



INSTITUTO DE FÍSICA

Universidade Federal Fluminense

Leonardo Justino Pereira

**Vórtices, inseparabilidade clássica e quântica e soma
de Momento Angular Orbital na Geração de
Segundo Harmônico**

Niterói

2016

Leonardo Justino Pereira

**Vórtices, inseparabilidade clássica e quântica e soma
de Momento Angular Orbital na Geração de
Segundo Harmônico**

Tese apresentada ao curso de Pós-Graduação
em Física da Universidade Federal Flumi-
nense, como requisito parcial para a obten-
ção do Título de Doutor em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Kaled Dechoum

Niterói

2016

Agradecimentos

A todos os que me apoiaram e me deram suporte para seguir em frente, com paciência e dedicação: meu orientador, Prof. Kaled Dechoum, família, amigos, professores e funcionários do IF-UFF.

Ao apoio financeiro fornecido pela CAPES.

Sumário

Agradecimentos	i
Lista de Figuras	v
Resumo	ix
Abstract	x
1 Introdução	1
2 Ótica Paraxial e Não-Linear	6
2.1 Aproximação Paraxial	10
2.2 Ótica não-linear	15
2.3 Equações dinâmicas multimodo na Geração de Segundo Harmônico	17
2.3.1 Representação de intensidade e fase e relações de Manley- Rowe multimodo	21
3 Desigualdade de Bell e Emaranhamento	25
3.1 Desigualdade de Bell	26
3.2 Emaranhamento	31
4 Inseparabilidade Clássica e Quântica	34
4.1 Vórtices de polarização como modo spin-órbita inseparável	35

4.2	Modos spin-órbita quantizados	37
4.3	Medidas de Bell em estados com acoplamento spin-órbita	40
4.4	Intensidades médias e ruídos quânticos	44
4.4.1	Estados de Fock emaranhados	45
4.4.2	Estados de Fock mistos	46
4.4.3	Estado de Werner	46
4.4.4	Estado coerente puro	47
4.4.5	Estado coerente misto	48
4.4.6	Vácuo comprimido de dois modos	50
4.5	Inseparabilidade Clássica e Quântica	51
5	Constantes de recobrimento	53
5.1	Soluções para as Constantes de Recobrimento	56
5.2	Avaliando os valores de P	59
5.2.1	$l'' \geq 0$	60
5.2.2	$l'' < 0$	61
6	Solução Analítica das Equações Dinâmicas para SHG	64
6.1	2+1 modos	65
6.1.1	Solução analítica	70
6.2	$2 + (P + 1)$ modos	72
7	Soma de Momento Angular Orbital na Geração de Segundo Harmônico	76
7.1	Conversão de modos	78
7.2	Soma de MAO	80
7.3	Mistura de MAO Controlada por Polarização	84
7.4	Mistura de MAO Controlada por Polarização Generalizada	87
7.4.1	$l_{SLM_{ask}} \neq l_{SLM}$, com $l_{SLM_{ask}} l_{SLM} \geq 0$	89

7.4.2	$l_{SLM_{ask}} \neq l_{SLM}$ com $l_{SLM_{ask}} l_{SLM} < 0$	94
8	Por que as nossas considerações funcionam?	99
8.1	Expansão em série de Taylor	100
9	Conclusões e perspectivas	106
Apêndice A	Conversões	110
A.1	Resultados das Conversões	110
A.2	Intensidades dos campos convertidos	113
Apêndice B	Cálculo da constante $\gamma_{l_H l_V}$	115
Apêndice C	Uma relação importante envolvendo polinômio de Laguerre associado	117
Apêndice D	Cálculos do Bell-like com 2 saídas	120
D.1	Independência de fase ganha no MZIM para medida de intensidade	120
D.2	Medidas efetivas	124
Bibliografia		127

Lista de Figuras

4.1	Retirada de [9]. Vórtices de polarização de primeira ordem análogos aos quatro estados de Bell.	37
4.2	Retirada de [8]. Esquema para uma medida de Bell spin-órbita.	41
4.3	Retirada de [9]. Esquema proposto para produzir um estado coerente misto ajustável.	49
7.1	Retirada de [11]. Esquema experimental.	77
7.2	Retirada de [11]. Resultados experimentais para Soma de MAO arbitrário. As figuras são os perfis de intensidade do segundo harmônico.	80
7.3	Figura do canto esquerdo retirada de [11]. Comparação entre o resultado experimental (canto esquerdo) e a simulação dos resultados teóricos discutidos ao longo desta tese (canto direito) do perfil de intensidade do segundo harmônico para a soma " $l_{Mask} = 1$ " mais " $l_{SLM} = 0$ ", resultando em " $l = 1$ ".	82
7.4	Figura do canto esquerdo retirada de [11]. Comparação entre o resultado experimental (canto esquerdo) e a simulação dos resultados teóricos discutidos ao longo desta tese (canto direito) do perfil de intensidade do segundo harmônico para a soma " $l_{Mask} = 1$ " mais " $l_{SLM} = 1$ ", resultando em " $l = 2$ ".	83

7.5	Figura do canto esquerdo retirada de [11]. Comparação entre o resultado experimental (canto esquerdo) e a simulação dos resultados teóricos discutidos ao longo desta tese (canto direito) do perfil de intensidade do segundo harmônico para a soma " $l_{Mask} = 1$ " mais " $l_{SLM} = 2$ ", resultando em " $l = 3$ ".	84
7.6	Figura do canto esquerdo retirada de [11]. Comparação entre o resultado experimental (canto esquerdo) e a simulação dos resultados teóricos discutidos ao longo desta tese (canto direito) do perfil de intensidade do segundo harmônico para a soma " $l_{Mask} = 1$ " mais " $l_{SLM} = -2$ ", resultando em " $l = -1$ ".	85
7.7	Figura do canto esquerdo retirada de [11]. Comparação entre o resultado experimental (canto esquerdo) e a simulação dos resultados teóricos discutidos ao longo desta tese (canto direito) do perfil de intensidade do segundo harmônico para a soma " $l_{Mask} = 1$ " mais " $l_{SLM} = -1$ ", resultando em " $l = 0$ ".	86
7.8	Retirada de [11]. Resultados experimentais para Soma de MAO arbitrário obtido utilizando a Mistura de MAO Controlada por Polarização. As figuras são os perfis de intensidade do segundo harmônico.	87
7.9	Produzida no MATLAB. Intensidades do problema a 7 modos em função do comprimento " z " dentro do cristal para a "HWP-3" orientada a $\alpha = 0^\circ$ - com $g_\omega = 1u.m.$, $I_0 = 1u.m.$, $l_{SLMask} = 1$ e $l_{SLM} = 2$ - sendo: a) as 4 intensidades do primeiro harmônico, e b) as 3 intensidades do segundo harmônico.	91

- 7.10 Produzida no MATLAB. Intensidades do problema a 7 modos em função do comprimento " z " dentro do cristal para a "HWP-3" orientada a $\alpha = 30^\circ$ - com $g_\omega = 1u.m.$, $I_0 = 1u.m.$, $l_{SLMask} = 1$ e $l_{SLM} = 2$ - sendo: a) as 4 intensidades do primeiro harmônico, e b) as 3 intensidades do segundo harmônico. 92
- 7.11 Produzida no MATLAB. Intensidades do problema a 7 modos em função do comprimento " z " dentro do cristal para a "HWP-3" orientada a $\alpha = 45^\circ$ - com $g_\omega = 1u.m.$, $I_0 = 1u.m.$, $l_{SLMask} = 1$ e $l_{SLM} = 2$ - sendo: a) as 4 intensidades do primeiro harmônico, e b) as 3 intensidades do segundo harmônico. 93
- 7.12 Produzida no MATLAB. Intensidades do problema a 7 modos em função do comprimento " z " dentro do cristal para a "HWP-3" orientada a $\alpha = 60^\circ$ - com $g_\omega = 1u.m.$, $I_0 = 1u.m.$, $l_{SLMask} = 1$ e $l_{SLM} = 2$ - sendo: a) as 4 intensidades do primeiro harmônico, e b) as 3 intensidades do segundo harmônico. 94
- 7.13 Produzida no MATLAB. Intensidades do problema a 7 modos em função do comprimento " z " dentro do cristal para a "HWP-3" orientada a $\alpha = 90^\circ$ - com $g_\omega = 1u.m.$, $I_0 = 1u.m.$, $l_{SLMask} = 1$ e $l_{SLM} = 2$ - sendo: a) as 4 intensidades do primeiro harmônico, e b) possui as 3 intensidades do segundo harmônico. 96
- 7.14 Produzida no MATLAB. Mistura de MAO Controlada por Polarização - intensidades do problema a 7 modos em função do ângulo de orientação " α " da "HWP-3", para um cristal de comprimento $z_l = 0.1268m$ - com $g_\omega = 1u.m.$, $I_0 = 1u.m.$, $l_{SLMask} = 1$ e $l_{SLM} = 2$ - sendo: a) as 4 intensidades do primeiro harmônico, e b) as 3 intensidades do segundo harmônico. 97

7.15 Produzida no MATLAB. Mistura de MAO Controlada por Polarização -
intensidades do problema a 8 modos em função do ângulo de orientação
" α " da "HWP-3", para um cristal de comprimento $z_l = 0.1261m$ - com
 $g_\omega = 1u.m.$, $I_0 = 1u.m.$, $l_{SLMask} = 1$ e $l_{SLM} = -2$ - sendo: a) as 4
intensidades do primeiro harmônico, e b) as 3 intensidades do segundo
harmônico. 98

Resumo

Nesta tese, desenvolvo uma abordagem geral para o processo de Geração de Segundo Harmônico, envolvendo modos do campo que apresentam Momento Angular Orbital, incluindo modos inseparáveis que violam uma desigualdade clássica tipo Bell, como são os vórtices vetoriais.

Vários ingredientes inerentes ao processo são analisados com profundidade, como o papel das constantes de recobrimento e a decomposição modal dos campos envolvidos no processo, gerando resultados que, às vezes, fogem da intuição comum. Resultados analíticos e numéricos são apresentados, assim como generalizações multimodos desses processos.

Alguns dos resultados obtidos estão sendo observados no laboratório de óptica quântica do IF-UFF e outras propostas experimentais poderão vir a ser implementadas num futuro próximo.

Abstract

In this thesis, we develop a general approach for the generation process of Second Harmonic involving modes of the Electromagnetic field that present Angular Orbital Momentum, including inseparable modes that violate a classical Bell type inequality, as are vector vortices.

Several ingredients inherent in the process are analyzed in depth, as the role of overlap integrals, and the modal decomposition of the field involved in the process, generating results that sometimes are beyond common intuition. Analytical and numerical results are presented, as well as the generalizations of the multi-mode processes.

Some of the results are being observed in the quantum optics laboratory in the UFF institute of physics, and others experimental proposals are likely to be implemented in the near future.

Capítulo 1

Introdução

A ótica é uma linha de pesquisa que busca entender o espectro eletromagnético na região do visível aos olhos humanos, ou seja, estuda a luz que enxergamos. Só por esse fato já é possível motivar esse campo, pois efeitos óticos nos encantam desde que nosso cérebro registra nossa primeira imagem visual¹.

Mas não para por aí... A história mostra a observação de vários efeitos óticos que atraíram, e continuam atraindo, a atenção de todas as civilizações, desde os mais simples, como a iluminação de um corpo escuro, a reflexão da luz por uma superfície refletora ou a refração da luz, até os mais sofisticados, como a holografia, o laser, os vórtices óticos, a geração de segundo harmônico, entre outros.

Sendo assim, contribuir com as pesquisas e avanços tecnológicos dessa área, que, aos olhos do autor, é belíssima, é a motivação mais fundamental.

Agora, partindo para algo mais específico, mais condizente com nosso trabalho no estágio que se encontra - que é um cenário de avanço bem acelerado (comparado com épocas passadas) em pesquisa científica e surgimento de novas tecnologias - esta tese pretende melhor caracterizar fenômenos óticos de baixa in-

¹A generalidade desta frase só cabe para quem enxerga ou, pelo menos, já enxergou em algum momento.

tensidade, em regimes clássicos e quânticos, e em escalas compatíveis com experimentos feitos em mesas óticas. Esse trabalho traz resultados sobre inseparabilidade clássica e quântica de vórtices óticos de polarização, que já foram publicados e podem ser vistos em [9], e resultados teóricos sobre soma de Momento Angular Orbital na Geração de Segundo Harmônico que estão sendo experimentados no laboratório de Ótica Quântica do Instituto de Física da UFF. Mas antes de chegar nestes, que são os pontos mais aguardados desta tese, vamos contar um pouco das referências que nos levam até nosso desejado fim.

Muita coisa já foi feita, muita coisa mesmo, pois a física vem sendo aprimorada desde a época da Grécia antiga, ou até antes. Então, pela impossibilidade de contar toda essa trajetória em detalhes e de forma bem precisa, escolhemos como ponto de partida um assunto bem conveniente para esse trabalho, que é o surgimento do laser².

O laser, uma fonte de luz coerente descoberto em 1958 por Schalow e Townes [1] e se consolidando com ajuda dos trabalhos [2, 3, 4], foi uma das mais incríveis descobertas do século XX, servindo não apenas à ótica, mas a muitas outras linhas de pesquisa. Esse aparato possibilitou a realização de outros grandes experimentos, como: ... [], ... [], ... [] Além de todos esses, o laser foi a base de nossos trabalhos e desta tese.

Em seguida veio o experimento mental de Bell em 1964 [15]³ - mais conhecido atualmente como desigualdade de Bell - que foi feito com a proposta de clarear a questão levantada por Eistein, Podolsk e Rose (EPR) em 1935, [14], e todo debate posterior, onde diziam que a mecânica quântica seria uma teoria incompleta, o que costuma ser chamado de paradoxo EPR. Esse resultado obtido por Bell deu origem a toda uma linha de pesquisa, que é a Informação Quântica, onde se estuda o famoso emaranhamento, que é uma espécie de correlação "mais

²Do inglês "Ligth Amplification by Stimulated Emission of Radiation" (LASER).

³O experimento foi realizado de fato por Aspect em 1982 [22].

forte" que a correlação clássica e que permitiu grandes avanços, como o teletransporte, criptografia quântica, codificação super densa, entre outros [6]. Esse tema será tratado com mais cuidado no Capítulo 3.

Também temos a Ótica Não-Linear tentando explicar a interação da luz com a matéria, assim surgindo com a Geração de Segundo Harmônico (GSH) - também conhecida como Conversão Paramétrica Ascendente, em 1961 [5]. Depois disso, outros processos paramétricos⁴ (processos em que a troca de energia entre campos intermediada pelo meio não-linear pode produzir novos campos que oscilam com frequências distintas das frequências de entrada) foram observados, como soma de frequência, subtração de frequência, geração de pares de feixes emaranhados [?] e o Oscilador Paramétrico Ótico (OPO), efeito Kerr⁵. Todos esses, e outros, processos paramétricos podem ser visto em [livro que contenha todos]. Nos concentraremos nos processos que ocorrem em meios com não-lineares de segunda ordem, que possuem trabalhos muito interessantes, como: ... [?]

Há também o tema conhecido como inseparabilidade clássica, que é, relativamente, novo, iniciando em 1998 com Spreeuw [20] - tema que ainda causa uma certa estranheza na comunidade científica, e vem mostrando resultados com aplicações interessantes. Este vem com a proposta de se utilizar de ferramentas da Mecânica Quântica, como o emaranhamento, para aplicar na Mecânica Clássica. Essas pesquisas vêm crescendo cada vez mais, surgindo importantes trabalhos, como [8, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48] Esse estudo é um dos interesses específicos desta tese.

Todos esses importantíssimos trabalhos foram fundamentais, direta e indiretamente, para o desenvolvimento desta tese, mas tiveram dois trabalhos que foram os grandes motivadores para produzir os resultados aqui apresentados: "Bell-like inequality for the spin-orbit separability of a laser beam" [8] e "Arbitrary orbi-

⁴Também conhecidos como mistura de ondas.

⁵Efeito com não-linearidade de terceira ordem.

tal angular momentum addition in second harmonic generation" [11]. E por esse motivo é que eles terão um destaque maior a seguir.

No artigo [11] foi implementado um sistema controlado pela polarização dos feixes, que usa o processo de geração de Segundo Harmônico para realizar uma soma de Momento Angular Orbital (MAO) onde as parcelas são arbitrárias, isto é, eles somam as cargas topológicas l_1 e l_2 de cada faixa, sendo l_1 e l_2 quaisquer. Além disso, eles conseguiram medir o dobramento de cada MAO, o que já era conhecido [5], usando o mesmo aparato experimental.

Daqui por diante, no decorrer desta tese, será apresentada a parte técnica, que estará dividida conforme descrito a seguir.

No segundo capítulo será apresentado inicialmente como é feita a aproximação paraxial e os modos de Laguerre-Gauss, que são modos que possuem momento angular⁶ e são solução desta equação. Em seguida faremos um apanhado sobre a ótica não-linear, que terá como foco principal a Geração de Segundo Harmônico. Aplicando a aproximação paraxial no meio não-linear de interesse chegamos nas equações dinâmicas, que serão trabalhadas na base dos modos Laguerre-Gauss. Por último, mostraremos as equações de Manley-Rowe multimodo.

O terceiro capítulo é essencialmente um capítulo de revisão de literatura sobre emaranhamento e desigualdade de Bell. Vamos definir essa incrível ferramenta da Mecânica Quântica, que é o emaranhamento, com foco maior em variáveis contínuas, e descreveremos o que são as desigualdades de Bell e como elas se encaixam nesse cenário.

No quarto capítulo, falaremos dos nossos resultados sobre inseparabilidade clássica e quântica. Começaremos descrevendo um pouco do trabalho [8] e do esquema proposto para obter as medidas. Aproveitando esse esquema, discutire-

⁶Momento Angular Orbital, no caso.

mos nosso trabalho [9], mostrando que a coerência possui grande relevância para classificar modos inseparáveis clássicos e quânticos.

No quinto capítulo, começamos a construir o que será o nosso segundo trabalho sobre soma de Momento Angular Orbital na Geração de Segundo Harmônico. Para isso falaremos das regras de seleção que encontramos ao calcular as constantes de recobrimento, que terão papel de suma importância, pois nos dirão quais modos serão acoplados na dinâmica do problema.

No sexto capítulo, apresentaremos soluções analíticas das equações dinâmicas multimodos, onde ambos os casos terão dois feixes de entrada no cristal não-linear, sendo o primeiro caso com 1 feixe de saída⁷ e o segundo caso com $P + 1$ feixes de saída.

No sétimo capítulo juntamos os resultados obtidos nos dois capítulos imediatamente anteriores, com fins de propor uma explicação alternativa para o perfil oval, diferente do esperado, na figura 3 b-) de [11]. Por isso, neste capítulo discutiremos bem o trabalho [11], deixando claro qual é a nossa contribuição sobre este. Além disso faremos uma previsão teórica para um experimento contendo quatro feixes de entrada no cristal não-linear, utilizando o mesmo aparato experimental.

No oitavo capítulo, tentamos justificar as considerações feitas até então, deixando claro o que queremos dizer com baixa intensidade, validando as constantes de recobrimentos encontradas anteriormente como caso "geral" para o nosso problema e a resolução mais simples para as equações dinâmicas multimodos.

No nono capítulo, concluímos esta tese, destacando mais uma vez nossos resultados e indicando perspectivas de como seguir daqui por diante.

⁷Essa solução já é conhecida desde 1962 [19], mas sem considerar MAO.

Capítulo 2

Ótica Paraxial e Não-Linear

Este é um capítulo, essencialmente, de revisão da literatura, baseado no arcabouço teórico desenvolvido na referência [12]. Esse assunto também pode ser visitado, inclusive com uma outra abordagem para discutir a aproximação paraxial, em textos como [23, 24, 25, 26] [citar livros, artigos, ...]. Mas é preciso apresentar o procedimento que leva na Aproximação Paraxial e suas conjecturas.

Um breve resumo deste capítulo se inicia apresentado as equações de Maxwell num meio material com uma breve descrição dos termos envolvidos e dos termos já desconsiderados nessa etapa, até chegar na equação diferencial em que será aplicada a Aproximação Paraxial. Já na Seção 2.1, mostramos o que é a Aproximação Paraxial. Na Seção 2.2 faremos uma breve exposição sobre a Ótica Não-linear, mais voltada para a GSH. E por fim, na Seção 2.3, as Equações Dinâmicas, com ajuda da Equação Paraxial, serão expandidas na base de Laguerre-Gauss, para seu uso em capítulos posteriores, e também serão apresentadas as Equações de Manley-Rowe multimodo nessa base, Subseção 2.3.1.

Tomando como ponto de partida as equações de Maxwell num meio material

[29, 30],

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f, \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.4)$$

onde

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}, \quad (2.6)$$

pode-se derivar as equações de onda que se propagam em meios materiais.

Essas equações são capazes de lidar com uma vasta gama de problemas, e uma solução que dê conta de todos os possíveis casos ainda está muito distante da atual realidade. Então a proposta aqui será resolvê-las no âmbito da Ótica Clássica, Ótica Paraxial, mais especificamente, considerando que os campos elétrico e magnético se propagam em um meio ótico.

Um meio ótico qualquer pode ser traduzido por:

$$\rho_f = 0, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{J}_f = \mathbf{0}, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{0}, \quad (2.9)$$

ou seja, é um meio isolante sem cargas livres e correntes livres e sem propriedades magnéticas. Mais adiante será especificado com mais detalhes o meio a ser utilizado nesse trabalho.

Substituindo as Eq. (2.7), Eq. (2.8) e Eq. (2.9) nas equações de Maxwell, chega-se em

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{P}) \right) \quad (2.10)$$

sendo c a velocidade da luz no vácuo, dada por

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}. \quad (2.11)$$

Manipulando as Eq. (2.1), Eq. (2.5) e Eq. (2.7) encontra-se

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{P}) = -\epsilon_0 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) \quad (2.12)$$

que conseqüentemente leva a Eq. (2.10) em

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}, \quad (2.13)$$

que é a equação geral do campo elétrico em meio ótico qualquer, que obedece as condições Eq. (2.7), Eq. (2.8) e Eq. (2.9). A densidade de polarização pode ser escrita como

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_L + \mathbf{P}_{NL}, \quad (2.14)$$

onde \mathbf{P}_L é o termo linear e \mathbf{P}_{NL} o não-linear. Inicialmente vamos especificar apenas meios lineares, deixando os meios não-lineares a serem trabalhados a partir da seção 6.1 - onde falaremos sobre os processos que ocorrem em meios não-lineares, focando na GSH.

Na busca pela solução da Eq. (2.13), o primeiro passo será uma resposta que

satisfaça a expansão em série de Fourier do campo elétrico

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_m \mathbf{E}_m(\mathbf{r}, t), \quad (2.15)$$

$$\mathbf{E}_m(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\varepsilon}_m(\mathbf{r})e^{-i\omega_m t} + \boldsymbol{\varepsilon}_m^*(\mathbf{r})e^{i\omega_m t}, \quad (2.16)$$

$$\omega_m = m\omega_1, \quad (2.17)$$

sendo $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ os coeficientes da expansão, onde carregam toda dependência espacial do modo $\mathbf{E}_m(\mathbf{r}, t)$, e ω_m é a frequência de oscilação do modo m .

A densidade de polarização linear irá acoplar a resposta do meio ao receber uma radiação de frequência ω_m ($\chi^{(1)}(\omega_m)$) com o campo elétrico oscilando também na frequência ω_m ¹. Assim, conseqüentemente, a densidade de polarização linear será

$$\mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \sum_m \chi_m^{(1)} \mathbf{E}_m(\mathbf{r}, t), \quad (2.18)$$

$$\chi_m^{(1)} = \chi^{(1)}(\omega_m). \quad (2.19)$$

Considerando, inicialmente, um meio linear ($\mathbf{P}_{NL} = 0$), e substituindo as Eq. (2.15), Eq. (2.16) e Eq. (2.18) na Eq. (2.13) encontramos, após alguns passos,

$$\sum_m \{ [\nabla^2 \boldsymbol{\varepsilon}_m - \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_m) + k_{vac,m}^2 \eta_m \boldsymbol{\varepsilon}_m] e^{-im\omega_1 t} + \quad (2.20)$$

$$+ [\nabla^2 \boldsymbol{\varepsilon}_m^* - \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_m^*) + k_{vac,m}^2 \eta_m \boldsymbol{\varepsilon}_m^*] e^{im\omega_1 t} \} = 0, \quad (2.21)$$

onde

$$k_{vac,m}^2 = m^2 \left(\frac{\omega_1}{c} \right)^2, \quad (2.22)$$

$$\eta_m = \mathbb{I} + \chi_m^{(1)}, \quad (2.23)$$

¹Só analisamos meios que obedecem esse acoplamento.

que são, respectivamente, o vetor de onda de frequência m no vácuo e um tensor que gera os índices de refração ao quadrado².

Aplicando a relação de ortogonalidade da série de Fourier [Arfken, e outros] e considerando apenas os processos com frequências não nulas ($\omega_m \neq 0$), finalmente encontramos

$$\nabla^2 \boldsymbol{\epsilon}_s - \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon}_s) + k_{vac,s}^2 \eta_s \boldsymbol{\epsilon}_s = 0, \quad (2.24)$$

que servirá como ponto de partida para a seção seguinte, onde descreveremos a aproximação paraxial.

2.1 Aproximação Paraxial

Lembrando que os coeficientes $\boldsymbol{\epsilon}_s(\mathbf{r})$ carregam a informação da parte espacial da onda, defini-lo como

$$\boldsymbol{\epsilon}_s = (\mathbf{F}_{\mathbf{T}_s} + F_{z_s} \hat{z}) e^{ik_s z}, \quad (2.25)$$

servirá de Ansatz para a Aproximação Paraxial. O fator $e^{ik_s z}$ indica que a solução almejada se propaga na direção z . Dessa maneira, $\mathbf{F}_{\mathbf{T}_s}$ representa a amplitude transversa a propagação, que é associada a dispersão do feixe, e F_{z_s} representa a parte longitudinal do feixe, que é ligado ao já conhecido conhecido Walk-off []. Outra consideração feita aqui é que o material possui η_s (Eq. (2.23)) diagonal, com índices de refração iguais nas três direções, ou seja,

$$(\chi_m^{(1)})_{ij} = (\chi_m^{(1)})_{ii} \delta_{ij}, \quad (2.26)$$

²Também conhecido como permissividade relativa.

que leva em

$$\eta_s = n_s^2 \mathbb{I}. \quad (2.27)$$

Assim, o vetor de onda k_s , na Eq. (2.25), que é o vetor de onda dentro desse meio material escolhido, será

$$k_s^2 = n_s^2 k_{vac,s}^2. \quad (2.28)$$

Substituindo Eq. (2.27) e Eq. (2.28) em Eq. (2.24) obtemos

$$\nabla^2 \boldsymbol{\varepsilon}_s - \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s) + k_s^2 \boldsymbol{\varepsilon}_s = 0. \quad (2.29)$$

Aplicando o Ansatz da Eq. (2.25), e após algumas manipulações, chegamos nas equações

$$\begin{aligned} \nabla_T \left(\nabla_T \cdot \mathbf{F}_{\mathbf{T}s} + \frac{\partial F_{zs}}{\partial z} + ik_s F_{zs} \right) - \\ - \nabla_T^2 \mathbf{F}_{\mathbf{T}s} - \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{\mathbf{T}s}}{\partial z^2} - 2ik_s \frac{\partial \mathbf{F}_{\mathbf{T}s}}{\partial z} = 0, \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (\nabla_T \cdot \mathbf{F}_{\mathbf{T}s}) + ik_s (\nabla_T \cdot \mathbf{F}_{\mathbf{T}s}) - \nabla_T^2 F_{zs} - k_s^2 F_{zs} = 0. \quad (2.31)$$

O próximo passo na busca pela aproximação paraxial será utilizar feixes com distribuição gaussiana nas direções transversas a propagação. Assim este feixe terá largura transversa característica, também conhecido como cintura do feixe, descrita por " ϖ_s ", que é associado a divergência deste feixe. O comprimento característico ao longo da direção de propagação, também conhecido como comprimento de Reileigh, será dado por " z_R ".

De posse desses comprimentos característicos é possível reescalar as dimen-

sões (x, y, z) como

$$\begin{aligned} x &= \varpi_s X_s, \\ y &= \varpi_s Y_s, \\ z &= z_R Z, \end{aligned} \tag{2.32}$$

com a cintura dada por

$$\varpi_s = \sqrt{\frac{2z_R}{k_s}}. \tag{2.33}$$

Considere agora que este feixe diverge muito pouco a medida que se propaga, ou seja, $\varpi_s \ll z_R$, que é uma consideração central na aproximação paraxial. Para inserir essa informação no problema, Eq. (2.30) e Eq. (2.31), define-se o parâmetro

$$f_s = \frac{\varpi_s}{z_R} = \frac{2}{k_s \varpi_s}. \tag{2.34}$$

Assim, aplicando estas relações em Eq. (2.30) e Eq. (2.31), encontramos

$$\begin{aligned} \nabla_{\bar{T}} \left(f_s \nabla_{\bar{T}} \cdot \mathbf{F}_{\bar{T}s} + f_s^2 \frac{\partial F_{\bar{z}s}}{\partial \bar{z}} + \imath 2 F_{\bar{z}s} \right) - \\ - f_s \nabla_{\bar{T}}^2 \mathbf{F}_{\bar{T}s} - f_s^3 \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{\bar{T}s}}{\partial \bar{z}^2} - \imath 4 f_s \frac{\partial \mathbf{F}_{\bar{T}s}}{\partial \bar{z}} = 0, \end{aligned} \tag{2.35}$$

$$f_s^3 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\nabla_{\bar{T}} \cdot \mathbf{F}_{\bar{T}s}) + \imath 2 f_s (\nabla_{\bar{T}} \cdot \mathbf{F}_{\bar{T}s}) - f_s^2 \nabla_{\bar{T}}^2 F_{\bar{z}s} - 4 F_{\bar{z}s} = 0. \tag{2.36}$$

Mesmo após todas as manipulações feitas até aqui, o sistema de equações acima não é nada simples de se obter uma solução. Então para dar seguimento faremos uma expansão das componentes do campo elétrico em potências de f_s ,

isto é,

$$\mathbf{F}_{\bar{\mathbf{T}}_s} = \sum_i \mathbf{F}_{\bar{\mathbf{T}}_s}^{(i)} f_s^i, \quad (2.37)$$

$$F_{\bar{z}_s} = \sum_i F_{\bar{z}_s}^{(i)} f_s^i, \quad (2.38)$$

de modo que este trabalho vai perseguir soluções de ordem zero ($\mathbf{F}_{\bar{\mathbf{T}}_s}^{(0)}$ e $F_{\bar{z}_s}^{(0)}$) nessa expansão, novamente pelo feixe divergir muito pouco a medida que o feixe se propaga.

Sendo assim, substituindo as Eq. (2.37) e Eq. (2.38) nas Eq. (2.35) e Eq. (2.36) obtemos

$$\sum_i \left\{ \nabla_{\bar{\mathbf{T}}} \left(f_s^{i+1} \nabla_{\bar{\mathbf{T}}} \cdot \mathbf{F}_{\bar{\mathbf{T}}_s}^i + f_s^{i+2} \frac{\partial F_{\bar{z}_s}^i}{\partial \bar{z}} + i 2 f_s^i F_{\bar{z}_s}^i \right) - \right. \\ \left. - f_s^{i+1} \nabla_{\bar{\mathbf{T}}}^2 \mathbf{F}_{\bar{\mathbf{T}}_s}^i - f_s^{i+3} \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{\bar{\mathbf{T}}_s}^i}{\partial \bar{z}^2} - i 4 f_s^{i+1} \frac{\partial \mathbf{F}_{\bar{\mathbf{T}}_s}^i}{\partial \bar{z}} \right\} = 0, \quad (2.39)$$

$$\sum_i \left\{ f_s^{i+3} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\nabla_{\bar{\mathbf{T}}} \cdot \mathbf{F}_{\bar{\mathbf{T}}_s}^i) + i 2 f_s^{i+1} (\nabla_{\bar{\mathbf{T}}} \cdot \mathbf{F}_{\bar{\mathbf{T}}_s}^i) - f_s^{i+2} \nabla_{\bar{\mathbf{T}}}^2 F_{\bar{z}_s}^i - 4 f_s^i F_{\bar{z}_s}^i \right\} = 0. \quad (2.40)$$

, a solução requerida passa pelas etapas:

- substitua $f_s = 0$ na Eq. (2.40) (substituir na Eq. (2.39) não traz nenhuma informação adicional), e encontrará

$$F_{\bar{z}_s}^{(0)} = 0 \quad (2.41)$$

- depois derivar uma vez as Eq. (2.39) e Eq. (2.40) com relação a f_s e faça $f_s = 0$.

Resolvendo o sistema resultante encontrará

$$F_{\bar{z}_s}^{(1)} = \frac{i}{2} \left(\nabla_{\bar{\mathbf{T}}} \cdot \mathbf{F}_{\bar{\mathbf{T}}_s}^{(0)} \right) \quad (2.42)$$

$$\nabla_{\bar{T}}^2 \mathbf{F}_{\bar{\mathbf{T}}_s}^{(0)} + i4 \frac{\partial \mathbf{F}_{\bar{\mathbf{T}}_s}^{(0)}}{\partial \bar{z}} = 0 \quad (2.43)$$

Como já dito antes, buscamos solução de ordem zero no parâmetro f_s , por essa ser uma boa aproximação para os feixes de interesse - feixes que divergem muito pouco a medida que se propaga ($\varpi_s \ll z_R$) - ou seja, vamos desprezar todos os termos com ordens maiores. Por fim, encontramos a solução:

$$F_{\bar{z}_s}^{(0)} = 0, \quad (2.44)$$

$$\nabla_{\bar{T}}^2 \mathbf{F}_{\bar{\mathbf{T}}_s}^{(0)} + i4 \frac{\partial \mathbf{F}_{\bar{\mathbf{T}}_s}^{(0)}}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (2.45)$$

Antes de analisarmos essas duas equações vamos voltar das dimensões escaladas para as dimensões originais³, que por fim nos levará a

$$F_{z_s}^{(0)} = 0, \quad (2.46)$$

$$\nabla_T^2 \mathbf{F}_{\mathbf{T}_s}^{(0)} + i2k_s \frac{\partial \mathbf{F}_{\mathbf{T}_s}^{(0)}}{\partial z} = 0. \quad (2.47)$$

A Eq. (2.46) diz que não teremos o termo que gera polarização na direção de propagação, ou seja, não teremos o efeito de Walk-off, como mencionado anteriormente. Então teremos apenas polarizações perpendiculares a direção de propagação. Isso simplifica a descrição do problema, pois podemos escolher como base do sistema de coordenadas $(\hat{H}, \hat{V}, \hat{z})$, onde vamos chamar \hat{H} de polarização horizontal, \hat{V} de polarização vertical e \hat{z} de direção de propagação.

E, finalmente, a Eq. (2.47) é a famosa Equação Paraxial, que figura em várias referências, como [?]. Ele servirá como base para toda a tese desenvolvida a seguir.

É interessante mencionar que a Equação Paraxial apresentada aqui foi ob-

³ $(X_s, Y_s, Z) \rightarrow (x, y, z)$.

tida de maneira um pouco diferente dos trabalhos [?]. Escolhemos essa abordagem porque assim achamos menos complicado de trabalhar problemas em que a relação entre a divergência e a propagação do feixe não seja tão grande assim ($\varpi_s \approx z_R$), podendo considerar efeito de Walk-off ou até mesmo feixes mais complicados.

2.2 Ótica não-linear

Aqui faremos uma abordagem sintética dos efeitos óticos produzidos em meios com não-linearidade de segunda ordem, dando maior atenção para a Geração de Segundo Harmônico em cristais tipo-I, que é a aplicação não-linear de interesse dessa tese.

A densidade de polarização não-linear, de segunda ordem, tem como expressão geral

$$\mathbf{P}_{NL} = \epsilon_0 \chi^{(2)} \mathbf{E}\mathbf{E}. \quad (2.48)$$

Essa equação nos diz que o meio acopla todas as combinações de polarização (\hat{H} e \hat{V}) do campo elétrico total com as polarizações dele mesmo, através do tensor de acoplamento não linear $\chi^{(2)}$, assim polarizando as cargas ligadas do meio em questão.

Os meios não-lineares de interesse serão cristais óticos com $\chi^{(2)}$ acoplando apenas três das possíveis frequências que o campo elétrico total pode ter, que são ω_0 , ω_1 e ω_2 , de modo que estas obedecem a relação de conservação de energia⁴

$$\omega_2 = \omega_0 + \omega_1. \quad (2.49)$$

Daqui por diante, vamos nos referir ao primeiro harmônico como sendo os

⁴ $\hbar\omega_2 = \hbar\omega_0 + \hbar\omega_1$.

campos, definidos nas Eq. (2.15) e Eq. (2.16)⁵, relacionados às frequências ω_0 e ω_1 , que são as menores desse processo, e ao segundo harmônico como sendo os campos relacionados às frequências ω_2 , que é a mais alta.

Podemos entender a conservação de energia acima como um processo onde o meio absorve dois fótons do primeiro harmônico e emite um do segundo harmônico, conhecido como conversão paramétrica ascendente (ou Geração de Segundo Harmônico, que é o nosso interesse). Essa conservação de energia também descreve o processo reverso, onde o meio absorve um fóton do segundo harmônico e emite dois do primeiro harmônico, conhecido como conversão paramétrica descendente.

Os cristais que escolhemos estudar são os chamados tipo-I. Esse cristal tem como finalidade acoplar um campo do primeiro harmônico de polarização \hat{H} , com outro campo do primeiro harmônico também de polarização \hat{H} , com o campo do segundo harmônico de polarização \hat{V} , sendo descrito matematicamente pelo sistema^{6 7}

$$p_V(\omega_2) = \chi_{VHH}^{(2)}(\omega_2, \omega_0, \omega_1)\varepsilon_H(\omega_0)\varepsilon_H(\omega_1), \quad (2.50)$$

$$p_H(\omega_0) = \chi_{HVV}^{(2)}(\omega_0, \omega_2, \omega_1)\varepsilon_V(\omega_2)\varepsilon_H^*(\omega_1), \quad (2.51)$$

$$p_H(\omega_1) = \chi_{HHV}^{(2)}(\omega_1, \omega_0, \omega_2)\varepsilon_V(\omega_2)\varepsilon_H^*(\omega_0), \quad (2.52)$$

onde esses acoplamentos possuem iguais pesos, que, para facilitar um pouco a notação, chamaremos apenas de χ , isto é,

$$\chi_{VHH}^{(2)}(\omega_2, \omega_0, \omega_1) = \chi_{HVV}^{(2)}(\omega_0, \omega_2, \omega_1) = \chi_{HHV}^{(2)}(\omega_1, \omega_0, \omega_2) = \chi. \quad (2.53)$$

Essa é uma visão geral do que vamos precisar sobre efeitos não-lineares, de se-

⁵Lembrando: $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_m (\boldsymbol{\varepsilon}_m(\mathbf{r})e^{-i\omega_m t} + \boldsymbol{\varepsilon}_m^*(\mathbf{r})e^{i\omega_m t})$

⁶Trocamos ε_m por $\varepsilon(\omega_m)$ para ficar mais evidente na equação o acoplamento descrito.

⁷Definimos aqui $\mathbf{P}_{NL} = \sum_m (\mathbf{p}_m e^{-i\omega_m t} + \mathbf{p}_m^* e^{i\omega_m t})$, onde $\mathbf{p}_m = \mathbf{p}(\omega_m)$.

gunda ordem. Para inserir essas informações no contexto da Ótica Paraxial, basta substituir o termo não-linear na Eq. (2.13) e fazer as manipulações necessárias, utilizando os mesmos mecanismos da Aproximação Paraxial, até enfim encontrar

$$\nabla^2 F_0^H + i2k_0 \frac{\partial F_0^H}{\partial z} = -\frac{\chi\omega^2}{c^2} F_2^V F_1^{V*}, \quad (2.54)$$

$$\nabla^2 F_1^V + i2k_1 \frac{\partial F_1^V}{\partial z} = -\frac{\chi\omega^2}{c^2} F_2^V F_0^{H*}, \quad (2.55)$$

$$\nabla^2 F_2^V + i2k_2 \frac{\partial F_2^V}{\partial z} = -\frac{\chi(2\omega)^2}{c^2} F_0^H F_1^V. \quad (2.56)$$

Chamaremos estas de Equações dinâmicas, que são Equações Paraxiais em cristais com não-linearidades de segunda ordem.

2.3 Equações dinâmicas multimodo na Geração de Segundo Harmônico

As Equações Dinâmicas irão descrever a interação dos três campos no cristal não-linear ($\chi^{(2)}$) tipo-I no processo de GSH. Escolhemos o problema em que os dois feixes do primeiro harmônico possuem a mesma frequência ($\omega_0 = \omega_1 = \omega$), e, conseqüentemente, o segundo harmônico terá frequência 2ω . Assim, as Equações Dinâmicas (Eq. (2.54), Eq. (2.55) e Eq. (2.56)) se tornarão

$$\nabla^2 F_\omega^H + i2k_\omega \frac{\partial F_\omega^H}{\partial z} = -\frac{\chi\omega^2}{c^2} F_{2\omega}^V F_\omega^{V*}, \quad (2.57)$$

$$\nabla^2 F_\omega^V + i2k_\omega \frac{\partial F_\omega^V}{\partial z} = -\frac{\chi\omega^2}{c^2} F_{2\omega}^V F_\omega^{H*}, \quad (2.58)$$

$$\nabla^2 F_{2\omega}^V + i2k_{2\omega} \frac{\partial F_{2\omega}^V}{\partial z} = -\frac{\chi(2\omega)^2}{c^2} F_\omega^H F_\omega^V. \quad (2.59)$$

Como as Equações Dinâmicas são obtidas a partir da Aproximação Paraxial, vamos expandir as equações acima na base de Laguerre-Gauss - que é solução da

Equação Paraxial⁸ em coordenadas polares - resultando em:

$$F_{\omega}^H(\mathbf{r}, z) = \sum_{p,l} u_{pl}^{\omega}(\mathbf{r}, z) A_{pl}^H(z), \quad (2.60)$$

$$F_{\omega}^V(\mathbf{r}, z) = \sum_{p,l} u_{pl}^{\omega}(\mathbf{r}, z) A_{pl}^V(z), \quad (2.61)$$

$$F_{2\omega}^V(\mathbf{r}, z) = \sum_{p,l} u_{pl}^{2\omega}(\mathbf{r}, z) B_{pl}(z), \quad (2.62)$$

onde⁹

$$u_{pl}^i(\mathbf{r}, z) = \sqrt{\frac{2p!}{\pi \varpi_i^2(z) (p+|l|)!}} \left(\sqrt{2} \frac{r}{\varpi_i(z)} \right)^{|l|} L_p^{|l|} \left(\frac{2r^2}{\varpi_i^2(z)} \right) e^{-\frac{r^2}{\varpi_i^2(z)}} e^{i \left(\frac{r^2}{\varpi_i^2(z)} \frac{z}{z_R} - (2p+|l|+1) \tan^{-1} \left(\frac{z}{z_R} \right) + l\theta \right)}, \quad (2.63)$$

sendo $L_a^b(x)$ os polinômios de Laguerre associados e $\varpi_i(z)$ a cintura do feixe, definida como

$$\varpi_i(z) = \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2} \varpi_i, \quad (2.64)$$

$$\varpi_i = \sqrt{\frac{2z_R}{k_i}}. \quad (2.65)$$

Assim, substituindo as expansões em modos de Laguerre nas Equações Dinâ-

⁸A Equação Paraxial está definida na Eq. (2.47), mas aqui vamos reescrevê-la apenas trocando $\mathbf{F}_{\mathbf{T}_s}^{(0)}$ por \mathbf{u}_{pl}^{ω} , resultando em $\nabla_T^2 \mathbf{u}_{pl}^{\omega} + i2k_{\omega} \frac{\partial \mathbf{u}_{pl}^{\omega}}{\partial z} = 0$.

⁹Note, na Eq. (2.63), que u_{pl}^{ω} não depende da polarização, por isso esses fatores já estão sem polarização nas Eq. (2.60), Eq. (2.61) e Eq. (2.62).

micas, e, após algumas manipulações, encontramos:

$$\frac{dA_{pl}^H}{dz}(z) = \imath g_\omega \sum_{p'l'} \sum_{p''l''} \Lambda_{p'p''}^{l'l''}(z) B_{p'l'}(z) A_{p''l''}^V(z)^* e^{\imath \Delta k z}, \quad (2.66)$$

$$\frac{dA_{pl}^V}{dz}(z) = \imath g_\omega \sum_{p'l'} \sum_{p''l''} \Lambda_{p'p''}^{l'l''}(z) B_{p'l'}(z) A_{p''l''}^H(z)^* e^{\imath \Delta k z}, \quad (2.67)$$

$$\frac{dB_{pl}}{dz}(z) = \imath g_{2\omega} \sum_{p'l'} \sum_{p''l''} \Lambda_{pp'p''}^{l'l''*}(z) A_{p'l'}^H(z) A_{p''l''}^V(z) e^{-\imath \Delta k z}, \quad (2.68)$$

onde

$$\Delta k = k_3 - (k_2 + k_1) = k_{2\omega} - 2k_\omega, \quad (2.69)$$

$$g_\omega = \frac{\chi \omega^2}{2k_\omega c^2} R_{000}^{000}, \quad (2.70)$$

$$\Lambda_{pp'p''}^{l'l''} = \frac{R_{pp'p''}^{l'l''}}{R_{000}^{000}}, \quad (2.71)$$

$$(2.72)$$

são, respectivamente, o descasamento de fase, constante de acoplamento não-linear (responsável pelo acoplamento não-linear entre diferentes frequências e diferentes polarizações) e a constante de recobrimento (normalizada)¹⁰, sendo

$$R_{pp'p''}^{l'l''} = \int u_{pl}^{2\omega} u_{p'l'}^\omega u_{p''l''}^\omega d^2\mathbf{r}. \quad (2.73)$$

Considerando que o comprimento de Rayleigh (z_R) é muito maior que a dimensão z do cristal. Isso nos levará a

$$\varpi_i(z) = \varpi_i \quad (2.74)$$

¹⁰As constantes de recobrimento serão melhor exploradas no Capítulo 5.

$$u_{pl}^i(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{2p!}{\pi \varpi_i^2 (p + |l|)!}} \left(\sqrt{2} \frac{r}{\varpi_i} \right)^{|l|} L_p^{|l|} \left(\frac{2r^2}{\varpi_i^2} \right) e^{-\frac{r^2}{\varpi_i^2}} e^{il\theta}, \quad (2.75)$$

que implica em

$$\Lambda_{pp'p''}^{ll'l''*} = \Lambda_{pp'p''}^{ll'l''}, \quad (2.76)$$

e, conseqüentemente, em

$$g_{\omega}^* = g_{\omega}. \quad (2.77)$$

Também vamos considerar que há casamento de fase na medida proposta para o cristal de interesse, isto é:

$$\Delta k = 0, \quad (2.78)$$

o que leva a

$$k_{2\omega} = 2k_{\omega}. \quad (2.79)$$

Esse casamento de fase substituído na Eq. (2.70) leva a

$$g_{2\omega} = 2g_{\omega}. \quad (2.80)$$

Por fim, substituindo as relações encontradas em Eq. (2.76), Eq. (2.78) e Eq. (2.80) nas Eq. (2.66), Eq. (2.67) e Eq. (2.68) as equações dinâmicas se tornam

$$\frac{dA_{p'l'}^H}{dz} = i g_{\omega} \sum_{pl} \sum_{p''l''} \Lambda_{pp'p''}^{ll'l''} B_{pl} A_{p''l''}^V{}^* \quad (2.81)$$

$$\frac{dA_{p''l''}^V}{dz} = i g_{\omega} \sum_{pl} \sum_{p'l'} \Lambda_{pp'p''}^{ll'l''} B_{pl} A_{p'l'}^H{}^* \quad (2.82)$$

$$\frac{dB_{pl}}{dz} = i 2g_{\omega} \sum_{p'l'} \sum_{p''l''} \Lambda_{pp'p''}^{ll'l''} A_{p'l'}^H A_{p''l''}^V \quad (2.83)$$

2.3.1 Representação de intensidade e fase e relações de Manley-Rowe multimodo

A solução das equações dinâmicas (Eq. (2.81), Eq. (2.82) e Eq. (2.83)) não é uma tarefa nada trivial, pois estão envolvidos nesse processo infinitos campos ($A_{p'l'}^H$, $A_{p''l''}^V$ e B_{pl}), que por sua vez possuem infinitas possibilidades de acoplamento ($\Lambda_{pp'p''}^{ll'l''}$). A forma que encontramos de obter mais informações sobre este problema, inclusive encontrando algumas soluções analíticas (descritas no capítulo 6) foi reescrever os campos como uma amplitude complexa (que chamamos de intensidade deste campo) e uma fase, isto é:

$$A_{pl}^i = \sqrt{I_{pl}^i} e^{i\phi_{pl}^i}, \quad (2.84)$$

$$B_{pl} = \sqrt{J_{pl}} e^{i\psi_{pl}}. \quad (2.85)$$

Aplicando as equações acima nas Eq. (2.81), Eq. (2.82) e Eq. (2.83):

$$\frac{1}{2\sqrt{I_{p'l'}^H}} \frac{dI_{p'l'}^H}{dz} + i\sqrt{I_{p'l'}^H} \frac{d\phi_{p'l'}^H}{dz} = ig_\omega \sum_{pl} \sum_{p''l''} \Lambda_{pp'p''}^{ll'l''} \sqrt{J_{pl} I_{p''l''}^V} e^{-i(\phi_{p'l'}^H + \phi_{p''l''}^V - \psi_{pl})}, \quad (2.86)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{I_{p''l''}^V}} \frac{dI_{p''l''}^V}{dz} + i\sqrt{I_{p''l''}^V} \frac{d\phi_{p''l''}^V}{dz} = ig_\omega \sum_{pl} \sum_{p'l'} \Lambda_{pp'p''}^{ll'l''} \sqrt{J_{pl} I_{p'l'}^H} e^{-i(\phi_{p'l'}^H + \phi_{p''l''}^V - \psi_{pl})}, \quad (2.87)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{J_{pl}}} \frac{dJ_{pl}}{dz} + i\sqrt{J_{pl}} \frac{d\psi_{pl}}{dz} = i2g_\omega \sum_{p'l'} \sum_{p''l''} \Lambda_{pp'p''}^{ll'l''} \sqrt{I_{p'l'}^H I_{p''l''}^V} e^{i(\phi_{p'l'}^H + \phi_{p''l''}^V - \psi_{pl})}. \quad (2.88)$$

Separando estas equações em parte real e parte imaginária, e após alguns passos de simplificação, chegamos às equações dinâmicas na representação de intensidade e fase, que são:

$$\frac{dI_{p'l'}^H}{dz} = 2g_\omega \sum_{pl} \sum_{p''l''} \Lambda_{pp'p''}^{ll'l''} \sqrt{J_{pl} I_{p'l'}^H I_{p''l''}^V} \text{sen} (\phi_{p'l'}^H + \phi_{p''l''}^V - \psi_{pl}), \quad (2.89)$$

$$I_{p'l'}^H \frac{d\phi_{p'l'}^H}{dz} = g_\omega \sum_{pl} \sum_{p''l''} \Lambda_{pp'p''}^{ll'l''} \sqrt{J_{pl} I_{p'l'}^H I_{p''l''}^V} \cos (\phi_{p'l'}^H + \phi_{p''l''}^V - \psi_{pl}), \quad (2.90)$$

$$\frac{dI_{p''l''}^V}{dz} = 2g_\omega \sum_{pl} \sum_{p'l'} \Lambda_{pp'p''}^{ll'l''} \sqrt{J_{pl} I_{p'l'}^H I_{p''l''}^V} \text{sen} (\phi_{p'l'}^H + \phi_{p''l''}^V - \psi_{pl}), \quad (2.91)$$

$$I_{p''l''}^V \frac{d\phi_{p''l''}^V}{dz} = g_\omega \sum_{pl} \sum_{p'l'} \Lambda_{pp'p''}^{ll'l''} \sqrt{J_{pl} I_{p'l'}^H I_{p''l''}^V} \cos (\phi_{p'l'}^H + \phi_{p''l''}^V - \psi_{pl}), \quad (2.92)$$

$$\frac{dJ_{pl}}{dz} = -4g_\omega \sum_{p'l'} \sum_{p''l''} \Lambda_{pp'p''}^{ll'l''} \sqrt{J_{pl} I_{p'l'}^H I_{p''l''}^V} \text{sen} (\phi_{p'l'}^H + \phi_{p''l''}^V - \psi_{pl}), \quad (2.93)$$

$$J_{pl} \frac{d\psi_{pl}}{dz} = 2g_\omega \sum_{p'l'} \sum_{p''l''} \Lambda_{pp'p''}^{ll'l''} \sqrt{J_{pl} I_{p'l'}^H I_{p''l''}^V} \cos (\phi_{p'l'}^H + \phi_{p''l''}^V - \psi_{pl}). \quad (2.94)$$

Agora que chegamos às equações dinâmicas multimodos, podemos extrair destas as relações de Manley-Rowe multimodo. Tais relações surgem ao analisarmos as Eq. (2.89), Eq. (2.91) e Eq. (2.93) e observarmos que elas têm fatores em comum. Primeiro é possível notar que as Eq. (2.89), Eq. (2.91) podem ser conectadas por

$$\sum_{p'l'} \frac{dI_{p'l'}^H}{dz} = \sum_{p''l''} \frac{dI_{p''l''}^V}{dz}, \quad (2.95)$$

que, por sua vez, recai na lei de conservação entre as intensidades do primeiro harmônico

$$\frac{d}{dz} \left(\sum_{p''l''} I_{p''l''}^V - \sum_{p'l'} I_{p'l'}^H \right) = 0. \quad (2.96)$$

Essa lei de conservação nos leva à primeira relação de Manley-Rowe multimodo

$$\sum_{p''l''} I_{p''l''}^V(z) - \sum_{p'l'} I_{p'l'}^H(z) = \sum_{p''l''} I_{p''l''}^V(0) - \sum_{p'l'} I_{p'l'}^H(0). \quad (2.97)$$

Para obter a segunda relação de Manley-Rowe multimodo basta notar que as Eq. (2.89) e Eq. (2.93) se correspondem por

$$\sum_{pl} \frac{dJ_{pl}}{dz} = -2 \sum_{p'l'} \frac{dI_{p'l'}^H}{dz}, \quad (2.98)$$

correspondendo a lei de conservação

$$\frac{d}{dz} \left(\sum_{pl} J_{pl} + 2 \sum_{p'l'} I_{p'l'}^H \right) = 0. \quad (2.99)$$

Assim chegamos à segunda relação de Manley-Rowe multimodo, descrita por

$$\sum_{pl} J_{pl}(z) + 2 \sum_{p'l'} I_{p'l'}^H(z) = \sum_{pl} J_{pl}(0) + 2 \sum_{p'l'} I_{p'l'}^H(0). \quad (2.100)$$

É importante mencionar que outras leis de conservação podem ser obtidas¹¹,

¹¹A segunda relação de Manley-Rowe multimodo também pode ser escrita na forma mais conhecida, $\sum_{pl} J_{pl}(z) + \sum_{p'l'} I_{p'l'}^H(z) + \sum_{p''l''} I_{p''l''}^V(z) = \sum_{pl} J_{pl}(0) + \sum_{p'l'} I_{p'l'}^H(0) + \sum_{p''l''} I_{p''l''}^V(0)$, que trás uma intuição melhor sobre o problema. Mas escolhemos a Eq. (2.100)

mas as outras todas serão combinação das duas apresentadas aqui.

por ter uma variável a menos, o que facilita a resolução dos resultados do Capítulo 6.

Capítulo 3

Desigualdade de Bell e Emaranhamento

Este capítulo tem como objetivo fazer uma breve revisão sobre desigualdade de Bell e emaranhamento, que são conceitos chave para os resultados do Capítulo 4. Para esse fim, usaremos como referência principal a dissertação "Emaranhamento e Desigualdade de Bell no Modelo XXZ" [17].

O termo emaranhamento surge com Schrödinger, em 1935, ao analisar o que conhecemos hoje como "paradoxo EPR" [14], publicado no mesmo ano. Schrödinger dizia que este era uma "ação fantasmagórica a distância" por exibir uma espécie de correlação com um comportamento não local, o que era algo inconcebível. No entanto, o paradoxo EPR não debate apenas a questão da não-localidade, mas também o que eles chamam de realismo, sendo ambos melhor discutidos adiante.

Einstein, Podolski e Rosen [14] assumiram que as interações na Mecânica Quântica, assim como na Mecânica Clássica, seriam locais e propuseram duas condições que acreditavam que toda teoria completa devesse satisfazer, a conhecer:

- i) cada elemento de realidade deve estar na teoria;
- ii) se, sem perturbar o sistema, é possível prever com certeza o valor de uma grandeza física, então existe um elemento de realidade associado a essa grandeza.

Então surgem duas hipóteses, conhecidas como realismo e localidade, que ao serem violadas pelo estado escolhido na ocasião os levou a concluir que

- i) a descrição de realidade dada pela função de onda na Mecânica Quântica não é completa; ou
- ii) os observáveis das partes em questão não podem ter realidades simultâneas.

Hoje, já sabendo da resposta, podemos dizer que lhes faltou questionar sobre o fato da mecânica quântica ser local, como sugeriu Schrödinger.

Essa questão ficou anos sendo debatida sem chegar a um consenso, até que, em 1964, John S. Bell [15] conseguiu pensar numa forma de solucionar esse problema, desenvolvendo o que conhecemos como "desigualdades de Bell". Seu experimento mental propõe justamente testar as hipóteses de localidade e realismo, comprovando que a Mecânica Clássica é realista e local e mostrando que a Mecânica Quântica pode ter estados não-locais ou não-realistas, que são os estados emaranhados.

3.1 Desigualdade de Bell

Após EPR questionar a completeza da Mecânica Quântica e D. Bohm desenvolver a ideia de uma teoria de variáveis ocultas¹ para completá-la [20, 21 da

¹A ideia por trás das variáveis ocultas é argumentar que a Mecânica Quântica parece não ser completa porque não estamos considerando algumas variáveis que estariam ocultas (daí o nome) nas teorias. Assim, graças a essas variáveis, os elementos de realidades poderiam ser representados de forma determinística nas teorias.

minha dissertação], foi a vez de J. S. Bell [15] dar a sua contribuição. Bell criou uma desigualdade que toda teoria local e realista deve obedecer, testada experimentalmente por Aspect [22]. Posteriormente, Clauser, Horne, Shimony e Holt (CHSH) [16] apresentaram sua desigualdade baseada na proposta por Bell, sendo esta utilizada aqui.

As desigualdades de Bell se baseiam em duas hipóteses que são bem intuitivas, pelo menos classicamente, e que estavam sendo amplamente discutidas, que seriam: dado um sistema composto existem elementos de realidade atribuídos a cada observável (variáveis ocultas) e os subsistemas interagem de forma local. Sendo assim a desigualdade de Bell, descrita na versão CHSH, se apresenta da seguinte maneira:

Uma fonte envia uma partícula para Alice e outra para Bob, estando ambos suficientemente distantes um do outro e da fonte para eliminar qualquer tipo de interação (local). Assim, para testar se esse sistema exibirá localidade, Alice utilizará um aparato capaz de realizar uma operação X e obter o resultado a , e Bob usará um aparato com as mesmas propriedades onde realizará a operação Y com resultado b , onde vamos supor que todo esse sistema está correlacionado e que essa correlação vem de uma variável oculta que gera estratégias que sustentam essa correlação.

Outra informação importante aqui é que as quantidades X , Y , a e b são dicotômicas, isto é, $\{0, 1\}$. Isto pode representar, por exemplo, o problema de uma fonte emitindo um par de elétrons de spin-1/2, sendo um enviado para Alice e outro para Bob [?]. Alice escolhe duas orientações X para realizar a medida a , que pode ser $+\hbar/2$ ou $-\hbar/2$ (que vamos representar simplesmente por -1 ou $+1$ a seguir), e Bob faz o mesmo procedimento, escolhendo outras duas orientações Y para realizar a medida b , também $+\hbar/2$ ou $-\hbar/2$.

Seja $P(a|X\lambda)$ a probabilidade de Alice obter o resultado a ao realizar a ope-

ração X dado a estratégia λ e $P(b|Y\lambda)$ a probabilidade de Bob obter o resultado b ao realizar a operação Y dado a mesma estratégia λ . Como eles estão suficientemente distantes um do outro, operações feitas por Alice em sua partícula não devem afetar a partícula de Bob, e vice-versa, gerando probabilidades independentes, que são fatoráveis. Assim, se cada estratégia λ for utilizada com peso $P(\lambda)^2$, ao somar sobre todas as estratégias possíveis teríamos que a probabilidade conjunta de Alice e Bob obterem as medidas a e b ao realizarem as operações X e Y seria

$$P_L(ab|XY) = \sum_{\lambda} P(\lambda)P(a|X\lambda)P(b|Y\lambda), \quad (3.1)$$

que são probabilidades locais e que obedecem a uma teoria de variável oculta. Ou seja, ao dizermos que operações feitas por Alice não afetam Bob estamos assumindo que esse sistema é local.

Portanto, a desigualdade CHSH será uma combinação das correlações, descritas na Eq. (3.1), limitadas por uma constante a determinar, que será o limite (k_L) que toda teoria local e realista (variáveis ocultas) deve obedecer. Ou seja,

$$\sum_{abXY} C_{ab}^{XY} P_L(ab|XY) \leq k_L, \quad (3.2)$$

onde

$$C_{ab}^{XY}(CHSH) = (-1)^{a+b+XY}. \quad (3.3)$$

Substituindo a Eq. (3.3) na Eq. (3.15) encontramos

$$\sum_{abXY} (-1)^{a+b+XY} P_L(ab|XY) \leq k_L(CHSH). \quad (3.4)$$

² $\sum_{\lambda} P(\lambda) = 1$.

onde vamos chamar o lado esquerdo de

$$S_{CHSH} = \sum_{abXY} (-1)^{a+b+XY} P_L(ab|XY). \quad (3.5)$$

Desenvolvendo um pouco mais essa última equação, chegamos a

$$S_{CHSH} = \sum_{XY} (-1)^{XY} \{ [P_L(00|XY) + P_L(11|XY)] - [P_L(01|XY) + P_L(10|XY)] \}. \quad (3.6)$$

Definindo a quantidade entre chaves acima como

$$M(XY) = [P_L(00|XY) + P_L(11|XY)] - [P_L(01|XY) + P_L(10|XY)], \quad (3.7)$$

temos que

$$S_{CHSH} = M(00) + M(01) + M(10) - M(11). \quad (3.8)$$

Enfim chegamos na desigualdade CHSH, mas ainda falta encontrar o limite local $k_L(CHSH)$ e interpretá-la. Para isso vamos voltar na definição de $M(XY)$ e desenvolver melhor essa quantidade. Substituindo a Eq. (3.1) na Eq. (3.7)

$$\begin{aligned} M(XY) &= \sum_{\lambda} P(\lambda) \{ [P_L(0|X\lambda)P_L(0|Y\lambda) + P_L(1|X\lambda)P_L(1|Y\lambda)] \\ &\quad - [P_L(0|X\lambda)P_L(1|Y\lambda) + P_L(1|X\lambda)P_L(0|Y\lambda)] \}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

que pode ser escrito como

$$M(XY) = \sum_{\lambda} P(\lambda) A(X\lambda) B(Y\lambda), \quad (3.10)$$

com

$$A(X\lambda) = P(0|X\lambda) - P(1|X\lambda), \quad (3.11)$$

$$B(Y\lambda) = P(0|Y\lambda) - P(1|Y\lambda). \quad (3.12)$$

Podemos determinar os valores de $A(X\lambda)$ e $B(Y\lambda)$ voltando na definição de variáveis ocultas - variáveis ocultas surgem para completar a teoria quântica, que é uma teoria probabilística, tornando-a uma teoria determinística - Dessa forma, a variável oculta vai deixar predeterminado que uma medida X de Alice gera o resultado $a = 0$ com $P(0|X\lambda) = 1$ ($P(1|X\lambda) = 0$), ou gera $a = 1$ com $P(1|X\lambda) = 1$ ($P(0|X\lambda) = 0$), e de forma análoga para Bob. Com isso as quantidades $A(X\lambda)$ e $B(Y\lambda)$ devem ser, necessariamente,

$$A(X\lambda) = \pm 1, \quad (3.13)$$

$$B(Y\lambda) = \pm 1. \quad (3.14)$$

Substituindo estas em Eq. (3.15):

$$S_{CHSH} = \sum_{\lambda} P(\lambda) s_{CHSH}(\lambda), \quad (3.15)$$

com

$$s_{CHSH}(\lambda) = A(0\lambda)B(0\lambda) + A(0\lambda)B(1\lambda) + A(1\lambda)B(0\lambda) - A(1\lambda)B(1\lambda), \quad (3.16)$$

que pode ser reescrita como

$$s_{CHSH}(\lambda) = A(0\lambda) [B(0\lambda) + B(1\lambda)] + A(1\lambda) [B(0\lambda) - B(1\lambda)], \quad (3.17)$$

que, por sua vez, tem como solução

$$s_{CHSH}(\lambda) = \pm 2. \quad (3.18)$$

Substituindo esta última na Eq. (3.15) chegamos na resposta final do problema, que é a desigualdade CHSH, dada por

$$-2 \leq S_{CHSH} \leq 2. \quad (3.19)$$

Recapitulando... A desigualdade que encontramos na Eq. (3.19) foi obtida ao considerar há uma correlação no as duas partes devido a uma variável oculta no problema (traduzida como realismo), e que essas correlações são locais. Então toda teoria local e realista envolvendo esses aparatos e essas medidas devem satisfazer essa desigualdade.

3.2 Emaranhamento

O termo emaranhamento ganha cada vez mais força, passando a ser utilizado como um recurso para inúmeras aplicações, como citado anteriormente no capítulo 1. Sua definição foi, inicialmente, pensada para ter uma ligação direta com a desigualdade de Bell, ao passo que todo estado emaranhado, ou não-separável, viola a desigualdade de Bell, conseqüentemente violando realismo ou localidade³, e todo estado não-emaranhado, ou separável, não viola a desigualdade de Bell.

A definição matemática para um estado emaranhado é a seguinte: Um estado puro separável de N partes (ou partículas, ou graus de liberdade) é escrito como

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_N\rangle. \quad (3.20)$$

³Em vários texto se encontra que um estado emaranhado é não-local. Lembro que esta é uma possibilidade, pois este também pode ser não-realista ou não-local e não-realista.

Um estado puro emaranhado é um estado não-separável, ou seja, não pode ser escrito como na equação acima. É importante reiterar que essa definição matemática obedece a relação estreita com a desigualdade de Bell descrita anteriormente.

Porém, ao se aprofundar no estudo dessa incrível ferramenta exclusiva da Mecânica Quântica, que é o emaranhamento, descobriu-se que esta é ainda mais complicada do que se apresentou até agora. Ao pesquisar estados mistos viu-se que a relação entre a desigualdade de Bell e emaranhamento para estes estados não é tão próxima assim, confundindo um pouco o que foi entendido sobre emaranhamento até então.

Estados mistos que violam a desigualdade de Bell são emaranhados, assim como nos estados puros, indicando que estes são não-locais ou não-realistas. Porém estados mistos que não violam a desigualdade de Bell não são necessariamente separáveis.

Este último caso dá início a uma busca para entender o que são esses estados mistos que não violam a desigualdade de Bell. Assim surge o chamado "emaranhamento ligado"⁴ [?], o "emaranhamento oculto"[?], outras desigualdades para tentar encontrar alguma que se comporte para estados mistos da mesma forma que para estados puros [?].

Portanto emaranhamento em estados mistos não pode ser definido diretamente de acordo com as desigualdades de Bell. Assim, a definição aceita hoje é a dada por R. F. Werner [18], que é a seguinte: um estado misto separável, ou classicamente correlacionado, é aquele que pode ser produzido por Operações Locais e

⁴Do inglês Bound Entanglement.

Comunicação Clássica (LOCC⁵)⁶, matematicamente escrito como

$$\rho = \sum_k p_k \rho_A^{(k)} \otimes \rho_B^{(k)} \otimes \dots \otimes \rho_N^{(k)}, \quad (3.21)$$

que é uma combinação convexa dos subsistemas, com $0 \leq p_k \leq 1$ e $\sum_k p_k = 1$. E, semelhante aos estados puros, um estado misto emaranhado é um estado misto não separável.

Assim, esse "gap" entre emaranhamento e violação das desigualdades de Bell "rebaixa" as desigualdades de Bell a testemunha de emaranhamento, que são medidas capazes de identificar, de atestar, de testemunhar (como o próprio nome sugere), a existência de emaranhamento no sistema. Basicamente uma testemunha de emaranhamento nos fornece um limiar (como o 2 na desigualdade CHSH), de modo que todo valor medido acima do limiar garante que o sistema é emaranhado, e abaixo no limiar não se pode afirmar nada.

Dois exemplos de testemunha de emaranhamento em variáveis contínuas, gaussianas, são o critério de Duan [?] e o critério EPR [14]. Já no caso em que os graus de liberdade são discretos temos, por exemplo,

⁵Do inglês Local Operation and Classical Communication

⁶Uma LOCC é uma operação que gera correlação clássica por ser realizada localmente por cada parte enquanto as mesmas se comunicam usando um canal clássico de comunicação.

Capítulo 4

Inseparabilidade Clássica e Quântica

Este capítulo discute conceitos até pouco tempo controversos, mas agora já aceitos pela comunidade científica, que é a inseparabilidade de modos (ou inseparabilidade clássica) e sua relação com o emaranhamento (inseparabilidade quântica). Em nosso trabalho [9], investigamos as propriedades do ruído quântico de polarização em conexão com uma desigualdade de Clauser-Horne-Shimony-Holt (CHSH) baseada em intensidade para separabilidade dos graus de liberdade spin-órbita. A desigualdade foi calculada para diferentes estados quânticos de entrada, com suas correspondentes flutuações. Os papéis desempenhados pela coerência e pela compressão (squeezing) do número de fons fornece um quadro sutil para a caracterização do emaranhamento de estado spin-órbita puro. A inseparabilidade estrutural do modo spin-órbita requer coerência, uma questão inerente tanto à descrição clássica, quanto à quântica. Em ambos os casos isso pode ser testemunhado pela violação dessa desigualdade CHSH baseada em intensidade. No entanto, no domínio quântico, emaranhamento requer tanto coerência, quanto redução da flutuação do número de fons.

4.1 Vórtices de polarização como modo spin-órbita inseparável

Nesta seção, discute-se a noção de emaranhamento de modos e sua sutil distinção do emaranhamento do estado quântico. Ambos invocam o conceito de não-separabilidade de um produto tensorial de um espaço vetorial. No entanto, a estrutura tensorial de um modo eletromagnético não é exclusiva à teoria quântica, ela ocorre também na eletrodinâmica clássica. A polarização do feixe de luz é diretamente relacionada com a natureza vetorial do campo eletromagnético. Ao mesmo tempo, uma estrutura de espaço vetorial pode ser atribuída às funções espaciais usadas para descrever um feixe paraxial. Portanto, a estrutura completa do modo requer uma combinação desses dois graus de liberdade na forma de um produto tensorial entre os dois espaços vetoriais. Por exemplo, é possível combinar vetores de polarização linear com funções espaciais Hermite-Gauss, que são soluções discretas da equação de onda paraxial em coordenadas retangulares.

As direções de polarização serão rotuladas pelas letras maiúsculas H e V , associados com os vetores unitários $\hat{e}_H = \hat{x}$ e $\hat{e}_V = \hat{y}$. Os modos Hermite-Gauss de primeira ordem orientados ao longo das direções horizontal e vertical serão etiquetados com as letras minúsculas h e v , respectivamente, associados com as funções espaciais

$$\begin{aligned}\psi_h(x, y, z) &= Nx \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{2\varpi^2(z)} + i\phi(x, y, z) \right], \\ \psi_v(x, y, z) &= Ny \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{2\varpi^2(z)} + i\phi(x, y, z) \right]\end{aligned}\quad (4.1)$$

onde N é uma constante de normalização e $\phi(x, y, z)$ é a distribuição espacial de

fase. O modo vetorial de primeira ordem mais geral pode ser escrito como

$$\Psi(\mathbf{r}) = A_{Hh}\psi_h\hat{e}_H + A_{Hv}\psi_v\hat{e}_H + A_{Vh}\psi_h\hat{e}_V + A_{Vv}\psi_v\hat{e}_V, \quad (4.2)$$

onde $\sum_{\mu\nu} |A_{\mu\nu}|^2 = 1$. É possível apropriar-se da definição de concorrência da teoria da informação quântica [?] para caracterizar a separabilidade spin-órbita,

$$C = 2 \|A_{Hh}A_{Vv} - A_{Hv}A_{Vh}\|, \quad (4.3)$$

ao passo que $C = 0$ identifica um modo produto, ou separável, e $0 < C \leq 1$ identifica um não-fatorável, ou não-separável.

Uma base de modos spin-órbita de primeira ordem também pode ser construída com modos maximamente não-separáveis análogos aos estados de Bell na mecânica quântica:

$$\begin{aligned} \Psi_{\pm}(\mathbf{r}) &= \frac{\psi_h\hat{e}_H \pm \psi_v\hat{e}_V}{\sqrt{2}}, \\ \Phi_{\pm}(\mathbf{r}) &= \frac{\psi_h\hat{e}_V \pm \psi_v\hat{e}_H}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Eles correspondem a polarizações não-uniformes na frente de onda. Dois exemplos simples de modos maximamente não-separáveis são os famosos modos de polarização radial (Ψ_+) e azimutal (Φ_-), mostrados na Fig. 4.1. Eles têm atraído atenção considerável pelas suas propriedades de focalização.

É possível notar que esses modos de Bell, Eq. (4.4), são todos maximamente não-separáveis - basta aplicar a Eq. (4.3) e verificar que $C = 1$.

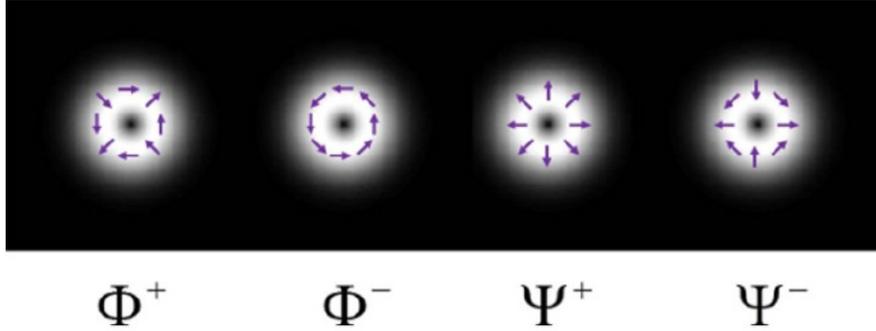


Figura 4.1: Retirada de [9]. Vórtices de polarização de primeira ordem análogos aos quatro estados de Bell.

4.2 Modos spin-órbita quantizados

Considere o operador de Heisenberg que descreve a componente de frequência positiva do campo eletromagnético associado a um feixe paraxial de primeira ordem propagando na direção z . Na base de modos $\psi_\nu \hat{e}_\mu$, com $\mu = H, V$ e $\nu = h, v$, este operador será

$$\mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = e^{i(kz - \omega t)} \sum_{\mu, \nu} a_{\mu\nu} \psi_\nu(\mathbf{r}) \hat{e}_\mu, \quad (4.5)$$

onde $a_{\mu\nu}$ é o operador que aniquila um fóton no modo $\psi_\nu \hat{e}_\mu$. Como de costume, é possível definir novos operadores de aniquilação quando uma base de modos diferente é usada para decompor o operador de campo. Para os modos de Bell definidos na seção anterior, Eq. (4.4), obtém-se as seguintes transformações para os operadores de aniquilação:

$$\begin{aligned} a_{\Psi_\pm} &= \frac{a_{Hh} \pm a_{Vv}}{\sqrt{2}}, \\ a_{\Phi_\pm} &= \frac{a_{Hv} \pm a_{Vh}}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

e as transformações conjugadas correspondentes para os operadores de criação.

Assim, o operador de campo elétrico pode ser escrito nesta nova base como:

$$\mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = e^{i(kz - \omega t)} \sum_{\pm} (a_{\Psi_{\pm}} \Psi_{\pm} + a_{\Phi_{\pm}} \Phi_{\pm}). \quad (4.7)$$

Portanto torna-se interessante investigar diferentes tipos de estados. Primeiro foi definido o estado de Fock de dois modos $\{|n\rangle_{\Psi_{\pm}} |m\rangle_{\Phi_{\pm}}\}$, autovalores de $a_{\Psi_{+}}^{\dagger} a_{\Psi_{+}}$ e $a_{\Psi_{-}}^{\dagger} a_{\Psi_{-}}$. Este pode ser construído para cada decomposição de modo atuando o operador de criação correspondente no estado de vácuo. Considere, por exemplo, um estado de Fock de N fótons no modo Ψ_{+} e nenhum fóton no estado Ψ_{-} . Tenha em mente que estará sempre lidando com um espaço de Hilbert de dois modos. Dessa forma, o modo em questão será:

$$|N\rangle_{\Psi_{+}} |0\rangle_{\Psi_{-}} = \frac{(a_{\Psi_{+}}^{\dagger})^N}{\sqrt{N!}} |0\rangle_{\Psi_{+}} |0\rangle_{\Psi_{-}}. \quad (4.8)$$

Ao utilizar a transformação conjugada descrita em Eq. (4.6), é possível escrever o operador de criação para Ψ_{+} em termo dos operadores de criação para Hh e Vv , obtendo:

$$|N\rangle_{\Psi_{+}} |0\rangle_{\Psi_{-}} = \sum_{n=0}^N \frac{\sqrt{N!} (a_{Hh}^{\dagger})^n (a_{Vv}^{\dagger})^{N-n}}{2^{N/2} n! (N-n)!} |0\rangle_{Hh} |0\rangle_{Vv}. \quad (4.9)$$

A definição análoga ao estado de Fock nos modos Hh e Vv é $\{|n\rangle_{Hh} |m\rangle_{Vv}\}$, que são os autovalores de $a_{Hh}^{\dagger} a_{Hh}$ e $a_{Vv}^{\dagger} a_{Vv}$ ¹. Desenvolvendo a Eq. (4.9), chega-se à

¹Note que o estado de vácuo é o mesmo em qualquer partição, isto é, $|0\rangle_{\Psi_{+}} |0\rangle_{\Psi_{-}} = |0\rangle_{Hh} |0\rangle_{Vv}$.

transformação entre os dois conjuntos de estados de Fock, dada por:

$$|N\rangle_{\Psi_+}|0\rangle_{\Psi_-} = \sum_{n=0}^N \sqrt{\frac{N!}{2^N n!(N-n)!}} |n\rangle_{Hh}|N-n\rangle_{Vv}. \quad (4.10)$$

Por exemplo, um estado de Fock com apenas um fóton do modo Ψ_+ pode ser escrito como

$$|1\rangle_{\Psi_+}|0\rangle_{\Psi_-} = \frac{|1\rangle_{Hh}|0\rangle_{Vv} + |0\rangle_{Hh}|1\rangle_{Vv}}{\sqrt{2}}. \quad (4.11)$$

É possível notar que o lado esquerdo das a Eq. (4.10) e a Eq. (4.11) são estados produto, enquanto o lado direito são estados emaranhados. É conhecido que emaranhamento é independente da escolha de uma base local no espaço de Hilbert, no entanto estas transformações não são locais, uma vez que elas envolvem diferentes partições de modos. Portanto a base do modo não deve ser confundida com a base do estado quântico. Por isso preferimos empregar o termo partição de modo, a fim de evitar este tipo de confusão.

Emaranhamento, de fato, depende da maneira que o subsistema é definido e, apesar dessa partição ser normalmente evidente para sistemas materiais, a mesma não é tão clara para o campo eletromagnético, uma vez que este, frequentemente, possui mais de uma decomposição de modo para as mesmas condições de contorno. Por isso devemos ser cuidadosos quando comparamos o emaranhamento nesses dois casos. Nesse contexto, estados puros coerentes desempenham um papel bastante especial por serem sempre estados produtos em qualquer decomposição de modos.

Considere o operador de deslocamento que, quando atua no vácuo, produz o estado coerente $|u\rangle_{\Psi_+}|0\rangle_{\Psi_-}$ dado por:

$$D_{\Psi_+}(u) = \exp\left(ua_{\Psi_+}^\dagger - u^*a_{\Psi_+}\right). \quad (4.12)$$

Uma vez que a_{Hh} e a_{Vv} comutam o operador deslocamento poderá ser fatorado como um produto entre os correspondentes operadores dos modos Hh e Vv . Assim, também com o auxílio da Eq. (4.12), obtém-se:

$$D_{\Psi_+}(u) = D_{Hh}(u/\sqrt{2})D_{Vv}(u/\sqrt{2}), \quad (4.13)$$

tal que os estados coerentes na decomposição de dois modos estão relacionados por

$$|u\rangle_{\Psi_+}|0\rangle_{\Psi_-} = |u/\sqrt{2}\rangle_{Hh}|u/\sqrt{2}\rangle_{Vv}, \quad (4.14)$$

que em ambos os casos são estados produtos.

Desta discussão foi possível desenvolver algumas intuições sobre o papel desempenhado pelo ruído do número de fótons na interface entre separabilidade de modos e emaranhamento quântico.

As discussões a seguir serão feitas num contexto bem próximo ao apresentado em [8].

4.3 Medidas de Bell em estados com acoplamento spin-órbita

Considere o esquema mostrado na Fig. 4.2 para uma medida de Bell spin-órbita, como a realizada em [8]. Um modo de entrada inicialmente preparado em um estado quântico $|\varphi_0\rangle$ entra num interferômetro Mach-Zehnder com um espelho extra em um dos braços. Esse tipo de interferômetro será chamado de MZIM [31]. Quando os dois braços estão equilibrados, o interferômetro separa os modos pares dos ímpares em diferentes portas de saída, ou seja, as componentes Hh e Vv sairão pela porta par enquanto as componentes Hv e Vh sairão pela porta ímpar. Os feixes de entrada são descritos pelos operadores de campo elétrico:

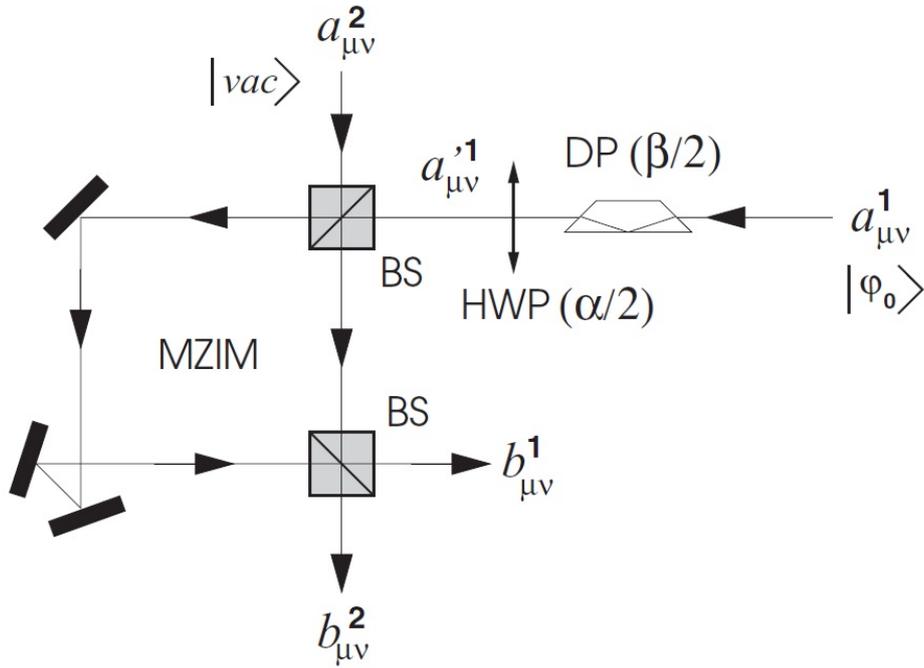


Figura 4.2: Retirada de [8]. Esquema para uma medida de Bell spin-órbita.

$$\mathbf{A}_j^{(+)}(\mathbf{r}, t) = e^{i(\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \sum_{\mu, \nu} a_{\mu\nu}^j \psi_\nu(\mathbf{r}) \hat{e}_\mu, \quad (4.15)$$

com $\mu = \{H, V\}$, referente a polarização, e $\nu = \{h, v\}$, referente ao modo transversal, $j = \{1, 2\}$, referente às portas de entrada, e $a_{\mu\nu}^j$ são os operadores de aniquilação correspondentes. O campo de entrada que atravessa a porta 1 passará por elementos que produzem transformações unitárias agindo nos graus de liberdade de polarização e de modo transversal. Esses elementos são utilizados para fixar as bases das medidas de Bell. Estes podem ser um prisma de Dove (DP²) para o modo transversal e uma lâmina de meia-onda (HWP³) para polarização.

Quando a HWP é orientada a um ângulo $\alpha/2$ e o DP a um ângulo $\beta/2$, os

²Sigla do inglês Dove prism.

³Sigla do inglês Half-Wave Plate.

operadores de aniquilação passam por uma transformação, dada por:

$$a'_{\mu\nu}{}^1(\alpha, \beta) = \sum_{\epsilon\delta} U_{\mu\nu}^{\epsilon\delta}(\alpha, \beta) a_{\epsilon\delta}^1, \quad (4.16)$$

onde U é a transformação unitária que descreve a combinação dos dois elementos. Ambos a HWP e o DP agem de forma similar, e eles produzem um operador de reflexão ao longo de seus eixos de orientação. Suas ações combinadas podem ser escritas como o produto tensorial $U(\alpha, \beta) = T(\alpha) \otimes T(\beta)$, onde

$$T(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Assim, obtém-se, em notação tensorial:

$$\begin{pmatrix} a_{Hh}^1 \\ a_{Hv}^1 \\ a_{Vh}^1 \\ a_{Vv}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \text{sen}(\alpha) \\ \text{sen}(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \text{sen}(\beta) \\ \text{sen}(\beta) & -\cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{Hh}^1 \\ a_{Hv}^1 \\ a_{Vh}^1 \\ a_{Vv}^1 \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

A mesma decomposição pode ser aplicada para os campos de saída, isto é,

$$\mathbf{B}_j^{(+)}(\mathbf{r}, t) = e^{i(\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \sum_{\mu, \nu} b_{\mu\nu}^j \psi_\nu(\mathbf{r}) \hat{e}_\mu, \quad (4.19)$$

onde $b_{\mu\nu}^j$ é o operador de aniquilação correspondente ao modo $\mu\nu$ na saída j .

Uma das portas de saída do interferômetro combinará os modos ímpares dos vácuos de entrada com os modos pares das entradas excitadas (Hh e Vv), e a combinação oposta será formada na outra porta de saída. As amplitudes $b_{\mu\nu}$ do modo quantizado são determinadas pelas relações de entrada-saída no interferômetro⁴,

⁴Note que pode haver ganho de fase em cada componente ao atravessar o MZIM, mas como

isto é,

$$\begin{aligned} b_{Hh}^1 &= a_{Hh}^1, & b_{Hh}^2 &= a_{Hh}^2, & b_{Hv}^1 &= a_{Hv}^2, & b_{Hv}^2 &= a_{Hv}^1, \\ b_{Vh}^1 &= a_{Vh}^2, & b_{Vh}^2 &= a_{Vh}^1, & b_{Vv}^1 &= a_{Vv}^1, & b_{Vv}^2 &= a_{Vv}^2. \end{aligned} \quad (4.20)$$

O operador de intensidade, integrado sobre toda área do detector, é definido como

$$\hat{I}_j = \mathbf{B}_j^{(-)} \cdot \mathbf{B}_j^{(+)} d^2\mathbf{r}. \quad (4.21)$$

Das relações de entrada-saída do aparato de medida (elementos óticos mais interferômetro) é possível determinar as intensidades nas portas de saída, que serão;

$$\begin{aligned} \hat{I}_1 &= \hat{I}_{Hh}^1 + \hat{I}_{Vv}^1 + \hat{I}_{Hv}^1 + \hat{I}_{Vh}^1, \\ \hat{I}_2 &= \hat{I}_{Hv}^2 + \hat{I}_{Vh}^2 + \hat{I}_{Hh}^2 + \hat{I}_{Vv}^2, \end{aligned} \quad (4.22)$$

onde $\hat{I}_{\mu\nu}^j = b_{\mu\nu}^{j\dagger} b_{\mu\nu}^j$. Note que os modos Hv e Vh na porta de saída 1 não estão excitados, assim como os modos Hh e Vv na porta de saída 2. Logo, estes não contribuem para as medidas de intensidade, contribuirão apenas para as flutuações em cada porta de saída, e os operadores relevantes nas portas de saída do interferômetro são:

$$I_{tot} = \hat{I}_1 + \hat{I}_2, \quad (4.23)$$

$$M(\alpha, \beta) = \hat{I}_1 - \hat{I}_2. \quad (4.24)$$

A intensidade total de saída não depende das configurações de medida (α, β) .

Fazendo uma analogia com o parâmetro usado na desigualdade CHSH [16], define-se:

$$S = \frac{\langle M(\alpha, \beta) + M(\alpha, \beta') - M(\alpha', \beta) + M(\alpha', \beta') \rangle}{\langle I_{tot} \rangle}, \quad (4.25)$$

essas fases não vão influenciar nas medidas de interesse deste trabalho (ver Apêndice D.1), estas foram desconsideradas já na Eq. (4.20)

onde as médias são calculadas para o estado quântico inicial $|\varphi_0\rangle$. Para estados de um fóton, as intensidades normalizadas detectadas correspondem à probabilidades de detecção, encontrando, assim, o cenário usual para as medidas de Bell, onde $2 < S < 2\sqrt{2}$ para estados spin-órbita emaranhados. Como discutido em [8], esta violação pode ser alcançada com um vórtice coerente de polarização, que é um estado produto na decomposição Hh e Vv , como mostrado em Eq. (4.14). No intuito de evidenciar o comportamento quântico, torna-se necessário monitorar o ruído na diferença de intensidade, $\Delta M^2(\alpha, \beta) = \langle M^2(\alpha, \beta) \rangle - \langle M(\alpha, \beta) \rangle^2$, e comparar com o limite do shot-noise correspondente. Esta figura de mérito será utilizada na próxima seção para estabelecer a comparação entre diferentes estados de entrada.

4.4 Intensidades médias e ruídos quânticos

Assuma que apenas os modos a_{Hh}^1 e a_{Vv}^1 estão inicialmente ocupados, descritos por um estado quântico $|\varphi_0\rangle$, enquanto os outros modos (a_{Hv}^1 e a_{Vh}^1) estão em estado de vácuo. Para este fim, todos os operadores de saída são calculados em termos dos modos de entrada⁵, utilizando as relações de entrada-saída, Eq. (4.20). Portanto as intensidades médias e as flutuações quânticas correspondentes são calculadas para um estado inicial específico.

A seguir serão discutidos diferentes estados de entrada, suas similaridades e diferenças.

⁵Lembrando que os modos de entradas são os modos $|\varphi_0\rangle$ da Fig. 4.2.

4.4.1 Estados de Fock emaranhados

Considere inicialmente o estado emaranhado de um fóton dado pela Eq. (4.11). Neste caso obtém-se:

$$\frac{\langle M(\alpha, \beta) \rangle}{\langle I_{tot} \rangle} = \cos[2(\beta - \alpha)], \quad (4.26)$$

onde $\langle I_{tot} \rangle = 1$. Para as configurações $\alpha = \pi/8$, $\alpha' = 3\pi/8$, $\beta = 0$ e $\beta' = \pi/4$ o limite $S = 2\sqrt{2}$ é alcançado, como esperado para um estado spin-órbita maximamente emaranhado. Também foi calculada a flutuação da diferença de intensidade correspondente para qualquer configuração (α, β) ,

$$\frac{\Delta M^2(\alpha, \beta)}{\langle I_{tot} \rangle} = \text{sen}^2[2(\beta - \alpha)]. \quad (4.27)$$

Esses resultados podem ser generalizados para um estado de Fock arbitrário de N fótons $|N\rangle_{\Psi_+}|0\rangle_{\Psi_-}$, dado pela Eq. (4.10), que possui $\langle I_{tot} \rangle = N$. Para as configurações da medida de Bell obtém-se 50% de compressão⁶ de intensidade. Quando $\beta - \alpha = m\pi/2$ ($m \in \mathbb{Z}$), todos os fótons são registrados mesma porta de saída, e a diferença de intensidade é perfeitamente comprimida.

Note que a coerência entre modos é ingrediente chave para violação da desigualdade CHSH, uma vez que a soma do lado direito das Eq. (4.10) e Eq. (4.11) evoluem uma superposição coerente com fases relativas bem definidas. Quando as fases são aleatórias, estes estados passam a ser estados de Fock mistos, que não mais violam a desigualdade CHSH, como será visto a seguir.

⁶Mais conhecido como squeezing.

4.4.2 Estados de Fock mistos

É interessante desenvolver a desigualdade spin-órbita CHSH para um estado de Fock misto que exibe forte correlação no número de fótons, mas nenhum emaranhamento. Este estado pode ser representado pela matriz densidade

$$\rho_N = \sum_{n=0}^N \frac{N!}{2^N n!(N-n)!} |n\rangle\langle n|_{Hh} \otimes |N-n\rangle\langle N-n|_{Vv} \quad (4.28)$$

com um número total N de fótons bem definido, aleatoriamente distribuído entre os modos Hh e Vv . Para este modo, encontra-se

$$\frac{\langle M(\alpha, \beta) \rangle}{\langle I_{tot} \rangle} = \cos(2\alpha) \cos(2\beta), \quad (4.29)$$

que resulta em $S = \sqrt{2}$ para as configurações de medida de Bell.

O ruído na diferença de intensidade é

$$\frac{\Delta M^2(\alpha, \beta)}{\langle I_{tot} \rangle} = \sin^2(2\alpha) + \sin^2(2\beta) + \left(\frac{\langle I_{tot} \rangle - 3}{2} \right) \sin^2(2\alpha) \sin^2(2\beta), \quad (4.30)$$

que pode ser perfeitamente comprimido para configurações específicas de (α, β) , mas em geral escala com o número de fótons. Por exemplo, se fixar $\alpha = \beta = \pi/4$, Eq. (4.30) resulta em $(N + 1)/2$, enquanto que Eq. (4.27) prevê compressão de ruído perfeito.

4.4.3 Estado de Werner

No intuito de capturar o papel desempenhado pelo emaranhamento nas propriedades do ruído quântico do estado de Fock considere um estado parcialmente

emaranhado, do tipo

$$\rho_N(p) = p|N\rangle\langle N|_{\Psi_+} \otimes |0\rangle\langle 0|_{\Psi_-} + (1-p)\rho'_N, \quad (4.31)$$

onde ρ'_N é dado pela Eq. (4.28). Este é análogo ao estado de Werner, frequentemente utilizado na área da Informação Quântica para discutir correlações presentes em estados parcialmente emaranhados [18]. A média da diferença de intensidade para uma configuração (α, β) é

$$\frac{\langle M(\alpha, \beta) \rangle}{\langle I_{tot} \rangle} = p \cos[2(\beta - \alpha)] + (1-p) \cos(2\alpha) \cos(2\beta), \quad (4.32)$$

que resulta em $S = (1+p)\sqrt{2}$, contendo um limiar de violação dado por $p = \sqrt{2} - 1$.

O ruído da diferença de intensidade pode ser calculado diretamente como uma combinação das Eq. (4.27) e Eq. (4.30), resultando em:

$$\langle \Delta M^2 \rangle_W = p \langle \Delta M^2 \rangle_{pure} + (1-p) \langle \Delta M^2 \rangle_{mix} + p(1-p) [\langle M \rangle_{pure} + \langle M \rangle_{mix}]^2, \quad (4.33)$$

onde $\langle \Delta M^2 \rangle_{pure}$ é dado pela Eq. (4.27), que escala com $\langle I_{tot} \rangle$, enquanto que $\langle \Delta M^2 \rangle_{mix}$ é dado pela Eq. (4.30), que escala com $\langle I_{tot} \rangle^2$. Note que ambos $\langle M \rangle_{pure}$ e $\langle M \rangle_{mix}$ são proporcionais a $\langle I_{tot} \rangle$, logo $\langle \Delta M^2 \rangle_W / \langle I_{tot} \rangle$ escala com $\langle I_{tot} \rangle$.

4.4.4 Estado coerente puro

Para um estado coerente $|u\rangle_{\Psi_+} |0\rangle_{\Psi_-}$, dado pela Eq. (4.14), obtém-se

$$\frac{\langle M(\alpha, \beta) \rangle}{\langle I_{tot} \rangle} = \cos[2(\beta - \alpha)], \quad (4.34)$$

com $\langle I_{tot} \rangle = |u|^2$, resultando também em $S = 2\sqrt{2}$, assim como no estado de Fock, embora o estado de entrada aqui (estado coerente puro) seja fatorável. Para distinguir os dois casos, calculou-se o ruído da diferença de intensidade,

$$\frac{\Delta M^2(\alpha, \beta)}{\langle I_{tot} \rangle} = 1, \quad (4.35)$$

de forma que para qualquer configuração (α, β) o ruído esperado é o "shot noise", que é bem distinguível do resultado correspondente para estados de Fock emaranhados.

4.4.5 Estado coerente misto

O papel desempenhado pela coerência na violação da desigualdade CHSH spin-órbita passa a ser o foco agora. Suponha um feixe laser preparado inicialmente em um estado coerente $|u\rangle_{Hh}|0\rangle_{Vv}$. Este feixe é, então, separado em duas partes iguais, uma delas é transformada para o modo Vv e enviada para um divisor de feixe⁷, onde é contaminado com um laser independente também preparado no modo Vv . Finalmente, essa mistura dos modos Vv é recombinada com o modo Hh "polarizing beam splitter", como esquematizado na Fig. 4.3. Uma vez que os dois lasers possuem fases relativas aleatórias, o estado quântico que descreve essa mistura é escrito como:

$$\rho_0 = |u\rangle\langle u|_{Hh} \otimes \int \frac{d\theta}{2\pi} |u'(\theta)\rangle\langle u'(\theta)|_{Vv}, \quad (4.36)$$

onde $u'(\theta) = u(r + te^{i\theta})$ com r e t sendo os coeficientes de reflexão e transmissão do acoplador contaminado.

Considerando $r = \sqrt{R}e^{i\phi}$, onde R é a refletância e ϕ é a fase adquirida na

⁷Mais conhecido como beam splitter.

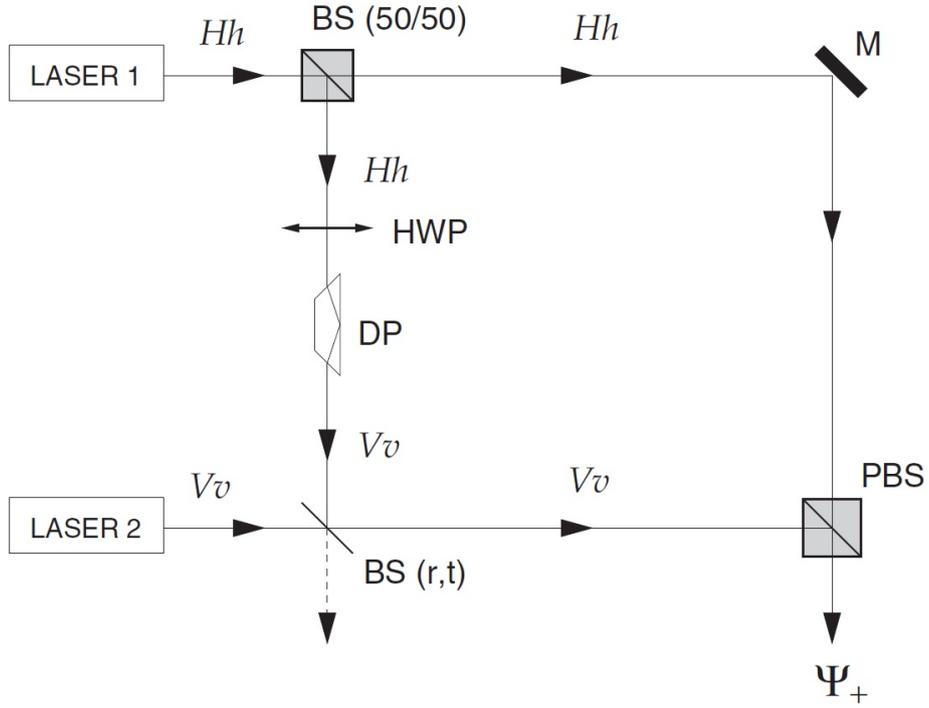


Figura 4.3: Retirada de [9]. Esquema proposto para produzir um estado coerente misto ajustável.

reflexão, obtém-se:

$$\frac{\langle M(\alpha, \beta) \rangle}{\langle I_{tot} \rangle} = \cos(2\alpha) \cos(2\beta) + \sqrt{R} \cos(\phi) \sin(2\alpha) \sin(2\beta), \quad (4.37)$$

onde $\langle I_{tot} \rangle = 2|u|^2$, resultando em $S = \left(1 + \sqrt{R} \cos(\phi)\right) \sqrt{2}$ para as configurações da medida de Bell. Um limiar de violação é previsto em $\sqrt{R} \cos(\phi) = \sqrt{2} - 1$. Para $R = 1$ e $\phi = 0$, recupera-se os resultados do estado coerente puro, obtido na Eq. (4.34).

Para uma superposição completamente incoerente ($R = 0$), obtém-se:

$$\frac{\langle M(\alpha, \beta) \rangle}{\langle I_{tot} \rangle} = \cos(2\alpha) \cos(2\beta), \quad (4.38)$$

resultando em $S = \sqrt{2}$ para as configurações da medida de Bell. Este resultado sugere que coerência é um ingrediente essencial para violação da desigualdade para a média de intensidades. Enquanto isso, o ruído da diferença de intensidade para uma configuração (α, β) é

$$\frac{\Delta M^2(\alpha, \beta)}{\langle I_{tot} \rangle} = 1 + \frac{\langle I_{tot} \rangle}{2} \sin^2(2\alpha) \sin^2(2\beta), \quad (4.39)$$

que escala com $\langle I_{tot} \rangle$ e está acima do shot noise para a maioria das configurações.

4.4.6 Vácuo comprimido de dois modos

Também é interessante analisar os resultados obtidos para estados de vácuo comprimido de dois modos, que apresentam emaranhamento de quadratura. Este pode ser construído atuando o operador de compressão de dois modos no estado de vácuo, isto é:

$$|\varphi_{sq}\rangle = \exp\left(\frac{\zeta^* a_{Hh} a_{Vv} - \zeta a_{Hh}^\dagger a_{Vv}^\dagger}{2}\right) |0\rangle_{Hh} |0\rangle_{Vv}, \quad (4.40)$$

onde ζ é o parâmetro de squeezing e a intensidade total será $\langle I_{tot} \rangle = 2 \sinh^2(|\zeta|/2)$.

Neste caso, encontra-se:

$$\frac{\langle M(\alpha, \beta) \rangle}{\langle I_{tot} \rangle} = \cos(2\alpha) \cos(2\beta), \quad (4.41)$$

resultando em $S = \sqrt{2}$ para a configuração da medida de Bell, o mesmo resultado que o encontrado no estado coerente misto.

O ruído da diferença de intensidade será

$$\frac{\Delta M^2(\alpha, \beta)}{\langle I_{tot} \rangle} = 1(\langle I_{tot} \rangle + 1) \left(\frac{1 + \cos(4\alpha) \cos(4\beta)}{2} \right), \quad (4.42)$$

que também escala com $\langle I_{tot} \rangle$. Portanto, apesar de possuir emaranhamento de quadratura, as propriedades quânticas do vácuo comprimido não aparecem neste tipo de medida de Bell spin-órbita.

4.5 Inseparabilidade Clássica e Quântica

Ao longo desse capítulo, discutimos as medidas de Bell spin-órbita em vórtices paraxiais de polarização do ponto de vista da Ótica Quântica. Esses vórtices são tratados como modos inseparáveis, e suas descrições quânticas são comparadas em diferentes decomposições de modos. A separabilidade de modo é avaliada com uma desigualdade para as médias de intensidades de forma análoga a desigualdade CHSH. Nossa desigualdade é violada para um estado spin-órbita emaranhado, como esperado, mas é violada também por um estado coerente farotável. Esses dois casos limites são investigados experimentalmente em [8, 32, 33]. Assim, surge uma questão natural sobre a interface entre emaranhamento e coerência na violação da desigualdade de Bell. Neste trabalho, comparamos diferentes estados de entrada, a fim de desenvolver alguma intuição.

Nossos resultados indicam que o papel desempenhado pela coerência e pela flutuação do número de fótons podem ser resumidos nos exemplos:

- i) Sem coerência, esperamos nenhuma violação da desigualdade CHSH baseada em intensidade, como ilustrado nos exemplos com os estados misto coerente ou de Fock;
- ii) Com coerência e distribuição poassoniana para o número total de fótons esperamos violação, mas nenhum emaranhamento, como vimos nos exemplos com os estados coerentes puro. Notamos que esses estados são fatoráveis em qualquer decomposição de modos, mas exibem violação máxima;

iii) Com coerência e pequena flutuação do número de fótons (abaixo do shot-noise), esperamos violação e emaranhamento, como ilustrado pelo estado de Fock emaranhado.

É importante salientar que em todos os casos a coerência que está sendo considerada como relevante é a caracterizada pela fase relativa intramodo, e não a absoluta. Também apresentamos exemplos que intercalam entre estados puros e mistos. E na subseção "Vácuo comprimido de dois modos", mostramos que o emaranhamento de quadratura não implica em violação da desigualdade CHSH baseada em intensidade.

Inseparabilidade de modos ("inseparabilidade clássica") e emaranhamento podem ser simultaneamente obtidas medindo médias das intensidades e suas correspondentes flutuações. Violação da desigualdade CHSH baseada em intensidade certifica a inseparabilidade da estrutura do modo, enquanto que compressão das diferenças de intensidades evidencia emaranhamento. Estados coerentes devem exibir flutuação igual ao shot-noise para quaisquer configurações de medida, enquanto que estados com número de fótons comprimidos devem apresentar 50% de compressão para as configurações usadas na desigualdade. Esses resultados podem ser experimentalmente testados com vórtices de polarização produzidos por fontes com intensidades comprimidas, como o OPO [34, 35] ou lasers de diodo "pump-noise-suppressed" [36].

Capítulo 5

Constantes de recobrimento

Conhecer as constantes de recobrimento é tão importante neste trabalho, que tal tema ganhou um capítulo exclusivo, onde discutiremos sua importância em processos multimodos ao apresentarmos nossos resultados.

As constantes de recobrimento, definidas matematicamente na Eq. (2.71), são responsáveis por acoplar as infindáveis possibilidades de modos de Laguerre-Gauss que surgem na dinâmica de problemas multimodos. Além disso, por serem normalizadas, seus valores numéricos podem nos dar uma ideia do peso que cada acoplamento terá ao longo desse processo.

O acoplamento entre os modos de Laguerre-Gauss é dado pela Eq. (2.73)¹,

¹Lembrando... $R_{pp'l'l'}^{ll'l'} = \int u_{pl}^3 u_{p'l'}^{1*} u_{p'l'l'}^{1*} d^2\mathbf{r}$.

isto é,

$$\begin{aligned}
R_{pp'p''}^{ll'l''} &= \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} d\theta \left\{ \sqrt{\frac{2p!}{\pi\varpi_3^2(p+|l|)!}} \left(\frac{\sqrt{2}r}{\varpi_3}\right)^{|l|} L_p^{|l|} \left(\frac{2r^2}{\varpi_3^2}\right) e^{-\frac{r^2}{\varpi_3^2}+il\theta} \right\} \\
&\cdot \left\{ \sqrt{\frac{2p'!}{\pi\varpi_1^2(p'+|l'|)!}} \left(\frac{\sqrt{2}r}{\varpi_1}\right)^{|l'|} L_{p'}^{|l'|} \left(\frac{2r^2}{\varpi_1^2}\right) e^{-\frac{r^2}{\varpi_1^2}-il'\theta} \right\} \\
&\cdot \left\{ \sqrt{\frac{2p''!}{\pi\varpi_1^2(p''+|l''|)!}} \left(\frac{\sqrt{2}r}{\varpi_1}\right)^{|l''|} L_{p''}^{|l''|} \left(\frac{2r^2}{\varpi_1^2}\right) e^{-\frac{r^2}{\varpi_1^2}-il''\theta} \right\} \quad (5.1)
\end{aligned}$$

Da Eq. (2.65), junto com o casamento de fase, Eq. (2.79), obtemos a relação entre a cintura dos feixes do primeiro harmônico e do feixe do segundo harmônico

$$\varpi_3 = \frac{\varpi_1}{\sqrt{2}}. \quad (5.2)$$

Assim começamos a simplificar a Eq. (5.1), já substituindo a relação acima, nos levando a:

$$\begin{aligned}
R_{pp'p''}^{ll'l''} &= \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2^{\frac{|l|+1}{2}} \frac{1}{\varpi_1^3} \sqrt{\frac{p!}{(p+|l|)!} \frac{p'!}{(p'+|l'|)!} \frac{p''!}{(p''+|l''|)!}} \left(\int_0^{2\pi} d\theta e^{i(l-l'-l'')\theta} \right) \\
&\cdot \int_0^\infty r dr \left(\frac{2r^2}{\varpi_1^2}\right)^{\frac{|l|+|l'|+|l''|}{2}} L_p^{|l|} \left(2\frac{2r^2}{\varpi_1^2}\right) L_{p'}^{|l'|} \left(\frac{2r^2}{\varpi_1^2}\right) L_{p''}^{|l''|} \left(\frac{2r^2}{\varpi_1^2}\right) e^{-2\frac{2r^2}{\varpi_1^2}}. \quad (5.3)
\end{aligned}$$

Nosso passo seguinte foi fazer a substituição de variável

$$x = \frac{2r^2}{\varpi_1^2}, \quad (5.4)$$

e realizar a integral angular², resultando em

$$R_{pp'p''}^{ll'l''} = \frac{\delta_{l,l'+l''}}{\varpi_1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2^{\frac{|l|+1}{2}} \sqrt{\frac{p!}{(p+|l|)!} \frac{p'!}{(p'+|l'|)!} \frac{p''!}{(p''+|l''|)!}} \cdot \int_0^\infty dx x^{\frac{|l|+|l'|+|l''|}{2}} L_p^{|l|}(2x) L_{p'}^{|l'|}(x) L_{p''}^{|l''|}(x) e^{-2x}. \quad (5.5)$$

Assim podemos calcular R_{000}^{000}

$$R_{000}^{000} = \frac{2}{\varpi_1 \sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx e^{-2x}, \quad (5.6)$$

que possui como solução

$$R_{000}^{000} = \frac{1}{\varpi_1 \sqrt{\pi}}. \quad (5.7)$$

Dividindo Eq. (5.5) por Eq. (5.7), chegamos ao recobrimento normalizado, o qual utilizaremos a partir de agora, que é:

$$\Lambda_{pp'p''}^{ll'l''} = \delta_{l,l'+l''} 2^{\frac{|l|+2}{2}} \sqrt{\frac{p!}{(p+|l|)!} \frac{p'!}{(p'+|l'|)!} \frac{p''!}{(p''+|l''|)!}} \cdot \int_0^\infty dx x^{\frac{|l|+|l'|+|l''|}{2}} L_p^{|l|}(2x) L_{p'}^{|l'|}(x) L_{p''}^{|l''|}(x) e^{-2x} \quad (5.8)$$

Para resolver a integral acima e determinar o valor das constantes de recobrimento, precisaremos das propriedades dos polinômios associados de Laguerre [mathworld]:

$$\int_0^\infty x^k L_n^k(x) L_m^k(x) e^{-x} dx = \frac{(n+k)!}{n!} \delta_{nm} \quad (5.9)$$

$$L_0^k(x) = 1 \quad (5.10)$$

$$x^P = \sum_{m=0}^P \frac{(-1)^m P! (k+P)!}{(P-m)! (k+m)!} L_m^k(x) \quad (5.11)$$

² $\int_0^{2\pi} d\theta e^{i(l-l'-l'')\theta} = 2\pi \delta_{l,l'+l''}$.

sendo que esta última, Eq. (5.11), será discutida mais detalhadamente no Apêndice C.

5.1 Soluções para as Constantes de Recobrimento

Resolver a Eq. (5.8) de modo que contemple todos os índices radiais, todos os índices angulares, o phase mismatch e sua variação ao longo da direção de propagação é um problema que encontramos bastante dificuldade e não achamos solução na literatura³. Por esse motivo, vamos trabalhar a partir de algumas considerações que nos permitiram seguir os cálculos adiante e obter resultados.

As considerações que fizemos para calcular a Eq. (5.8) são:

- i) Há casamento de fase nos processos não-lineares no nosso cristal, ou seja,

$$\Delta k = 0. \quad (5.12)$$

- ii) O comprimento de Rayleigh é muito maior que o tamanho do cristal⁴, que é onde ocorrem os processos não-lineares, de modo que

$$Z = 0; \quad (5.13)$$

- iii) Só resolveremos problemas envolvendo geração de segundo harmônico e

³Achamos algumas famílias de soluções, como em [21] (que por sinal tem um pequeno deslize nas contas, parece que houve uma confusão entre a função fatorial e a gama em todos os fatoriais da Eq.(11) deles), mas não a solução geral.

⁴Lembrando que $Z = z/z_R$, e z_R é o comprimento de Rayleigh.

com condições iniciais iguais a:

$$A_{p'l'}^1(0) = \sum_i \delta_{p'0} \delta_{l'l_i} A_{0l_i}^1(0), \quad (5.14)$$

$$A_{p''l''}^2(0) = \sum_j \delta_{p''0} \delta_{l''l_j} A_{0l_j}^2(0), \quad (5.15)$$

$$B_{pl}(0) = 0. \quad (5.16)$$

Ou seja, não vamos injetar nenhum feixe com frequência 2ω . Ambos os feixes de entrada de frequência ω vão ter ordem radial zero e estes últimos podem ter diferentes combinações de momento angular para cada polarização.

Aplicando as condições acima, a Eq. (5.8) reduz para⁵

$$\begin{aligned} \Lambda_{p00}^{l'l''} &= \delta_{l,l'+l''} 2^{\frac{|l|+2}{2}} \sqrt{\frac{p!}{(p+|l|)!} \frac{1}{|l'|!} \frac{1}{|l''|!}} \\ &\cdot \int_0^\infty dx x^{\frac{|l|+|l'|+|l''|}{2}} L_p^{|l|}(2x) e^{-2x} \end{aligned} \quad (5.17)$$

que, com a mudança de variável $y = 2x$, torna-se

$$\begin{aligned} \Lambda_{p00}^{l'l''} &= \delta_{l,l'+l''} \sqrt{\frac{1}{2^{|l'|+|l''|}} \frac{p!}{(p+|l'+l''|)!} \frac{1}{|l'|!} \frac{1}{|l''|!}} \\ &\cdot \int_0^\infty dy y^{\frac{|l'+l''|+|l'|+|l''|}{2}} L_p^{|l'+l''|}(y) e^{-y} \end{aligned} \quad (5.18)$$

Agora, determinar as constantes de recobrimento a partir da Eq. (5.18) fica bem mais agradável e é isso que faremos. A estratégia que usamos aqui é comparar essa equação com a relação de ortogonalidade dos polinômios associados de Laguerre, Eq. (5.9), e utilizar a Eq. (5.11).

⁵A partir de agora entende-se $\Lambda_{p00}^{l'l''}$ por $\Lambda_{p00}^{l'l''}(0)$.

Primeiro vamos substituir a identidade

$$y^{\frac{|l'+l''|-(|l'+l''|)}{2}} y^{-\left[\frac{|l'+l''|-(|l'+l''|)}{2}\right]} \quad (5.19)$$

dentro da integral, que nos leva a:

$$\Lambda_{p00}^{l'l''} = \delta_{l,l'+l''} \sqrt{\frac{1}{2^{|l'+l''|}} \frac{p!}{(p+|l'+l''|)!} \frac{1}{|l'|!} \frac{1}{|l''|!}} \cdot \int_0^\infty dy y^{|l'+l''|} y^P L_p^{|l'+l''|}(y) e^{-y}, \quad (5.20)$$

$$P = \frac{|l'| + |l''| - |l' + l''|}{2}. \quad (5.21)$$

Substituindo a Eq. (5.11) e arrumando:

$$\Lambda_{p00}^{l'l''} = \delta_{l,l'+l''} \sqrt{\frac{1}{2^{|l'+l''|}} \frac{p!}{(p+|l'+l''|)!} \frac{1}{|l'|!} \frac{1}{|l''|!}} \cdot \sum_{m=0}^P \frac{(-1)^m P! (|l'+l''| + P)!}{(P-m)! (|l'+l''| + m)!} \cdot \int_0^\infty dy y^{|l'+l''|} L_m^{|l'+l''|}(y) L_p^{|l'+l''|}(y) e^{-y}. \quad (5.22)$$

Agora aplicando a ortogonalidade, Eq. (5.9), enfim chegamos a:

$$\Lambda_{p00}^{l'l''} = \sum_{m=0}^P \delta_{l,l'+l''} \delta_{mp} \sqrt{\frac{1}{2^{|l'+l''|} p! (p+|l'+l''|)! |l'|! |l''|!}} \cdot \frac{(-1)^p P! (|l'+l''| + P)!}{(P-p)!}. \quad (5.23)$$

Enfim, esta é a nossa solução para as constantes de recobrimento - Eq. (5.23) - uma solução geral, dentro das nossas considerações para os problemas que queremos tratar. Desta surgem detalhes interessantes que vale comentar:

- A primeira é a já conhecida conservação de momento angular $l = l' + l''$,

que surge em $\delta_{l,l'+l''}$;

- A segunda, que não é tão comentada assim, é o surgimento de ordens radiais diferentes de zero no feixe convertido.
- A terceira: não apenas surgem recobrimentos para ordens radiais diferentes de zero, como elas estarão limitadas por P , isto é:

$$p \leq P. \quad (5.24)$$

Esta inequação surge graças ao termo $\sum_{m=0}^P \delta_{mp}$.

Encontrar tal solução já é um boa vantagem, mas, para ficar ainda melhor, estudaremos um pouco a quantidade P e observar o que surge de interessante.

5.2 Avaliando os valores de P

Para finalizarmos esta parte sobre as constantes de recobrimento, discutiremos sobre a quantidade P . Esta surge apenas como uma definição para auxiliar nos cálculos, mas vimos que possui propriedades interessantes.

Primeiro vamos relembrar sua definição:

$$P = \frac{|l'| + |l''| - |l' + l''|}{2}, \quad (5.25)$$

$$P + |l' + l''| = \frac{|l'| + |l''| + |l' + l''|}{2}. \quad (5.26)$$

Já adiantando, estes cálculos resultam em:

$$P = \begin{cases} 0, & \text{se } l'l'' \geq 0, \\ \min\{|l'|, |l''|\}, & \text{se } l'l'' < 0. \end{cases} \quad (5.27)$$

$$P + |l' + l''| = \begin{cases} |l'| + |l''|, & \text{se } l'l'' \geq 0, \\ \max\{|l'|, |l''|\}, & \text{se } l'l'' < 0. \end{cases} \quad (5.28)$$

Traduzindo a parte operacional contida nesta equação, pode-se notar que somar o MAO dos dois feixes quando estes possuem o mesmo sinal, ou giram para o mesmo lado, é mais simples de trabalhar⁶.

As subseções a seguir são apenas para provar as relações que acabamos de mostrar na Eq. (5.27).

5.2.1 $l'l'' \geq 0$

Primeiro vamos considerar que os feixes de entrada possuem MAO obedecendo as relações:

$$l' = \pm a, \quad a \geq 0, \quad (5.29)$$

$$l'' = \pm b, \quad b \geq 0, \quad (5.30)$$

$$l'l'' = ab \geq 0. \quad (5.31)$$

Substituindo esses valores em P , Eq. (5.26):

$$P = \frac{|\pm a| + |\pm b| - |\pm a \pm b|}{2}, \quad (5.32)$$

$$P = \frac{a + b - |\pm(a + b)|}{2}, \quad (5.33)$$

$$P = 0. \quad (5.34)$$

⁶Quando digo que é mais simples de trabalhar é porque este processo só contempla modos com $p = 0$.

Agora, substituindo em $P + |l' + l''|$, Eq. (5.26):

$$P + |\pm a \pm b| = |a| + |b|. \quad (5.35)$$

Logo, concluimos que - para $l'l'' \geq 0$ -

$$P = 0, \quad (5.36)$$

$$P + |l' + l''| = |l'| + |l''|. \quad (5.37)$$

Como p é menor ou igual a P , e, neste caso, $P = 0$, só sobrevive a ordem radial zero, isto é:

$$p = 0, \text{ se } l'l'' \geq 0. \quad (5.38)$$

A constante de recobrimento, neste caso, se reduz a:

$$\Lambda_{p00}^{l'l''} = \delta_{p0} \delta_{l,l'+l''} \sqrt{\frac{(|l'| + |l''|)!}{2^{|l'|+|l''|} |l'|! |l''|!}}. \quad (5.39)$$

5.2.2 $l'l'' < 0$

Agora, consideramos que os feixes de entrada possuem MAO obedecendo às relações:

$$l' = \pm a, \quad a > 0, \quad (5.40)$$

$$l'' = \mp b, \quad b > 0, \quad (5.41)$$

$$l'l'' = -ab < 0. \quad (5.42)$$

Substituindo esses valores em P , Eq. (5.26):

$$P = \frac{|\pm a| + |\mp b| - |\pm a \mp b|}{2}, \quad (5.43)$$

$$P = \frac{a + b - |\pm(a - b)|}{2}, \quad (5.44)$$

$$P = \frac{a + b - |a - b|}{2}, \quad (5.45)$$

$$P = \min \{a, b\}. \quad (5.46)$$

Agora substituindo em $P + |l' + l''|$, Eq. (5.26):

$$P + |\pm a \mp b| = \frac{|\pm a| + |\mp b| + |\pm a \mp b|}{2}, \quad (5.47)$$

$$P + |\pm(a - b)| = \frac{a + b + |\pm(a - b)|}{2}, \quad (5.48)$$

$$P + |a - b| = \frac{a + b + |a - b|}{2}, \quad (5.49)$$

$$P + |a - b| = \max \{a, b\}. \quad (5.50)$$

Ou seja - para $l'l'' < 0$ -

$$P = \min \{|l'|, |l''|\}, \quad (5.51)$$

$$P + |l' + l''| = \max \{|l'|, |l''|\}. \quad (5.52)$$

Sabendo que

$$P!(P + |l' + l''|)! = \min \{|l'|, |l''|\}! \max \{|l'|, |l''|\}!, \quad (5.53)$$

$$P!(P + |l' + l''|)! = |l'|! |l''|!, \quad (5.54)$$

podemos substituir na Eq. (5.23) e, finalmente, obter as constantes de recobri-

mento para $l'' < 0$, que serão:

$$\Lambda_{p00}^{l'l''} = \delta_{l,l'+l''} \sum_{m=0}^P \delta_{pm} \sqrt{\frac{|l'|! |l''|!}{2^{|l'|+|l''|} p! (p+|l'+l''|)! (P-p)!}} \frac{(-1)^p}{(P-p)!}, \quad (5.55)$$

ou,

$$\Lambda_{p00}^{l'l''} = \begin{cases} \delta_{l,l'+l''} \sqrt{\frac{|l'|! |l''|!}{2^{|l'|+|l''|} p! (p+|l'+l''|)! (P-p)!}} \frac{(-1)^p}{(P-p)!}, & \text{se } p \leq P, \\ 0, & \text{se } p > P. \end{cases} \quad (5.56)$$

Capítulo 6

Solução Analítica das Equações

Dinâmicas para SHG

Agora que já conhecemos as constantes de recobrimento, e com isso sabemos quais modos contribuirão nos processos, podemos retornar para as equações dinâmicas multimodos.

Foi necessário fazer algumas considerações para seguir, assim como fizemos nos cálculos das constantes de recobrimento. Por sinal, as considerações são as mesmas que as do Capítulo 5, Seção 5.1, sendo que o primeiro item neste tem mais uma implicação, que será:

- $\Delta k = 0$ leva em

$$g_{2\omega} = 2g_{\omega}. \quad (6.1)$$

E não só o primeiro item será atualizado, mas também o terceiro, que passa a incorporar:

- Dadas as condições iniciais,

$$A_{p'l'}^1(0) = \sum_i \delta_{p'0} \delta_{l'l_i} A_{0l_i}^1(0), \quad (6.2)$$

$$A_{p''l''}^2(0) = \sum_j \delta_{p''0} \delta_{l''l_j} A_{0l_j}^2(0), \quad (6.3)$$

$$B_{pl}(0) = 0, \quad (6.4)$$

os MAO's e as ordens radiais dos campos de frequência ω se manterão constantes ao longo da propagação, isto é:

$$A_{p'l'}^H(z) = \sum_i \delta_{p'0} \delta_{l'l_i} A_{0l_i}^H(z), \quad (6.5)$$

$$A_{p''l''}^V(z) = \sum_j \delta_{p''0} \delta_{l''l_j} A_{0l_j}^V(z). \quad (6.6)$$

A seguir, mostraremos as soluções que encontramos nos problemas que analisamos, inclusive algumas destas são generalizações das analíticas já conhecidas.

6.1 2+1 modos

As condições iniciais deste problema são:

$$A_{p'l'}^H(0) = \delta_{p'0} \delta_{l'l_H} A_{0l_H}^H(0), \quad (6.7)$$

$$A_{p''l''}^V(0) = \delta_{p''0} \delta_{l''l_V} A_{0l_V}^V(0), \quad (6.8)$$

$$B_{pl}(0) = 0, \quad (6.9)$$

$$l_H l_V \geq 0, \quad (6.10)$$

que pelas nossas considerações, e pelas regra de seleção das constantes de recobrimento, Eq. (5.39), evoluem para:

$$A_{p'l'}^H(z) = \delta_{p'0} \delta_{l'l_H} A_{0l_H}^H(z), \quad (6.11)$$

$$A_{p''l''}^V(z) = \delta_{p''0} \delta_{l''l_V} A_{0l_V}^V(z), \quad (6.12)$$

$$\Lambda_{p00}^{l'l''} = \delta_{l,l'+l''} \delta_{p0} \sqrt{\frac{(|l'| + |l''|)!}{2^{|l'|+|l''|} |l'|! |l''|!}} \quad (6.13)$$

As equações que pretendemos resolver aqui são:

$$\frac{dA_{0l_H}^H}{dz} = i g_\omega \Lambda_{000}^{l_H l_V} B_{0(l_H+l_V)} A_{0l_V}^V^*, \quad (6.14)$$

$$\frac{dA_{0l_V}^V}{dz} = i g_\omega \Lambda_{000}^{l_H l_V} B_{0(l_H+l_V)} A_{0l_H}^H^*, \quad (6.15)$$

$$\frac{dB_{0(l_H+l_V)}}{dz} = i 2 g_\omega \Lambda_{000}^{l_H l_V} A_{0l_H}^H A_{0l_V}^V. \quad (6.16)$$

Estas equações já são bem conhecidas, figurando livros didáticos [citar livros], notas de aula [citar algumas], artigos [] e, possivelmente, apareceram em outros meios.

No entanto, por mais que tenham deixado de ser um problema multimodos, ainda são equações não-lineares e resolvê-las continua não sendo uma tarefa simples.

Em livros didáticos e notas de aula, elas costumam aparecer, inicialmente, como:

$$\frac{dA_H}{dz} = i G B A_V^*, \quad (6.17)$$

$$\frac{dA_V}{dz} = i G B A_H^*, \quad (6.18)$$

$$\frac{dB}{dz} = i 2 G A_H A_V. \quad (6.19)$$

onde os campos são considerados ondas planas. Nessa configuração, naturalmente, não se tem modos, tem-se apenas as polarizações para separar os campos. E como a estrutura destas equações é a mesma que das equações que queremos resolver (Eq. (6.14), Eq. (6.15) e Eq. (6.16)), vamos considerar essas por possuírem uma notação menos carregada.

Na verdade, vamos fazer uma pequena modificação nas Eq. (6.17), Eq. (6.18) e Eq. (6.19):

$$\frac{d\bar{A}_H}{dz} = \imath\mu G\bar{B}\bar{A}_V^*, \quad (6.20)$$

$$\frac{d\bar{A}_V}{dz} = \imath\nu G\bar{B}\bar{A}_H^*, \quad (6.21)$$

$$\frac{d\bar{B}}{dz} = \imath 2\eta G\bar{A}_H\bar{A}_V, \quad (6.22)$$

por estas servirem também para solucionar o problema envolvendo $2 + (P + 1)$ modos, que será discutido na seção a seguir (Seção 6.2).

A forma que encontramos de trabalhar esse sistema, obtendo relações interessantes e uma solução analítica, foi substituir os campos por suas intensidades e fases, como na Subseção. 2.3.1. Desta forma, escreve-se:

$$\frac{d\bar{I}_H}{dz} = 2\mu G\sqrt{\bar{J}\bar{I}_H\bar{I}_V} \text{sen}(\bar{\xi}), \quad (6.23)$$

$$\bar{I}_H \frac{d\bar{\phi}_H}{dz} = \mu G\sqrt{\bar{J}\bar{I}_H\bar{I}_V} \cos(\bar{\xi}), \quad (6.24)$$

$$\frac{d\bar{I}_V}{dz} = 2\nu G\sqrt{\bar{J}\bar{I}_H\bar{I}_V} \text{sen}(\bar{\xi}), \quad (6.25)$$

$$\bar{I}_V \frac{d\bar{\phi}_V}{dz} = \nu G \sqrt{\bar{J} \bar{I}_H \bar{I}_V} \cos(\bar{\xi}), \quad (6.26)$$

$$\frac{d\bar{J}}{dz} = -4\eta G \sqrt{\bar{J} \bar{I}_H \bar{I}_V} \sin(\bar{\xi}), \quad (6.27)$$

$$\bar{J} \frac{d\bar{\psi}}{dz} = 2\eta G \sqrt{\bar{J} \bar{I}_H \bar{I}_V} \cos(\bar{\xi}), \quad (6.28)$$

onde

$$\bar{\xi} = \bar{\phi}_H + \bar{\phi}_V - \bar{\psi}. \quad (6.29)$$

As relações de Manley-Rowe, nesse caso (Eq. (2.97) e Eq. (2.100)), serão:

$$\bar{I}_V(z) = \frac{\nu}{\mu} \bar{I}_H(z) + \left(\bar{I}_V(0) - \frac{\nu}{\mu} \bar{I}_H(0) \right) \quad (6.30)$$

$$\bar{J}(z) = -2\frac{\eta}{\mu} \bar{I}_H(z) + \left(\bar{J}(0) + 2\frac{\eta}{\mu} \bar{I}_H(0) \right) \quad (6.31)$$

Uma relação interessante surge quando derivamos a Eq. (6.28) (ou Eq. (6.24) ou Eq. (6.26)):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left(\bar{J} \frac{d\bar{\psi}}{dz} \right) &= \left[\frac{2\eta G}{2\sqrt{\bar{J} \bar{I}_H \bar{I}_V}} \left(\frac{d\bar{J}}{dz} \bar{I}_H \bar{I}_V + \bar{J} \frac{d\bar{I}_H}{dz} \bar{I}_V + \bar{J} \bar{I}_H \frac{d\bar{I}_V}{dz} \right) \right] \cos(\bar{\xi}) \\ &+ 2\eta G \sqrt{\bar{J} \bar{I}_H \bar{I}_V} \left(-\sin(\bar{\xi}) \frac{d\bar{\xi}}{dz} \right) \end{aligned} \quad (6.32)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left(\bar{J} \frac{d\bar{\psi}}{dz} \right) &= \frac{2\eta G \cos(\bar{\xi})}{2\mu \sqrt{\bar{J}\bar{I}_H\bar{I}_V}} (-2\eta \bar{I}_H \bar{I}_V + \mu \bar{J} \bar{I}_V + \nu \bar{J} \bar{I}_H) \frac{d\bar{I}_H}{dz} \\ &- 2\eta G \sqrt{\bar{J}\bar{I}_H\bar{I}_V} \sin(\bar{\xi}) \left(\frac{d\bar{\phi}_H}{dz} + \frac{d\bar{\phi}_V}{dz} - \frac{d\bar{\psi}}{dz} \right) \end{aligned} \quad (6.33)$$

e adiantado alguns passos, chegamos a:

$$\frac{d}{dz} \left(\bar{J} \frac{d\bar{\psi}}{dz} \right) = 0. \quad (6.34)$$

Ou seja, a quantidade entre parêntese é conservada. Assim temos, comparando com a Eq. (6.28):

$$\sqrt{\bar{J}(z)\bar{I}_H(z)\bar{I}_V(z)} \cos(\bar{\xi}(z)) = \sqrt{\bar{J}(0)\bar{I}_H(0)\bar{I}_V(0)} \cos(\bar{\xi}(0)). \quad (6.35)$$

A Eq. (6.35) é uma importante relação de conservação, que nos trará mais informações daqui para frente. Um caso especial desta que aparece quando aplicamos as condições iniciais do nosso problema, mais especificamente $J(0) = 0$ (Eq. (6.10)) é

$$\sqrt{\bar{J}(z)\bar{I}_H(z)\bar{I}_V(z)} \cos(\bar{\xi}(z)) = 0. \quad (6.36)$$

Aplicando Eq. (6.36) em Eq. (6.24), Eq. (6.26) e Eq. (6.28)

$$\bar{I}_H \frac{d\bar{\phi}_H}{dz} = 0 \quad (6.37)$$

$$\bar{I}_V \frac{d\bar{\phi}_V}{dz} = 0 \quad (6.38)$$

$$\bar{J} \frac{d\bar{\psi}}{dz} = 0 \quad (6.39)$$

e isso nos leva a concluir que:

- a intensidade, para um dado comprimento, deve ser nula; ou
- se a intensidade, para um dado comprimento, não for nula a fase necessari-

amente se conserva.

6.1.1 Solução analítica

Aqui vamos buscar uma solução analítica para o problema. Para isto vamos considerar que há Travamento de Fase¹ em todo o cristal, ou seja,

$$\cos(\bar{\xi}(z)) = 0, \forall z. \quad (6.40)$$

Ao substituir em Eq. (6.36), chega-se a:

$$\bar{I}_H(z) \neq 0, \quad (6.41)$$

$$\bar{I}_V(z) \neq 0, \quad (6.42)$$

$$\bar{J}(z \neq 0) \neq 0, \quad (6.43)$$

$$\bar{\phi}_H(z) + \bar{\phi}_V(z) - \bar{\psi}(z) = (2n + 1) \frac{\pi}{2}. \quad (6.44)$$

Como as intensidades são todas não nulas ao longo do cristal, as fases, como vimos anteriormente, serão todas conservadas, ou seja,

$$\bar{\phi}_H(z) = \bar{\phi}_H(0), \quad (6.45)$$

$$\bar{\phi}_V(z) = \bar{\phi}_V(0), \quad (6.46)$$

$$\bar{\psi}(z) = \bar{\psi}(0), \quad (6.47)$$

e o que chamamos de Travamento de Fase é traduzido na equação:

$$\bar{\phi}_H(z) + \bar{\phi}_V(z) - \bar{\psi}(z) = \bar{\phi}_H(0) + \bar{\phi}_V(0) - \bar{\psi}(0) = (2n + 1) \frac{\pi}{2}. \quad (6.48)$$

Além de considerar o Travamento de Fase em todo o cristal, vamos considerar

¹Em inglês é conhecido como Phase Lock.

que:

$$\bar{I}_V(0) = \frac{\nu}{\mu} \bar{I}_H(0). \quad (6.49)$$

Assim, as Eq. (6.30) e Eq. (6.31) se tornam:

$$\bar{I}_V(z) = \frac{\nu}{\mu} \bar{I}_H(z), \quad (6.50)$$

$$\bar{J}(z) = 2 \frac{\eta}{\mu} (\bar{I}_H(0) - \bar{I}_H(z)). \quad (6.51)$$

Substituindo essas equações e a Eq. (6.40) nas Eq. (6.23), Eq. (6.25) e Eq. (6.27), o sistema de equações para as intensidade se reduz a Eq. (6.50), Eq. (6.51) e

$$\frac{d\bar{J}}{dz}(z) = (-1)^{n+1} 2\sqrt{\mu\nu}G \left(2\frac{\eta}{\mu} \bar{I}_H(0) - \bar{J}(z) \right) \sqrt{\bar{J}(z)}, \quad (6.52)$$

que, por sua vez, tem como solução:

$$\bar{J}(z) = 2\frac{\eta}{\mu} \bar{I}_H(0) \tanh^2 \left(\sqrt{2\bar{I}_H(0)} \sqrt{\eta\nu} G z \right), \quad (6.53)$$

$$\bar{I}_H(z) = \bar{I}_H(0) \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{2\bar{I}_H(0)} \sqrt{\eta\nu} G z \right), \quad (6.54)$$

$$\bar{I}_V(z) = \frac{\nu}{\mu} \bar{I}_H(z). \quad (6.55)$$

Finalmente, para obter a solução do nosso problema a 2 + 1 modos, basta substituir

$$\mu = \nu = \eta = 1, \quad (6.56)$$

$$G = g_\omega \Lambda_{000}^{l_H l_V}, \quad (6.57)$$

nas equações anteriores e chegamos a:

$$J_{0(l_H+l_V)}(z) = 2I_{0l_H}^H(0) \tanh^2 \left(\sqrt{2I_{0l_H}^H(0)g_\omega\Lambda_{000}^{l_Hl_V}} z \right), \quad (6.58)$$

$$I_{0l_H}^H(z) = I_{0l_H}^H(0) \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{2I_{0l_H}^H(0)g_\omega\Lambda_{000}^{l_Hl_V}} z \right), \quad (6.59)$$

$$I_{0l_V}^V(z) = I_{0l_H}^H(z). \quad (6.60)$$

que já é conhecida desde 1962 [19], com a diferença de que aqui a solução serve para quaisquer l_H e l_V tais que $l_Hl_V \geq 0$.

6.2 $2 + (P + 1)$ modos

As condições iniciais aqui são:

$$A_{p'l'}^1(0) = \delta_{p'0}\delta_{l'l_H}A_{0l_H}^1(0), \quad (6.61)$$

$$A_{p''l''}^2(0) = \delta_{p''0}\delta_{l''l_V}A_{0l_V}^2(0), \quad (6.62)$$

$$B_{pl}(0) = 0, \quad (6.63)$$

$$l_Hl_V < 0, \quad (6.64)$$

que pelas nossas considerações, e pelas regra de seleção das constantes de recobrimento, Eq. (5.55), evoluem para:

$$A_{p'l'}^1(z) = \delta_{p'0}\delta_{l'l_H}A_{0l_H}^1(z), \quad (6.65)$$

$$A_{p''l''}^2(z) = \delta_{p''0}\delta_{l''l_V}A_{0l_V}^2(z), \quad (6.66)$$

$$\Lambda_{p00}^{l'l''} = \delta_{l,l'+l''} \sum_{m=0}^P \delta_{mp} \sqrt{\frac{|l'!| |l''!|}{2^{|l'+l''|} p! (p + |l' + l''|)! (P - p)!}} (-1)^p. \quad (6.67)$$

As equações que pretendemos resolver aqui são:

$$\begin{aligned}
\frac{dA_{0l_H}^H}{dz} &= ig_\omega \sum_{p=0}^P \Lambda_{p00}^{l_H l_V} B_{p(l_H+l_V)} A_{0l_V}^V, \\
\frac{dA_{0l_V}^V}{dz} &= ig_\omega \sum_{p=0}^P \Lambda_{p00}^{l_H l_V} B_{p(l_H+l_V)} A_{0l_H}^H, \\
\frac{dB_{0(l_H+l_V)}}{dz} &= i2g_\omega \Lambda_{000}^{l_H l_V} A_{0l_H}^H A_{0l_V}^V \\
\frac{dB_{1(l_H+l_V)}}{dz} &= i2g_\omega \Lambda_{100}^{l_H l_V} A_{0l_H}^H A_{0l_V}^V \\
&\vdots \\
\frac{dB_{p(l_H+l_V)}}{dz} &= i2g_\omega \Lambda_{p00}^{l_H l_V} A_{0l_H}^H A_{0l_V}^V \\
&\vdots \\
\frac{dB_{P(l_H+l_V)}}{dz} &= i2g_\omega \Lambda_{P00}^{l_H l_V} A_{0l_H}^H A_{0l_V}^V.
\end{aligned} \tag{6.68}$$

Analisando as equações acima, é possível notar que

$$\frac{dB_{p(l_H+l_V)}}{dz} = \beta_p^{l_H l_V} \frac{dB_{0(l_H+l_V)}}{dz}, \tag{6.69}$$

com

$$\beta_p^{l_H l_V} = \frac{\Lambda_{p00}^{l_H l_V}}{\Lambda_{000}^{l_H l_V}}, \tag{6.70}$$

que, por sua vez, leva a²:

$$B_{p(l_H+l_V)} = \beta_p^{l_H l_V} B_{0(l_H+l_V)}. \tag{6.71}$$

Substituindo essas relações no sistema de Equações Dinâmicas, descrito por

²Lembrando que $B_{p(l_H+l_V)}(0) = 0$.

Eq. (6.68), conseguimos reescrevê-lo como:

$$\frac{dA_{0l_H}^H}{dz} = \nu \gamma_{l_H l_V} \tilde{G} B_{0(l_H+l_V)} A_{0l_V}^{V*}, \quad (6.72)$$

$$\frac{dA_{0l_V}^V}{dz} = \nu \gamma_{l_H l_V} \tilde{G} B_{0(l_H+l_V)} A_{0l_H}^{H*}, \quad (6.73)$$

$$\frac{dB_{0(l_H+l_V)}}{dz} = i2\tilde{G} A_{0l_H}^H A_{0l_V}^V, \quad (6.74)$$

com³

$$\tilde{G} = g_\omega \Lambda_{000}^{l_H l_V}, \quad (6.75)$$

$$\gamma_{l_H l_V} = \sum_{p=0}^P (\beta_p^{l_H l_V})^2. \quad (6.76)$$

As Eq. (6.72), Eq. (6.73) e Eq. (6.74) nos dizem que a dinâmica do problema a $2 + (P + 1)$ modos se reduz ao problema a $2 + 1$ modos. Fato este que nos foi bem surpreendente e interessante - pois graças a isso basta resolver o problema a $2 + 1$ modos, que já estamos solucionando toda a família de problemas com $2 + (P + 1)$ modos.

Logo, para encontrar uma solução analítica para este problema, basta voltar nas Eq. (6.53), Eq. (6.54) e Eq. (6.55), e substituir

$$\mu = \gamma_{l_H l_V}, \quad (6.77)$$

$$\nu = \gamma_{l_H l_V}, \quad (6.78)$$

$$G = \tilde{G}, \quad (6.79)$$

$$\eta = 1, \quad (6.80)$$

³Os cálculos de $\alpha_{l_H l_V}$ serão desenvolvidos no Apêndice B.

que encontramos

$$J_{0(l_H+l_V)}(z) = \frac{2I_{0l_H}^H(0)}{\alpha} \tanh^2 \left(\sqrt{2\gamma_{l_H l_V} I_{0l_H}^H(0) g_\omega \Lambda_{000}^{l_H l_V}} z \right), \quad (6.81)$$

$$I_{0l_H}^H(z) = I_{0l_H}^H(0) \operatorname{sech}^2 \left(\sqrt{2\gamma_{l_H l_V} I_{0l_H}^H(0) g_\omega \Lambda_{000}^{l_H l_V}} z \right), \quad (6.82)$$

$$J_{p(l_H+l_V)}(z) = \gamma_{l_H l_V} J_{0(l_H+l_V)}(z), \quad (6.83)$$

$$I_{0l_V}^V(z) = I_{0l_H}^H(z). \quad (6.84)$$

Para descobrir as fases ψ_p , basta retornar em Eq. (6.70) e reescrevê-la como:

$$\beta_p^{l_H l_V} = (-1)^p |\beta_p^{l_H l_V}|. \quad (6.85)$$

Assim, substituindo em Eq. (6.71),

$$B_{p(l_H+l_V)} = (-1)^p |\beta_p^{l_H l_V}| B_{0(l_H+l_V)} \quad (6.86)$$

$$\sqrt{J_{p(l_H+l_V)}} e^{i\psi_p(l_H+l_V)} = e^{ip\pi} |\beta_p^{l_H l_V}| \sqrt{J_{0(l_H+l_V)}} e^{i\psi_0(l_H+l_V)} \quad (6.87)$$

e, por fim, encontramos:

$$\psi_{p(l_H+l_V)} = \psi_{0(l_H+l_V)} + (2n + p) \pi. \quad (6.88)$$

Capítulo 7

Soma de Momento Angular Orbital na Geração de Segundo Harmônico

Este capítulo gira em torno do artigo "Arbitrary orbital angular momentum addition in second harmonic generation", [11], pois foi analisando estes resultados interessantes que surgiram dúvidas que culminaram em uma análise mais precisa do processo de SHG com vórtices óticos.

O primeiro ganho obtido a partir desta análise foi uma melhor definição teórica dos resultados experimentais de [11] sobre soma de MAO, propondo deixar a questão do astigmatismo mais para segundo plano e, em contra partida, tomando a sua frente considerar ordens radiais maiores que zero, mostrando que as constantes de recobrimento para esses casos não são tão desprezíveis como se esperava.

Além disso, é apresentada uma sequência ao Mistura de MAO Controlada por Polarização¹, proposto também em [11], expondo novas ideias e resultados interessantes.

O esquema experimental utilizado encontra-se em Fig. 7.1. Ele contém todos os passos realizados para preparar e manipular o vórtice inicial, o cristal onde

¹Do inglês: Polarization Contolled OAM Mixing.

nossos modos (Laguerre-Gauss) para os modos de Hermite-Gauss a 45°, para assim compararmos com os resultados experimentais; em seguida vamos destrinchar a Soma de MAO; e por fim apresentar nossos avanços sobre Mistura de MAO Controlada por Polarização.

7.1 Conversão de modos

A conversão de modos aqui apresentada é baseada em [procurar paper que encontrei isso].

Primeiro vamos escrever os modos que vamos utilizar², que são o modo Laguerre-Gauss diferenciado, definido um pouco diferente da Eq. (2.63):

$$U_{nm}^i = (-1)^{\min(n,m)} \frac{C_{nm}^{LG}}{\varpi_i} \left(\frac{2r^2}{\varpi_i^2} \right)^{\frac{|n-m|}{2}} L_{\min(n,m)}^{|n-m|} \left(\frac{2r^2}{\varpi_i^2} \right) e^{-\frac{r^2}{\varpi_i^2}} e^{i \left(\frac{r^2}{\varpi_i^2} + (n-m)\theta \right)} \quad (7.1)$$

$$C_{nm}^{LG} = \sqrt{\frac{2}{\pi n! m!}} \min(n, m)! \quad (7.2)$$

Também vamos precisar dos modos de Hermite-Gauss:

$$v_{nm}^i = \frac{C_{nm}^{HG}}{\varpi_i} H_n \left(\frac{\sqrt{2}x}{\varpi_i} \right) H_m \left(\frac{\sqrt{2}y}{\varpi_i} \right) e^{-\frac{(x^2+y^2)}{\varpi_i^2}} e^{i \frac{(x^2+y^2)}{\varpi_i^2}}, \quad (7.3)$$

$$C_{nm}^{HG} = \sqrt{\frac{2}{\pi 2^{n+m} n! m!}}, \quad (7.4)$$

e dos modos Hermite-Gauss a 45°:

$$w_{nm}^i(x, y, z) = v_{nm}^i \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}}, z \right). \quad (7.5)$$

De posse das equações acima, a conversão dos modos de Laguerre-Gauss di-

²Lembrando que estamos considerando o comprimento de Rayleigh muito maior que o tamanho do cristal.

ferenciado e Hermite-Gauss a 45° para Hermite-Gauss será dada por

$$U_{nm}^i = \sum_{j=0}^N t^j b(n, m, j) v_{N-j, j}^i, \quad (7.6)$$

$$w_{nm}^i = \sum_{j=0}^N b(n, m, j) v_{N-j, j}^i, \quad (7.7)$$

$$b(n, m, j) = \sqrt{\frac{(N-j)! j!}{2^N n! m!}} \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dt^j} [(1-t)^n (1+t)^m] |_{t=0}, \quad (7.8)$$

$$N = n + m. \quad (7.9)$$

Comparando Eq. (2.63) com Eq. (7.1), temos a relação entre o modo de Laguerre-Gauss diferenciado com o modo Laguerre-Gauss, que será:

$$u_{pl}^i = (-1)^{-p} U_{nm}^i, \quad (7.10)$$

$$p = \min(n, m), \quad (7.11)$$

$$l = n - m. \quad (7.12)$$

Conseguimos escrever as conversões de modos Laguerre-Gauss para Hermite-Gauss e Hermite-Gauss a 45° para Hermite-Gauss, agora precisamos entender o que acontece experimentalmente para sabermos o que fazer com essas conversões.

A "lâmina tiltada", que faz o papel de um conversor Laguerre-Gauss/Hermite-Gauss a 45°, tem ação pelo operador "Q", tal que:

$$Q v_{nm}^i = (-i)^m v_{nm}^i. \quad (7.13)$$

Como o modo Laguerre-Gauss tem uma expansão em modos de Hermite-Gauss, dado pelas equações acima, estes últimos terão suas fases alteradas pela "lâmina tiltada", e com a diferença de fase criada que se dá a conversão. Os cálculos mais

detalhados da conversão podem ser vistos no Apêndice A.

7.2 Soma de MAO

O procedimento utilizado em [11] para comprovar a soma de MAO arbitrário foi comparar os perfis de intensidade do segundo harmônico encontrados experimentalmente com os esperados. Portanto, vamos seguir a mesma orientação para mostrar os nossos resultados.

Os perfis *a-*), *c-*), *d-*) e *e-*) da Fig. 7.1 se mostram compatíveis com o esperado, o que comprovaria a soma de MAO nestes casos. No entanto, o item *b-*) apresenta um perfil oval, diferente do previsto, que era esférico. Com isso, a estratégia deles passou a ser a contagem de linhas nodais, argumentado que o perfil oval, e outras possíveis deformações menos chamativas, surgiu do astigmatismo promovido pela "lente tiltada".

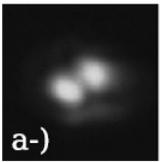
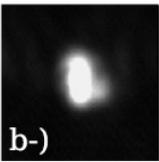
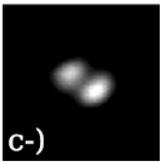
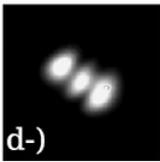
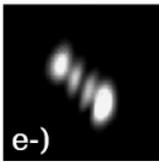
$l_{\text{SLM}} \backslash l_{\text{Mask}}$	-2	-1	0	1	2
1	 a-)	 b-)	 c-)	 d-)	 e-)
$l_{2\omega}$	-1	0	1	2	3

Figure 3. Topological charge addition in type II SHG. The value of the topological charge produced in the second harmonic field is determined by the number of nodal lines and the orientation of the HG profiles. In all cases $l_{\text{Mask}} = 1$. (a) $l_{\text{SLM}} = -2$, $l_{2\omega} = -1$, (b) $l_{\text{SLM}} = -1$, $l_{2\omega} = 0$, (c) $l_{\text{SLM}} = 0$, $l_{2\omega} = 1$, (d) $l_{\text{SLM}} = 1$, $l_{2\omega} = 2$, (e) $l_{\text{SLM}} = 2$, $l_{2\omega} = 3$. The SHG topological charge is consistent with $l_{2\omega} = l_{\text{Mask}} + l_{\text{SLM}}$.

Figura 7.2: Retirada de [11]. Resultados experimentais para Soma de MAO arbitrário. As figuras são os perfis de intensidade do segundo harmônico.

Finalmente todas as imperfeições foram justificadas e, contando as linhas nodais e observando a orientação do perfil, obtemos o MAO experimentalmente, que se assemelha ao esperado.

No entanto, não ficamos cem por cento satisfeitos com essas justificativas para o "perfil oval", pois suspeitávamos que ordens radiais não nulas (isto é, $p > 0$) estariam produzindo esse efeito.

Assim, começamos a estudar e calcular as constantes de recobrimento, descritas anteriormente no Capítulo 5. Foi então que percebemos que o astigmatismo pode não ser tão central para explicar o perfil oval do item *b-*) da Fig. 7.1.

Voltando no Capítulo 5:

- Para $l_H l_V \geq 0$, a única ordem radial do segundo harmônico que aparece no problema é $p = 0$. Ou seja, os outros modos com $p \neq 0$ não são desprezados, eles de fato não vão surgir, pois as constantes de recobrimento que acoplam estes modos no sistema serão todas nulas.
- Para $l_H l_V < 0$, vimos que as constantes de recobrimento vão acoplar modos do segundo harmônico com ordens radiais que estarão limitadas superiormente por P (isto é $p \leq P$, com $P = \min(|l_H|, |l_V|)$). Ou seja, neste caso teremos modos de ordens radiais superiores que entrarão na dinâmica do sistema.

Retornando a Fig. 7.2, temos que o MAO na máscara é fixado em $l_{Mask} = 1$. Assim, quando $l_{SLM} \geq 0$ sabemos que a única ordem radial que surge é $p = 0$ e o experimento vai de encontro ao esperado, como mostram as Fig. 7.3, Fig. 7.4 e Fig. 7.5.

Já no caso em que $l_{SLM} < 0$, nós temos que $P = 1$. Ou seja, além do modo com $p = 0$, participará do processo o modo com $p = 1$. Mas qual será a relevância deste último? Será que ele não pode ser realmente desprezado?

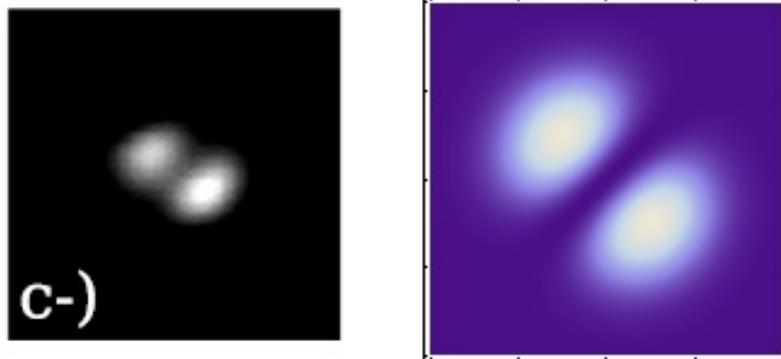


Figura 7.3: Figura do canto esquerdo retirada de [11]. Comparação entre o resultado experimental (canto esquerdo) e a simulação dos resultados teóricos discutidos ao longo desta tese (canto direito) do perfil de intensidade do segundo harmônico para a soma " $l_{Mask} = 1$ " mais " $l_{SLM} = 0$ ", resultando em " $l = 1$ ".

Para começar a responder essas perguntas, precisamos, primeiro, calcular as constantes de recobrimento neste caso. Voltando na Eq. (5.23) e aplicando $P = 1$, $l_{Mask} = 1$ e $l_{SLM} = -|l_{SLM}|$ chegamos a:

$$\Lambda_{p00}^{l1(-|l_{SLM}|)} = \delta_{l,1-|l_{SLM}|} \sum_{m=0}^1 \delta_{pm} \sqrt{\frac{|l_{SLM}|!}{2^{|l_{SLM}|+1} p! (p + |l_{SLM}| - 1)!}} \quad (7.14)$$

que equivale a:

$$\Lambda_{000}^{l1(-|l_{SLM}|)} = \delta_{l,1-|l_{SLM}|} \sqrt{\frac{|l_{SLM}|}{2^{|l_{SLM}|+1}}}, \quad (7.15)$$

$$\Lambda_{100}^{l1(-|l_{SLM}|)} = -\delta_{l,1-|l_{SLM}|} \sqrt{\frac{1}{2^{|l_{SLM}|+1}}}, \quad (7.16)$$

e comparando estas duas, temos que:

$$\Lambda_{100}^{l1(-|l_{SLM}|)} = -\frac{1}{\sqrt{|l_{SLM}|}} \Lambda_{000}^{l1(-|l_{SLM}|)} \quad (7.17)$$

Agora, respondendo a questão levantada:

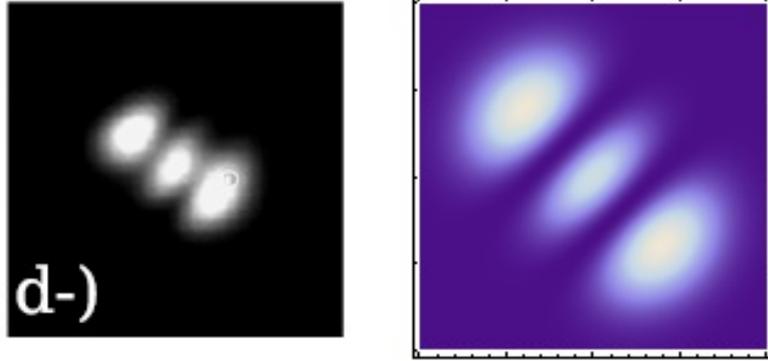


Figura 7.4: Figura do canto esquerdo retirada de [11]. Comparação entre o resultado experimental (canto esquerdo) e a simulação dos resultados teóricos discutidos ao longo desta tese (canto direito) do perfil de intensidade do segundo harmônico para a soma " $l_{Mask} = 1$ " mais " $l_{SLM} = 1$ ", resultando em " $l = 2$ ".

- No caso em que $l_{SLM} = -2$, temos que:

$$\Lambda_{100}^{l1(-2)} = -\frac{1}{2}\Lambda_{000}^{l1(-2)}. \quad (7.18)$$

Podemos pensar na competição entre a geração dos modos $B_{0(-1)}$ e $B_{1(-1)}$, e o último teria um peso 50% menor de surgir que o primeiro. Então, neste caso, dá até pra vislumbrar a possibilidade de desconsiderar o modo com $p = 1$. No entanto, esta pode não ser uma aproximação tão boa. A comparação entre o experimento e o que simulamos está na Fig. 7.6.

- No caso em que $l_{SLM} = -1$, temos que:

$$\lambda_{11}^{1(-1)} = -\lambda_{01}^{1(-1)}. \quad (7.19)$$

Aqui ambos os modos B_{00} e B_{10} possuem o mesmo peso para serem gerados, e desconsiderar o último se torna uma aproximação um tanto grosseira. A comparação entre o experimento e o que simulamos está na Fig. 7.7 (re-

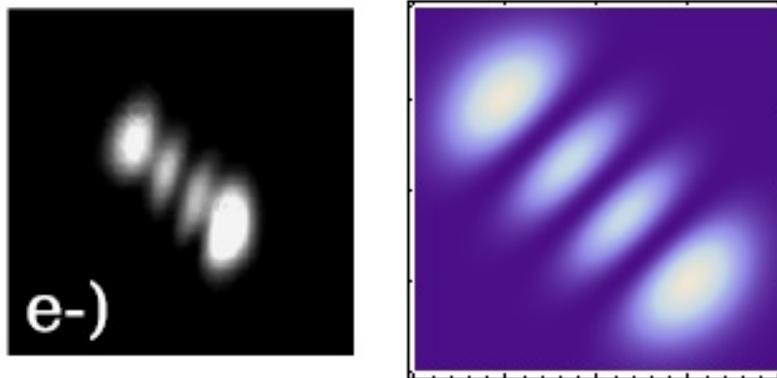


Figura 7.5: Figura do canto esquerdo retirada de [11]. Comparação entre o resultado experimental (canto esquerdo) e a simulação dos resultados teóricos discutidos ao longo desta tese (canto direito) do perfil de intensidade do segundo harmônico para a soma " $l_{Mask} = 1$ " mais " $l_{SLM} = 2$ ", resultando em " $l = 3$ ".

pare que há uma rotação de 90° entre as figuras, que pode ter surgido numa mudança na orientação da "câmera CCD", por exemplo).

7.3 Mistura de MAO Controlada por Polarização

A ideia do experimento esquematizado na Fig. 7.1 foi montar um dispositivo capaz de realizar soma de MAO arbitrário, tanto somando dois feixes diferentes quanto somando o mesmo feixe (que é a dobra do MAO). Eles conseguiram realizar várias possibilidades com o aparato. Então a questão da soma de MAO, esmiuçada na seção anterior, retorna aqui, mas agora discutiremos melhor outra possibilidade, que é o problema da Mistura de MAO Controlada por Polarização.

Com o auxílio da "barreira B" e da "HWP-3", eles foram capazes de criar diferentes pesos nas combinações do feixe SLM e do feixe Mask, que consequentemente dão origem aos perfis de intensidade do segundo harmônico mostrados em Fig. 7.8. Então vamos logo detalhar nosso objeto de trabalho.

Para obter o perfil do item *a-*) da Fig. 7.8, foi preciso que a "barreira B"

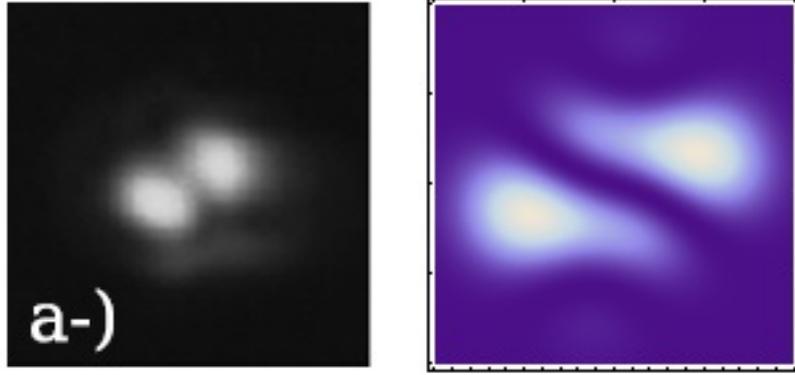


Figura 7.6: Figura do canto esquerdo retirada de [11]. Comparação entre o resultado experimental (canto esquerdo) e a simulação dos resultados teóricos discutidos ao longo desta tese (canto direito) do perfil de intensidade do segundo harmônico para a soma " $l_{Mask} = 1$ " mais " $l_{SLM} = -2$ ", resultando em " $l = -1$ ".

bloqueasse o feixe SLM, operando no que vamos chamar aqui de função Mask, e que a "HWP-3" fosse posicionada em $\alpha = 45^\circ$. Assim, o modo resultante que entra no cristal terá a forma:

$$\mathbf{E}_\omega^{Mask}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{I_0}{2}} u_{01}^\omega(\mathbf{r}) (\hat{e}_H + \hat{e}_V) e^{i(kz - \omega t)}, \quad (7.20)$$

isto é, $l_H = l_V = l_{Mask} = 1$ e a soma $l_H + l_V = 2$ nos dá o dobramento de l_{Mask} como comprova o experimento³. Lembramos, que a todo momento, mantemos fixo $l_{Mask} = 1$.

Já para selecionar o perfil do item b-) da Fig. 7.8, foi necessário que a "barreira B" operasse no que vamos chamar aqui de função SLM, e que a "HWP-3" fosse posicionada em $\alpha = -45^\circ$. Assim, o modo resultante que entra no cristal terá a forma:

$$\mathbf{E}_\omega^{SLM}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{I_0}{2}} u_{02}^\omega(\mathbf{r}) (\hat{e}_H + \hat{e}_V) e^{i(kz - \omega t)}, \quad (7.21)$$

isto é, $l_H = l_V = l_{SLM} = 2$ e a soma $l_H + l_V = 4$ nos dá o dobramento de l_{SLM}

³Note que a única ordem radial que surgirá aqui é $p = 0$, pois $l_H l_V = l_{Mask}^2 \geq 0$ sempre.

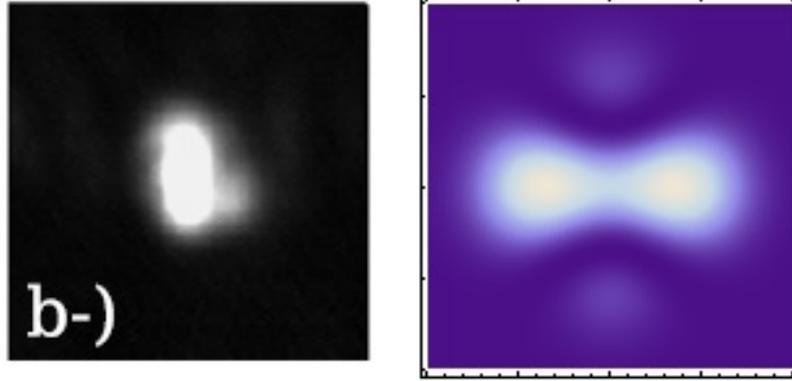


Figura 7.7: Figura do canto esquerdo retirada de [11]. Comparação entre o resultado experimental (canto esquerdo) e a simulação dos resultados teóricos discutidos ao longo desta tese (canto direito) do perfil de intensidade do segundo harmônico para a soma " $l_{Mask} = 1$ " mais " $l_{SLM} = -1$ ", resultando em " $l = 0$ ".

como comprova o experimento⁴. Nesta seção, manteremos fixo, inicialmente, $l_{SLM} = 2$.

E por último, vamos falar da montagem na função Ambos, que possibilitou também a geração dos perfis da Fig. 7.2, discutidos na seção anterior. Neste caso, a "barreira B" vai operar na função Ambos e o modo resultante, imediatamente antes de passar pela "HWP-3", será:

$$\mathbf{E}_{\omega}^{Ambos}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{I_0}{2}} [u_{01}(\mathbf{r})\hat{e}_H + u_{02}(\mathbf{r})\hat{e}_V] e^{i(kz - \omega t)}. \quad (7.22)$$

E, para selecionar o perfil do item $c-$) da Fig. 7.8, após passar pela "HWP-3", basta escolher $\alpha = 0^\circ$ que o feixe terá a mesma forma da Eq. (7.22).

Esta foi a Mistura de MAO Controlada por Polarização proposta e realizada experimentalmente por Buono *at al.* [11]. Agora vamos mostrar nossa contribuição sobre esse assunto.

⁴Note que a única ordem radial que surgirá aqui é $p = 0$, pois $l_H l_V = l_{SLM}^2 \geq 0$ sempre.

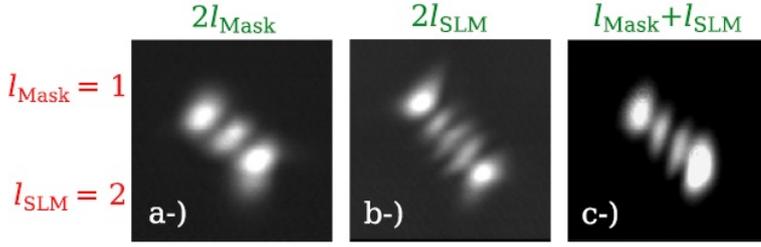


Figure 2. Arbitrary topological charge addition on type II second harmonic generation. (a) $l_{2\omega} = 2$ $l_{\text{Mask}} = 2$, (b) $l_{2\omega} = 2$ $l_{\text{SLM}} = 4$, (c) $l_{2\omega} = l_{\text{Mask}} + l_{\text{SLM}} = 3$.

Figura 7.8: Retirada de [11]. Resultados experimentais para Soma de MAO arbitrário obtido utilizando a Mistura de MAO Controlada por Polarização. As figuras são os perfis de intensidade do segundo harmônico.

7.4 Mistura de MAO Controlada por Polarização Generalizada

Vamos mostrar nossos avanços nesse tema de uma forma mais geral, que pode ser traduzida experimentalmente variando o SLM, como feito na Soma de MAO, e substituindo a máscara por mais um SLM (que chamaremos de SLMask, para diferenciar do outro). Então, faremos a seguir uma releitura das função Mask, função SLM e função Ambos.

Agora, na Função SLMask (anteriormente chamada de função Mask), continuamos com um modo de entrada separável, descrito por:

$$\mathbf{E}_{\omega}^{SLMask}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{I_0} u_{0l_{SLMask}}^{\omega}(\mathbf{r}) (\cos(\alpha)\hat{e}_H + \sin(\alpha)\hat{e}_V) e^{i(kz - \omega t)}, \quad (7.23)$$

com a diferença que neste o momento angular pode variar.

Já a Função SLM difere da anterior pelo fato de que agora o SLM vai variar o momento angular. De resto, continuamos com um modo separável, descrito por:

$$\mathbf{E}_{\omega}^{SLM}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{I_0} u_{0l_{SLM}}^{\omega}(\mathbf{r}) (-\sin(\alpha)\hat{e}_H + \cos(\alpha)\hat{e}_V) e^{i(kz - \omega t)}. \quad (7.24)$$

Até aqui não tivemos uma contribuição tão significativa para esses dois casos. O que trazemos de interessante vem do estudo do problema na Função Ambos.

O que motivou analisar mais detalhadamente a Função Ambos foi a pergunta: "o que acontece se girarmos a "HWP-3", gerando um α qualquer?" O que faremos a seguir é buscar uma resposta a essa questão.

Dado um ângulo α qualquer, o modo que entrará no cristal, na Função Ambos, será:

$$\mathbf{E}_{\omega}^{Ambos}(\mathbf{r}, t, \alpha) = \sqrt{I_0} \{ [u_{0l_{SLMask}}(\mathbf{r})\hat{e}_H + u_{0l_{SLM}}(\mathbf{r})\hat{e}_V] \cos(\alpha) - [u_{0l_{SLM}}(\mathbf{r})\hat{e}_H - u_{0l_{SLMask}}(\mathbf{r})\hat{e}_V] \sin(\alpha) \} e^{i(kz - \omega t)} \quad (7.25)$$

Vamos analisar este processo em três partes:

i) $l_{SLM_{ask}} = l_{SLM} = l$

Neste caso, o modo de entrada descrito por Eq. (7.25) se reduz a:

$$\mathbf{E}_{\omega}^{Ambos}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{2I_0} u_{0l}^{\omega}(\mathbf{r}) \left(\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \hat{e}_H + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \hat{e}_V \right) e^{i(kz - \omega t)}. \quad (7.26)$$

Ou seja, se tivermos dois SLM's com o mesmo MAO e $\alpha = 0$, por exemplo, reproduzimos os casos dos dobramento do MAO (Eq. (7.20) e Eq. (7.21), e itens a-) e b-) da Fig. 7.8) sem precisar usar a "barreira B" e com l qualquer⁵.

ii) $l_{SLM_{ask}} \neq l_{SLM}$, com $\alpha = n\frac{\pi}{2}$

Neste caso, o modo de entrada será descrito por Eq. (7.25), substituindo

⁵Repare que, nesse caso, se $\alpha = (2n + 1)\frac{\pi}{4}$ não teremos GSH.

$\alpha = n\frac{\pi}{2}$ esta é reduzida a:

$$\mathbf{E}_\omega^{Ambos}(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \sqrt{I_0} [u_{0l_{SLM_{ask}}}(\mathbf{r})\hat{e}_H + u_{0l_{SLM}}(\mathbf{r})\hat{e}_V] e^{i(kz-\omega t)}, & \text{se } n \text{ for par} \\ (-1)^n \sqrt{I_0} [u_{0l_{SLM}}(\mathbf{r})\hat{e}_H - u_{0l_{SLM_{ask}}}(\mathbf{r})\hat{e}_V] e^{i(kz-\omega t)}, & \text{se } n \text{ for impar} \end{cases} \quad (7.27)$$

e assim conseguimos reproduzir a soma de MAO representada no item *c-*) da Fig. 7.8, e também na Fig. 7.2.

iii) $l_{SLM_{ask}} \neq l_{SLM}$, com $\alpha \neq n\frac{\pi}{2}$

Nesse caso, este modo possui uma dinâmica mais complicada e, por esse motivo, vamos separá-lo em duas partes, descrevendo-as nas duas subseções seguintes. Para simplificar a notação, vamos utilizar $l_{SLM_{ask}} = l_1$ e $l_{SLM} = l_2$.

7.4.1 $l_{SLM_{ask}} \neq l_{SLM}$, com $l_{SLM_{ask}}l_{SLM} \geq 0$

Nesse caso, não teremos mais um problema a $2 + 1$ equações, apresentado na Seção 6.1, mas sim um problema a $4 + 3$ equações, que será descrito por

⁶Para n é um inteiro qualquer.

$$\frac{dA_{0l_1}^H}{dz} = ig_\omega \left(\Lambda_{000}^{(2l_1)l_1l_1} B_{0(2l_1)} A_{0l_1}^{V*} + \Lambda_{000}^{(l_1+l_2)l_1l_2} B_{0(l_1+l_2)} A_{0l_2}^{V*} \right) \quad (7.28)$$

$$\frac{dA_{0l_1}^V}{dz} = ig_\omega \left(\Lambda_{000}^{(2l_1)l_1l_1} B_{0(2l_1)} A_{0l_1}^{H*} + \Lambda_{000}^{(l_1+l_2)l_1l_2} B_{0(l_1+l_2)} A_{0l_2}^{H*} \right) \quad (7.29)$$

$$\frac{dA_{0l_2}^H}{dz} = ig_\omega \left(\Lambda_{000}^{(2l_2)l_2l_2} B_{0(2l_2)} A_{0l_2}^{V*} + \Lambda_{000}^{(l_1+l_2)l_1l_2} B_{0(l_1+l_2)} A_{0l_1}^{V*} \right) \quad (7.30)$$

$$\frac{dA_{0l_2}^V}{dz} = ig_\omega \left(\Lambda_{000}^{(2l_2)l_2l_2} B_{0(2l_2)} A_{0l_2}^{H*} + \Lambda_{000}^{(l_1+l_2)l_1l_2} B_{0(l_1+l_2)} A_{0l_1}^{H*} \right) \quad (7.31)$$

$$\frac{dB_{0(2l_1)}}{dz} = 2ig_\omega \Lambda_{000}^{(2l_1)l_1l_1} A_{0l_1}^H A_{0l_1}^V, \quad (7.32)$$

$$\frac{dB_{0(2l_2)}}{dz} = 2ig_\omega \Lambda_{000}^{(2l_2)l_2l_2} A_{0l_2}^H A_{0l_2}^V, \quad (7.33)$$

$$\frac{dB_{0(l_1+l_2)}}{dz} = 2ig_\omega \Lambda_{000}^{(l_1+l_2)l_1l_2} (A_{0l_1}^H A_{0l_2}^V + A_{0l_2}^H A_{0l_1}^V). \quad (7.34)$$

Traduzindo as condições iniciais para a notação usada nas equações dinâmicas:

$$A_{0l_1}^H(0) = \sqrt{I_0} \cos(\alpha), \quad (7.35)$$

$$A_{0l_1}^V(0) = \sqrt{I_0} \sen(\alpha), \quad (7.36)$$

$$A_{0l_2}^H(0) = -\sqrt{I_0} \sen(\alpha), \quad (7.37)$$

$$A_{0l_2}^V(0) = \sqrt{I_0} \cos(\alpha), \quad (7.38)$$

onde α é o ângulo de orientação da "HWP-3".

Para esse sistema de equações não encontramos nenhuma solução analítica. Então o que vamos mostrar aqui são soluções numéricas desenvolvidas no software MATLAB.

As Fig. 7.9, Fig. 7.10, Fig. 7.11, Fig. 7.12 e Fig. 7.13 mostram as curvas de intensidade em função do comprimento ao longo do cristal, para algumas orientações (α) da "HWP-3".

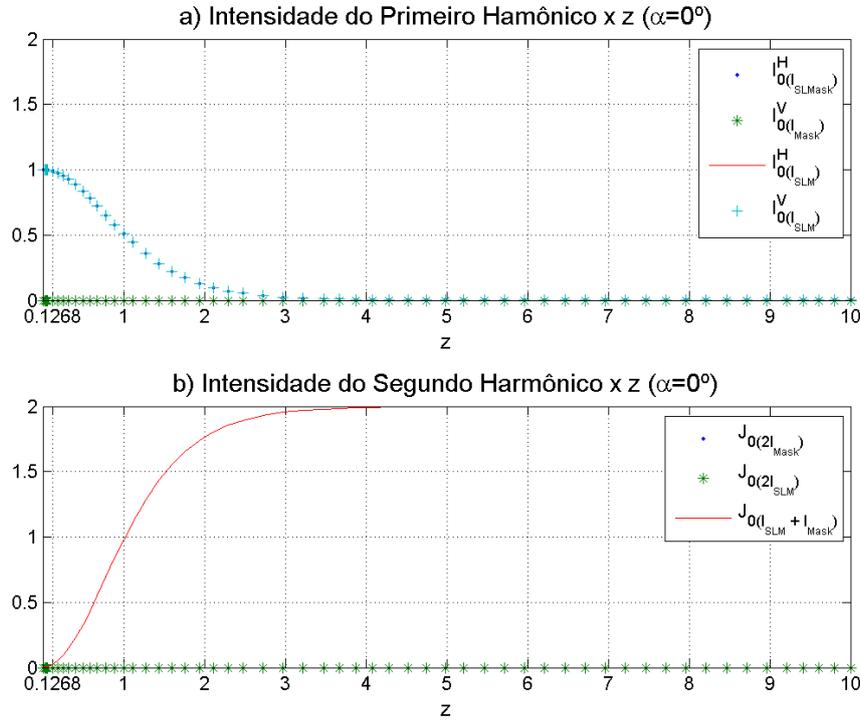


Figura 7.9: Produzida no MATLAB. Intensidades do problema a 7 modos em função do comprimento "z" dentro do cristal para a "HWP-3" orientada a $\alpha = 0^\circ$ - com $g_\omega = 1 u.m.$, $I_0 = 1 u.m.$, $l_{SLM_{ask}} = 1$ e $l_{SLM} = 2$ - sendo: a) as 4 intensidades do primeiro harmônico, e b) as 3 intensidades do segundo harmônico.

Quando $\alpha = 0^\circ$ e $\alpha = 90^\circ$, as intensidades $J_{0(2l_{SLM_{ask}})}$ e $J_{0(2l_{SLM})}$ são nulas, indicando que os dobramentos dos MAO's $l_{SLM_{ask}}$ e l_{SLM} não ocorrem, restando apenas $J_{0(l_{SLM_{ask}} + l_{SLM})}$, dando origem ao feixe com MAO $l_{SLM_{ask}} + l_{SLM}$. Além disso, eles seguem os mesmos tipos de soluções encontradas no Capítulo 6, que são do tipo: $\tanh(x)$, para as intensidades do segundo harmônico, e $\text{sech}(x)$, para as intensidades do primeiro harmônico.

Já para $\alpha = 45^\circ$ acontece o oposto, o feixe contendo a soma $l_{SLM_{ask}} + l_{SLM}$ é suprimido, resultado que nos foi bastante surpreendente, restando o dobramento dos MAO's $l_{SLM_{ask}}$ e l_{SLM} . Mas não para por aí... Os dobramentos surgem como se fossem dois problemas diferentes, um envolvendo o MAO $l_{SLM_{ask}}$ e o

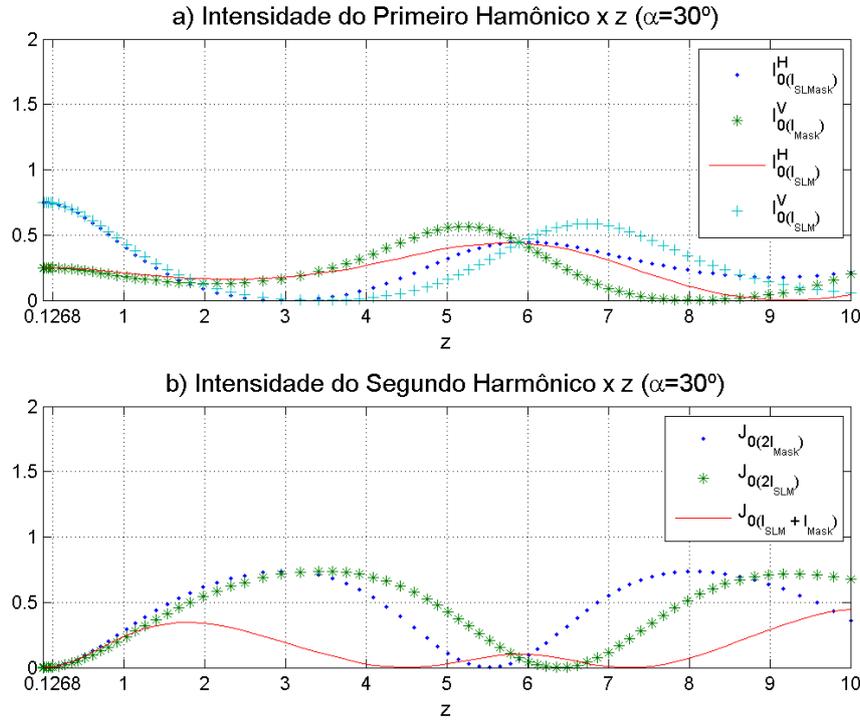


Figura 7.10: Produzida no MATLAB. Intensidades do problema a 7 modos em função do comprimento "z" dentro do cristal para a "HWP-3" orientada a $\alpha = 30^\circ$ - com $g_\omega = 1 u.m.$, $I_0 = 1 u.m.$, $l_{SLM_{ask}} = 1$ e $l_{SLM} = 2$ - sendo: a) as 4 intensidades do primeiro harmônico, e b) as 3 intensidades do segundo harmônico.

outro envolvendo o MAO l_{SLM} . Esses feixes também seguem os mesmos tipos de soluções encontradas no Capítulo 6, que são do tipo: $\tanh(x)$, para as intensidades do segundo harmônico, e $\text{sech}(x)$, para as intensidades do primeiro harmônico.

Para as orientações $\alpha = 30^\circ$ e $\alpha = 60^\circ$, tanto os dobramentos dos MAO's com $l_{SLM_{ask}}$ e l_{SLM} , quanto a soma $l_{SLM_{ask}} + l_{SLM}$ são gerados. Aqui os perfis não são nada simples de modelar.

Essas figuras e observações ilustram bem que esse experimento consegue transitar entre os dobramentos e a soma dos MAO's do primeiro harmônico, com esse controle sendo realizado pela orientação da "HWP-3- que por sua vez controla as polarizações dos feixes envolvidos no processo.

Esse controle das polarizações dos feixes do primeiro harmônico, mediado pela "HWP-3", fica mais evidente na Fig. 7.14. Nesta, plotamos as intensidades em função de α , com cristal de comprimento $z_l = 0.1268m$ (comprimento destacado nas Fig. 7.9, Fig. 7.10, Fig. 7.11, Fig. 7.12 e Fig. 7.13). É possível notar que todas as observações anteriores - sobre as intensidades em função das orientações (α) - continuam valendo, e verificar outras possibilidades que podem ser interessantes.

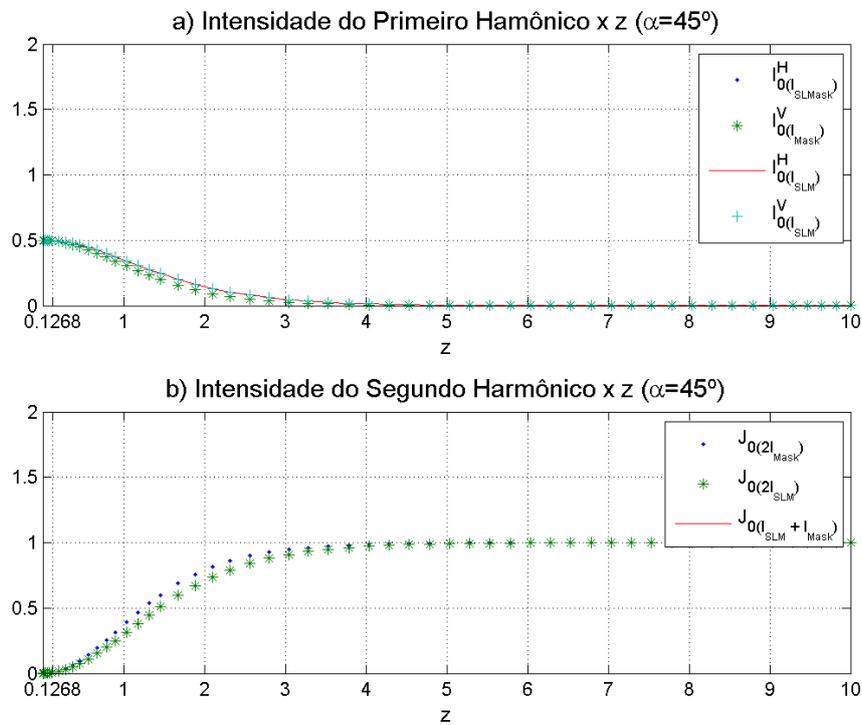


Figura 7.11: Produzida no MATLAB. Intensidades do problema a 7 modos em função do comprimento " z " dentro do cristal para a "HWP-3" orientada a $\alpha = 45^\circ$ - com $g_\omega = 1u.m.$, $I_0 = 1u.m.$, $l_{SLM_{Mask}} = 1$ e $l_{SLM} = 2$ - sendo: a) as 4 intensidades do primeiro harmônico, e b) as 3 intensidades do segundo harmônico.

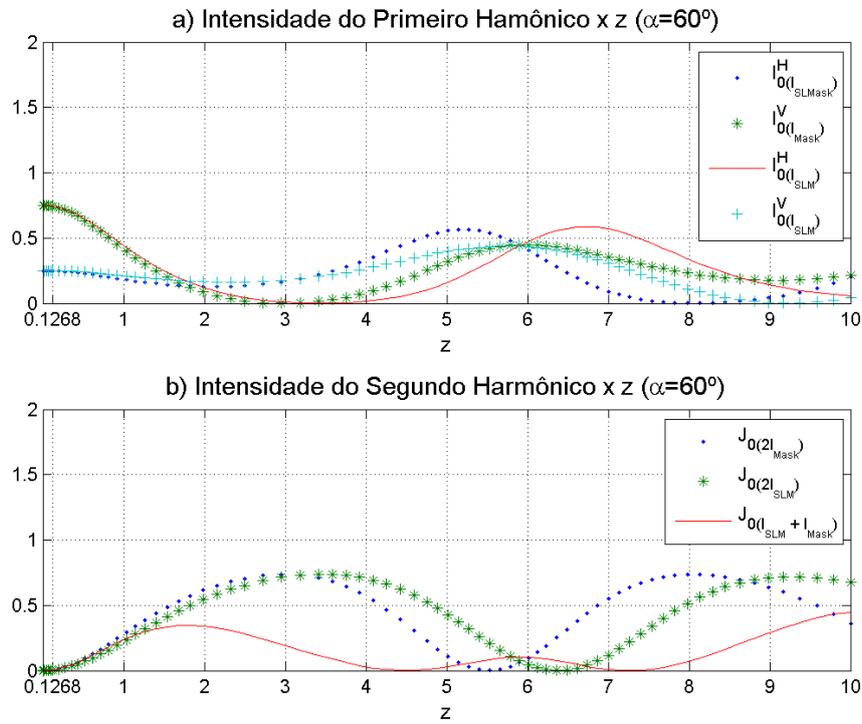


Figura 7.12: Produzida no MATLAB. Intensidades do problema a 7 modos em função do comprimento "z" dentro do cristal para a "HWP-3" orientada a $\alpha = 60^\circ$ - com $g_\omega = 1 u.m.$, $I_0 = 1 u.m.$, $l_{SLM_{Mask}} = 1$ e $l_{SLM} = 2$ - sendo: a) as 4 intensidades do primeiro harmônico, e b) as 3 intensidades do segundo harmônico.

7.4.2 $l_{SLM_{Mask}} \neq l_{SLM}$ com $l_{SLM_{Mask}} l_{SLM} < 0$

Nesse caso, teremos um problema a $4 + (P + 1)$ equações, que será descrito por:

$$\frac{dA_{0l_1}^H}{dz} = ig_\omega \left(\Lambda_{000}^{(2l_1)l_1l_1} B_{0(2l_1)} A_{0l_1}^V{}^* + \sum_{p=0}^P \Lambda_{p00}^{(l_1+l_2)l_1l_2} B_{p(l_1+l_2)} A_{0l_2}^V{}^* \right) \quad (7.39)$$

$$\frac{dA_{0l_1}^V}{dz} = ig_\omega \left(\Lambda_{000}^{(2l_1)l_1l_1} B_{0(2l_1)} A_{0l_1}^H{}^* + \sum_{p=0}^P \Lambda_{p00}^{(l_1+l_2)l_1l_2} B_{p(l_1+l_2)} A_{0l_2}^H{}^* \right) \quad (7.40)$$

$$\frac{dA_{0l_2}^H}{dz} = ig_\omega \left(\Lambda_{000}^{(2l_2)l_2l_2} B_{0(2l_2)} A_{0l_2}^V{}^* + \sum_{p=0}^P \Lambda_{p00}^{(l_1+l_2)l_1l_2} B_{p(l_1+l_2)} A_{0l_1}^V{}^* \right) \quad (7.41)$$

$$\frac{dA_{0l_2}^V}{dz} = ig_\omega \left(\Lambda_{000}^{(2l_2)l_2l_2} B_{0(2l_2)} A_{0l_2}^H{}^* + \sum_{p=0}^P \Lambda_{p00}^{(l_1+l_2)l_1l_2} B_{p(l_1+l_2)} A_{0l_1}^H{}^* \right) \quad (7.42)$$

$$\frac{dB_{0(2l_1)}}{dz} = 2ig_\omega \Lambda_{000}^{(2l_1)l_1l_1} A_{0l_1}^H A_{0l_1}^V \quad (7.43)$$

$$\frac{dB_{0(2l_2)}}{dz} = 2ig_\omega \Lambda_{000}^{(2l_2)l_2l_2} A_{0l_2}^H A_{0l_2}^V \quad (7.44)$$

$$\frac{dB_{0(l_1+l_2)}}{dz} = 2ig_\omega \Lambda_{000}^{(l_1+l_2)l_1l_2} (A_{0l_1}^H A_{0l_2}^V + A_{0l_2}^H A_{0l_1}^V) \quad (7.45)$$

$$\frac{dB_{1(l_1+l_2)}}{dz} = 2ig_\omega \Lambda_{100}^{(l_1+l_2)l_1l_2} (A_{0l_1}^H A_{0l_2}^V + A_{0l_2}^H A_{0l_1}^V) \quad (7.46)$$

$$\vdots \quad (7.47)$$

$$\frac{dB_{p(l_1+l_2)}}{dz} = 2ig_\omega \Lambda_{p00}^{(l_1+l_2)l_1l_2} (A_{0l_1}^H A_{0l_2}^V + A_{0l_2}^H A_{0l_1}^V) \quad (7.48)$$

$$\vdots \quad (7.49)$$

$$\frac{dB_{P(l_1+l_2)}}{dz} = 2ig_\omega \Lambda_{P00}^{(l_1+l_2)l_1l_2} (A_{0l_1}^H A_{0l_2}^V + A_{0l_2}^H A_{0l_1}^V) \quad (7.50)$$

Usando aqui a mesma ideia aplicada na Seção 6.2⁷, a Eq. (7.50) nos leva a:

$$B_{p(l_1+l_2)} = \beta_p^{l_1l_2} B_{0(l_1+l_2)}, \quad (7.51)$$

⁷As quantidades $\beta_p^{l_1l_2}$ e $\gamma_{l_1l_2}$ são as mesmas definidas no Apêndice B.

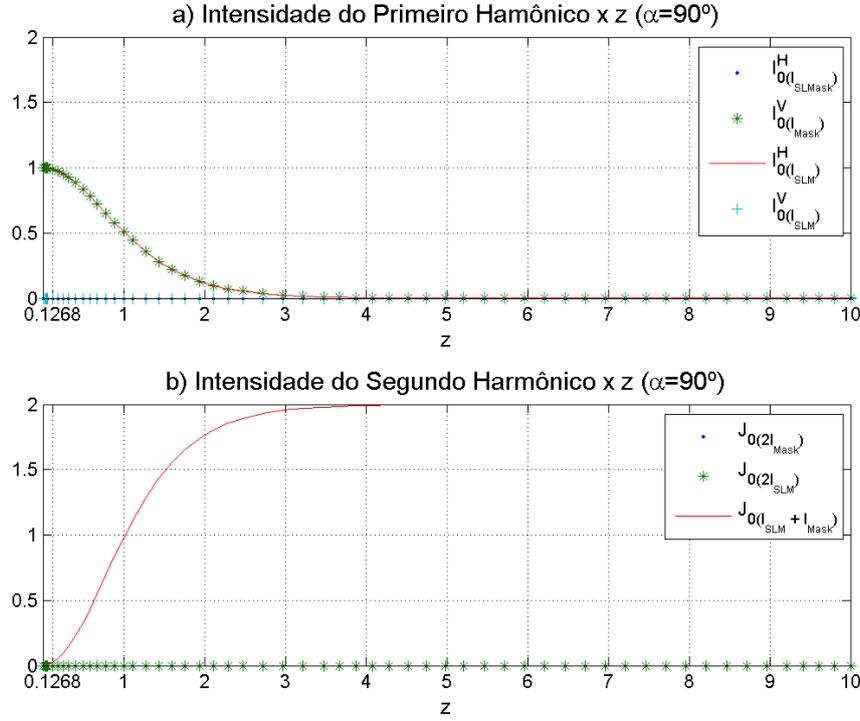


Figura 7.13: Produzida no MATLAB. Intensidades do problema a 7 modos em função do comprimento "z" dentro do cristal para a "HWP-3" orientada a $\alpha = 90^\circ$ - com $g_\omega = 1 u.m.$, $I_0 = 1 u.m.$, $l_{SLM_{Mask}} = 1$ e $l_{SLM} = 2$ - sendo: a) as 4 intensidades do primeiro harmônico, e b) possui as 3 intensidades do segundo harmônico.

e substituindo no sistema acima chegamos a:

$$\frac{dA_{0l_1}^H}{dz} = \imath g_\omega \left(\Lambda_{000}^{(2l_1)l_1l_1} B_{0(2l_1)} A_{0l_1}^V{}^* + \gamma_{l_1l_2} \Lambda_{000}^{(l_1+l_2)l_1l_2} B_{0(l_1+l_2)} A_{0l_2}^V{}^* \right) \quad (7.52)$$

$$\frac{dA_{0l_1}^V}{dz} = \imath g_\omega \left(\Lambda_{000}^{(2l_1)l_1l_1} B_{0(2l_1)} A_{0l_1}^H{}^* + \gamma_{l_1l_2} \Lambda_{000}^{(l_1+l_2)l_1l_2} B_{0(l_1+l_2)} A_{0l_2}^H{}^* \right) \quad (7.53)$$

$$\frac{dA_{0l_2}^H}{dz} = \imath g_\omega \left(\Lambda_{000}^{(2l_2)l_2l_2} B_{0(2l_2)} A_{0l_2}^V{}^* + \gamma_{l_1l_2} \Lambda_{000}^{(l_1+l_2)l_1l_2} B_{0(l_1+l_2)} A_{0l_1}^V{}^* \right) \quad (7.54)$$

$$\frac{dA_{0l_2}^V}{dz} = \imath g_\omega \left(\Lambda_{000}^{(2l_2)l_2l_2} B_{0(2l_2)} A_{0l_2}^H{}^* + \gamma_{l_1l_2} \Lambda_{000}^{(l_1+l_2)l_1l_2} B_{0(l_1+l_2)} A_{0l_1}^H{}^* \right) \quad (7.55)$$

$$(7.56)$$

$$\frac{dB_{0(2l_1)}}{dz} = 2ig_{\omega}\Lambda_{000}^{(2l_1)l_1l_1}A_{0l_1}^HA_{0l_1}^V \quad (7.57)$$

$$\frac{dB_{0(2l_2)}}{dz} = 2ig_{\omega}\Lambda_{000}^{(2l_2)l_2l_2}A_{0l_2}^HA_{0l_2}^V \quad (7.58)$$

$$\frac{dB_{0(l_1+l_2)}}{dz} = 2ig_{\omega}\Lambda_{000}^{(l_1+l_2)l_1l_2}(A_{0l_1}^HA_{0l_2}^V + A_{0l_2}^HA_{0l_1}^V). \quad (7.59)$$

Ou seja, reduzimos o problema de $4 + (P + 3)$ equações para um problema de $4 + 3$ equações.

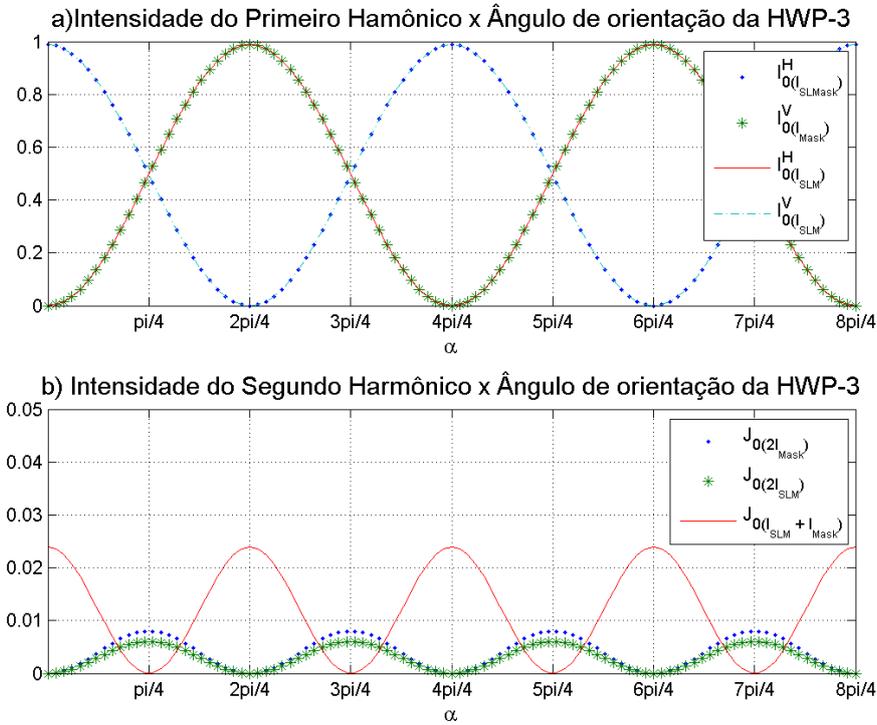


Figura 7.14: Produzida no MATLAB. Mistura de MAO Controlada por Polarização - intensidades do problema a 7 modos em função do ângulo de orientação " α " da "HWP-3", para um cristal de comprimento $z_l = 0.1268m$ - com $g_{\omega} = 1u.m.$, $I_0 = 1u.m.$, $l_{SLMask} = 1$ e $l_{SLM} = 2$ - sendo: a) as 4 intensidades do primeiro harmônico, e b) as 3 intensidades do segundo harmônico.

A Fig. 7.15 mostra que o controle de polarização, através da orientação da "HWP-3", também se aplica nesse caso.

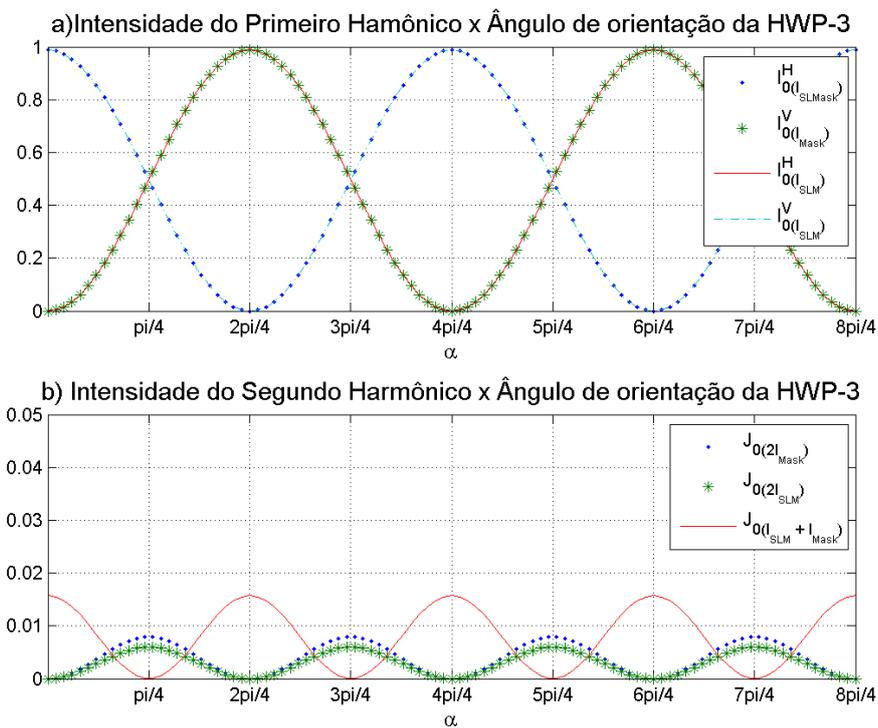


Figura 7.15: Produzida no MATLAB. Mistura de MAO Controlada por Polarização - intensidades do problema a 8 modos em função do ângulo de orientação " α " da "HWP-3", para um cristal de comprimento $z_l = 0.1261m$ - com $g_\omega = 1u.m.$, $I_0 = 1u.m.$, $l_{SLMask} = 1$ e $l_{SLM} = -2$ - sendo: a) as 4 intensidades do primeiro harmônico, e b) as 3 intensidades do segundo harmônico.

Capítulo 8

Por que as nossas considerações funcionam?

Após várias tentativas, reflexões e ideias para resolver as equações dinâmicas (muitas delas frustradas, diga-se de passagem) pensamos em uma ferramenta que é muito útil para resolver problemas: Expansão em Série de Taylor. Assim, surge mais uma opção para trabalhar essas equações e, quem sabe, extrair informações que ainda não tínhamos.

Assumimos ao longo desta tese que as ordens radiais p' e p'' dos modos de entrada permanecem inalteradas a medida que os feixes adentram o cristal. Mas isso deveria ser necessariamente verdade? Agora com essa ferramenta em mãos, conseguimos responder essa pergunta com mais segurança, e a resposta é: NÃO.

Mas, então, por que os cálculos feitos com os p' e p'' dos modos de entrada constantes são considerados válidos? Por que são comprovados experimentalmente? Também graças a Expansão em Série de Taylor lhes fornecemos uma resposta confiante, que é: pelo fato da não linearidade ser considerada pequena, mesmo após o uso de técnicas que aumentem a sua magnitude, dos experimentos serem realizados com cristais finos ao longo da direção de propagação e pelos

feixes de entrada não serem muito intensos.

Dito isso, mostraremos, a seguir, os cálculos que nos guiaram a essas conclusões.

8.1 Expansão em série de Taylor

A expansão em série de Taylor dos campos é dada por:

$$A_{p'l'}^H(z) = A_{p'l'}^H(0) + \frac{dA_{p'l'}^H}{dz}(0)z + \frac{d^2A_{p'l'}^H}{dz^2}(0)\frac{z^2}{2!} + \dots \quad (8.1)$$

$$A_{p''l''}^V(z) = A_{p''l''}^V(0) + \frac{dA_{p''l''}^V}{dz}(0)z + \frac{d^2A_{p''l''}^V}{dz^2}(0)\frac{z^2}{2!} + \dots \quad (8.2)$$

$$B_{pl}(z) = B_{pl}(0) + \frac{dB_{pl}}{dz}(0)z + \frac{d^2B_{pl}}{dz^2}(0)\frac{z^2}{2!} + \dots \quad (8.3)$$

Os termos de derivada primeira são determinados pelas equações dinâmicas (Eq., Eq. e Eq.). Já os termos de derivada segunda serão obtidos derivando as equações

dinâmicas e terão a forma:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A_{p'l'}^H}{dz^2} &= -g_\omega^2 \sum_{pl} \sum_{p''l''} \Lambda_{pp'p''}^{ll'l''} \sum_{p_1 l_1'} \\ &\cdot \left(2 \sum_{p_1 l_1'} \Lambda_{pp'p_1'}^{ll'l_1'} A_{p_1 l_1'}^V A_{p''l''}^V * - \sum_{p_1 l_1} \Lambda_{p_1 p_1' p''}^{l_1 l_1' l''} B_{p_1 l_1} * B_{pl} \right) A_{p_1 l_1'}^H, \end{aligned} \quad (8.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 A_{p''l''}^V}{dz^2} &= -g_\omega^2 \sum_{pl} \sum_{p'l'} \Lambda_{pp'p''}^{ll'l''} \sum_{p_1 l_1'} \\ &\cdot \left(2 \sum_{p_1 l_1'} \Lambda_{pp'p_1'}^{ll'l_1'} A_{p_1 l_1'}^H A_{p'l'}^H * - \sum_{p_1 l_1} \Lambda_{p_1 p' p_1'}^{l_1 l_1' l''} B_{p_1 l_1} * B_{pl} \right) A_{p_1 l_1'}^V, \end{aligned} \quad (8.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 B_{pl}}{dz^2} &= -2g_\omega^2 \sum_{p'l'} \sum_{p''l''} \Lambda_{pp'p''}^{ll'l''} \sum_{p_1 l_1} \\ &\cdot \left(\sum_{p_1 l_1'} \Lambda_{p_1 p' p_1'}^{l_1 l_1' l''} A_{p_1 l_1'}^V A_{p''l''}^V * - \sum_{p_1 l_1} \Lambda_{p_1 p_1' p''}^{l_1 l_1' l''} A_{p_1 l_1}^H * A_{p'l'}^H \right) B_{p_1 l_1}. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Para ilustrar o nosso ponto aqui, vamos discutir o caso mais simples possível, que vem das condições iniciais:

$$A_{p'l'}^H(0) = \delta_{p'0} \delta_{l'l_H} A_{0l_H}^H(0), \quad (8.7)$$

$$A_{p''l''}^V(0) = \delta_{p''0} \delta_{l''l_V} A_{0l_V}^V(0), \quad (8.8)$$

$$B_{pl}(0) = 0, \quad (8.9)$$

$$l_H l_V \geq 0. \quad (8.10)$$

Assim, teremos as derivadas primeiras em $z = 0$

$$\frac{dA_{p'l'}^H}{dz}(0) = 0, \quad (8.11)$$

$$\frac{dA_{p''l''}^V}{dz}(0) = 0, \quad (8.12)$$

$$\frac{dB_{pl}}{dz}(0) = g_\omega \Lambda_{000}^{ll_H l_V} A_{0l_H}^H(0) A_{0l_V}^V(0), \quad (8.13)$$

e as derivadas segundas também em $z = 0$

$$\frac{d^2 A_{p'l'}^H}{dz^2}(0) = -2g_\omega^2 \delta_{l'l_H} \Lambda_{0p'0}^{ll_H l_V} \Lambda_{000}^{ll_H l_V} I_{0l_V}^V(0) A_{0l_H}^H(0), \quad (8.14)$$

$$\frac{d^2 A_{p''l''}^V}{dz^2}(0) = -2g_\omega^2 \delta_{l''l_V} \Lambda_{00p''}^{ll_H l_V} \Lambda_{000}^{ll_H l_V} I_{0l_H}^H(0) A_{0l_V}^V(0), \quad (8.15)$$

$$\frac{d^2 B_{pl}}{dz^2}(0) = 0. \quad (8.16)$$

Vemos que nas derivadas segundas surgem os recobrimentos $\Lambda_{0p'0}^{ll_H l_V}$ e $\Lambda_{00p''}^{ll_H l_V}$.

Os cálculos destes¹ resultam:

$$\Lambda_{0p'0}^{ll_H l_V} = \delta_{l,l_H+l_V} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n+|l_V|} \delta_{p'm} \sqrt{\frac{2^{|l|+2} p'!}{(|l_H| + |l_V|)! (p' + |l_H|)! |l_V|!}} \cdot \frac{(n + |l_V|)! (n + |l_H| + |l_V|)!}{n! p'! (n + |l_V| - p')!} (-1)^{p'+n}, \quad (8.17)$$

$$\Lambda_{00p''}^{ll_H l_V} = \delta_{l,l_H+l_V} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n+|l_H|} \delta_{p''m} \sqrt{\frac{2^{|l|+2} p''!}{(|l_H| + |l_V|)! |l_H|! (p'' + |l_V|)!}} \cdot \frac{(n + |l_H|)! (n + |l_H| + |l_V|)!}{n! p''! (n + |l_H| - p'')!} (-1)^{p''+n}. \quad (8.18)$$

A Eq. (8.17) mostra que todos os índices p' surgem no problema quando consideramos o termo $\frac{d^2 A_{p'l'}^H}{dz^2}(0)$. E a Eq. (8.18) mostra todos os índices p'' surgem no problema quando consideramos o termo $\frac{d^2 A_{p''l''}^V}{dz^2}(0)$.

¹Estes cálculos podem ser feitos substituindo $\Lambda_{0p'0}^{ll_H l_V}$ e $\Lambda_{00p''}^{ll_H l_V}$ em Eq. (5.8), considerando $Z = 0$, e após algumas manipulações chegamos nas equações referidas.

Até agora, vimos que o problema só complica a cada passo que damos. Se considerarmos os termos de segunda ordem na expansão em serie de Taylor, já entram todos os valores de p' e p'' no problema e, a partir daí, tende a ficar mais difícil de calcular. E assim, com o auxílio das Eq. (8.17) e Eq. (8.18) e desses argumentos, conseguimos justificar a resposta da primeira pergunta, que basicamente afirmava: se tivermos $p' = 0$ e $p'' = 0$ em $z = 0$, ao longo do cristal, teríamos todos os valores de p' e p'' ao invés de apenas $p' = 0$ e $p'' = 0$.

Para confirmar a resposta da segunda pergunta, vamos substituir os termos da expansão dos campos até segunda ordem:

$$\begin{aligned} A_{p'l'}^H(z) &= \delta_{p'0} \delta_{l'l_H} A_{0l_H}^H(0) \\ &- \left(\delta_{l'l_H} \Lambda_{0p'0}^{u_H l_V} \Lambda_{000}^{u_H l_V} I_{0l_V}^V(0) A_{0l_H}^H(0) \right) (g_\omega z)^2, \end{aligned} \quad (8.19)$$

$$\begin{aligned} A_{p''l''}^V(z) &= \delta_{p''0} \delta_{l''l_V} A_{0l_V}^V(0) \\ &- \left(\delta_{l''l_V} \Lambda_{00p''}^{u_H l_V} \Lambda_{000}^{u_H l_V} I_{0l_H}^H(0) A_{0l_V}^V(0) \right) (g_\omega z)^2, \end{aligned} \quad (8.20)$$

$$B_{pl}(z) = \left(\delta_{p0} \delta_{l,l_H+l_V} \Lambda_{000}^{u_H l_V} A_{0l_H}^H(0) A_{0l_V}^V(0) \right) (g_\omega z). \quad (8.21)$$

Analisando essas equações, vemos que os termos problemáticos, que vão envolver infinitas possibilidades de p' e p'' , são os que escalam com $(g_\omega z)^2$. Então o que precisamos fazer aqui é ajustar esses termos para que se tornem desprezíveis comparados com os outros. Voltando a estes:

- Todos as constantes de recobrimentos são normalizadas, isto é, $-1 \leq \Lambda_{pp'p''}^{l'l''} \leq 1$, o que é algo que contribui para reduzir os termos de segunda ordem;
- Temos um controle das intensidades iniciais. Mas não podemos aumentá-las muito, pois surgiriam efeitos indesejados (como o derretimento do cristal, por exemplo). Também não podemos diminuí-las muito, porque assim teríamos que, necessariamente, considerar efeitos quânticos, por exemplo, (o

que não fizemos aqui);

- A constante g_ω escala com $\chi^{(2)2}$, que é considerada muito pequena. Mesmo com seus outros componentes, continuamos com $g_\omega \ll 1$ e, portanto, $g_\omega^2 \cong 0$;
- Para realizar os experimentos e, conseqüentemente, neste trabalho também, foram usados cristais bem finos na direção de propagação, de modo que $z \ll 1$ e, conseqüentemente, $z^2 \cong 0$.

Então, juntando as informações acima, concluimos que os termos que escalam com $(g_\omega z)^2$ podem ser negligenciado, assim justificando o fato das nossas considerações reproduzirem os resultados teóricos e experimentais, desprezando modos com $p' > 0$ e $p'' > 0$. Com isso, legitimamos também a resposta da segunda pergunta.

Para fechar esse capítulo, apresentamos a solução dos campos obtidas por expansão em serie de Taylor para as condições iniciais dadas pelas Eq. (8.7), Eq. (8.8), Eq. (8.9) e Eq. (8.10)

$$A_{p'l'}^H(z) = \delta_{p'0} \delta_{l'l_H} A_{0l_H}^H(0), \quad (8.22)$$

$$A_{p''l''}^V(z) = \delta_{p''0} \delta_{l''l_V} A_{0l_V}^V(0), \quad (8.23)$$

$$B_{pl}(z) = \delta_{p0} \delta_{l,l_H+l_V} \left(\Lambda_{000}^{l_H l_V} A_{0l_H}^H(0) A_{0l_V}^V(0) \right) (g_\omega z). \quad (8.24)$$

Nelas conseguimos extrair mais informações, passando para intensidade:

$$I_{p'l'}^H(z) = \delta_{p'0} \delta_{l'l_H} I_{0l_H}^H(0), \quad (8.25)$$

$$I_{p''l''}^V(z) = \delta_{p''0} \delta_{l''l_V} I_{0l_V}^V(0), \quad (8.26)$$

$$J_{pl}(z) = \delta_{p0} \delta_{l,l_H+l_V} \left(\Lambda_{000}^{l_H l_V} \right)^2 I_{0l_H}^H(0) I_{0l_V}^V(0) (g_\omega z)^2, \quad (8.27)$$

²Não-linearidade de segunda ordem. Este é considerado muito pequeno, ao passo que esses efeitos são bem difíceis de se observar.

e fase:

$$\phi_{p'l'}^H(z) = \delta_{p'0} \delta_{l'l_H} \phi_{0l_H}^H(0), \quad (8.28)$$

$$\phi_{p''l''}^V(z) = \delta_{p''0} \delta_{l''l_V} \phi_{0l_V}^V(0), \quad (8.29)$$

$$\psi_{pl}(z) = \delta_{p0} \delta_{l,l_H+l_V} (\phi_{0l_H}^H(0) + \phi_{0l_V}^V(0)). \quad (8.30)$$

Nas Eq. (8.25) e Eq. (8.26), observamos que as intensidades dos primeiros harmônicos permanecerão constantes ao longo do cristal. E pela Eq. (8.27), vemos que a intensidade gerada no segundo harmônico é muito pequena, tendendo a zero.

Já nas Eq. (8.28) e Eq. (8.29), vemos que as fases dos primeiros harmônicos se manterão inalteradas. E na Eq. (8.30) obtemos que a relação de Travamento de Fase³ permanece constante ao longo do cristal, para quaisquer intensidades de entrada dos primeiros harmônicos.

³Obtida anteriormente na Eq. (6.48), sendo que nesta equação o Travamento de Fase só se mantém para $I_{0l_H}^H(0) = I_{0l_V}^V(0)$.

Capítulo 9

Conclusões e perspectivas

Vamos aqui retomar nossos resultados já apresentados para, assim, concluir este trabalho. Em seguida, apresentaremos algumas perspectivas destes estudos.

A primeira contribuição original desta tese aparece no Capítulo 4. Em [8], foi mostrado que a desigualdade tipo Bell serviria como um critério para avaliar a separabilidade do modo clássico. O que fizemos foi dar sequência a este trabalho, mostrando que a coerência do estado quântico é um fator determinante para o emaranhamento deste - da mesma forma que a coerência da superposição de modos é um fator determinante para a inseparabilidade de modos.

No capítulo seguinte, apresentamos os cálculos que fizemos das constantes de recobrimento. Esses cálculos foram feitos pensando em solucionar o problema da soma de MAO na GSH com cristal tipo-I, para ambos os dois feixes de entrada com o ordem radial nula, momento angular qualquer e baixa intensidade (de acordo com o que foi discutido no Capítulo 8). Nessas condições, obtivemos um resultado geral para o valor das constantes de recobrimento, onde surgiram regras de seleção para as ordens radiais, além das regras de seleção para os momentos angulares que já eram conhecidas. Esses resultados foram: se os feixes de entrada tiverem o mesmo sinal ou pelo menos um deles for nulo (ou seja, $l_1 l_2 \geq 0$), será

gerado um feixe com ordem radial nula ($p = 0$); e se os feixes de entrada tiverem sinais contrários (isto é, $l_1 l_2 < 0$), surgirão $P + 1$ feixes, sendo P o maior valor da ordem radial (p) nesse processo e igual ao módulo do menor dos momentos angulares de entrada ($P = \min \{|l_1|, |l_2|\}$).

No Capítulo 6, conseguimos mostrar algumas soluções para as equações dinâmicas, apresentadas no capítulo 2, sendo que todas essas soluções têm como condições iniciais que os dois feixes de entrada possuem a mesma intensidade, ordem radial nula e momentos angulares quaisquer, e o feixe convertido começa com intensidade nula. Assim obtivemos solução para o caso em que é gerado apenas um feixe com ordem radial nula¹; e para o caso em que é gerado $P + 1$ feixes (cada um com uma ordem radial diferente, começando com $p = 0$ até $p = P$), que pode ser reduzido ao caso anterior.

Já no Capítulo 7, usamos as informações obtidas nos capítulos anteriores, sendo central o cálculo das constantes de recobrimento, para propor uma explicação alternativa para o resultado inesperado da "figure 3 b-"de [11] (que também pode ser visto na Fig. 7.2 e na imagem da esquerda da Fig. 7.7). Nossa proposta é que a constante de recobrimento para a soma $l_{Mask} = 1$ e $l_{SLM} = -1$ diz que serão gerados dois feixes, um com $p = 0$ e outro com $p = 1$, com pesos iguais². Então o feixe com $p = 1$, anteriormente ignorado, tem papel extremamente importante nesse processo. A simulação desse resultado teórico pode ser vista na Fig. 7.7, lado a lado com o resultado experimental previsto por [11]. Com essa mesma hipótese, vimos que a soma $l_{Mask} = 1$ e $l_{SLM} = -2$ gera também um feixe com $p = 0$ e outro com $p = 1$, também ignorado anteriormente, produzindo um perfil um pouco diferente como mostra a Fig. 7.6 (nosso resultado teórico comparado com o experimental também obtido em [11]).

¹A diferença do nosso resultado para o que foi obtido a anos atrás por [19] é que os feixes que eles usaram não tinham estrutura espacial, e o nossos possuem estrutura espacial com momento angular qualquer.

²Lembramos que o que chamamos de peso aqui é o módulo das constantes de recobrimento.

Ainda no Capítulo 7, generalizamos o problema também proposto em [11], que foi o Mistura de MAO Controlada por Polarização. Aproveitando o mesmo esquema experimental, trocamos a máscara por outro SLM, que chamamos de SL-Mask, e mostramos que, mudando a orientação da "HWP-3" e, conseqüentemente, alterando a polarização dos feixes do primeiro harmônico, conseguíamos alternar as medidas das intensidades do segundo harmônico, alternando entre: apenas dobramento dos MAO's; apenas a soma dos MAO's; e ambos os dobramentos e a soma dos MAO's.

E por último, no Capítulo 8, justificamos as aproximações utilizadas anteriormente fazendo a expansão em série de Taylor dos campos envolvidos na GSH. Mostramos que os feixes do primeiro harmônico com ordens radiais não nulas só surgem no problema nos termos de segunda ordem da série de Taylor. Assim, ao considerarmos cristais pequenos ($l \ll z_R$), não-linearidade de segunda ordem pequena (o que leva em $g_\omega \ll 1$) e intensidades pequenas (de modo que $\sqrt{I}g_\omega l \ll 1$, que representa o termo de segunda ordem na expansão em série de Taylor), os termos de segunda ordem e de ordens superiores da expansão em série de Taylor serão muito pequenos. Conseqüentemente, serão desprezados, validando nossas considerações e tornando nossos resultados das constantes de recobrimento gerais para os casos de interesse. Além disso, mostramos que nessas condições a relação de travamento de fase se mantém para quaisquer intensidades de entrada dos primeiros harmônicos.

Nosso paper [9] possui algumas perspectivas já concluídas por outros grupos, como os trabalhos [49, 50, 51, 52, 53], mostrando um pouco de sua relevante contribuição nos estudos de inseparabilidade clássica e quântica e emaranhamento em vários graus de liberdade numa mesma partícula.

Uma perspectiva para esse trabalho é confirmar essa previsão teórica do surgimento de ordens radiais não nulas, o que já está em andamento no Laboratório

de Ótica Quântica do Instituto de Física da UFF. E, confirmando essa previsão, utilizar essas informações para aplicá-las no OPO.

Outra perspectiva é obter resultados mais gerais para a constante de recobrimento, considerar o descasamento de fase ($\Delta k \neq 0$). E para problemas envolvendo feixes de entrada mais intensos (de acordo com o discutido no capítulo 8), podemos considerar também as constantes de recobrimento em função do comprimento na direção de propagação (obtido ao considerar cristais maiores) ou considerando ordens radiais quaisquer nos outros dois feixes (que no caso de GSH, que foi o caso descrito nesta tese, chamamos de feixes de entrada).

Vimos que, ao considerar ordens radiais superiores, o perfil do segundo harmônico que simulamos se assemelha bastante com o experimental. Isso indica que considerar o modo com $p = 1$ pode ser uma explicação mais forte do que o astigmatismo. No entanto, mais experimentos ainda precisam ser feitos para comprovar o surgimento dessas ordens radiais superiores no problema.

Inicialmente, pretendíamos seguir o trabalho até o momento em que o estudo sobre inseparabilidade clássica e quântica e sobre SHG com soma de momento angular se encontrassem para observarmos o que surgiria de interessante. Mas, como a abordagem que utilizamos para resolver o SHG com soma de MAO se mostrava cada vez mais desafiadora, não foi possível chegarmos a esse patamar e isto fica como uma perspectiva bem interessante, ao nosso ver.

Realizar o experimento que consiga separar cada valor de p em um feixe diferente, assim comprovando, de fato, o surgimento de $p > 0$.

Apêndice A

Conversões

A.1 Resultados das Conversões

- $p = 0, l = 0 \Rightarrow n = 0, m = 0, N = 0$

$$u_{00}^i = v_{00}^i \quad (\text{A.1})$$

$$w_{00}^i = v_{00}^i \quad (\text{A.2})$$

$$Q u_{00}^i = w_{00}^i \quad (\text{A.3})$$

- $p = 0, l = 1 \Rightarrow n = 1, m = 0, N = 1$

$$u_{01}^i = \frac{v_{10}^i - w_{01}^i}{\sqrt{2}} \quad (\text{A.4})$$

$$w_{10}^i = \frac{v_{10}^i - v_{01}^i}{\sqrt{2}} \quad (\text{A.5})$$

$$Q u_{01}^i = w_{10}^i \quad (\text{A.6})$$

- $p = 0, l = 2 \Rightarrow n = 2, m = 0, N = 2$

$$u_{02}^i = \frac{v_{20}^i - i\sqrt{2}v_{11}^i - v_{02}^i}{2} \quad (\text{A.7})$$

$$w_{20}^i = \frac{v_{20}^i - \sqrt{2}v_{11}^i + v_{02}^i}{2} \quad (\text{A.8})$$

$$Q u_{02}^i = w_{20}^i \quad (\text{A.9})$$

- $p = 0, l = 3 \Rightarrow n = 3, m = 0, N = 3$

$$u_{03}^i = \frac{v_{30}^i - i\sqrt{3}v_{21}^i - \sqrt{3}v_{12}^i + v_{03}^i}{2\sqrt{2}} \quad (\text{A.10})$$

$$w_{30}^i = \frac{v_{30}^i - \sqrt{3}v_{21}^i + \sqrt{3}v_{12}^i - v_{03}^i}{2\sqrt{2}} \quad (\text{A.11})$$

$$Q u_{03}^i = w_{30}^i \quad (\text{A.12})$$

- $p = 0, l = -1 \Rightarrow n = 0, m = 1, N = 1$

$$u_{0-1}^i = \frac{v_{10}^i + w_{01}^i}{\sqrt{2}} \quad (\text{A.13})$$

$$w_{01}^i = \frac{v_{10}^i + v_{01}^i}{\sqrt{2}} \quad (\text{A.14})$$

$$Q u_{0-1}^i = w_{01}^i \quad (\text{A.15})$$

- $p = 1, l = 0 \Rightarrow n = 1, m = 1, N = 2$

$$u_{10}^i = -\frac{(v_{20}^i + v_{02}^i)}{\sqrt{2}} \quad (\text{A.16})$$

$$w_{11}^i = \frac{v_{20}^i - v_{02}^i}{\sqrt{2}} \quad (\text{A.17})$$

$$Q u_{10}^i = -w_{11}^i \quad (\text{A.18})$$

- $p = 1, l = -1 \Rightarrow n = 1, m = 2, N = 3$

$$u_{1-1}^i = -\frac{(\sqrt{3}v_{30}^i + v_{21}^i + v_{12}^i + \iota\sqrt{3}v_{03}^i)}{2\sqrt{2}} \quad (\text{A.19})$$

$$w_{12}^i = \frac{\sqrt{3}v_{30}^i + v_{21}^i - v_{12}^i - \sqrt{3}v_{03}^i}{2\sqrt{2}} \quad (\text{A.20})$$

$$Q u_{1-1}^i = -w_{12}^i \quad (\text{A.21})$$

A.2 Intensidades dos campos convertidos

- entrada com $p_{mask} = p_{SLM} = 0$ e $l_{mask} l_{SLM} \geq 0$

$$E_{2\omega} = u_{0(l_{mask}+l_{SLM})}^3 B_{0(l_{mask}+l_{SLM})} e^{i(k_{2\omega}z-2\omega t)} \quad (\text{A.22})$$

$$B_{0(l_{mask}+l_{SLM})} = \sqrt{J_{0(l_{mask}+l_{SLM})}} e^{i\psi_{0(l_{mask}+l_{SLM})}} \quad (\text{A.23})$$

$$E_{2\omega} = u_{0(l_{mask}+l_{SLM})}^3 B_{0(l_{mask}+l_{SLM})} e^{i(k_{2\omega}z-2\omega t)} \quad (\text{A.24})$$

$$Q E_{2\omega} = w_{(l_{mask}+l_{SLM})0}^3 B_{0(l_{mask}+l_{SLM})} e^{i(k_{2\omega}z-2\omega t)} \quad (\text{A.25})$$

$$|E_{2\omega}|^2 = |u_{0(l_{mask}+l_{SLM})}^3|^2 J_{0(l_{mask}+l_{SLM})} \quad (\text{A.26})$$

$$|Q E_{2\omega}|^2 = |w_{(l_{mask}+l_{SLM})0}^3|^2 J_{0(l_{mask}+l_{SLM})} \quad (\text{A.27})$$

- entrada com $p_{mask} = p_{SLM} = 0$ e $l_{mask} l_{SLM} < 0$ ($l_{mask} = 1$ e $l_{SLM} = -|l_{SLM}|$)

$$E_{2\omega} = \left(u_{0(1-|l_{SLM}|)}^3 B_{0(1-|l_{SLM}|)} + u_{1(1-|l_{SLM}|)}^3 B_{1(1-|l_{SLM}|)} \right) e^{i(k_{2\omega}z-2\omega t)} \quad (\text{A.28})$$

$$B_{0(1-|l_{SLM}|)} = \sqrt{J_{0(1-|l_{SLM}|)}} e^{i\psi_{0(1-|l_{SLM}|)}} \quad (\text{A.29})$$

$$B_{1(1-|l_{SLM}|)} = \sqrt{J_{1(1-|l_{SLM}|)}} e^{i\psi_{1(1-|l_{SLM}|)}} \quad (\text{A.30})$$

$$J_{0(1-|l_{SLM}|)} = |l_{SLM}| J_{1(1-|l_{SLM}|)} \quad (\text{A.31})$$

$$\psi_{1(1-|l_{SLM}|)} - \psi_{0(1-|l_{SLM}|)} = (j - i)\pi \quad (\text{A.32})$$

$$E_{2\omega} = \left(u_{0(1-|l_{SLM}|)}^3 + (-1)^{j-i} \sqrt{|l_{SLM}|} u_{1(1-|l_{SLM}|)}^3 \right) \quad (\text{A.33})$$

$$\cdot \sqrt{J_{1(1-|l_{SLM}|)}} e^{i\psi_{1(1-|l_{SLM}|)}} e^{i(k_{2\omega}z - 2\omega t)} \quad (\text{A.34})$$

$$Q E_{2\omega} = \left(w_{0(|l_{SLM}|-1)}^3 - (-1)^{j-i} \sqrt{|l_{SLM}|} w_{1|l_{SLM}|}^3 \right) \quad (\text{A.35})$$

$$\cdot \sqrt{J_{1(1-|l_{SLM}|)}} e^{i\psi_{1(1-|l_{SLM}|)}} e^{i(k_{2\omega}z - 2\omega t)} \quad (\text{A.36})$$

$$|E_{2\omega}|^2 = \left| \left(u_{0(1-|l_{SLM}|)}^3 + (-1)^{j-i} \sqrt{|l_{SLM}|} u_{1(1-|l_{SLM}|)}^3 \right) \right|^2 J_{1(1-|l_{SLM}|)} \quad (\text{A.37})$$

$$|Q E_{2\omega}|^2 = \left| \left(w_{0(|l_{SLM}|-1)}^3 - (-1)^{j-i} \sqrt{|l_{SLM}|} w_{1|l_{SLM}|}^3 \right) \right|^2 J_{1(1-|l_{SLM}|)} \quad (\text{A.38})$$

Apêndice B

Cálculo da constante $\gamma_{l_H l_V}$

Este apêndice contém as contas realizadas para encontrar $\alpha_{l_H l_V}$, usado em ...

Relembrando as definições apresentadas na Seção 6.2:

$$\beta_p^{l_H l_V} = \frac{\Lambda_{p00}^{l_H l_V}}{\Lambda_{000}^{l_H l_V}}, \quad (\text{B.1})$$

$$\gamma_{l_H l_V} = \sum_{p=0}^P (\beta_p^{l_H l_V})^2. \quad (\text{B.2})$$

Substituindo a Eq. (5.8) em Eq. (B.1) encontra-se:

$$\beta_p^{l_H l_V} = \sum_{m=0}^P \delta_{mp} \sqrt{\frac{|l_H + l_V|!}{p!(p + |l_H + l_V|)!} \frac{P!}{(P-p)!} (-1)^p}, \quad (\text{B.3})$$

que é o mesmo que:

$$\beta_p^{l_H l_V} = \begin{cases} \sqrt{\frac{|l_H + l_V|!}{p!(p + |l_H + l_V|)!} \frac{P!}{(P-p)!} (-1)^p}, & \text{se } 0 \leq p \leq P \\ 0 & \text{se } p > P \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Dessa forma, o intervalo considerado será $0 \leq p \leq P$ e, nesse intervalo, $\gamma_{l_H l_V}$

segue como:

$$\gamma_{l_H l_V} = \frac{P! |l_H + l_V|!}{(P + |l_H + l_V|)!} \sum_{p=0}^P \frac{(P + |l_H + l_V|)!}{(p + |l_H + l_V|)! (P - p)!} \frac{P!}{p! (P - p)!}. \quad (\text{B.5})$$

Utilizando a identidade de Chu-Vandermonde [10], obtém-se:

$$\sum_{p=0}^P \frac{(P + |l_H + l_V|)!}{(p + |l_H + l_V|)! (P - p)!} \frac{P!}{p! (P - p)!} = \frac{(2P + |l_H + l_V|)!}{P! (P + |l_H + l_V|)!}. \quad (\text{B.6})$$

Assim chega-se ao valor de $\gamma_{l_H l_V}$, que é:

$$\gamma_{l_H l_V} = \frac{|l_H + l_V|! (2P + |l_H + l_V|)!}{[(P + |l_H + l_V|)!]^2}. \quad (\text{B.7})$$

Apêndice C

Uma relação importante envolvendo polinômio de Laguerre associado

$$x^P = \sum_{m=0}^P (-1)^m \frac{P!(k+P)!}{(P-m)!(k+m)!} L_m^k(x) \quad (\text{C.1})$$

Para provar essa relação, será necessário utilizar as seguintes:

$$xL_m^k(x) = (m+k)L_m^{k-1}(x) - (m+1)L_{m+1}^{k-1}(x), \quad (\text{C.2})$$

$$xL_m(x) = (2m+1)L_m(x) - mL_{m-1}(x) - (m+1)L_{m+1}(x), \quad (\text{C.3})$$

$$L_m(x) = L_m^0(x). \quad (\text{C.4})$$

Prova por indução:

$$x^0 = L_0^k(x) = 1 \quad (\text{C.5})$$

O próximo passo é mostrar que essa relação funciona para $x^P + 1$.

$$x(x^P) = \sum_{m=0}^P (-1)^m \frac{P!(k+P)!}{(P-m)!(k+m)!} xL_m^k(x), \quad (\text{C.6})$$

substituindo a Eq. (C.2)

$$x(x^P) = \sum_{m=0}^P (-1)^m \frac{P!(k+P)!}{(P-m)!(k+m)!} [(m+k)L_m^{k-1}(x) - (m+1)L_{m+1}^{k-1}(x)] \quad (\text{C.7})$$

$$x(x^P) = \left[\sum_{m=0}^P (-1)^m \frac{P!(k+P)!}{(P-m)!(k+m-1)!} L_m^{k-1}(x) \right] - \left[\sum_{m=0}^P (-1)^m \frac{P!(k+P)!(m+1)}{(P-m)!(k+m)!} L_{m+1}^{k-1}(x) \right], \quad (\text{C.8})$$

fazendo a mudança $m+1 \rightarrow m$ no segundo trecho da equação acima

$$x(x^P) = \left[\sum_{m=0}^P (-1)^m \frac{P!(k+P)!}{(P-m)!(k+m-1)!} L_m^{k-1}(x) \right] - \left[\sum_{m=1}^{P+1} (-1)^{m-1} \frac{P!(k+P)!m}{(P-m+1)!(k+m-1)!} L_m^{k-1}(x) \right], \quad (\text{C.9})$$

trocando o sinal do segundo termo, por causa do $(-1)^{-1}$, e igualando os somatórios

$$x(x^P) = \left[\frac{(k+P)!}{(k-1)!} L_0^{k-1}(x) + \sum_{m=1}^P (-1)^m \frac{P!(k+P)!}{(P-m)!(k+m-1)!} L_m^{k-1}(x) \right] \quad (\text{C.10})$$

$$+ \left[\sum_{m=1}^P (-1)^m \frac{P!(k+P)!m}{(P-m+1)!(k+m-1)!} L_m^{k-1}(x) + (-1)^{m+1} (P+1)! L_{P+1}^{k-1}(x) \right].$$

Somando e arrumando os termos da equação acima chega-se a:

$$x(x^P) = x^{P+1} = \sum_{m=1}^{P+1} (-1)^m \frac{(P+1)! [(k-1) + (P+1)]!}{[(P+1)-m]! [(k-1) + m]!} L_m^{k-1}(x), \quad (\text{C.11})$$

provando, assim, que a Eq. (C.1) vale para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq 1$.

Para provar que também vale para $k = 0$, o primeiro passo é substituir este

valor na Eq. (C.1), isto é:

$$x^P = \sum_{m=0}^P (-1)^m \frac{(P!)^2}{(P-m)!m!} L_m(x). \quad (\text{C.12})$$

Feito isso é só seguir os mesmos passos utilizados para provar essa relação para um k qualquer ($k \geq 1$), substituindo a Eq. (C.3), ao invés da Eq. (C.2), que chegamos a:

$$x(x^P) = x^{P+1} = \sum_{m=0}^{P+1} (-1)^m \frac{[(P+1)!]^2}{[(P+1)-m]!m!} L_m(x). \quad (\text{C.13})$$

Provando, assim, que a Eq. (C.1) vale para todo $k = 0$.

Por fim, com as Eq. (C.11) e Eq. (C.13), prova-se que a Eq. (C.1) vale para todo $k \in \mathbb{N}$.

Apêndice D

Cálculos do Bell-like com 2 saídas

Neste apêndice serão apresentados os cálculos detalhados que foram realizados para produzir os resultados apresentados em [9], que também estão descritos na Seção 4.3.

D.1 Independência de fase ganha no MZIM para medida de intensidade

Os campos de saída, Eq. (4.19), serão reescritos aqui como:

$$\mathbf{B}_j^{(+)}(\mathbf{r}, t) = e^{i(\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \mathbf{B}_j(\mathbf{r}, t), \quad (\text{D.1})$$

onde

$$\mathbf{B}_1 = \chi_1 a_{Hh}^1 \psi_h \mathbf{e}_H + \phi_1 a_{Vv}^1 \psi_v \mathbf{e}_V + \zeta_2 a_{Hv}^2 \psi_v \mathbf{e}_H + \omega_2 a_{Vh}^2 \psi_h \mathbf{e}_V, \quad (\text{D.2})$$

$$\mathbf{B}_2 = \zeta_1 a_{Hv}^1 \psi_v \mathbf{e}_H + \omega_1 a_{Vh}^1 \psi_h \mathbf{e}_V + \chi_2 a_{Hh}^2 \psi_h \mathbf{e}_H + \phi_2 a_{Vv}^2 \psi_v \mathbf{e}_V. \quad (\text{D.3})$$

As intensidades de saída, substituindo as equações acima na Eq. (4.21), são:

$$\hat{I}_1 = |\chi_1|^2 a_{Hh}^{\prime 1 \dagger} a_{Hh}^{\prime 1} + |\phi_1|^2 a_{Vv}^{\prime 1 \dagger} a_{Vv}^{\prime 1} + |\zeta_2|^2 a_{Hv}^2 \dagger a_{Hv}^2 + |\omega_2|^2 a_{Vh}^2 \dagger a_{Vh}^2, \quad (\text{D.4})$$

$$\hat{I}_2 = |\zeta_1|^2 a_{Hv}^{\prime 1 \dagger} a_{Hv}^{\prime 1} + |\omega_1|^2 a_{Vh}^{\prime 1 \dagger} a_{Vh}^{\prime 1} + |\chi_2|^2 a_{Hh}^2 \dagger a_{Hh}^2 + |\phi_2|^2 a_{Vv}^2 \dagger a_{Vv}^2. \quad (\text{D.5})$$

Como

$$\langle 0 | a_i^{2 \dagger} a_i^2 | 0 \rangle = 0, \quad (\text{D.6})$$

$$\langle 0 | a_i^{j \dagger} a_i^j a_k^{l \dagger} a_k^l | 0 \rangle = 0, \text{ para } j = 2 \text{ ou } l = 2, \quad (\text{D.7})$$

o vácuo de \mathbf{A}_2 não influenciará nas medidas de intensidade e nem de flutuação de intensidade. Por esse motivo, os termos a_i^2 serão todos desconsiderados daqui por diante, e as Eq. (D.4) e Eq. (D.5) passam a ser:

$$\hat{I}_1 = |\chi_1|^2 a_{Hh}^{\prime 1 \dagger} a_{Hh}^{\prime 1} + |\phi_1|^2 a_{Vv}^{\prime 1 \dagger} a_{Vv}^{\prime 1} \quad (\text{D.8})$$

$$\hat{I}_2 = |\zeta_1|^2 a_{Hv}^{\prime 1 \dagger} a_{Hv}^{\prime 1} + |\omega_1|^2 a_{Vh}^{\prime 1 \dagger} a_{Vh}^{\prime 1} \quad (\text{D.9})$$

Como todos os termos envolvendo a_i^2 serão desconsiderados, será feita a troca $a_i^1 \rightarrow a_i$ (e também nas fases) para facilitar a notação daqui pra frente. Substituindo os valores de $a_i^{\prime 1}$, obtidos na Eq. (4.18), nas equações acima

encontra-se:

$$\begin{aligned}
\hat{I}_1 = |\chi|^2 & \left[\left(\hat{n}_{Hh} \cos^2(\beta) \cos^2(\alpha) - a_{Hh}^\dagger a_{Hv} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \cos^2(\alpha) - a_{Hh}^\dagger a_{Vh} \cos^2(\beta) \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} + a_{Hh}^\dagger a_{Vv} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} \right) \right. \\
& + \left(-a_{Hv}^\dagger a_{Hh} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \cos^2(\alpha) + \hat{n}_{Hv} \text{sen}^2(\beta) \cos^2(\alpha) + a_{Hv}^\dagger a_{Vh} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} - a_{Hv}^\dagger a_{Vv} \text{sen}^2(\beta) \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} \right) \\
& + \left(-a_{Vh}^\dagger a_{Hh} \cos^2(\beta) \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} + a_{Vh}^\dagger a_{Hv} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} + \hat{n}_{Vh} \cos^2(\beta) \text{sen}^2(\alpha) - a_{Vh}^\dagger a_{Vv} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \text{sen}^2(\alpha) \right) \\
& + \left. \left(a_{Vv}^\dagger a_{Hh} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} - a_{Vv}^\dagger a_{Hv} \text{sen}^2(\beta) \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} - a_{Vv}^\dagger a_{Vh} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \text{sen}^2(\alpha) + \hat{n}_{Vv} \text{sen}^2(\beta) \text{sen}^2(\alpha) \right) \right] \\
& + |\phi|^2 \left[\left(\hat{n}_{Hh} \text{sen}^2(\beta) \text{sen}^2(\alpha) + a_{Hh}^\dagger a_{Hv} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \text{sen}^2(\alpha) + a_{Hh}^\dagger a_{Vh} \text{sen}^2(\beta) \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} + a_{Hh}^\dagger a_{Vv} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} \right) \right. \\
& + \left(a_{Hv}^\dagger a_{Hh} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \text{sen}^2(\alpha) + \hat{n}_{Hv} \cos^2(\beta) \text{sen}^2(\alpha) + a_{Hv}^\dagger a_{Vh} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} + a_{Hv}^\dagger a_{Vv} \cos^2(\beta) \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} \right) \\
& + \left(a_{Vh}^\dagger a_{Hh} \text{sen}^2(\beta) \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} + a_{Vh}^\dagger a_{Hv} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} + \hat{n}_{Vh} \text{sen}^2(\beta) \cos^2(\alpha) + a_{Vh}^\dagger a_{Vv} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \cos^2(\alpha) \right) \\
& + \left. \left(a_{Vv}^\dagger a_{Hh} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} + a_{Vv}^\dagger a_{Hv} \cos^2(\beta) \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} + a_{Vv}^\dagger a_{Vh} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \cos^2(\alpha) + \hat{n}_{Vv} \cos^2(\beta) \cos^2(\alpha) \right) \right],
\end{aligned} \tag{D.10}$$

$$\begin{aligned}
\hat{I}_2 = |\zeta|^2 & \left[\left(\hat{n}_{Hh} \text{sen}^2(\beta) \cos^2(\alpha) + a_{Hh}^\dagger a_{Hv} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \cos^2(\alpha) - a_{Hh}^\dagger a_{Vh} \text{sen}^2(\beta) \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} - a_{Hh}^\dagger a_{Vv} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} \right) \right. \\
& + \left(a_{Hv}^\dagger a_{Hh} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \cos^2(\alpha) + \hat{n}_{Hv} \cos^2(\beta) \cos^2(\alpha) - a_{Hv}^\dagger a_{Vh} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} - a_{Hv}^\dagger a_{Vv} \cos^2(\beta) \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} \right) \\
& + \left(-a_{Vh}^\dagger a_{Hh} \text{sen}^2(\beta) \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} - a_{Vh}^\dagger a_{Hv} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} + \hat{n}_{Vh} \text{sen}^2(\beta) \text{sen}^2(\alpha) + a_{Vh}^\dagger a_{Vv} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \text{sen}^2(\alpha) \right) \\
& + \left. \left(-a_{Vv}^\dagger a_{Hh} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} - a_{Vv}^\dagger a_{Hv} \cos^2(\beta) \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} + a_{Vv}^\dagger a_{Vh} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \text{sen}^2(\alpha) + \hat{n}_{Vv} \cos^2(\beta) \text{sen}^2(\alpha) \right) \right] \\
& + |\phi|^2 \left[\left(\hat{n}_{Hh} \cos^2(\beta) \cos^2(\alpha) - a_{Hh}^\dagger a_{Hv} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \text{sen}^2(\alpha) + a_{Hh}^\dagger a_{Vh} \cos^2(\beta) \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} - a_{Hh}^\dagger a_{Vv} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} \right) \right. \\
& + \left(-a_{Hv}^\dagger a_{Hh} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \text{sen}^2(\alpha) + \hat{n}_{Hv} \text{sen}^2(\beta) \text{sen}^2(\alpha) - a_{Hv}^\dagger a_{Vh} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} + a_{Hv}^\dagger a_{Vv} \text{sen}^2(\beta) \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} \right) \\
& + \left(a_{Vh}^\dagger a_{Hh} \cos^2(\beta) \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} - a_{Vh}^\dagger a_{Hv} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} + \hat{n}_{Vh} \cos^2(\beta) \cos^2(\alpha) - a_{Vh}^\dagger a_{Vv} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \cos^2(\alpha) \right) \\
& + \left. \left(-a_{Vv}^\dagger a_{Hh} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} + a_{Vv}^\dagger a_{Hv} \text{sen}^2(\beta) \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} - a_{Vv}^\dagger a_{Vh} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \cos^2(\alpha) + \hat{n}_{Vv} \text{sen}^2(\beta) \cos^2(\alpha) \right) \right].
\end{aligned} \tag{D.11}$$

onde $\hat{n}_i = a_i^\dagger a_i$.

Considerando que a intensidade se conserva neste problema, isto é:

$$\mathbf{B}_1^\dagger \cdot \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2^\dagger \cdot \mathbf{B}_2 = \mathbf{A}_1^\dagger \cdot \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2^\dagger \cdot \mathbf{A}_2. \tag{D.12}$$

Isso que equivale a:

$$\hat{I}_1 + \hat{I}_2 = \hat{n}_{Hh} + \hat{n}_{Hv} + \hat{n}_{Vh} + \hat{n}_{Vv}. \quad (\text{D.13})$$

Substituindo as Eq. (D.10) e Eq. (D.11) em Eq. (D.13), obtém-se o sistema de equações (organizado de forma conveniente para os cálculos):

$$|\chi|^2 \cos^2(\beta) \cos^2(\alpha) + |\phi|^2 \sin^2(\beta) \sin^2(\alpha) + |\zeta|^2 \sin^2(\beta) \cos^2(\alpha) + |\omega|^2 \cos^2(\beta) \sin^2(\alpha) = 1, \quad (\text{D.14})$$

$$|\chi|^2 \sin^2(\beta) \cos^2(\alpha) + |\phi|^2 \cos^2(\beta) \sin^2(\alpha) + |\zeta|^2 \cos^2(\beta) \cos^2(\alpha) + |\omega|^2 \sin^2(\beta) \sin^2(\alpha) = 1, \quad (\text{D.15})$$

$$|\chi|^2 \sin^2(\beta) \sin^2(\alpha) + |\phi|^2 \cos^2(\beta) \cos^2(\alpha) + |\zeta|^2 \cos^2(\beta) \sin^2(\alpha) + |\omega|^2 \sin^2(\beta) \cos^2(\alpha) = 1, \quad (\text{D.16})$$

$$|\chi|^2 \cos^2(\beta) \sin^2(\alpha) + |\phi|^2 \sin^2(\beta) \cos^2(\alpha) + |\zeta|^2 \sin^2(\beta) \sin^2(\alpha) + |\omega|^2 \cos^2(\beta) \cos^2(\alpha) = 1, \quad (\text{D.17})$$

$$-|\chi|^2 \cos^2(\alpha) + |\phi|^2 \sin^2(\alpha) + |\zeta|^2 \cos^2(\alpha) - |\omega|^2 \sin^2(\alpha) = 0, (\text{D.18})$$

$$-|\chi|^2 \sin^2(\alpha) + |\phi|^2 \cos^2(\alpha) + |\zeta|^2 \sin^2(\alpha) - |\omega|^2 \cos^2(\alpha) = 0, (\text{D.19})$$

$$-|\chi|^2 \cos^2(\beta) + |\phi|^2 \sin^2(\beta) - |\zeta|^2 \sin^2(\beta) + |\omega|^2 \cos^2(\beta) = 0, (\text{D.20})$$

$$-|\chi|^2 \sin^2(\beta) + |\phi|^2 \cos^2(\beta) - |\zeta|^2 \cos^2(\beta) + |\omega|^2 \sin^2(\beta) = 0, (\text{D.21})$$

$$|\chi|^2 + |\phi|^2 - |\zeta|^2 - |\omega|^2 = 0. \quad (\text{D.22})$$

Resolvendo o sistema acima, encontra-se:

$$|\chi|^2 = |\phi|^2 = |\zeta|^2 = |\omega|^2 = 1. \quad (\text{D.23})$$

E substituindo nas Eq. (D.8) e Eq. (D.9), obtém-se:

$$\hat{I}_1 = a_{Hh}^{\prime 1 \dagger} a_{Hh}^{\prime 1} + a_{Vv}^{\prime 1 \dagger} a_{Vv}^{\prime 1}, \quad (\text{D.24})$$

$$\hat{I}_2 = a_{Hv}^{\prime 1 \dagger} a_{Hv}^{\prime 1} + a_{Vh}^{\prime 1 \dagger} a_{Vh}^{\prime 1}, \quad (\text{D.25})$$

o que mostra que as fases ganhas ao atravessar o MZIM não contribuem para as medidas de intensidade, e, conseqüentemente, para as medidas de flutuação de intensidade.

D.2 Medidas efetivas

As intensidades Eq. (D.10) e Eq. (D.11) podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned} \hat{I}_i &= \hat{N}k_i + (\hat{n}_{Hv} + \hat{n}_{Vh})l_i \\ &+ \left[- \left(a_{Hh}^{\dagger} a_{Hv} + a_{Hv}^{\dagger} a_{Hh} \right) + \left(a_{Vh}^{\dagger} a_{Vv} + a_{Vv}^{\dagger} a_{Vh} \right) \right] \mu_i \\ &+ \left[- \left(a_{Hh}^{\dagger} a_{Vh} + a_{Vh}^{\dagger} a_{Hh} \right) + \left(a_{Hv}^{\dagger} a_{Vv} + a_{Vv}^{\dagger} a_{Hv} \right) \right] \eta_i \\ &+ \left[- \left(a_{Hh}^{\dagger} a_{Vv} + a_{Vv}^{\dagger} a_{Hh} \right) + \left(a_{Hv}^{\dagger} a_{Vh} + a_{Vh}^{\dagger} a_{Hv} \right) \right] o_i, \end{aligned} \quad (\text{D.26})$$

com

$$\hat{N} = a_{Hv}^{\dagger} a_{Hh} + a_{Vv}^{\dagger} a_{Vv}, \quad (\text{D.27})$$

$$k_1 = l_2 = \cos^2(\beta) \cos^2(\alpha) + \sin^2(\beta) \sin^2(\alpha), \quad (\text{D.28})$$

$$k_2 = l_1 = \cos^2(\beta) \sin^2(\alpha) + \sin^2(\beta) \cos^2(\alpha), \quad (\text{D.29})$$

$$k_3 = -l_3 = \cos(2\beta) \cos(2\alpha), \quad (\text{D.30})$$

$$\mu_3 = 2\mu_1 = -2\mu_2 = \sin(2\beta) \cos(2\alpha), \quad (\text{D.31})$$

$$\eta_3 = 2\eta_1 = -2\eta_2 = \cos(2\beta) \sin(2\alpha), \quad (\text{D.32})$$

$$o_3 = 2o_1 = -2o_2 = \sin(2\beta) \sin(2\alpha). \quad (\text{D.33})$$

Como as componentes Hv e Vh dos estados iniciais de interesse não estão excitadas, é possível escrever um operador de intensidade efetivo (\hat{I}_{ef}) e de intensidade quadrada efetivo ($(\hat{I}^2)_{ef}$), necessário para determinar a flutuação de intensidade, que obedecem as relações:

$$\langle \hat{I}_{ef} \rangle = \langle \hat{I} \rangle, \quad (\text{D.34})$$

$$\langle (\hat{I}^2)_{ef} \rangle = \langle \hat{I}^2 \rangle. \quad (\text{D.35})$$

Para determinar a intensidade efetiva, basta eliminar os termos que não contribuem na Eq. (D.26), o que leva a:

$$\hat{I}_{efi} = \hat{N}k_i + \left(a_{Hh}^\dagger a_{Vv} + a_{Vv}^\dagger a_{Hh} \right) o_i. \quad (\text{D.36})$$

Já o caso da intensidade quadrada efetiva não é tão simples. Não basta elevar ao quadrado a intensidade efetiva ($(\hat{I}^2)_{ef} \neq (\hat{I}_{ef})^2$). É preciso elevar ao quadrado a intensidade definida na Eq. (D.26) e, depois de feito isso, eliminar os termos que

não contribuem. Assim a intensidade quadrada efetiva se identifica como¹:

$$\begin{aligned}
(\hat{I}^2)_{efi} &= \hat{N}^2 k_i^2 + 2 \left(a_{Hh}^\dagger a_{Vv} + a_{Vv}^\dagger a_{Hh} \right) \hat{N} k_i o_i \\
&+ \hat{N} \left(\mu_i^2 + \eta_i^2 + o_i^2 \right) - 2 \left(a_{Hh}^\dagger a_{Vv} + a_{Vv}^\dagger a_{Hh} \right) \mu_i \eta_i \\
&+ \left(a_{Hh}^\dagger{}^2 a_{Vv}^2 + 2 \hat{n}_{Hh} \hat{n}_{Vv} + a_{Vv}^\dagger{}^2 a_{Hh}^2 \right) o_i^2. \quad (D.37)
\end{aligned}$$

Que também pode ser escrito como:

$$(\hat{I}^2)_{efi} = (\hat{I}_{efi})^2 + \hat{N} \left(\mu_i^2 + \eta_i^2 \right) - 2 \left(a_{Hh}^\dagger a_{Vv} + a_{Vv}^\dagger a_{Hh} \right) \mu_i \eta_i. \quad (D.38)$$

¹Para isso é necessário que $\left[\hat{N}, \left(a_{Hh}^\dagger a_{Vv} + a_{Vv}^\dagger a_{Hh} \right) \right] = 0$, o que de fato é verdade.

Referências Bibliográficas

- [1] Schalow, A. L., Townes, C. H., "Infrared and Optical Masers", Physical Review **112**, 1940 (1958).
- [2] Sanders, J. H., "Optical Maser Design", Phys. Rev. Lett. **3**, 86 (1959).
- [3] Javan, A., "Possibility of Production of Negative Temperature in Gas Discharges", Phys. Rev. Lett. **3**, 87 (1959).
- [4] Maiman, T. H., "Stimulated Optical Radiation in Ruby", Nature **187**, 493 (1960).
- [5] P. A. Franken, A. E. Hill, C. W. Peters, and G. Weinreich, "Generation of Optical Harmonics", Phys. Rev. Lett. **7**, 118 (1961).
- [6] Nielsen Chuang, "Computação Quântica e Informação Quântica", livro texto.
- [7] M. Granata, C. Buy, R. Ward, and M. Barsuglia, "Higher-Order Laguerre-Gauss Mode Generation and Interferometry for Gravitational Wave Detectors", PRL **105**, 231102 (2010).

- [8] C. V. S. Borges, M. Hor-Meyll, J. A. O. Huguenin, and A. Z. Khoury, "Bell-like inequality for the spin-orbit separability of a laser beam", *PHYSICAL REVIEW A* **82**, 033833 (2010).
- [9] L. J. Pereira, A. Z. Khoury, and K. Dechoum, "Quantum and classical separability of spin-orbit laser modes", *PHYSICAL REVIEW A* **90**, 053842 (2014).
- [10] <http://mathworld.wolfram.com/Chu-VandermondeIdentity.html>
- [11] W. T. Buono, L. F. C. Moraes, J. A. O. Huguenin, C. E. R. Souza and A. Z. Khoury, "Arbitrary orbital angular momentum addition in second harmonic generation", *New Journal of Physics* **16**, 093041 (2014).
- [12] M. Lax, W. H. Louisell and W. B. McKnight, "From Maxwell to paraxial wave optics", *Phys. Rev. A* **11**, 1365 (1975).
- [13] <http://www.sinonimos.com.br>
- [14] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?" *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).
- [15] J. S. Bell, "On the Eistein Podolky Rosen paradox", *Physics* **1**, 195 (1964).
- [16] J. F. Clauser, M.A. Horne, A. Shimony and R. A. Holt, "Proposed experiment to test local hidden-variable theories", *Phys. Rev. Lett.* **23**, 880(1969).
- [17] Leonardo Justino Pereira, "Emaranhamento e Desigualdade de Bell no Modelo XXZ", dissertação de mestrado, IF-UFF (2012).

- [18] R. F. Werner, "Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model", *Phys. Rev. A* **40**, 4277 (1989).
- [19] J. A. Armstrong, N. Bloembergen, J. Ducuing and P. S. Pershan, "Interactions between Light Waves in a Nonlinear Dielectric", *Phys. Rev.* **127**, 1918 (1962).
- [20] R. J. C. Spreeuw, "A Classical Analogy of Entanglement", *Found. Phys.* **28**, 361 (1998).
- [21] C. Schwob, P.F. Cohadon, C. Fabre, M.A.M. Marte, H. Ritsch, A. Gatti, L. Lugiato, "Transverse effects and mode couplings in OPOS", *Appl. Phys. B* **66**, 685 (1998)
- [22] Alain Aspect, Philippe Grangier, and Gérard Roger, "Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell's Inequalities", *Phys. Rev. Lett.* **49**, 91 (1982).
- [23] Carlos Eduardo Rodrigues de Souza, "Aplicações do Momento Angular Orbital da luz à Computação e Informação Quântica", tese de doutorado, IF-UFF (2010).
- [24] Bernardo Coutinho Camilo dos Santos, "Dinâmica e Ruído Quântico em Osciladores Paramétricos Óticos com Momento Angular Orbital", tese de doutorado, IF-UFF (2009).
- [25] Carolina Vannier dos Santos Borges, "Bell inequalities with Orbital Angular Momentum of Light", tese de doutorado, IF-UFF e Université Paris-Sud (2012).

- [26] Duarte Manuel Esteves Estrada, "Propagação de Feixes Ópticos em Meios Não ? Lineares", dissertação de mestrado, Instituto Superior Técnico - Universidade Técnica de Lisboa (2008).
- [27] Jose Augusto Oliveira Huguenin, "Correlações espaciais e temporais na amplificação e oscilação paramétrica", tese de doutorado, IF-UFF (2006).
- [28] Williamys Cristiano Soares Silva, "Geração e Caracterização de Feixes Possuindo Momento Angular Orbital", tese de doutorado, IF-UFAL (2011).
- [29] David J. Griffiths, "Introduction to Electrodynamics", livro texto.
- [30] John David Jackson, "Classical Electrodynamics", livro texto.
- [31] H. Sasada and M. Okamoto, "Transverse-mode beam splitter of a light beam and its application to quantum cryptography", *Phys. Rev. A* **68**, 012323 (2003).
- [32] L. Chen and W. She, "Single-photon spin-orbit entanglement violating a Bell-like inequality", *J. Opt. Soc. Am. B* **27**, A7 (2010).
- [33] E. Karimi, J. Leach, S. Slussarenko, B. Piccirillo, L. Marrucci, L. Chen, W. She, S. Franke-Arnold, M. J. Padgett, and E. Santamato, "Spin-orbit hybrid entanglement of photons and quantum contextuality" *Phys. Rev. A* **82**, 022115 (2010).
- [34] A. Heidmann, R. J. Horowicz, S. Reynaud, E. Giacobino, C. Fabre, and G. Camy, "Observation of Quantum Noise Reduction on Twin Laser Beams", *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2555 (1987).

- [35] B. Coutinho dos Santos, K. Dechoum, and A. Z. Khoury, "Continuous-Variable Hyperentanglement in a Parametric Oscillator with Orbital Angular Momentum", *Phys. Rev. Lett.* **103**, 230503 (2009).
- [36] Y. Yamamoto, S. Machida, and O. Nilsson, "Amplitude squeezing in a pump-noise-suppressed laser oscillator", *Phys. Rev. A* **34**, 4025 (1986).
- [37] K. H. Kagalwala, G. Di Giuseppe, A. F. Abouraddy, and B. E. A. Saleh, "Bell's measure in classical optical coherence", *Nat. Photon.* **7**, 72 (2013).
- [38] A. Vallés, V. D'Ambrosio, M. Hendrych, M. Mičuda, L. Marrucci, F. Sciarrino, and J. P. Torres, "Generation of tunable entanglement and violation of a Bell-like inequality between different degrees of freedom of a single photon", *Phys. Rev. A* **90**, 052326 (2014)
- [39] B. N. Simon, S. Simon, F. Gori, M. Santarsiero, R. Borghi, N. Mukunda, and R. Simon, "Nonquantum Entanglement Resolves a Basic Issue in Polarization Optics", *Phys. Rev. Lett.* **104**, 023901 (2010).
- [40] X. F. Qian and J. H. Eberly, "Entanglement and classical polarization states", *Opt. Lett.* **36**, 4110 (2011).
- [41] P. Chowdhury, A. S. Majumdar, and G. S. Agarwal, "Nonlocal continuous-variable correlations and violation of Bell's inequality for light beams with topological singularities", *Phys. Rev. A* **88**, 013830 (2013).

- [42] F. De Zela, "Relationship between the degree of polarization, indistinguishability, and entanglement", *Phys. Rev. A* **89**, 013845 (2014).
- [43] P. Ghose and A. Mukherjee, "Entanglement in Classical Optics", *Rev. Theor. Sci.* **2**, 274 (2014).
- [44] A. Holleczek, A. Aiello, C. Gabriel, C. Marquardt, and G. Leuchs, "Classical and quantum properties of cylindrically polarized states of light", *Opt. Express* **19**, 9714 (2011).
- [45] C. Gabriel, A. Aiello, W. Zhong, T. G. Euser, N. Y. Joly, P. Banzer, M. Förtsch, D. Elser, U. L. Andersen, Ch. Marquardt, P. St. J. Russell, and G. Leuchs, "Entangling Different Degrees of Freedom by Quadrature Squeezing Cylindrically Polarized Modes" *Phys. Rev. Lett.* **106**, 060502 (2011).
- [46] C. Gabriel, A. Aiello, S. Berg-Johansen, C. Marquardt, and G. Leuchs, "Tools for detecting entanglement between different degrees of freedom in quadrature squeezed cylindrically polarized modes", *Eur. Phys. J. D* **66**, 172 (2012).
- [47] F. Toepfel, A. Aiello, C. Marquardt, E. Giacobino, and G. Leuchs, "Classical entanglement in polarization metrology", *New J. Phys.* **16**, 073019 (2014).
- [48] A. Aiello, F. Toepfel, C. Marquardt, E. Giacobino, and G. Leuchs, "Classical entanglement: Oxymoron or resource?", *arXiv:1409.0213* (2014).
- [3] M. J. Padgett and J. Courtial, *Opt. Lett.* **24**, 430 (1999). [24] M. Padgett and L. Allen, *Contemp. Phys.* **41**, 275 (2000).

- [4] M. França Santos, P. Milman, A. Z. Khoury, and P. H. Souto Ribeiro, *Phys. Rev. A* 64, 023804 (2001).
- [5] D. P. Caetano, P. H. Souto Ribeiro, J. T. C. Pardal, and A. Z. Khoury, *Phys. Rev. A* 68, 023805 (2003).
- [6] A. N. de Oliveira, S. P. Walborn, and C. H. Monken, *J. Opt. B: Quantum Semiclassical Opt.* 7, 288 (2005).
- [7] L. Marrucci, C. Manzo, and D. Paparo, *Phys. Rev. Lett.* 96, 163905 (2006). [9] E. Nagali, F. Sciarrino, F. De Martini, B. Piccirillo, E. Karimi, L. Marrucci, and E. Santamato, *Opt. Express* 17, 18745 (2009). [14] V. D'Ambrosio, E. Nagali, S. P. Walborn, L. Aolita, S. Slussarenko, L. Marrucci, and F. Sciarrino, *Nat. Commun.* 3, 961 (2012). [8] E. Nagali, F. Sciarrino, F. De Martini, L. Marrucci, B. Piccirillo, E. Karimi, and E. Santamato, *Phys. Rev. Lett.* 103, 013601 (2009).
- [10] C. E. R. Souza and A. Z. Khoury, *Opt. Express* 18, 9207 (2010).
- [13] C. E. R. Souza, C. V. S. Borges, A. Z. Khoury, J. A. O. Huguenin, L. Aolita, and S. P. Walborn, *Phys. Rev. A* 77, 032345 (2008). [19] C. E. R. Souza, J. A. O. Huguenin, P. Milman, and A. Z. Khoury, *Phys. Rev. Lett.* 99, 160401 (2007). [20] C. E. R. Souza, J. A. O. Huguenin, and A. Z. Khoury, *J. Opt. Soc. Am. A* 31, 1007 (2014).
- [11] A. R. Vieira, M. Hor-Meyll, and A. Z. Khoury, *J. Opt. Soc. Am. B* 30, 1623 (2013).
- [12] L. Aolita and S. P. Walborn, *Phys. Rev. Lett.* 98, 100501 (2007).
- [15] L. Chen and W. She, *Phys. Rev. A* 80, 063831 (2009).
- [16] J. T. Barreiro, T.-C. Wei, and P. G. Kwiat, *Phys. Rev. Lett.* 105, 030407 (2010).

- [17] A. Z. Khoury and P. Milman, Phys. Rev. A 83, 060301(R) (2011). [38] E. S. Guerra, A. Z. Khoury, L. Davidovich, and N. Zagury, Phys. Rev. A 44, 7785 (1991). [39] L. Davidovich, S. Y. Zhu, A. Z. Khoury, and C. Su, Phys. Rev. A 46, 1630 (1992). [40] M. K. Olsen, L. I. Plimak, and A. Z. Khoury, Opt. Commun. 201, 373 (2002).
- [18] M. Erhard, H. Qassim, H. Mand, E. Karimi, and R. W. Boyd, arXiv:1404.7573.
- [49] Seyed Mohammad Hashemi Rafsanjani, Mohammad Mirhosseini, Omar S. Magaña-Loaiza, and Robert W. Boyd, "State transfer based on classical nonseparability", PHYSICAL REVIEW A **92**, 023827 (2015).
- [50] Giovanni Milione, Thien An Nguyen, Jonathan Leach, Daniel A. Nolan, and Robert R. Alfano, "Using the non-separability of vector beams to encode information for optical communication", Optics Letters **40**, 4887 (2015).
- [51] Kumel H. Kagalwala, H. Esat Kondakci, Ayman F. Abouraddy and Bahaa E. A. Saleh, "Optical coherency matrix tomography", Scientific Reports **5**, 15333 (2015).
- [52] Andrea Aiello, Falk Töppel, Christoph Marquardt¹, Elisabeth Giacobino, and Gerd Leuchs, "Quantum-like nonseparable structures in optical beams", New Journal of Physics **17**, 043024 (2015).
- [53] B Stoklasa, L Motka, J Rehacek, Z Hradil, L L Sánchez-Soto, and GS Agarwal, "Experimental violation of a Bell-like inequality with optical vortex beams", New Journal of Physics **17**, 113046 (2015).