

Thiago Soares Assimos

**Mapeamentos Entre Teorias de Calibre e  
Gravidade: Casos em Três e Quatro  
Dimensões**

**Niterói**

**2016**

Thiago Soares Assimós

# **Mapeamentos Entre Teorias de Calibre e Gravidade: Casos em Três e Quatro Dimensões**

Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Física.

Universidade Federal Fluminense – UFF

Instituto de Física

Programa de Pós-Graduação

Orientador: Dr. Rodrigo Ferreira Sobreiro

Niterói

2016

Thiago Soares Assimos

Mapeamentos Entre Teorias de Calibre e Gravidade: Casos em Três e Quatro Dimensões/ Thiago Soares Assimos. – Niterói, 2016

80 p. : il.; 30 cm.

Orientador: Dr. Rodrigo Ferreira Sobreiro

Tese (Doutorado) – Universidade Federal Fluminense – UFF

Instituto de Física

Programa de Pós-Graduação, 2016.

1. Teoria de Calibre. 2. Gravidade. 3. Difeomorfismos. I. Chern-Simons. II. Yang-Mills III. Universidade Federal Fluminense. IV. Instituto de Física. V. Mapeamentos Entre Teorias de Calibre e Gravidade: Casos em Três e Quatro Dimensões.

Thiago Soares Assimos

**Mapeamentos Entre Teorias de Calibre e Gravidade:  
Casos em Três e Quatro Dimensões**

Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Física.

Trabalho aprovado. Niterói, 08 de novembro de 2016:

---

**Dr. Rodrigo Ferreira Sobreiro**  
Orientador

---

**Dr. Antonio José Accioly**  
Titular Externo

---

**Dr. José Abdalla Helayël-Neto**  
Titular Externo

---

**Dr. Luis Esteban Oxman**  
Titular Interno

---

**Dr. Rodrigo Picanço Negreiros**  
Titular Interno

---

**Dr. Vitor Emanuel Rodino Lemes**  
Suplente Externo

---

**Dr. Marcelo Silva Sarandy**  
Suplente Interno

---

**Dra. Maria Emília Xavier Guimarães**  
Suplente Interno

Niterói  
2016

*À Elohim, o sumo cientista de todas as eras. À minha família e amigos.*

# Agradecimentos

Ao meu primeiro e maior amor: Cristo Jesus – aquele que é antes de todas as coisas e por meio dEle tudo subsiste. A razão pela qual minha vida possui sentido. Obrigado por me conceder o privilégio de concluir mais esta etapa.

À “união de fibras  $\mathcal{K}$  que forma o espaço topológico  $\mathcal{T}$ ”... Agradeço à ela que abriu mão de tantas coisas simplesmente por acreditar e viver irrestritamente meus sonhos. O seu amor é uma dádiva que Deus me permite usufruir todos os dias. Você é singular para mim. Te amo incansavelmente. À minha esposa  $\mathcal{K}$ essia.

Aos meus pais Luis e Glória por se doarem sem qualquer reserva. Obrigado pelo amor, incentivo, cumplicidade e apoio que me foram incondicionais. Com o mesmo carinho sou grato aos meus irmãos, aos meus avós paternos (*in memoriam*) e maternos, meus tios e tias, ao meu sogro e minha sogra e meus cunhados; uma família que sempre acreditou e investiu em minha carreira. Aos queridos sobrinhos que alegram o meu dia a dia. Amo vocês.

Agradeço ao meu orientador Professor Rodrigo Sobreiro, pela amizade, paciência, dedicação, conselhos e diálogos, sempre me auxiliando de forma plena ao longo deste doutorado. Um profissional exemplar que vive a ciência com toda intensidade. Obrigado, Rodrigo! Ah, depois da defesa precisamos comer “Aquele Hambúrguer” lá no Meating. Eu pago a rodada.

Aos professores Antonio Accioly, José Helayël e Sebastião Alves (Tião) por todo suporte prestado ao longo do mestrado e doutorado, pessoas admiráveis e dotadas de um enorme coração. Não menos importante, ao professor Nilson Antunes, Nelson Pinto, Maria de Fátima Alves, César Augusto Linhares, Vitor Lemes, Daniel Barci, José de Sá Borges (*in memoriam*), Titose Kosaka, que colaboraram diretamente para minha formação acadêmico-científica.

Por todo incentivo e apoio, agradeço ao meu pastor e amigo Bp. Hermes Fernandes e família. Aos meus amigos da Reina.

Aos companheiros do grupo de pesquisa: Anderson, Antônio, Fernanda, Gui-

Iherme e Tiago.

Aos funcionários do If-Uff em geral. À Valéria e Fernanda pelo trabalho impecável na secretaria e obviamente pela ajudas burocráticas.

Agradeço à Capes e à Proppi-Uff pelo apoio financeiro.

*“Quanto mais eu estudo a natureza  
mais fico impressionado com as obras do Criador.  
Nas menores de suas criaturas  
Deus colocou propriedades extraordinárias.”  
(Louis Pasteur)*

# Resumo

O trabalho realizado nesta tese tem início em uma teoria de calibre euclidiana (Chern-Simons/Yang-Mills) e termina com uma teoria de gravidade. Os casos em três e quatro dimensões serão analisados. No primeiro caso, a gravidade emerge de uma teoria de Chern-Simons, devido a associação de um parâmetro de massa disponível na teoria (constante de acoplamento) com a constante gravitacional de Newton. Em quatro dimensões, a gravidade só pode ser induzida quando assumimos um parâmetro de massa e o relacionamos às constantes de Newton e cosmológica. Nesse ínterim, também serão discutidos o envolvimento dos grupos e campos de calibre na construção da gravidade efetiva obtida em cada caso. Um teorema proposto por E. Witten associa cada setor do grupo de calibre com os difeomorfismos e isometrias locais, sem a necessidade de utilizar a prescrição de Inönü-Wigner. Ademais, os resultados também são generalizados ao caso *off-shell*. Para isso, vamos explorar a geometria subjacente aos vínculos obtidos a fim de validar os resultados para o caso *off-shell* – a consistência destas restrições com o formalismo de Arnowitt-Deser-Misner é investigada. O resultado é que, para assegurar esta prescrição no formalismo Arnowitt-Deser-Misner a nível *off-shell*, os difeomorfismos devem ser quebrados a um subgrupo puramente espacial. Consequentemente, uma gravidade isométrica local surge naturalmente sem fazer uso da contração de Inönü-Wigner, mostrando que nossa teoria de gravidade emergente é consistente quando formulada a partir de uma teoria de calibre, sendo completamente invariante de difeomorfismos na folheação tipo-espaço.

**Palavras-chave:** teorias de calibre, Chern-Simons, Yang-Mills, gravidade, difeomorfismos, folheação ADM

# Abstract

The work accomplished in this thesis begins with a gauge theory Euclidean (Chern-Simons/Yang-Mills) and ends with a gravity theory. The cases in three and four dimensions are analyzed. In the first case, gravity emerges from a Chern-Simons theory due to association of a mass parameter available in theory (coupling constant) with a cosmological and Newton's gravitational constant. In four dimensions, gravity can only be induced when assume a mass parameter and relate it with the Newton's and cosmological constant. In the meantime will be also discussed the involvement of gauge group and fields in the construction of the effective gravity obtained in each case. A theorem proposed by E. Witten associates each sector of the gauge group with diffeomorphisms and local isometry without the need employing an Inönü-Wigner prescription. Moreover, the results are also generalized to the off-shell case. For that, we explore the underlying geometry of the constraints obtained in order to validate the results to the off-shell case – the consistency of such constraints with the Arnowitt-Deser-Misner formalism is investigated. The result is that, in order to the prescription hold in the Arnowitt-Deser-Misner formalism at off-shell level, diffeomorphisms must be broken to a spatial subgroup. Hence, a local isometric gravity arise naturally without the use Inönü-Wigner contraction showing that our emerging gravity theory is consistent when formulated from a gauge theory, being fully diffeomorphisms invariant at spacelike foliation.

**Keywords:** gauge theories, Chern-Simons, Yang-Mills, gravity, diffeomorphisms, ADM foliations

# Lista de ilustrações

Figura 1 – Invariância de $v^0$ quando transportado paralelamente ao longo de dois caminhos fechados, representados pelas cores azul e vermelha.	50
Figura 2 – Geometria extrínseca da folha afetando o transporte paralelo de $v^P$ pelos caminhos azul e vermelho. . . . .	51

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>TEORIA DE YANG-MILLS</b>	<b>18</b>
2.1	Princípio de calibre	18
2.2	Álgebra e campo de calibre	19
2.3	Ação de Yang-Mills pura	23
2.4	Aspectos da quantização	24
2.5	Ação de Chern-Simons	25
<b>3</b>	<b>GRAVIDADE NO FORMALISMO DE PRIMEIRA ORDEM</b>	<b>27</b>
3.1	Princípio de equivalência	27
3.2	A <i>vielbein</i>	28
3.3	A conexão de spin	30
3.4	A estrutura do formalismo	32
3.4.1	Tensores invariantes	32
3.4.2	Curvatura	33
3.4.3	Torção	34
3.5	Teorias de gravidade	35
<b>4</b>	<b>GRAVIDADE EM TRÊS DIMENSÕES</b>	<b>38</b>
4.1	Chern-Simons e gravidade: simetria de Poincaré	38
4.2	Transformações de calibre e difeomorfismos	42
4.2.1	Análise geométrica	47
4.3	Simetria de calibre de de Sitter: inclusão da constante cosmológica	52
4.3.1	Transformações de calibre e difeomorfismos	54
<b>5</b>	<b>GRAVIDADE EM QUATRO DIMENSÕES</b>	<b>57</b>
5.1	Yang-Mills e gravidade	57
5.2	Transformações de calibre e difeomorfismos	63

<b>5.3</b>	<b>Aspectos geométricos</b> . . . . .	<b>65</b>
<b>6</b>	<b>ASPECTOS MATEMÁTICOS</b> . . . . .	<b>67</b>
<b>6.1</b>	<b>Fibrados, teorias de calibre e gravidade emergente</b> . . . . .	<b>67</b>
6.1.1	Caso tridimensional . . . . .	68
6.1.2	Caso quadridimensional . . . . .	71
<b>6.2</b>	<b>Cohomologia</b> . . . . .	<b>72</b>
6.2.1	Chern-Simons em três dimensões . . . . .	73
6.2.2	Yang-Mills em quatro dimensões . . . . .	75
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS</b> . . . . .	<b>77</b>

# 1 Introdução

Atualmente, sabemos que pelo menos três das quatro teorias fundamentais da natureza<sup>1</sup>: a eletrodinâmica quântica, a cromodinâmica quântica e a teoria fraca, são teorias quânticas [?, ?, ?, ?] bem sucedidas e que se afirmam ainda mais diante de dados experimentais, como por exemplo, a confirmação da existência do bóson de Higgs pelo *Large Hadron Collider* (LHC).

Foi o sucesso atribuído ao MP em sustentar estas três interações fundamentais que despertou na comunidade científica a busca pela inclusão da interação gravitacional como parte deste modelo. Um outro detalhe não menos importante está relacionado aos problemas da cosmologia moderna, mais especificamente as singularidades no universo primordial e nos buracos negros, os quais carecem de uma teoria quântica da gravidade, pois os efeitos quânticos não podem ser desprezados quando estamos lidando com a escala de Planck. Atrelado a isso, espera-se que algumas questões ligadas a origem da energia e da matéria escura possam ser resolvidas por uma versão quântica da gravidade. Hoje, pode-se dizer que o problema da quantização da interação gravitacional está no *podium* dos maiores desafios da Física.

Há uma incessante busca por uma teoria quântica da gravidade partindo da ação de Einstein-Hilbert, mas ainda temos muitos problemas, já que se procedermos da mesma maneira que fazemos no caso das outras interações, teremos uma teoria que não é renormalizável, e portanto, não pode ser usada para fazer previsões físicas significativas no âmbito de uma teoria fundamental. O terreno da gravidade quântica, embora amplo e diversificado, ainda não foi totalmente explorado. São as teorias do tipo *Loop Quantum Gravity* [?, ?, ?], *Higher Derivatives Quantum Gravity* [?, ?], *String Theory*, [?, ?, ?, ?] e *Emergent Gravities* [?, ?] que mostram-se propícias para aplainar esse vasto território, apesar das dificuldades em suas respectivas construções e na elaboração de experimentos que as comprovem.

É importante dizer que as três interações mencionadas são teorias quantizáveis pelo fato de serem do tipo calibre, e foi neste sentido que os trabalhos de R. Utiyama, T.

---

<sup>1</sup> O casamento destas três interações dá origem ao chamado Modelo Padrão (MP).

Kibble e D. Sciama, respectivamente [?, ?, ?], também buscaram desvelar a gravidade como uma teoria deste tipo. Adiante, neste mesmo intuito, afloraram outros trabalhos: [?, ?, ?, ?, ?, ?, ?].

Nesta tese nós vamos apresentar os aspectos clássicos de uma teoria de gravidade induzida. Dividimos este trabalho da seguinte forma:

No Capítulo 2, serão abordados os fundamentos básicos sobre as teorias de calibre, como por exemplo, as transformações de calibre, a construção das ações de Yang-Mills e Chern-Simons a partir dos campos fundamentais e seus aspectos algébricos e geométricos, com intuito de preparar o caminho para os capítulos posteriores.

Dando continuidade no Capítulo 3, vamos construir uma teoria de gravidade por meio de uma teoria de calibre usando dois ingredientes básicos: a vielbein<sup>2</sup> e a conexão de spin. Veremos que todas as informações sobre a geometria do espaço-tempo está codificada nestes dois campos, e a partir deles se originam todos os outros objetos geométricos, como por exemplo a curvatura e a torção. Teorias de gravidade que adotam estes campos em seu alicerce são conhecidas como Formalismo de Primeira Ordem da Gravidade.

De fato, é no Capítulo 4 que surgem as novidades. Inicialmente, assumimos a ação de Chern-Simons sob uma variedade em três dimensões euclidianas, a fim de mostrar que é possível induzir uma teoria de Einstein-Hilbert [?, ?] e Einstein-Hilbert acrescida do termo de constante cosmológica, quando se escolhe os grupos de Poincaré e de Sitter, respectivamente, como grupos de calibre da teoria. Além disso, a teoria de gravidade só emergirá quando lançarmos mão das propriedades topológicas da ação de Chern-Simons, e também associarmos os campos de calibre da teoria inicial com objetos geométricos. Nesta construção a constante de Newton e a constante cosmológica serão identificadas com o parâmetro de acoplamento disponibilizado pela teoria. A partir daí o trabalho toma um outro rumo, pois, não deformaremos o grupo original ao grupo de Poincaré – este é o ponto onde destoamos das propostas que fazem uso da contração de Inönü-Wigner [?, ?, ?, ?, ?]. Utilizaremos alguns aspectos matemáticos para mostrar que o grupo de difeomorfismos está contido no grupo de calibre, desde que sejam feitas previamente algumas escolhas [?]. Assim, as isometrias locais serão associadas

<sup>2</sup> Para o caso 4-dimensional e 3-dimensional é tratada como *vierbein* e *dreibein*, respectivamente.

a um setor do grupo de calibre, de modo que uma gravidade isométrica local surja naturalmente. Consequentemente, devido ao fato de termos escolhido uma abordagem que não faz uso das equações de movimento, diferentemente do que foi mostrado por E. Witten em [?], surge a necessidade de compreendermos a geometria que está por trás de algumas relações. Como sabemos que a descrição feita por Arnowitt-Deser-Misner (ADM) folheia o espaço-tempo  $[?, ?, ?, ?, ?, ?, ?]$  e preserva os difeomorfismos nas folhas, vamos discutir os aspectos geométricos do parâmetro difeomorfo neste contexto para que nossa teoria de gravidade induzida seja localmente isométrica. Obviamente que isso contempla o fato da teoria de gravidade ser construída a partir de uma ação de Yang-Mills sem que o grupo de calibre seja reduzido ao de Poincaré via contração de Inönü-Wigner.

No Capítulo 5 mostraremos uma ação de gravidade induzida tomando como base a ação de Yang-Mills para o grupo  $SO(5)$ , em um espaço-tempo euclidiano quadridimensional. A escolha de uma teoria não-abeliana também não foi por mero acaso, já que a teoria de Yang-Mills pura é invariante por transformações de Poincaré, renormalizável por contagem de potências e invariante de calibre, além de ser uma teoria local e que conserva a probabilidade. Como estamos sob uma ação de Yang-Mills pura, os campos de calibre não podem ser interpretados como objetos geométricos, e daí surge a necessidade de incluirmos uma escala de massa que nos permitirá associar o parâmetro de massa com as constantes cosmológica e de Newton, emergindo assim uma ação de gravidade efetiva. Ademais, uma redefinição no termo de constante cosmológica será aplicada para possivelmente compensar o alto valor previsto pela teoria quântica de campos. Pelo fato de termos escolhido trabalhar de modo *off-shell*, a descrição de uma gravidade isométrica local também dependerá de classificarmos o parâmetro de difeomorfismos sob a geometria da folheação ADM, mostrando então que a teoria de gravidade apresentada é formulada a partir dos campos de Yang-Mills sem a necessidade de quebra da simetria de calibre pelo teorema de Inönü-Wigner [?].

O Capítulo 6 está incumbido de tratar sobre alguns detalhes matemáticos relativos à geometria das teorias de Yang-Mills, aspectos formais do mapeamento entre teorias de calibre e teorias de gravidade e algumas questões sobre a cohomologia da teoria de Chern-Simons e Yang-Mills.

Finalmente, o Capítulo 7 resumirá os resultados obtidos, além de apresentar

nossas perspectivas sobre o que pretendemos fazer futuramente.

## 2 Teoria de Yang-Mills

De antemão, é importante notificar que nosso intuito principal neste trabalho é mostrar como uma teoria de gravidade pode emergir naturalmente de uma teoria de Yang-Mills pura. Por esse motivo, no presente capítulo apresentaremos os principais fundamentos das teorias de calibre não-abelianas, tais como o Princípio de Calibre, a álgebra de Lie, o campo de calibre (ou conexão), as transformações associadas ao grupo a serem empregadas, a 2-forma intensidade de campo e a ação de Yang-Mills, onde toda essa estrutura, *a priori*, está acomodada sob uma variedade  $\mathbb{M}^n$ . Obviamente que, para maiores detalhes, deixamos ao leitor as seguintes sugestões de literaturas [?, ?, ?, ?, ?].

### 2.1 Princípio de calibre

Simetrias são úteis, não somente na construção de ações clássicas, elas revelam-se capazes de poder assegurar a viabilidade de uma teoria quântica construída a partir de uma determinada ação clássica. Simetrias do espaço-tempo são consideradas simetrias externas e estão relacionadas à invariância por transformações sob o grupo de difeomorfismos. No caso das simetrias de calibre [?, ?], as transformações ocorrem no âmbito do espaço interno dos campos. Matematicamente isso significa que um grupo age sobre um conjunto de campos que carregam uma representação específica desse grupo, sem afetar as coordenadas do espaço-tempo.

No contexto das interações fundamentais, em particular, as simetrias de calibre possuem um papel de destaque, já que elas são o guia para dissecar três das quatro forças na natureza (fraca, forte e eletromagnética) – todas estas bem sucedidas teorias estão no escopo de Yang-Mills. Posto isso, vemos que este tipo de simetria pode ser um bom laboratório para construir Físicas renormalizáveis, onde a elaboração de lagrangianas que tornam a ação localmente invariante de calibre está baseada no chamado *Princípio de Calibre*, o qual afirma o seguinte: toda quantidade física (observáveis), bem como as ações devem ser invariantes por transformações de calibre. E foi a partir daí que veio à tona a seguinte questão: devido ao fato da maioria das interações serem de calibre, por

que não buscar incluir a gravitacional neste mesmo patamar, ou seja, construir uma teoria quântica para a gravidade que seja renormalizável? Esse é, sem dúvida, um dos maiores problemas da Física Moderna.

## 2.2 Álgebra e campo de calibre

Considere um conjunto de geradores,  $Q^a$ , representados por matrizes anti-hermitianas ( $Q^a = -Q^{a\dagger}$ ) e associados à um grupo de Lie compacto, semi-simples,  $\mathbb{G}$ , tal que obedece à seguinte relação

$$[Q^a, Q^b] = f^{ab}_c Q^c, \quad (2.1)$$

com  $\{a, b, c\} \in \{1, 2, \dots, \dim \mathbb{G}\}$ . Lembrando que a normalização dos geradores é do tipo [?, ?]

$$\text{Tr}(Q^a Q^b) = -\frac{1}{2} \delta^{ab}. \quad (2.2)$$

Para reforçar, um grupo de Lie é dito semi-simples [?, ?] quando sua álgebra de Lie,  $\mathfrak{g}$ , o é. De maneira formal isso equivale dizer que  $\mathfrak{g}$  satisfaz ao critério de Cartan [?], ou seja, possui uma *forma de Cartan-Killing* (invariantes do grupo) não-degenerada. Grupos deste tipo são escolhidos pois esses invariantes podem ser usados para definir termos cinéticos nos campos de calibre. Como exemplo temos os grupos  $O(n)$ ,  $SO(m, n)$ ,  $SL(n, \mathbb{R})$ ,  $SU(n)$  [?, ?, ?].

Além disso, um grupo de Lie possui a estrutura de uma variedade suave, logo, o fato dele ser compacto está atrelado à variedade ser compacta, i.e., quando ela pode ser coberta por um número finito de coordenatizações. Essa característica dos grupos de Lie também diz respeito a um número finito de parâmetros que variam em um intervalo fechado e limitado. Outrossim, a principal importância da compacidade é que ela nos permite obter propriedades globais a partir de propriedades locais. São exemplos de grupos compactos:  $O(n)$ ,  $SO(n)$ ,  $U(n)$ ,  $SU(n)$  [?, ?, ?].

As constantes de estrutura do grupo,  $f^{ab}_c$ , são totalmente antissimétricas em seus índices. Se  $f^{ab}_c = 0, \forall a, b, c$ , dizemos que o grupo é abeliano. Além disso, os geradores de (2.1) satisfazem a identidade de Jacobi, o que automaticamente produz a seguinte relação

$$f^{abd} f_{dce} + f^{bcd} f_{dae} + f^{cad} f_{dbe} = 0. \quad (2.3)$$

Agora, vamos introduzir os campos,  $\Phi$  (vetores no espaço do grupo), que se transformam na representação fundamental de  $\mathbb{G}$  como

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x) = \mathcal{U}\Phi(x) , \quad (2.4)$$

onde

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_N \end{bmatrix} , \quad (2.5)$$

$\mathcal{U} = e^\phi$  é um elemento unitário de  $\mathbb{G}$  e  $\phi = \phi^a Q_a$  são parâmetros locais que dependem das coordenadas do espaço-tempo.

O problema com esta construção é que a derivada do campo não é covariante sob a transformação<sup>1</sup>

$$d\Phi = (d\mathcal{U})\Phi + \mathcal{U}d\Phi . \quad (2.6)$$

Observe a quebra da covariância no primeiro termo de (2.6). Para resolvermos esse impasse, introduzimos um novo operador,  $\nabla$ , covariante sobre o grupo de calibre [?], conhecido como *derivada covariante*,

$$\nabla = d + Y . \quad (2.7)$$

Ademais, também lançamos mão do campo de calibre<sup>2</sup>,  $Y$ , que assume  $\mathfrak{g}$ -valores em um aberto [?, ?]  $U_i \subset \mathbb{M}^n$ . Com isso,  $Y$  pode ser expandido no conjunto de geradores  $\{Q^a\}$  de  $\mathfrak{g}$  através da seguinte relação

$$Y = Q_a Y^a_\mu dx^\mu . \quad (2.8)$$

Por fim, o teorema abaixo mostra que este campo pode ser usado para construir uma 1-forma<sup>3</sup> de conexão sobre o fibrado<sup>4</sup> principal  $P(\mathbb{G}, \mathbb{M}^n)$ .

**Teorema 1.** *Dado uma 1-forma  $Y$  com  $\mathfrak{g}$ -valores em um aberto  $U$  e uma seção local  $\sigma : U \rightarrow \pi^{-1}(U)$ , então existe uma 1-forma de conexão  $\omega$  tal que  $Y = \sigma^*\omega$ .*

<sup>1</sup> O operador  $d = \partial_\mu dx^\mu$  é chamado *derivada exterior* [?, ?].

<sup>2</sup> Sempre que possível omitiremos qualquer dependência espaço-temporal.

<sup>3</sup> Uma ótima leitura sobre formas diferenciais pode ser encontrada em [?, ?, ?, ?].

<sup>4</sup> Lembrando que  $\mathbb{G}$  é o grupo de estrutura e  $\mathbb{M}^n$  o espaço base [?, ?, ?, ?].

A definição da projeção  $\pi$ , da seção local  $\sigma$  e do retrocesso  $\sigma^*$ , bem como a demonstração do teorema, podem ser encontradas em [?, ?]. Assim, localmente, a especificação do campo de calibre é equivalente à de uma conexão.

Doravante, retomaremos o quesito sobre a quebra de covariância para mostrar que a derivada covariante do campo  $\Phi$  é, de fato, covariante mediante a transformação (2.4), logo,

$$\begin{aligned} (\nabla\Phi)' &= d\Phi' + Y'\Phi' \\ &= \mathcal{U}d\Phi + (d\mathcal{U})\Phi + Y'\mathcal{U}\Phi \\ &= \mathcal{U}\nabla\Phi, \end{aligned} \tag{2.9}$$

visto que  $d\mathcal{U}$  é cancelado através da transformação

$$Y' = \mathcal{U}^{-1}(Y + d)\mathcal{U}. \tag{2.10}$$

Pensando nos capítulos vindouros, é interessante relembrar como funciona a atuação do operador (2.7), e.g., em uma 1-forma  $\Psi = Q_a \Psi^a_\mu dx^\mu$  com  $\mathfrak{g}$ -valores. Daí então

$$\begin{aligned} \nabla(Q_a \Psi^a_\mu dx^\mu) &= d(Q_a \Psi^a_\mu dx^\mu) + \underbrace{\{Y^a_\mu \Psi^b_\nu (dx^\mu \otimes dx^\nu) - \Psi^b_\nu Y^a_\mu (dx^\nu \otimes dx^\mu)\}}_{Y \wedge \Psi} [Q_a, Q_b] \\ &= d(Q_a \Psi^a_\mu dx^\mu) + f_{ab}{}^c Q_c Y^a \wedge \Psi^b, \end{aligned} \tag{2.11}$$

onde  $\wedge$  é o produto exterior<sup>5</sup> e  $\otimes$  denota o produto tensorial. De maneira compacta

$$\nabla\Psi^a = d\Psi^a + f_{bc}{}^a Y^b \wedge \Psi^c, \tag{2.12}$$

ou ainda<sup>6</sup>

$$\nabla\Psi = d\Psi + Y \wedge \Psi. \tag{2.13}$$

Cabe ressaltar que a derivada exterior é uma mapa do tipo  $d : \Omega^p \rightarrow \Omega^{p+1}$ , ou seja, leva uma  $p$ -forma em  $(p+1)$ -forma, onde o conjunto de todas as  $p$ -formas compõem o espaço vetorial  $\Omega^p$ . Pelo fato de  $Y$  ser uma 1-forma, o produto exterior será um mapa exatamente igual a  $d$ , logo,  $\wedge : \Omega^p \rightarrow \Omega^{p+1}$ , como era de se esperar.

<sup>5</sup> Sua extensão entre  $p$ -formas e  $q$ -formas é imediata e pode ser encontrada em [?, ?, ?].

<sup>6</sup> Daqui em diante o produto exterior será exprimido sem o símbolo  $\wedge$ .

Agora será conveniente tomarmos uma transformação infinitesimal do elemento unitário de  $\mathbb{G}$  para  $\phi \ll 1$ , então,

$$\mathcal{U} \approx 1 + \phi + \mathcal{O}(\phi^2) + \dots \quad (2.14)$$

e conseqüentemente em primeira aproximação (2.10) torna-se

$$Y' - Y = \delta Y = \nabla \phi . \quad (2.15)$$

Essencialmente, as transformações de calibre são aquelas cujos parâmetros com valores na álgebra de Lie do grupo dependem de maneira arbitrária dos pontos do espaço-tempo, i.e.,  $\phi = \phi(x)$ . A 1-forma  $Y$  é um campo que carrega informações sobre a simetria interna do sistema, obedecendo a este tipo de transformação, e por isso, é conhecida como campo de calibre.

Pensando de um modo mais formal isto é equivalente a considerar o espaço de todas as conexões de calibre,  $\mathcal{Y}$ , e de todos os elementos do grupo,  $\mathbb{G} = \{\mathcal{U}\}$  de forma a construir o fibrado principal  $P$ .

Para complementar, é importante considerar que a simetria de calibre apresenta algumas semelhanças com a simetria de difeomorfismos, a saber: ambas são locais e possuem parâmetros que são funções do espaço-tempo e o operador de derivada covariante num espaço-curvo muito se assemelha ao operador (2.7) das teorias de Yang-Mills, com a ressalva do primeiro se transformar covariantemente sob difeomorfismos, e o segundo sob transformações de calibre (como visto em (2.9)). Entretanto, o argumento dos campos são alterados quando transformados por difeomorfismos, o que não ocorre nas transformações de calibre, onde somente os campos são afetados. Traduzindo para a teoria de fibrados: essa ação do grupo de difeomorfismos não provoca movimento das fibras, e deste modo os símbolos de Christoffel não podem ser definidos como conexões. Apesar disso não podemos, sob esta avaliação superficial, dizer que a gravidade também é uma teoria de calibre (pelo menos em princípio).

Posteriormente será discutido que os difeomorfismos podem estar contidos na simetria de calibre, uma vez que escolhermos as teorias topológicas em três dimensões [?, ?]. Ademais, iremos mais a fundo e generalizaremos este resultado para as teorias de Yang-Mills em quatro dimensões.

## 2.3 Ação de Yang-Mills pura

Agora, vamos definir

$$\begin{aligned}
 F\psi &= \nabla(\nabla)\psi \\
 &= (d + Y)(d + Y)\psi \\
 &= d^2\psi + d(Y\psi) + Yd\psi + YY\psi \\
 &= (dY + YY)\psi,
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

onde  $\psi$  é uma  $p$ -forma com  $\mathfrak{g}$ -valores. Além disso, foram consideradas a nilpotência do operador  $d$  e a operação de derivada exterior de um produto [?]. Observe que a partir daí

$$F = dY + YY, \tag{2.17}$$

também conhecida como a 2-forma de curvatura de Yang-Mills (ou intensidade do campo de calibre) definida sobre o aberto  $U$  da variedade. Visto que  $F$  contém termos de derivada e de auto-interação, logo, descreve a dinâmica do campo de calibre e indica a presença de energia<sup>7</sup>.

Devido ao fato de  $\nabla$  ser covariante, por construção, então  $F$ , também o é

$$F \rightarrow \mathcal{U}F\mathcal{U}^{-1}. \tag{2.18}$$

De posse dessas informações e uma vez estabelecido um grupo de simetria de calibre, podemos construir uma ação invariante de calibre tal, que satisfaça alguns critérios:

- (i) seja composta pelos campos e por duas derivadas desses campos em cada ponto do espaço-tempo, isso implica na localidade da ação;
- (ii) renormalizável por contagem de potências;
- (iii) invariante por transformações de Poincaré de coordenadas;

<sup>7</sup> Em unidades naturais tanto o campo  $Y$  quanto  $d$ , possuem dimensão de massa, assim, naturalmente  $F$  possui dimensão de  $E^2$ .

- (iv) produza equações de movimento contendo no máximo derivadas de segunda ordem em  $Y$ , pois derivadas mais altas colocaria em xeque a unitariedade da matriz  $S$ , produzindo assim graus de liberdade não-físicos (estados com norma negativa);
- (v) seja real de maneira que conserve a probabilidade.

Assim, o invariante mais simples atendendo às exigências é dado por,

$$\text{Tr}(UFU^{-1}UFU^{-1}) = \text{Tr}(FF) . \quad (2.19)$$

E a ação de Yang-Mills pura pode ser escrita como

$$\begin{aligned} S_{YM} &= -\frac{1}{\kappa^2} \int \text{Tr}(F * F) \\ &= \frac{1}{2\kappa^2} \int (F^a * F_a) , \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde o traço foi tomado com relação ao grupo e  $\kappa$  é o parâmetro de acoplamento

## 2.4 Aspectos da quantização

Quando quantizamos uma teoria do tipo Yang-Mills via formalismo integral de caminho [?, ?, ?], estamos somando sobre diversas configurações de  $Y$ , e isso, de fato, já inclui àquelas configurações que são equivalentes. A partir daí é notório que estamos induzindo uma forma de múltiplas contagens, cuja origem está nas infinitas configurações de campo ligadas por uma transformação de calibre. Matematicamente, essa condição é correspondente a definir uma seção sob o fibrado principal e as transformações de calibre são exatamente translações ao longo das fibras [?, ?, ?, ?].

Uma maneira de evitar essas redundâncias é introduzir um vínculo na integral de caminho através da fixação do calibre – o chamado método de Faddeev-Popov [?, ?, ?]. Esse método extrai as divergências outrora presentes na integral de trajetória, contudo, ganhamos um sistema de campos fantasmas. Esses, por sua vez, não são observáveis físicos, já que aparecem apenas em laços fechados e assim não comprometem a causalidade da teoria. Além disso, os fantasmas de Faddeev-Popov são os responsáveis

pela preservação da unitariedade da matriz  $S$  garantindo assim que a teoria quântica tenha sua interpretação probabilística.

O método de Faddeev-Popov usado na quantização das teorias de Yang-Mills é uma boa ferramenta para um tratamento no setor perturbativo. Entretanto, isso não deixa o regime não-perturbativo (setor infravermelho)<sup>8,9</sup> isento de alguns problemas, já que neste regime são verificados alguns resquícios de uma simetria residual – as chamadas ambiguidades (ou cópias) de Gribov [?].

Para solucionar o imbróglio das cópias, Gribov restringiu uma região na integral de caminho (região de Gribov) usando o calibre de Landau. Isso equivale a descrever uma ação de Yang-Mills neste calibre, tal que a região de integração na integral de caminho coincida com a região de Gribov, o que de fato, elimina muitas das cópias.

Porém, descobriu-se posteriormente que a própria região de Gribov no calibre de Landau possui cópias em seu interior. Uma leitura mais detalhada sobre esse aspecto pode ser encontrada em [?, ?]. Para complementar, deve ficar claro que independente do calibre escolhido, a estrutura geométrica das teorias de Yang-Mills diz que não se pode definir qualquer seção global sobre um fibrado principal não trivial<sup>10</sup>, o que impossibilita a quantização dessa teoria sem que não reste cópias de Gribov. Os detalhes técnicos podem ser verificados em [?].

## 2.5 Ação de Chern-Simons

Nesta seção vamos nos endereçar a uma pequena introdução sobre às formas de Chern-Simons com o intuito de fornecer ao leitor um notável embasamento para o momento em que será exposto o mapeamento entre a ação de Chern-Simons e a ação de Einstein-Hilbert.

<sup>8</sup> Onde são descritos fenômenos físicos tais como a geração dinâmica de massa e o confinamento de quarks e glúons [?, ?].

<sup>9</sup> Um detalhe não menos importante, mas que ainda não foi mencionado, diz respeito a liberdade assintótica do modelo [?, ?]. Quando é feita a renormalização da constante de acoplamento, observa-se que a mesma diminui na região de altas energias – isso sinaliza que quarks e glúons estão praticamente livres. Neste setor, a teoria é bem sucedida. Já com a diminuição na energia, temos um crescimento no parâmetro de acoplamento que é da ordem do inverso da função logaritmo, o que compromete drasticamente o tratamento nesta região.

<sup>10</sup> Se o fibrado for trivial é possível definir seções globais.

**Definição 1.** Seja  $\mathcal{P}_{2k}(F)$  um invariante polinomial [?] que, pelo lema de Poincaré<sup>11</sup>, pode ser localmente escrito como uma forma exata do tipo

$$\mathcal{P}_{2k}(F) = d\mathcal{C}_{2k-1}(Y, F) , \quad (2.21)$$

onde  $\mathcal{C}_{2k-1}(Y, F)$  é conhecido como  $(2k - 1)$ -forma de Chern-Simons,  $Y$  o campo de calibre e  $F = dY + YY$  é a 2-forma de curvatura de Yang-Mills, ambos definidos respectivamente nas Seções 2.2 e 2.3.

**Definição 2.**  $\mathcal{P}_k(F) = \mathcal{P}(F^k) = \text{Tr}(F^k)$ .

Assim, podemos usar as definições acima para mostrar que

$$\text{Tr}(F^2) = \text{Tr}(dYdY + 2YYdY + YYY) , \quad (2.22)$$

todavia, o último termo é nulo, pois  $\text{Tr}(Y^4) = \text{Tr}(Y^3Y) = -\text{Tr}(YY^3)$ , então<sup>12</sup>

$$\text{Tr}(F^2) = \text{Tr}(dYdY + 2YYdY) , \quad (2.23)$$

e conseqüentemente  $d\mathcal{C}_3 = \text{Tr}(dYdY + 2YYdY)$ , logo,

$$\mathcal{C}_3 = YdY + \frac{2}{3}YYY . \quad (2.24)$$

Daí, a ação de Chern-Simons é dada pela integração de  $\mathcal{C}_3$ , i.e.,

$$S_{CS} = \int \mathcal{C}_3 = \text{Tr} \int \left( YdY + \frac{2}{3}YYY \right) . \quad (2.25)$$

Para uma revisão completa sobre teoria de Chern-Simons recomendamos fortemente [?, ?, ?, ?, ?].

<sup>11</sup> Qualquer forma fechada  $\varphi$  pode ser localmente expressa como uma forma exata  $\varphi = d\omega$ .

<sup>12</sup> Aqui foi usado a propriedade cíclica do traço e a permutação de formas de grau ímpar.

## 3 Gravidade no formalismo de primeira ordem

O grande êxito logrado pelas teorias de calibre pode ser atribuído à sua bem sucedida intenção em explicar pelo menos três, das quatro, interações fundamentais da natureza. Em particular, a simetria de calibre é a chave para provar a renormalizabilidade das teorias quânticas de campos que descrevem corretamente três (forte, fraca e eletromagnética) das quatro interações conhecidas, restando apenas a teimosa interação gravitacional. Neste sentido, somos levados a buscar uma descrição da gravidade por meio de uma teoria de calibre, já que a última mostra-se bem receptiva para acomodá-la em sua estrutura.

A partir de agora veremos, ao longo deste capítulo, que o formalismo de primeira ordem é bem adequado para relacionar a gravidade com uma teoria de calibre [?, ?]. Para isso, será introduzida a estrutura geométrica do formalismo que abrange conceitos como mapeamentos, *vielbein*, conexão de spin, transporte paralelo, fibrados, curvatura e torção.

### 3.1 Princípio de equivalência

Um dos postulados de Einstein para descrever a Teoria da Relatividade Geral é o Princípio de Equivalência [?, ?], que em sua versão mais tradicional (*forma forte*) é proferido da seguinte maneira: localmente não existem quaisquer experimentos capazes de diferenciar os efeitos produzidos por um referencial acelerado uniformemente e um campo gravitacional uniforme, i.e., em uma região do espaço-tempo onde os efeitos gravitacionais (curvatura) são pequenos, podemos aproximá-lo a um espaço-tempo de Minkowski, onde são válidas as leis determinadas pela Relatividade Restrita. Obviamente, é importante mencionar que a *forma fraca* deste princípio dita a equivalência entre as massas inerciais e gravitacionais, ou seja, localmente, qualquer partícula estará sujeita a ação do mesmo campo gravitacional.

Pensando de um modo mais formal, vamos classificar o espaço-tempo como uma variedade suave  $n$ -dimensional,  $\mathbb{M}^n$  [?, ?, ?], tal que em cada ponto  $x \in \mathbb{M}^n$  pode ser definido um espaço tangente plano,  $T_x(\mathbb{M}^n)$ , dotado de uma assinatura local lorentziana ou euclidiana, por exemplo. Quanto mais próximo da vizinhança deste ponto for feita determinada análise, mais evidente se torna o Princípio de equivalência, obviamente que tudo isso depende do nível de precisão dessas medidas, assim,  $T_x(\mathbb{M}^n)$  pode ser uma boa aproximação da variedade em alguma vizinhança aberta<sup>1</sup> de  $x$ , ou seja, existe um homeomorfismo<sup>2</sup> que conecta estes espaços e mantém suas estruturas topológicas.

### 3.2 A vielbein

Localmente  $\mathbb{M}^n$  é homeomorfo a  $T_x(\mathbb{M}^n)$ , e isso quer dizer que, ao redor de qualquer elemento  $x$  de  $\mathbb{M}^n$  existe uma vizinhança aberta  $V_i$  e um homeomorfismo de  $V_i$  numa vizinhança aberta de  $T_x(\mathbb{M}^n)$ . Assim, este homeomorfismo pode ser usado para relacionar tensores de  $\mathbb{M}^n$  com tensores de  $T_x(\mathbb{M}^n)$  através de uma transformação de coordenadas entre as vizinhanças abertas do espaço tangente e da variedade; a saber

$$e^a_{\mu}(x) = \frac{\partial x^a}{\partial x^\mu}, \quad (3.1)$$

onde os  $x^\mu$  são as coordenadas em  $\mathbb{M}^n$  e  $x^a$  as coordenadas de  $T_x(\mathbb{M}^n)$  (além disso,  $a = \{1, \dots, n\}$ ;  $\mu = \{1, \dots, n\}$ ).

É razoável considerarmos pontos infinitesimalmente próximos na variedade: se dois pontos na variedade possuem uma distância  $dx^\mu$  entre eles, a distância entre seus respectivos mapeamentos no espaço tangente será

$$dx^a = e^a_{\mu}(x) dx^\mu. \quad (3.2)$$

A esse conjunto de  $e^a_{\mu}(x)$  que define um referencial ortonormal na variedade, chamamos de *vielbein*. Pela definição (3.1), este objeto se transforma como um vetor covariante sob

<sup>1</sup> Seja  $X$  um espaço topológico. Chamamos  $V \subset X$  de vizinhança de um ponto  $x$  se  $V$  contém algum conjunto aberto que, por sua vez, contenha  $x$ . Se, além disso, o próprio  $V$  for um conjunto aberto, ele será chamado de vizinhança aberta.

<sup>2</sup> Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos. Um mapa  $f : X \rightarrow Y$  é chamado homeomorfismo se ele é bijetivo (1-1 e sobrejetivo) e além disso é contínuo e sua inversa existe e é contínua.

difeomorfismos<sup>3</sup> em  $\mathbb{M}^n$ ; mediante o grupo de Lorentz em  $T_x(\mathbb{M}^n)$ , ele se transforma como um vetor contravariante.

Seja agora  $\mathcal{T}^{\mu_1 \cdots \mu_n}(x)$  um tensor em  $\mathbb{M}^n$ . Seu representante em  $T_x(\mathbb{M}^n)$  é dado por

$$\mathcal{T}^{a_1 \cdots a_n}(x) = e^{a_1}_{\mu_1}(x) \cdots e^{a_n}_{\mu_n}(x) \mathcal{T}^{\mu_1 \cdots \mu_n}(x). \quad (3.3)$$

Observe que a *vielbein* projeta os índices do espaço-tempo em índices do espaço tangente e vice-versa através de sua inversa  $e^\mu_a(x)$ .

Agora, vamos utilizar as características de  $T_x(\mathbb{M}^n)$  para reproduzir a métrica na variedade. No espaço tangente, o elemento de arco é dado por

$$ds'^2 = \eta_{ab} dx^a dx^b, \quad (3.4)$$

onde  $\eta_{ab} = \text{diag}(-, +, \dots, +)$  possui assinatura minkowskiana<sup>4</sup>. Assumindo a invariância do comprimento de arco,  $ds^2 = ds'^2$

$$g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu = \eta_{ab} dx'^a dx'^b, \quad (3.5)$$

e usando (3.2), chegamos em

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{ab} e^a_\mu(x) e^b_\nu(x). \quad (3.6)$$

Ainda, cabe ressaltar que por ser um homeomorfismo bijetivo, a *vielbein* possui inversa, de modo que também pode ser obtida pela invariância do elemento de arco, assim, a *vielbein* e sua inversa satisfazem a seguinte relação

$$\begin{aligned} e^a_\mu(x) e^\mu_b(x) &= \delta^a_b, \\ e^a_\mu(x) e^\nu_a(x) &= \delta^\mu_\nu. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Da equação (3.6) podemos interpretar, a grosso modo, que a *vielbein* é uma espécie de *raiz quadrada* da métrica. A partir daí nota-se que  $e^a_\mu(x)$  é quem carrega todas informações métricas do espaço-tempo (é um campo mais fundamental que a

<sup>3</sup> Quando  $f$  e  $f^{-1}$  são bijetivos e continuamente diferenciáveis.

<sup>4</sup> De um modo geral nada impede de  $T_x\mathbb{M}^n$  ter uma assinatura euclidiana, todavia, como estamos falando de Princípio de Equivalência, é mais conveniente utilizarmos a métrica de Minkowski, para não precisarmos lançar mão das rotações de Wick.

métrica neste formalismo), pois esta última é dada pela composição das *vielbeins*; já o contrário não é verdade, visto que existe uma infinidade de maneiras de definir as *vielbeins* de forma a descreverem a mesma métrica. Em particular, rotações na base do espaço tangente geram coeficientes  $e^a_\mu(x)$  diferentes, pois sob uma transformação de Lorentz ela se comporta como

$$e'^a_\mu(x) = \Lambda^a_b e^b_\mu(x), \quad (3.8)$$

porém, relacionados à mesma métrica na variedade, ou seja,  $g_{\mu\nu}$  é invariante por transformações locais de Lorentz. Para entender melhor, observe o esquema representando a quantidade de componentes independentes em cada uma das matrizes.

$$\begin{array}{ccc} \dim(e^a_\mu) & \longrightarrow & \dim(g_{\mu\nu}) & \oplus & \dim(\Lambda^a_b) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ n^2 & = & \frac{n(n+1)}{2} & + & \frac{n(n-1)}{2} \end{array}$$

Daí é fácil ver que a *vielbein* carrega mais informação que a métrica. Os  $n(n-1)/2$  componentes que estão sobrando, são exatamente o número de rotações no espaço tangente não contabilizados por  $g_{\mu\nu}$  (como foi dito, a métrica é um invariante de Lorentz).

É importante mencionar que através do uso das formas diferenciais [?, ?, ?], a *vielbein* pode ser representada em  $T_x^*(\mathbb{M}^n)$  (espaço cotangente - dual a  $T_x(\mathbb{M}^n)$ ), por uma 1-forma,  $e^a = e^a_\mu(x)dx^\mu$ , cuja prescrição será adotada daqui em diante.

### 3.3 A conexão de spin

Devido ao fato do espaço euclidiano ( $\mathbb{R}^n$ ) ser um espaço afim, é possível comparar vetores, de modo natural, em pontos distintos. Para ver isso, vamos considerar um caminho fechado  $C$ , tal que  $C = C_1 + C_2$ . O transporte paralelo de um vetor  $V$ , de um ponto  $p \in C$  até outro ponto  $q \in C$ , por meio de  $C_1$  e  $C_2$ , deixa o vetor  $V$  inalterado.

A diferença fundamental entre os espaços planos e curvos é que, em um espaço curvo, o resultado de um vetor transportado paralelamente de um ponto à outro

dependerá do caminho percorrido entre esses pontos. Para ver isso de modo mais ilustrativo, sejam  $s_1$  e  $s_2$  as geodésicas de uma esfera  $S$ . Um vetor  $\tilde{V}$  transportado paralelamente de  $T_x(\mathbb{M}^n)$  sobre  $s_1$ , não irá coincidir com ele mesmo quando transportado pelo caminho  $s_2$  a seu vizinho  $T_{x'}(\mathbb{M}^n)$ . Veremos a seguir que, para definirmos o transporte paralelo numa variedade mais geral, será necessário introduzir uma conexão, a fim de que a estrutura diferencial permaneça invariante por transformações de Lorentz.

Vimos anteriormente que cada  $T_x(\mathbb{M}^n)$  possui assinatura lorentziana, i.e., há presença de transformações de Lorentz locais, logo, o grupo  $SO(1, n - 1)$  age independentemente em cada espaço tangente (as matrizes de transformação são do tipo  $\Lambda \equiv \Lambda(x)$ ). Além disso, queremos definir a derivada de um tensor  $W$  no espaço tangente, de forma que ela carregue as mesmas características tensoriais de  $W$ . Assim, devemos inserir um termo (a *conexão de spin*<sup>5</sup>,  $\omega^a_{b\mu}(x)$ ) para compensar o fato de que cada espaço tangente associado a pontos diferentes são espaços vetoriais independentes. Já no escopo da teoria de fibrados temos que, a união de todos os espaços tangentes em cada ponto da variedade define um *fibrado tangente*, o qual contém o grupo de Lorentz como grupo de estrutura, então, como as matrizes desse grupo dependem do ponto  $x$ , a única maneira de conectar duas fibras (por exemplo) é através da conexão de spin.

Agora, considere um campo  $\lambda^a(x)$  que se transforma como um vetor sob  $SO(1, n - 1)$ . Transportando-o paralelamente entre os pontos infinitesimalmente próximos  $x$  e  $x + dx$ , temos

$$\lambda'^a(x) = \lambda^a(x + dx) + dx^\mu \omega^a_{b\mu}(x) \lambda^b(x) = \lambda^a(x) + dx^\mu D_\mu \lambda^a(x), \quad (3.9)$$

onde

$$D_\mu \lambda^a(x) dx^\mu = D\lambda^a(x) = d\lambda^a + \omega^a_b \lambda^b, \quad (3.10)$$

é a derivada covariante que também se transforma como um vetor perante o grupo de Lorentz – note que ela mede a mudança no campo vetorial transportado paralelamente. Consequentemente, não é difícil enxergar que todas as propriedades afins do espaço-tempo estão embutidas na conexão de spin, ou seja, é nela que encontramos as noções de paralelismo.

<sup>5</sup> No espaço cotangente  $\omega^a_b = \omega^a_{b\mu}(x) dx^\mu$  é uma 1-forma, cuja notação será adotada daqui em diante.

Sob a ação de  $SO(1, n - 1)$ , os dois campos fundamentais se comportam de maneira diferente; a *vielbein* se transforma como um vetor e não como uma conexão. Em teorias de calibre, os campos vetoriais desempenham o papel de matéria, já a conexão é aquela que contém as interações. Além disso, sabemos que toda forma de matéria é composta por férmions, então, se desejamos unificar gravidade e matéria, nada mais justo do que acoplar a geometria do espaço-tempo com os campos fermiônicos – esse é o papel da conexão de spin.

## 3.4 A estrutura do formalismo

### 3.4.1 Tensores invariantes

Dois objetos são do tipo invariantes sob o grupo  $SO(1, n - 1)$ , a saber: a métrica de Minkowski  $\eta_{ab}$  e o pseudo-tensor de Levi-Civita  $\epsilon_{a_1 \dots a_n}$ . Por serem invariantes sob o grupo de Lorentz, conseqüentemente devem ser constantes em  $\mathbb{M}^n$ , e daí podemos concluir que,

$$d\eta_{ab} = d\epsilon_{a_1 \dots a_n} = 0. \quad (3.11)$$

Além disso,

$$D\eta_{ab} = D\epsilon_{a_1 \dots a_n} = 0, \quad (3.12)$$

o que resulta em

$$\begin{aligned} \omega^c_b \eta_{ca} + \omega^c_a \eta_{cb} &= 0, \\ \epsilon_{b_1, a_2, \dots, a_n} \omega^{b_1}_{a_1} + \epsilon_{a_1, b_2, \dots, a_n} \omega^{b_2}_{a_2} + \dots + \epsilon_{a_1, a_2, \dots, b_n} \omega^{b_n}_{a_n} &= 0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

e conseqüentemente pela primeira relação de (3.13)

$$\omega^a_b = -\omega^b_a, \quad (3.14)$$

que também pode ser verificada a partir da álgebra de  $SO(1, n - 1)$ . Isto impõe que apenas existirão componentes antissimétricas na conexão de spin, o que reduz consideravelmente a quantidade de componentes do tensor, que passa a ter  $n^2(n - 1)/2$  componentes.

A partir de agora, vamos mostrar o quão menos laborioso será trabalhar geometricamente com<sup>6</sup>  $e^a$  e  $\omega^a_b$ , suas derivadas e produtos exteriores.

<sup>6</sup> Daqui em diante por questões de simplicidade,  $e^a \equiv e^a(x)$  e  $\omega^a_b \equiv \omega^a_b(x)$ .

### 3.4.2 Curvatura

Dado uma 2-superfície com curvatura gaussiana [?] não nula, temos que o transporte paralelo de um vetor ao longo de um caminho fechado não leva o vetor nele mesmo. A partir desta propriedade, generaliza-se o conceito de curvatura de superfícies para as variedades  $n$ -dimensionais, cujo detalhamento técnico pode ser visto em [?, ?, ?].

Conforme discutido na Seção 3.3, o vetor transportado paralelamente sobre o caminho fechado não coincidirá com ele mesmo quando transportado pelo outro caminho. Essa diferença que há entre os vetores é exatamente a medida da curvatura da superfície ou da variedade.

Na equação (3.9) é mostrado como a derivada covariante contém as informações de mudança do campo através do transporte paralelo. Entretanto, também sabemos que a curvatura mede a diferença entre os campos transportados paralelamente, logo, nada mais justo do que atuarmos duas vezes consecutivas a derivada covariante sobre um campo  $\phi^a$ ,

$$D(D\phi^a) = D(d\phi^a + \omega^a_b \phi^b) = D^2\phi^a = R^a_b \phi^b, \quad (3.15)$$

onde,

$$R^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_c \omega^c_b, \quad (3.16)$$

o que não é difícil ver a similaridade com a curvatura de Yang-Mills dada por (2.17), só que agora,  $R^a_b$  está definida sobre  $P(\mathbb{G}, \mathbb{M}^n)$ , i.e.,  $F$  é um representante local de  $R$ .

A expressão (3.16) representa a 2-forma de curvatura, que também pode ser escrita como

$$\begin{aligned} R^a_b &= \frac{1}{2} R^a_{b\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= \frac{1}{2} R^a_{bcd} e^c_\mu e^d_\nu dx^\mu dx^\nu. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Um relação igualmente importante envolvendo o tensor de Riemann, e que será utilizada posteriormente, pode ser derivada imediatamente de (3.17), logo

$$R^a_b = \frac{1}{2} e^a_\alpha e^\beta_b R^\alpha_{\beta\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (3.18)$$

### 3.4.3 Torção

A fim de não tornar a leitura um tanto enfadonha, omitiremos detalhes muito técnicos sobre a torção, para isso recomendo [?, ?, ?].

Geometricamente também não é complicado entender o conceito de torção. Se transportarmos paralelamente dois vetores ao longo de dois caminhos diferentes no espaço tangente, a torção será proporcional ao não-fechamento do paralelogramo formado pelo deslocamento destes vetores.

Sendo assim, vamos definir a 2-forma de torção, que nada mais é do que a atuação do operador derivada covariante na *vielbein*,

$$T^a = De^a = de^a + \omega^a_b e^b, \quad (3.19)$$

também sendo interpretada como o acoplamento mínimo da *vielbein*. Agora parece ficar claro quando foi mencionado sobre o fato da conexão de spin acoplar os campos de matéria com a geometria do espaço-tempo, com o adendo que tudo isso ocorre via torção. Além disso, a equação (3.19) pode ser representada por

$$T^a = \frac{1}{2} T^a_{b\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \frac{1}{2} T^a_{bc} e^b_\mu e^c_\nu dx^\mu dx^\nu. \quad (3.20)$$

Tanto (3.16) quanto (3.19) são conhecidas como *as equações estruturais de Cartan* [?, ?].

Poderíamos tentar construir outros objetos independentes a partir de derivadas covariantes de ordens mais altas, mas isto se mostra impossível devido as identidades de Bianchi,

$$\begin{aligned} DT^a &= dT^a + \omega^a_b T^b = d\omega^a_b e^b - \omega^a_b de^b + \omega^a_b de^b + \omega^a_b \omega^b_c e^c \\ &= R^a_b e^b, \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$DR^a_b = dR^a_b + \omega^a_c R^c_b + \omega^c_b R^a_c = 0. \quad (3.22)$$

Vale mencionar que por ser uma identidade, qualquer conexão a satisfaz. Ademais, o conjunto de relações (3.19), (3.21) e (3.22) formam as chamadas relações de hierarquia.

Por fim, cabe uma observação não menos importante. Note que ao definirmos a derivada covariante não foi preciso de um espaço métrico (munido de métrica), entretanto, sob a conexão de Levi-Civita, isso já não é verdade – neste caso é imprescindível que as seguintes relações sejam satisfeitas:

- (i)  $Dg_{\mu\nu} = 0$  (compatibilidade da métrica);
- (ii) torção nula.

São destas condições que os símbolos de Christoffel ( $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ ) revelam-se dependentes do tensor métrico, como aponta a Teoria Geral da Relatividade. Em contrapartida,  $\omega^a_b$  é totalmente independente de  $g_{\mu\nu}$ .

### 3.5 Teorias de gravidade

Antes de desvelarmos as ações de gravidade no formalismo de primeira ordem, vamos expor um pouco sobre como tudo começou. Vimos na Seção 3.1 que a gênese da Teoria da Relatividade Geral está no cerne do Princípio de Equivalência, i.e, há uma linha tênue entre o campo gravitacional e a dinâmica do espaço-tempo. A partir daí, Einstein vislumbrou que a gravidade se manifesta através da deformação dinâmica da geometria do espaço-tempo causada pela presença de matéria-energia nele; a esse casamento chamamos de geometrodinâmica. Matematicamente, tudo isso é representado pelas equações de Einstein, usualmente descritas por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(R - 2\Lambda)g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu} , \quad (3.23)$$

aqui  $R_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta}R_{\beta\mu\alpha\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu}$  é o tensor de Ricci<sup>7</sup>,  $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$  o escalar de curvatura,  $\Lambda$  a constante cosmológica,  $g_{\mu\nu}$  o tensor métrico,  $G$  a constante de Newton e  $T_{\mu\nu}$  o tensor energia-momento. Veja que (3.23) exhibe a forma matemática do que foi dito há pouco: a mudança na geometria se dá pela distribuição da matéria-energia, esta última, codificada no tensor energia-momento.

Por motivos óbvios, nos refutaremos a adentrar tecnicamente pela teoria de Einstein, para tanto, deixamos ótimas referências [?, ?, ?]. Entretanto, cabe aqui expor *en passant* a ação proposta por Hilbert [?] para as equações de campo de Einstein com o termo de constante cosmológica, a saber

$$S_{EH} = \int d^4x \sqrt{g} \left[ \frac{1}{16\pi G} (R - 2\Lambda) \right] , \quad (3.24)$$

<sup>7</sup> Contração do tensor métrico com o tensor de Riemann.

$$g = |\det g_{\mu\nu}|.$$

No formalismo de primeira ordem, a ação (3.24) assumirá uma forma que contempla os entes geométricos descritos nas Seções 3.2, 3.3 e 3.4, assim

$$S_{EH} = \frac{1}{16\pi G} \int \epsilon_{abcd} \left( e^a e^b R^{cd} + \frac{\Lambda^2}{2} e^a e^b e^c e^d \right), \quad (3.25)$$

tal que, nesta descrição, será nosso objeto de estudo no próximo capítulo.

Além desta ação, que por sinal foi exemplificada em quatro dimensões, um teorema proposto por D. Lovelock [?], propõe sob algumas condições, uma ação de gravidade mais geral.

**Teorema 2.** (Lovelock). *A ação de gravidade mais geral que não envolve torção e resulta no máximo em equações de campo de segunda ordem na métrica é da forma*

$$S_L = \int \sum_{n=0}^{\frac{n}{2}} c_r \mathcal{L}_n^r, \quad (3.26)$$

visto que  $c_r$  são constantes arbitrárias e  $\mathcal{L}_n^r$  a densidade de lagrangiana dada por

$$\mathcal{L}_n^r = \epsilon_{c_1 c_2 \dots c_n} R^{c_1 c_2} \dots R^{c_{2r-1} c_{2r}} e^{c_{2r+1}} \dots e^{c_n}. \quad (3.27)$$

Não é difícil ver que a ação (3.25) está contida em (3.26) quando  $n = 4$ , i.e.,

$$S_{L_{4d}} = \frac{1}{32\pi G} \int \epsilon_{abcd} \left( c_0 e^a e^b e^c e^d + c_1 e^a e^b R^{cd} + c_2 R^{ab} R^{cd} \right), \quad (3.28)$$

para  $c_0 = \frac{\Lambda^2}{2}$  e  $c_1 = 1$ . O termo que acompanha o fator  $c_2$  é conhecido como Gauss-Bonnet [?, ?], e por ser um invariante topológico, obviamente não terá qualquer relevância nas equações de campo.

Mas, e se pensarmos em incluir termos de torção na ação? Aí abre-se um novo caminho outrora apresentado por A. Mardones e J. Zanelli que generaliza a teoria de Lovelock. Particularmente, iremos nos ater somente na apresentação de duas ações da teoria de Mardones-Zanelli e tecer alguns comentários sucintos, os maiores detalhes segue em [?].

Começaremos com o caso 3-dimensional, pois em duas dimensões não há qualquer mudança com relação ao teorema de Lovelock, assim

$$S_{MZ_{3d}} = \frac{1}{32\pi G} \int \left[ \epsilon_{abc} \left( c_0 e^a e^b e^c + c_1 e^a R^{bc} \right) + \tilde{c}_1 \mathcal{C}_3^e + \tilde{c}_2 \mathcal{C}_3^\omega \right], \quad (3.29)$$

onde os novos termos são  $C_3^e = e_a T^a$  e  $C_3^\omega = \left( \omega_b^a d\omega_a^b + \frac{2}{3} \omega_b^a \omega_c^b \omega_a^c \right)$ , que representam as 3-formas de Chern-Simons.

Passando ao caso 4-dimensional temos

$$S_{MZ_{4d}} = \frac{1}{32\pi G} \int \left[ \epsilon_{abcd} \left( c_0 e^a e^b e^c e^d + c_1 e^a e^b R^{cd} + c_2 R^{ab} R^{cd} \right) + \tilde{c}_1 \mathcal{P}_4 + \tilde{c}_2 e^a e^b R_{ab} + \tilde{c}_3 T^a T_a \right], \quad (3.30)$$

observe que  $\mathcal{P}_4$  é o invariante topológico de Pontryagin, dado por

$$\mathcal{P}_4 = R^{ab} R_{ab} = dC_3^\omega, \quad (3.31)$$

além disso, por uma simples combinação entre os coeficientes  $\tilde{c}_2$  e  $\tilde{c}_3$ , os dois últimos termos dão exatamente o invariante topológico de Nieh-Yang,  $N_4$ , computado por

$$N_4 = T^a T_a - e^a e^b R_{ab} = dC_3^e. \quad (3.32)$$

Note que tanto  $\mathcal{P}_4$  quanto  $N_4$  são escritos em função de uma derivada total, logo, na integração representam termos de superfície, os quais podem ser descartados fazendo uso do teorema de Stokes.

## 4 Gravidade em três dimensões

Conforme abordado no Capítulo 3, o formalismo de primeira ordem nos permite trabalhar com teorias de gravidade induzidas por teorias de calibre. Neste sentido, a ideia central deste capítulo está na reinterpretação de um teorema de Witten [?], o qual, propõe descrever uma teoria de gravidade (com e sem constante cosmológica) a partir de uma teoria de calibre num espaço-tempo 3-dimensional euclidiano, tal que cada setor do grupo de calibre seja identificado com as isometrias locais e os difeomorfismos; tudo feito *on-shell*. A releitura que faremos deste teorema possui um importante diferencial: trataremos todo o problema de modo *off-shell*, e a partir daí veremos que será necessário lançar mão dos aspectos da folheação ADM.

### 4.1 Chern-Simons e gravidade: simetria de Poincaré

Nesta seção vamos elucidar o mapeamento da teoria de Chern-Simons em uma teoria de gravidade, tal como feito em [?]. Para que isso seja possível, comecemos com a definição da álgebra do grupo de Poincaré [?, ?, ?] na representação<sup>1</sup>  $ISO(3) \equiv SU(2) \times \mathbf{R}$  e das formas quadráticas, dadas respectivamente por

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= \epsilon_{ijk} J^k, \\ [J_i, P_j] &= \epsilon_{ijk} P^k, \\ [P_i, P_j] &= 0, \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(J_i J_j) &= 0, \\ \text{Tr}(P_i P_j) &= 0, \\ \text{Tr}(J_i P_j) &= \delta_{ij}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

onde  $J^i$  e  $P^i$  são respectivamente os geradores associados a  $SU(2)$  e  $\mathbf{R}$ ; os índices latinos minúsculos variam em  $\{0, 1, 2\}$ .

<sup>1</sup> Chamamos de  $\mathbf{R}$  o setor das translações.

Para mostrarmos a equivalência entre as ações de Chern-Simons e Einstein-Hilbert, vamos decompor o campo de calibre  $Y$ ,

$$Y = A^i J_i + \theta^i P_i, \quad (4.3)$$

onde  $A^i$  e  $\theta^i$  também são campos de calibre representados em cada setor da álgebra de Poincaré. Aplicando as relações (4.1), (4.2) e (4.3), na ação de Chern-Simons (2.25) ficamos com

$$\begin{aligned} S_{CS} = & \int A^i dA^j \underbrace{\text{Tr}(J_i J_j)}_0 + A^i d\theta^j \underbrace{\text{Tr}(J_i P_j)}_{\delta_{ij}} + \theta^j dA^i \underbrace{\text{Tr}(P_j J_i)}_{\delta_{ji}} + \theta^i d\theta^j \underbrace{\text{Tr}(P_i P_j)}_0 + \\ & + \frac{2}{3} \text{Tr} \left[ \left( A^i J_i + \theta^i P_i \right) \left( A^j A^k \underbrace{[J_j, J_k]}_{\epsilon_{jkl} J^l} + A^j \theta^k \underbrace{[J_j, P_k]}_{\epsilon_{jkl} P^l} + \theta^j A^k \underbrace{[P_j, J_k]}_{-\epsilon_{jkl} P^l} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \theta^j \theta^k \underbrace{[P_j, P_k]}_0 \right) \right], \end{aligned} \quad (4.4)$$

então

$$\begin{aligned} S_{CS} = & \int A^i d\theta^i + \theta^i dA^i + \frac{2}{3} \epsilon_{jkl} \left[ \frac{1}{2} (A^i A^j A^k \underbrace{\text{Tr}(J_i J^l)}_0) + \frac{1}{2} A^i A^j \theta^k \underbrace{\text{Tr}(J_i P^l)}_{\delta'_i} + \right. \\ & - \frac{1}{2} A^i \theta^j A^k \underbrace{\text{Tr}(J_i P^l)}_{\delta'_i} + \frac{1}{2} \theta^i A^j A^k \underbrace{\text{Tr}(P_i J^l)}_{\delta'_i} + \frac{1}{2} \theta^i A^j \theta^k \underbrace{\text{Tr}(P_i P^l)}_0 \\ & \left. - \frac{1}{2} \theta^i \theta^j A^k \underbrace{\text{Tr}(P_i P^l)}_0 \right], \end{aligned} \quad (4.5)$$

resultando em

$$S_{CS} = \int A^i d\theta^i + \theta^i dA^i + \frac{1}{3} \epsilon_{jkl} [\theta^k A^l A^j + \theta^j A^l A^k + \theta^l A^j A^k], \quad (4.6)$$

que, ao usar a antissimetria do tensor de Levi-Civita e a permutação das 1-formas, pode ser escrito como

$$S_{CS} = \int A^i d\theta^i + \theta^i dA^i + \epsilon_{ijk} \theta^i A^j A^k. \quad (4.7)$$

Mas,

$$d(A^i \theta^i) = dA^i \theta^i - A^i d\theta^i, \quad (4.8)$$

logo,

$$A^i d\theta^i = dA^i \theta^i - d(A^i \theta^i), \quad (4.9)$$

então

$$S_{CS} = \int 2\theta^i dA^i + \epsilon_{ijk} \theta^i A^j A^k - \int d(A^i \theta^i). \quad (4.10)$$

O último termo de (4.10) é descartado por ser um termo de borda<sup>2</sup>. Assim, finalmente

chegamos em

$$S_{CS} = 2 \int \theta^i F^i, \quad (4.11)$$

sabendo que  $F^i = dA^i + \frac{1}{2} \epsilon^i_{jk} A^j A^k$  é a 2-forma curvatura de Yang-Mills associada a álgebra  $su(2)$ . Visto que<sup>3</sup>  $SU(2) \sim SO(3)$ , a transição para  $ISO(3) \equiv SO(3) \times \mathbf{R}$  requer [?]

$$\begin{aligned} A^i &\mapsto -\frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \omega_{jk}, \\ \theta^i &\mapsto \kappa^2 e^i, \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde a segunda relação só é válida se tivermos a nossa disposição um parâmetro com dimensão de massa<sup>4</sup>, por isso,  $[\kappa] = [\text{massa}]^{1/2}$ , pois  $[e] = 0$ . Do mesmo modo, as relações (4.1) nesta representação serão

$$J^i = \frac{1}{2} \epsilon^i_{jk} J^{jk}, \quad (4.13)$$

produzindo

$$\begin{aligned} [J^{ij}, J^{kl}] &= -\frac{1}{2} \left[ (\eta^{ik} J^{jl} + \eta^{jl} J^{ik}) - (\eta^{il} J^{jk} + \eta^{jk} J^{il}) \right], \\ [P^i, P^j] &= 0, \\ [J^{ij}, P^k] &= \frac{1}{2} (\eta^{ik} J^j - \eta^{jk} J^i), \end{aligned} \quad (4.14)$$

<sup>2</sup> O espaço euclidiano é considerado trivial, infinito e sem borda.

<sup>3</sup> Matematicamente o grupo  $SU(2)$  é uma cobertura dupla de  $SO(3)$ , i.e., existe um homomorfismo sobrejetivo  $2 \mapsto 1$  entre estes grupos.

<sup>4</sup> Observe que em três dimensões  $\kappa$  é inerente à teoria e pode ser associado ao acoplamento de Yang-Mills.

que é a álgebra de Poincaré na representação  $ISO(3) \equiv SO(3) \times \mathbf{R}$ . Substituindo (4.12) em (4.11) temos

$$S_{CS} \mapsto S_{EH3d} = \kappa^2 \int -\epsilon^{ijk} e^i d\omega_{jk} + \frac{1}{4} \epsilon^i{}_{jk} \epsilon^{jlm} \epsilon^{knp} \omega_{lm} \omega_{np}, \quad (4.15)$$

tal que, usando a relação

$$\epsilon^{jlm} \epsilon^{knp} = \delta^{jk} (\delta^{ln} \delta^{mp} - \delta^{lp} \delta^{mn}) - \delta^{jn} (\delta^{lk} \delta^{mp} - \delta^{lp} \delta^{mk} + \delta^{jp} (\delta^{lk} \delta^{mn} - \delta^{ln} \delta^{mk})), \quad (4.16)$$

chegamos em

$$S_{CS} \mapsto S_{EH3d} = \kappa^2 \int -\epsilon_{ijk} e^i d\omega^{jk} + \frac{1}{4} (-4\omega^j{}_m \omega^m{}_k), \quad (4.17)$$

para finalmente obtermos

$$S_{CS} \mapsto S_{EH3d} = -\frac{1}{16\pi G} \int \epsilon_{ijk} e^i R^{jk}, \quad (4.18)$$

onde  $G = \frac{1}{16\pi\kappa^2}$  é a constante de Newton<sup>5</sup>,  $e^i$  a dreibein e  $R^{jk} = d\omega^j{}_k + \omega^j{}_m \omega^m{}_k$  a 2-forma de curvatura, as duas últimas definidas nas Seções 3.2 e 3.4. As equações de campo podem ser calculadas através da variação da ação, em termos de uma  $p$ -forma  $\Omega$  [?]. Assim temos

$$\delta S = \int \delta \mathcal{L} = \int \sum_I \delta \Omega^I \wedge \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega^I} - (-1)^p d \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (d\Omega^I)} \right) \right], \quad (4.19)$$

tal que, quando  $\delta S = 0$ , obtemos as equações de Euler-Lagrange (EL),

$$\left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega^I} - (-1)^p d \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (d\Omega^I)} \right) \right] = 0. \quad (4.20)$$

Aplicando (4.20) para a ação (4.18), onde agora,  $\Omega^I = e^i$  e  $\mathcal{L}_{EH3d} = \epsilon_{ijk} e^i R^{jk}$ , encontramos

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{EH3d}}{\partial e^l} = \epsilon_{ljk} R^{jk} = 0 \quad \therefore \quad R^{jk} = 0, \quad (4.21)$$

<sup>5</sup> Devido ao parâmetro  $\kappa^2$  ser intrínseco à teoria de Chern-Simons em três dimensões, é viabilizada uma dualidade Chern-Simons-gravidade (em qualquer nível de escala), o que torna fixo o valor de  $G$ . Isto equivale a dizer que as propriedades topológicas do termo de Chern-Simons determinam univocamente a constante gravitacional de Newton.

onde o segundo termo na equação de EL é nulo, pois  $\mathcal{L}_{EH3d}$  não depende de  $de^i$ . Fazendo o mesmo para a conexão de spin,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{EH3d}}{\partial \omega^{lm}} + d \left( \frac{\partial \mathcal{L}_{EH3d}}{\partial (d\omega^{lm})} \right) &= \epsilon_{ijk} \left[ \underbrace{\frac{\partial}{\partial \omega^{lm}} (d\omega^{jk} + \omega^j_n \omega^{nk})}_{\delta^{jl} \delta^m_p \omega^{pk} - \omega^j_p \delta^{pl} \delta^{km}} + \right. \\ &\quad \left. + d \left( \underbrace{\frac{\partial}{\partial (d\omega^{lm})} (d\omega^{jk} + \omega^j_n \omega^{nk})}_{\delta^{jl} \delta^{km}} \right) \right] e^i = 0 \quad \therefore \\ D e^i &= T^i = 0, \end{aligned} \quad (4.22)$$

onde usamos a relação<sup>6</sup>  $*(e^i e^j) = \epsilon^{ijk}(e_k)$ . Com isso, obtemos o conjunto de equações de campo,

$$\begin{aligned} R^{ij} &= 0, \\ T^i &= 0. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Note que a ação (4.18) agora está sob uma variedade diferenciável  $\mathbb{M}^3$ , outrora, plana e euclidiana,  $\mathbb{R}^3$ , que foi deformada pela presença da gravidade. Essencialmente, isso mostra que uma teoria de gravidade pode ser induzida quando assumimos as condições (4.12), e definimos corretamente o campo  $Y$  sob o grupo de calibre. Em outras palavras, dizemos que as informações de simetria interna na teoria de calibre, codificadas em  $Y$ , estão intimamente ligadas à simetria externa<sup>7</sup>.

## 4.2 Transformações de calibre e difeomorfismos

O grupo de Poincaré  $[?, ?]$  é o grupo de simetria padrão da Física de Partículas, o qual também possui uma relação muito íntima com o espaço-tempo de Minkowski. Embora isso seja bastante interessante, este grupo não se enquadra no escopo de uma teoria de gravidade que emerge de uma teoria de calibre, fato que decorre dele não

<sup>6</sup> A atuação do dual de Hodge sobre uma 2-forma em três dimensões resulta em uma 1-forma.

<sup>7</sup> As simetrias espaço-temporais são consideradas simetrias externas, que neste caso, manifestam-se como gravidade.

ser um grupo semi-simples (e nem compacto), inviabilizando<sup>8</sup> assim a obtenção de uma ação via campos de Yang-Mills. Um modo de contornar esse impasse é buscar um grupo semi-simples que esteja nos anseios da gravitação e de alguma forma se conecte ao grupo de Poincaré – eis o grupo de de Sitter<sup>9</sup> [?, ?]. Geometricamente isso se dá através da chamada contração de Inönü-Wigner [?, ?, ?]. De modo sucinto, essa contração afirma o seguinte: um grupo pode ser deformado em outro por meio de algum parâmetro associado ao primeiro. Para se enxergar isso, basta recorrermos ao simples exemplo da mecânica clássica como um limite da Relatividade Restrita, ou seja, o grupo de Lorentz é reduzido ao grupo de Galileu desde que  $v \ll c$ . Por outro lado, quando o parâmetro de contração<sup>10</sup>  $\mathcal{C} \rightarrow \infty$ , o grupo de de Sitter (bem agregado à Relatividade Geral) é reduzido ao de Poincaré, viabilizando então a descrição de uma ação mediante a teoria gravitacional.

Neste trabalho, conforme dito, utilizaremos o método delineado por E. Witten [?], o qual apresenta suas vantagens em relação à contração de Inönü-Wigner no que tange a não ser preciso quebrar o grupo original por meio de algum parâmetro. Para que a teoria de gravidade seja completa, a grande ideia é associar os setores do grupo de calibre (Poincaré/de Sitter) em voga, respectivamente com as isometrias locais e os difeomorfismos, i.e., mostrar que o grupo de calibre contém essas isometrias bem como os difeomorfismos. Usualmente, difeomorfismos ativos são chamados de transformações de calibre da gravitação [?, ?].

É importante deixar bem claro que existem duas interpretações geométricas para os difeomorfismos [?, ?, ?]. Quando falamos de invariância sob transformação geral de coordenadas, estamos nos referindo aos *difeomorfismos passivos*, i.e., o mesmo objeto é representado em diferentes sistemas de coordenadas. Já os *difeomorfismos ativos*<sup>11</sup> relacionam diferentes objetos da variedade no mesmo sistema de coordenadas; enquanto o primeiro atua no espaço das funções da métrica, o segundo age no espaço

<sup>8</sup> As equações de campo aplicadas em grupos desse tipo produzem teorias que não são quantizáveis [?].

<sup>9</sup> Existem outras abordagens onde as teorias de Yang-Mills com base no grupo de Sitter produzem tanto a formulação de Ashtekar para a gravidade [?] quanto a versão de Einstein-Cartan da Relatividade Geral [?].

<sup>10</sup> Está relacionado ao raio do universo de de Sitter por  $\mathcal{R} \propto \frac{1}{\mathcal{C}^2}$ .

<sup>11</sup> Daqui em diante qualquer menção ao termo difeomorfismos estará automaticamente ligada a difeomorfismos ativos.

da métrica.

Por outro lado, há uma estreita relação entre os difeomorfismos ativos e a derivada de Lie, detalhes em [?, ?, ?]. Deste modo, a derivada de Lie de um campo vetorial<sup>12</sup>  $v$  é definida por

$$\mathcal{L}_v \cdot = i_v(d\cdot) + d(i_v \cdot), \quad (4.24)$$

onde  $i_v$  denota o produto interior [?, ?] de uma  $p$ -forma  $\in \Omega^p$ , tal que sua atuação é do tipo  $i_v : \Omega^p \rightarrow \Omega^{p-1}$ , ou seja, a  $p$ -forma passa a ser uma  $(p-1)$ -forma.

Então, vamos computar a transformação de calibre para  $Y$  na representação  $SU(2) \times \mathbf{R}$ . Reescrevendo a equação (2.15) temos

$$Y' = Y + \nabla\phi = Y + d\phi + \frac{1}{2}(Y\phi - \phi Y), \quad (4.25)$$

onde  $\phi = \alpha^i J_i + \xi^i P_i$  é o parâmetro de calibre infinitesimal em cada setor de  $SU(2) \times \mathbf{R}$ . Agora, substituindo (4.3) em (4.25), encontramos

$$\begin{aligned} Y' &= A^i J_i + \theta^i P_i + d(\alpha^i J_i + \xi^i P_i) + \frac{1}{2}[(A^i J_i + \theta^i P_i), (\alpha^i J_i + \xi^i P_i)] \\ &= (A^i + d\alpha^i)J_i + (\theta^i + d\xi^i)P_i + A^i \alpha^j [J_i, J_j] + A^i \xi^j [J_i, P_j] + \\ &+ \theta^i \alpha^j [P_i, J_j] + \theta^i \xi^j [P_i, P_j]. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Usando (4.1), é possível explicitar as transformações para cada campo em cada setor,

$$\begin{aligned} A^i &\longmapsto A^i + \tilde{D}\alpha^i, \\ \theta^i &\longmapsto \theta^i + \tilde{D}\xi^i + \epsilon^i_{jk} \theta^k \alpha^j, \end{aligned} \quad (4.27)$$

sabendo que  $\tilde{D} = d + \epsilon A$  é a derivada covariante em relação ao setor  $SU(2)$ . Como estamos mais interessados numa descrição em termos do grupo  $SO(3)$ , façamos uso de (4.12) em (4.27) para obter<sup>13</sup>

$$\begin{aligned} \omega^{ij} &\longmapsto \omega^{ij} + D\alpha^{ij}, \\ e^i &\longmapsto e^i + D\rho^i + \alpha^i_j e^j, \end{aligned} \quad (4.28)$$

<sup>12</sup> Lembrando que  $v$  é um elemento do espaço vetorial  $\mathcal{V}(\mathbb{M}^n)$ . Obviamente que aqui nossa variedade é descrita por  $\mathbb{M}^3$ . A partir de agora este campo será chamado parâmetro de difeomorfismo ou simplesmente difeomorfismo.

<sup>13</sup> Além disso também usamos a relação  $\epsilon^{ikl}\epsilon_{kl}^j = 2\delta^{ij}$ .

onde  $D = d + \omega$  é a derivada covariante agora com relação ao setor  $SO(3)$ , e desde que sejam feitas as seguintes identificações extras

$$\begin{aligned}\alpha^{ij} &= -\epsilon^{ijk}\alpha_k, \\ \rho^i &= \frac{1}{\kappa^2}\xi^i,\end{aligned}\tag{4.29}$$

para caracterizar completamente as transformações  $SU(2) \mapsto SO(3)$ .

Calculemos com este fito, os difeomorfismos dos campos fundamentais via (4.24)

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_v\omega^{ij} &= i_v R^{ij} - i_v(\omega^i_k \omega^{kj}) + d(i_v\omega^{ij}) = i_v R^{ij} + d(i_v\omega^{ij}) - (i_v\omega^i_k)\omega^{kj} + \\ &+ \omega^i_k(i_v\omega^{kj}),\end{aligned}\tag{4.30}$$

onde usamos

$$d\omega^{ij} = R^{ij} - \omega^i_k \omega^{kj},\tag{4.31}$$

juntamente com atuação de  $i_v$  sob o produto de uma  $p$ -forma  $\alpha$  com uma  $q$ -forma  $\beta$ , dado por

$$i_v(\alpha\beta) = i_v(\alpha)\beta + (-1)^p\alpha(i_v\beta),\tag{4.32}$$

e agora lançando mão de

$$D(i_v\omega^{ij}) = d(i_v\omega^{ij}) + \omega^i_k(i_v\omega^{kj}) - (i_v\omega^i_k)\omega^{kj},\tag{4.33}$$

chegamos em

$$\mathfrak{L}_v\omega^{ij} = i_v R^{ij} + D(i_v\omega^{ij}).\tag{4.34}$$

Analogamente para a *dreibein*

$$\mathfrak{L}_v e^i = i_v T^i - i_v(\omega^i_j e^j) + d(i_v e^i) = i_v T^i + D(i_v e^i) - (i_v\omega^i_j)e^j,\tag{4.35}$$

onde foram usadas as relações

$$de^i = T^i - \omega^i_j e^j\tag{4.36}$$

e

$$D(i_v e^i) = d(i_v e^i) + \omega^i_j(i_v e^j).\tag{4.37}$$

Consoante ao foi dito no início da Seção 4.2, para se obter uma gravidade isométrica local sem a necessidade de quebrar o grupo por meio de um parâmetro, é preciso checar se o setor das translações do grupo de calibre está estritamente ligado aos difeomorfismos, ou seja, (4.28) deve ser restringida a  $\mathbf{R}$ , dando origem a

$$\mathfrak{I}_{\mathbf{R}}\omega^{ij} = 0, \quad (4.38)$$

$$\mathfrak{I}_{\mathbf{R}}e^i = D\rho^i. \quad (4.39)$$

E por fim, a diferença entre (4.34) e (4.38) e (4.35) e (4.39) fornece

$$\begin{aligned} (\mathfrak{L}_v - \mathfrak{I}_{\mathbf{R}})\omega^{ij} &= i_v R^{ij} + D(i_v \omega^{ij}), \\ (\mathfrak{L}_v - \mathfrak{I}_{\mathbf{R}})e^i &= i_v T^i + D(i_v e^i - \rho^i) - (i_v \omega^i_j) e^j, \end{aligned} \quad (4.40)$$

sendo reescrita como

$$\begin{aligned} (\mathfrak{L}_v - \mathfrak{I}_{\mathbf{R}})\omega^{ij} &= D\alpha^{ij}, \\ (\mathfrak{L}_v - \mathfrak{I}_{\mathbf{R}})e^i &= -\alpha^i_j e^j, \end{aligned} \quad (4.41)$$

que nada mais são do que as desejadas isometrias locais quando assumimos

$$\begin{aligned} \alpha^{ij} &= i_v \omega^{ij}, \\ \rho^i &= i_v e^i, \end{aligned} \quad (4.42)$$

$$\begin{aligned} i_v R^{ij} &= 0, \\ i_v T^i &= 0. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Assim, fica demonstrado que  $\mathbf{R}$  está associado aos difeomorfismos e  $SO(3)$  às isometrias.

Posto isso, finalmente será necessário entender sob quais condições geométricas as equações (4.43) são satisfeitas. Antes de tal fato, vamos escrever as equações (4.43) em componentes,

$$R^{ij}{}_{\mu\nu} v^\nu = 0, \quad (4.44)$$

$$T^i{}_{\mu\nu} v^\nu = 0, \quad (4.45)$$

onde foi definido  $i_v(dx^\nu) := v^\nu$ , e além disso, os índices gregos também variam em  $\{0\}$  (temporal) e  $\{P, Q = 1, 2\}$  (espacial).

### 4.2.1 Análise geométrica

Doravante, para que nossa questão seja completamente dirimida, as possíveis soluções para as equações (4.43) são:

- (i)  $R^{ij} = 0; T^i = 0$ ; que é exatamente o caso *on-shell* discutido em [?]. Esse mostra a simetria completa de difeomorfismos, entretanto, as soluções clássicas de vácuo devem ser aplicadas.
- (ii)  $v^\nu = 0$ ; isso significa que os difeomorfismos são completamente quebrados. Obviamente, isso não é uma situação interessante, já que desejamos obtê-los em nosso resultado final.
- (iii) O caso mais geral possível está entre [(i)] e [(ii)]. Na verdade, as relações (4.44) e (4.45) serão analisadas pela ótica da folheação ADM, com a quebra dos difeomorfismos completos para um grupo reduzido

$$\text{Diff}(3)_{fol} = \left\{ v \in \text{Diff}(3) \mid i_v T^i = 0 \ ; \ i_v R^{ij} = 0 \right\} . \quad (4.46)$$

A *priori*, vamos assumir torção nula por questões de simplicidade. Na abordagem descrita por ADM, os graus de liberdade do campo gravitacional estão sobre hipersuperfícies espaciais que folheiam o espaço-tempo e a dinâmica do campo gravitacional pode ser vista como a evolução temporal dessas hipersuperfícies ao longo do tempo. Neste ímpeto, somos levados a folhear o espaço-tempo de tal modo que possamos separá-lo nas partes espacial e temporal, para isso será útil partir da premissa de que ele é globalmente hiperbólico<sup>14</sup> [?]:

**Teorema 3.** *Seja  $\mathbb{M}^n$  um espaço-tempo globalmente hiperbólico. Neste caso, uma função global do tempo,  $t$ , é escolhida de modo que cada hipersuperfície de  $t$  constante seja uma hipersuperfície de Cauchy. Consequentemente o espaço-tempo pode ser folheado, e sua topologia será  $S \times \mathbb{R}_t$ , onde  $S$  representa qualquer hipersuperfície de Cauchy.*

Obviamente que no caso em voga teremos  $\mathbb{M}^3 = \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}_t$ , onde  $\mathbb{M}^2$  representa a parte puramente espacial<sup>15</sup>. Ademais, nós queremos classificar completamente os

<sup>14</sup> Podemos assumir uma variedade geral como hiperbólica [?].

<sup>15</sup> Vale ressaltar que a assinatura local de  $\mathbb{M}^2$  é euclidiana.

difeomorfismos, e para isso, recorreremos a curvatura destas superfícies espaciais ( $\mathbb{M}^2$ ) com relação ao espaço maior ( $\mathbb{M}^3$ ). É importante dizer que, como estamos lidando com um problema de superfície imersa, será necessário fazer uso de propriedades extrínsecas para localizar o espaço dentro do espaço-tempo. Mais especificamente quem assume esse papel é a chamada curvatura extrínseca. A relação entre a curvatura da folheação  $(n-1)$ -dimensional,  $\mathcal{R}$ , a curvatura  $n$ -dimensional do espaço-tempo,  $R$ , e a curvatura extrínseca da folheação,  $K$ , é dada pela equação de Gauss

$$\mathcal{R}^{IJ}{}_{\mu\nu} = R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} e^I{}_{\alpha} e^J{}_{\beta} - K^I{}_{\mu} K^J{}_{\nu} + K^J{}_{\mu} K^I{}_{\nu}, \quad (4.47)$$

onde os índices espaciais  $\{I, J = 1, 2\}$  caracterizam a superfície  $\mathbb{M}^2$  e

$$K^I{}_{\mu} = -e^I{}_{\nu} D_{\mu} n^{\nu}, \quad (4.48)$$

a diferença entre o vetor normal  $n^{\nu}$ , transportado paralelamente ao longo da superfície puramente espacial, de um ponto a outro, é uma medida da curvatura dessa superfície no espaço-tempo que está imersa.

Por fim, vamos mostrar como (4.44) satisfaz (4.47). Primeiramente, multipliquemos a equação de Gauss em três dimensões por  $v^{\nu}$ , segue então

$$\mathcal{R}^{IJ}{}_{\mu\nu} v^{\nu} = e^I{}_{\alpha} e^J{}_{\beta} R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} v^{\nu} + (-K^I{}_{\mu} K^J{}_{\nu} + K^J{}_{\mu} K^I{}_{\nu}) v^{\nu}, \quad (4.49)$$

e agora podemos usar as *dreibeins* para projetar (4.44) em  $T_x(\mathbb{M}^2)$ ,

$$e^I{}_{\alpha} e^J{}_{\beta} R^{\alpha\beta}{}_{\mu\nu} v^{\nu} = 0. \quad (4.50)$$

Facilmente nota-se que (4.50) está contida em (4.49), logo,

$$\mathcal{R}^{IJ}{}_{\mu\nu} v^{\nu} = (-K^I{}_{\mu} K^J{}_{\nu} + K^J{}_{\mu} K^I{}_{\nu}) v^{\nu}. \quad (4.51)$$

A interpretação da expressão (4.51) é imediata, i.e., os difeomorfismos caracterizados por  $v^{\mu}$ , são tais que a 2-curvatura é completamente determinada pela curvatura extrínseca. Isso é consistente com o formalismo ADM uma vez que as folhas são superfícies puramente espaciais. Além disso, a expressão (4.51) pode ser reescrita da seguinte forma

$$[D^I, D^J] v_{\mu} = (-K^I{}_{\mu} K^J{}_{\nu} + K^J{}_{\mu} K^I{}_{\nu}) v^{\nu}, \quad (4.52)$$

que expressa o comportamento do campo  $v^\mu$  quando transportado paralelamente ao longo de uma curva tipo-espaço (sobre uma folha da folheação ADM). Agora, abrindo a soma da equação (4.51) no índice  $\nu$  e já descartando os termos triviais<sup>16</sup>, obtemos

$$\mathcal{R}^{IJ}{}_{0P}v^P + \underbrace{\mathcal{R}^{IJ}{}_{00}}_0 v^0 = 0, \quad (4.53)$$

$$\mathcal{R}^{IJ}{}_{P0}v^0 + \mathcal{R}^{IJ}{}_{PQ}v^Q = \left(-K^I{}_P K^J{}_Q + K^J{}_P K^I{}_Q\right) v^Q, \quad (4.54)$$

e de acordo com a expressão (4.52) fica

$$[D^I, D^J] v^0 = 0, \quad (4.55)$$

$$[D^I, D^J] v^P = \left(-K^I{}_P K^J{}_Q + K^J{}_P K^I{}_Q\right) v^Q. \quad (4.56)$$

A equação (4.55) afirma que o componente temporal do parâmetro difeomorfo é invariante sob o transporte paralelo ao longo de uma curva fechada puramente espacial. Isso também é esperado no formalismo ADM, já que todos os pontos em uma folha são simultâneos. Por outro lado, a equação (4.56) indica que o vetor espacial difeomorfo (pertencente à superfície da folheação) sofre uma modificação ao longo do transporte paralelo, e esta alteração é determinada pela curvatura extrínseca. Veja as Figuras 1 e 2.

<sup>16</sup> Lembrando que  $K \in \mathbb{M}^2$ , então, quando tivermos índices temporais,  $K = 0$ .

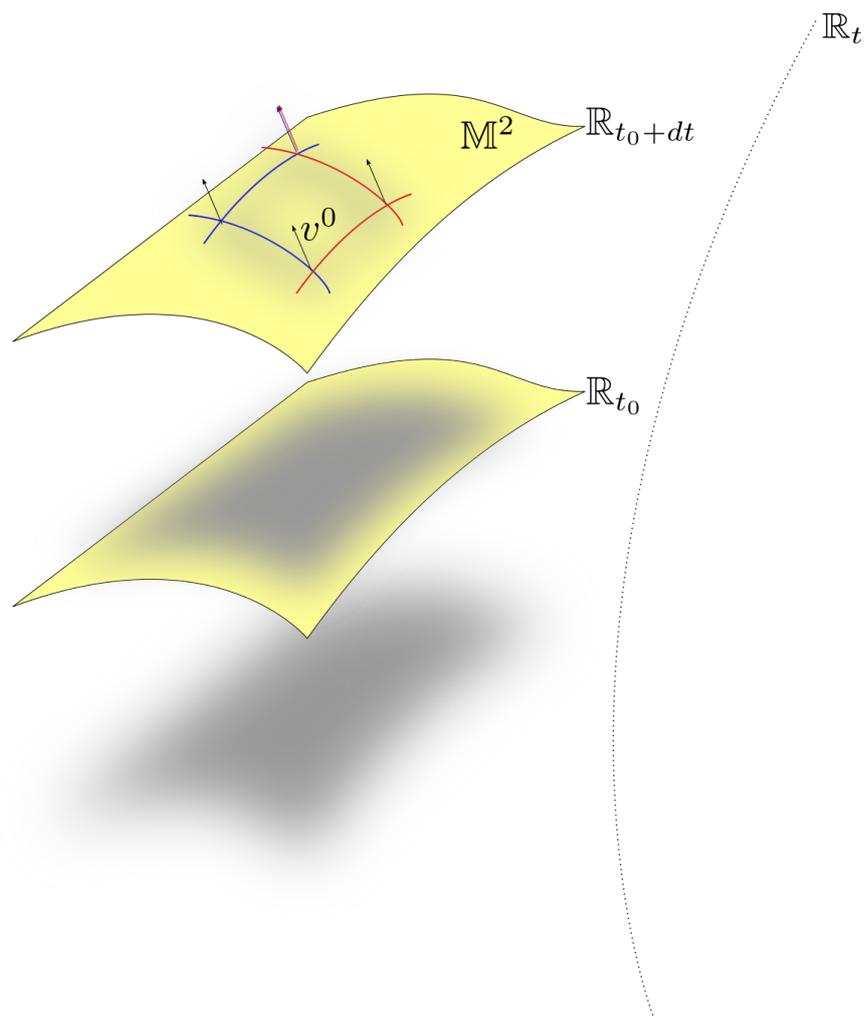


Figura 1 – Invariância de  $v^0$  quando transportado paralelamente ao longo de dois caminhos fechados, representados pelas cores azul e vermelha.

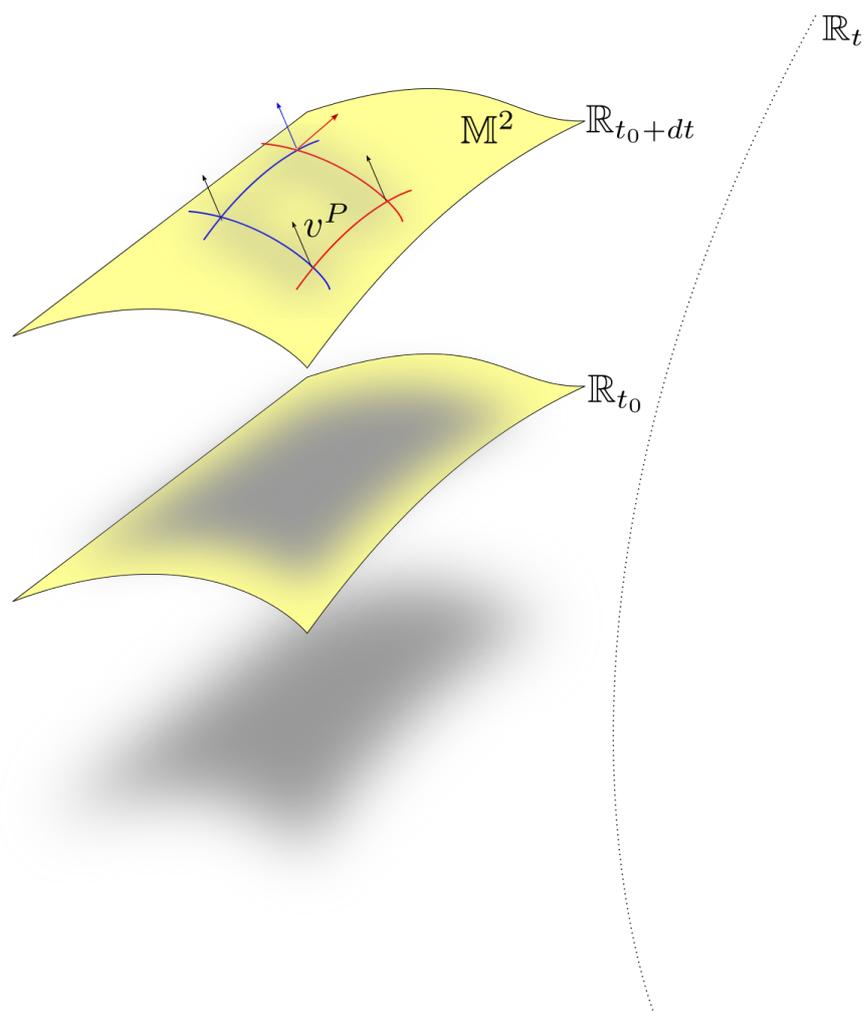


Figura 2 – Geometria extrínseca da folha afetando o transporte paralelo de  $v^P$  pelos caminhos azul e vermelho.

A conclusão que podemos tirar disso é que  $v^0$  é fixo, enquanto  $v^P$  permanece livre e sujeito à geometria da folha. Isso mostra a consistência da relação (4.44) quando assumimos a condição de torção nula com o formalismo ADM. Então, quando os difeomorfismos completos são quebrados ao subgrupo

$$\text{Diff}(2)_{\mathbb{M}^2} = \left\{ v \in \text{Diff}(3) \mid \mathbb{M}^3 = \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}_t ; T^i = 0 ; i_v R^{ij} = 0 \right\} , \quad (4.57)$$

a gravidade isométrica local<sup>17</sup> no fibrado *coframe* (ver Seção 6.1) surge naturalmente, e isso mostra que a gravidade geometrodinâmica pode então ser formulada a partir dos campos de calibre sem a necessidade de quebrar o grupo de calibre.

### 4.3 Simetria de calibre de de Sitter: inclusão da constante cosmológica

O segundo caso considerado em [?] é a generalização da abordagem anterior, ou seja, a ação de Chern-Simons será descrita em termos do grupo de de-Sitter [?, ?]  $SO(4) \equiv SU(2) \times S(3)$ , onde  $S(3)$  representa as pseudo-translações<sup>18</sup>. A álgebra agora é do tipo

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= \epsilon_{ijk} J^k, \\ [J_i, P_j] &= \epsilon_{ijk} P^k, \\ [P_i, P_j] &= \epsilon_{ijk} J^k, \end{aligned} \quad (4.58)$$

e as formas quadráticas invariantes são exatamente as mesmas encontradas em (4.2). Usando as relações (4.3), (4.2) e (4.58) em (2.25)

$$\begin{aligned} S_{CS} &= \int A^i dA^j \underbrace{\text{Tr}(J_i J_j)}_0 + A^i d\theta^j \underbrace{\text{Tr}(J_i P_j)}_{\delta_{ij}} + \theta^j dA^i \underbrace{\text{Tr}(P_j J_i)}_{\delta_{ij}} + \theta^i d\theta^j \underbrace{\text{Tr}(P_i P_j)}_0 + \\ &+ \frac{2}{3} \text{Tr} \left[ \left( A^i J_i + \theta^i P_i \right) \left( A^j A^k \underbrace{[J_j, J_k]}_{\epsilon_{jkl} J^l} + A^j \theta^k \underbrace{[J_j, P_k]}_{\epsilon_{jkl} P^l} + \theta^j A^k \underbrace{[P_j, J_k]}_{-\epsilon_{jkl} P^l} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \theta^j \theta^k \underbrace{[P_j, P_k]}_{\epsilon_{jkl} J^l} \right) \right], \end{aligned} \quad (4.59)$$

<sup>17</sup> Representada pelo Princípio de Equivalência [?].

<sup>18</sup> Setor do grupo de calibre que não é um subgrupo, mas sim um espaço *coset* simétrico [?, ?].

dando origem a

$$\begin{aligned}
S_{CS} = & \int A^i d\theta^i + \theta^i dA^i + \frac{2}{3}\epsilon_{jkl} \left[ \frac{1}{2}(A^i A^j A^k \underbrace{\text{Tr}(J_i J^l)}_0) + \right. \\
& + \frac{1}{2}A^i A^j \theta^k \underbrace{\text{Tr}(J_i P^l)}_{\delta_i^l} - \frac{1}{2}A^i \theta^j A^k \underbrace{\text{Tr}(J_i P^l)}_{\delta_i^l} + \frac{1}{2}A^i \theta^j \theta^k \underbrace{\text{Tr}(J_i J^l)}_0 + \\
& + \frac{1}{2}\theta^i A^j A^k \underbrace{\text{Tr}(P_i J^l)}_{\delta_i^l} + \frac{1}{2}\theta^i A^j \theta^k \underbrace{\text{Tr}(P_i P^l)}_0 - \frac{1}{2}\theta^i \theta^j A^k \underbrace{\text{Tr}(P_i P^l)}_0 + \\
& \left. + \frac{1}{2}\theta^i \theta^j \theta^k \underbrace{\text{Tr}(P_i J^l)}_{\delta_i^l} \right], \tag{4.60}
\end{aligned}$$

que é o mesmo resultado da ação de Einstein-Hilbert, acrescido do termo  $\theta\theta\theta$ , ou seja,

$$S_{CS} = 2 \int \theta^i \left( F^i + \frac{1}{6}\epsilon_{ijk}\theta^j\theta^k \right). \tag{4.61}$$

De fato, se fizermos uso de (4.12), não será novidade que (4.61) se torna

$$S_{CS} \mapsto S_{EHcc} = -\frac{1}{16\pi G} \int \epsilon_{ijk} e^i \left( R^{jk} - \frac{\Lambda^2}{3} e^j e^k \right), \tag{4.62}$$

agora  $\Lambda^2 = \kappa^4$  é identificado como o termo de constante cosmológica. Usando a mesma prescrição de (4.21) e (4.22) para (4.62), obtemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{EH3dcc}}{\partial e^l} = \epsilon_{ljk} \left( R^{jk} - \Lambda^2 e^j e^k \right) = 0 \quad \therefore \quad R^{jk} = \Lambda^2 e^j e^k, \tag{4.63}$$

e exatamente igual à equação (4.22)

$$De^i = T^i = 0. \tag{4.64}$$

Assim, as equações de campo são

$$\begin{aligned}
R^{ij} &= \Lambda^2 e^i e^j, \\
T^i &= 0.
\end{aligned} \tag{4.65}$$

Veja que, assim como no caso de Einstein-Hilbert, nossa teoria sai de um espaço plano euclidiano e naturalmente emerge uma teoria de gravidade sob uma variedade curva que neste caso denotaremos por  $M^3$ .

### 4.3.1 Transformações de calibre e difeomorfismos

Do mesmo modo feito na Seção 4.2, vamos ao cálculo das transformações de calibre para  $Y$ , na representação  $SU(2) \times S(3)$ . Então, fazendo uso de (4.26) e (4.58), temos

$$\begin{aligned} Y' &= A^i J_i + \theta^i P_i + d(\alpha^i J_i + \xi^i P_i) + \frac{1}{2}[(A^i J_i + \theta^i P_i), (\alpha^i J_i + \xi^i P_i)] \\ &= (A^i + d\alpha^i)J_i + (\theta^i + d\xi^i)P_i + A^i \alpha^j [J_i, J_j] + A^i \xi^j [J_i, P_j] + \\ &+ \theta^i \alpha^j [P_i, J_j] + \theta^i \xi^j [P_i, P_j]. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Não é difícil ver que, devido à álgebra  $[P_i, P_j] = \epsilon_{ijk} J^k$  (em (4.1) esse comutador era nulo), as transformações de calibre para  $A$  serão acrescidas de um termo que é justamente o último de (4.66), logo, temos as seguintes transformações para cada setor,

$$\begin{aligned} A^i &\longmapsto A^i + \tilde{D}\alpha^i + \epsilon^i_{jk} \theta^j \xi^k, \\ \theta^i &\longmapsto \theta^i + \tilde{D}\xi^i + \epsilon^i_{jk} \theta^k \alpha^j, \end{aligned} \quad (4.67)$$

tal que, ao empregar (4.12) e (4.29) obtemos

$$\begin{aligned} \omega^{ij} &\longmapsto \omega^{ij} + D\alpha^{ij} - \Lambda^2 (e^i \rho^j - e^j \rho^i), \\ e^i &\longmapsto e^i + D\rho^i + \alpha^i_j e^j, \end{aligned} \quad (4.68)$$

que são as transformações de calibre na representação  $SO(3) \times S(3)$ . E as transformações restritas à  $S(3)$  são

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_{S(3)} \omega^{ij} &= -\Lambda^2 (e^i \rho^j - e^j \rho^i), \\ \mathfrak{I}_{S(3)} e^i &= D\rho^i, \end{aligned} \quad (4.69)$$

e igualmente ao feito anterior, conforme (4.40),

$$\begin{aligned} (\mathfrak{L}_v - \mathfrak{I}_{S(3)}) \omega^{ij} &= i_v R^{ij} + D \underbrace{(i_v \omega^{ij})}_{\alpha^{ij}} + \Lambda^2 (e^i \rho^j - e^j \rho^i), \\ (\mathfrak{L}_v - \mathfrak{I}_{S(3)}) e^i &= i_v T^i + D \underbrace{(i_v e^i - \rho^i)}_{\rho^i} - \underbrace{(i_v \omega^i_j)}_{\alpha^{ij}} e^j. \end{aligned} \quad (4.70)$$

Quando novamente admitimos as relações (4.42), as equações acima serão isometrias locais se e somente se

$$\begin{aligned} i_v (R^{ij} - \Lambda^2 e^i e^j) &= 0, \\ i_v T^i &= 0, \end{aligned} \quad (4.71)$$

afirmando então que o coset  $S(3)$  também está associado aos difeomorfismos e o setor  $SO(3)$  às isometrias.

Agora, vamos discutir as relações (4.71) igualmente como fizemos na Subseção 4.2.1: se  $R^{ij} = \Lambda^2 e^i e^j$  e  $T^i = 0$  temos exatamente o caso *on-shell*, i.e., as soluções das equações de movimento precisam ser empregadas; caso  $v^\nu = 0$ , não faz muito sentido para nós, porque queremos entender os difeomorfismos. Assim, novamente lançaremos mão das folheações ADM com torção nula, já que este problema é bastante semelhante ao anterior. Finalmente, começamos reescrevendo as equações (4.71) em componentes,

$$\left[ R^{ij}_{\mu\nu} - \frac{\Lambda^2}{2} (e^i_\mu e^j_\nu - e^i_\nu e^j_\mu) \right] v^\nu = 0, \quad (4.72)$$

e em seguida, projetamos a equação (4.72) em  $\mathbb{M}^2$ , desde que<sup>19</sup>  $\mathbb{M}^3 = \mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}_t$  (pelo Teorema 3), temos

$$\left[ e^I_\alpha e^J_\beta R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} - \frac{\Lambda^2}{2} (e^I_\alpha e^\alpha_\mu e^J_\beta e^\beta_\nu - e^I_\alpha e^\alpha_\nu e^J_\beta e^\beta_\mu) \right] v^\nu = 0, \quad (4.73)$$

onde foram usadas as relações da inversa da *vielbein* (equação (3.7)). Agora substituindo em (4.47) obtemos

$$\mathcal{R}^{IJ}_{\mu\nu} v^\nu = \left[ -K^I_\mu K^J_\nu + K^J_\mu K^I_\nu + \frac{\Lambda^2}{2} (\delta^I_\mu \delta^J_\nu - \delta^I_\nu \delta^J_\mu) \right] v^\nu. \quad (4.74)$$

A partir daí, usando a expressão (4.52), a equação (4.74) resulta em

$$[D^I, D^J] v_0 = 0, \quad (4.75)$$

$$\begin{aligned} [D^I, D^J] v_P &= (-K^I_P K^J_Q + K^J_P K^I_Q) v^Q + \\ &+ \frac{\Lambda^2}{2} (\delta^I_P \delta^J_Q - \delta^I_Q \delta^J_P) v^Q, \end{aligned} \quad (4.76)$$

<sup>19</sup> Lembrando que  $\mathbb{M}^2$  também possui assinatura euclidiana.

o que não é difícil ver que (4.75) coincide com (4.55), logo, possui a mesma interpretação dada anteriormente. Além disso, (4.76) contém (4.56) quando  $\Lambda = 0$ . Isso já deveria ser pressentido devido a presença do termo de constante cosmológica.<sup>20</sup> De fato, pode-se dizer então que além de  $v^P$  ser modificado pelas correções de curvatura extrínseca, ele também é influenciado pela geometria de fundo do tipo de Sitter.

Por fim, concluímos que as condições (4.71) estão de acordo com a folheação ADM com torção nula, classificando assim os difeomorfismos nas superfícies espaciais através do subgrupo

$$\text{Diff}(2)_{\mathbf{M}^2} = \left\{ v \in \text{Diff}(3) \mid \mathbf{M}^3 = \mathbf{M}^2 \times \mathbb{R}_t ; T^i = 0 ; i_v (R^{ij} - \Lambda^2 e^i e^j) = 0 \right\}, \quad (4.77)$$

nos permitindo então, descrever uma teoria de gravidade isométrica local sem qualquer necessidade de quebrar o grupo de calibre.

---

<sup>20</sup> É basicamente a curvatura do espaço de de Sitter.

## 5 Gravidade em quatro dimensões

No presente capítulo faremos exatamente a mesma abordagem descrita no capítulo anterior, i.e., mostraremos que é possível induzir uma teoria de gravidade partindo da ação de Yang-Mills pura para o grupo de de Sitter euclidiano em quatro dimensões, sem que seja implementada a contração de Inönü-Wigner. Lembrando que este caso estende a proposta original de E. Witten [?], não só pela escolha de uma ação diferente de Chern-Simons, mas também na dimensão do espaço e na não utilização das equações de movimento.

### 5.1 Yang-Mills e gravidade

Vamos começar assumindo o grupo de calibre  $SO(5)$ , o qual é escolhido por ser compacto e semi-simples (conforme discutimos na Seção 2.2). O referido grupo define um espaço plano 5-dimensional<sup>1</sup>,  $\mathbb{R}^5$ , com métrica de Killing dada por

$$\eta^{AB} = \text{diag}(1, 1, 1, 1, 1) , \quad (5.1)$$

tal que os índices latinos maiúsculos acima variam como  $\{4, 0, 1, 2, 3\}$ . Além disso, de acordo com [?], sua decomposição é representada por

$$SO(5) \equiv SO(4) \times S(4) . \quad (5.2)$$

Neste caso, a álgebra de  $SO(5)$  em função dos geradores antissimétricos e anti-hermitianos,  $J^{ab}$ , devidamente projetada na quinta coordenada, pode ser escrita como

$$\begin{aligned} [J^{ab}, J^{cd}] &= -\frac{1}{2} \left[ (\eta^{ac} J^{bd} + \eta^{bd} J^{ac}) - (\eta^{ad} J^{bc} + \eta^{bc} J^{ad}) \right] , \\ [J^a, J^b] &= -\frac{1}{2} J^{ab} , \\ [J^{ab}, J^c] &= \frac{1}{2} (\eta^{ac} J^b - \eta^{bc} J^a) , \end{aligned} \quad (5.3)$$

<sup>1</sup> Não há qualquer relação com o espaço-tempo  $\mathbb{R}^4$ . Ademais, deve-se lembrar que as isometrias locais relacionadas a este grupo são de um espaço euclidiano. Caso queira-se isometrias de um espaço de Minkowski, será necessário usar o método das rotações de Wick.

onde  $J^a \equiv J^{4a} \in S(4)$ ,  $J^{ab} \in SO(4)$  e os índices  $\{a, b, c, d\}$  variam de acordo com  $\{0, 1, 2, 3\}$ . Além disso,  $\eta^{ab} = \text{diag}(1, 1, 1, 1)$ .

A conexão de calibre decomposta nos setores  $SO(4)$  e  $S(4)$ , respectivamente, é dada por

$$Y = A^a{}_b J_a{}^b + \theta^a J_a, \quad (5.4)$$

e conseqüentemente a 2-forma de curvatura (2.16), segundo (5.4), temos

$$\begin{aligned} F = & dA^a{}_b J_a{}^b + d\theta^a J_a + A^a{}_b A^c{}_d [J_a{}^b, J_c{}^d] + A^a{}_b \theta^c [J_a{}^b, J_c] + \\ & + \theta^a A^b{}_c [J_a, J_b{}^c] + \theta^a \theta^b [J_a, J_b]. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Usando a álgebra (5.3), a equação anterior se reduz a

$$F = \left( dA^a{}_b + A^a{}_c A^c{}_b - \frac{1}{4} \theta^a \theta^b \right) J_a{}^b + \left( d\theta^a + A^a{}_b \theta^b \right) J_a, \quad (5.6)$$

de modo que, se definirmos  $\Sigma^a{}_b = dA^a{}_b + A^a{}_c A^c{}_b$  e  $\Phi^a = d\theta^a + A^a{}_b \theta^b$ , finalmente obtemos

$$F = \left( \Sigma^a{}_b - \frac{1}{4} \theta^a \theta^b \right) J_a{}^b + \Phi^a J_a. \quad (5.7)$$

A partir daí, a ação (2.20) fica

$$\begin{aligned} S_{YM} = & \frac{1}{2\kappa^2} \int F^a{}_b * F_a{}^b \\ = & \frac{1}{2\kappa^2} \int \left[ \Sigma^a{}_b * \Sigma_a{}^b + \frac{1}{2} \Phi^a * \Phi_a - \frac{1}{2} \Sigma^a{}_b * (\theta_a \theta^b) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{16} \theta^a \theta_b * (\theta_a \theta^b) \right]. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Mantendo as ideias desenvolvidas no capítulo anterior, é possível realizarmos o mapeamento entre a teoria de calibre proposta e uma teoria de gravidade quando assumimos que os campos de calibre podem ser descritos pela *vierbein* e pela *conexão de spin*, a saber

$$\begin{aligned} A^a{}_b & \longmapsto \omega^a{}_b, \\ \theta^a & \longmapsto \gamma e^a, \end{aligned} \quad (5.9)$$

onde  $\gamma$  é uma escala de massa. Essa escala é requerida porque  $[\theta] = [A] = [\text{massa}]$  enquanto  $[\omega] = [\text{massa}]$  e  $[e] = 0$ , então, necessariamente  $[\gamma] = [\text{massa}]$ . Além disso, é

importante notar que, em três dimensões, o parâmetro de acoplamento possui dimensão de massa, já em quatro dimensões não há nenhum parâmetro de massa disponível, assim, a sua existência deve ser assumida. Na verdade, tal parâmetro pode surgir a partir de efeitos de condensados e/ou não-perturbativos como o parâmetro Gribov [?, ?]. A partir daí a ação de Yang-Mills (5.8), mapeada numa ação de gravidade sob uma variedade  $\mathbb{M}^4$ , é descrita por

$$S_{4d(grav)} = \frac{1}{16\pi G} \int \left[ \frac{3}{2\Lambda^2} R^a{}_b * R^b{}_a + T^a * T_a - \frac{1}{2} \epsilon_{abcd} e^a e^b \left( R^{cd} - \frac{\Lambda^2}{6} e^c e^d \right) \right], \quad (5.10)$$

onde usamos o Hodge dual

$$*(e^a e^b) = \frac{1}{2} \epsilon_{abcd} e^a e^b, \quad (5.11)$$

e  $R^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \omega^c{}_b$ ,  $T^a = de^a + \omega^a{}_b e^b$ ,  $G = \frac{\kappa^2}{4\pi\gamma^2}$  e  $\gamma^2 = \frac{4}{3}\Lambda^2$  são, respectivamente, as 2-formas de curvatura e torção e, as constantes de Newton e cosmológica.

De posse da ação, podemos agora calcular as equações de campo, tal como feito em (4.21) e (4.22). Entretanto devemos salientar que o segundo termo da equação de Euler-Lagrange (o qual foi nulo anteriormente) no formalismo de formas diferenciais deverá ser levado em conta, e isso se deve ao surgimento de termos não triviais quando variamos a ação (5.10), um exemplo disso está no termo de torção, o qual depende explicitamente da derivada da *vierbein*. Usando (4.20), computemos o primeiro termo, denotado por  $\mathcal{L}_1 \equiv R * R$ , logo

$$\delta\mathcal{L}_1 = \frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial e^c} = R_{ab} * (R^{ab} e^c), \quad (5.12)$$

onde usamos as relações,

$$*R^{ab} = \frac{1}{2} R^{ab}{}_{\mu\nu} \left( \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \right) = \frac{1}{4} R_{ab} R^{ab}{}_{df} \epsilon^{df}{}_{gh} e^g e^h, \quad (5.13)$$

$$dx^\mu = e_a{}^\mu e^a, \quad (5.14)$$

além de considerar que  $\frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial(de^c)} = 0$ . Para o segundo termo,  $\mathcal{L}_2 \equiv T * T$  temos

$$\frac{\partial\mathcal{L}_2}{\partial e^c} = \omega^a{}_c * T_a + T^a * (T_a e_c), \quad (5.15)$$

onde usamos a relação (5.13) análoga para a 2-forma de torção,  $T^a$  e lembrando que  $T^a = de^a + \omega^a_c e^c$ . Complementando,

$$d \left( \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial (de^c)} \right) = d * T_c, \quad (5.16)$$

somando (5.15) e (5.16) e usando  $D * T_c = d * T_c + \omega^a_c T_a$ , chegamos em

$$\delta \mathcal{L}_2 = \frac{\partial \mathcal{L}_2}{\partial e^c} = D * T_a + T^a * (T_a e_c). \quad (5.17)$$

Finalmente, as variações dos termos  $\mathcal{L}_3 \equiv \epsilon_{abcd} e^a e^b R^{cd}$  e  $\mathcal{L}_4 \equiv \epsilon_{abcd} e^a e^b e^c e^d$  são imediatas, logo,

$$\delta \mathcal{L}_3 = \frac{\partial \mathcal{L}_3}{\partial e^c} = 2 \epsilon_{cabd} R^{ab} e^d, \quad (5.18)$$

$$\delta \mathcal{L}_4 = \frac{\partial \mathcal{L}_4}{\partial e^c} = 4 \epsilon_{cabd} e^a e^b e^d, \quad (5.19)$$

lembrando que neste dois últimos também foi usado  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (de^c)} = 0$ . Com isso, a equação de campo (levando em conta os respectivos fatores da ação (5.10)) relativa à *vierbein* será

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_1 + \delta \mathcal{L}_2 + \delta \mathcal{L}_3 + \delta \mathcal{L}_4 &= 0 \\ \frac{3}{2\Lambda^2} R_{ab} * (R^{ab} e^c) + D * T_a + T^a * (T_a e_c) - \epsilon_{cabd} R^{ab} e^d + \\ &+ \frac{\Lambda^2}{3} \epsilon_{cabd} e^a e^b e^d = 0. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Agora vamos fazer o mesmo com respeito à conexão de spin, então,

$$\frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \omega^c_d} = 2 \omega_d^b * R_{cb} - \omega_c^a * R_{ad}, \quad (5.21)$$

onde levamos em conta que a conexão de spin não depende do Hodge. Prosseguindo temos

$$d \left( \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial d\omega^c_d} \right) = 2(d * R_{cd}), \quad (5.22)$$

e finalmente, somando (5.21) e (5.22) obtemos

$$\delta \mathcal{L}_1 = 2 \left( \omega_d^b * R_{cb} + \omega_c^a * R_{ad} + d * R_{cd} \right) = 2(D * R_{cd}). \quad (5.23)$$

Para o segundo termo  $\mathcal{L}_2$ ,

$$\delta\mathcal{L}_2 = \frac{\partial\mathcal{L}_2}{\partial\omega^c_d} = e_c * T_d - e_d * T_c, \quad (5.24)$$

uma vez que os índices já foram antissimetrizados e usamos  $d\left(\frac{\partial\mathcal{L}_2}{\partial d\omega^c_d}\right) = 0$ , pois  $\mathcal{L}_2$  não depende de  $d\omega$ . Por fim, o último termo que devemos calcular é  $\mathcal{L}_3$ , devido ao fato de  $\mathcal{L}_4$  não ter qualquer dependência em  $\omega$ . Deste modo, seguindo o mesmo passo tomado em (4.22) e transformando o termo  $ee$  em  $*(ee)$  através relação (5.11), obtemos

$$\delta\mathcal{L}_3 = \frac{\partial\mathcal{L}_3}{\partial\omega^c_d} + d\left(\frac{\partial\mathcal{L}_2}{\partial d\omega^c_d}\right) = 2\epsilon_{cdab}T^a e^b. \quad (5.25)$$

Então, a equação de campo (levando em conta os respectivos fatores da ação (5.10)) com respeito à conexão de spin é

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L}_1 + \delta\mathcal{L}_2 + \delta\mathcal{L}_3 + \delta\mathcal{L}_4 &= 0, \\ \frac{3}{\Lambda^2}D * R_{cd} + e_c * T_d - e_d * T_c - \epsilon_{cdab}T^a e^b &= 0. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Por fim, o conjunto de equações de campo referentes à *vierbein* e à conexão de spin, respectivamente são,

$$\begin{aligned} \frac{3}{2\Lambda^2}R_{bc} * (R^{bc}e_a) + D * T_a + T^b * (T_b e_a) - \epsilon_{abcd}R^{bc}e^d + \frac{\Lambda^2}{3}\epsilon_{abcd}e^b e^c e^d &= 0, \\ \frac{3}{\Lambda^2}D * R_{ab} + e_b * T_a - e_a * T_b - \epsilon_{abcd}T^c e^d &= 0. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Meramente por questões de simplicidade, vamos escolher  $T^a = 0$ . Daí, as equações (5.27) se reduzem à

$$\begin{aligned} \frac{3}{2\Lambda^2}R_{bc} * (R^{bc}e_a) - \epsilon_{abcd}R^{bc}e^d + \frac{\Lambda^2}{3}\epsilon_{abcd}e^b e^c e^d &= 0, \\ \frac{3}{\Lambda^2}D * R_{ab} &= 0. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Além disso,  $D * R_{ab} = \frac{1}{4}DR_{ab}R^{ab}\epsilon^{df}_{gh}e^g e^h = 0$ , quando usamos (5.13), juntamente com a identidade de Bianchi (3.22) e  $T^a = De^a = 0$ . Veja que isso reduz ainda mais nossas equações de campo, que agora assumem a forma

$$\frac{3}{2\Lambda^2}R_{bc} * (R^{bc}e_a) - \epsilon_{abcd}R^{bc}e^d + \frac{\Lambda^2}{3}\epsilon_{abcd}e^b e^c e^d = 0. \quad (5.29)$$

Neste momento será importante redefinirmos o termo de constante cosmológica para

$$\tilde{\Lambda}^2 = \Lambda_{tqc}^2 + \Lambda^2, \quad (5.30)$$

o que é uma boa característica do modelo porque  $\Lambda^2$  (constante cosmológica da teoria) possivelmente irá compensar  $\Lambda_{tqc}^2$ , o qual possui um valor teórico muito grande, conforme previsto pela teoria quântica de campos. Assim, ainda há esperança de se obter uma constante cosmológica completa que coincida com as observações [?, ?]. Então, ao usarmos a redefinição (5.30) em (5.10) temos

$$S_{4d(grav)} = \frac{1}{16\pi G} \int \left[ \frac{3}{2\Lambda^2} R^a{}_b * R_a{}^b + T^a * T_a - \frac{1}{2} \epsilon_{abcd} e^a e^b \left( R^{cd} - \frac{\tilde{\Lambda}^2}{6} e^c e^d \right) \right], \quad (5.31)$$

cuja equação de campo, análoga a (5.29), é

$$\frac{3}{2\Lambda^2} R_{bc} * (R^{bc} e_a) - \epsilon_{abcd} R^{bc} e^d + \frac{\tilde{\Lambda}^2}{3} \epsilon_{abcd} e^b e^c e^d = 0. \quad (5.32)$$

Uma solução para (5.32) é do tipo

$$R^{ab} = \lambda e^a e^b, \quad (5.33)$$

tal que,  $\lambda$  é uma constante relacionada à curvatura do espaço. Então, ao substituirmos (5.33) em (5.32), obtemos

$$\frac{3}{2\Lambda^2} \lambda^2 e^b e^c \underbrace{* (e_b e_c e_a)}_{\epsilon_{abcd} e^d} + \epsilon_{abcd} \left( -\lambda e^b e^c e^d + \frac{\tilde{\Lambda}^2}{3} \epsilon_{abcd} e^b e^c e^d \right) = 0, \quad (5.34)$$

que resulta em

$$\epsilon_{abcd} e^b e^c e^d \left( \frac{3}{2\Lambda^2} \lambda^2 - \Lambda \lambda + \frac{\tilde{\Lambda}^2}{3} \right) = 0, \quad (5.35)$$

logo,

$$\left( \frac{3}{2\Lambda^2} \lambda^2 - \lambda + \frac{\tilde{\Lambda}^2}{3} \right) = 0. \quad (5.36)$$

Ao resolver (5.36), facilmente encontramos<sup>2</sup>

$$R^{ab} = \frac{\Lambda^2}{3} \left[ 1 \pm \left( 1 - 2 \frac{\tilde{\Lambda}^2}{\Lambda^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right] e^a e^b. \quad (5.37)$$

<sup>2</sup> A escolha  $\tilde{\Lambda}^2 = \frac{1}{2} \Lambda^2$  resulta em  $R^{ab} = \frac{\Lambda^2}{3} e^a e^b$ . Isso não faz qualquer sentido do ponto de vista físico, embora matematicamente seja aceito e caracterize a curvatura de um espaço de de Sitter.

## 5.2 Transformações de calibre e difeomorfismos

Nesta seção, vamos nos abster de um discurso inicial sobre este tópico, pois já o fizemos nas Seções 4.2 e 4.3.1. Então, dando prosseguimento, passemos as transformações de calibre tal como feito nas referidas seções, via

$$Y' = Y + \underbrace{(d + Y)}_{\nabla} \phi, \quad (5.38)$$

agora com o parâmetro de calibre  $\phi = \alpha^a{}_b J_a^b + \xi^a J_a$ . Usando a álgebra (5.3) e a decomposição (5.4), temos

$$\begin{aligned} Y' &= A^a{}_b J_a^b + \theta^a J_a + d(\alpha^a{}_b J_a^b + \xi^a J_a) + \frac{1}{2} [(A^a{}_b J_a^b + \theta^a J_a), (\alpha^c{}_d J_c^d + \xi^c J_c)] \\ &= (A^a{}_b + d\alpha^a{}_b) J_a^b + (\theta^a + d\xi^a) J_a + A^a{}_b \alpha^a{}_b [J_a^b, J_c^d] + A^a{}_b \xi^c [J_a^b, J_c] + \\ &+ \theta^a \alpha^c{}_d [J_a, J_c^d] + \theta^a \xi^c [J_a, J_c], \end{aligned} \quad (5.39)$$

tal que, as transformações de calibre para os campos  $A$  e  $\theta$ , respectivamente nos setores  $SO(4)$  e  $S(4)$ , são

$$\begin{aligned} A^a{}_b &\mapsto A^a{}_b + \tilde{D}\alpha^a{}_b - \frac{1}{4} (\theta^a \xi_b - \theta_b \xi^a), \\ \theta^a &\mapsto \theta^a + \tilde{D}\xi^a + \alpha^a{}_b \theta^b, \end{aligned} \quad (5.40)$$

lembrando que  $\tilde{D} = d + A$ . Lançando mão da relação (5.9), as transformações (5.40) tomam a forma de

$$\omega^a{}_b \mapsto \omega^a{}_b + \tilde{D}\alpha^a{}_b - \frac{\gamma}{4} (e^a \xi_b - e_b \xi^a), \quad (5.41)$$

$$e^a \mapsto e^a + \frac{1}{\gamma} \tilde{D}\xi^a + \alpha^a{}_b e^b, \quad (5.42)$$

e ainda se definirmos

$$\rho^a = \frac{1}{\gamma} \xi^a, \quad (5.43)$$

e usarmos  $\gamma^2 = \frac{4}{3} \Lambda^2$ , chegamos em

$$\omega^a{}_b \mapsto \omega^a{}_b + D\alpha^a{}_b - \frac{\Lambda^2}{3} (e^a \rho_b - e_b \rho^a), \quad (5.44)$$

$$e^a \mapsto e^a + D\rho^a + \alpha^a{}_b e^b, \quad (5.45)$$

onde  $D = d + \omega$ . Mais uma vez, queremos obter os difeomorfismos a partir do grupo de calibre, só que neste caso, para o setor  $S(4)$ . Assim, o método prescrito na Seção 4.2 será exatamente o mesmo, então, agora vamos determinar as transformações restritas à  $S(4)$ ,

$$\mathfrak{I}_{S(4)}\omega^a_b \mapsto -\frac{\Lambda^2}{3}(e^a\rho_b - e_b\rho^a), \quad (5.46)$$

$$\mathfrak{I}_{S(4)}e^a \mapsto D\rho^a. \quad (5.47)$$

De posse desta informação, calculemos os difeomorfismos pela derivada de Lie,

$$\mathfrak{L}_v\omega^a_b = i_v R^a_b - i_v(\omega^a_c\omega^c_b) + d(i_v\omega^a_b) = i_v R^a_b + D(i_v\omega^a_b), \quad (5.48)$$

$$\mathfrak{L}_ve^a = i_v T^a - i_v(\omega^a_b e^b) + d(i_ve^a) = i_v T^a + D(i_ve^a) - (i_v\omega^a_b)e^b, \quad (5.49)$$

onde foram usadas, respectivamente, as relações

$$d\omega^a_b = R^a_b - \omega^a_c\omega^c_b, \quad (5.50)$$

$$D(i_v\omega^a_b) = d(i_v\omega^a_b) + \omega^a_c(i_v\omega^c_b) - (i_v\omega^a_c)\omega^c_b, \quad (5.51)$$

e

$$de^a = T^a - \omega^a_b e^b, \quad (5.52)$$

$$D(i_ve^a) = d(i_ve^a)\omega^a_b + (i_ve^b) - (i_v\omega^a_b)e^b. \quad (5.53)$$

Finalmente, tomando a diferença entre as equações (5.48) e (5.46) e (5.49) e (5.47), obtemos

$$\begin{aligned} (\mathfrak{L}_v - \mathfrak{I}_{S(4)})\omega^a_b &= i_v R^a_b + D(i_v\omega^a_b) + \frac{\Lambda^2}{3}(e^a\rho_b - e_b\rho^a), \\ &= i_v \left( R^a_b - \frac{\Lambda^2}{3}e^a e_b \right) + D(i_v\omega^a_b), \end{aligned} \quad (5.54)$$

$$(\mathfrak{L}_v - \mathfrak{I}_{S(4)})e^a = i_v T^a + D(i_ve^a) - (i_v\omega^a_c)e^c - D\rho^a. \quad (5.55)$$

Quando assumimos

$$\rho^a = i_ve^a, \quad (5.56)$$

$$\alpha^a_b = i_v\omega^a_b, \quad (5.57)$$

$$i_v \left( R^a_b - \frac{\Lambda^2}{3}e^a e_b \right) = 0, \quad (5.58)$$

$$i_v T^a = 0, \quad (5.59)$$

as equações (5.54) e (5.55) se reduzem à

$$\begin{aligned} (\mathfrak{L}_v - \mathfrak{I}_{S(4)})\omega^a_b &= D(i_v\alpha^a_b), \\ (\mathfrak{L}_v - \mathfrak{I}_{S(4)})e^a &= -(i_v\omega^a_c)e^c, \end{aligned} \quad (5.60)$$

que representam as isometrias locais. Daí, concluímos que de fato,  $S(4)$  é associado aos difeomorfismos e  $SO(4)$  às isometrias, sem a necessidade de quebrarmos o grupo via contração de Inönü-Wigner. Todavia, o preço pago em obter essas isometrias de modo *off-shell* nos leva a perscrutar a geometria que está por trás das condições (5.58) e (5.59).

### 5.3 Aspectos geométricos

Para entendermos a geometria de (5.58), pois também assumiremos a torção nula, vamos nos suster ao que foi feito na Seção 4.3.1 sem muitas delongas, já que temos praticamente o mesmo caso com uma dimensão a mais.

Podemos observar que a equação (5.37) não satisfaz (5.58), já que  $R^a_b \neq \frac{\Lambda^2}{3}e^a e_b$ , e portanto não temos um caso *on-shell* bem definido<sup>3</sup>(para a curvatura). Como nosso maior interesse é estudar os difeomorfismos, também descartaremos a solução  $v^\mu = 0$ . Assim, vamos trabalhar do mesmo modo que fizemos na Subseção 4.2.1, i.e., projetando (5.58) em  $\mathbb{M}^3$ , desde que  $\mathbb{M}^4 = \mathbb{M}^3 \times \mathbb{R}_t$  (de acordo com o Teorema 3), temos

$$\left[ e^A_\alpha e_{B\beta} R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} - \frac{\Lambda^2}{6} (e^A_\alpha e^\alpha_\mu e_{B\beta} e^\beta_\nu - e^A_\alpha e^\alpha_\nu e_{B\beta} e^\beta_\mu) \right] v^\nu = 0, \quad (5.61)$$

onde lançamos mão da relação (3.7). Aqui, é importante ressaltar que os índices gregos estão variando como  $\{0\}$ ,  $\{P, Q = 1, 2, 3\}$  e os latinos maiúsculos são índices puramente espaciais, logo, variam como  $\{1, 2, 3\}$ . Substituindo a equação anterior em (4.47) obtemos

$$\mathcal{R}^A_{B\mu\nu} v^\nu = \left[ -K^A_\mu K_{B\nu} + K_{B\mu} K^A_\nu + \frac{\Lambda^2}{6} (\delta^A_\mu \delta_{B\nu} - \delta^A_\nu \delta_{B\mu}) \right] v^\nu. \quad (5.62)$$

<sup>3</sup> Por hora isso não é substancial pois nossa abordagem não requer o uso direto das equações de campo. Todavia, ainda pretendemos analisar esse pequeno contratempo para que o caso *on-shell* seja respeitado dentro do caso *off-shell*.

A partir daí (5.62) resulta em

$$[D^A, D_B] v_0 = 0, \quad (5.63)$$

$$\begin{aligned} [D^A, D_B] v_P &= \left( -K^A_P K_{BQ} + K_{BP} K^A_Q \right) v^Q + \\ &+ \frac{\Lambda^2}{6} \left( \delta^A_P \delta_{BQ} - \delta^A_Q \delta_{BP} \right) v^Q, \end{aligned} \quad (5.64)$$

que também coincide com a interpretação geométrica dada ao caso de três dimensões com constante cosmológica, com a ressalva do fator  $\frac{1}{6}$ .

Finalmente, quando os difeomorfismos completos são quebrados ao subgrupo

$$\text{Diff}(3)_{\mathbb{M}^3} = \left\{ v \in \text{Diff}(4) \mid \mathbb{M}^4 = \mathbb{M}^3 \times \mathbb{R}_t ; T^a = 0 ; i_v \left( R^a_b - \frac{\Lambda^2}{3} e^a e_b \right) = 0 \right\}, \quad (5.65)$$

uma teoria de gravidade local é determinada, desde que a relação (5.58) seja submetida ao crivo de uma folheação do tipo ADM com torção nula. É neste ponto que estendemos a proposta de Witten abordada em [?].

## 6 Aspectos matemáticos

Neste capítulo vamos esboçar os detalhes matemáticos concernentes aos mapeamentos das teorias de Yang-Mills em teorias de gravidade, passando pela teoria de fibrados. Algumas questões sobre a cohomologia presente na teoria de Chern-Simons e Yang-Mills relacionadas às condições (4.43), (4.71), (5.58) e (5.59) também serão discutidas.

### 6.1 Fibrados, teorias de calibre e gravidade emergente

A descrição matemática das teorias de calibre está concentrada na teoria de fibrados [?, ?]. Não é nosso objetivo fornecer uma revisão completa da teoria de fibrados e suas respectivas aplicações à Física. Aqui, nos restringiremos somente ao caso específico das teorias de calibre e gravidade [?, ?, ?, ?].

Vamos começar com um fibrado principal mais simples para o qual uma conexão de calibre é gerada [?],

$$\begin{aligned} P &\equiv \{\mathbb{G}, \mathbb{M}^n, \pi, \phi\}, \\ \pi &: P \mapsto \mathbb{M}^n, \\ \phi_i &: \pi^{-1}(\{\mathbb{M}^n\}_i) \mapsto \{\mathbb{M}^n\}_i \times \mathbb{G}, \end{aligned} \tag{6.1}$$

onde a fibra e o grupo de estrutura são ambos um grupo de Lie  $\mathbb{G}$ , o espaço base é uma variedade  $n$ -dimensional  $\mathbb{M}^n$ , usualmente designado pelo espaço-tempo e o espaço total é o produto não trivial  $P = \mathbb{G} \times \mathbb{M}^n$ . O mapa de projeção  $\pi$  é um mapa contínuo sobrejetivo e a condição de trivialidade local de  $P$  é garantida pelo homeomorfismo  $\phi_i$ , onde  $\{\mathbb{M}^n\}_i$  são abertos que cobrem  $\mathbb{M}^n$ . A definição do fibrado principal é simplesmente uma maneira formal para descrever a localização do grupo de Lie  $\mathbb{G}$  no espaço  $n$ -dimensional, reunindo em cada ponto em  $\mathbb{M}^n$  um valor diferente para os elementos de  $\mathbb{G}$ . O espaço  $P$  é, então, um grupo de Lie local  $\mathbb{G}$ .

A conexão de calibre surge na definição do transporte paralelo em  $P$ . As transformações de calibre são associadas com mudanças de coordenadas em  $P$  mantendo

fixas as coordenadas do espaço base, i.e, uma translação ao longo da fibra  $\pi^{-1}$ .

Além disso, para qualquer 1-forma de conexão  $Y$ , existe uma 2-forma de curvatura definida sobre  $P$ , dada por

$$F = \nabla Y = dY + YY. \quad (6.2)$$

As teorias de gravidade podem ser descritas em termos de fibrados principais, e conseqüentemente, como uma teoria de calibre. Inicialmente, vamos tomar uma variedade diferenciável  $\mathbb{M}^n$  e seus respectivos espaços tangentes  $T_x(\mathbb{M}^n)$ ,  $x \in \mathbb{M}^n$ . A coleção de todos os espaços tangentes define o que chamamos de fibrado tangente. Nesta estrutura,  $\mathbb{M}^n$  é o espaço base, a fibra é denotada por  $T_x(\mathbb{M}^n)$  e o grupo de estrutura é o grupo  $GL(n, \mathbb{R}^n)$ . Analogamente, o fibrado cotangente  $T^*$  é definido como a união de todos os espaços cotangentes definidos em  $\mathbb{M}^n$ . A estrutura fundamental para a gravidade está no fibrado *coframe*  $P^*$ . O fibrado *coframe* está associado ao fibrado cotangente, onde a fibra em  $x \in \mathbb{M}^n$  é o conjunto de todos os coframes locais, que são representados pelas *vielbeins*  $e^a = e^a_\mu dx^\mu$ , definidas em  $T_x^*(\mathbb{M}^n)$ . Conseqüentemente, todos os *coframes* são relacionados pelas transformações de  $GL(n, \mathbb{R}^n)$  e as fibras coincidem com o grupo. Deste modo,  $P^*$  é na verdade  $P^* = (GL(n, \mathbb{R}^n), \mathbb{M}^n)$ . Um detalhe não menos importante é que  $GL(n, \mathbb{R}^n)$  pode ser reduzido ao grupo ortogonal  $SO(n)$  o que leva ao fibrado  $P^*(SO(n), \mathbb{M}^n)$  que coincide com a estrutura matemática da gravidade de Einstein-Cartan onde a conexão em  $SO(n)$  é a conexão de spin  $\omega^a_b$ . Assim, podemos considerar a gravidade como uma teoria de calibre onde o grupo de calibre é identificado com as isometrias locais do espaço-tempo.

### 6.1.1 Caso tridimensional

Primeiramente vamos considerar a ação de Chern-Simons original (2.25) construída sobre uma variedade plana, por exemplo, o espaço-tempo euclidiano em três dimensões. Quando assumimos essa hipótese, a ação (2.25) é descrita por uma teoria de calibre usual de Chern-Simons que, em princípio, não tem nada a ver com gravidade.

Podemos observar em [?] a proposta de um mapeamento em quatro dimensões entre uma teoria de calibre sobre o espaço-tempo euclidiano e uma teoria de gravidade geometrodinâmica. Todavia, uma contração de Inönü-Wigner e a quebra de simetria

foram necessárias. No presente trabalho, nenhum destes métodos foram utilizados. Na verdade, o mapa formal  $f : (SU(2) \times \mathbf{R}, \mathbb{R}^3) \mapsto (SO(3), \mathbb{M}^3)$  pode ser construído através de uma sequência de mapas  $f_i$ . Primeiramente, um isomorfismo entre os espaços base  $f_0 : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{M}^3$ . Em seguida, o setor  $SU(2)$  do grupo de calibre é mapeado no grupo de isometrias locais  $SO(3)$  de  $\mathbb{M}^3$ , enquanto  $\mathbf{R}$  é mapeado no grupo de difeomorfismos, respectivamente através de  $f_1 : SU(2) \mapsto SO(3)$  e  $f_2 : \mathbf{R} \mapsto \text{Diff}(3)$ . Também vamos identificar o espaço das  $p$ -formas em  $\mathbb{R}^3$  com o espaço das  $p$ -formas em  $\mathbb{M}^3$ , chamados de  $\Pi^p$  e  $\tilde{\Pi}^p$ , respectivamente, por meio de  $f_3 : \Pi^p \mapsto \tilde{\Pi}^p$ . Finalmente, ao impor a relação (4.12) como uma condição extra para  $f_3$ , o fibrado *coframe*  $(SO(3), \mathbb{M}^3)$ , pode ser construído a partir de  $(SU(2) \times \mathbf{R}, \mathbb{R}^3)$ . Essencialmente, o campo  $Y$  é uma conexão sobre o fibrado principal  $(SU(2) \times \mathbf{R}, \mathbb{R}^3)$  onde o espaço base é o espaço euclidiano tridimensional  $\mathbb{R}^3$  e o grupo de estrutura (e fibra) é o grupo de calibre. Por outro lado, a ação (4.18) é uma ação de gravidade que descreve a geometrodinâmica de uma variedade tridimensional  $\mathbb{M}^3$ . Assim, a conexão de spin  $\omega$  é uma conexão ao longo de um fibrado *coframe*  $(SO(3), \mathbb{M}^3)$ , onde  $\mathbb{M}^3$  é o espaço base,  $SO(3)$  o grupo de estrutura, e uma fibra típica em um ponto  $x \in \mathbb{M}^3$  é o conjunto de todos os *coframes* que podem ser definidos no espaço tangente  $T_x(\mathbb{M}^3)$ . Obviamente, esses *coframes* são identificados com a *dreibein*  $e$ . É possível, então, reinterpretar a transição da ação (2.25) para (4.18) como uma espécie de dualidade entre a ação de Chern-Simons no espaço-tempo euclidiano e uma ação da gravidade sobre uma variedade diferenciável geral.

É importante ressaltar que  $f_0$  deve ser um isomorfismo, caso contrário podem surgir ambigüidades. Para ver isso, vamos supor que  $f_0$  não possui correspondência um-para-um. Então, duas fibras em um ponto  $x_1 \in \mathbb{R}^3$  e  $x_2 \in \mathbb{R}^3$  podem ser identificadas com uma fibra em  $x \in \mathbb{M}^3$ . Claramente, isso não é possível porque supomos as duas fibras originais independentes umas das outras. A forma explícita de  $f_0$  pode ser facilmente obtida para um espaço-tempo  $n$ -dimensional, como descrito em [?],

$$L^\nu{}_\mu = \left( \frac{\tilde{g}}{g} \right)^{1/2n} g^{\nu\alpha} \tilde{g}_{\alpha\mu}, \quad (6.3)$$

onde  $g = |\det g_{\mu\nu}|$  e  $\tilde{g} = |\det \tilde{g}_{\mu\nu}|$ ,  $g_{\mu\nu}$  e  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  são respectivamente as métricas original

e efetiva. Obviamente que para o caso tridimensional teremos

$$L^\nu{}_\mu = \left(\frac{1}{g}\right)^{1/6} g^{\nu\alpha} \tilde{g}_{\alpha\mu}, \quad (6.4)$$

já que  $|\det g_{\mu\nu}| = 1$  e  $n = 3$ .

Uma outra importante observação com relação ao mapa  $f_2$  é que ele pode ser obtido a partir de valores específicos dos parâmetros que são funções de  $e$  e  $\omega$ . Isso significa que  $f_2$  não é uma equivalência direta entre  $\mathbf{R}$  e  $\text{Diff}(3)$ , mas um caso especial quando (4.29) é imposta. Notavelmente, todas as propriedades geométricas do fibrado principal  $(SU(2) \times \mathbf{R}, \mathbb{R}^3)$  podem ser usadas para construir o fibrado *coframe*  $(SO(3), \mathbb{M}^3)$ , incluindo as funções de transição difeomorfas.

No caso em que o termo de constante cosmológica é incluído, um mapa semelhante também pode ser definido. A diferença em relação ao caso anterior é que  $f_2 : S(3) \longrightarrow \text{Diff}(3)$ . Deste modo, (4.29) possui um apelo mais forte porque  $f_2$  gera difeomorfismos de um setor não-abeliano do grupo de calibre, que não é um subgrupo, mas um espaço *coset* simétrico.

Mais uma vez, ressaltamos que a identificação (4.12) só é possível se um parâmetro de massa estiver à nossa disposição. Em três dimensões, nós usamos a constante de acoplamento  $\kappa$ . Uma vez que este parâmetro é inerente à teoria, a dualidade Chern-Simons-gravidade pode ser realizada em qualquer escala da teoria, um recurso que não é possível em quatro dimensões (ver próxima seção). Além disso, é importante entender que a ação (2.25) é uma teoria em que a simetria de calibre não tem nada a ver com as propriedades geométricas do espaço-tempo. Somente após o mapeamento, a simetria de calibre é identificada com as propriedades geométricas do espaço base e os campos com os objetos geométricos que descrevem a dinâmica desta geometria. Por outro lado, uma vez que a teoria de Chern-Simons é finita [?, ?] em todas as ordens na teoria de perturbação, também é esperado que a dualidade seja mantida em nível quântico. No entanto, esta questão está fora do âmbito deste trabalho e fica como perspectiva futura.

Uma vez que a variedade inicial é um espaço euclidiano, também podemos interpretar a variedade resultante como um espaço efetivo deformado cujas propriedades

geométricas são definidas através de

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \delta_{ij} \theta_\mu^i \theta_\nu^j, \\ \Gamma_{\mu\nu}^\alpha &= \delta_{ij} g^{\alpha\beta} \theta_\beta^j \left( \partial_\mu \theta_\nu^i + A_{\mu k}^i \theta_\nu^k \right). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Nesse sentido, o campo de calibre é visualizado como “absorvido” pelo próprio espaço-tempo. Esta “absorção” deforma o espaço base e gera a geometria efetiva.

Mapeamentos alternativos que podem ser aplicados no mesmo contexto também são encontrados em [?].

### 6.1.2 Caso quadridimensional

Seguindo as ideias discutidas na Seção 6.1, podemos facilmente estendê-las ao presente caso. Primeiramente, vamos assumir que a ação de Yang-Mills (5.8) é construída sobre uma variedade euclidiana plana quadridimensional. A transição da ação (5.8) para (5.10) pode ser vista como uma dualidade entre uma ação de Yang-Mills no espaço-tempo euclidiano e uma ação da gravidade sobre uma variedade diferenciável qualquer. O campo  $Y$  é uma conexão sobre o fibrado principal de  $(SO(5), \mathbb{R}^4)$ . A ação de gravidade (5.10) descreve a geometrodinâmica de uma variedade em quatro dimensões  $\mathbb{M}^4$ , assim, a conexão de spin  $\omega$  é uma conexão ao longo do fibrado *coframe* ortogonal  $(SO(4), \mathbb{M}^4)$ .

Novamente, a contração de Inönü-Wigner e a quebra de simetria não serão utilizadas. Deste modo, agora lançamos mão de um mapa  $h : (SO(5), \mathbb{R}^4) \mapsto (SO(4), \mathbb{M}^4)$  que pode ser consistentemente definido através de uma série de mapas  $h_i$ . Para isso, precisamos de um isomorfismo entre os espaços base:  $h_0 : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{M}^4$ , da identidade entre o setor  $SO(4)$  do grupo de calibre e o grupo de isometrias locais  $SO(4)$  de  $\mathbb{M}^4$ :  $h_1 \equiv \text{id} : SO(4) \mapsto SO(4)$ , e do setor  $S(4) \equiv SO(5)/SO(4)$  do grupo de calibre mapeado nos difeomorfismos:  $h_2 : S(4) \mapsto \text{Diff}(4)$ . Além disso, o espaço das  $p$ -formas em  $\mathbb{R}^4$ , denotado por  $\Theta^p$ , pode ser identificado com o espaço das  $p$ -formas em  $\mathbb{M}^4$ , chamado de  $\tilde{\Theta}^p$ , por meio de  $h_3 : \Theta^p \mapsto \tilde{\Theta}^p$ . Finalmente, ao impor as relações (5.9) como uma condição extra para  $h_2$ , o fibrado *coframe*  $(SO(4), \mathbb{M}^4)$ , pode ser construído a partir de  $(SO(5), \mathbb{R}^4)$ . Devemos observar que  $h_0$  precisa ser um isomorfismo pelas mesmas razões do caso tridimensional. Obviamente que  $h_2$  não é

uma equivalência direta entre  $S(4)$  e  $\text{Diff}(4)$ , mas um caso especial quando as relações (5.56) e (5.57) são impostas.

Também podemos ver que a forma explícita para  $h_0$  pode ser computada através de (6.3), resultando em

$$L^\nu{}_\mu = \left(\frac{1}{g}\right)^{1/8} g^{\nu\alpha} \tilde{g}_{\alpha\mu}. \quad (6.6)$$

Outro ponto importante é a generalização de (6.5), dada por

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} &= \delta_{ab} \theta_\mu^a \theta_\nu^b, \\ \Gamma_{\mu\nu}^\alpha &= \delta_{ab} g^{\alpha\beta} \theta_\beta^b \left( \partial_\mu \theta_\nu^a + A_{\mu c}^a \theta_\nu^c \right). \end{aligned} \quad (6.7)$$

caracterizando a geometria efetiva do mapeamento tal que o campo de calibre é “absorvido” pelo espaço-tempo.

Novamente devemos observar que a identificação (5.9) somente é possível se um parâmetro de massa estiver a nossa disposição. Em quatro dimensões (contrastando com o caso em três dimensões), a ação (5.8) não possui parâmetro de massa, deste modo, para que o mapeamento seja realizado consistentemente, a teoria precisa desenvolver parâmetros de massa. Felizmente, as teorias de Yang-Mills descrevem alguns efeitos não-perturbativos que levam ao aparecimento de escalas de massa. Assim, o mapeamento só está garantido abaixo do regime de baixas energias.

## 6.2 Cohomologia

Visto que  $i_v$  é nilpotente,  $i_v^2 = 0$ , e as relações (4.43) podem ser tratadas por um problema de cohomologia. Vamos considerar a ação de  $i_v$  em uma  $p$ -forma arbitrária  $r^{(p)}$ ,

$$i_v r^{(p)} = 0. \quad (6.8)$$

A solução para  $r^{(p)}$  consistirá em uma parte não-trivial da cohomologia de  $i_v$  e uma parte trivial da cohomologia de  $i_v$ ,

$$r^{(p)} = r_o^{(p)} + i_v r^{(p+1)}, \quad (6.9)$$

onde  $r_o^{(p)}$  é uma  $p$ -forma com  $i_v r_o^{(p)} = 0 \mid r_o^{(p)} \neq i_v \tilde{r}^{(p+1)}$ ,  $r^{(p+1)}$  e  $\tilde{r}^{(p+1)}$  são  $(p+1)$ -formas. O método pode ser aplicado para todos os casos que nós estudamos. Ademais,

uma vez que as relações obtidas neste trabalho obedecem a covariância, do mesmo modo podemos impor covariância para a solução. Então,  $r_o^{(p)}$  e  $r^{(p+1)}$  podem ser construídos a partir dos ingredientes básicos  $R^{ij}$ ,  $T^i$ ,  $e^i$ ,  $\omega^{ij}$  e  $v = v_\mu dx^\mu$  e os invariantes  $\eta^{ij}$  e  $\epsilon^{ij\dots}$ . Além disso, trabalharemos no espaço dos polinômios locais não-integrados. Outra observação importante é que as relações não dependem explicitamente do operador Hodge dual, uma propriedade que pode ser estendida para as soluções que estamos procurando.

### 6.2.1 Chern-Simons em três dimensões

Primeiramente vamos começar com o caso de Chern-Simons para a simetria de Poincaré. A solução das relações (4.43) estão ligadas à solução do problema da cohomologia de  $i_v$  no espaço das 2-formas em três dimensões. No caso da primeira relação de (4.43), nós podemos reescrevê-la na forma geral

$$i_v P^{ij} = 0 . \quad (6.10)$$

Neste caso, temos que o polinômio mais geral nos campos e suas derivadas no espaço das 2-formas, que obedecem a covariância é dado por

$$P^{ij} = a_1 e^i e^j + a_2 R^{ij} + a_3 \epsilon^{ij}_k v e^k + a_4 \epsilon^{ij}_k T^k + i_v \Delta^{ij} , \quad (6.11)$$

onde nós usamos a antissimetria no lado direito,  $a_n$  são constantes arbitrárias e

$$\begin{aligned} \Delta^{ij} = & b_1 (e^i T^j - e^j T^i) + b_2 v e^i e^j + b_3 v R^{ij} + b_4 \epsilon^{ij}_k v T^k + \\ & + b_5 (\epsilon^i_{kl} R^{kl} e^j - \epsilon^j_{kl} R^{kl} e^i) + b_6 \epsilon^{ij}_k d v e^k , \end{aligned} \quad (6.12)$$

é a 3-forma<sup>1</sup> mais geral possível; além disso os  $b_n$ 's também são constantes arbitrárias. Agora, aplicando  $i_v$  em ambos os lados de (6.11) e usando as relações (6.10) e (4.32), encontramos

$$a_1 i_v e^i e^j - a_1 e^i i_v e^j + a_2 i_v R^{ij} + a_3 \epsilon^{ij}_k i_v v e^k - a_3 \epsilon^{ij}_k v i_v e^k + a_4 \epsilon^{ij}_k i_v T^k = 0 . \quad (6.13)$$

Caso não empreguemos as relações (4.43), observamos que  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$  e a cohomologia de  $i_v$  é trivial no espaço das 2-formas locais de *rank*-2 antissimétrica sobre

<sup>1</sup> A 3-forma de Chern-Simons não está presente porque ela não é antissimétrica.

o espaço tangente. Por outro lado, se impormos ambas relações de (4.43), podemos compará-las com (6.13), logo, os termos que acompanham  $a_2$  e  $a_4$  somem e a expressão (6.13) se reduz a

$$a_1 i_v e^i e^j - a_1 e^i i_v e^j + a_3 \epsilon^{ij}_k i_v v e^k - a_3 \epsilon^{ij}_k v i_v e^k = 0, \quad (6.14)$$

daí, temos que  $a_1 = a_3 = 0$ , e então

$$P^{ij} = a_2 R^{ij} + a_4 \epsilon^{ij}_k T^k + i_v \Delta^{ij}. \quad (6.15)$$

Consequentemente, podemos dizer que as relações (4.43) funcionam como condições de contorno não-triviais da cohomologia de  $i_v$ .

Para a segunda relação de (4.43), temos

$$i_v P^i = 0. \quad (6.16)$$

Daí,

$$P^i = a'_1 \epsilon^i_{jk} e^j e^k + a'_2 \epsilon^i_{jk} R^{jk} + a'_3 v e^i + a'_4 T^i + i_v \Delta^i, \quad (6.17)$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta^i &= b'_1 \epsilon^i_{jk} v e^j e^k + b'_2 \epsilon^i_{jk} v R^{jk} + b'_3 \epsilon^i_{jk} e^j T^k + b'_4 v T^i + b'_5 D T^i + \\ &+ b'_6 \epsilon^i_{jk} \left( \omega^j_l d\omega^{lk} + \frac{2}{3} \omega^j_l \omega^l_m \omega^{mk} \right). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Aplicando  $i_v$  em (6.17) e usando (6.16) e (4.32), chegamos à

$$2a'_1 \epsilon^i_{jk} i_v e^j e^k + a'_2 \epsilon^i_{jk} i_v R^{jk} + a'_3 i_v v e^i - a'_3 v i_v e^i + a'_4 i_v T^i = 0. \quad (6.19)$$

Novamente, quando não lançamos mão de (4.43),  $a'_1 = a'_2 = a'_3 = a'_4 = 0$ , e a cohomologia é trivial. Porém, se impormos (4.43), a expressão (6.19) se reduz a

$$2a'_1 \epsilon^i_{jk} i_v e^j e^k + a'_3 i_v v e^i - a'_3 v i_v e^i = 0, \quad (6.20)$$

e daí,  $a'_1 = a'_3 = 0$ . Finalmente

$$P^i = a'_2 \epsilon^i_{jk} R^{jk} + a'_4 T^i + i_v \Delta^i. \quad (6.21)$$

Para o caso onde temos a presença da constante cosmológica, as expressões (6.13) e (6.19) serão mantidas. Do mesmo modo, quando não usamos as relações

(4.71), a cohomologia é trivial. Todavia, ao aplicarmos (4.71), podemos compará-las com (6.13) e ver que o termo que acompanha  $a_4$  some e  $a_3 = 0$ , assim, a expressão (6.13) se torna

$$a_1 i_v e^i e^j - a_1 e^i i_v e^j + a_2 i_v R^{ij} = 0, \quad (6.22)$$

que é exatamente

$$i_v \left( R^{ij} + \frac{a_1}{a_2} e^i e^j \right) = 0. \quad (6.23)$$

Consequentemente,

$$a_2 = -\frac{1}{\Lambda^2} a_1. \quad (6.24)$$

Para a expressão (6.19) temos um caso completamente análogo, assim

$$\begin{aligned} a'_3 &= 0, \\ a'_2 &= -\frac{1}{\Lambda^2} a'_1. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} P^{ij} &= a_1 \left( e^i e^j - \frac{1}{\Lambda^2} R^{ij} \right) + a_4 \epsilon^{ij}_k T^k + i_v \Delta^{ij}, \\ P^i &= a'_1 \epsilon^i_{jk} \left( e^j e^k - \frac{1}{\Lambda^2} R^{jk} \right) + a'_4 T^i + i_v \Delta^i. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Podemos dizer então que as relações (4.43) (ou (4.71)) implicam em uma cohomologia não-trivial para  $i_v$ . Em outras palavras, as relações mencionadas funcionam como condições de contorno para a cohomologia do produto interior que passam a ser não-triviais devido ao uso de (4.43) e (4.71). Além disso, os termos  $i_v \Delta^{ij}$  e  $i_v \Delta^i$  podem sempre ser adicionados aos argumentos das relações (4.43) (ou (4.71)) porque eles pertencem ao setor trivial da cohomologia.

### 6.2.2 Yang-Mills em quatro dimensões

Uma análise similar pode ser feita para este caso, concentrando-se nas relações (5.58) e (5.59) e os objetos  $R^{ab}$ ,  $T^a$ ,  $\omega^{ab}$ ,  $e^a$ ,  $\eta^{ab}$  e  $\epsilon_{abcd}$ . Daí, também podemos definir o problema de cohomologia dado por

$$\begin{aligned} i_v P^{ab} &= 0, \\ i_v P^a &= 0. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Partindo da primeira equação de (6.27), podemos escrever a 2-forma covariante mais geral possível com os dois índices simetrizados no espaço tangente como

$$P^{ab} = a_1 e^a e^b + a_2 R^{ab} + a_3 \epsilon^{abcd} e_c e_d + a_4 \epsilon^{abcd} R_{cd} + i_v \Delta^{ab} , \quad (6.28)$$

onde

$$\begin{aligned} \Delta^{ab} = & b_1 v e^a e^b + b_2 v R^{ab} + b_3 \epsilon^{abcd} v e_c e_d + b_4 \epsilon^{abcd} v R_{cd} + b_5 (T^a e^b - T^b e^a) + \\ & + b_6 \epsilon^{abcd} e_c T_d + b_7 \epsilon^{abcd} \left( \omega_{ce} d\omega_d^e + \frac{2}{3} \omega_{ce} \omega_f^e \omega_d^f \right) . \end{aligned} \quad (6.29)$$

Aplicando  $i_v$  em ambos os lados da equação (6.28) e usando a primeira relação de (6.27) temos

$$a_1 i_v e^a e^b - a_1 e^a i_v e^b + a_2 i_v R^{ab} + a_3 \epsilon^{abcd} i_v e_c e_d - a_3 \epsilon^{abcd} e_c i_v e_d + a_4 \epsilon^{abcd} i_v R_{cd} = 0 . \quad (6.30)$$

Observe que, quando não usamos (5.58), a cohomologia é trivial, ou seja,  $a'_1 = a'_2 = a'_3 = a'_4 = 0$ . Se escolhermos impor as relações citadas, podemos reescrever (6.30) da seguinte forma

$$i_v (a_2 R^{ab} + a_1 e^a e^b) + i_v (a_4 \epsilon^{abcd} R_{cd} + a_3 \epsilon^{abcd} e_c e_d) = 0 , \quad (6.31)$$

e compará-la com (5.58), assim

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{3}{\Lambda^2} a_1 , \\ a_4 &= -\frac{3}{\Lambda^2} a_3 . \end{aligned} \quad (6.32)$$

Utilizando a mesma prescrição para  $P^a$ , obtemos a 2-forma mais geral possível

$$P^a = a'_1 T^a + a'_2 v e^a + i_v \Delta^a , \quad (6.33)$$

onde

$$\Delta^a = b'_1 v T^a + b'_2 R^{ab} e_b + b'_3 \epsilon^{abcd} e_b e_c e_d + b'_4 \epsilon^{abcd} R_{bc} e_d . \quad (6.34)$$

Novamente, quando aplicamos  $i_v$  em (6.33) e usamos a segunda relação de (6.27) obtemos

$$a'_1 T^a + a'_2 v e^a = 0 . \quad (6.35)$$

Note que se não usarmos (5.59), a cohomologia é trivial, logo,  $a'_1 = a'_2 = 0$ . No caso contrário, i.e., quando fazemos uso da relação (5.59), podemos compará-la com (6.35) e ver que  $a'_2 = 0$  e  $a'_1$  é arbitrário. Deste modo, (5.58) e (5.59) implicam na não-trivialidade da cohomologia do espaço das 2-formas locais de *rank* 1 e 2 sobre  $T_x(\mathbb{M}^4)$ , i.e.,

$$\begin{aligned} P^{ab} &= a_1 \left( e^a e^b - \frac{3}{\Lambda^2} R^{ab} \right) + a_3 \epsilon^{abcd} \left( e_c e_d - \frac{3}{\Lambda^2} R_{cd} \right) + i_v \Delta^{ab}, \\ P^a &= a'_1 T^a + i_v \Delta^a. \end{aligned} \quad (6.36)$$

Além disso, os termos  $i_v \Delta^{ab}$  e  $i_v \Delta^a$  também podem ser adicionados aos argumentos das relações (5.58) e (5.59) porque eles pertencem ao setor trivial da cohomologia.

## 7 Conclusões e perspectivas

Neste trabalho, nosso ponto de partida foi revisitar um teorema proposto por E. Witten [?] e estendê-lo ao caso *off-shell* para três dimensões e generalizá-lo a quatro dimensões tudo sob um espaço-tempo euclidiano. Daí mostraremos que é possível deformar esta variedade inicialmente plana e obter uma teoria gravitacional efetiva por meio de uma teoria de calibre, tendo em vista que o limite einsteiniano esteja neste escopo.

No Capítulo 4 partimos da ação de Chern-Simons em três dimensões para os grupos de Poincaré e de Sitter, respectivamente, e mostramos que o primeiro passo a ser tomado é decompor o campo de calibre original,  $Y$ , em termos das 1-formas  $A$  e  $\theta$  em cada setor dos grupos. Posteriormente, induzimos as ações gravitacionais de Einstein-Hilbert e Einstein-Hilbert com constante cosmológica no ínterim da associação dos campos de calibre com objetos geométricos [?] e as propriedades topológicas da teoria de Chern-Simons. Esta última nos permite descrever a constante de acoplamento em termos da constante gravitacional da teoria Newtoniana, fixando univocamente seu valor. Vale ressaltar que para a simetria de de Sitter, há uma necessidade em agregar a constante de acoplamento com a constante cosmológica. Veja também que as associações do parâmetro de acoplamento, respectivamente com a constante de Newton e a constante cosmológica, não é algo forçado, pois se observarmos bem as ações (4.11) e (4.61) antes do mapeamento, somos praticamente conduzidos a fazer uso deste tipo de escolha. Até porque, também precisamos ajustar as unidades da ação. Em seguida, trabalhamos com a derivada de Lie e as transformações de calibre restritas ao setor das translações para mostrar que as isometrias locais e os difeomorfismos são partes do grupo de calibre, perfazendo assim a construção de uma teoria de gravidade por meio de uma teoria do tipo calibre sem a utilização da contração de Inönü-Wigner. Isso implica que não há qualquer necessidade de deformarmos o grupo original ao grupo de Poincaré para garantir a formulação de uma teoria de gravidade a partir de uma teoria de calibre. Entretanto, quando adotamos um sistema *off-shell*, somos surpreendidos com duas relações (4.42), que obviamente carecerão de uma atenção bem especial. Durante todo este trabalho escolhemos  $T^i = 0$  por questões iniciais e deixamos uma análise

mais profunda somente para a primeira relação da equação (4.42). Neste ponto, surge a necessidade de classificar completamente os difeomorfismos, e para isso escolhemos o formalismo ADM [?, ?, ?, ?, ?, ?, ?] justamente pelo fato dele quebrar parcialmente os difeomorfismos. A partir daí, é a equação de Gauss que nos conduz à geometria associada ao parâmetro de difeomorfismos, i.e., quando  $i_v R^{ij} = 0$ , os difeomorfismos caracterizados por  $v^\mu$ , são tais que a 2-curvatura é completamente determinada pela curvatura extrínseca. Isso é consistente com o formalismo ADM uma vez que as folhas são superfícies puramente espaciais. Na primeira análise, vimos que o parâmetro  $v^0$  não é afetado pelas propriedades extrínsecas da folha, ou seja, ele é completamente invariante: Figura 1, o que é esperado no formalismo ADM, já que todos os pontos em uma folha são simultâneos. Em seguida, quando analisamos os difeomorfismos espaciais (pertencentes à superfície da folheação), observamos a influência direta da geometria extrínseca no transporte paralelo –  $v^P$  é determinado exclusivamente por correções de curvatura extrínseca, contrastando com o resultado anterior: Figura 2. Passando ao caso com constante cosmológica, temos um fator extra na descrição do parâmetro  $v^P$ , pois, além da curvatura extrínseca da folha, há também a influência direta da geometria do espaço de de Sitter. Em suma, temos um  $v^0$  fixo, enquanto  $v^P$  fica sujeito à geometria da folha. Deste modo, para caracterizar o parâmetro  $v^\mu$  sob o formalismo ADM, há uma necessidade de quebrá-lo ao subgrupo de difeomorfismos restrito às superfícies espaciais da folheação ADM. A partir daí podemos dizer que, dentro destas condições, uma gravidade isométrica local surge naturalmente, mostrando que de fato uma teoria de gravidade geometrodinâmica pode ser formulada a partir dos campos de calibre sem que o grupo original seja reduzido ao grupo de Poincaré.

No Capítulo 5 nossa ação inicial foi a de Yang-Mills em um espaço-tempo quadridimensional euclidiano para o grupo de calibre de Sitter também euclidiano. O mesmo exercício do Capítulo 4 para se obter uma teoria de gravidade também foi realizado. Desta vez, além do campo de calibre, a 2-forma intensidade de campo também foi decomposta em cada setor do grupo  $SO(5) = SO(4) \times S(4)$ . Contudo, para se fazer o contato com a gravidade, os campos  $A$  e  $\theta$  precisam dar lugar, respectivamente, ao objetos geométricos  $\omega$  e  $e$ , e isso foi feito quando admitimos uma escala de massa ( $\gamma$ ), já que em quatro dimensões não temos um parâmetro disponível inerente à teoria. Ademais, para que de fato emergja uma teoria de gravidade, somos levados a associar a

constante gravitacional de Newton aos parâmetros de acoplamento  $\kappa$  (inerente à teoria de Yang-Mills, mas adimensional) e  $\gamma$ , tal que este último é relacionado diretamente com a constante cosmológica da teoria e à constante de Newton. Por fim, a ação de Yang-Mills dá lugar a uma ação de gravidade efetiva contendo termos além de Einstein-Hilbert e constante cosmológica, a saber: temos o quadrado da curvatura e da torção.

Quando passamos às equações de campo (também fazendo torção nula) foi necessário lançarmos mão da redefinição do termo de constante cosmológica ( $\tilde{\Lambda}_{obs}^2 = \Lambda_{tqc}^2 + \Lambda^2$ ) [?, ?] para possivelmente compensar o valor previsto pela teoria quântica de campos, i.e., desejamos aproximar o valor do nosso modelo com o valor observacional. Posto isso, seguimos com a mesma prescrição feita no Capítulo 4 e mostramos que isometrias locais e difeomorfismos estão contidos no grupo de calibre, produzindo assim relações que também são estudadas via formalismo ADM. O resultado final segue sendo o mesmo encontrado em três dimensões com simetria de de Sitter, i.e., o parâmetro difeomorfo temporal não é afetado pela geometria extrínseca das hipersuperfícies espaciais, enquanto o contrário acontece quando tratamos do parâmetro espacial, o qual exhibe o mesmo resultado do caso tridimensional sob o grupo de de Sitter, com a única diferença no fator da constante cosmológica.

Concluimos então que os resultados encontrados em três (Chern-Simons) e quatro dimensões (Yang-Mills) generalizam a proposta de E. Witten [?] por tratar do mesmo problema de modo *off-shell*. Todavia, para se obter uma gravidade isométrica local a partir da associação dos setores do grupo de calibre com os difeomorfismos e as isometrias locais, sem usar as equações de movimento, é necessário quebrar os difeomorfismos totais sob o formalismo ADM. Assim, pode-se dizer que é possível construir uma teoria de gravidade via campos de Yang-Mills sem quebrar o grupo de calibre original por meio de algum parâmetro, como ocorre na contração de Inönü-Wigner.

Resumidamente, o núcleo do Capítulo 6 está na geometrização das teorias de calibre, as quais são descritas matematicamente por fibrados [?, ?]. A partir daí mostramos como os mapeamentos entre os fibrados principais e os associados constituem uma série de mapas que levam a construção formal das teorias de gravidade induzidas por teorias de calibre. Finalmente, também mostramos, tanto para três quanto para

quatro dimensões, que as respectivas relações (4.43) (ou (4.71)) e (5.58) e (5.59) implicam em uma cohomologia não-trivial para  $i_v$ , i.e., as relações mencionadas podem ser consideradas como condições de contorno para a cohomologia do produto interior e que passam a ser não-triviais devido ao uso de (4.43), (4.71), (5.58) e (5.59), lembrando que neste caso não impomos  $T = 0$ .

Como primeira perspectiva, pretendemos fazer o procedimento inverso: vamos escolher  $T \neq 0$  e  $R = 0$  dentro deste mesmo contexto fazendo uso da equação de Gauss com torção na folheação ADM. Em seguida vamos escolher tanto  $R$  quanto  $T$  diferentes de zero. Obviamente que compreender os parâmetros difeomorfos para casos em que há torção e curvatura juntos, pode nos levar a geometrias bem mais complexas.

Em segundo plano, pretendemos aumentar o grupo de calibre para formular uma teoria de gravidade que seja localmente isométrica, sem empregar a contração de Inönü-Wigner. Por exemplo, pensamos no grupo  $SL(5, \mathbb{R})$  [?], cuja decomposição produz dois setores a mais que estão associados aos campos de matéria, assim, teríamos uma ação gravitacional mais geral do que àquela encontrada no Capítulo 5. Consoante a isso, é possível que as relações (4.43) exibam termos de matéria, o que demandaria um estudo mais rigoroso, provavelmente sob os aspectos de outros tipos de folheações do espaço-tempo.

É importante deixar claro que apesar deste trabalho ser totalmente clássico, a ação de gravidade resultante da ação de Yang-Mills está pronta para ser quantizada. Obviamente que essa escolha não foi aleatória, já que a teoria de Yang-Mills pura atende as propriedades de invariância por transformações de Poincaré, renormalizabilidade, invariância de calibre, localidade e conservação de probabilidades (para grupos compactos). Ademais, nesse escopo quântico, também está em nossos planos futuros a investigação sobre os valores numéricos da constante cosmológica deste modelo.

Finalmente, temos a pretensão de aplicar o método utilizado aqui neste trabalho para estudar outras ações topológicas, como por exemplo, Pontryagin e Nieh-Yang em quatro dimensões.

## Referências

- 1 ITZYKSON, C.; ZUBER, J. B. *Quantum Field Theory*. New York: McGraw-Hill, 1980. (International Series In Pure and Applied Physics). ISBN 9780486445687, 0486445682. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1063/1.2916419>>. Nenhuma citação no texto.
- 2 KAKU, M. *Quantum field theory: A Modern introduction*. [S.l.: s.n.], 1993. Nenhuma citação no texto.
- 3 WEINBERG, S. *The Quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2005. ISBN 9780521670531, 9780511252044. Nenhuma citação no texto.
- 4 WEINBERG, S. *The quantum theory of fields. Vol. 2: Modern applications*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013. ISBN 9781139632478, 9780521670548, 9780521550024. Nenhuma citação no texto.
- 5 GAUL, M.; ROVELLI, C. Loop quantum gravity and the meaning of diffeomorphism invariance. *Lect. Notes Phys.*, v. 541, p. 277–324, 2000. [,277(1999)]. Nenhuma citação no texto.
- 6 ROVELLI, C. *Quantum gravity*. [s.n.], 2004. Disponível em: <<http://www.cambridge.org/uk/catalogue/catalogue.asp?isbn=0521837332>>. Nenhuma citação no texto.
- 7 ASHTEKAR, A.; REUTER, M.; ROVELLI, C. From General Relativity to Quantum Gravity. 2014. Nenhuma citação no texto.
- 8 JULVE, J.; TONIN, M. Quantum Gravity with Higher Derivative Terms. *Nuovo Cim.*, B46, p. 137–152, 1978. Nenhuma citação no texto.
- 9 ASOREY, M.; LOPEZ, J. L.; SHAPIRO, I. L. Some remarks on high derivative quantum gravity. *Int. J. Mod. Phys.*, A12, p. 5711–5734, 1997. Nenhuma citação no texto.
- 10 CANDELAS, P. et al. Vacuum Configurations for Superstrings. *Nucl. Phys.*, B258, p. 46–74, 1985. Nenhuma citação no texto.
- 11 DUFF, M. J. et al. Superstrings in D=10 from Supermembranes in D=11. *Phys. Lett.*, B191, p. 70, 1987. Nenhuma citação no texto.

- 12 DUFF, M. J. M theory (The Theory formerly known as strings). *Int. J. Mod. Phys.*, A11, p. 5623–5642, 1996. [Nucl. Phys. Proc. Suppl.52,no.1-2,314(1997)]. Nenhuma citação no texto.
- 13 POLCHINSKI, J. *String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2007. ISBN 9780511252273, 9780521672276, 9780521633031. Nenhuma citação no texto.
- 14 BARCELO, C.; VISSER, M.; LIBERATI, S. Einstein gravity as an emergent phenomenon? *Int. J. Mod. Phys.*, D10, p. 799–806, 2001. Nenhuma citação no texto.
- 15 PADMANABHAN, T. Gravity as an emergent phenomenon. *Int. J. Mod. Phys.*, D17, p. 591–596, 2008. Nenhuma citação no texto.
- 16 UTIYAMA, R. Invariant theoretical interpretation of interaction. *Phys. Rev.*, v. 101, p. 1597–1607, 1956. Nenhuma citação no texto.
- 17 KIBBLE, T. W. B. Lorentz invariance and the gravitational field. *J. Math. Phys.*, v. 2, p. 212–221, 1961. Nenhuma citação no texto.
- 18 SCIAMA, D. W. The Physical structure of general relativity. *Rev. Mod. Phys.*, v. 36, p. 463–469, 1964. [Erratum: *Rev. Mod. Phys.*36,1103(1964)]. Nenhuma citação no texto.
- 19 HEHL, F. W.; KERLICK, G. D.; HEYDE, P. V. D. On a New Metric Affine Theory of Gravitation. *Phys. Lett.*, B63, p. 446–448, 1976. Nenhuma citação no texto.
- 20 MACDOWELL, S. W.; MANSOURI, F. Unified Geometric Theory of Gravity and Supergravity. *Phys. Rev. Lett.*, v. 38, p. 739, 1977. [Erratum: *Phys. Rev. Lett.*38,1376(1977)]. Nenhuma citação no texto.
- 21 TSEYTLIN, A. A. On the Poincare and De Sitter Gauge Theories of Gravity With Propagating Torsion. *Phys. Rev.*, D26, p. 3327, 1982. Nenhuma citação no texto.
- 22 PAGELS, H. R. Gravitational Gauge Fields and the Cosmological Constant. *Phys. Rev.*, D29, p. 1690, 1984. Nenhuma citação no texto.
- 23 GRONWALD, F.; HEHL, F. W. On the gauge aspects of gravity. In: *Quantum gravity. Proceedings, International School of Cosmology and Gravitation, 14th Course, Erice, Italy, May 11-19, 1995*. [s.n.], 1995. p. 148–198. Disponível em: <<http://alice.cern.ch/format/showfull?sysnb=0217544>>. Nenhuma citação no texto.
- 24 BLAGOJEVIC, M. *Gravitation and gauge symmetries*. [S.l.: s.n.], 2002. Nenhuma citação no texto.

- 25 BLAGOJEVIĆ, M.; HEHL, F. W. (Ed.). *Gauge Theories of Gravitation*. Singapore: World Scientific, 2013. ISBN 9781848167261. Disponível em: <<http://www.worldscientific.com/worldscibooks/10.1142/p781>>. Nenhuma citação no texto.
- 26 WITTEN, E. (2+1)-Dimensional Gravity as an Exactly Soluble System. *Nucl. Phys.*, B311, p. 46, 1988. Nenhuma citação no texto.
- 27 ACHUCARRO, A.; TOWNSEND, P. K. A Chern-Simons Action for Three-Dimensional anti-De Sitter Supergravity Theories. *Phys. Lett.*, B180, p. 89, 1986. Nenhuma citação no texto.
- 28 INONU, E.; WIGNER, E. P. On the Contraction of groups and their representations. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, v. 39, p. 510–524, 1953. Nenhuma citação no texto.
- 29 GILMORE, R. *Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications*. [S.l.: s.n.], 1974. ISBN 9780471301790. Nenhuma citação no texto.
- 30 DRECHSLER, W. Linearly and Nonlinearly Transforming Fields on Homogeneous Spaces of the (4,1) De Sitter Group. *J. Math. Phys.*, v. 26, p. 41, 1985. Nenhuma citação no texto.
- 31 MAHATO, P. De Sitter group and Einstein-Hilbert Lagrangian. *Phys. Rev.*, D70, p. 124024, 2004. Nenhuma citação no texto.
- 32 SOBREIRO, R. F.; TOMAZ, A. A.; OTOYA, V. J. V. de Sitter gauge theories and induced gravities. *Eur. Phys. J.*, C72, p. 1991, 2012. Nenhuma citação no texto.
- 33 ARNOWITT, R. L.; DESER, S.; MISNER, C. W. Dynamical Structure and Definition of Energy in General Relativity. *Phys. Rev.*, v. 116, p. 1322–1330, 1959. Nenhuma citação no texto.
- 34 MISNER, C. W.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. *Gravitation*. San Francisco: W. H. Freeman, 1973. Nenhuma citação no texto.
- 35 JACOBSON, T.; SMOLIN, L. Covariant Action for Ashtekar's Form of Canonical Gravity. *Class. Quant. Grav.*, v. 5, p. 583, 1988. Nenhuma citação no texto.
- 36 ROVELLI, C. Ashtekar formulation of general relativity and loop space nonperturbative quantum gravity: A Report. *Class. Quant. Grav.*, v. 8, p. 1613–1676, 1991. Nenhuma citação no texto.
- 37 LUSANNA, L.; RUSSO, S. Tetrad gravity. 1. A New formulation. 1998. Nenhuma citação no texto.

- 38 MEI, T. On the vierbein formalism of general relativity. *Gen. Rel. Grav.*, v. 40, p. 1913–1945, 2008. Nenhuma citação no texto.
- 39 ALEXANDROV, S.; SPEZIALE, S. First order gravity on the light front. *Phys. Rev.*, D91, n. 6, p. 064043, 2015. Nenhuma citação no texto.
- 40 YANG, C.-N.; MILLS, R. L. Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance. *Phys. Rev.*, v. 96, p. 191–195, 1954. Nenhuma citação no texto.
- 41 DAS, A. *Lectures on quantum field theory*. [S.l.: s.n.], 2008. Nenhuma citação no texto.
- 42 RUBAKOV, V. A. *Classical theory of gauge fields*. [S.l.: s.n.], 2002. Nenhuma citação no texto.
- 43 POKORSKI, S. *GAUGE FIELD THEORIES*. Cambridge University Press, 2005. ISBN 9780511037801, 9780521478168. Disponível em: <<http://www.cambridge.org/uk/catalogue/catalogue.asp?isbn=0521265371>>. Nenhuma citação no texto.
- 44 HOOFT, G. 't (Ed.). *50 years of Yang-Mills theory*. [s.n.], 2005. Disponível em: <<http://www.worldscibooks.com/physics/5601.html>>. Nenhuma citação no texto.
- 45 NAKAHARA, M. *Geometry, topology and physics*. [S.l.: s.n.], 2003. Nenhuma citação no texto.
- 46 BERTLMANN, R. A. *Anomalies in quantum field theory*. [S.l.: s.n.], 1996. Nenhuma citação no texto.
- 47 KIM, Y. S.; NOZ, M. E. *THEORY AND APPLICATIONS OF THE POINCARÉ GROUP*. [S.l.: s.n.], 1986. Nenhuma citação no texto.
- 48 VARADARAJAN, V. S. *Lie Groups, Lie Algebras and their Representations*. [S.l.: s.n.], 1974. Nenhuma citação no texto.
- 49 HUANG, J. S. *Lectures on representation theory*. [S.l.: s.n.], 1999. Nenhuma citação no texto.
- 50 BUMP, D. *Lie groups*. [S.l.: s.n.], 2013. Nenhuma citação no texto.
- 51 ZANELLI, J. Lecture notes on Chern-Simons (super-)gravities. Second edition (February 2008). In: *Proceedings, 7th Mexican Workshop on Particles and Fields (MWPF 1999)*. [S.l.: s.n.], 2005. Nenhuma citação no texto.
- 52 HOFMANN, K. H.; MORRIS, S. A. *The Structure of Compact Groups*. [S.l.: s.n.], 2013. Nenhuma citação no texto.

- 53 CHEVALLEY, C. *Theory of Lie Groups I*. [S.l.: s.n.], 1946. Nenhuma citação no texto.
- 54 COTTA-RAMUSINO, P.; REINA, C. THE ACTION OF THE GROUP OF BUNDLE AUTOMORPHISMS ON THE SPACE OF CONNECTIONS AND THE GEOMETRY OF GAUGE THEORIES. *J. Geom. Phys.*, v. 1N3, p. 121–155, 1985. Nenhuma citação no texto.
- 55 NASH, C.; SEN, S. *TOPOLOGY AND GEOMETRY FOR PHYSICISTS*. [S.l.: s.n.], 1983. Nenhuma citação no texto.
- 56 FRANKEL, T. *The geometry of physics: An introduction*. [S.l.: s.n.], 1997. Nenhuma citação no texto.
- 57 TRAUTMAN, A. FIBER BUNDLES, GAUGE FIELDS, AND GRAVITATION. In *\*Held.A.(Ed.): General Relativity and Gravitation*, v. 1\*, p. 287–308, 1981. Nenhuma citação no texto.
- 58 DANIEL, M.; VIALLET, C. M. The Geometrical Setting of Gauge Theories of the Yang-Mills Type. *Rev. Mod. Phys.*, v. 52, p. 175, 1980. Nenhuma citação no texto.
- 59 BONORA, L.; COTTA-RAMUSINO, P. Some Remarks on BRS Transformations, Anomalies and the Cohomology of the Lie Algebra of the Group of Gauge Transformations. *Commun. Math. Phys.*, v. 87, p. 589, 1983. Nenhuma citação no texto.
- 60 MCINNES, B. ON THE SIGNIFICANCE OF THE COMPATIBILITY CONDITION IN GAUGE THEORIES OF THE POINCARÉ GROUP. *Class. Quant. Grav.*, v. 1, p. 1–5, 1984. Nenhuma citação no texto.
- 61 FEYNMAN, R. P.; HIBBS, A. R. *Quantum mechanics and path integrals*. [S.l.: s.n.], 1965. 365 p. p. (International series in pure and applied physics). Nenhuma citação no texto.
- 62 DAS, A. K. Field theory: A Path integral approach. *World Sci. Lect. Notes Phys.*, v. 52, p. 1–399, 1993. Nenhuma citação no texto.
- 63 SOBREIRO, R. F.; OTOYA, V. J. V. On the topological reduction from the affine to the orthogonal gauge theory of gravity. *J. Geom. Phys.*, v. 61, p. 137–150, 2011. Nenhuma citação no texto.
- 64 FADDEEV, L. D.; POPOV, V. N. Feynman Diagrams for the Yang-Mills Field. *Phys. Lett.*, B25, p. 29–30, 1967. Nenhuma citação no texto.

- 65 SOBREIRO, R. F. et al. Remarks on the Gribov horizon and dynamical mass generation in Euclidean Yang-Mills theories. *AIP Conf. Proc.*, v. 739, p. 455–457, 2005. [455(2004)]. Nenhuma citação no texto.
- 66 DUDAL, D. et al. The Gribov parameter and the dimension two gluon condensate in Euclidean Yang-Mills theories in the Landau gauge. *Phys. Rev.*, D72, p. 014016, 2005. Nenhuma citação no texto.
- 67 GROSS, D. J.; WILCZEK, F. Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories. *Phys. Rev. Lett.*, v. 30, p. 1343–1346, 1973. Nenhuma citação no texto.
- 68 POLITZER, H. D. Reliable Perturbative Results for Strong Interactions? *Phys. Rev. Lett.*, v. 30, p. 1346–1349, 1973. Nenhuma citação no texto.
- 69 GRIBOV, V. N. Quantization of Nonabelian Gauge Theories. *Nucl. Phys.*, B139, p. 1, 1978. Nenhuma citação no texto.
- 70 DELL'ANTONIO, G.; ZWANZIGER, D. Ellipsoidal Bound on the Gribov Horizon Contradicts the Perturbative Renormalization Group. *Nucl. Phys.*, B326, p. 333–350, 1989. Nenhuma citação no texto.
- 71 DELL'ANTONIO, G.; ZWANZIGER, D. Every gauge orbit passes inside the Gribov horizon. *Commun. Math. Phys.*, v. 138, p. 291–299, 1991. Nenhuma citação no texto.
- 72 SINGER, I. M. Some Remarks on the Gribov Ambiguity. *Commun. Math. Phys.*, v. 60, p. 7–12, 1978. Nenhuma citação no texto.
- 73 LABASTIDA, J. M. F. Chern-Simons gauge theory: Ten years after. p. 1–40, 1998. [AIP Conf. Proc.484,1(1999)]. Nenhuma citação no texto.
- 74 ZANELLI, J. Uses of Chern-Simons actions. *AIP Conf. Proc.*, v. 1031, p. 115–129, 2008. Nenhuma citação no texto.
- 75 ZANELLI, J. Chern-Simons Forms in Gravitation Theories. *Class. Quant. Grav.*, v. 29, p. 133001, 2012. Nenhuma citação no texto.
- 76 HASSAINE, M. *Chern-Simons (super)gravity*. Hackensack: World Scientific, 2016. (100 years of general relativity, v. 2). ISBN 9789814730938. Nenhuma citação no texto.
- 77 GOCKELER, M.; SCHUCKER, T. *DIFFERENTIAL GEOMETRY, GAUGE THEORIES, AND GRAVITY*. Cambridge University Press, 1989. ISBN 9780521378215, 9781139242226. Disponível em: <<http://www.slac.stanford.edu/spires/find/books/www?cl=QC20:G6>>. Nenhuma citação no texto.

- 78 EGUCHI, T.; GILKEY, P. B.; HANSON, A. J. Gravitation, Gauge Theories and Differential Geometry. *Phys. Rept.*, v. 66, p. 213, 1980. Nenhuma citação no texto.
- 79 D'INVERNO, R. *Introducing Einstein's relativity*. [S.l.: s.n.], 1992. Nenhuma citação no texto.
- 80 WALD, R. M. *General Relativity*. [S.l.: s.n.], 1984. Nenhuma citação no texto.
- 81 CARMO, M. P. do. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. [S.l.: s.n.], 1976. ISBN 0132125897. Nenhuma citação no texto.
- 82 KOBAYASHI, S.; NOMIZU, K. *Foundations of differential geometry, Vol. 1*. [S.l.: s.n.], 1963. Nenhuma citação no texto.
- 83 CARROLL, S. M. *Spacetime and geometry: An introduction to general relativity*. [s.n.], 2004. ISBN 0805387323, 9780805387322. Disponível em: <http://www.slac.stanford.edu/spires/find/books/www?cl=QC6:C37:2004>. Nenhuma citação no texto.
- 84 HILBERT, D. Die Grundlagen der Physik. 1. *Gott. Nachr.*, v. 27, p. 395–407, 1915. Nenhuma citação no texto.
- 85 LOVELOCK, D. The Einstein tensor and its generalizations. *J. Math. Phys.*, v. 12, p. 498–501, 1971. Nenhuma citação no texto.
- 86 MARDONES, A.; ZANELLI, J. Lovelock-Cartan theory of gravity. *Class. Quant. Grav.*, v. 8, p. 1545–1558, 1991. Nenhuma citação no texto.
- 87 RYDER, L. H. *QUANTUM FIELD THEORY*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1996. ISBN 9780521478144, 9781139632393. Nenhuma citação no texto.
- 88 THIRRING, E. H. W. *Classical Mathematical Physics: Dynamical Systems and Field Theories*. 3rd. ed. [S.l.]: Springer, 2003. ISBN 9780387406152, 0387406158. Nenhuma citação no texto.
- 89 NIETO, J. A.; OBREGON, O.; SOCORRO, J. The Gauge theory of the de Sitter group and Ashtekar formulation. *Phys. Rev.*, D50, p. R3583–R3586, 1994. Nenhuma citação no texto.
- 90 CANTCHEFF, M. B. General relativity as a (constrained) Yang-Mills's theory and a novel gravity with torsion. *Gen. Rel. Grav.*, v. 34, p. 1781–1792, 2002. Nenhuma citação no texto.
- 91 CARMELI, M. *Group theory and general relativity: Representations of the Lorentz group and their applications to the gravitational field*. [S.l.: s.n.], 2000. Nenhuma citação no texto.

- 92 SANCHEZ, M. Remarks on the notion of global hyperbolicity. 2007. [EAS Publ. Ser.30,201(2008)]. Nenhuma citação no texto.
- 93 WEINBERG, S. The Cosmological Constant Problem. *Rev. Mod. Phys.*, v. 61, p. 1–23, 1989. Nenhuma citação no texto.
- 94 SHAPIRO, I. L.; SOLA, J. On the possible running of the cosmological 'constant'. *Phys. Lett.*, B682, p. 105–113, 2009. Nenhuma citação no texto.
- 95 DELDUC, F. et al. Exact Scale Invariance of the Chern-Simons Theory in the Landau Gauge. *Nucl. Phys.*, B346, p. 313–328, 1990. Nenhuma citação no texto.
- 96 PIGUET, O.; SORELLA, S. P. Algebraic renormalization: Perturbative renormalization, symmetries and anomalies. *Lect. Notes Phys.*, M28, p. 1–134, 1995. Nenhuma citação no texto.
- 97 OBUKHOV, Yu. N. Gauge fields and space-time geometry. *Theor. Math. Phys.*, v. 117, p. 1308–1318, 1998. [Teor. Mat. Fiz.117,249(1998)]. Nenhuma citação no texto.
- 98 ASSIMOS, T. S. et al. Dark gravity from a renormalizable gauge theory. 2013. Nenhuma citação no texto.