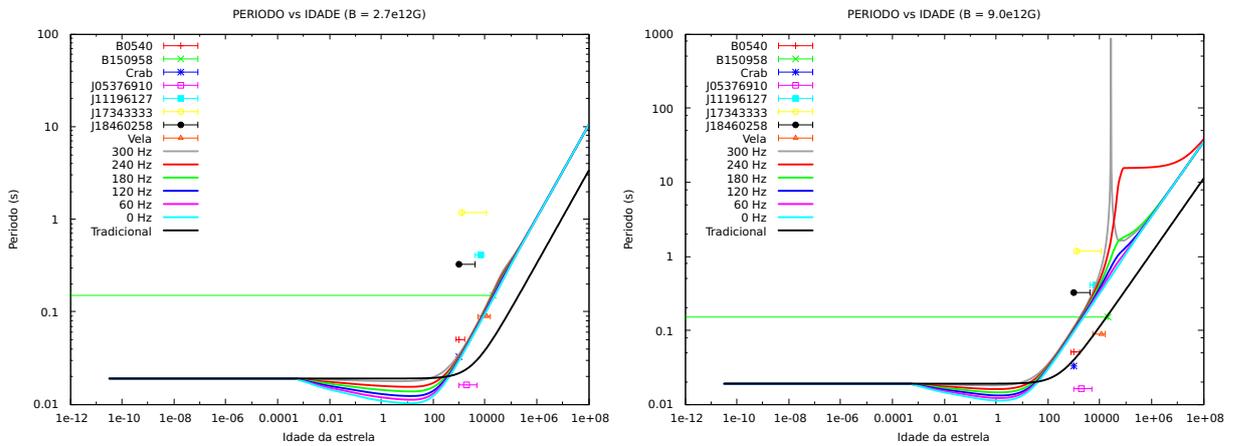
(a) Campo magnético de  $2,7 \cdot 10^{12} G$ .(b) Campo magnético de  $9,0 \cdot 10^{12} G$ .(c) Campo magnético de  $3,0 \cdot 10^{13} G$ .

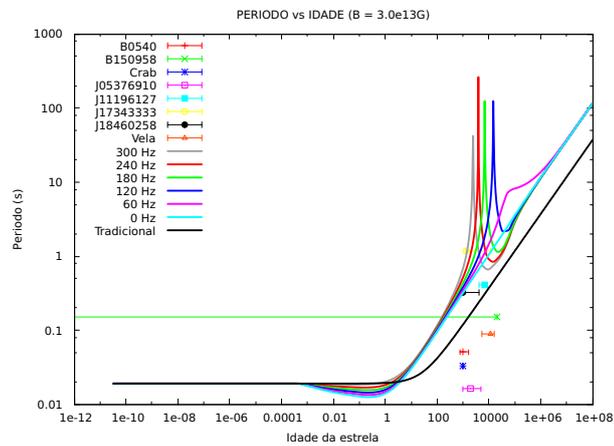
Figura 5.18: Relação entre o período de rotação e a sua primeira derivada da estrela híbrida com massa de 1,96 massas solares ao longo da evolução de sua rotação para diferentes valores do campo magnético.

• Período de rotação versus idade da estrela



(a) Campo magnético de  $2,7 \cdot 10^{12} G$ .

(b) Campo magnético de  $9,0 \cdot 10^{12} G$ .



(c) Campo magnético de  $3,0 \cdot 10^{13} G$ .

Figura 5.19: Evolução do período de rotação da estrela híbrida com massa de 1,96 massas solares para diferentes valores do seu campo magnético.

- Derivada do período versus idade da estrela

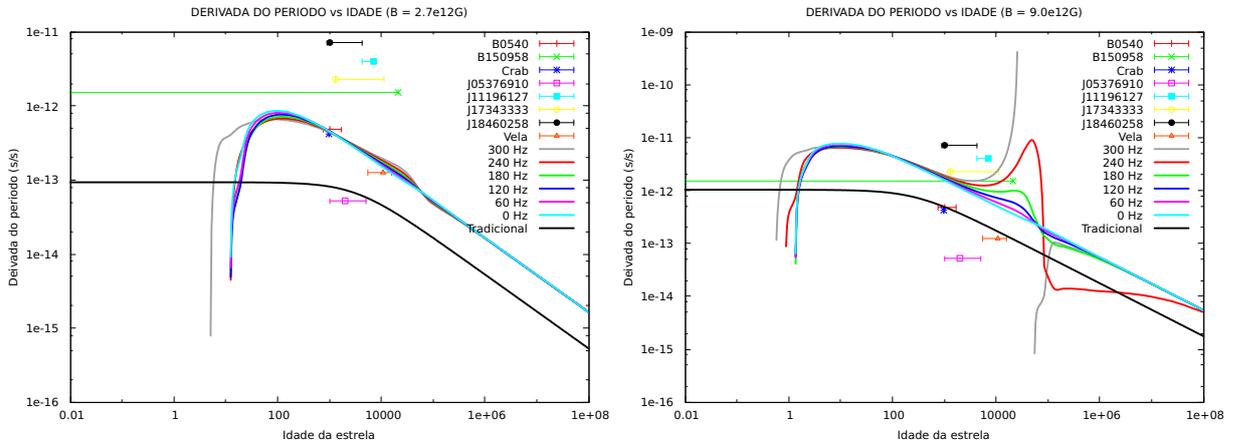
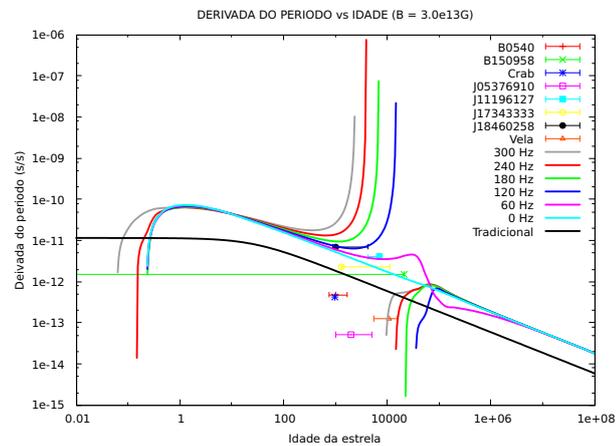
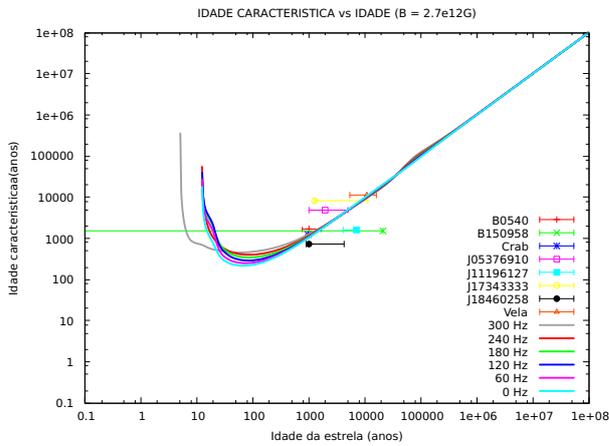
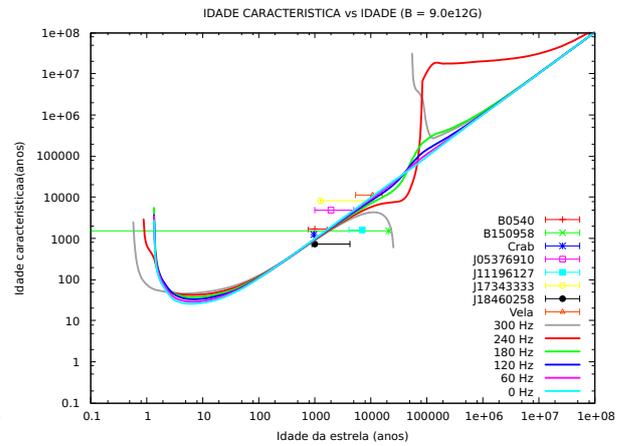
(a) Campo magnético de  $2,7 \cdot 10^{12}G$ .(b) Campo magnético de  $9,0 \cdot 10^{12}G$ .(c) Campo magnético de  $3,0 \cdot 10^{13}G$ .

Figura 5.20: Evolução da derivada do período de rotação da estrela híbrida com massa de 1,96 massas solares para diferentes valores do seu campo magnético.

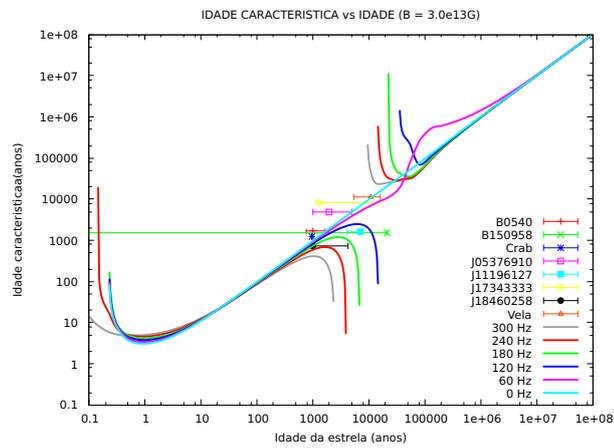
• Idade característica versus idade da estrela



(a) Campo magnético de  $2,7 \cdot 10^{12} G$ .



(b) Campo magnético de  $9,0 \cdot 10^{12} G$ .



(c) Campo magnético de  $3,0 \cdot 10^{13} G$ .

Figura 5.21: Evolução da idade dipolar da estrela híbrida com massa de 1,96 massas solares para diferentes valores do seu campo magnético.

- *Braking index* versus idade da estrela

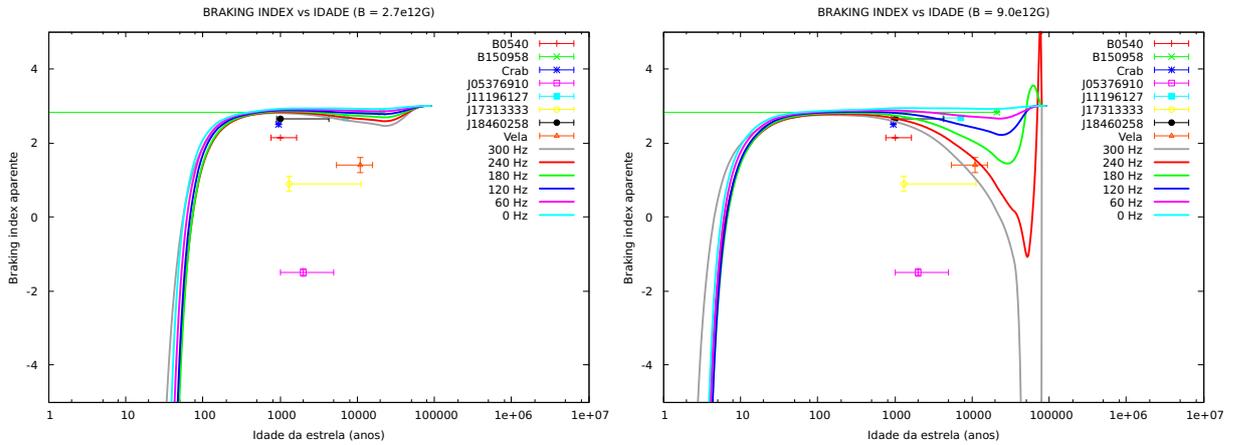
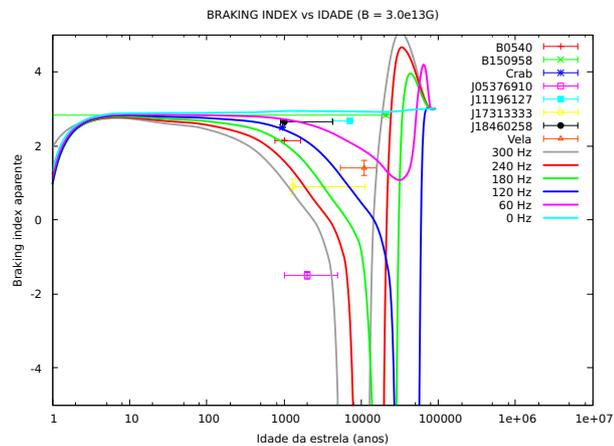
(a) Campo magnético de  $2,7 \cdot 10^{12} G$ .(b) Campo magnético de  $9,0 \cdot 10^{12} G$ .(c) Campo magnético de  $3,0 \cdot 10^{13} G$ .

Figura 5.22: Evolução do *braking index* aparente da estrela híbrida com massa de 1,96 massas solares para diferentes valores do seu campo magnético.

### Cenário médio

- Momento de inércia da matéria normal e suas derivadas versus idade da estrela

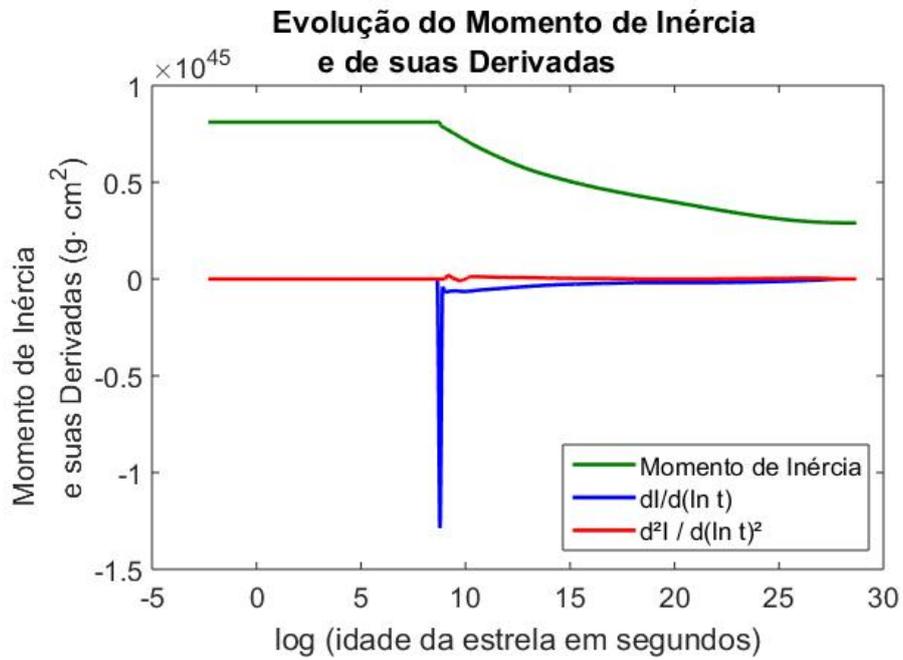


Figura 5.23: Evolução do momento de inércia da matéria normal no cenário médio

- Período de rotação versus derivada do período

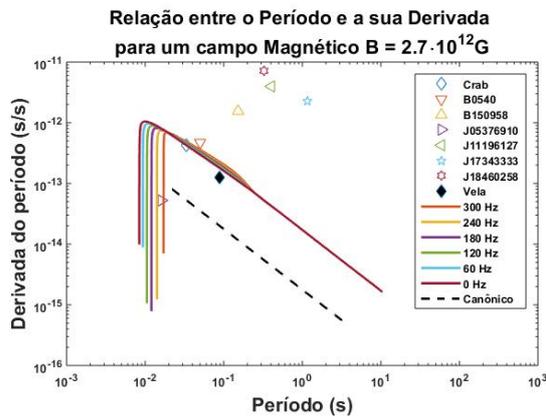
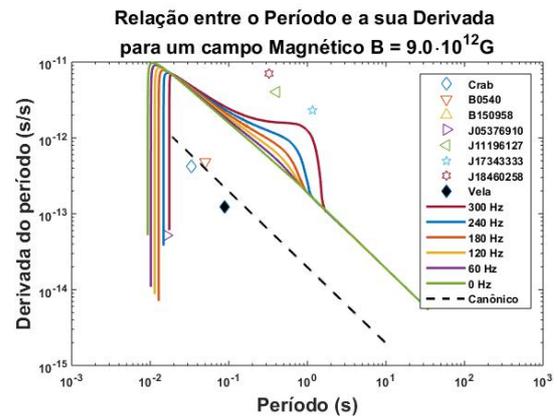
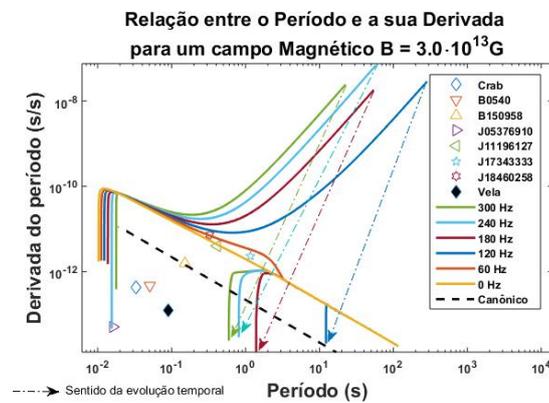
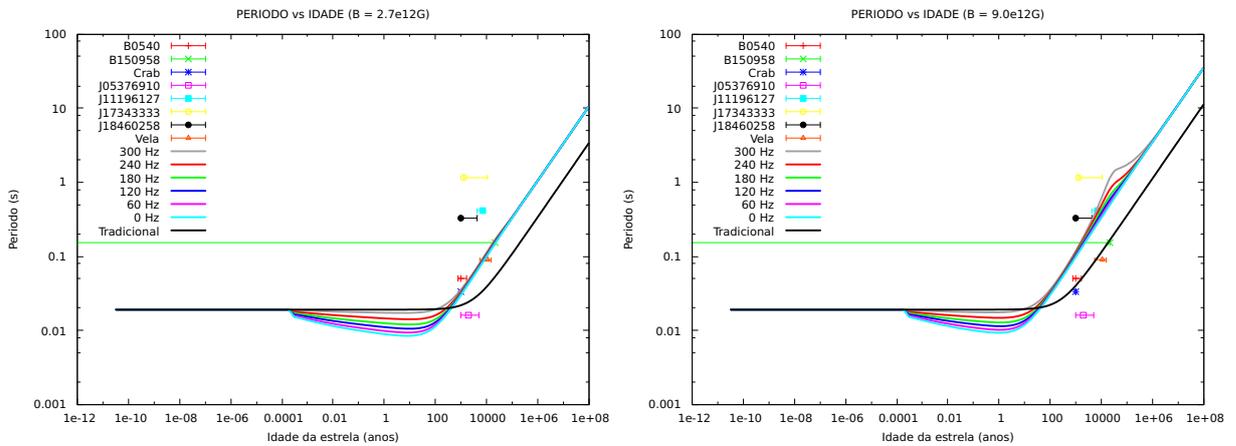
(a) Campo magnético de  $2,7 \cdot 10^{12}G$ .(b) Campo magnético de  $9,0 \cdot 10^{12}G$ .(c) Campo magnético de  $3,0 \cdot 10^{13}G$ .

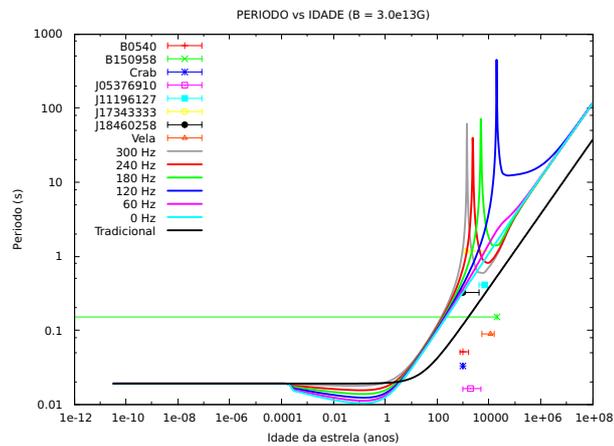
Figura 5.24: Relação entre o período de rotação e a sua primeira derivada da estrela híbrida com massa de 1,96 massas solares ao longo da evolução de sua rotação para diferentes valores do campo magnético.

• Período de rotação versus idade da estrela



(a) Campo magnético de  $2,7 \cdot 10^{12}G$ .

(b) Campo magnético de  $9,0 \cdot 10^{12}G$ .



(c) Campo magnético de  $3,0 \cdot 10^{13}G$ .

Figura 5.25: Evolução do período de rotação da estrela híbrida com massa de 1,96 massas solares para diferentes valores do seu campo magnético.

- Derivada do período versus idade da estrela

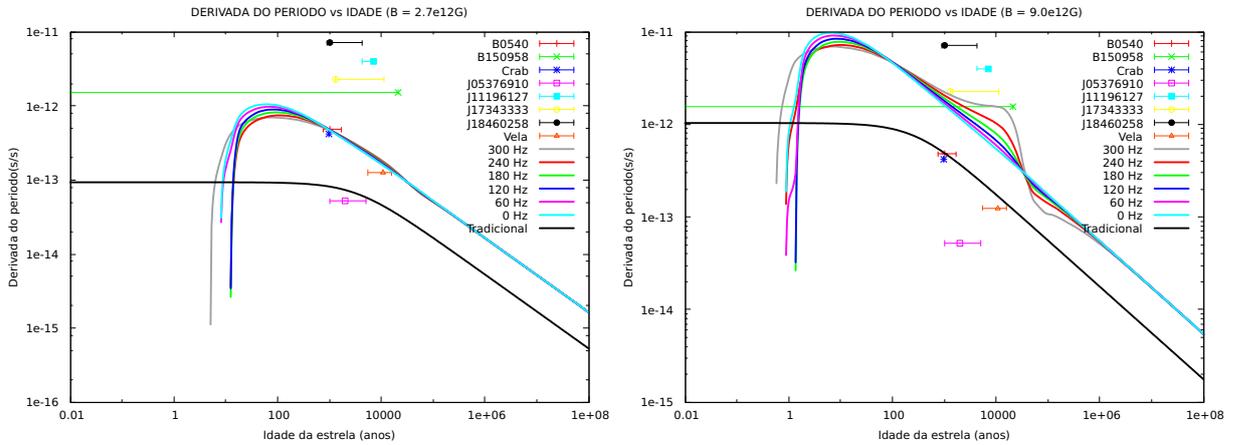
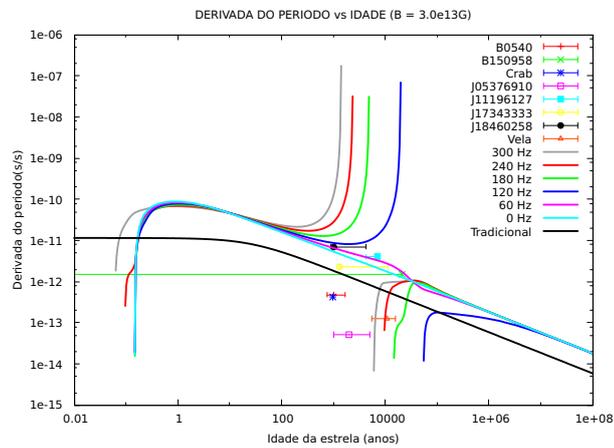
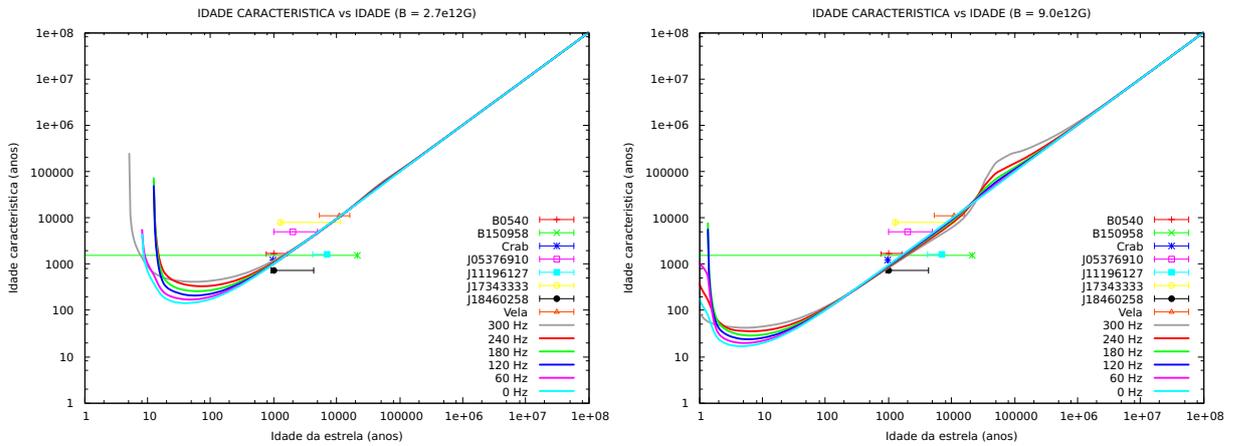
(a) Campo magnético de  $2,7 \cdot 10^{12}G$ .(b) Campo magnético de  $9,0 \cdot 10^{12}G$ .(c) Campo magnético de  $3,0 \cdot 10^{13}G$ .

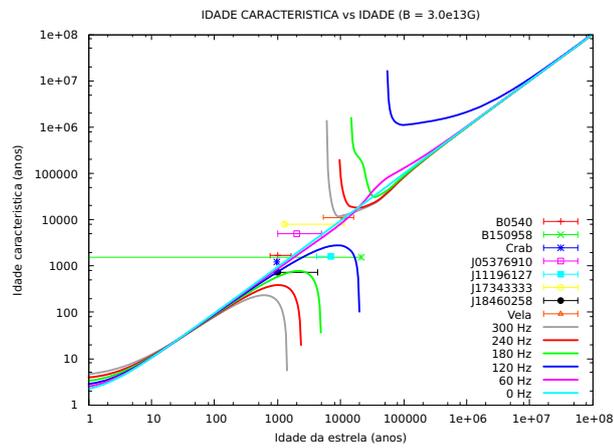
Figura 5.26: Evolução da derivada do período de rotação da estrela híbrida com massa de 1,96 massas solares para diferentes valores do seu campo magnético.

• Idade característica versus idade da estrela



(a) Campo magnético de  $2,7 \cdot 10^{12}G$ .

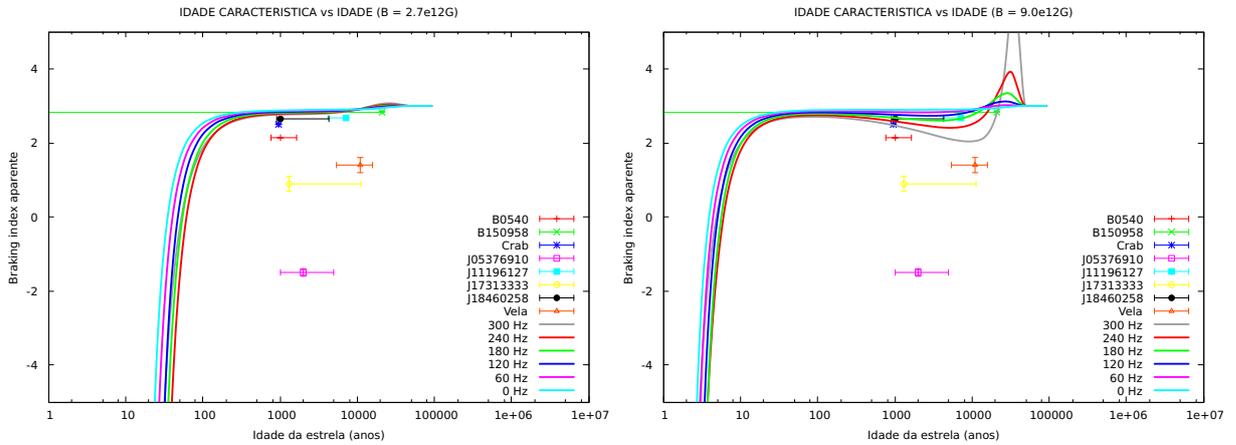
(b) Campo magnético de  $9,0 \cdot 10^{12}G$ .



(c) Campo magnético de  $3,0 \cdot 10^{13}G$ .

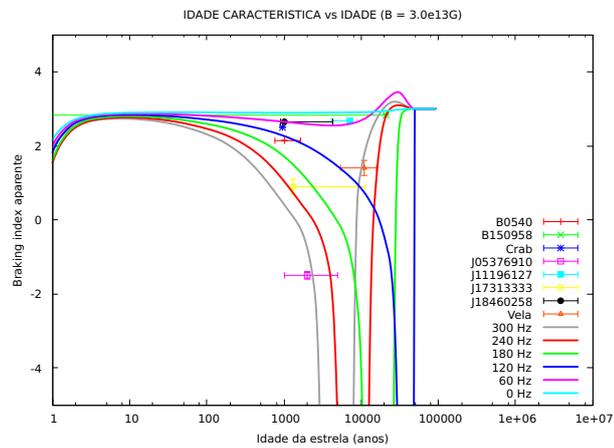
Figura 5.27: Evolução da idade dipolar da estrela híbrida com massa de 1,96 massas solares para diferentes valores do seu campo magnético.

• *Braking index* versus idade da estrela



(a) Campo magnético de  $2,7 \cdot 10^{12} G$ .

(b) Campo magnético de  $9,0 \cdot 10^{12} G$ .



(c) Campo magnético de  $3,0 \cdot 10^{13} G$ .

Figura 5.28: Evolução do *braking index* aparente da estrela híbrida com massa de 1,96 massas solares para diferentes valores do seu campo magnético.

### Cenário raso

- Momento de inércia da matéria normal e suas derivadas versus idade da estrela

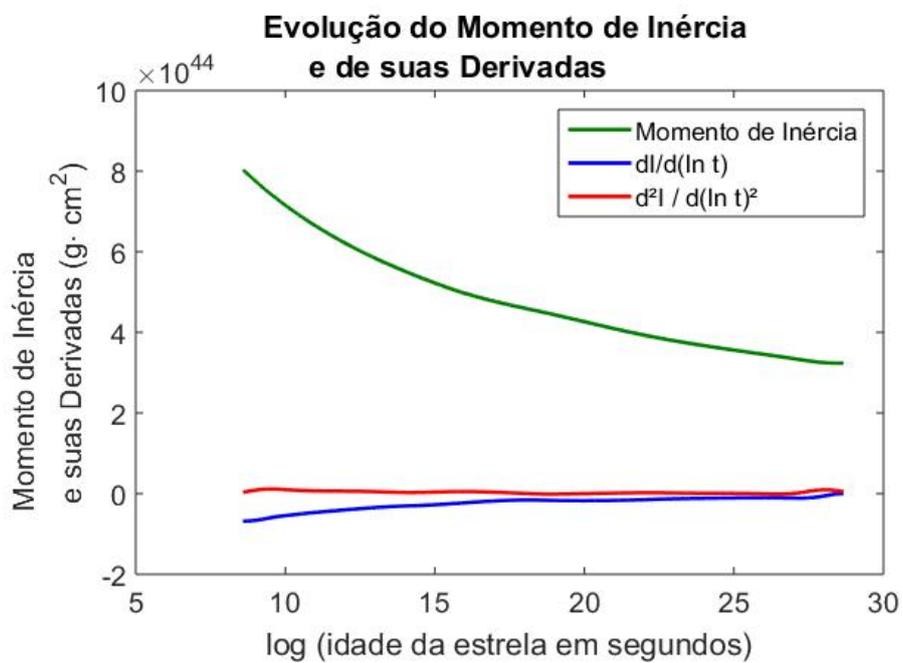


Figura 5.29: Evolução do momento de inércia da matéria normal no cenário raso

- Período de rotação versus derivada do período

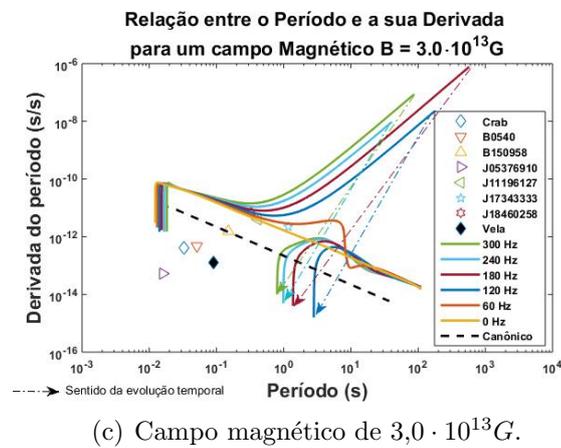
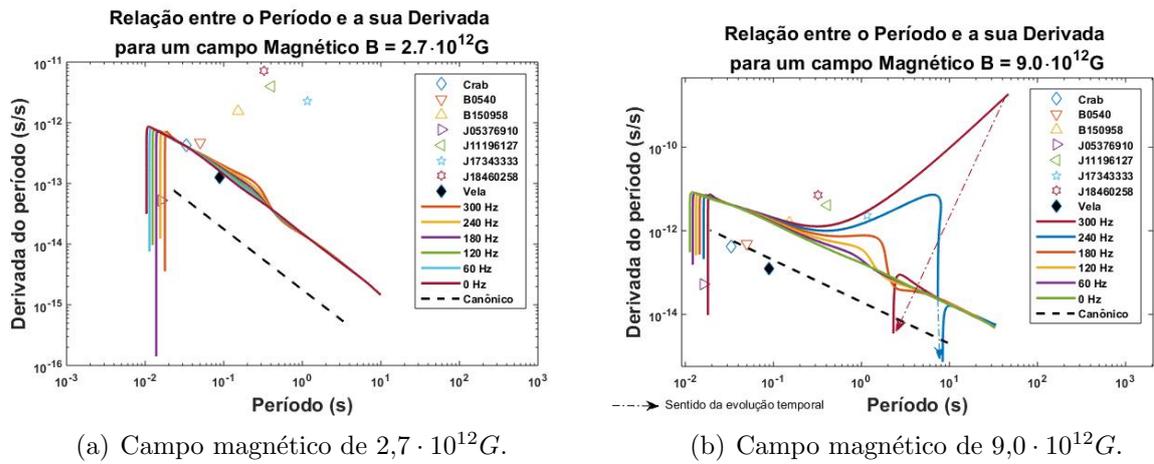


Figura 5.30: Relação entre o período de rotação e a sua primeira derivada da estrela híbrida com massa de 1,96 massas solares ao longo da evolução de sua rotação para diferentes valores do campo magnético.

- Período de rotação versus idade da estrela

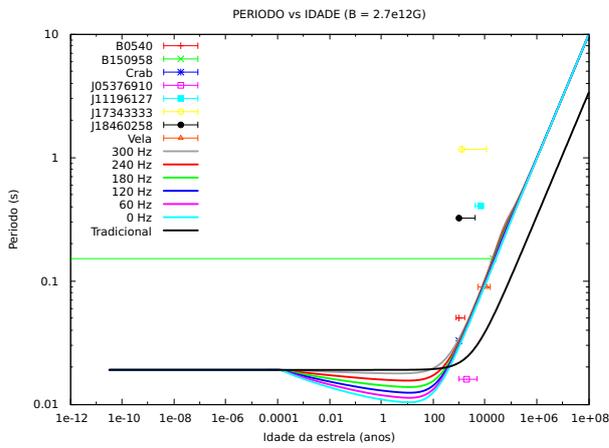
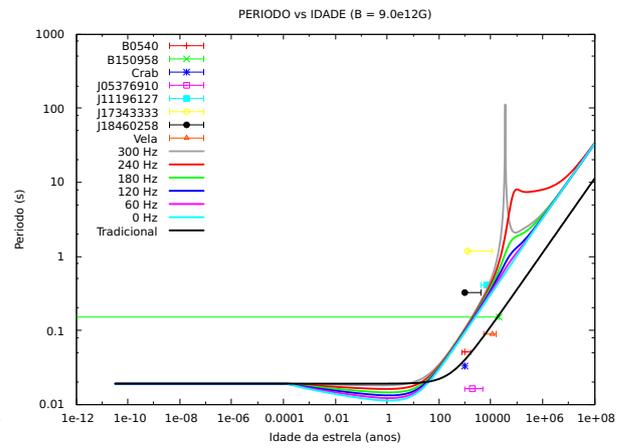
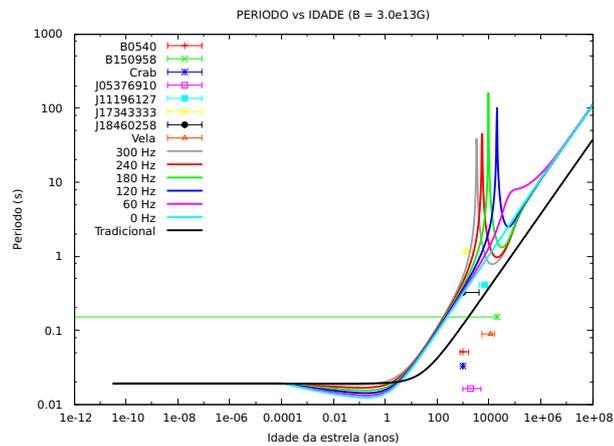
(a) Campo magnético de  $2,7 \cdot 10^{12} G$ .(b) Campo magnético de  $9,0 \cdot 10^{12} G$ .(c) Campo magnético de  $3,0 \cdot 10^{13} G$ .

Figura 5.31: Evolução do período de rotação da estrela híbrida com massa de 1,96 massas solares para diferentes valores do seu campo magnético.

- Derivada do período versus idade da estrela

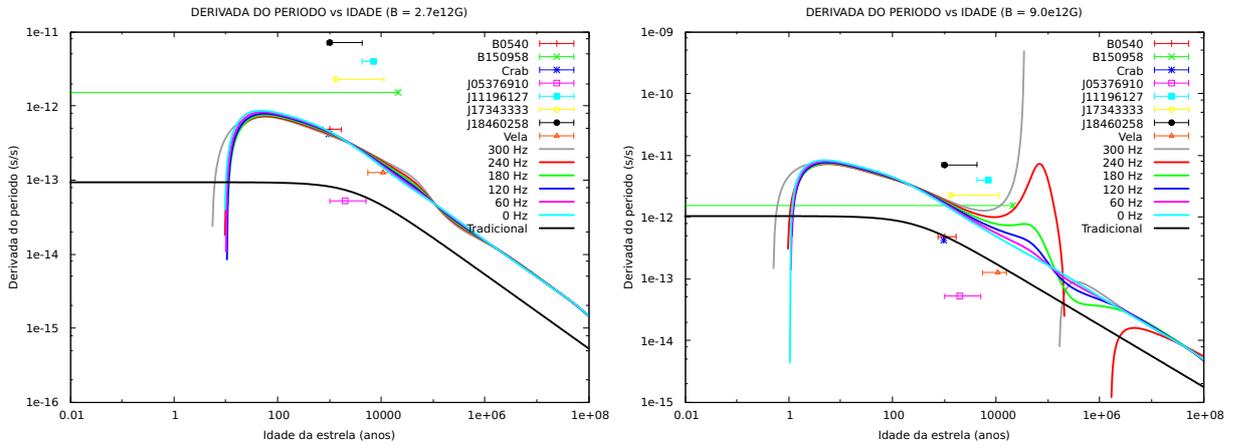
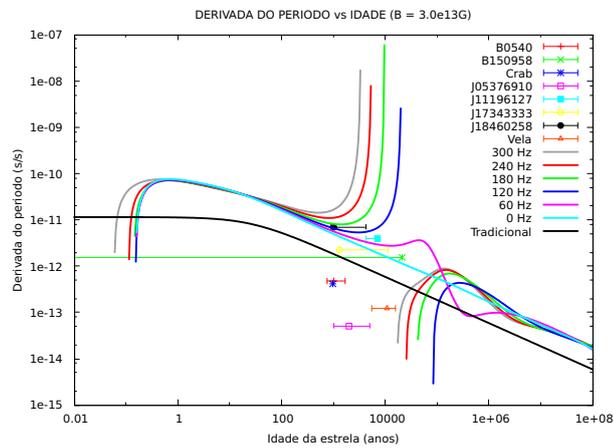
(a) Campo magnético de  $2,7 \cdot 10^{12} G$ .(b) Campo magnético de  $9,0 \cdot 10^{12} G$ .(c) Campo magnético de  $3,0 \cdot 10^{13} G$ .

Figura 5.32: Evolução da derivada do período de rotação da estrela híbrida com massa de 1,96 massas solares para diferentes valores do seu campo magnético.

- Idade característica versus idade da estrela

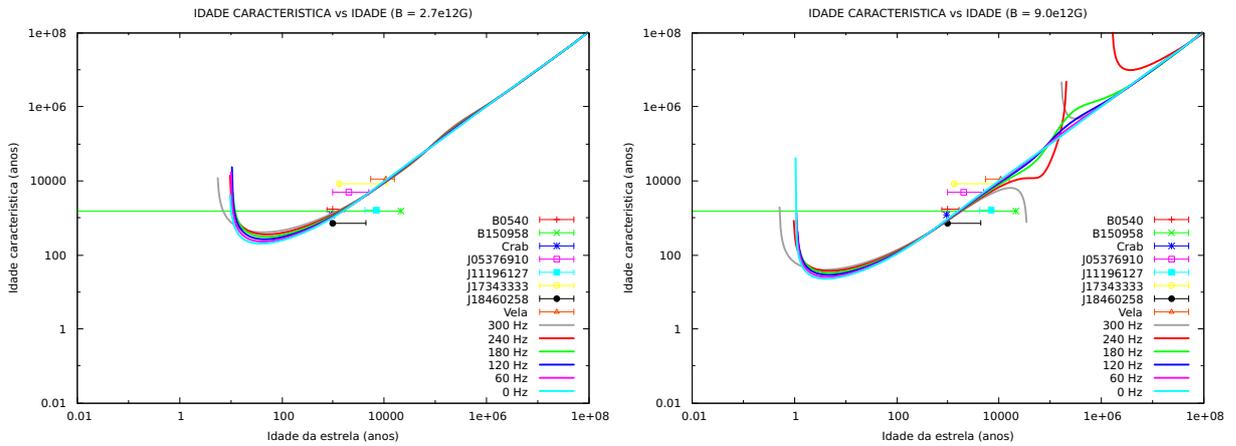
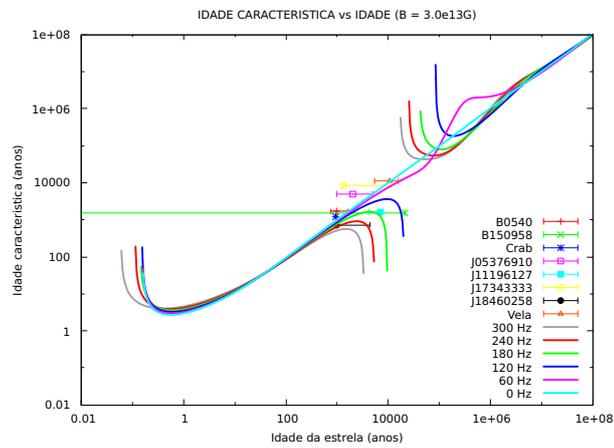
(a) Campo magnético de  $2,7 \cdot 10^{12} G$ .(b) Campo magnético de  $9,0 \cdot 10^{12} G$ .(c) Campo magnético de  $3,0 \cdot 10^{13} G$ .

Figura 5.33: Evolução da idade dipolar da estrela híbrida com massa de 1,96 massas solares para diferentes valores do seu campo magnético.

- *Braking index* versus idade da estrela

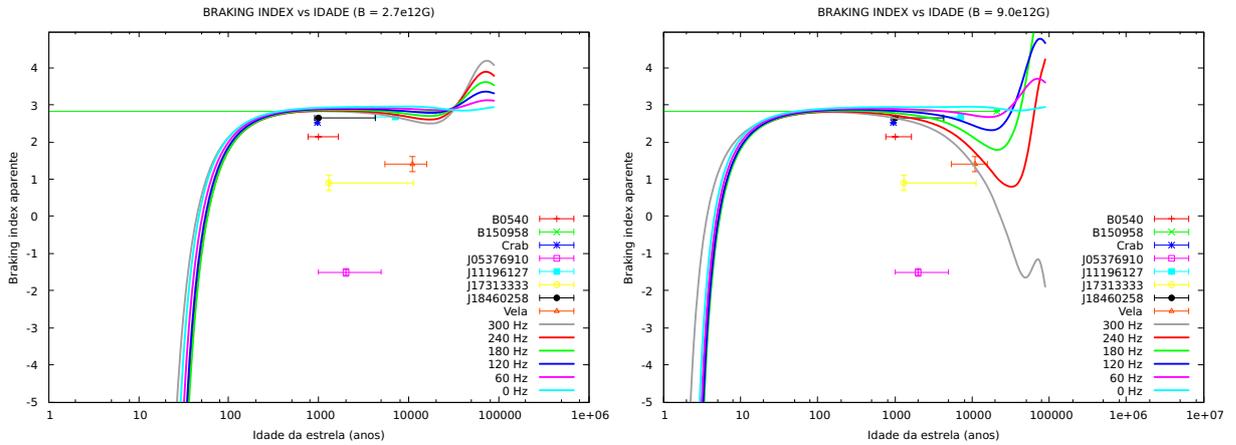
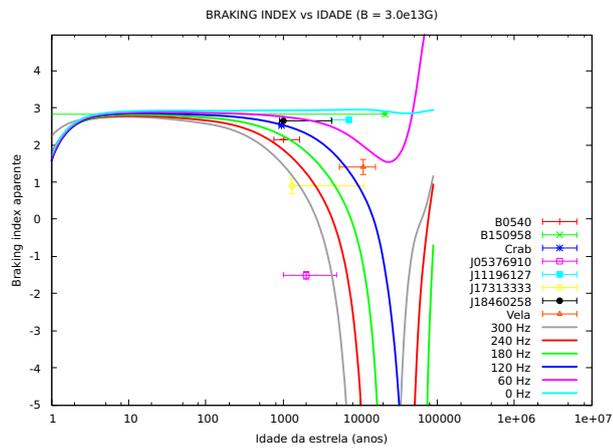
(a) Campo magnético de  $2,7 \cdot 10^{12} G$ .(b) Campo magnético de  $9,0 \cdot 10^{12} G$ .(c) Campo magnético de  $3,0 \cdot 10^{13} G$ .

Figura 5.34: Evolução do *braking index* aparente da estrela híbrida com massa de 1,96 massas solares para diferentes valores do seu campo magnético.

# Capítulo 6

## Conclusão

Estudou-se neste trabalho a evolução da rotação de dois tipos de estrela de nêutrons, uma hadrônica e uma híbrida. O modelo adotado na análise dessa evolução se distingue do tomado como canônico, pois prevê uma mudança do momento de inércia efetivo da estrela, ao passo que o canônico supõe que ele permanece constante ao longo da evolução.

Isto porque tal modelo canônico prevê valores para as grandezas *braking index* e idade característica dos pulsares (objetos astronômicos identificados como sendo manifestações de estrelas de nêutrons) que se desviam ligeiramente de seus valores observados. Objetivava-se, portanto, que o modelo alternativo adotado pudesse explicar, ao menos parcialmente, o porquê desses desvios, prevendo valores mais próximos dos medidos e assim possíveis comportamentos para a evolução dos pulsares.

Após um breve estudo sobre as teorias físicas fundamentais importantes para uma descrição mais acurada das propriedades macroscópicas e microscópicas das estrelas de nêutrons, e depois também de uma rápida abordagem sobre o modelo que descreve a evolução térmica dessas estrelas, expõe-se os resultados calculados para várias propriedades dos pulsares: o período de rotação e sua primeira derivada; a idade característica e o *braking index*.

Esses resultados foram encontrados considerando-se diferentes valores para os dois parâmetros livres presentes no modelo que lida com a evolução da frequência de rotação, a saber: o valor do campo magnético superficial da estrela; e a frequência de rotação da região interna da estrela composta por matéria no estado superfluido e/ou supercondutor.

Os resultados encontrados para o *braking index* de fato mostram diferentes evoluções, algumas próximas umas das outras - como é o caso para baixo campo magnético -, mas

outras com algumas características peculiares - principalmente os casos de alto campo magnético e/ou elevada rotação da matéria superfluida. Alguns destes últimos casos conseguiram prever certos resultados experimentais dentro de suas margens de erro.

As evoluções calculadas para a idade característica também seguiram comportamento semelhante ao do *braking index*.

Quanto ao período, todos os resultados compartilharam comportamentos similares para os primeiros dez anos de evolução da estrela: quando começa a ocorrer a transição de fase de matéria normal para superfluida o período cai significativamente, pois a frequência de rotação aumenta consideravelmente. No entanto, as evoluções para idades entre dez e um milhão de anos exibem um comportamento dependente do valor do campo magnético superficial e da rotação da matéria superfluida: quanto menor for o valor desses parâmetros, mais eles ficam próximos do comportamento canônico; mas quando eles são altos a desaceleração da rotação da matéria normal é muito intensa (oriunda de um forte torque devido ao *pinning* dos vórtices), de modo que em alguns casos a frequência de rotação chega a se anular e até mesmo de inverter de sinal, o que fisicamente significa que essas estrelas inverteram o sentido de seus giros. Plotando o período versus sua primeira derivada desses últimos casos<sup>1</sup>, encontra-se um resultado que imita um aumento expressivo do campo magnético superficial de um pulsar.

Alguns tipos de gráficos (calculados para os mesmos valores dos parâmetros citados) conseguiram, como dito acima, prever alguns valores experimentais, no entanto mesmo acertando os valores dos períodos e, às vezes, das derivadas, eles passavam fora dos pontos experimentais para o *braking index* e/ou idade característica. Todavia, houve um caso em que os gráficos do período, derivada, *braking index* e idade característica, previram os mesmos valores experimentais encontrados para o pulsar J1846-0258. O cenário foi o de uma estrela de hádrons, com massa de  $1,7M_{\odot}$  e raio de  $12,9km$ , campo magnético superficial de  $1,5 \cdot 10^{13}G$ , frequência de rotação da matéria superfluida de  $60Hz$ , em que se supôs o cenário fundo para a supercondutividade dos prótons singletos. Medições futuras desse pulsar poderão confirmar ou não a evolução prevista por esse modelo para tal pulsar.

Estes cenários com forte desaceleração e até inversão de giro são de fato incomuns e sua

---

<sup>1</sup>Na verdade, os resultados do capítulo anterior que envolvem o período e/ou sua primeira derivada são gráficos do módulo do período e/ou da primeira derivada desse módulo, uma vez que não se mede o sentido do giro da estrela, mas somente o intervalo entre os pulsos e sua taxa de variação.

ocorrência deve ser considerada com cautela. Eles são causados principalmente por se ter adotado uma frequência de rotação da matéria superfluida constante, mantida fixa talvez por um forte torque devido ao *pinning* dos vórtices, quanto maior for a diferença entre esta frequência e a frequência de rotação da matéria normal, que vai a zero com o tempo, maior será esse efeito incomum sobre a evolução da rotação da estrela. Contudo, é razoável esperar um papel importante do torque devido a fricção mútua entre a matéria normal e a superfluida, acima de tudo quando a diferença entre as velocidades de rotação dessas regiões for elevada. Essa fricção poderia diminuir essa diferença alterando a frequência da região superfluida e, portanto, amenizando esses tipos de efeito.

Para idades maiores do que um milhão de anos todos os resultados convergem para o comportamento típico do modelo canônico, isto porque o momento de inércia volta a ficar constante, posto que não há mais transição de matéria normal para superfluida, pelo menos não numa taxa significativa.

Logo, este trabalho contribui para a expectativa de que os desvios existentes na teoria canônica para a evolução dos pulsares se dê pelo fato de que o momento de inércia não permanece constante. Os próximos passos a serem realizados são: aprimorar os modelos adotados neste trabalho, como por exemplo, levar em conta os efeitos da rotação do pulsar sobre a sua estrutura, isto é, resolver as equações de campo de Einstein para uma estrela axialmente simétrica cuja estrutura dependa tanto da distância radial quanto do ângulo polar, ou latitudinal; procurar um modelo que permita uma evolução não constante da rotação da região superfluida; e escolher vários cenários distintos com seus respectivos parâmetros e confrontando os seus resultados com os dados experimentais de maneira a se encontrar limites e restrições para modelos microscópicos, e para modelos de supercondutividade e superfluidadez que descrevam fielmente os pulsares.

# Bibliografía

ALFORD, M. G. Color-Superconducting Quark Matter. **Annual Review of Nuclear and Particle Science**, v. 51, p. 131, 2001.

ALFORD, M. G.; ANDREAS, S.; RAJAGOPAL, K.; SCHÄFER, T. Color superconductivity in dense quark matter. **Reviews of Modern Physics**, v. 80, p. 1455, 2001.

ALPAR, M. A.; O, H. Spin-up of young pulsars due to rapid cooling by neutrino emission. **The Astrophysical Journal**, v. 349, p. L55-L58, fev. 1990.

ALPAR, M. A.; LANGER, S. A.; SAULS, J. A. Rapid postglitch spin-up of the superfluid core in pulsars. **The Astrophysical Journal**, v. 282, pp. 533-541, jul. 1984.

BAADE, W.; ZWICKY, F. Supernovae and Cosmic rays. **Physical Review**, v. 45, p. 138, 1934.

BACKER, D. C.; KULKARNI, S.; HEIBES, C.; DAVIS, M. M.; GOSS, W. M. A millisecond pulsar. **Nature**, v. 300, p. 615, 1982.

BAYM, G.; PETHICK, C.; SUTHERLAND, P. The Ground State of Matter at High Densities: Equation of State and Stellar Models. **The Astrophysical Journal**, v. 170, p. 299, 1971.

BERNAL, C. G.; LEE, W. H.; PAGE, D. Hypercritical Accretion onto a Magnetized Neutron Star Surface: a Numerical approach. **Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica**, v. 46, p. 309, 2010.

BERNAL, C. G.; PAGE, D.; LEE, W. H. Hypercritical Accretion onto a Magnetized Neutron Star and magnetic field submergence. **The Astrophysical Journal**, v. 770, n. 2, p. 106, 2013.

BLANDFORD, R. D.; ROMANI, R. W. On the interpretation of pulsar braking indices. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 234, pp. 57P-60P, out. 1988.

CHODOS, A.; JAFFE, R. L.; JOHNSON, K.; THORN, C. B.; WEISSKOPF, V. F. New extended model of hadrons. **Physical Review D**, v. 9, p. 3471, jun. 1974.

FARHI, E.; JAFFE, R. L. Strange matter. **Physical Review D**, v. 30, p. 2379, dez. 1984.

FLOWERS, E.; ITOH, N. Transport properties of dense matter. III - Analytic formulae for thermal conductivity. **The Astrophysical Journal**, v. 250, p. 15, nov. 1981.

GLENDENNING, N. K. **Compact Stars: Nuclear Physics, Particle Physics, and General Relativity**. 2 ed. New York: Springer, 2000.

GLENDENNING, N. K. Dense Matter. In: **New Worlds in Astroparticle Physics**. ed. A. Krasnitz, R. Potting, A. M. Mourão, M. Pimenta, pp. 3-19, 2003.

GLENDENNING, N. K. Hyperons in Neutron Stars. **Zeitschrift für Physik A**, v. 326, pp. 57-64, mar. 1987.

GLENDENNING, N. K. Neutron stars are giant hypernuclei?. **The Astrophysical Journal**, v. 293, pp. 470-493, jun. 1985.

GLENDENNING, N. K. Role of hyperons and pions in neutron stars and supernova. **Zeitschrift für Physik A**, v. 327, pp. 295-300, set. 1987.

GLENDENNING, N. K. The hyperon composition of neutron stars. **Physics Letters B**, v. 114, pp. 392-396, ago. 1982.

GLENDENNING, N. K. Vacuum polarization effects on nuclear matter and neutron stars. **Nuclear Physics A**, v. 493, pp. 521-548, mar. 1985.

GRADSHTEYN, I. S.; RYZHIK, I. M. **Table of Integrals, Series, and Products**. 1 ed. New York: Academic Press, 1965.

GROSS, A. J.; WILCZEK, F. Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories. **Physical Review Letters**, v. 30, p. 1343, jun. 1973.

GUNN, J. E.; OSTRIKER, J. P. Magnetic Dipole Radiation from Pulsars. **Nature**. v. 221, pp. 454-456, fev. 1969.

HAENSEL, P. CAMK preprint, 228, 1991.

HEWISH, Anthony et al. Observation of a Rapidly Pulsating Radio Source. **Nature**, v. 217, pp. 709-713, fev. 1968.

HO, W. C. G.; ANDERSSON, N. Rotational evolution of young pulsars due to superfluid decoupling. **Nature Physics**, v. 8, pp. 787-789, set. 2012.

HO, W. C. G.; POTEKHIN, A. Y., ELSHAMOUTY, K. G., HEINKE, C. O. Tests of the nuclear equation of state and superfluid and superconducting gaps using the Cassiopeia A neutron star. **Physical Review C**, v. 91, p. 15806, jan. 2015.

HULSE, R. A.; TAYLOR, J. H. High-Sensitivity Pulsar Survey. **The Astrophysical Journal**, v. 191, L59, 1974.

HULSE, R. A.; TAYLOR, J. H. A deep sample of new pulsars and their spatial extent in the galaxy. **The Astrophysical Journal**, v. 201, pp. L55-L59, 1975a.

HULSE, R. A.; TAYLOR, J. H. Discovery of a pulsar in a binary system. **The Astrophysical Journal**, v. 195, L51, 1975b.

IWAMOTO, N. Neutrino emissivities and mean free paths of degenerate quark matter. **Annals of Physics**, v. 141, p.1, 1982.

JACKSON, J. D. **Classical Electrodynamics**. 3 ed. New York: John Wiley & Sons, 1998.

KAMINKER, A.D.; PETHICK, C. J.; POTENKHIN, A. Y.; THORSSON, V.; YAKOVLEV, D. G. Neutrino-pair bremsstrahlung by electrons in neutron star crusts. **Astro-**

**onomy & Astrophysics** , v. 343, p. 1009, 1999.

KHRIPLOVICH, I. B. Greens functions in theories with a non-abelian gauge group. **Yadernaya fizika**, v. 10, p. 409, 1969.

KUMAR, H. S.; SAFI-HARB, S.; GONZALEZ, M. E. Chandra and XMM-Newton studies of the supernova remnant G292.2-0.5 associated with the pulsar J1119-6127. **The Astrophysical Journal**, v. 754, n. 96, pp. 1-14, ago. 2012.

LAMB, D. Q.; LATTIMER, J. M.; PETHICK, C. J.; RAVENHALL, D. G. Physical properties of hot, dense matter: The bulk equilibrium approximation. **Nuclear Physics A**, v. 360, p. 459, 1981.

LARGE, M. I.; VAUGHAN, A. F.; MILLS, B. Y. A Pulsar Supernova Association? **Nature**, v. 220, p. 340, 1968.

LINK, B. Constraining Hadronic Superfluidity with Neutron Star Precession. **Physical review letters**, v. 91, p. 101101, set. 2003.

MUSLIMOV, A.; PAGE, D. Magnetic and Spin History of Very Young Pulsars. **The Astrophysical Journal**, v. 458, p. 347, fev. 1996.

NEGELE, J. W.; VAUTHERIN, D. Neutron star matter at sub-nuclear densities. **Nuclear Physics A**, v. 207, pp. 298-320, jun. 1973.

NEGREIROS, R. P. **Numerical Study of the Properties of Compact Stars**. 142f. Tese (Ph.D.) - Computational Science, The Claremont Graduate University and San Diego State University, 2009.

OPPENHEIMER, J. R.; VOLKOFF, G. M. On Massive Neutron Cores. **Physical Review**, v. 55, p. 374, 1939.

PACINI, F. Rotating Neutron Stars, Pulsars and Supernova Remnants. **Nature**, v. 219, pp. 145-146, jul. 1968.

POLITZER, D. Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?. **Physical Review Letters**, v. 30, p. 1346, jun. 1973.

POTEKHIN, A. Y.; BAIKO, D. A.; HAENSEL, P.; YAKOVLEV, D. G. Transport properties of degenerate electrons in neutron star envelopes and white dwarf cores. **Astronomy & Astrophysics**, v. 346, p. 345, 1999.

POTEKHIN, A. Y.; CHABRIER, G.; YAKOVLEV, D. G. Internal temperatures and cooling of neutron stars with accreted envelopes. **Astronomy & Astrophysics**, v. 323, pp. 415-428, 1997.

PRAKASH, Madappa.; PRAKASH, Manju; LATTIMER, J. M.; PETHICK, C. J. Rapid cooling of neutron stars by hyperons and Delta isobars. **The Astrophysical Journal**, v. 390, n.2, pp. L77-L80, mai. 1992.

RAJAGOPAL, K.; WILCZEK, F. **The Condensed Matter Physics of QCD**. arXiv:hep-ph/0011333, 2000.

RAJAGOPAL, K.; WILCZEK, F. Enforced Electrical Neutrality of the Color-Flavor Locked Phase. **Physical Review Letters**. v. 86, p. 3492, 2001.

RAVENHALL, D. G.; PETHICK, C. J.; LATTIMER, J. M. Nuclear interface energy at finite temperatures. **Nuclear Physics A**, v. 407, pp. 571-591, out. 1983.

RAVENHALL, D. G.; PETHICK, C. J.; WILSON, J. R. Structure of Matter below Nuclear Saturation Density. **Physical Review Letters**, v. 50, p. 2066, jun. 1983.

RUDERMAN, M. Neutron star crustal plate tectonics. I - Magnetic dipole evolution in millisecond pulsars and low-mass X-ray binaries. **The Astrophysical Journal**, v. 366, pp. 261-269, jan. 1991.

SCHUTZ, B. **A First Course in General Relativity**. 2 ed. New York: Cambridge University Press, 2009.

STAELIN, D. H.; REIFENSTEIN, E. C. Pulsating Radio Sources near the Crab Nebula. **Science**, v. 162, pp. 1481-1483, 1968.

THORNE, K. S. The relativistic equations of stellar structure and evolution. **The Astrophysical Journal**, v. 212, pp. 825-831, mar. 1977.

TOLMAN, R. C. Static Solutions of Einstein's Field Equations for Spheres of Fluid On Massive Neutron Cores. **Physical Review**, v. 55, p. 364, 1939.

VAN RIPER, K. A. Neutron star thermal evolution. **Astrophysical Journal Supplement Series**, v. 75, pp. 449-462, fev. 1991.

VAUTHERIN, D.; BONCHE, P. A mean-field calculation of the equation of state of supernova matter. **Nuclear Physics A**, v. 372, pp. 496-526, dez. 1981.

VIGANÒ, D; PONS, J. A. Central compact objects and the hidden magnetic field scenario. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**. v. 425, pp. 2487-2492, out. 2012.

WEBER, F. **Pulsars as Astrophysical Laboratories for Nuclear and Particle Physics**. Bristol: Institute of Physics, 1999.

WILLIAMS, R. D.; KOONIN, S. E. Sub-saturation phases of nuclear matter. **Nuclear Physics A**, v. 435, pp. 844-858, mar. 1985.

WOLTJER, L. X-Rays and Type I Supernova Remnants. **The Astrophysical Journal**, v. 140, pp. 1309-1313, out. 1964.

YAKOVLEV, D. G.; KAMINKER, A. D.; GNEDIN, O. Y.; HAENSEL, P. Neutrino Emission from Neutron Stars. **Physics Reports**, v. 354, p. 1, 2001.

# Apêndice A

## Estimativas para Grandezas de Pulsares e Estrelas de Nêutrons

### A.1 Densidade média de um pulsar

Partindo da condição de equilíbrio entre a força gravitacional e a força centrífuga sobre um elemento de fluido de massa  $m$  na superfície da estrela de massa  $M$  e raio  $R$ , tem-se:

$$\zeta^2 \frac{GmM}{R^2} > m\Omega_K^2 R \quad (\text{A.1})$$

Acima  $\zeta$  é um coeficiente adimensional, que vale 1 na física newtoniana, enquanto que na Relatividade Geral tem um valor determinado de 0,65 em unidades gravitacionais ( $G = c = k_B = 1$ ); e  $\Omega_K$  é a frequência de Kepler. Logo, desenvolvendo-se a equação (A.1), em unidades gravitacionais, obtém-se:

$$\zeta^2 \frac{mM}{R^2} > m\Omega_K^2 R \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{M}{R^3} > \frac{\Omega_K^2}{\zeta^2} \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} > \frac{\Omega_K^2}{\frac{4}{3}\pi\zeta^2} \quad (\text{A.4})$$

$$\bar{\epsilon} > \frac{\Omega_K^2}{\frac{4}{3}\pi\zeta^2} \quad (\text{A.5})$$

Usando a expressão da frequência de rotação em termos do período,  $\Omega_K = 2\pi/P$ , a

equação (A.5) se torna:

$$\bar{\epsilon} > \frac{3 \left(\frac{2\pi}{P}\right)^2}{4\pi\zeta^2} \quad (\text{A.6})$$

$$\bar{\epsilon} > \frac{3\pi}{(\zeta P)^2} \quad (\text{A.7})$$

Tomando para  $P$  o valor do período do pulsar PSR 1937+21 citado no capítulo introdutório, encontra-se um limite inferior para a densidade média do pulsar:

$$\bar{\epsilon} > \frac{3\pi}{((0,65)(1,56 \cdot 10^{-3}s))^2} = 9,17 \cdot 10^6 s^{-2} \quad (\text{A.8})$$

Em unidades gravitacionais tem-se o seguinte fator de conversão:

$$1s^{-2} = 1,4988 \cdot 10^7 g/cm^3 \quad (\text{A.9})$$

Por conseguinte, o limite inferior para a densidade média de um pulsar é, em unidades ordinárias:

$$\bar{\epsilon} > 1,37 \cdot 10^{14} g/cm^3 \quad (\text{A.10})$$

## A.2 Raio de Schwarzschild de um pulsar e de uma estrela de nêutrons

O limite superior para o raio de um pulsar pode ser obtido facilmente a partir da equação (A.10):

$$\bar{\epsilon} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} > 1,4 \cdot 10^{14} g/cm^3 \quad (\text{A.11})$$

$$R < \left( \frac{3M}{4\pi(1,4 \cdot 10^{14} g/cm^3)} \right)^{1/3} \quad (\text{A.12})$$

$$R < \left( \frac{3(1,4 \cdot 2,0 \cdot 10^{33} g)}{4\pi(1,4 \cdot 10^{14} g/cm^3)} \right)^{1/3} \quad (\text{A.13})$$

$$R < 17km \quad (\text{A.14})$$

Dessa forma a razão entre o raio do pulsar e o seu raio de Schwarzschild pode ser encontrado ( $G$  e  $c$  são a constante universal da gravitação e a velocidade da luz no vácuo respectivamente):

$$\left(\frac{r_S}{R}\right)_{pulsar} = \frac{2GM}{c^2 R} \quad (\text{A.15})$$

$$= \frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,4 \cdot 1,99 \cdot 10^{30}}{(3,00 \cdot 10^8)^2} \quad (\text{A.16})$$

$$= 24\% \quad (\text{A.17})$$

A mesma razão para a estrela de nêutrons, usando os valores citados também no capítulo introdutório, os calculados por Tolmann, Oppenheimer e Volkoff, é:

$$\left(\frac{r_S}{R}\right)_{EN} = \frac{2GM}{c^2 R} \quad (\text{A.18})$$

$$= \frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 0,75 \cdot 1,99 \cdot 10^{30}}{(3,00 \cdot 10^8)^2} \quad (\text{A.19})$$

$$= 22\% \quad (\text{A.20})$$

### A.3 Campo magnético de um pulsar

A fim de se estimar o campo magnético de um pulsar, parte-se da equação (A.21) que diz que a energia irradiada pelo dipolo magnético girante advém da energia rotacional do pulsar:

$$-\frac{dE}{dt} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} I \Omega^2 \right) = \frac{2}{3} B^2 R^6 \Omega^4 \sin^2 \alpha \quad (\text{A.21})$$

$$-I \Omega \dot{\Omega} = \frac{2}{3} B^2 R^6 \Omega^4 \sin^2 \alpha \quad (\text{A.22})$$

$$-I \dot{\Omega} = \frac{2}{3} B^2 R^6 \Omega^3 \sin^2 \alpha \quad (\text{A.23})$$

Lebrando que  $\Omega = \frac{2\pi}{P}$ , tal que  $P$  é o período, e que, portanto,  $\dot{\Omega} = -2\pi \frac{\dot{P}}{P^2}$ , a equação (A.23) torna-se:

$$-I \left( -2\pi \frac{\dot{P}}{P^2} \right) = \frac{2}{3} B^2 R^6 \left( \frac{2\pi}{P} \right)^3 \text{sen}^2 \alpha \quad (\text{A.24})$$

$$I \dot{P} = \frac{8\pi^2 R^6 B^2 \text{sen}^2 \alpha}{3 P} \quad (\text{A.25})$$

$$B = \sqrt{\frac{3}{8\pi^2 R^6 \text{sen}^2 \alpha} P \dot{P}} \quad (\text{A.26})$$

Com o propósito de se estimar o campo magnético de um pulsar, toma-se, pore exemplo, o pulsar Crab. Observa-se, para este corpo, que o período de rotação e a variação do mesmo período são dados por:

$$P \approx \frac{1}{30} s, \quad \dot{P} \approx 4 \cdot 10^{-13} s/s \quad (\text{A.27})$$

Observa-se uma taxa de energia irradiada desse pulsar cerca de  $4 \cdot 10^{38} \text{ergs/s}$ , assim pode-se encontrar primeiramente uma estimativa para o momento de inércia  $I$ :

$$4 \cdot 10^{38} \text{ergs/s} = -\frac{dE_{rot}}{dt} \quad (\text{A.28})$$

$$= -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} I \Omega^2 \right) \quad (\text{A.29})$$

$$= -I \Omega \dot{\Omega} = -I \left( \frac{2\pi}{P} \right) \left( -2\pi \frac{\dot{P}}{P^2} \right) \quad (\text{A.30})$$

$$I = \frac{4 \cdot 10^{38} \text{ergs/s} P^3}{4\pi^2 \dot{P}} \quad (\text{A.31})$$

Por meio de (A.27),

$$I = 9 \cdot 10^{44} g \text{ cm}^2 \quad (\text{A.32})$$

Utilizando unidades gravitacionais, tem-se o seguinte fator de conversão,  $1g = 7,4237 \cdot 10^{-29} \text{cm}$ ; de maneira tal que:

$$I = 67 \text{km}^3 \quad (\text{A.33})$$

Por fim, substituindo as equações (A.27), (A.33) e (A.14) na equação (A.26), além de se tomar  $\text{sen}^2 \alpha = 1$ , encontra-se um possível valor para a intensidade do campo magnético

superficial do pulsar:

$$B = \sqrt{\frac{3}{8\pi^2} \frac{67km^3}{(17km)^6(1)} \left( \frac{1}{30} \cdot 2,9979 \cdot 10^5 km \right) (4 \cdot 10^{-13})} \quad (\text{A.34})$$

$$B = 2 \cdot 10^{-7} km^{-1} = 2 \cdot 10^{-13} cm^{-1} \quad (\text{A.35})$$

Utilizou-se acima um seguinte fator de conversão, consequência do uso de unidades gravitacionais:

$$1s = 2,9979 \cdot 10^5 km \quad (\text{A.36})$$

Existe uma outra relação, agora entre as unidades centímetro e gauss:

$$3,479 \cdot 10^{24} gauss \cdot cm = 1 \quad (\text{A.37})$$

Logo,

$$B = 0,7 \cdot 10^{12} gauss \quad (\text{A.38})$$

# Apêndice B

## Gás de férmions

### B.1 Sistema de partículas indistinguíveis

Um primeiro modelo, simples e prático pra se introduzir alguns principais conceitos, é tratar a matéria dentro de estrelas de nêutrons como sendo um gás de férmions. Nesse primeiro momento, usa-se a Mecânica Quântica não relativística.

No capítulo introdutório viu-se que a densidade média dos objetos astronômicos conhecidos como pulsares é da mesma ordem de grandeza da matéria que há no interior de núcleos atômicos. Como esta é formada de núcleons, espera-se que a matéria dos pulsares também seja composta de núcleons. Viu-se também que esta matéria deve conter elétrons para equilibrar a carga positiva dos prótons a fim de que a estrela seja estável. Assume-se, por tanto, que as estrelas de nêutrons, as quais, acredita-se, são os objetos por detrás desses pulsares, são constituídas por prótons, nêutrons e elétrons.

Considera-se, portanto, um gás feito desses três tipos de partículas. Seja  $\mathcal{H}$  o hamiltoniano desse sistema. Supondo que este independa do tempo, a equação de Schrödinger independente do tempo determina que:

$$\mathcal{H}|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle \tag{B.1}$$

Acima,  $|\Psi\rangle$  é um dos possíveis autoestados do sistema com energia  $E$ .

Supondo ainda, que não há interação entre as diferentes espécies de partículas, por exemplo entre prótons e elétrons, é possível reescrever o hamiltoniano total da seguinte forma:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_p \otimes \mathbb{I}_n \otimes \mathbb{I}_e + \mathbb{I}_p \otimes \mathcal{H}_n \otimes \mathbb{I}_e + \mathbb{I}_p \otimes \mathbb{I}_n \otimes \mathcal{H}_e \quad (\text{B.2})$$

Isto é, é possível separar o problema geral em três mais simples cada qual no subespaço de Hilbert correspondente a cada espécie de partículas. O estado total  $|\Psi\rangle$  pode também ser escrito como

$$|\Psi\rangle = |\Psi\rangle_p \otimes |\Psi\rangle_n \otimes |\Psi\rangle_e \quad (\text{B.3})$$

Substituindo (B.2) e (B.3) na equação (B.1), obtém-se:

$$\mathcal{H}_p |\Psi\rangle_p \otimes |\Psi\rangle_n \otimes |\Psi\rangle_e + |\Psi\rangle_p \otimes \mathcal{H}_n |\Psi\rangle_n \otimes |\Psi\rangle_e + |\Psi\rangle_p \otimes |\Psi\rangle_n \otimes \mathcal{H}_e |\Psi\rangle_e = E |\Psi\rangle_p \otimes |\Psi\rangle_n \otimes |\Psi\rangle_e \quad (\text{B.4})$$

Restaria resolver separadamente os três seguintes problemas:

$$\mathcal{H}_f |\Psi\rangle_f = E_f |\Psi\rangle_f; \quad f = p, n, e \quad (\text{B.5})$$

A energia total seria dada por:

$$E = \sum_f E_f \quad (\text{B.6})$$

As equações (B.6) e (B.5) permitem generalizar o problema, acrescentando ao sistema outras espécies de partículas, bastando  $f$  tomar valores além dos três tipos já considerados.

A fim de não ficar carregando este sub-índice  $f$ , ele será omitido ficando implícito que há uma equação do tipo (B.5) para cada tipo de partícula. Tem-se, assim, novamente a equação:

$$\mathcal{H} |\Psi\rangle = E |\Psi\rangle \quad (\text{B.7})$$

Faz-se agora uma nova suposição, a de que mesmo partículas de igual espécie não interagem entre si. Com o mesmo raciocínio anterior, é possível separar o problema de maneira a resolver apenas o problema de uma única partícula. Seja o hamiltoniano da  $i$ -ésima partícula  $\hat{h}_i$ . Assim, tem-se que resolver a seguinte equação:

$$\hat{h}_i |k_i\rangle = \epsilon(k_i) |k_i\rangle \quad (\text{B.8})$$

Acima,  $|k_i\rangle$  é o autoestado de energia da  $i$ -ésima partícula quando ela está no nível de energia no qual possui momento igual a  $k_i$ . Lembrando que existe um conjunto de valores possíveis para o momento dessa partícula.

Cada partícula terá um determinado momento, estando, pois, no autoestado correspondente. Ora, o hamiltoniano  $\hat{h}_i$  é idêntico para todas as partículas, por conseguinte, não haverá diferença entre os autoestados e níveis de energia entre partículas com mesmo momento. Assim, para uma dada configuração de partículas em que cada uma possui um certo momento, o estado total do sistema pode ser dado pelo seguinte produto direto:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= |k_1\rangle \otimes |k_2\rangle \otimes \cdots \otimes |k_N\rangle \\ |\Psi\rangle &= |k_1, k_2, \dots, k_N\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Na última equação,  $|\Psi\rangle$  seria, a princípio, um estado possível para o sistema total. No entanto isto não pode ser verdade, devido ao fato de que o estado de um sistema composto de férmions deve, pelo teorema spin-estatístico, ser antissimétrico com relação a uma permutação entre duas quaisquer partículas. Suponha, por exemplo, que um estado  $|\Psi\rangle^A$  seja um possível estado para o sistema de férmions, então da sentença anterior deve-se ter:

$$\hat{P}_{ij} |\Psi\rangle^A = (-1) |\Psi\rangle^A \quad (\text{B.10})$$

Acima,  $\hat{P}_{ij}$  é um operador que troca o estado (ou seja o momento) da partícula  $i$  pelo o da partícula  $j$ , e vice-versa. Mas ocorre que  $|\Psi\rangle = |k_1, k_2, \dots, k_N\rangle$  não necessariamente obedeça a (B.10):

$$\begin{aligned} \hat{P}_{ij} |k_1, \dots, k_i, \dots, k_j, \dots, k_N\rangle &= |k_1, \dots, k_j, \dots, k_i, \dots, k_N\rangle \\ &\neq (-1) |k_1, \dots, k_i, \dots, k_j, \dots, k_N\rangle \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

Há, no entanto, uma forma de se construir a partir de  $|\Psi\rangle = |k_1, k_2, \dots, k_N\rangle$  um estado que satisfaça (B.10). Ei-la a seguir:

$$|\Psi_{\{k_i\}}\rangle^A = \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{j=1}^{N!} (-1)^{P_j} \hat{P}_j |k_1, k_2, \dots, k_N\rangle \quad (\text{B.12})$$

Acima,  $\hat{P}_j$  é um operador que gera uma  $j$ -ésima permutação entre os momentos das partículas dentre  $N!$  permutações possíveis.  $P_j$  é o número de permutações pares feitas por essa  $j$ -ésima permutação. A notação  $\{k_i\}$  significa um determinado conjunto de valores de momento  $\{k_1, k_2, \dots, k_N\}$  especificando uma certa configuração do sistema. Ressalta-se aqui o fato de que, estando o sistema no estado  $|\Psi_{\{k_i\}}\rangle^A$ , não faz mais sentido a especificação de que partícula possui qual valor de momento, uma vez que ao se trocar o momento de duas quaisquer partículas, por exemplo, o estado do sistema é apenas multiplicado por uma constante, o que significa que representa ainda o mesmo estado anterior. Não há, portanto, mais como distinguir cada partícula. Tudo o que se sabe é a quantidade de vezes que um determinado valor de momento aparece no sistema, em outras palavras, o número de ocupação  $n_j$  do  $j$ -ésimo nível de energia de partícula única.

Ainda na equação (B.12), o denominador  $\sqrt{N!}$  surge a fim de que o estado  $|\Psi_{\{k_i\}}\rangle^A$  esteja normalizado, de modo que:

$${}^A \langle \Psi_{\{k_i\}} | \Psi_{\{k_i\}} \rangle^A = 1 \quad (\text{B.13})$$

Como citado, as partículas são indistinguíveis nesse estado  $|\Psi_{\{k_i\}}\rangle^A$ , logo seria mais econômico e vantajoso especificar o estado geral do sistema a partir do valor dos números de ocupação de cada um dos níveis. Assim, pode-se escrever tal estado da seguinte forma:

$$|\Psi_{\{k_i\}}\rangle^A = |n_1, n_2, \dots\rangle \quad (\text{B.14})$$

Atuando o hamiltoniano  $\mathcal{H}$  em  $|n_1, n_2, \dots\rangle$  na equação (B.12), tem-se que ele atuará em cada uma das  $N!$  permutações de  $|k_1, k_2, \dots, k_N\rangle$ . Por exemplo, seja a permutação  $\hat{P}_j |k_1, k_2, \dots, k_N\rangle = |k_{P_1}, k_{P_2}, \dots, k_{P_N}\rangle$ , que ao sofrer a atuação de  $\mathcal{H} = \hat{h}_1 + \hat{h}_2 + \dots + \hat{h}_N$ , resultará:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} |k_{P_1}, k_{P_2}, \dots, k_{P_N}\rangle &= \hat{h}_1 |k_{P_1}, k_{P_2}, \dots, k_{P_N}\rangle + \hat{h}_2 |k_{P_1}, k_{P_2}, \dots, k_{P_N}\rangle + \dots + \hat{h}_N |k_{P_1}, k_{P_2}, \dots, k_{P_N}\rangle \\
&= [\epsilon(k_{P_1}) + \epsilon(k_{P_2}) + \dots + \epsilon(k_{P_N})] |k_{P_1}, k_{P_2}, \dots, k_{P_N}\rangle
\end{aligned} \tag{B.15}$$

Desfazendo a permutação nesta última equação (B.15) apenas nos valores de energia referente a cada momento, e como esses momentos não sofreram alteração em seus valores mas apenas foram atribuídos a outras partículas, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} |k_{P_1}, k_{P_2}, \dots, k_{P_N}\rangle &= [\epsilon(k_1) + \epsilon(k_2) + \dots + \epsilon(k_N)] |k_{P_1}, k_{P_2}, \dots, k_{P_N}\rangle \\
&= \sum_i n_i \epsilon_i |k_{P_1}, k_{P_2}, \dots, k_{P_N}\rangle
\end{aligned} \tag{B.16}$$

Em (B.16) a soma é sobre todos os níveis de energia, em que aparece o já mencionado número de ocupação  $n_i$ ;  $\epsilon_i$  é a energia do  $i$ -ésimo nível. Isto ocorre para todas as permutações de modo que a soma anterior pode ser colocada em evidência com relação ao somatório das diferentes permutações:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} |n_1, n_2, \dots\rangle &= \sum_i n_i \epsilon_i \frac{1}{\sqrt{N!}} \sum_{j=1}^{N!} (-1)^{P_j} \hat{P}_j |k_1, k_2, \dots, k_N\rangle \\
\mathcal{H} |n_1, n_2, \dots\rangle &= \sum_i n_i \epsilon_i |n_1, n_2, \dots\rangle
\end{aligned} \tag{B.17}$$

Consequentemente,  $|n_1, n_2, \dots\rangle$  é um autoestado de energia do sistema geral com energia igual a:

$$E = \sum_i n_i \epsilon_i \tag{B.18}$$

Como o número de ocupação é um observável, pode-se definir para cada nível de energia o seguinte operador número:

$$\hat{n}_i |n_1, n_2, \dots\rangle = n_i |n_1, n_2, \dots\rangle \tag{B.19}$$

Desse modo o operador  $\hat{N} = \hat{n}_1 + \hat{n}_2 + \dots$  ao atuar em  $|n_1, n_2, \dots\rangle$ :

$$\hat{N} |n_1, n_2, \dots\rangle = \sum_i n_i |n_1, n_2, \dots\rangle \quad (\text{B.20})$$

Isto é, o operador  $\hat{N}$  dá o número de partículas total  $N$  do sistema:

$$N = \sum_i n_i \quad (\text{B.21})$$

## B.2 Gás de férmions livres

Partindo agora para um tratamento estatístico do sistema composto de férmions considerado acima, tem-se do formalismo gran-canônico da Física Estatística que o operador densidade que representa o estado do ensemble em questão é dado por:

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\beta[\mathcal{H} - \mu\hat{N}]}}{\Xi}; \quad \Xi = \text{Tr} \left[ e^{-\beta[\mathcal{H} - \mu\hat{N}]} \right] \quad (\text{B.22})$$

Nesta equação  $\Xi$  é a função de partição gran-canônica, que juntamente com a densidade do grande potencial termodinâmico estabelece a conexão entre as propriedades microscópicas e macroscópicas do sistema a partir da seguinte relação:

$$\phi(T, \mu) = -\frac{1}{\beta} \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \ln \Xi(T, \mu, V) \quad (\text{B.23})$$

O limite acima é o conhecido limite termodinâmico, as grandezas extensivas tendem ao infinito sem que suas densidades divirjam;  $T$ ,  $\mu$  são respectivamente a temperatura e o potencial químico do sistema,  $\beta = (k_B T)^{-1}$  com  $k_B$  sendo a constante de Boltzmann.

Usando como base do espaço de Hilbert correspondente ao sistema em questão os autoestados simultâneos de  $\mathcal{H}$  e  $\hat{N}$ , isto é  $|n_1, n_2, \dots\rangle$  onde todos os  $n_i$  assumem os valores 0 ou 1, já que as partículas obedecem ao princípio de exclusão de Pauli por serem férmions, é possível calcular a função de partição:

$$\begin{aligned}
\Xi &= \text{Tr} \left[ e^{-\beta[\mathcal{H}-\mu\hat{N}]} \right] \\
\Xi &= \sum_{n_1, n_2, \dots} \langle n_1, n_2, \dots | e^{-\beta[\mathcal{H}-\mu\hat{N}]} | n_1, n_2, \dots \rangle \\
\Xi &= \sum_{n_1, n_2, \dots} e^{-\beta[\sum_i n_i(\epsilon_i - \mu)]} \langle n_1, n_2, \dots | n_1, n_2, \dots \rangle
\end{aligned}
\tag{B.25}$$

Mas  $\langle n_1, n_2, \dots | n_1, n_2, \dots \rangle = 1$ , então:

$$\begin{aligned}
\Xi &= \sum_{n_1, n_2, \dots} \prod_i e^{-\beta[n_i(\epsilon_i - \mu)]} \\
\Xi &= \prod_i \sum_{n_i} e^{-\beta[n_i(\epsilon_i - \mu)]}
\end{aligned}
\tag{B.26}$$

Como  $n_i$  é nulo ou igual a um, tem-se:

$$\Xi = \prod_i \{1 + e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)}\}
\tag{B.27}$$

Logo,

$$\ln \Xi = \sum_i \ln \{1 + e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)}\}
\tag{B.28}$$

Aproxima-se o sistema trabalhado até então como se fosse um gás de férmions dentro duma caixa cúbica de lado  $L$ , e supondo também que as partículas estejam livres de qualquer interação externa e de que a função de onda de cada partícula seja periódica em  $L$ , isto é:

$$\psi(x, y, z) = \psi(x + L, y, z) = \psi(x, y + L, z) = \psi(x, y, z + L)
\tag{B.29}$$

Desse modo, os valores possíveis para o momento seria:

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} (n_x, n_y, n_z); \quad n_x, n_y, n_z \in \mathbb{Z}
\tag{B.30}$$

Considere um somatório sobre todos os valores possíveis de  $\mathbf{k}$  de uma função desse mesmo momento,  $S = \sum_i f(\mathbf{k}_i)$ . É possível fazer a seguinte manipulação nela:

$$S = \sum_i \frac{f(\mathbf{k}_i) \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z}{\Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z} \quad (\text{B.31})$$

Acima,  $k_x, k_y, k_z$  são as componentes  $x, y$  e  $z$  do momento;  $\Delta k_x$  significa a diferença  $k_{i+1x} - k_{ix}$ , isto é a diferença entre duas componentes seguidas, o mesmo valendo para as outras componentes. Mas, de (B.30), essas diferenças serão sempre  $\frac{2\pi}{L}$ . Assim:

$$\begin{aligned} S &= \sum_i \frac{f(\mathbf{k}_i) \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z}{\frac{2\pi}{L} \frac{2\pi}{L} \frac{2\pi}{L}} \\ S &= \frac{L^3}{8\pi^3} \sum_i f(\mathbf{k}_i) \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z, \quad L^3 = V \\ S &= \frac{V}{8\pi^3} \sum_i f(\mathbf{k}_i) \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

Onde  $V$  é o volume do sistema. No limite termodinâmico, em que o volume tende a um valor muito grande, a diferença entre os momentos possíveis fica muito pequena, de modo que a soma acima se converte numa integral de Riemman:

$$S = \frac{V}{8\pi^3} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty f(\mathbf{k}) dk_x dk_y dk_z \quad (\text{B.33})$$

Em geral, as funções que aparecem no integrando acima no decorrer deste trabalho dependem apenas do módulo do momento e não de sua orientação. Com isso, e usando coordenadas polares, obtém-se finalmente:

$$\begin{aligned} S &= \frac{V}{8\pi^3} 4\pi \int_0^\infty f(k) k^2 dk \\ S &= \frac{V}{2\pi^2} \int_0^\infty f(k) k^2 dk \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

Agora, é possível retornar a equação (B.28) e fazer este mesmo processo, convertendo a soma numa integral. Antes porém é preciso atentar-se aqui para o fato de que o somatório

em (B.28) é sobre todos os níveis de energia. Acima o somatório era sobre todos os valores de  $k$ , mas como em geral existe um nível de energia para cada momento, essa soma equivale a somar sobre todos os níveis. A princípio existiria um nível de energia para cada momento e para cada valor de spin. Como o hamiltoniano não envolve o spin das partículas, as parcelas desse somatório só dependerá do momento, havendo  $\gamma = 2s + 1$  parcelas para um mesmo valor de  $k$  que são idênticas, em que  $s$  é módulo do spin de determinada partícula. Logo, na verdade, tem-se que:

$$\ln \Xi = \gamma \sum_i \ln \{1 + e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)}\} \quad (\text{B.35})$$

Pode-se converter a soma em (B.35) numa integral:

$$\ln \Xi = \frac{\gamma V}{2\pi^2} \int_0^\infty \ln \{1 + e^{-\beta[\epsilon(k) - \mu]}\} k^2 dk \quad (\text{B.36})$$

Por meio da relação (B.23) é possível encontrar o grande potencial termodinâmico por unidade de volume:

$$\begin{aligned} \phi &= -\frac{1}{\beta} \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \ln \Xi (T, \mu, V) \\ \phi &= -\frac{1}{\beta} \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \frac{\gamma V}{2\pi^2} \int_0^\infty \ln \{1 + e^{-\beta[\epsilon(k) - \mu]}\} k^2 dk \\ \phi &= -\frac{\gamma}{2\pi^2 \beta} \int_0^\infty \ln \{1 + e^{-\beta[\epsilon(k) - \mu]}\} k^2 dk \end{aligned} \quad (\text{B.37})$$

Manipulando um pouco esta última equação, por meio de uma integração por partes, e supondo que a energia de cada nível  $\epsilon(k)$  sempre cresça com o momento, chega-se a seguinte expressão:

$$\phi = -\frac{\gamma}{6\pi^2} \int_0^\infty g(k) \frac{d\epsilon(k)}{dk} k^3 dk \quad (\text{B.38})$$

Da termodinâmica, sabe-se que  $\phi = -p$ . Logo, a pressão do sistema gerada por uma determinada espécie de partícula é dada por:

$$p = \frac{\gamma}{6\pi^2} \int_0^\infty g(k) \frac{d\epsilon(k)}{dk} k^3 dk \quad (\text{B.39})$$

Na equação acima,  $g(k)$  é uma função especial, cujo significado aparecerá mais tarde. Ela é definida por:

$$g(k) = \frac{1}{e^{\beta[\epsilon(k)-\mu]} + 1} \quad (\text{B.40})$$

Viu-se que é necessário encontrar a equação de estado do sistema, isto é, uma relação entre suas grandezas macroscópicas, como a pressão, a energia e o número de partículas, por exemplo. Essa primeira é dada por (B.39). Para se encontrar as outras duas, necessita-se encontrar primeiramente o número de ocupação médio de cada nível. para tanto, basta calcular o valor esperado  $\langle \hat{n}_j \rangle$ . Logo:

$$\begin{aligned} \bar{n}_j &= \text{Tr} [\hat{\rho} \hat{n}_j] \\ \bar{n}_j &= \frac{1}{\Xi} \sum_{n_1, n_2, \dots} \langle n_1, n_2, \dots | e^{-\beta[\mathcal{H} - \mu \hat{N}]} \hat{n}_j | n_1, n_2, \dots \rangle \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$

Usando as equações (B.17) e (B.19) a equação acima resulta em:

$$\bar{n}_j = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln \Xi}{\partial \epsilon_j} \quad (\text{B.43})$$

Substituindo (B.28) na última equação, obtém-se:

$$\bar{n}_j = \frac{1}{e^{\beta[\epsilon_j - \mu]} + 1} \quad (\text{B.44})$$

Caso o momento assuma valores contínuos, como ocorre no limite termodinâmico, a equação acima fica idêntica a função anteriormente definida  $g(k)$ . Assim, ela significa o número de ocupação médio para um dado nível de energia de momento  $k$ .

Para encontrar-se a energia interna do sistema, assume-se que ela seja igual ao valor médio para a energia total do sistema. Por meio da equação (B.18) conclui-se que:

$$U = \bar{E} = \sum_i \bar{n}_i \epsilon_i \quad (\text{B.45})$$

Transformando esta soma numa integral como foi feito anteriormente, tem-se que:

$$U = \frac{\gamma V}{2\pi^2} \int_0^\infty g(k) \epsilon(k) k^2 dk \quad (\text{B.46})$$

Logo a densidade de energia gerada por uma dada espécie de partícula será:

$$u = \frac{U}{V} = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\infty g(k) \epsilon(k) k^2 dk \quad (\text{B.47})$$

Procedendo de igual modo para o número de partículas, com o auxílio da equação (B.21) encontra-se a densidade de número para uma certo tipo de partícula:

$$\nu = \frac{N}{V} = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\infty g(k) k^2 dk \quad (\text{B.48})$$

Até aqui calculou-se na verdade a pressão, a densidade de energia e a de número gerados para uma determinada espécie de partículas. Mas o sistema total é composto por mais de um tipo de partícula. No entanto, a relação entre os valores calculados logo acima, e os valores para essas respectivas grandezas do sistema como um todo é muito simples.

Quanto a energia interna, a equação (B.18) mostra que a energia total é apenas a soma das energias devidas a cada tipo de partícula. Consequentemente a densidade de energia do sistema inteiro será a soma da densidade de energia de cada tipo de partícula

que compõe o mesmo. O mesmo vale para a densidade de número, posto que o número total de partículas será também a soma do número de partículas de cada tipo.

Já a pressão de cada tipo de partícula foi calculado por meio do grande potencial termodinâmico, este por meio da função de partição gran-canônica. Ocorre que para um sistema composto de vários tipos de partículas, temos que a primeira lei da termodinâmica pode ser escrita como:

$$dU = TdS - pdV + \sum_f \mu_f dN_f \quad (\text{B.49})$$

Nesta última equação  $\mu_f$  e  $N_f$  são o potencial químico e número de partículas da f-ésima espécie. Esta equação em termos do grande potencial termodinâmico toma a seguinte forma:

$$d\Phi = -SdT - pdV - \sum_f N_f d\mu_f \quad (\text{B.50})$$

Desta equação é possível derivar, no formalismo gran-canônico, o operador densidade do ensemble:

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\Xi} e^{-\beta(\mathcal{H} - \sum_f \mu_f \hat{N}_f)} \quad (\text{B.51})$$

Acima,  $\mathcal{H}$  é o hamiltoniano do sistema total e  $\hat{N}_f$  o operador número de um certo tipo de partícula. O estado do sistema fica inteiramente especificado quando dado o número de ocupação de todos os níveis de cada tipo de partícula, estado este representado por  $\left| n_1^{(p)}, n_2^{(p)}, \dots, n_1^{(n)}, n_2^{(n)}, \dots, n_1^{(e)}, n_2^{(e)}, \dots \right\rangle$ , em que  $n_i^{(f)}$  é o número de ocupação do i-ésimo nível de energia da f-ésima espécie de partícula. Usando estes estados como base, e como a função de partição  $\Xi = Tr[e^{-\beta(\mathcal{H} - \sum_f \mu_f \hat{N}_f)}]$ , além do fato de o hamiltoniano poder ser escrito como a soma de três outros hamiltonianos para cada tipo de partícula (equação (B.2)), tem-se que a função de partição do sistema termina por ser:

$$\begin{aligned}
\Xi &= \prod_f \prod_i \{1 + e^{-\beta(\epsilon_i^{(f)} - \mu^{(f)})}\} \\
\Xi &= \prod_f \Xi^{(f)} \\
\ln \Xi &= \sum_f \ln \Xi^{(f)}
\end{aligned} \tag{B.52}$$

Na última equação,  $\Xi^{(f)}$  é a função de partição calculada em (B.26) para um tipo de férmion. Este somatório sobre os diferentes tipos de partículas da função de partição também de cada tipo de partícula divide de tal modo o cálculo das propriedades do sistema que o grande potencial termodinâmico e, por conseguinte, a pressão do sistema serão:

$$\begin{aligned}
\phi &= \sum_f \ln \Xi^{(f)} \\
\phi &= \sum_f \phi^{(f)}, \quad \text{mas} \quad p = -\phi \\
&\Rightarrow p = -\sum_f \phi^{(f)} \\
&\quad p = \sum_f p^{(f)}
\end{aligned}$$

Logo, também a pressão do sistema total é a soma da pressão gerada por cada uma das espécies de partículas que compõe este sistema. Finalmente:

$$u = \sum_f \frac{\gamma^{(f)}}{2\pi^2} \int_0^\infty g^{(f)}(k) \epsilon(k) k^2 dk \tag{B.54}$$

$$\nu = \sum_f \frac{\gamma^{(f)}}{2\pi^2} \int_0^\infty g^{(f)}(k) k^2 dk \tag{B.55}$$

$$p = \sum_f \frac{\gamma^{(f)}}{6\pi^2} \int_0^\infty g^{(f)}(k) \frac{d\epsilon(k)}{dk} k^3 dk \tag{B.56}$$

Em suma, supondo que a matéria constitutiva das estrelas de nêutrons seja um gás de prótons, nêutrons e elétrons livres de qualquer tipo de interação, a densidade de energia, de número e a pressão do sistema seriam dadas pelas últimas equações acima.

### B.2.1 Gás relativístico de quarks completamente degenerado

Esta seção trata da matéria de quarks descrita de acordo com o modelo MIT bag model que a modela como sendo um gás de quarks livres e não confinados em hádrons, porém restritos à região interna do volume dessa matéria de quarks (ver seção 3.3).

Supondo que o gás seja relativístico, tem-se a seguinte relação entre a energia de um nível e o momento da partícula (em unidade tais que  $c = \hbar = 1$ ):

$$\epsilon(k) = \sqrt{m_f^2 + k^2} \quad (\text{B.57})$$

Por meio de (B.57) é possível definir o momento de Fermi  $k_f$  da  $f$ -ésima espécie de partícula:

$$\mu_f = \sqrt{m_f^2 + k_f^2} \quad (\text{B.58})$$

Com o uso de (3.11), (B.57) e (B.58), a densidade de energia, a densidade de número total ( $\rho_b + \rho_e$ ), e a pressão se tornam:

$$u = B + \sum_f \frac{\gamma^{(f)}}{2\pi^2} \int_0^{k_f} k^2 \sqrt{m_f^2 + k^2} dk \quad (\text{B.59})$$

$$\rho = \sum_f \frac{1}{\pi^2} \int_0^{k_f} k^2 dk \quad (\text{B.60})$$

$$p = -B + \sum_f \frac{\gamma^{(f)}}{6\pi^2} \int_0^{k_f} \frac{k^4}{\sqrt{m_f^2 + k^2}} dk \quad (\text{B.61})$$

Em (B.60) utilizou-se o fato de que o número bariônico dos quarks up, down e strange é  $1/3$  e de que o seu fator de degenerescência  $\gamma^{(f)} = \gamma_{spin}^{(f)} \cdot \gamma_{cor}^{(f)} = 2 \cdot 3 = 6$ , bem como o fato de o número leptônico do elétron ser 1, com fator de degenerescência  $\gamma^{(e)} = \gamma_{spin} = 2$ . Resolvendo as integrações (GRADSHTEYN; RYZHIK, 1964, p.87), obtém-se:

$$u = B + \sum_f \frac{\gamma^{(f)}}{8\pi^2} \left[ \mu_f k_f \left( \mu_f^2 - \frac{1}{2} m_f^2 \right) - \frac{1}{2} m_f^4 \ln \left( \frac{\mu_f + k_f}{m_f} \right) \right] \quad (\text{B.62})$$

$$\rho = \sum_f \frac{k_f^3}{3\pi^2} \quad (\text{B.63})$$

$$p = -B + \sum_f \frac{\gamma^{(f)}}{24\pi^2} \left[ \mu_f k_f \left( \mu_f^2 - \frac{5}{2} m_f^2 \right) + \frac{3}{2} m_f^4 \ln \left( \frac{\mu_f + k_f}{m_f} \right) \right] \quad (\text{B.64})$$

De (B.62), tem-se que a densidade de energia é uma função do momento de Fermi de cada tipo de partícula (o potencial químico de cada partícula também é função do momento de Fermi):

$$u = u(k_u, k_d, k_s, k_e) \quad (\text{B.65})$$

Mas, da equação (B.63), podemos definir a densidade de número bariônico (ou leptônico) de cada tipo de partícula:

$$\rho_f = \frac{k_f^3}{3\pi^2} \quad (\text{B.66})$$

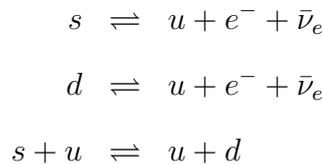
Invertendo, obtém-se o momento de Fermi em função da densidade:

$$k_f = (3\pi^2 \rho_f)^{1/3} \quad (\text{B.67})$$

Desse modo, a densidade de energia pode ser escrita em termos da densidade:

$$u = u(\rho_u, \rho_d, \rho_s, \rho_e) \quad (\text{B.68})$$

Dados esses quatro tipos de partículas, pode haver nesse gás as seguintes reações, além de algumas equivalentes:



A fim de que o sistema esteja em equilíbrio termodinâmico, ou equilíbrio beta generalizado, é necessário que:

$$\mu_u + \mu_e = \mu_s \quad (\text{B.69})$$

$$\mu_d = \mu_s \quad (\text{B.70})$$

$$\quad (\text{B.71})$$

Estas duas restrições acima, fazem, via (B.58) e (B.67), com que duas densidades de número sejam funções de apenas duas, por exemplo:

$$\begin{aligned} \rho_u &= \rho_u(\rho_d, \rho_e) \\ \rho_s &= \rho_s(\rho_d) \end{aligned} \quad (\text{B.72})$$

Acrescenta-se a restrição oriunda da condição de neutralidade local de carga elétrica:

$$\begin{aligned} q &= \sum_f q_f \nu_f \\ &= q_u \cdot 3\rho_u + q_d \cdot 3\rho_d + q_s \cdot 3\rho_s + q_e \rho_e \\ &= 2\rho_u - \rho_d - \rho_s - \rho_e = 0 \\ \Rightarrow \rho_e &= \rho_e(\rho_d) \end{aligned} \quad (\text{B.73})$$

Assim, a densidade de número total  $\rho = \rho_u + \rho_d + \rho_s + \rho_e$  fica inteiramente determinada quando dado um valor para  $\rho_d$ , ou vice-versa. Logo, dado um valor para  $\rho$ , todas as outras densidades ficam determinadas. Pode-se, portanto, escrever:

$$u = u(\rho), \quad p = p(\rho) \quad (\text{B.74})$$

Finalmente, obtém-se a equação de estado que relaciona a densidade de energia do sistema com a pressão do mesmo:

$$p = p(u) \quad (\text{B.75})$$

Esta última equação de estado da matéria de quarks, juntamente com a da matéria de hádrons, mais duas condições de contorno e o ponto de transição entre essas duas matérias, quando aplicadas às equações de estrutura (2.40) e (2.39), geram o perfil estrutural da estrela híbrida.

## B.2.2 Aproximação de primeira ordem para a interação forte entre os quarks

De acordo com o trabalho de E. Farhi & R. L. Jaffe (1984), a densidade do grande potencial termodinâmico  $\phi_f$  do  $f$ -ésimo sabor de quark, corrigida até primeira ordem em  $\alpha_c$  é dada por:

$$\begin{aligned} \phi_f = & -\frac{\gamma^{(f)}}{24\pi^2} \left\{ \mu_f \sqrt{\mu_f^2 - m_f^2} \left( \mu_f^2 - \frac{5}{2} m_f^2 \right) + \frac{3}{2} m_f^4 \ln \left[ \frac{\mu_f + \sqrt{\mu_f^2 - m_f^2}}{m_f} \right] \right. \\ & - \frac{2\alpha_c}{\pi} \left[ 3 \left( \mu_f \sqrt{\mu_f^2 - m_f^2} - m_f^2 \ln \left[ \frac{\mu_f + \sqrt{\mu_f^2 - m_f^2}}{m_f} \right] \right)^2 \right. \\ & - 2 (\mu_f^2 - m_f^2)^2 - 3m_f^4 \ln^2 \left( \frac{m_f}{\mu_f} \right) \\ & \left. \left. + 6 \ln \left( \frac{\sigma}{\mu_f} \right) \left( \mu_f m_f^2 \sqrt{\mu_f^2 - m_f^2} - m_f^4 \ln \left[ \frac{\mu_f + \sqrt{\mu_f^2 - m_f^2}}{m_f} \right] \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.76})$$

O fator de escala  $\sigma$  deve possuir um valor típico dos potenciais químicos do problema. Aqui ele é tomado como sendo igual a  $300 \text{ MeV}$ . A partir da equação (B.76), é possível encontrar a densidade de número  $\nu_f$  da partícula  $f$  (a expressão acima também vale para o elétron desde que o termo no qual  $\alpha_c$  está presente seja negligenciado e o fator de degenerescência  $\gamma^{(e)}$  seja igual à degenerescência de spin, que é igual a 2) por meio da seguinte fórmula:

$$\nu_f = -\frac{\partial \phi_f}{\partial \mu_f} \quad (\text{B.77})$$

A densidade de número bariônico, a de carga elétrica, a de energia e a pressão serão dadas por (GLENDENNING, 2000, p. 327-328):

$$\rho_f = \frac{1}{3} \sum_{f=u,d,s} \nu_f \quad (\text{B.78})$$

$$q = \sum_f q_f \nu_f \quad (\text{B.79})$$

$$u = B + \sum_f \phi_f + \mu_f \nu_f \quad (\text{B.80})$$

$$p = -B - \sum_f \phi_f \quad (\text{B.81})$$

Dessa forma volta-se às equações (B.73) que estabelece a neutralidade local de carga elétrica. Como aqui também é suposto o equilíbrio beta generalizado entre as distintas partículas, as restrições B.72 também valem, de maneira que a equação de estado pode ser encontrada a partir do mesmo procedimento dito no final da seção anterior, isto é, escolhe-se arbitrariamente um valor para a densidade de número total  $\rho$ , então todas as densidades  $\rho_f$  ficam determinadas por mor das restrições, sendo possível encontrar, pois, o valor da pressão  $p(\rho)$  e o da densidade de energia  $u(\rho)$ . Relaciona-se, por fim, a pressão à energia, obtendo-se a equação de estado  $p(u)$ .

# Apêndice C

## Correções Devidas à Superfluididez

As correções se dão por meio de fatores de redução, denotados por  $R$ . Os fatores para as emissividades são encontrados por expressões que dependem do tipo de mecanismo de emissão de neutrinos e de que tipo de pares (nêutron singleto, nêutron tripleto, próton singleto, pares de quarks na fase cfl) estão envolvidos nas reações do dado mecanismo; já os fatores para a redução do calor específico são dados por expressões que dependem apenas do tipo de par. Esses fatores são funções do *gap* de energia  $\Delta$ , que é por sua vez função da densidade de número bariônico  $\rho_b$  e da temperatura  $T$ . Cada tipo de par vai possuir seu próprio valor de  $\Delta$ .

Segue na próxima seção tais expressões (YAKOVLEV et al, 2001). Os parâmetros que aparecem nestas equações são dados na tabela (C.1). Na última seção mostra-se o como é de fato calculado a redução das emissividades e dos calores específicos.

### C.1 Expressões para os fatores de redução

#### C.1.1 Processo URCA direto

$$R_{ns\,DU} = R_{nt\,DU} = \left( \alpha_{n\,DU} + \sqrt{(1 - \alpha_{n\,DU})^2 + (\beta_{n\,DU} \Delta)^2} \right)^5 e^{\delta_{n\,DU} - \sqrt{\delta_{n\,DU}^2 + \Delta^2}} \quad (\text{C.1})$$

$$R_{psDU} = \left( \alpha_{pDU} + \sqrt{(1 - \alpha_{pDU})^2 + (\beta_{pDU}\Delta)^2} \right)^{5,5} e^{\delta_{pDU} - \sqrt{\delta_{pDU}^2 + \Delta^2}} \quad (\text{C.2})$$

### C.1.2 Processo URCA modificado

$$R_{nsMU} = \frac{1}{2} \left( \alpha_{nsMU} + \sqrt{(1 - \alpha_{nsMU})^2 + (\beta_{nsMU}\Delta)^2} \right)^{7,5} + \frac{1}{2} \left( \alpha_{nsMU} + \sqrt{(1 - \alpha_{nsMU})^2 + (\beta_{nsMU}\Delta)^2} \right)^{5,5} e^{\delta_{nsMU} - \sqrt{\delta_{nsMU}^2 + \Delta^2}} \quad (\text{C.3})$$

$$R_{ntMU} = \frac{\alpha_{ntMU}}{\tau^6} e^{-\beta_{ntMU}/\tau} \quad (\text{C.4})$$

$$R_{psMU} = \left( \alpha_{psMU} + \sqrt{(1 - \alpha_{psMU})^2 + (\beta_{psMU}\Delta)^2} \right)^7 e^{\delta_{psMU} - \sqrt{\delta_{psMU}^2 + 4\Delta^2}} \quad (\text{C.5})$$

$$R_{ptMU} = \frac{1}{2} \left( \alpha_{ptMU} + \sqrt{(1 - \alpha_{ptMU})^2 + (\beta^{(1)}_{ptMU}\Delta)^2} \right)^7 + \frac{1}{2} \left( \alpha_{nsMU} + \sqrt{(1 - \alpha_{nsMU})^2 + (\beta^{(2)}_{ptMU}\Delta)^2} \right)^5 e^{\delta_{nsMU} - \sqrt{\delta_{nsMU}^2 + \Delta^2}} \quad (\text{C.6})$$

### C.1.3 *Bremsstrahlung* nêutron-próton singletos

$$\begin{aligned}
R_{npsBR} = & \frac{1}{\gamma_{npsBR}} \left( \alpha^{(1)}_{npsBR} + \sqrt{(1 - \alpha^{(1)}_{npsBR})^2 + (\beta^{(1)}_{npsBR} \Delta)^2} \right) \cdot \\
& \cdot e^{\delta^{(1)}_{npsBR} - \sqrt{\delta^{(1)}_{npsBR}{}^2 + \Delta^2}} + \\
& + \frac{\chi_{npsBR}}{\gamma_{npsBR}} \left( \alpha^{(2)}_{npsBR} + \sqrt{(1 - \alpha^{(2)}_{npsBR})^2 + (\beta^{(2)}_{npsBR} \Delta)^2} \right)^{7,5} \cdot \\
& \cdot e^{\delta^{(2)}_{npsBR} - \sqrt{\delta^{(2)}_{npsBR}{}^2 + 4\Delta^2}}
\end{aligned} \tag{C.7}$$

### C.1.4 *Bremsstrahlung* próton-próton singletos

$$\begin{aligned}
R_{ppsMU} = & \frac{1}{2} \left( \alpha^{(1)}_{ppsBR} + \sqrt{(1 - \alpha^{(1)}_{ppsBR})^2 + (\beta^{(1)}_{ppsBR} \Delta)^2} \right)^2 \cdot \\
& \cdot e^{\delta^{(1)}_{ppsBR} - \sqrt{\delta^{(1)}_{ppsBR}{}^2 + 4\Delta^2}} + \\
& + \frac{1}{2} \left( \alpha^{(2)}_{ppsBR} + \sqrt{(1 - \alpha^{(2)}_{ppsBR})^2 + (\beta^{(2)}_{ppsBR} \Delta)^2} \right)^{7,5} \cdot \\
& \cdot e^{\delta^{(2)}_{ppsBR} - \sqrt{\delta^{(2)}_{ppsBR}{}^2 + 9\Delta^2}}
\end{aligned} \tag{C.8}$$

### C.1.5 Calor específico

$$R_{nC} = \left( \alpha_{nC} + \sqrt{\gamma_{nC}^2 + (\beta_{nC} \Delta)^2} \right)^2 e^{\delta_{nC} - \sqrt{\delta_{nC}^2 + \Delta^2}} \tag{C.9}$$

Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor
$\alpha_{nDU}$	0,2546206	$\gamma_{nps BR}$	2,732
$\beta_{nDU}$	0,128407	$\chi_{nps BR}$	1,732
$\delta_{nDU}$	2,701395	$\alpha^{(1)}_{nps BR}$	0,9982
$\alpha_{pDU}$	0,2312	$\beta^{(1)}_{nps BR}$	0,3815
$\beta_{pDU}$	0,1438	$\delta^{(1)}_{nps BR}$	1,306
$\delta_{pDU}$	3,427	$\alpha^{(2)}_{nps BR}$	0,3949
$\alpha_{nsMU}$	0,1477	$\beta^{(2)}_{nps BR}$	0,2666
$\beta_{nsMU}$	0,1175	$\delta^{(2)}_{nps BR}$	3,303
$\delta_{nsMU}$	3,437	$\alpha^{(1)}_{pps BR}$	0,1747
$\alpha_{ntMU}$	$1,56 \cdot 10^{-4}$	$\beta^{(1)}_{pps BR}$	0,07933
$\beta_{ntMU}$	2,376	$\delta^{(1)}_{pps BR}$	4,228
$\alpha_{psMU}$	0,2414	$\alpha^{(2)}_{pps BR}$	0,7333
$\beta_{psMU}$	0,1318	$\beta^{(2)}_{pps BR}$	0,1678
$\delta_{psMU}$	5,339	$\delta^{(2)}_{pps BR}$	7,762
$\alpha_{psMU}$	0,1612	$\alpha_{nC}$	0,6893
$\beta^{(1)}_{ptMU}$	0,1117	$\beta_{nC}$	0,2824
$\beta^{(2)}_{ptMU}$	0,1274	$\gamma_{nC}$	0,79
$\delta_{ptMU}$	2,398	$\delta_{nC}$	1,934

Tabela C.1: Parâmetros encontradas nas equações deste apêndice

## C.2 Cálculo da redução

### C.2.1 Emissividade

A redução dum determinada emissividade oriunda dum dado mecanismo será obtida por meio do fator de redução específico. A condição que especifica tal fator está relacionada a qual tipo de par possui maior *gap* de energia  $\Delta$ .

#### Processo URCA direto

Quando o *gap*  $\Delta$  do nêutron singleto ou do tripleto for maior que o do próton singleto, o fator de redução utilizado é o  $R_{nsDU}$ . Assim:

$$\epsilon_{DU} \rightarrow \epsilon_{DU} \cdot R_{nsDU} \quad (\text{C.10})$$

Mas se o *gap*  $\Delta$  do próton singleto for o maior, então usa-se o fator  $R_{psDU}$ :

$$\epsilon_{DU} \rightarrow \epsilon_{DU} \cdot R_{psDU} \quad (\text{C.11})$$

Na região de matéria de quarks a redução feita é ( $k_B$  é a constante de Boltzmann):

$$\epsilon_{QDU} \rightarrow \epsilon_{QDU} \cdot e^{-\Delta/k_B T} \quad (\text{C.12})$$

### Processo URCA modificado

Quando o *gap*  $\Delta$  do nêutron singlete for maior que os dos demais tipos de pares, os fatores de redução utilizados são o  $R_{nsMU}$  e o  $R_{psMU}$ . Assim:

$$\epsilon_{MU_n} \rightarrow \epsilon_{MU_n} \cdot R_{nsMU} \quad (\text{C.13})$$

$$\epsilon_{MU_p} \rightarrow \epsilon_{MU_p} \cdot R_{psMU} \quad (\text{C.14})$$

Por outro lado, se o *gap*  $\Delta$  do nêutron tripleto for maior que os dos demais tipos de pares, os fatores de redução utilizados são o  $R_{ntMU}$  e o  $R_{ptMU}$ . Assim:

$$\epsilon_{MU_n} \rightarrow \epsilon_{MU_n} \cdot R_{ntMU} \quad (\text{C.15})$$

$$\epsilon_{MU_p} \rightarrow \epsilon_{MU_p} \cdot R_{ptMU} \quad (\text{C.16})$$

Porém, se o *gap*  $\Delta$  do próton singlete for o maior, os fatores de redução utilizados são os mesmos  $R_{ntMU}$  e  $R_{ptMU}$ .

Na região de matéria de quarks a redução feita é:

$$\epsilon_{QMU} \rightarrow \epsilon_{QMU} \cdot e^{-2\Delta/k_B T} \quad (\text{C.17})$$

### *Bremsstrahlung*

Só haverá redução na emissividade desse mecanismo no caso em que o *gap* do nêutron singlete for maior que os dos demais. Os fatores de redução utilizados são o  $R_{npsBR}$  e o  $R_{ppsBR}$ , de modo que:

$$\epsilon_{BRnp} \rightarrow \epsilon_{BRnp} \cdot R_{npsBR} \quad (\text{C.18})$$

$$\epsilon_{BRnn} \rightarrow \epsilon_{BRnn} \cdot R_{ppsBR} \quad (\text{C.19})$$

Na região de matéria de quarks a redução feita é:

$$\epsilon_{QBR} \rightarrow \epsilon_{QBR} \cdot e^{-2\Delta/k_B T} \quad (\text{C.20})$$

### C.2.2 Calor específico

A redução feita no calor específico devido aos nêutron só ocorre quando o *gap* de energia do nêutron singlete é maior que o do tripleto, de forma que:

$$C_{vn} \rightarrow C_{vn} \cdot R_{nC} \quad (\text{C.21})$$

Na região de matéria de quarks a correção do calor específico devido aos quarks é ( $k_B$  é a constante de Boltzmann):

$$C_{vcfl_q} = 3,2 \cdot C_q \left( \frac{T_c}{T} \right) \times \left[ 2,5 - 1,7 \left( \frac{T_c}{T} \right) + 3,6 \left( \frac{T_c}{T} \right)^2 \right] e^{-\Delta/k_B T} \quad (\text{C.22})$$