

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

TESE DE DOUTORADO

---

**Uma Teoria de Gravidade Induzida:  
aspectos quânticos e clássicos**

---

Anderson Alves Tomaz



**INSTITUTO DE FÍSICA**  
Universidade Federal Fluminense

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

TESE DE DOUTORADO

---

# Uma Teoria de Gravidade Induzida: aspectos quânticos e clássicos

---

**Anderson Alves Tomaz**

**Orientador: Dr. Rodrigo Ferreira Sobreiro**

Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Física.



**INSTITUTO DE FÍSICA**  
Universidade Federal Fluminense

*Physical laws must have mathematical beauty.*

Paul Dirac

*Seriously, there are really just a few PhD fellowships to study Quantum Gravity, there are even less postdoctoral positions and the possibilities to get a tenure are basically the same as winning the lottery. So you if you decide to study Quantum Gravity, please do it if and only if this is really what makes you happy.*

Francesca Vidotto

*Okay. Alright, the way I see it, there's only two possible outcomes. Either I make it down there in one piece and I have one hell of a story to tell, or I burn up in the next ten minutes. Either way, whichever way, no harm, no foul! Because either way, it'll be one hell of a ride.*

Ryan Stone

(Character performed by Sandra Bullock in Gravity)

## Resumo

Construímos teorias de gravidade induzidas a partir de teorias de Yang-Mills para os grupos  $SO(m, n)$  e  $SL(5, \mathbb{R})$ , onde  $m \in \{0, 1, 2\}$  e  $m + n = 5$ . No cerne destas construções empregamos um mecanismo que envolve a quebra dinâmica de simetria e a contração do grupo inicial. Através das equações de *gap* de massa a 1 e 2-laços, estimamos valores para o parâmetro de massa, o qual está envolvido no mecanismo. Este parâmetro, juntamente com parâmetro de acoplamento de Yang-Mills, determinam a constante gravitacional de Newton na teoria de gravidade induzida. Estimativas também foram realizadas para a constante cosmológica renormalizada da teoria, assim como para o corte na escala de energia, o qual consiste em um marcador para a transição entre os regimes ultravioleta e infravermelho da teoria. Estudamos também o aspectos clássicos da teoria de gravidade induzida, onde realizamos um estudo cosmológico preliminar e analisamos soluções esfericamente simétricas estáticas. Para o estudo cosmológico mostramos que uma fase de expansão acelerada pode ser obtida usando as equações de campo da teoria de gravidade induzida para o grupo  $SO(5)$ . Mostramos também ser possível conectar as equações cosmológicas da presente teoria com as do modelo  $\Lambda$ CDM. No caso das soluções esfericamente simétricas estáticas, demonstramos soluções para o grupo  $SO(5)$  perante dois regimes: (i) com alta influência do termo quadrático de curvatura; (ii) tratando o termo quadrático de curvatura como uma perturbação. Usando tais soluções, perturbativa e exata, determinamos os horizontes de eventos e realizamos um breve estudo da temperatura e da entropia destes horizontes.

## Abstract

We built induced gravity theories from pure Yang-Mills theories for  $SO(m, n)$  and  $SL(5, \mathbb{R})$  groups, where  $m \in \{0, 1, 2\}$  and  $m + n = 5$ . In the kernel of these constructions, we have employed a mechanism that encodes the dynamical symmetry breaking and the contraction of the initial group. Through the mass gap equation at 1 and 2-loops, we have estimated numerical values for mass parameter related with the mechanism. This parameter, together with the Yang-Mills coupling parameter, determines the Newton's gravitational constant in the induced gravity theory. We also have provided estimates for the renormalized cosmological constant of the theory even as the cut-off in the energy scale, which consists in a landmark for the transition between the ultraviolet and infrared sectors of the theory. Furthermore, we have studied the classical aspects of the induced gravity, namely, a preliminary cosmological study and spherically symmetric static solutions. For the cosmological study, we have demonstrated that an accelerated phase of expansion can be obtained from the field equations of the induced gravity theory for the  $SO(5)$  group. We also showed to be possible to connect the cosmological equations of the present theory of gravity with those from  $\Lambda$ CDM model. In the case of spherically symmetric static solutions, we have found solutions for the induced gravity originated from the Yang-Mills theory for the  $SO(5)$  group under two regimes: (i) with high influence of the quadratic term of curvature; (ii) dealing with the quadratic term of curvature as a perturbation. Using such solutions, perturbative and exact, we have calculated the event horizons and we briefly analyzed the thermodynamics associated with these horizons.

# Agradecimentos

Dedico esta tese à minha amada esposa Flaviane Mendes de Oliveira Tomaz por todos os momentos que esteve comigo durante essa longa e árdua caminhada. Porque você foi (e sempre será) a única que, desde o momento em que era apenas um sonho, acreditou e lutou por esse longo projeto de me tornar um cientista. Você não apenas é a completude da minha existência, mas infinitamente além disso, você é a extensão de toda a minha vida. O lado melhor de tudo que vivi até agora e o que terei por viver em dias futuros. Simplesmente, amo você até o infinito... E por que não? Um pouquinho mais...

Aos meus pais, Maria Isabel Tomaz e Carlos Dibo Tomaz. Por mais que nunca tenham compreendido muito bem as minhas escolhas, nunca me impediram de prosseguir com meus estudos. Como parte de um país pobre e desigual, incluídos em uma nação com recursos limitados, fico impressionado como meus pais me deixaram trocar a enxada por um caderno e um lápis, quando, de fato, o que eles precisavam naquela época era de mais um trabalhador para ajudar no sustento da família. Sou grato a eles, mesmo que muitas vezes não demonstre o suficiente.

Aos meus irmãos Erick Tomaz e Ébert Tomaz (o Cabeça), pela força que deram durante minha jornada, assim como pelas várias cervejas e papos. Sinto falta desses momentos e buscarei retomá-los um dia.

Ao Cristiano Jorge Riger, praticamente e teoricamente, um irmão para mim.

Agradeço ao meu orientador Prof. Rodrigo Ferreira Sobreiro por todos os ensinamentos que contribuíram para a elaboração desta tese. Grande parte de me tornar pesquisador se deve aos grandes conselhos, mesmo que alguns em poucos minutos de conversa durante um café. Também não há como não mencionar os valiosos empurrões em momentos que eu achava que deveria entender o átomo antes de fazer o bolo, mas que a ciência jamais me daria esse tempo e a comunidade científica queria o bolo. Logo, impossível esquecer as frases "Faça contas!", "Vá aprendendo durante o processo!". Isso me moldou e, certamente, moldará meus futuros estudantes. Obrigado, *Boss!*

Ao Antônio Duarte pela parceria durante a nossa caminhada no doutorado. Desde matérias que cumprimos juntos até exames de qualificação que compartilhamos. Entretanto, o que mais importa é o quanto aprendi nas nossas discussões de trabalhos e nossas conversas sobre gravidade quântica, vida na ciência e outras pontas mais.

Ao Tiago Ribeiro, não somente pelo convívio, o qual levou o mesmo a me aturar durante todos esses anos, mas também pelas discussões sobre física e filosofia, sendo esta última, algo que sempre nos cobramos de esturdar mais.

Ao Thiago Caramês pelos sinceros e leais anos de convívio no IF-UFF. Sempre sinto falta das nossas discussões sobre política, religião, física, ... Ou seja, qualquer coisa que pairasse na nossa frente, ela seria tratada com uma discussão.

Ao Leonardo Justino, tanto pela lealdade quanto pelos vários anos compartilhando os mesmos 2 metros quadrados no 1P do IF.

Ao Guilherme Sadovski pela colaboração no trabalho sobre a cosmologia e pelas várias cervejas.

À Fernanda Alvarim pela colaboração no trabalho sobre os horizontes de eventos. Claro, também pelas várias caronas e idas na padaria para comer pão com mortadela.

Ao Prof. Felipe Tovar Falciano pela soberba colaboração e orientação durante a realização do trabalho sobre a cosmologia. Aprendi muito naquelas horas e horas de reuniões no CBPF.

Aos meus grande professores Sebastião Dias e José Helayël-Neto pelos grandes ensinamentos sobre física e vida. A dedicação destes professores me inspiraram e sempre me guiarão.

À Fernanda Caetano e Valéria Wanda, não somente pela ajuda com a parte burocrática, mas também pela amizade e o carinho que elas sempre mostraram.

Aos meus outros colegas de IF que tornaram o ambiente do IF sempre agradável. Não citarei nenhum nome por não querer ser injusto em esquecer alguém que jamais poderia ser esquecido.

Agradecimentos sinceros e necessários aos cidadãos brasileiros, cujo o dinheiro de seus impostos oriundos de longas jornadas de trabalho, foram destinados á minha formação acadêmica. Uma população de milhões onde poucos sabem desse fato, mas que conscientemente tomo como obrigação fazer cada centavo valer a pena em forma de contribuição para a ciência brasileira.

Agradeço à Proppi-UFF, ao Programa de Pós-Graduação do IF-UFF e à Capes pelo suporte financeiro durante esses anos de mestrado e doutorado.

# Índice

<b>Resumo</b>	<b>ii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>iv</b>
<b>Índice</b>	<b>vi</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Teorias de Yang-Mills e teorias de gravidade</b>	<b>6</b>
2.1 Teorias de Yang-Mills . . . . .	6
2.1.1 A ação de Yang-Mills . . . . .	6
2.1.2 Propriedades físicas . . . . .	9
2.2 Teoria de gravidade no formalismo de segunda ordem . . . . .	10
2.3 Teoria de gravidade no formalismo de primeira ordem . . . . .	14
2.3.1 Vierbein . . . . .	15
2.3.2 Conexão de spin . . . . .	17
2.3.3 Estrutura do formalismo de primeira ordem . . . . .	18
2.3.4 Teorias generalizadas de gravidade no formalismo de primeira ordem . . . . .	20
2.3.4.1 O teorema de Lovelock . . . . .	20
2.3.4.2 A teoria de Mardones-Zanelli . . . . .	21
<b>3 Gravidade induzida para o grupo <math>SO(m, n)</math>: uma revisão</b>	<b>23</b>
3.1 Teoria de Yang-Mills para os grupos de de Sitter . . . . .	23
3.1.1 Estrutura do grupo $SO(m, n)$ . . . . .	24
3.2 A contração de Inönü-Wigner . . . . .	26
3.3 Redefinição, contração e quebra dinâmica de simetria . . . . .	28
3.4 Gravidade induzida . . . . .	30
3.4.1 Equações de campo . . . . .	32



3.4.2	Aspectos formais do mapeamento . . . . .	37
3.4.3	Interlúdio: Uma analogia entre cromodinâmica quântica e gravidade . . . . .	40
<b>4</b>	<b>Estimativas: O parâmetro de Gribov, a constante gravitacional de Newton e a constante cosmológica</b>	<b>43</b>
4.1	Parâmetros <i>running</i> e estimativas a 1-laço . . . . .	44
4.1.1	A equação de <i>gap</i> de massa a 1-laço e o parâmetro de Gribov . . . . .	45
4.1.2	Estimativas numéricas a 1-laço . . . . .	49
4.1.2.1	Métodos de aprimoramento . . . . .	51
4.1.3	$\overline{\Lambda}^2$ como a energia de Planck . . . . .	56
4.2	Estimativas numéricas a 2-laços . . . . .	56
4.2.1	Função $\beta$ a 2-laços . . . . .	57
4.2.2	Equação de <i>gap</i> de massa a 2-laços . . . . .	58
4.2.3	Estimativas numéricas para a constante cosmológica renormalizada e o corte da escala de energia . . . . .	60
4.2.4	Eliminação mais simples dos logaritmos . . . . .	61
4.3	A escolha do parâmetro de massa . . . . .	62
<b>5</b>	<b>Geometrias de Schwarzschild-de Sitter modificadas</b>	<b>66</b>
5.1	A geometria do espaço-tempo de Schwarzschild-de Sitter . . . . .	66
5.2	Soluções esfericamente simétricas da teoria de gravidade induzida . . . . .	70
5.2.1	O sistema de equações diferenciais . . . . .	71
5.2.2	A solução perturbativa . . . . .	72
5.2.2.1	Horizonte de eventos da distribuição de massa e o horizonte de eventos cosmológico . . . . .	75
5.2.2.2	Sobre singularidades no regime perturbativo . . . . .	78
5.2.3	A solução exata . . . . .	78
5.2.3.1	Horizontes cosmológicos . . . . .	80
5.2.3.2	Sobre singularidades nas soluções exatas . . . . .	82
5.3	Um breve estudo termodinâmico . . . . .	82
5.3.1	Fundamentos . . . . .	83
5.3.2	A termodinâmica das geometrias de uma teoria de gravidade induzida . . . . .	85
5.3.3	Sobre os horizontes de eventos como soluções perturbativas . . . . .	85
5.3.4	Sobre os horizontes de eventos como soluções exatas . . . . .	89
<b>6</b>	<b>Estudo cosmológico preliminar</b>	<b>92</b>
6.1	Sobre o Modelo Cosmológico Padrão . . . . .	93
6.1.1	Princípios cosmológicos e as equações de Friedmann . . . . .	93
6.1.2	Os modelos cosmológicos de Lemaître e de Friedmann . . . . .	95
6.2	Equações de Friedmann modificadas . . . . .	96
6.3	Regime de altas curvaturas . . . . .	101
6.3.1	Universo vazio . . . . .	101
6.3.2	Universo preenchido por matéria . . . . .	103

---

6.4	Regime de baixas curvaturas . . . . .	106
<b>7</b>	<b>Gravidade induzida para o grupo de calibre <math>SL(5, \mathbb{R})</math></b>	<b>107</b>
7.1	Teoria de Yang-Mills para o grupo $SL(5, \mathbb{R})$ . . . . .	108
7.1.1	A estrutura do grupo $SL(5, \mathbb{R})$ . . . . .	108
7.1.2	A ação de Yang-Mills para o grupo $SL(5, \mathbb{R})$ e os campos de calibre . . . . .	111
7.2	Gravidade induzida . . . . .	113
7.2.1	Redefinições dos campos de calibre e a contração de Inönü-Wigner	114
7.2.2	Observáveis, geometria e gravidade . . . . .	115
7.3	Sobre os setores quântico e efetivo da teoria . . . . .	119
<b>8</b>	<b>Conclusões e perspectivas</b>	<b>121</b>
<b>A</b>	<b>Um panorama do cenário Gribov-Zwanziger</b>	<b>128</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>131</b>

# Lista de Figuras

3.1	Cada $x \in \mathbb{R}^4$ é mapeado em um $X \in \mathbb{M}^4$ . Cada configuração $(A, \theta)$ é mapeada com uma geometria $(\omega, e)$ , tal que $A \rightarrow \omega$ e $\theta \rightarrow e$ . . . . .	37
4.1	Parâmetro de Gribov em função da escala de energia. A energia $\mu^2$ está em unidades de $\bar{\Lambda}^2$ e o parâmetro de Gribov em unidades de $(e^{5/6}/\sqrt{5})\bar{\Lambda}^2$ . . . . .	48
4.2	A razão $\gamma^2/\kappa^2$ como função da escala de energia. A razão $\gamma^2/\kappa^2$ está em unidades de $\alpha\bar{\Lambda}^2$ e a escala de energia $\mu^2$ está em unidades de $\bar{\Lambda}^2$ . . . . .	48
4.3	A razão $\kappa^2/\gamma^2 \equiv 4\pi G$ como função da escala de energia. $4\pi G$ está em unidades de $1/(\alpha\bar{\Lambda}^2)$ e a escala de energia em unidades de $\bar{\Lambda}^2$ . . . . .	49
4.4	Evolução do termo associado ao parâmetro $\kappa^2$ como função do logaritmo $\ln(\mu^2/\bar{\Lambda}^2)$ associado à escala de energia $\mu^2$ . . . . .	57
4.5	O parâmetro de Gribov $\gamma_m^2$ como função da escala de energia $\mu^2$ . Ambos, $\gamma_m^2$ e $\mu^2$ , estão quantificados em unidades de $\bar{\Lambda}^2$ . . . . .	60
4.6	O parâmetro de Gribov $\gamma_p^2$ como função da escala de energia $\mu^2$ . Ambos, $\gamma_p^2$ e $\mu^2$ , estão quantificados em unidades de energia de $\bar{\Lambda}^2$ . . . . .	60
4.7	O alternativo parâmetro de Gribov como função da escala de energia. A energia está quantificada em unidades de $\bar{\Lambda}^2$ e o parâmetro $\lambda^2$ em unidades de $\xi\bar{\Lambda}^2$ . . . . .	63
4.8	A razão $\lambda^2/\kappa^2 \equiv 1/(4\pi G)$ como função da escala de energia $\mu^2$ . A escala de energia está quantificada em unidades de $\bar{\Lambda}^2$ enquanto a razão $\lambda^2/\kappa^2$ está em unidades de $\rho\bar{\Lambda}^2$ . . . . .	64
4.9	A razão $\kappa^2/\lambda^2 \equiv 4\pi G$ como função da escala de energia $\mu^2$ . A escala de energia está quantificada em unidades de $\bar{\Lambda}^2$ enquanto $4\pi G$ é quantificada em unidades de $1/(\rho\bar{\Lambda}^2)$ . . . . .	65
5.1	Diagrama do espaço-tempo de de Sitter sob coordenadas de Kruskal-Szekeres. Em $r = 0$ as linhas pontilhadas são origens antípodas das coordenadas polares sobre a 3-esfera. O infinito futuro $\mathcal{F}^+$ e infinito passado $\mathcal{F}^-$ são delimitados por $r \rightarrow \infty$ . As geodésicas tipo-luz são representadas pelas linhas cheias inclinadas em $45^\circ$ em relação aos eixos T e X. $\Upsilon$ significa aqui tanto para $\Upsilon_n$ quanto para $\Upsilon_w$ , assim como para $\Upsilon_p$ ou $\Upsilon_m$ . Optamos por escrever apenas $\Upsilon$ uma vez que os elementos de linha (5.55), (5.56), (5.58) e (5.59) têm estruturas geométricas similares. . . . .	82

5.2	Horizonte de eventos da distribuição de massa em função da massa. $r_b(x(M))$ se encontra em unidades de $1/\tilde{\Lambda}$ . As curvas vermelha, verde e azul correspondem a $\eta = 0.001$ , $\eta = 0.0005$ e $\eta = 0.0001$ , respectivamente. Todas curvas obtidas mostram que o horizonte aumenta quando a massa aumenta. . . . .	86
5.3	Gravidade de superfície em função da massa $M$ . As curvas magenta, marron e laranja são obtidas com $\eta = 0.001$ , $\eta = 0.0005$ e $\eta = 0.0001$ , respectivamente. Todas curvas obtidas mostram que a gravidade de superfície diminui quando a massa da distribuição esférica aumenta. . . . .	87
5.4	Horizonte cosmológico em função da massa da distribuição. $r_c(x(M))$ se encontra em unidades $\tilde{\Lambda}$ . . . . .	88
5.5	Gravidade de superfície no horizonte cosmológico em função da massa. As curvas magenta, marron e laranja são obtidas com $\eta = 0.001$ , $\eta = 0.0005$ e $\eta = 0.0001$ , respectivamente, e mostram que a gravidade de superfície diminui quando a massa da distribuição aumenta. . . . .	89
5.6	Entropia da distribuição em função da massa. As curvas se sobrepõem, mesmo com $\eta = 0.001$ , $\eta = 0.0005$ e $\eta = 0.0001$ . . . . .	90
5.7	Entropia do horizonte cosmológico. As curvas preta, ciano e púrpura são obtidas com $\eta = 0.001$ , $\eta = 0.0005$ e $\eta = 0.0001$ . À medida que a massa da distribuição aumenta, tais curvas se sobrepõem. . . . .	90

# Lista de Tabelas

4.1	O limite superior para o intervalo que limita os valores de $b$ através do uso unicamente de valores pares para $n$ . . . . .	52
4.2	O limite superior $q_{sup}$ para o intervalo de valores de $q$ como função do polinômio de grau $N$ . . . . .	54
4.3	O corte na escala $\bar{\Lambda}^2$ e a constante cosmológica renormalizada $\Lambda^2$ obtidos em cada método. A coluna $I$ mostra as estimativas iniciais. As demais colunas, $M_1, M_2, M_{3a}$ e $M_{3b}$ , mostram os valores obtidos via série de Taylor, valor de equilíbrio e série geométrica, respectivamente. . . . .	55
4.4	Os valores da constante gravitacional de Newton e a constante cosmológica calculados com base nos logaritmos determinados em cada método apresentado na Seção 4.1.2 enquanto o corte da escala de energia for igual à energia de Planck. . . . .	56
5.1	Um quadro-resumo da correspondência entre as leis termodinâmicas e as leis da mecânica dos buracos negros. Adaptada de [1]. . . . .	84

# Capítulo 1

## Introdução

Utiyama, em 1956, Kibble, em 1961 e Sciama, em 1964, publicaram trabalhos que se tornaram seminais quando se trata de descrever a gravidade como uma teoria de calibre [2–4]. Até o momento, seis décadas se passaram e encontramos na literatura diversos trabalhos sobre como tratar a interação gravitacional da mesma forma que as demais interações fundamentais descritas pelo Modelo Padrão [5–10].

De fato, três das quatro interações fundamentais que conhecemos são descritas por teorias de calibre, ou seja, a cromodinâmica quântica, a eletrodinâmica quântica e a teoria fraca. O sucesso de tais teorias vem se confirmando diante dos dados experimentais coletados no LHC<sup>1</sup>, principalmente pela confirmação da existência do bóson de Higgs.

O sucesso do Modelo Padrão é uma grande motivação para o desenvolvimento de uma teoria de gravidade codificada a partir de uma teoria de calibre [11]. Priorizamos as referências [12–20]. Para citar alguns importantes trabalhos que buscaram tratar o campo gravitacional como um campo de calibre.

Na construção de uma teoria de calibre de gravidade, entendemos que dois campos são necessários: a *vierbein*  $e$  e a conexão de spin  $\omega$ . Os demais campos podem ser construídos a partir destes dois previamente citados. As informações sobre a geometria do espaço-tempo está contida na *vierbein* e na conexão de spin  $\omega$  [21]. Teorias de gravidade que adotam os campos  $e$  e  $\omega$  são conhecidas por formalismo de Einstein-Cartan, o qual distoa do usual formalismo da métrica que conta com o tensor métrico

---

<sup>1</sup>N.T.: Sigla do inglês *Large Hadron Collider*.

como ente geométrico fundamental, tal como originalmente apresentado por Einstein na construção da Relatividade Geral [22].

Na busca por uma teoria quântica da gravidade várias tentativas têm sido implementadas a partir da ação gravitacional de Einstein-Hilbert, mas a profunda relação entre o tensor métrico e o espaço-tempo oferece uma dificuldade imensa para se construir uma teoria de gravidade quântica. Esforços têm sido feitos nesse sentido e existem interessantes abordagens, tais como *Loop Quantum Gravity* [23–25], *Higher Derivatives Quantum Gravity* [26, 27], *Causal Sets* [28, 29], *Causal Dynamical Triangulations* [30, 31], *String Theory* [32–36], *Asymptotic Safety* [37–39], e *Emergent Gravities* [26, 40]. Embora apresentem resultados promissores, todas estas abordagens lidam com seus problemas inerentes tanto na sua formulação quanto na falta de experimentos que as comprovem totalmente. Além das teorias de gravidade mencionadas anteriormente, existem teorias topológicas que usam campos escalares extras para que a emergência do campo  $e$  ocorra via o mecanismo de Higgs como quebra de simetria [20, 41]. Temos outras teorias topológicas que não empenham o mecanismo de Higgs, mas a inclusão de um parâmetro de comprimento para a devida identificação com uma teoria de gravidade [42].

O problema em encontrar uma formulação definitiva para uma teoria de gravidade quântica consiste em um dos maiores desafios da física teórica nos dias de hoje. A comunidade científica clama por uma teoria de gravidade que descreva plenamente e corretamente os fenômenos próximos da escala de Planck, onde tais efeitos quânticos não podem mais ser desprezados [43]. Essa busca, por exemplo, pode nos levar a uma melhor compreensão das singularidades no universo primordial e em buracos negros, assim como estabelecer de vez uma solução para o paradoxo da informação proposto por Hawking [24, 44]. Nestes limites, a Relatividade Geral de Einstein não é mais válida e, realmente, necessitamos de uma teoria de gravidade quântica. Apesar disso, a Relatividade Geral é muito bem-sucedida em largas escalas, tal como podemos observar pelo atual Modelo Cosmológico Padrão que trata o Universo como uma única entidade física [45–47]. Não somente, o sucesso da Relatividade Geral para descrever o Sistema Solar também ocorre na explicação de fenômenos astrofísicos, tais como o colapso e formação estrelas [47]. Portanto, uma teoria de gravidade que se proponha ir além da de Einstein necessita passar por testes que recuperem o limite clássico. Assim, comumente encontramos na literatura estudos cosmológicos e de buracos negros em tais propostas de modificação à teoria einsteiniana [24, 25]. Indo além, ainda temos em aberto as questões sobre a natureza da energia e da matéria escura, as quais esperamos

ser totalmente explicadas via uma teoria quântica para a interação gravitacional [45, 48].

Apresentaremos uma abordagem que contorna o problema da quantização do campo gravitacional e, por sua vez, evita problemas como renormalizabilidade e estabilidade quântica de teorias tipo Einstein-Hilbert.

Iniciaremos esta tese com fundamentos sobre teorias de calibre e de gravidade no formalismo de primeira ordem que serão apresentados no Capítulo 2.

No Capítulo 3 mostraremos a primeira ação gravitacional induzida. Nesta construção, a ação de Yang-Mills para o grupo  $SO(m, n)$ , onde  $m \in \{0, 1, 2\}$  e  $m + n = 5$ , em um espaço-tempo euclidiano será o espaço de base [11]. A escolha de uma teoria não-abeliana também não foi mero acaso. Tais teorias são assintoticamente livres [49, 50] e renormalizáveis em todas as ordens de teoria de perturbação. Um efeito importante, necessário para a teoria que construímos, é a geração dinâmica de massa no regime infravermelho. Inicialmente, o termo de massa não é assumido na lagrangiana de Yang-Mills e, portanto, os campos de calibre na ação inicial não podem ser interpretados como entes geométricos. Além disso, a geração dinâmica de massa permitirá uma quebra de simetria, tal que uma contração de Inönü-Wigner [51] possa ser implementada e uma ação efetiva de gravidade emerge. Nesta construção, a constante de Newton e a constante cosmológica são identificadas com o parâmetro de acoplamento e o parâmetro de massa. Discutiremos ainda os aspectos formais do mapeamento entre os campos de calibre redefinidos pelo parâmetro de massa e o de acoplamento. Terminaremos este capítulo por apresentar as equações de campo deduzidas a partir da ação de gravidade.

No Capítulo 4 apresentaremos as primeiras estimativas para o parâmetro de massa, o qual é tão crucial na construção das teorias de gravidade induzida que desenvolvemos. As estimativas para o parâmetro de massa, o qual escolhemos, por simplicidade, o parâmetro de Gribov, permitirá que façamos estimativas para a constante cosmológica da teoria, assim como o corte na escala de energia, o qual assumimos como um parâmetro de ordem que separe os dois setores da teoria, ou seja, o setor ultravioleta, onde uma teoria de Yang-Mills é quanticamente consistente, e o setor infravermelho, onde teremos a teoria geometrodinâmica de gravidade. As estimativas serão embasadas pelo emprego de métodos numéricos, os quais serão detalhados durante o capítulo. Também faremos a discussão sobre a transição de fase que separe tais setores. Apesar desta tese não tratar especificamente o cenário de Gribov-Zwanziger, onde obtemos



o parâmetro de massa a ser utilizado neste trabalho, colocamos no Apêndice A um panorama sobre este ponto.

No Capítulo 5 faremos um primeiro teste clássico para a teoria de gravidade induzida a partir da ação de Yang-Mills para o grupo  $SO(5)$ . Teremos como base a solução de Schwarzschild-de Sitter, uma das mais famosas soluções para as equações de Einstein. A compreensão de tais geometrias permitiu avanços significativos na previsão teórica de buracos negros e espaços-tempo cosmológicos.

Usaremos as equações de campo para encontrar soluções esfericamente simétricas sob a influência do termo quadrático de curvatura na equação de campo obtida. Neste contexto, como um estudo inicial, assumiremos torção nula, pois dessa forma, mostraremos os efeitos causados por este termo extra na equação de campo, a qual também conta com os familiares termos de Einstein-Hilbert com constante cosmológica. As geometrias obtidas serão em dois regimes: (i) um regime de pequena influência do termo quadrático de curvatura, o qual será tratado como um perturbação da equação de Einstein com constante cosmológica; (ii) um regime de completa influência do termo quadrático, onde mostraremos que as soluções mais simples a serem obtidas será uma geometria do espaço-tempo de de Sitter. De posse destas soluções neste dois regimes, mostraremos os horizontes de eventos obtidos em cada regime e discutiremos o quão próximo ficamos dos horizontes de eventos encontrados na literatura. Por último, será apresentado um breve estudo termodinâmico, onde pretendemos mostrar como as grandezas entropia e temperatura se comportam diante das soluções obtidas nesta teoria de gravidade modificada.

No Capítulo 6 mostraremos um estudo preliminar que nos permitiu encontrar modelos cosmológicos para a teoria de gravidade induzida a partir da teoria de Yang-Mills para os grupos  $SO(m, n)$ . Também aqui assumimos espaços livres de torção e os modelos que deduzimos refletem a influência do termo extra nas equações de campo que modificam as tradicionais equações dinâmicas do Modelo Cosmológico Padrão no regime de altas curvaturas. Também mostraremos como recuperar o modelo  $\Lambda$ CDM em um regime de baixas curvaturas.

No Capítulo 7 teremos a ação de Yang-Mills para o grupo  $SL(5, \mathbb{R})$  como ação de partida. Este grupo foi utilizado em cenários de supergravidade [13] e em teorias topológicas [41]. Por ser um grupo que apresenta mais setores em sua decomposição, buscamos estudá-lo para a obtenção de uma teoria de gravidade que, portanto, contará não somente com os campos *vierbein*  $e$  e conexão de spin  $\omega$ , mas também com um

setor extra de matéria. Um outro fato motivador para estudarmos este grupo consiste no mecanismo dinâmico de geração de massa que empregamos no Capítulo 3, o qual é bem distinto do mecanismo de Higgs usado em [41], o qual é o responsável pela quebra de simetria e a obtenção da *vierbein* como ente geométrico daquela teoria efetiva de gravidade. Nesta construção também assumiremos um parâmetro de massa que será responsável pela quebra suave de simetria BRST, tal que a teoria também tenha, assim como no desenvolvimento para o  $SO(m, n)$ , dois setores distintos: o ultravioleta e o infravermelho. Neste último habitará a teoria de gravidade efetiva. No primeiro, teremos a recuperação da teoria de Yang-Mills em altas energias. Reforçamos que a exigência de um parâmetro de massa que emerja dinamicamente é totalmente necessária para que a teoria geometrodinâmica não se estabeleça no regime ultravioleta da teoria inicial. Novamente, empregaremos o mapeamento dos campos de calibre devidamente redefinidos através dos parâmetros de acoplamento e de massa. Este último, o parâmetro de Gribov continua sendo responsável, em um certo limite, pela quebra de simetria e induza a contração do grupo inicial para o grupo tipo Lorentz. Como objetivo final deste capítulo, mostraremos a ação gravitacional induzida e obteremos as equações de campo a partir desta ação. Não pretendemos resolver tais equações, mas faremos incursões para mostrar como recuperar a Relatividade Geral em um determinado limite.

Finalizaremos esta tese no Capítulo 8, onde resumiremos e discutiremos os resultados que obtivemos. Adicionalmente, elencaremos nossas perspectivas de trabalho.

# Capítulo 2

## Teorias de Yang-Mills e teorias de gravidade

Descreveremos brevemente o cerne da construção de teorias de calibre não-abelianas, ou seja, as teorias de Yang-Mills. Seremos breves quanto a apresentação dos conceitos fundamentais das teorias de Yang-Mills e recomendamos o bom arcabouço literário, [10],[52],[7],[9] e [6], para o leitor que está iniciando seus estudos sobre este tópico.

Em seguida, apresentaremos rapidamente os principais elementos da teoria de gravidade de Einstein no formalismo de segunda ordem. Abordaremos, também de forma sucinta, o formalismo de primeira ordem e duas possíveis construções de teorias de gravidade sob este formalismo. Os conceitos relacionados aos dois formalismos estão fortemente embasados nas referências [21, 47, 53].

Estes pontos serão importantes na nossa busca pela construção de uma teoria de gravidade com origem em teorias de Yang-Mills.

### 2.1 Teorias de Yang-Mills

#### 2.1.1 A ação de Yang-Mills

Primeiramente, tomemos um grupo de Lie semi-simples  $G$ , cuja coleção de geradores  $g^A$  se relacionem através da álgebra de Lie,

$$[g^A, g^B] = f^{AB}{}_C g^C, \quad (2.1)$$

onde  $\{A, B, C\} \in \{1, \dots, \dim G\}$ . Enquanto as constantes de estrutura do grupo,  $f^{AB}_C$ , têm índices completamente antissimétricos. Se  $f^{AB}_C = 0, \forall A, B, C$ , classificamos o grupo como abeliano. Representamos os geradores por matrizes anti-hermitianas, ou seja,  $g^{A\dagger} = -g^A$ , com respectiva normalização

$$Tr(g^A g^B) = -\frac{1}{2} \delta^{AB}. \quad (2.2)$$

Tal como os geradores do grupo, as constantes de estrutura obedecem a identidade de Jacobi,

$$f^{ABD} f^{DCE} + f^{BCD} f^{DAE} + f^{CAD} f^{DBE} = 0. \quad (2.3)$$

Agora, consideremos uma coleção de campos descrita por

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_N \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

a qual se transforma como

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x) = \mathcal{U}\Phi(x), \quad (2.5)$$

onde  $\mathcal{U} = e^{\kappa\zeta}$ , com  $\zeta = g_A \zeta^A$ , tal que  $\zeta^A$  sejam funções das coordenadas do espaço-tempo. Os campos  $\Phi$  são campos de matéria por causa da sua lei de transformação (2.5), onde vemos imediatamente que  $\Phi$  se transforma na representação fundamental [54],[55]. As derivadas desses campos se transformam como

$$d\Phi(x) \rightarrow \mathcal{U}d\Phi(x) + (d\mathcal{U})\Phi(x), \quad (2.6)$$

onde  $d$  representa a derivada exterior. Dessa maneira, observamos que  $d\Phi$  não se transforma como matéria. Portanto, introduzimos uma nova derivada, a qual se transforma como

$$\nabla'\Phi'(x) = \mathcal{U}\nabla\Phi(x), \quad (2.7)$$

com  $\nabla$  representando a derivada covariante em relação à conexão de calibre  $Y$ ,

$$\nabla = d + \kappa Y, \quad (2.8)$$

tal que  $\kappa$  seja o parâmetro de acoplamento, o qual é adimensional. A 1-forma de conexão  $Y$  representa o campo de calibre  $Y$ , tal que este se transforme como

$$Y = \lambda_A Y_\mu^A dx^\mu , \quad (2.9)$$

ou seja, uma transformação na representação adjunta [54],[55].

Usamos (2.5) e (2.7) para realizar a transformação do campo  $Y$ .

$$Y' = U \left( \frac{d}{\kappa} + Y \right) U^{-1}. \quad (2.10)$$

Na forma infinitesimal, temos  $U \approx 1 + \kappa\zeta$ . Logo, a transformação (2.10) reduzimos a

$$Y' = Y + \nabla\zeta . \quad (2.11)$$

Definimos a 2-forma de intensidade de campo por

$$F = dY + \kappa Y Y , \quad (2.12)$$

a qual não é invariante por transformações de calibre locais, mas é covariante de calibre, sujeita à transformação

$$F' = U F U^{-1} , \quad (2.13)$$

a qual podemos escrever em componentes como

$$F'^A = dA^A + \kappa f^A_{BC} A^B A^C . \quad (2.14)$$

O próximo passo consiste em usar  $F^A$  para construirmos uma ação invariante de calibre. Sobre esta construção, precisamos atender às seguintes condições:

- A densidade lagrangiana deve ser local, o que significa que deva depender somente dos campos e de suas derivadas em cada ponto do espaço-tempo [56].
- Sob contagem de potências, a ação precisa ser renormalizável [9],[56].
- Os campos de Yang-Mills devem ser não-massivos, pois termos de massa geralmente podem corromper a invariância de calibre quando inseridos explicitamente na lagrangiana [9],[56].

- A variação da ação em relação aos campos deve levar a equações clássicas de movimento não apresentando derivadas de ordem superior a segunda [9].
- Possivelmente, a ação deve ser invariante sob simetrias internas. Claramente, estas são associadas às simetrias de calibre [9],[54].

Portanto, temos a ação mais simples que atende as demandas acima listadas,

$$S = - \int_M \text{tr} F * F = \frac{1}{2} \int_M F^A * F_A , \quad (2.15)$$

cujo traço tomamos em relação ao grupo. Temos, assim, uma ação de Yang-Mills pura, pois não inclui campos de matéria.

Ressaltamos que todos os observáveis físicos devem ser invariantes sob transformações de calibre, assim como as respectivas ações, pois isto é consistente com o Princípio de calibre [8],[54].

### 2.1.2 Propriedades físicas

A teoria de Yang-Mills tem duas propriedades importantes: [9]

- Renormalizabilidade: Em todas as ordens em teoria de perturbação, a ação de Yang-Mills é renormalizável, tal que as divergências ultravioletas podem ser eliminadas. Essa é uma prova da estabilidade das teorias de Yang-Mills no nível quântico [57]. Lembramos que a simetria BRST é crucial quando se trata da renormalizabilidade de uma teoria de calibre.
- Liberdade assintótica: Esta propriedade decorre da renormalização do parâmetro de acoplamento [49, 50]. Quando uma teoria é assintoticamente livre, temos o parâmetro de acoplamento se tornando cada vez menos significativo em altas energias. Por outro lado, quando a energia diminui, tal parâmetro aumenta. No regime de acoplamento forte, observamos uma teoria não-perturbativa. Ainda não existe um cenário completamente compreendido neste regime.

No regime de baixas energias, a fixação de calibre não é possível através de um simples vínculo. É justamente neste regime que as ambiguidades de Gribov se tornam comuns [58]. O emprego da quantização BRST, juntamente com o método de Faddeev-Popov, não é completamente realizada em baixas energias, pois ao fixar o calibre, não

temos uma eliminação total da simetria de calibre e, portanto, resíduos dessa simetria sobrevivem. Foi mostrado esse é um problema que ocorre para qualquer calibre [59]. As configurações residuais de calibre são denominadas cópias de Gribov. Tais cópias se tornam relevantes em baixas energias unicamente, portanto, o setor de altas energias não muda, uma vez que o parâmetro de Gribov diminui com o aumento da energia, como podemos observar na Figura 4.1. No calibre de Landau, cópias infinitesimais podem ser eliminadas quando intruduzimos um termo de quebra suave de BRST<sup>1</sup>. Em cromodinâmica quântica, o tratamento deste problema leva a evidências sobre o confinamento de quarks e glúons [58, 61–64]. Deixamos um panorama sobre a ação de Gribov-Zwanziger no Apêndice A, o qual está relacionado ao parâmetro de Gribov. O modo de obter tal parâmetro, mostraremos no Capítulo 4.

## 2.2 Teoria de gravidade no formalismo de segunda ordem

Em 1915, Einstein elaborou aquela que hoje denominamos Teoria Geral da Relatividade [22]. No coração da teoria proposta por Einstein, temos incrustado o Princípio da Equivalência, enquanto na estrutura da teoria, definitivamente, notamos o papel geométrico da interação gravitacional. De acordo com Einstein, efeitos gravitacionais podem ser localmente anulados do ponto de vista de um observador em queda livre. Enfatizamos que, localmente, tal observador se encontra em uma pequena região do espaço-tempo, onde os efeitos gravitacionais são insignificantes. Esta percepção é o que definimos como a essência do Princípio da Equivalência. Temos, principalmente, duas formulações para este princípio, tal como segue.

- **Forma fraca do Princípio da Equivalência:** *Massas inerciais e gravitacionais são equivalentes.*

Este enunciado do Princípio da Equivalência afirma que a massa inercial de um corpo é igual à sua massa gravitacional. Como consequência, qualquer partícula-teste experimenta, localmente, a mesma aceleração da gravidade. Esta é uma forma de estabelecer que não sentiremos um campo gravitacional por uma escolha sutil de um referencial não-inercial.

---

<sup>1</sup>A quebra suave de simetria BRST ocorre quando um termo não local, a função horizonte é introduzida na ação de Yang-Mills. A quebra suave sempre ocorrerá mediante a inclusão de um parâmetro de massa com dimensão menor que a do espaço-tempo. Detalhes sobre o cenário onde essa quebra ocorre podem ser encontrados em [60]

- **Forma Forte do Princípio da Equivalência:** *Os princípios da Relatividade Especial são localmente válidos em uma região do espaço-tempo.*

O ponto central neste enunciado consiste em afirmar que, localmente, o espaço-tempo é um espaço-tempo de Minkowski. Entretanto, em regiões extensas no espaço-tempo, as inhomogeneidades do campo gravitacional são significativas e constatadas pelas forças de maré.

No decorrer desta tese, quando mencionarmos o Princípio de Equivalência, estaremos nos referindo à sua forma forte.

Foi a partir do Princípio de Equivalência que Einstein descreveu a interação gravitacional por meios de uma formulação da dinâmica do espaço-tempo. Na teoria de Einstein, a matéria informa como espaço-tempo deve se deformar, enquanto a deformação do espaço-tempo informa à matéria como ela deve se mover. Por essa característica, ou seja, como a geometria do espaço-tempo é dinamicamente modificada pela presença de matéria, chamamos tal teoria de geometrodinâmica. Finalmente, Einstein descreveu a dinâmica do espaço-tempo através de uma coleção de equações que podem ser simplesmente apresentadas como

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \left( \mathcal{R} - 2\tilde{\Lambda}^2 \right) g_{\mu\nu} = 8\pi G \mathcal{T}_{\mu\nu} , \quad (2.16)$$

onde  $\mathcal{R}_{\mu\nu}$  são as componentes do tensor de Ricci,  $\mathcal{R} = g^{\mu\nu} \mathcal{R}_{\mu\nu}$  é o escalar de curvatura,  $g_{\mu\nu}$  são as componentes do tensor métrico,  $G$  é a constante gravitacional de Newton,  $\tilde{\Lambda}^2$  é a constante cosmológica e, finalmente,  $\mathcal{T}_{\mu\nu}$  representa as componentes do tensor energia-momento da distribuição de matéria. Como podemos notar, a equação de Einstein tem um lado puramente geométrico e um outro que puramente descreve a distribuição da matéria, onde se encontra o tensor energia-momento. O ente fundamental da formulação de Einstein é o tensor métrico. Ressaltamos que, ao tomarmos o traço da Eq. (2.16), obtemos

$$\mathcal{R} = 4\tilde{\Lambda}^2 - 8\pi G \mathcal{T} , \quad (2.17)$$

onde  $\mathcal{T}$  é o traço do tensor energia-momento. No vácuo, temos simplesmente,  $\mathcal{R} = 4\tilde{\Lambda}^2$ . Logo, notamos que o escalar de curvatura pode ser diretamente relacionado com a constante cosmológica. Nitidamente, vemos que um universo dominado por constante cosmológica jamais será plano. Logo, no caso de desprezarmos a constante cosmológica, teremos a mais simples solução das equações de Einstein, isto



é, um espaço-tempo plano. Apenas lembramos que a constante cosmológica observacional é muito pequena nos dias atuais, cujo valor é da ordem de grandeza de  $10^{-92} \text{ TeV}^2$ . Hoje, temos cenários que colocam a constante cosmológica como a principal responsável pela expansão acelerada do Universo. Uma energia do vácuo que reconhecemos como energia escura.

O formalismo de segunda ordem conhecemos como formalismo da métrica, uma vez que o tensor métrico é o único ente fundamental da gravidade. Qualquer outra informação geométrica pode ser obtida a partir de  $g_{\mu\nu}$ . Elencaremos rapidamente os principais pontos do formalismo de segunda ordem. Começamos o tensor métrico, o qual carrega informações sobre comprimentos, ângulos, áreas e volumes sobre uma variedade diferenciável  $\mathbb{M}^4$ . Por exemplo, a distância entre dois pontos  $x$  e  $x + dx$ , calculamos como

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.18)$$

onde notamos o caráter simétrico do tensor métrico, ou seja,  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ . O tensor métrico inverso é determinado por

$$g_{\nu\lambda} g^{\lambda\mu} = \delta^\mu_\nu, \quad (2.19)$$

onde  $\delta^\mu_\nu$  é a métrica euclidiana.

Um importante e essencial objeto geométrico surge primeiramente quando tratamos o transporte paralelo de vetores em  $\mathbb{M}^4$ . Chamamos tal objeto de conexão afim e ele pode ser construído diretamente com o tensor métrico. A conexão afim generaliza a ação da derivada parcial, tal que a derivada covariante de um tensor de ordem  $k$  se transforme como um tensor ordem  $k + 1$ . Definimos a atuação da derivada covariante por

$$\begin{aligned} \nabla_\beta \mathcal{T}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_\ell} &= \partial_\beta \mathcal{T}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_\ell} \\ &+ \Gamma_{\beta\lambda}^{\mu_1} \mathcal{T}^{\lambda \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_\ell} + \Gamma_{\beta\lambda}^{\mu_2} \mathcal{T}^{\mu_1 \lambda \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_\ell} + \dots \\ &- \Gamma_{\beta\nu_1}^\lambda \mathcal{T}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\lambda \nu_2 \dots \nu_\ell} - \Gamma_{\beta\nu_2}^\lambda \mathcal{T}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \lambda \dots \nu_\ell} - \dots \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde a conexão afim  $\Gamma^\mu_{\beta\nu}$  é definida sob os seguintes requerimentos:

- *Compatibilidade da métrica:* A derivada covariante do tensor métrico é nula, *i.e.*,  $\nabla_\beta g_{\mu\nu} = 0$ . Isso preserva o comprimento dos vetores diante de qualquer transporte paralelo. Esta é a condição de não-metricidade nula.

- *Torção nula*: Resultado imediato da simetria da conexão afim em seus índices superiores, *i.e.*,  $T^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\mu} = 0 \Rightarrow \Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\nu\mu}$ .

No formalismo de segunda ordem, a conexão afim é unicamente determinada como função de  $g_{\mu\nu}$ . Algo que, geralmente, não é necessário. Há formulações geométricas onde a conexão afim independe da métrica. Quando os dois itens acima são atendidos, não observamos não-metricidade ou torção em qualquer ponto do espaço-tempo. A conexão afim simétrica é conhecida como conexão de Levi-Civita ou, simplesmente, símbolo de Christoffel, a qual escrevemos como

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\rho}(-\partial_\rho g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\mu\rho}) . \quad (2.21)$$

O tensor de Riemann-Christoffel, ou mais comumente, o tensor de Riemann, descreve a curvatura do espaço-tempo. Podemos determinar tal tensor através do comutador de duas derivadas covariantes de um vetor, ou seja,

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\alpha = \nabla_\mu \nabla_\nu V^\alpha - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\alpha = \mathcal{R}^\alpha_{\beta\mu\nu} V^\beta , \quad (2.22)$$

onde

$$\mathcal{R}^\alpha_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\nu\beta} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\beta} + \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\beta} - \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\beta} . \quad (2.23)$$

A seguir, listamos as principais propriedades do tensor de Riemann.

- Antissimetria no primeiro e no segundo par de índices:

$$\mathcal{R}^\alpha_{\beta\mu\nu} = -\mathcal{R}^\alpha_{\beta\nu\mu} \text{ e } \mathcal{R}^\alpha_{\beta\mu\nu} = -\mathcal{R}^\alpha_{\nu\mu\beta} .$$

- Simetria perante a troca do primeiro com o segundo par de índices:

$$\mathcal{R}^\alpha_{\beta\mu\nu} = \mathcal{R}^\alpha_{\nu\mu\beta} \text{ ou, equivalentemente, } \mathcal{R}_{\alpha\beta\mu\nu} = \mathcal{R}_{\mu\nu\alpha\beta} .$$

O tensor de Riemann nos permite determinar dois objetos bastante úteis na equação de Einstein, tal como segue. O tensor de Ricci,

$$\mathcal{R}_{\mu\nu} = g^{\alpha\beta} \mathcal{R}_{\beta\mu\alpha\nu} = \mathcal{R}^\alpha_{\mu\alpha\nu} , \quad (2.24)$$

e o escalar de curvatura,

$$\mathcal{R} = g^{\mu\nu} \mathcal{R}_{\mu\nu} . \quad (2.25)$$

Ressaltamos que o tensor de Riemann depende unicamente do tensor métrico.

Lembramos que existe uma maneira de determinar as equações de Einstein usando o princípio variacional. Conseguimos tal feito por definirmos a ação de Einstein-Hilbert com matéria como

$$S_{EH-CC} = \int d^4x \sqrt{g} \left[ \frac{1}{16\pi G} (\mathcal{R} - 2\Lambda) + \mathcal{T}^\mu{}_\mu \right], \quad (2.26)$$

onde  $g = |\det g_{\mu\nu}|$ . As equações de Einstein (2.16) são deduzidas através da extremização da ação (2.26) em relação ao tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ .

Como última equação que apresentaremos neste formalismo de segunda ordem, temos a equação da geodésica

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} = -\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds}. \quad (2.27)$$

onde  $s$  é o elemento de linha não-nulo da geodésica e  $x^\mu$  é a posição da partícula ao longo da curva. Tal equação nos ajuda a interpretar que  $g_{\mu\nu}$  faz o papel de potencial relativístico, enquanto  $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$  fica associada com a força gravitacional. Esta interpretação vem do fato de que as equações de campo de Einstein incorporam a gravidade newtoniana em um certo limite. Este limite de campo fraco, tal como o chamamos, recupera a teoria de Newton da gravitação, onde a componente  $g_{00}$  está relacionada ao potencial newtoniano.

## 2.3 Teoria de gravidade no formalismo de primeira ordem

E. Cartan e A. Palatini consideraram, no cenário do formalismo de segunda ordem da Teoria Geral da Relatividade, o tensor métrico e a conexão afim como campos independentes. Isso levou à uma teoria de gravidade com mais graus de liberdade quando comparada à teoria de Einstein. Especificamente, porque uma resulta em uma nova equação de campo, a qual é obtida por  $\delta S_{EH}/\delta\Gamma = 0$ . Ainda, conforme Cartan, a parte antissimétrica da conexão deve ser considerada. Conhecemos tal parte como torção. O formalismo de primeira ordem usa dois objetos distintos, ou seja, a *vierbein*  $e^a{}_\mu(x)$  e a conexão de spin  $\omega^{ab}{}_\mu(x)$ , onde índices latinos se referem às coordenadas do espaço tangente correspondente a um ponto do espaço-tempo  $\mathbb{M}^4$ . Nesta seção seremos sucintos na apresentação deste formalismo, onde daremos ênfase nas definições que empregaremos no decorrer desta tese, assim como a introdução

da linguagem de formas diferenciais como ferramenta matemática que adotamos em diversos pontos do trabalho.

### 2.3.1 Vierbein

O isomorfismo entre a variedade  $\mathbb{M}^4$  e a coleção de espaços tangentes  $\{T_x(\mathbb{M}^4)\}$  pode ser descrito por uma transformação de coordenadas entre o espaço  $T_x(\mathbb{M}^4)$  e o sistema de coordenadas locais em uma vizinhança aberta de  $x$ , a qual obtemos por

$$\frac{\partial x^a}{\partial x^\mu} = e^a{}_\mu(x), \quad (2.28)$$

onde  $x^\mu \in \mathbb{M}^4$  e  $x^a \in T_x(\mathbb{M}^4)$ . A coleção  $e^a{}_\mu(x)$ , onde  $a = \{0, 1, 2, 3\}$ , denominamos *vierbein*, a qual define um referencial local ortonormal sobre  $\mathbb{M}^4$ . Similarmente, existe uma correspondência 1 pra 1 entre os tensores que pertencem a  $\mathbb{M}^4$  e  $T_x(\mathbb{M}^4)$ , tal que

$$\mathcal{F}^{a_1 \dots a_N}(x) = e^{a_1}{}_{\mu_1}(x) \dots e^{a_N}{}_{\mu_N}(x) \mathcal{F}^{\mu_1 \dots \mu_N}(x) \quad (2.29)$$

Onde escrevemos  $\mathcal{F}^{\mu_1 \dots \mu_N}(x)$  e  $\mathcal{F}^{a_1 \dots a_N}(x)$  como as componentes dos tensores  $\mathcal{F}$  em  $\mathbb{M}^4$  e  $T_x(\mathbb{M}^4)$ , respectivamente. No espaço  $T_x(\mathbb{M}^4)$ , representamos o comprimento de arco por

$$ds'^2 = \eta_{ab} dx^a dx^b. \quad (2.30)$$

Se preservarmos o comprimento de arco pelo mapeamento, isto é,  $ds^2 = ds'^2$ , então obtemos o tensor métrico em função da *vierbein*<sup>2</sup>  $e^a{}_\mu$ ,

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu &= \eta_{ab} dx^a dx^b = \eta_{ab} e^a{}_\mu dx^\mu e^b{}_\nu dx^\nu \\ g_{\mu\nu} &= \eta_{ab} e^a{}_\mu e^b{}_\nu \end{aligned} \quad (2.31)$$

Descrevemos, no espaço tangente, a ação do grupo de Lorentz sobre a *vierbein* como

$$e^a{}_\mu \rightarrow e'^a{}_\mu = L^a{}_b e^b{}_\mu, \quad (2.32)$$

tal que  $L^a{}_b \equiv L^a{}_b(x) \in SO(3, 1)$  seja uma transformação local de Lorentz. Uma vez que o espaço tangente é diferente em cada ponto do espaço-tempo, temos

$$\eta_{cd} = L^a{}_c L^b{}_d \eta_{ab}. \quad (2.33)$$

<sup>2</sup>Por simplicidade e economia, usaremos  $e^a \equiv e^a(x)$  e  $\omega^a{}_b \equiv \omega^a{}_b(x)$ , onde  $\omega^a{}_b$  definiremos na próxima subsecção.

A *vierbein*, sendo um isomorfismo, possui inversa, a qual podemos obter pela invariância do comprimento de arco. Logo, a *vierbein* e sua inversa estabelecem entre si vínculos, os quais são

$$e^a{}_\mu e^\mu{}_b = \delta^a_b, \quad (2.34)$$

$$e^a{}_\mu e^\nu{}_a = \delta^\mu_\nu. \quad (2.35)$$

Quando admitimos que *vierbein* possui inversa e usamos a equação (2.31), obtemos

$$\eta_{ab} = g_{\mu\nu} e^\mu{}_a e^\nu{}_b, \quad (2.36)$$

ou seja, uma relação inversa da métrica. Definimos o determinante da *vierbein* por

$$e = |\det e^a{}_\mu|. \quad (2.37)$$

Ao usarmos (2.31), podemos estabelecer uma relação entre os determinantes da métrica e da *vierbein*, *i.e.*,

$$|g| = |\det g_{\mu\nu}| = |\det e^a{}_\mu|^2 \Rightarrow e = \sqrt{|g|}. \quad (2.38)$$

As seguintes relações surgem dos resultados obtidos em (2.31), (2.32) e (2.38):

- Todas as propriedades do tensor métrico do espaço-tempo estão armazenadas na *vierbein*.
- Sob uma transformação de Lorentz, a *vierbein* se transforma de acordo com (2.32). Aqui  $SO(3, 1)$  é interpretado como um grupo de calibre de maneira que o tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  seja invariante de calibre.
- A diferença entre as  $N^2$  componentes independentes da *vierbein* e as  $(N^2 + N)/2$  componentes independentes da métrica é justamente a quantidade  $(N^2 - N)/2$ , o número de rotações em  $N$  dimensões. Aqui, usaremos  $N = 4$ .

A *vierbein*  $e^a{}_\mu$ , sendo um vetor do espaço tangente, podemos igualmente representar pelo seu dual no espaço cotangente  $T_x^*(\mathbb{M}^4)$ ,  $e^a = e^a{}_\mu dx^\mu$ . Esta quantidade  $e^a$  é uma 1-forma que substitui a métrica como campo fundamental no formalismo de primeira ordem.

### 2.3.2 Conexão de spin

Na Teoria da Relatividade Geral, quando realizamos um transporte paralelo de qualquer vetor sobre a variedade, temos uma conexão afim relacionada a tal deslocamento. Essa conexão afim, conhecida também como conexão de Levi-Civita, é simétrica em seus índices e recebe o nome de símbolo de Christoffel. A ausência de torção, tal como foi formulada a Relatividade Geral, é o que caracteriza a conexão ser simétrica. Teorias com torção, tal como a Teoria métrica-afim, não simplificam a conexão e a parte anissimétrica da conexão é considerada. Enquanto isso, no formalismo de primeira ordem, quem está relacionada ao transporte paralelo é a conexão de spin,

$$\omega^a_b = \omega^a_{b\mu} dx^\mu, \quad (2.39)$$

a qual está presente, também, no acoplamento mínimo dos campos de matéria com a geometria do espaço-tempo. A conexão de spin não depende da métrica e seus valores são tomados na álgebra de Lorentz. Entendemos melhor a geometria da conexão de spin quando escolhemos dois pontos,  $x$  e  $x + dx$ , onde existem os espaços cotangentes  $T_x^*(\mathbb{M}^4)$  e  $T_{x+dx}^*(\mathbb{M}^4)$ , respectivamente, em uma variedade  $\mathbb{M}^4$ . Adicionalmente, temos um campo vetorial  $\psi^a(x)$  transportaremos paralelamente do ponto  $x$  ao  $x + dx$ . Medimos tal efeito por

$$\psi'^a(x) = \psi^a(x) + D\psi^a(x), \quad (2.40)$$

tal que  $D\psi^a(x) = d\psi^a(x) + \omega^a_b(x)\psi^b(x)$  é a derivada covariante exterior, a qual atua sobre o campo. O papel da derivada covariante consiste em medir a mudança no tensor paralelamente deslocado. Desse modo, temos as propriedades afins do espaço codificadas na 1-forma de conexão. Se transformamos a derivada covariante, definida em (2.40), perante o grupo de Lorentz, então a conexão de spin (2.39) transformamos como

$$\omega^a_{b\mu} \rightarrow \omega'^a_{b\mu} = \Lambda^a_c \omega^c_{d\mu} \Lambda^d_b + \Lambda^a_c \partial_\mu \Lambda^c_b. \quad (2.41)$$

Em cada espaço cotangente  $T_x^*(\mathbb{M}^4)$  definimos a ação do grupo  $SO(3,1)$ , pois as matrizes de transformação  $\Lambda$  dependem de  $x$ . Portanto, necessariamente, introduzimos um tipo de conexão que compense o fato do grupo agir independentemente em cada ponto da variedade, assim como em uma teoria de calibre. Para uma determinada variedade existe uma única conexão correspondente ao sistema de coordenadas. Para todos os efeitos, o formalismo de primeira ordem é, realmente, uma teoria de calibre.

Do mesmo modo que associamos a *vierbein*  $e^a$  com  $g_{\mu\nu}$  mediante (2.31), associamos

a conexão spin  $\omega^a_b$  com a conexão afim  $\Gamma^a_b$ . Obtemos tal relação quando a condição de compatibilidade  $D_\alpha g_{\mu\nu} = 0$  é satisfeita. Para tal, definimos a derivada covariante completa, ou seja, a derivada que carrega índices do espaço-tempo e do espaço tangente, e impomos  $\tilde{D}_\alpha e^a_\mu = 0$ . Claramente temos

$$\tilde{D}_\alpha e^a_\mu = \partial_\alpha e^a_\mu + \omega^a_{\alpha b} e^b_\mu - \Gamma^\beta_{\alpha\mu} e^a_\beta, \quad (2.42)$$

pela qual obtemos

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = e^\alpha_a \partial_\mu e^a_\nu + \omega^a_{\mu b} e^\alpha_a e^b_\nu. \quad (2.43)$$

Podemos mostrar que a equação (2.43) pode ser escrita como o símbolo de Christoffel mais um termo associado à torção. Isso nos mostra o quanto a torção surge naturalmente no formalismo de primeira ordem.

### 2.3.3 Estrutura do formalismo de primeira ordem

A métrica de Minkowski,  $\eta_{ab}$ , e o pseudo-tensor de Levi-Civita,  $\epsilon_{abcd}$ , são tensores invariantes perante o grupo de rotações  $SO(1, 3)$ . Logo, quando submetemos tais tensores à ação do grupo de Lorentz, vemos todos eles permanecerem constantes em toda a variedade  $\mathbb{M}^4$ . Portanto,  $d\eta_{ab} = 0$  e  $d\epsilon_{a_1, \dots, a_N} = 0$ . Analogamente,  $D\eta_{ab} = 0$  e  $D\epsilon_{a_1, \dots, a_N} = 0$ . Diante de tal implicação, temos

$$\begin{aligned} \eta_{ac} \omega^c_b &= -\eta_{bc} \omega^c_a \\ \epsilon_{b_1, a_2, \dots, a_N} \omega^{b_1}_{a_1} + \epsilon_{a_1, b_2, \dots, a_N} \omega^{b_2}_{a_2} + \dots + \epsilon_{a_1, a_2, \dots, b_N} \omega^{b_N}_{a_N} &= 0. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Empregamos a *vierbein*  $e^a$  e a conexão de spin  $\omega^a_b$  para descrever, direta ou indiretamente, todas as propriedades geométricas de  $\mathbb{M}^4$ . Vemos, então, que a *vierbein* ocupa um papel análogo aquele ocupado pelo clássico tensor métrico da Teoria da Relatividade Geral. Do mesmo modo, relacionamos a conexão de spin, juntamente com a *vierbein*, com a conexão afim do espaço-tempo.

Tomemos, por exemplo, sem que ocorra perda de generalidade, um campo descrito por uma 0-forma  $\psi^a$ , e uma derivada covariante  $D$  atuando sobre ele,  $D\psi^a = d\psi^a + \omega^a_b \psi^b$ . Em seguida, impomos que  $D$  atue novamente, ou seja,

$$D^2\psi^a = D(d\psi^a + \omega^a_b \psi^b) = R^a_b \psi^b, \quad (2.45)$$

onde utilizamos a nilpotência da derivada exterior  $d$ . Sobre (2.45), observamos que

$$R^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \omega^c{}_b, \quad (2.46)$$

o qual definimos como 2-forma de curvatura  $R^a{}_b$ . Por outro modo,

$$R^a{}_b = \frac{1}{2} R^a{}_{b\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.47)$$

Podemos ver que a curvatura está relacionada ao tensor de Riemann como

$$R^a{}_b = \frac{1}{2} e^a{}_\alpha e^\beta{}_b R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.48)$$

Logo depois, atuamos com o operador derivada covariante na *vierbein* e o resultado que obtemos é a 2-forma de torção *i.e.*,

$$T^a = De^a \equiv de^a + \omega^a{}_b e^b, \quad (2.49)$$

a qual, nada mais é do que o acoplamento mínimo de  $e^a$ . Sabemos que torção  $T^\alpha{}_{\beta\nu}$ , no formalismo da métrica, depende das conexões afins, e isto está de acordo com a 2-forma (2.49), onde a derivada covariante da *vierbein*  $e^a$  conduz a uma clara dependência com a conexão de spin  $\omega^a{}_b$ ,

$$T^a = \frac{1}{2} e^a{}_\alpha T^\alpha{}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.50)$$

onde  $T^\alpha{}_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha{}_{\nu\mu}$ .

Mostraremos a seguir uma sequência de atuações da derivada covariante que resulta em relações de hierarquia.

$$De^a = T^a \quad (2.51)$$

$$DT^a = R^a{}_b e^b, \quad (2.52)$$

$$DR^a{}_b = 0. \quad (2.53)$$

Notamos que a relação entre a curvatura e a derivada covariante, mostrada em (2.53), é, simplesmente, a conhecida identidade de Bianchi. Nenhuma das identidades, (2.52) ou (2.53), representam um conjunto de equações que possam resultar em informações físicas obtidas a partir delas. Como consequência dessas identidades, ao tomarmos derivadas covariantes sucessivas, não haverá o aparecimento de novos tensores com



possíveis propriedades geométricas. Ressaltamos que, neste formalismo, quando comparamos com a teoria de calibre, a conexão de spin se comporta como a conexão de calibre, enquanto a *vierbein* desempenha o papel de campo de matéria. Do mesmo modo, relacionamos a 2-forma de curvatura com o tensor intensidade de campo, enquanto temos a torção como um acoplamento mínimo da *vierbein*.

### 2.3.4 Teorias generalizadas de gravidade no formalismo de primeira ordem

No formalismo de primeira ordem, usamos  $e^a$ ,  $\omega^a_b$ ,  $R^a_b$ ,  $T^a$  e os tensores invariantes de calibre,  $\eta_{ab}$  e  $\epsilon_{abcd}$ , como os elementos principais na construção de uma teoria de gravidade. Entretanto, não há tanta liberdade para construirmos lagrangianas fisicamente consistentes neste formalismo [21]. A seguir, sob a restrição de possuir apenas derivadas de primeira ordem, apresentaremos duas teorias que generalizam a ação de Einstein-Hilbert, as quais são conhecidas como ação de Lovelock e de Mardones-Zanelli.

#### 2.3.4.1 O teorema de Lovelock

Em 1971, D. Lovelock formulou uma teoria de gravidade, a qual consistia em descrever a interação gravitacional como uma extensão da Teoria da Relatividade Geral proposta por Einstein [65]. A formulação de Lovelock considerava a adição de todos os termos possíveis à ação de Einstein-Hilbert, desde que, tais termos extras fossem locais e não carregassem derivadas maiores que 1. Além dessas condições, a torção nula era outro ponto necessário na elaboração da ação de Lovelock. Uma vez que o quesito torção nula fosse atendido, assim como apenas derivadas primeiras, podemos notar o aparecimento de derivadas segundas da *vierbein* na 2-forma de torção.

A ação geral proposta por Lovelock em  $D$  dimensões pode ser escrita como

$$S_{Lovelock} = \int \sum_{k=0}^{\frac{D}{2}} a_k \mathcal{L}_D^k, \quad (2.54)$$

onde  $a_k$  são constantes arbitrárias e

$$\mathcal{L}_D^k = \epsilon_{a_1 a_2 \dots a_N} R^{a_1 a_2} \dots R^{a_{2k-1} a_{2k}} e^{a_{2k+1}} \dots e^{a_D}. \quad (2.55)$$

Para qualquer dimensão do espaço-tempo, as equações de campo deduzidas a partir da variação da ação (2.54) serão equações diferenciais de segunda ordem relativas à métrica.

Para exemplificarmos, em  $D = 2$  temos

$$S_{L_2} = \frac{1}{32\pi G} \int \epsilon_{ab} (a_0 e^a e^b + a_1 R^{ab}) , \quad (2.56)$$

a qual é a ação usual de Einstein-Hilbert com constante cosmológica em duas dimensões. Sabemos que é uma ação topológica e, portanto, verificamos que a mesma não resulta em qualquer equação de campo.

Como um segundo exemplo, para  $D = 4$  obtemos

$$S_{L_4} = \frac{1}{32\pi G} \int \epsilon_{abcd} (a_0 e^a e^b e^c e^d + a_1 R^{ab} e^c e^d + a_2 R^{ab} R^{cd}) , \quad (2.57)$$

Diretamente observamos em (2.57), o primeiro termo relacionado à constante cosmológica, enquanto o segundo é o termo de Einstein-Hilbert. O último termo (2.57) é um extra que, por estarmos em quatro dimensões, tem papel topológico e, conseqüentemente, não contribui com qualquer termo nas equações de campo oriundas da variação de (2.57). Tal parte da ação é denominado termo de Gauss-Bonnet. Este termo pode ter relevância quântica e sua importância foi estudada em [66, 67].

#### 2.3.4.2 A teoria de Mardones-Zanelli

Em 1991, J. Zanelli e A. Mardones propuseram uma generalização da ação de Lovelock (2.54) descartando a condição de torção nula. Para o caso  $D$ -dimensional, não existe uma ação genérica. Nesta nova formulação, há termos de Chern-Simons, além das séries que envolvem torção. A seguir, alguns exemplos para nos ajudar a esclarecer essa nova teoria.

Em duas dimensões, não há qualquer modificação na ação que envolva a lagrangiana (2.56). Entretanto, em três dimensões, temos

$$S_{MZ_3} = \frac{1}{32\pi G} \int \left[ \epsilon_{abc} (a_0 e^a e^b e^c + a_1 R^{ab} e^c) + b_1 T^a e_a + b_2 \left( \omega^a_b d\omega^b_a + \frac{2}{3} \omega^a_b \omega^b_c \omega^c_a \right) \right] . \quad (2.58)$$

Conforme vimos antes, o primeiro é o termo de constante cosmológica, o segundo é o termo de Einstein-Hilbert, o terceiro é o termo que envolve a 3-forma de Chern-Simons

para a *vierbein*, enquanto o último é o termo topológico que consiste na 3-forma de Chern-Simons para a conexão. Sob certas circunstâncias, o último termos é equivalente aos dois primeiros termos da ação (2.58) [68].

Para o caso 4-dimensional, temos

$$S_{MZ_4} = \frac{1}{32\pi G} \int [\varepsilon_{abcd} (a_0 e^a e^b e^c e^d + a_1 R^{ab} e^c e^d + a_2 R^{ab} R^{cd}) + b_1 R^{ab} R_{ab} + b_2 R_{ab} e^a e^b + b_3 T^a T_a] . \quad (2.59)$$

Os primeiros três termos coincidem com a ação de Lovelock. O quarto termo é termo topológico de Pontryagin e está relacionado ao termo de Chern-Simons para a conexão como

$$R^{ab} R_{ab} = d \left( \omega^a_b d\omega^b_a + \frac{2}{3} \omega^a_b \omega^b_c \omega^c_a \right) . \quad (2.60)$$

Os últimos dois termos são termos de superfície. Além do mais, para  $b_2 = -b_3$ , os últimos dois termos se tornam, respectivamente, no termo topológico de Nieh-Yang, o qual está relacionado ao termo de Chern-Simons relativo à *vierbein* [69],

$$R_{ab} e^a e^b - T^a T_a = d(T^a e_a) . \quad (2.61)$$

# Capítulo 3

## Gravidade induzida para o grupo

### $SO(m, n)$ : uma revisão

Neste capítulo brevemente descreveremos a teoria de gravidade induzida, a qual foi construída em [70]. Apresentaremos os detalhes da construção dando ênfase nos aspectos quânticos e matemáticos que permitem tal indução.

### 3.1 Teoria de Yang-Mills para os grupos de de Sitter

Sejamos mais específicos a partir deste ponto. Isto significa que atribuiremos índices referentes ao grupo  $SO(m, n)$ , isto é, faremos  $\mathcal{A} \equiv AB$ . Dessa forma, a ação de Yang-Mills (2.15) pode ser representada como

$$S_{\text{YM}} = \frac{1}{2} \int F_A{}^B * F_B{}^A, \quad (3.1)$$

onde  $F^A{}_B$  é a 2-forma de intensidade de campo, tal que  $F = dY + \kappa YY$ ,  $d$  é a derivada exterior,  $\kappa$  é o parâmetro de acoplamento e  $Y$  é a conexão de calibre, *i.e.*, o campo fundamental na representação adjunta. O operador Hodge no espaço euclidiano é denotado por  $*$ . A ação (3.1) é invariante sob transformações do grupo de calibre  $SO(m, n)$ ,  $Y \mapsto \mathcal{U}^{-1}(\kappa^{-1}d + Y)\mathcal{U}$ , com  $\mathcal{U} \in SO(m, n)$ . A forma infinitesimal desta transformação de calibre é

$$Y \mapsto Y + \nabla\alpha, \quad (3.2)$$

ond  $\nabla = d + \kappa Y$  é a derivada covariante para a conexão  $Y$ , enquanto  $\alpha$  é o parâmetro infinitesimal.

Antes de prosseguirmos, detalharemos brevemente a estrutura do grupo  $SO(m, n)$ .

### 3.1.1 Estrutura do grupo $SO(m, n)$

O  $SO(m, n)$  restrito a  $m \in \{0, 1, 2\}$  e  $m + n = 5$  é o grupo de calibre que representará as simetrias internas da ação de Yang-Mills pura que usaremos como ponto de partida. Ao mesmo tempo, representaremos o espaço-tempo como uma variedade diferenciável euclidiana 4-dimensional, a qual denotaremos por  $\mathbb{R}^4$ . Usaremos a seguinte classificação:

- Quando  $m=0$ , temos o grupo ortogonal  $SO(5)$ .
- Quando  $m=1$ , temos o grupo de de Sitter  $SO(1, 4)$ .
- Quando  $m=2$ , temos o grupo de anti-de Sitter  $SO(2, 3)$ .

Para simplificarmos a chamada de tais grupos durante o restante do texto, referiremos ao  $SO(m, n)$  como grupo de Sitter. Quando for necessário, faremos a devida distinção entre eles.

O grupo  $SO(m, n)$  define um espaço plano 5-dimensional,  $\mathbb{R}_S^{m,n}$ , cuja métrica de Killing escrevemos como  $\eta^{AB} = \text{diag}(\epsilon, \epsilon, 1, 1, 1)$ , tal que  $\epsilon = (-1)^{(2-m)!}$  e  $\epsilon = (-1)^{m!+1}$ . Neste ponto, não há qualquer relação entre este espaço e o espaço-tempo  $\mathbb{R}^4$ .

A álgebra do grupo  $SO(m, n)$  é representada pela relação

$$[J^{AB}, J^{CD}] = -\frac{1}{2} \{ (\eta^{AC} J^{BD} + \eta^{BD} J^{AC}) - (\eta^{AD} J^{BC} + \eta^{BC} J^{AD}) \}, \quad (3.3)$$

com  $J^{AB} = -J^{BA}$ , onde  $J^{AB}$  representa os 10 geradores anti-hermitianos e anti-simétricos do grupo.  $\{A, B, C, D\}$  são rotuladas por  $\{5, 0, 1, 2, 3\}$ .

De acordo com [55], podemos decompor um grupo segundo um produto direto de dois outros grupos. Consideremos, necessariamente, as seguintes definições:

*Definição 3.1.* Seja um grupo  $G$  e um subgrupo  $H$ . Um espaço *coset*  $C$  é definido como  $C = G/H$  e  $G = H \times C$ . Seja  $h$  e  $c$ , respectivamente, as álgebras de  $H$

e  $C$ , enquanto  $\tilde{h} = \{h, 0\}$ . A álgebra se decompõe como  $[h, h] \subseteq h$ ,  $[c, c] \subseteq \tilde{h}$  e  $[c, h] \subseteq c \oplus \tilde{h}$ . Assim, o subgrupo  $H$  é um subgrupo de estabilidade.

*Definição 3.2.* cosets são classificados como:

1. Se  $[c, c] \subseteq 0$ , então o espaço  $C$  também é um subgrupo de  $G$ , nesse caso, abeliano.
2. Se  $[c, h] \subseteq c$ , então  $C$  é um espaço simétrico ou invariante.

Enfim, decomponos  $SO(m, n)$  conforme

$$SO(m, n) \equiv SO(r, s) \times S(4), \quad (3.4)$$

com  $r = (1 - \epsilon)/2$ ,  $s = 4 - r$  e  $S(4)$  sendo um coset simétrico com 4 graus de liberdade,

$$S(4) = SO(m, n)/SO(r, s). \quad (3.5)$$

A projeção na quinta coordenada do grupo original nos permite decompor a álgebra (3.1.1) como

$$[J^{ab}, J^{cd}] = -\frac{1}{2} \{ (\eta^{ac} J^{bd} + \eta^{bd} J^{ac}) - (\eta^{ad} J^{bc} + \eta^{bc} J^{ad}) \}, \quad (3.6)$$

$$[J^a, J^b] = -\frac{\epsilon}{2} J^{ab}, \quad (3.7)$$

$$[J^{ab}, J^c] = \frac{1}{2} (\eta^{ac} J^b - \eta^{bc} J^a), \quad (3.8)$$

onde  $(a, b, c, d)$  rotulamos com  $\{0, 1, 2, 3\}$  e  $J^a \equiv J^{5a}$ . Enquanto,  $\eta^{ab} = \text{diag}(\epsilon, 1, 1, 1)$ .

Podemos representar a 1-forma de conexão  $Y$  usando a álgebra decomposta, *i.e.*,

$$Y = Y_B^A J_A^B = A_b^a J_a^b + \theta^a J_a, \quad (3.9)$$

tal que  $A_b^a$  e  $\theta^a$  sejam os campos de calibre para cada setor da álgebra. A equação (7.14) mostra como uma transformação de calibre afeta  $Y$ . Com  $U \approx 1 + \kappa \zeta \in SO(m, n)$ , temos

$$Y' = Y + (d + \kappa Y) \zeta. \quad (3.10)$$

O parâmetro de calibre segue a decomposição, ou seja,  $\zeta = \alpha^a{}_b J_a{}^b + \xi^a J_a$ , tal que as transformações de calibre para cada setor sejam

$$A^a{}_b \rightarrow A^a{}_b + D\alpha^a{}_b - \frac{\epsilon\kappa}{4} (\theta^a \xi_b - \theta_b \xi^a), \quad (3.11)$$

$$\theta^a \rightarrow \theta^a + D\xi^a + \kappa\alpha^a{}_b \theta^b. \quad (3.12)$$

Agora  $D = d + \kappa A$  é a derivada covariante em relação ao setor  $SO(r, s)$ .

Decompomos a 2-forma de intensidade de campo como

$$\begin{aligned} F &= F^A{}_B J_A{}^B = F^a{}_b J_a{}^b + F^{5a} J_a \\ &= \left( \Omega^a{}_b - \frac{\epsilon\kappa}{4} \theta^a \theta_b \right) J_a{}^b + K^a J_a, \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde  $\Omega^a{}_b = dA^a{}_b + \kappa A^a{}_c A^c{}_b$  e  $K^a = d\theta^a + \kappa A^a{}_b \theta^b$ . Finalmente, escrevemos a ação de Yang-Mills em sua forma decomposta, *i.e.*,

$$\begin{aligned} S_{YM} &= \frac{1}{2} \int (F^A{}_B * F_A{}^B) = \frac{1}{2} \int (F^a{}_b * F_a{}^b + 2F^a * F_a) \\ &= \frac{1}{2} \int \left\{ \Omega^a{}_b * \Omega_a{}^b + \frac{1}{2} K^a * K_a - \frac{\epsilon\kappa}{2} \Omega^a{}_b * (\theta_a \theta^b) + \frac{\kappa^2}{16} \theta^a \theta_b * (\theta_a \theta^b) \right\} \end{aligned} \quad (3.14)$$

## 3.2 A contração de Inönü-Wigner

O mecanismo conhecido como contração de Inönü-Wigner [51] é empregado sob o seguinte teorema.

*Teorema 1.* Seja um grupo de Lie  $G$  tal que exista um subgrupo não-trivial  $H$ , cuja álgebra permaneça fixa sob contração, enquanto o grupo contraído  $G'$  tenha um subgrupo abeliano invariante<sup>1</sup>  $S$  sobre o qual  $H = G'/S$ . Reciprocamente, a condição necessária para que um grupo  $G'$  seja determinado por contração, a partir de um outro grupo, é a existência, em  $G'$ , de um subgrupo abeliano invariante  $S$  e um subgrupo  $H$  tal que  $G'$  seja o produto semi-direto de  $H$  e  $S$ .

De acordo com [51], simplesmente para ilustrarmos o alcance deste teorema, temos a mecânica newtoniana como o limite da mecânica einsteiniana sob a condição  $\frac{v}{c} \rightarrow 0$ , ou seja, o grupo de Lorentz é reduzido ao grupo de Galileu.

<sup>1</sup>Quando é dito que  $S$  é invariante, significa que  $[s, h] \in s$ , o que implica que  $H$  é um subgrupo de estabilidade.

O Teorema 1 garante que certa álgebra possa ser transformada em outra via um processo de contração, no qual, um certo grupo é reduzido a outro, o qual é ligado ao primeiro por um certo parâmetro.

Vamos a um exemplo do nosso interesse, ou seja, tomemos o grupo de anti-de Sitter  $SO(2, 3)$ , devidamente projetado na quinta coordenada, conforme (3.6), (3.7) e (3.8), nas quais aplicamos a transformação

$$J^a = \ell P^a, \quad (3.15)$$

tal que o parâmetro de contração  $\ell$  seja associado ao raio do universo de de Sitter relacionado à curvatura desse espaço como  $\mathcal{R} \propto \frac{1}{\ell^2}$ . Uma vez que (3.7) e (3.8) são as únicas a serem alteradas pela introdução do parâmetro  $\ell$ , temos

$$[P^a, P^b] = \frac{1}{\mathcal{R}^2} [J^a, J^b] = -\frac{\epsilon}{2\mathcal{R}^2} J^{ab}, \quad (3.16)$$

$$[J^{ab}, P^c] = \frac{1}{2} \left( \eta^{ac} \frac{J^b}{\mathcal{R}} - \eta^{bc} \frac{J^a}{\mathcal{R}} \right) = \frac{1}{2} (\eta^{ac} P^b - \eta^{bc} P^a) \dots \quad (3.17)$$

Tomamos o limite  $\ell \rightarrow \infty$  e obtemos a álgebra do grupo de Poincaré, *i.e.*,

$$[J^{ab}, J^{cd}] = -\frac{1}{2} \{ (\eta^{ac} J^{bd} + \eta^{bd} J^{ac}) - (\eta^{ad} J^{bc} + \eta^{bc} J^{ad}) \}, \quad (3.18)$$

$$[P^a, P^b] = 0, \quad (3.19)$$

$$[J^{ab}, P^c] = \frac{1}{2} (\eta^{ac} P^b - \eta^{bc} P^a). \quad (3.20)$$

Portanto, mostramos, via um parâmetro ligado ao grupo original, que o grupo de de Sitter  $SO(2, 3)$  pode ser reduzido ao grupo de Poincaré  $ISO(1, 3)$ .

Esse mecanismo de contração será crucialmente empregado na deformação da teoria de calibre original em uma teoria de gravidade. O teorema de Inönü-Wigner nos permitirá aplicar um mecanismo de contração que desempenhará um papel importante no processo de indução da teoria de gravidade que construímos.



### 3.3 Redefinição, contração e quebra dinâmica de simetria

Assumimos, independente do mecanismo físico de geração de massa [64, 71], um parâmetro de massa  $\gamma$  para que possamos redefinir os campos de calibre como

$$A \rightarrow \frac{1}{\kappa} A, \quad (3.21)$$

$$\theta \rightarrow \frac{\gamma}{\kappa} \theta. \quad (3.22)$$

Portanto, sob tal redefinição, o campo de calibre  $\theta^a$ , que outrora tinha componentes  $\theta_\mu^a$  com dimensão 1, agora possuem dimensão 0. Agora, escrevemos a ação (3.14) na forma

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int \left\{ \bar{\Omega}^a_b * \bar{\Omega}_a^b + \frac{\gamma^2}{2} \bar{K}^a * \bar{K}_a - \frac{\epsilon\gamma^2}{2} \bar{\Omega}^a_b * (\theta_a \theta^b) + \frac{\gamma^4}{16} \theta^a \theta_b * (\theta_a \theta^b) \right\}. \quad (3.23)$$

Usando  $\bar{\Omega}^a_b = dA^a_b + A^a_c A^c_b$  e  $\bar{K}^a = d\theta^a + A^a_b \theta^b$ , obtemos a ação modificada com a introdução dos parâmetros de acoplamento  $\kappa$  e de massa  $\gamma$ . Ressaltamos que, agora, o parâmetro de acoplamento  $\kappa$  pode ser retirado do integrando da ação (3.23) e, enfim, a ação modificada pode ser interpretada como uma ação de gravidade.

Devido a introdução de um parâmetro de massa, reparametrizamos os geradores do grupo  $SO(m, n)$ . Através do parâmetro de massa, devidamente identificado com o raio da variedade  $\mathbb{R}_S^{m,n}$ , temos liberdade para realizar uma projeção estereográfica [72, 73]. Assim, obtemos

$$J^a = -\frac{\kappa}{\gamma} P^a + \frac{\epsilon}{16} \frac{\gamma}{\kappa} (2\bar{x}_a \bar{x}^b P_b + \sigma^2 P^a), \quad (3.24)$$

onde  $\bar{x}^a$  representam as coordenadas estereográficas do espaço  $\mathbb{R}_S^{(m-1),n}$ . Logo, a partir de (3.21) e (3.22), encontramos

$$\theta \rightarrow \frac{\gamma}{\kappa} \theta \equiv \frac{\gamma}{\kappa} \theta^a J_a = -\theta^a P_a + \frac{\gamma^2}{\kappa^2} \theta^a \left( \frac{\epsilon}{8} \bar{x}_a \bar{x}_b P^b + \frac{\epsilon\sigma^2}{16} P_a \right). \quad (3.25)$$

Portanto, após tal projeção, obtemos uma nova forma da álgebra de de Sitter, *i.e.*,

$$[J^{ab}, J^{cd}] = -\frac{1}{2} \{ (\eta^{ac} J^{bd} + \eta^{bd} J^{ac}) - (\eta^{ad} J^{bc} + \eta^{bc} J^{ad}) \}, \quad (3.26)$$

$$[J^a, J^b] = -\frac{\epsilon\gamma^2}{2\kappa^2} J^{ab}, \quad (3.27)$$

$$[J^{ab}, J^c] = \frac{1}{2} (\eta^{ac} J^b - \eta^{bc} J^a). \quad (3.28)$$

Exploremos agora, a liberdade assintótica do modelo [49, 50], a qual significa que em baixas energias ocorre o aumento do parâmetro  $\kappa$ , possibilitando que, nesse limite,  $\frac{\gamma^2}{\kappa^2} \rightarrow 0$ , para algumas escalas não-perturbativas. Sob tal condição a álgebra de de Sitter (3.26), (3.27) e (3.28) é contraída para a de Poincaré, isto é,

$$[J^a, J^b] = -\frac{\epsilon\gamma^2}{2\kappa^2} J^{ab} \longrightarrow [P^a, P^b] = 0. \quad (3.29)$$

Notamos claramente como o gerador projetado se reduz ao gerador de translações em  $\mathbb{R}_S^{(r,s)}$ ,

$$J^a \longrightarrow -\kappa\gamma^{-1} P^a, \quad (3.30)$$

$$\theta \longrightarrow -\theta^a P_a. \quad (3.31)$$

Dessa forma, a simetria de calibre é dinamicamente deformada ao grupo de Poincaré,  $SO(m, n) \longrightarrow ISO(r, s)$ , para alguns valores do regime de acoplamento forte. Simultaneamente, a contração de Inönü-Wigner induz uma quebra de simetria da ação (3.14), esta invariante sob  $SO(m, n)$ , mas não sob  $ISO(r, s)$ , pois  $ISO(r, s) \not\subset SO(m, n)$ . Entretanto,  $ISO(r, s) \supset SO(r, s) \subset SO(m, n)$ , isto é,  $SO(r, s)$  é subgrupo de ambos. Adicionalmente,  $SO(r, s)$  é um subgrupo estável. Consequentemente, a contração de Inönü-Wigner implica diretamente na quebra de simetria  $SO(m, n) \longrightarrow SO(r, s)$ .

Portanto, as transformações (3.11) e (3.12) se reduzem a

$$A^a_b \rightarrow A^a_b + D\alpha^a_b, \quad (3.32)$$

$$\theta^a \rightarrow \theta^a - \alpha^a_b \theta^b, \quad (3.33)$$

o que decorre da redefinição assumida em (3.21) e (3.22). Quando comparamos (3.32) e (3.33) com (3.11) e (3.12), observamos a retirada do setor da álgebra que

corresponde a quinta coordenada, reduzindo assim a dimensão do espaço interno  $\mathbb{R}_S^{m,n}$  5-dimensional para 4-dimensional. A partir deste ponto, os campos  $A^a_b$  se comportam como campos de calibre, enquanto os campos  $\theta^a$  ficam associados a campos de matéria. Sempre nos referindo ao grupo de estabilidade  $SO(r, s)$ .

### 3.4 Gravidade induzida

Realizaremos o mapeamento da ação (3.23) apresentada na Seção 3.1 para o grupo  $SO(r, s)$ , a qual terá cada configuração  $(A, \theta)$  mapeada em uma geometria efetiva  $(\omega, e)$ . O mapeamento que estamos implementando é biunívoco, tal que, cada ponto  $x \in \mathbb{R}^4$  seja relacionado a outro ponto  $X \in \mathbb{M}^4$ . O mapeamento necessariamente deve ser um isomorfismo para garantir a preservação da estrutura algébrica definida em  $\mathbb{R}^4$ . Primeiro, mapeamos cada campo de calibre em um respectivo ente geométrico, *i.e.*,

$$\omega^a_b = \delta^a_a \delta^b_b A^a_b, \quad (3.34)$$

$$e^a = \delta^a_a \theta^a, \quad (3.35)$$

com os índices  $a, b, \dots$  referentes ao espaço  $T^*_X(\mathbb{M})$ . Agora, expandimos (3.34) e (3.35) em componentes, as quais tomam a forma

$$\omega^a_{b\mu}(X) dX^\mu = \delta^a_a \delta^b_b A^a_{b\mu}(x) dx^\mu, \quad (3.36)$$

$$e^a_\mu(X) dX^\mu = \delta^a_a \theta^a_\mu(x) dx^\mu, \quad (3.37)$$

Analogamente, mapeamos os Hodges duais em  $\mathbb{R}^4$  em seus respectivos Hodges duais em  $\mathbb{M}^4$ . Logo,

$$\star\omega^a_b = \delta^a_a \delta^b_b \star A^a_b, \quad (3.38)$$

$$\star e^a = \delta^a_a \star \theta^a. \quad (3.39)$$

Similarmente, em componentes, obtemos

$$\omega^{a\mu}_b(X) \sqrt{\tilde{g}} \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} dX^\alpha dX^\beta dX^\gamma = \delta^a_a \delta^b_b A^{a\mu}_b(x) \sqrt{g} \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} dx^\alpha dx^\beta dx^\gamma, \quad (3.40)$$

$$e^{a\mu}(X) \sqrt{\tilde{g}} \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} dX^\alpha dX^\beta dX^\gamma = \delta^a_a \theta^{a\mu}(x) \sqrt{g} \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} dx^\alpha dx^\beta dx^\gamma, \quad (3.41)$$

Em seguida, mapeamos e identificamos cada termo da ação (3.23) conforme a estrutura geométrica:

$$\begin{aligned}\bar{\Omega}^a_b * \bar{\Omega}_a^b &= (dA^a_b + A^a_c A^c_b) * (dA_a^b + A_a^c A_c^b) \\ &= \underbrace{(d\omega^a_b + \omega^a_c \omega^c_b)}_{R^a_b} \star \underbrace{(d\omega_a^b + \omega_a^c \omega_c^b)}_{R_a^b},\end{aligned}\quad (3.42)$$

com  $R^a_b$  sendo a 2-forma de curvatura em  $\mathbb{M}^4$ . Similarmente,

$$\begin{aligned}\bar{K}^a * \bar{K}_a &= D\theta^a * D\theta_a \\ &= \underbrace{De^a}_{T^a} \star \underbrace{De_a}_{T_a},\end{aligned}\quad (3.43)$$

com  $T^a$  sendo a 2-forma de torção em  $\mathbb{M}^4$ .

Os outros dois termos são

$$\bar{\Omega}^a_b * (\theta_a \theta^b) = (dA^a_b + A^a_c A^c_b) * (\theta_a \theta^b) = R^a_b \star (e_a e^b), \quad (3.44)$$

$$(\theta^a \theta_b) * (\theta_a \theta^b) = (e^a e_b) \star (e_a e^b), \quad (3.45)$$

e o termo comum às duas equações acima será

$$\star (e^a e^b) = \frac{1}{2} \epsilon^{abcd} e_c e_d. \quad (3.46)$$

Portanto, quando consideramos os novos termos mapeados, (3.42), (3.43), (3.44) e (3.45), conjuntamente com (3.46), deduzimos que a ação (3.23) se torna

$$S = \frac{\gamma^2}{4\kappa^2} \int \left\{ \frac{2}{\gamma^2} R^a_b \star R_a^b + T^a \star T_a - \frac{\epsilon}{2} \epsilon_{abcd} R^{ab} e^c e^d + \frac{\gamma^2}{16} \epsilon_{abcd} e^a e^b e^c e^d \right\}. \quad (3.47)$$

Antes do último e crucial passo para identificarmos esta ação (3.47) com uma ação gravitacional 4-dimensional, precisamos associar os parâmetros  $\kappa$  e  $\gamma$  com a constante gravitacional de Newton,  $G$ , e a constante cosmológica  $\Lambda^2$ , *i.e.*,

$$\frac{\gamma^2}{\kappa^2} = \frac{1}{4\pi G} \quad \text{e} \quad \gamma^2 = \frac{4\Lambda^2}{3}. \quad (3.48)$$

Finalmente, encontramos a construção final de uma ação de gravidade, ou seja,

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int \left\{ \frac{3}{2\Lambda^2} R_b^a \star R_a^b + T^a \star T_a - \frac{\epsilon}{2} \varepsilon_{abcd} R^{ab} e^c e^d + \frac{\Lambda^2}{12} \varepsilon_{abcd} e^a e^b e^c e^d \right\}. \quad (3.49)$$

### 3.4.1 Equações de campo

No intuito de explorarmos os limites desta teoria de gravidade, precisamos determinar as equações de campo. Antes de atacarmos a ação (3.49), vamos explicitar o modo mais geral possível de variar uma ação sob o formalismo que estamos empregando nesta tese. De acordo com [74] podemos variar a ação usando formas diferenciais. Logo, a variação da ação relativa à  $p$ -forma  $\Phi^i$  pode ser escrita como

$$\delta S = \int_{\mathbb{M}} \delta \mathcal{L} = \int_{\mathbb{M}} \sum_i \delta \Phi^i \wedge \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^i} - (-1)^p d \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (d\Phi^i)} \right) \right] + \int_{\mathbb{M}} d \left( \sum_i \delta \Phi^i \wedge \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (d\Phi^i)} \right), \quad (3.50)$$

onde  $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(\Phi^i)$  e  $d$  é a derivada exterior. Considerando o último termo de (3.50) nulo na fronteira e usando o princípio de Hamilton, *i.e.*,  $\delta S = 0$ , temos as equações de Euler-Lagrange na linguagem de formas diferenciais,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^i} - (-1)^p d \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (d\Phi^i)} \right) = 0. \quad (3.51)$$

Agora, podemos aplicar o mesmo desenvolvimento que apresentamos acima para encontrar (3.50) e as equações de campo serão obtidas considerando as variações da ação (3.49) em relação à *vierbein*  $e^a$  e à conexão de spin  $\omega^a_b$ , ambas 1-formas.

Detalhemos estes cálculos, tal como segue. Primeiro, reescrevemos (3.52) de forma simplificada, *i.e.*,

$$S_{grav} = \frac{1}{16\pi G} \int \left( \frac{3}{2\Lambda^2} \mathcal{L}_{R^2} + \mathcal{L}_{T^2} - \frac{\epsilon}{2} \mathcal{L}_{Re^2} + \frac{\Lambda^2}{12} \mathcal{L}_{e^4} \right), \quad (3.52)$$

onde  $\mathcal{L}_{R^2} \equiv R_{ab} \star R^{ab}$ ,  $\mathcal{L}_{T^2} \equiv T^a \star T_a$ ,  $\mathcal{L}_{Re^2} \equiv \varepsilon_{abcd} R^{ab} e^c e^d$  e  $\mathcal{L}_{e^4} \equiv \varepsilon_{abcd} e^a e^b e^c e^d$ . Segundo, tomemos as derivadas parciais em relação aos campos e em relação às suas derivadas exteriores, tais como aparecem em (3.51).

Antes, devemos ter uma certa cautela porque o Hodge dual carrega informações relacionadas à *vierbein*. Isto implica que o termo  $\mathcal{L}_{R^2}$  precisa ser explicitado, ou seja,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{R^2} &\equiv R_{ab} \star R^{ab} \\ &= R_{ab} \star \left( \frac{1}{2} R^{ab}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \right) = R_{ab} \left[ \frac{1}{2} R^{ab}_{\mu\nu} \left( \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} R_{ab} R^{ab}_{\delta f} \varepsilon^{\delta f}_{gh} e^g e^h ,\end{aligned}\tag{3.53}$$

onde usamos  $e^a = e^a_\mu dx^\mu \Leftrightarrow dx^\mu = e^\mu_a e^a$ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}_{R^2}}{\partial e^c} &= \frac{1}{4} R_{ab} \left[ R^{ab}_{\delta f} \varepsilon^{\delta f}_{gh} (\delta^g_c e^h - e^g \delta^h_c) \right] = R_{ab} \left( \frac{1}{2} \varepsilon^{\delta f}_{gh} R^{ab}_{\delta f} e^h \right) = \\ &= R_{ab} \star (R^{ab} e^c) .\end{aligned}\tag{3.54}$$

Como  $\partial \mathcal{L}_{R^2} / \partial (de^c) = 0$ , então temos

$$(\delta \mathcal{L}_{R^2})_e = \delta e^c R_{ab} \star (R^{ab} e_c) .\tag{3.55}$$

Prosseguimos com o termo quadrático da torção. Primeiro, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}_{T^2}}{\partial e^c} &= -\omega^a_b \delta^b_c \star T_a + T^a \frac{\partial}{\partial e^c} \star T_a \\ &= \omega^a_c \star T_a + \frac{1}{4} T_{abd} \varepsilon^{bd}_{ef} (\delta^e_c e^f - e^e \delta^f_c) \\ &= \omega^a_c \star T_a + \underbrace{\frac{1}{2} T_{abd} \varepsilon^{bd}_{cf} e^f}_{=\star(T_a e_c)} \\ &= \omega^a_c \star T_a + T^a \star (T_a e_c) .\end{aligned}\tag{3.56}$$

Segundo,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (de^c)} = \star T_c .\tag{3.57}$$

Logo,

$$\begin{aligned}(\delta \mathcal{L}_{T^2})_e &= \delta e^c \left[ \frac{\partial \mathcal{L}_{T^2}}{\partial e^c} - (-1)^{p=1} d \left( \frac{\partial \mathcal{L}_{T^2}}{\partial (de^c)} \right) \right] \\ &= \delta e^c [D \star T_c + T^a \star (T_a e_c)] ,\end{aligned}\tag{3.58}$$

onde  $D \star T_c = d \star T_c + \omega^a_c T_a$ . Diretamente, temos o termo de Einstein-Hilbert,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{Re^2}}{\partial e^c} &= \varepsilon_{abcd} R^{ab} (\delta^d_c e^f - e^d \delta^f_c) \\ &= 2\varepsilon_{cabd} R^{ab} e^d, \end{aligned} \quad (3.59)$$

e uma vez que  $\partial \mathcal{L}_{Re^2} / \partial (de^c) = 0$ , obtemos, a partir de (3.51),

$$(\delta \mathcal{L}_{Re^2})_e = \delta e^c (2\varepsilon_{cabd} R^{ab} e^d). \quad (3.60)$$

De maneira tão direta quanto ao termo anterior, obtemos o termo da constante cosmológica,

$$(\delta \mathcal{L}_{e^4})_e = \delta e^c (4\varepsilon_{cabd} e^a e^b e^d). \quad (3.61)$$

Após obtermos todas as variações parciais, (3.55), (3.58), (3.60) e (3.61), podemos substituir na variação completa da ação (3.52) relativamente à  $e^c$ , *i.e.*,

$$\begin{aligned} (\delta S_{grav})_e &= \frac{1}{16\pi G} \int \left( \frac{3}{2\Lambda^2} (\delta \mathcal{L}_{R^2})_e + (\delta \mathcal{L}_{T^2})_e - \frac{\epsilon}{2} (\delta \mathcal{L}_{Re^2})_e + \frac{\Lambda^2}{12} (\delta \mathcal{L}_{e^4})_e \right) \\ &= \frac{1}{16\pi G} \int \delta e^c \left[ \frac{3}{2\Lambda^2} R_{ab} \star (R^{ab} e_c) + D \star T_c + T^a \star (T_a e^c) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\epsilon}{2} (2\varepsilon_{cabd} R^{ab} e^d) + \frac{\Lambda^2}{12} (\varepsilon_{cabd} e^a e^b e^d) \right], \end{aligned} \quad (3.62)$$

e, com  $\delta S_{Grav} = 0$ , finalmente determinarmos a primeira equação de campo,

$$\frac{3}{2\Lambda^2} R^{bc} \star (R_{bc} e_a) + \varepsilon_{abcd} \left( -\epsilon R^{bc} e^d + \frac{\Lambda^2}{3} e^b e^c e^d \right) + T^b \star (T_b e^a) + D \star T_a = 0. \quad (3.63)$$

Temos uma equação de campo bastante diferente daquela obtida por Einstein, pois além do termo entre parênteses em (3.63), o qual caracteriza as equações de Einstein com constante cosmológica, temos termos extras como o quadrado da curvatura, o quadrado da torção e uma derivada covariante da torção.

A partir de agora, faremos as variações em relação à conexão de spin. Primeiro, determinamos as derivadas parciais do termo de curvatura quadrática para que possamos escrever sua variação.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{R^2}}{\partial \omega^c_d} &= \frac{\partial}{\partial \omega^c_d} R^{ab} \star R_{ab} + R^{ab} \frac{\partial}{\partial \omega^c_d} (\star R_{ab}) \\ &= 2 (\delta^a_c \delta^f_d \omega_f^b - \omega^a_f \delta^f_c \delta^b_d) \star R_{ab} \\ &= 2 (\omega_d^b \star R_{cb} - \omega^a_c \star R_{ad}), \end{aligned} \quad (3.64)$$

onde salientamos que o fator 2 é devido ao operador Hodge não depender de  $\omega^c{}_\delta$ , diferentemente do que aconteceu em relação à *vierbein*. Em seguida, obtemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{R^2}}{\partial (d\omega^c{}_\delta)} = 2\delta^a{}_c \delta^b{}_\delta \star R_{ab} = 2 \star R_{c\delta} . \quad (3.65)$$

Logo,

$$(\delta \mathcal{L}_{R^2})_\omega = \delta\omega^{c\delta} [2 (d \star R_{c\delta} + \omega_\delta{}^b \star R_{cb} + \omega_c{}^a \star R_{a\delta})] = \delta\omega^{c\delta} (2D \star R_{c\delta}) . \quad (3.66)$$

Para o termo de torção quadrática, temos somente

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{L}_{T^2}}{\partial \omega^c{}_\delta} &= \frac{\partial}{\partial \omega^c{}_\delta} T^a \star T_a + T^a \frac{\partial}{\partial \omega^c{}_\delta} (\star T_a) \\ &= 2\delta^a{}_c \delta^d{}_\delta e^f \star T_a = 2e^d \star T_c , \end{aligned} \quad (3.67)$$

uma vez que  $\partial \mathcal{L}_{T^2} / \partial (d\omega^c{}_\delta) = 0$ . Portanto, encontramos, após o devido cuidado com antissimetrização dos índices,

$$(\delta \mathcal{L}_{T^2})_\omega = \delta\omega^{c\delta} (e_c \star T_\delta - e_\delta \star T_c) . \quad (3.68)$$

Como não teremos que nos preocupar com o termo de constante cosmológica, pois este não depende da conexão de spin, determinamos a variação do último termo, ou seja, o termo de Einstein-Hilbert, cuidando primeiramente das derivadas parciais, tal como segue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}_{Re^2}}{\partial \omega^c{}_\delta} &= (\delta^a{}_c \delta^f{}_\delta \omega_{fb} - \omega^a{}_f \delta^f{}_c \delta^b{}_\delta) \star 2 (e_a e_b) \\ &= 2 [\omega_\delta{}^b \star (e_c e_b) + \omega_c{}^a \star (e_a e_\delta)] . \end{aligned} \quad (3.69)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{Re^2}}{\partial (d\omega^c{}_\delta)} = \delta^a{}_c \delta^b{}_\delta [2 \star (e_a e_\delta)] = 2 \star (e_c e_\delta) , \quad (3.70)$$

logo, obtemos

$$\begin{aligned} (\delta \mathcal{L}_{Re^2})_\omega &= \delta\omega^{c\delta} \{ 2 [d \star (e_c e_\delta) + \omega_\delta{}^b \star (e_c e_b) + \omega_c{}^a \star (e_a e_\delta)] \} \\ &= \delta\omega^{c\delta} [2D \star (e_c e_b)] \\ &= \delta\omega^{c\delta} D (\varepsilon_{cdab} e^a e^b) \\ &= \delta\omega^{c\delta} (\varepsilon_{c\delta ab} D e^a e^b) \\ &= \delta\omega^{c\delta} (2\varepsilon_{c\delta ab} T^a e^b) . \end{aligned} \quad (3.71)$$



Portanto, utilizamos (3.66), (3.68) e (3.71) e determinamos a variação completa da ação em relação à  $\omega^{cd}$ , *i.e.*,

$$\begin{aligned} (\delta S_{grav})_\omega &= \frac{1}{16\pi G} \int \left( \frac{3}{2\Lambda^2} (\delta \mathcal{L}_{R^2})_\omega + (\delta \mathcal{L}_{T^2})_\omega - \frac{\epsilon}{2} (\delta \mathcal{L}_{Re^2})_\omega \right) \\ &= \frac{1}{16\pi G} \int \delta \omega^{cd} \left[ \frac{3}{2\Lambda^2} (2D \star R_{cd}) + e_c \star T_d - e_d \star T_c - \frac{\epsilon}{2} (2\epsilon_{cdab} T^a e^b) \right], \end{aligned} \quad (3.72)$$

tal que, com  $(\delta S_{Grav})_\omega = 0$ , encontramos a segunda equação de campo,

$$\frac{3}{\Lambda^2} D \star R_{ab} + e_b \star T_a - e_a \star T_b - \epsilon \epsilon_{abcd} T^c e^d = 0. \quad (3.73)$$

Agora, uma vez que as equações de campo foram determinadas, podemos obter uma solução simples para o sistema composto por (3.63) e (3.73) ao considerar torção nula. Isso nos leva a  $R^{ab} = \Lambda^2/3 (1 \pm i) e^a e^b$ , a qual, embora incomum, é matematicamente consistente.

Quando consideramos todas as contribuições de vácuo oriundas de todas as outras interações, modificamos a ação gravitacional de modo a incluir a constante cosmológica observacional, tal como descreveremos em seguida.

$$\begin{aligned} S_{Grav} &= S_{grav} + S_{vac} \\ &= \frac{1}{16\pi G} \int \left( \frac{3}{2\Lambda^2} \mathcal{L}_{R^2} + \mathcal{L}_{T^2} - \frac{\epsilon}{2} \mathcal{L}_{Re^2} + \frac{\Lambda^2}{12} \mathcal{L}_{e^4} \right) + \frac{1}{16\pi G} \int \frac{\Lambda_{QFT}^2}{12} \mathcal{L}_{e^4} \\ &= \frac{1}{16\pi G} \int \left( \frac{3}{2\Lambda^2} \mathcal{L}_{R^2} + \mathcal{L}_{T^2} - \frac{\epsilon}{2} \mathcal{L}_{Re^2} + \frac{1}{12} \underbrace{(\Lambda^2 + \Lambda_{QFT}^2)}_{=\tilde{\Lambda}^2} \mathcal{L}_{e^4} \right) + \\ S_{Grav} &= \frac{1}{16\pi G} \int \left( \frac{3}{2\Lambda^2} \mathcal{L}_{R^2} + \mathcal{L}_{T^2} - \frac{\epsilon}{2} \mathcal{L}_{Re^2} + \frac{\tilde{\Lambda}^2}{12} \mathcal{L}_{e^4} \right), \end{aligned} \quad (3.74)$$

onde  $\mathcal{L}_{R^2} \equiv R_{ab} \star R^{ab}$ ,  $\mathcal{L}_{T^2} \equiv T^a \star T_a$ ,  $\mathcal{L}_{Re^2} \equiv \epsilon_{abcd} R^{ab} e^c e^d$  e  $\mathcal{L}_{e^4} \equiv \epsilon_{abcd} e^a e^b e^c e^d$ .

Logo, encontramos uma outra solução quando consideramos distintamente a constante cosmológica observacional, a qual representamos por  $\tilde{\Lambda}^2$ , e a constante cosmológica renormalizada da teoria,  $\Lambda^2$ . Esta modificação se reflete consistentemente na equação

de campo relacionada à *vierbein*, isto é,

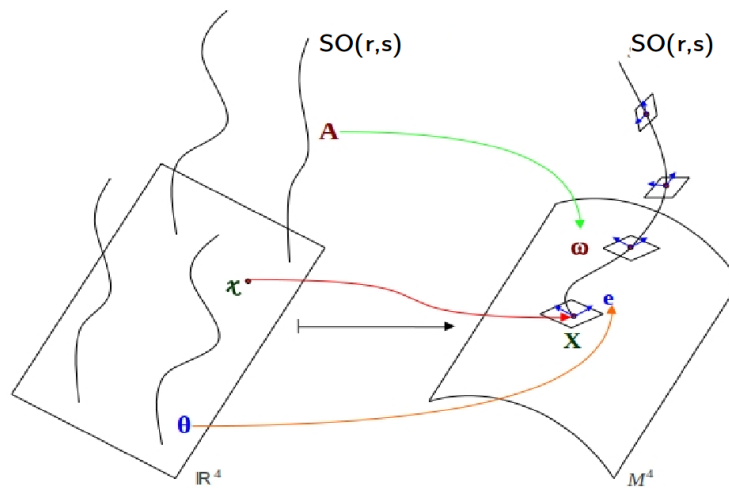
$$\frac{3}{2\Lambda^2} R^{bc} \star (R_{bc} e_a) + \epsilon_{abcd} \left( -\epsilon R^{bc} e^d + \frac{\tilde{\Lambda}^2}{3} e^b e^c e^d \right) + T^b \star (T_b e^a) + D \star T_a = 0, \quad (3.75)$$

Com  $T = 0$ , simplicamos ainda mais para

$$-\frac{3}{2\Lambda^2} R^{bc} \star (R_{bc} e_a) + \epsilon_{abcd} \left( R^{bc} e^d - \frac{\tilde{\Lambda}^2}{3} e^b e^c e^d \right) = 0. \quad (3.76)$$

### 3.4.2 Aspectos formais do mapeamento

O mapeamento que realizamos é um isomorfismo entre o  $\mathbb{R}^4$  e  $\mathbb{M}^4$ , tal que cada ponto  $x \in \mathbb{R}^4$  é mapeado em um ponto  $X \in \mathbb{M}^4$ . Conseqüentemente, uma configuração  $(A, \theta)$  foi identificada com uma geometria  $(\omega, e)$ . Quando associamos  $\theta$  com a *vierbein*  $e$ , implica que, em cada ponto  $X \in \mathbb{M}^4$ , o espaço cotangente  $T_X(\mathbb{M}^4)$  adquire uma isometria local caracterizada pelo grupo de calibre  $SO(r, s)$ . Podemos ilustrar este processo com a Figura 3.1.



**Figura 3.1** Cada  $x \in \mathbb{R}^4$  é mapeado em um  $X \in \mathbb{M}^4$ . Cada configuração  $(A, \theta)$  é mapeada com uma geometria  $(\omega, e)$ , tal que  $A \rightarrow \omega$  e  $\theta \rightarrow e$ .

Similarmente, mapeamos a 1-forma de campo de calibre  $A_b^a$  na 1-forma de conexão de spin  $\omega_b^a$ . Necessariamente e suficientemente, o isomorfismo garante que tenhamos que cada configuração  $(A, \theta)$  defina unicamente a geometria  $(\omega, e)$ . Mostraremos a

seguir, como mapeamos o espaço das  $p$ -formas  $E^p$  em  $\mathbb{R}^4$  no espaço das  $p$ -formas  $\tilde{E}^p$  em  $\mathbb{M}^4$ . E, analogamente, para os respectivos espaços duais, ou seja,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^p &\rightarrow \tilde{\mathbb{E}}^p, \\ *\mathbb{E}^p &\rightarrow *\tilde{\mathbb{E}}^p. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Assumimos uma métrica original geral  $g_{\mu\nu}$ , a qual estaremos livre para fixá-la a alguma métrica conhecida. Isto é o que denominamos liberdade de escolha da métrica original, a qual pode ser euclidiana ou lorentziana. Denotaremos a métrica efetiva por  $\tilde{g}_{\mu\nu}$ . É necessário que  $g = |\det g_{\mu\nu}| \neq 0$  e  $\tilde{g} = |\det \tilde{g}_{\mu\nu}| \neq 0$ . Aplicamos o mapeamento (3.77) a uma  $p$ -forma qualquer,

$$f_{\mu_1 \dots \mu_p}(x) dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_p} = \tilde{f}_{\mu_1 \dots \mu_p}(X) dX^{\mu_1} \dots dX^{\mu_p}, \quad (3.78)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^d$  e  $X \in \mathbb{M}^d$ . A partir de (3.78), computamos

$$f_{\mu_1 \dots \mu_p}(x) = L^{\nu_1}_{\mu_1} \dots L^{\nu_p}_{\mu_p} \tilde{f}_{\nu_1 \dots \nu_p}(X), \quad (3.79)$$

onde  $L^\nu_\mu = \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\mu}$ . Para os respectivos Hodge duais, temos

$$\begin{aligned} &\sqrt{\tilde{g}} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_p \nu_{p+1} \dots \nu_d} f^{\mu_1 \dots \mu_p}(x) dx^{\nu_{p+1}} \dots dx^{\nu_d} = \\ &= \sqrt{\tilde{g}} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_p \nu_{p+1} \dots \nu_d} \tilde{f}^{\mu_1 \dots \mu_p}(X) dX^{\nu_{p+1}} \dots dX^{\nu_d}, \end{aligned} \quad (3.80)$$

e, a partir deste, obtemos

$$f^{\mu_1 \dots \mu_p} = \left(\frac{\tilde{g}}{g}\right)^{1/2} \left(\frac{L}{d}\right)^{d-p} \tilde{f}^{\mu_1 \dots \mu_p}, \quad (3.81)$$

com  $L = L^\mu_\mu$ . Substituindo (3.79) e (3.81) nos permite escrever

$$f_{\mu_1 \dots \mu_p} = \left(\frac{\tilde{g}}{g}\right)^{1/2} \left(\frac{L}{d}\right)^{d-p} \tilde{g}^{\nu_1 \alpha_1} g_{\alpha_1 \mu_1} \dots \tilde{g}^{\nu_p \alpha_p} g_{\alpha_p \mu_p} \tilde{f}_{\nu_1 \dots \nu_p}. \quad (3.82)$$

Agora, manipulando (3.82) e (3.79), deduzimos que

$$L^\nu_\mu = \left(\frac{\tilde{g}}{g}\right)^{1/2p} \left(\frac{L}{d}\right)^{(d-p)/p} \tilde{g}^{\nu\alpha} g_{\alpha\mu}, \quad (3.83)$$

onde  $p > 0$ . Entretanto, para garantirmos a validade de (3.83), necessariamente temos o vínculo envolvendo o traço, ou seja,

$$\left(\frac{\tilde{g}}{g}\right)^{1/2} \left(\frac{L}{d}\right)^d = 1, \quad (3.84)$$

o qual implica em

$$L^\nu{}_\mu = \frac{d}{L} \tilde{g}^{\nu\alpha} g_{\alpha\mu}. \quad (3.85)$$

E, portanto, usando (3.84) e (3.85), obtemos

$$\begin{aligned} L &= d \left(\frac{g}{\tilde{g}}\right)^{1/2d}, \\ L &= d^{1/2} (\tilde{g}^{\mu\nu} g_{\mu\nu})^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.86)$$

respectivamente. Usando as relações (3.86), determinamos um outro vínculo, *i.e.*,

$$(\tilde{g}^{\mu\nu} g_{\mu\nu})^{1/2} = d^{1/2} \left(\frac{g}{\tilde{g}}\right)^{1/2d}. \quad (3.87)$$

Finalmente, deduzimos a equação final para a matriz de mapeamento,

$$L^\nu{}_\mu = \left(\frac{\tilde{g}}{g}\right)^{\frac{1}{8}} \tilde{g}^{\nu\alpha} g_{\alpha\mu}. \quad (3.88)$$

onde  $L^\nu{}_\mu = \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\mu}$ . Portanto, obtemos a inversa de  $L^\nu{}_\mu$ ,

$$(L^\nu{}_\mu)^{-1} = \left(\frac{g}{\tilde{g}}\right)^{\frac{1}{8}} g^{\nu\alpha} \tilde{g}_{\alpha\mu}. \quad (3.89)$$

A unicidade é um ponto crucial neste modelo de mapeamento, caracterizando, desse modo, a sua não-degenerescência. Assim, quando obtemos a inversa de  $L^\nu{}_\mu$ , garantimos que o mapeamento é não-degenerado. Calculamos a métrica efetiva pelas equações de campo, entretanto, a métrica original é arbitrariamente escolhida. Por causa do espaço euclidiano original, temos

$$L^\nu{}_\mu = (\tilde{g})^{\frac{1}{8}} \tilde{g}^{\nu\alpha} \delta_{\alpha\mu}. \quad (3.90)$$

Para sabermos quais simetrias estão em voga, devemos saber o valor de  $m$ . Quando  $m = 0$  ou  $m = 1$ , a redução recai no grupo  $SO(4)$ , ocasionado em isometrias de um espaço euclidiano. Quando  $m = 2$ , a redução leva ao  $SO(1, 3)$ , cujas isometrias

locais são aquelas de um espaço-tempo de Minkowski. Para  $m = 2$  podemos ter a iminência do Princípio de Equivalência da Relatividade Geral. Enquanto isso, para  $m = 0$  e, conseqüentemente, com isometrias para o grupo  $SO(4)$ , temos a garantia da unitariedade, pois este é um grupo compacto. Entretanto, cabe ressaltar que podemos abrir mão da unitariedade em favor de uma descrição geométrica clássica do campo gravitacional. O elo entre os casos  $m = 2$  e  $m = 0$  pode ser encontrado através do método das rotações de Wick.

### 3.4.3 Interlúdio: Uma analogia entre cromodinâmica quântica e gravidade

A teoria de gravidade quântica euclidiana que estamos propondo é uma analogia com a cromodinâmica quântica. Assumimos que a teoria de gravidade quântica seja descrita por uma teoria de Yang-Mills em um espaço-tempo 4-dimensional euclidiano  $\mathbb{R}^4$ . O motivo que nos levou a escolher o espaço-tempo euclidiano foi por este ser um espaço de geometria mais simples. Logo, os cálculos estabelecidos em teorias quânticas de campos também serão mais simples. Em relação ao número de dimensões, permanecemos com o mesmo número que a Teoria da Relatividade Geral se apresenta na sua forma original proposta por Einstein [22]. Um fator relevante à construção da teoria de gravidade induzida se refere ao parâmetro de acoplamento, o qual, em quatro dimensões, é adimensional e não afeta os setores de calibre durante a redefinição dos campos  $A$  e  $\theta$ . O único parâmetro que afeta a dimensão é o parâmetro de massa, o qual, por sua vez, afeta somente o setor que habita  $\theta$ .

O campo de calibre está agregado aos geradores do grupo de calibre, o qual, por sua vez, está associado à álgebra daquele grupo com  $\dim(G)$ . Exigimos as seguintes características para o grupo de calibre  $G$ :

- (i)  $\dim(G) \geq \dim(ISO(4))$ . Isto garante que os graus de liberdade da teoria de gravidade estejam presentes.
- (ii) O fibrado principal que usaremos para descrever a teoria não pode ser trivial. Para que o problema de Gribov insurja e, portanto, a respectiva escala de massa possa vir a ser implementada no mecanismo de quebra, necessariamente precisamos de um fibrado não-trivial [58, 59, 75–77].

- (iii) O grupo deve se decompor como  $G = H + Q$ , tal que  $Q = G/H$  seja um coset simétrico e, conseqüentemente,  $H$  seja um grupo de estabilidade. O grupo de estabilidade  $H$  deve ser homomorfo a grupos tipo-Lorentz e  $Q$  deve definir uma representação vetorial de  $H$ . Dessa forma, identificamos  $H$  com transformações locais de Lorentz e  $Q$  com o setor que expande a *vierbein*. Conseqüentemente, podemos identificar as componentes de calibre com a conexão de spin e a *vierbein*.
- (iv) Que tenhamos uma quebra de simetria  $G \rightarrow H$ , tal que o campo no setor  $Q$  se transforme como campos de matéria em relação a  $H$ , o que resulta do fato de  $Q$  ser um espaço coset.

Um ingrediente indispensável à nossa construção da teoria é o parâmetro de massa que aplicamos na redefinição do campo de calibre relacionado ao setor  $Q$ . Conforme mencionamos anteriormente, caso a adimensionalização do campo  $\theta$  não seja feita, não poderíamos identificar esse campo com a *vierbein* e nenhuma teoria de gravidade poderia ser induzida. Enfim, usaremos o parâmetro de Gribov, o qual surge quando tentamos implementar a escolha de um calibre via o método de Faddeev-Popov no processo de quantização das teorias de Yang-Mills. Detalharemos a obtenção desse parâmetro no Capítulo 4. Juntamente com o parâmetro de Gribov, temos uma quebra de simetria BRST. Em linhas gerais, podemos entender a relação entre o parâmetro de Gribov e a quebra de BRST da seguinte forma:

A teoria pode ser dividida em dois regimes. O setor ultravioleta (UV), o regime de altas energias, a qual é uma teoria de calibre não-massiva, e o setor infravermelho (IR), o regime de baixas energias, o qual apresenta uma quebra suave de simetria BRST e gera dinamicamente parâmetros de massa. A teoria de calibre não-abeliana que habita o setor UV tem liberdade assintótica, cujos campos de calibre carregam spin 1. Apesar dos graus de liberdade coincidirem em número com uma teoria de gravidade de primeira ordem, não podemos realizar tal identificação a menos que um parâmetro de massa tome seu lugar na teoria e possamos definir a *vierbein*. Se a energia diminuir, então ocorre uma quebra suave de BRST com a iminência do parâmetro de Gribov e outros possíveis parâmetros de massa. Neste estágio, os propagadores dos campos fundamentais têm polos complexos, o que nos permite interpretar que as excitações físicas são extirpadas do espectro físico da teoria. Na cromodinâmica quântica compreendemos esse efeito como uma evidência do confinamento de *quarks*. Neste momento, podemos definir os observáveis físicos, os quais, em cromodinâmica quântica, interpretamos como *hadrons* e *glueballs*, enquanto em gravidade, os observáveis devem

ter caráter geométrico. Por essa condição, neste regime de baixas energias, podemos identificar a conexão de spin no setor  $H$ , enquanto a *vierbein* no setor  $Q$ . Eis, então, a teoria de gravidade no formalismo de primeira ordem, cujas identificações foram detalhadas em (3.34) e (3.35). Diante do atendimento de todas as demandas explicitadas anteriormente, temos, portanto, uma analogia entre gravidade e cromodinâmica quântica.

## Capítulo 4

# Estimativas: O parâmetro de Gribov, a constante gravitacional de Newton e a constante cosmológica

O parâmetro de Gribov é o principal parâmetro de massa que utilizamos na construção desta teoria de gravidade. Embora outros parâmetros possam ser utilizados, este foi escolhido por ser o mais simples e muito bem estudado dentre todos que são mostrados na literatura. Ademais, o parâmetro de Gribov é um invariante de calibre [78].

Conforme revisamos no Capítulo 3, construímos um modelo de gravidade induzida de uma teoria de Yang-Mills para os grupos  $SO(5)$ ,  $SO(1, 4)$  e  $SO(2, 3)$ . A teoria possui dois principais parâmetros da Teoria da Relatividade Geral, a constante gravitacional de Newton e a constante cosmológica, as quais são especificamente identificadas com os parâmetros de Gribov e o parâmetro de acoplamento que estão presentes nas teorias de Yang-Mills no regime infravermelho. O parâmetro de Gribov é obtido a partir da equação de *gap* de massa, a qual é determinada através da minimização da ação quântica para a Teoria de Yang-Mills. O parâmetro de acoplamento é obtido a partir da função  $\beta$  [49]. No trabalho desenvolvido por Ford e Gracey [79] foi calculada a equação de *gap* de massa e a função  $\beta$  a 2-laços usando imperativamente métodos computacionais<sup>1</sup>.

Atualmente a constante cosmológica desempenha um papel essencial no debate sobre energia escura, a qual está associada à expansão acelerada do Universo. Os dados

---

<sup>1</sup>Conforme os autores: Sem uma ferramenta computacional, torna-se uma tarefa humanamente impossível calcular 17 diagramas de Feynman a 1-laço e 1 diagrama a 2-laços.



observacionais colocam tal constante como um grande desafio para a Teoria Quântica de Campos devido a discrepância entre o valor observacional e a previsão teórica para a constante cosmológica. Esperamos que a constante cosmológica renormalizada da nossa teoria possa compensar este valor encontrado teoricamente via Teoria Quântica de Campos. Apenas lembrando que tal compensação é esperada quando somarmos as duas estimativas teóricas:  $\Lambda_{QFT}^2$ , a previsão feita pela Teoria Quântica de Campos, e  $\Lambda^2$ , nossa constante cosmológica renormalizada. Desse modo, conforme estabelecido no Capítulo 3, a constante cosmológica observacional será dada por  $\tilde{\Lambda}^2 = \Lambda_{QFT}^2 + \Lambda^2$ . A estimativa do parâmetro de Gribov nos oferece um modo conhecido para calcularmos o corte na escala de energia e os parâmetros *running* que estão associados aos parâmetros gravitacionais do nosso modelo. Recentemente, em [80], estimamos tais parâmetros através de cálculos a 1-laço para uma teoria de gravidade induzida similar a do  $SO(m, n)$ . Os valores encontrados se situaram próximos à escala de Planck. Com este razoável início, desenvolvemos um refinamento de tais estimativas a 1-laço, os quais serão mostrados e detalhados neste Capítulo 4. Além das melhorias a 1-laço, demonstraremos também como obter o parâmetro de Gribov a partir da equação de *gap* de massa e da função  $\beta$  a 2-laços, cujo objetivo está centrado em obtermos melhores estimativas para os parâmetros gravitacionais da teoria que estamos propondo.

## 4.1 Parâmetros *running* e estimativas a 1-laço

Em teorias de calibre não-abelianas, empregamos o método de quantização de Faddeev-Popov. Entretanto, no regime infravermelho este método não fixa totalmente o calibre, deixando resíduos não-físicos e a quebra de simetria não é completa. Entra em cena o problema de Gribov, o qual foi abordado por Zwanziger que desenvolveu uma maneira de enfrentar esse problema ao utilizar um função que restringisse as tais cópias indesejáveis. Essa formulação de Zwanziger nos referimos frequentemente como cenário de Gribov-Zwanziger, o qual permite que encontremos um parâmetro de massa que minimize a ação quântica oriunda da ação de Yang-Mills. Este parâmetro, conhecido como parâmetro de Gribov, é o responsável por demarcar a função horizonte que cercaria as tais cópias indesejáveis, ou seja, as cópias de Gribov. Não pertence ao escopo desta tese uma ampla exposição do cenário de Gribov-Zwanziger, entretanto, uma vez que utilizaremos a equação de *gap* de massa para estimar os parâmetros que desejamos, disponibilizamos no Apêndice A uma breve descrição sobre a ação de Gribov-Zwanziger.

### 4.1.1 A equação de gap de massa a 1-laço e o parâmetro de Gribov

Nesta seção, faremos uso da notação tensorial por ser mais comum na literatura que se refere à abordagem do problema de Gribov. Neste contexto, temos índices com letras gregas indicando o espaço-tempo e os índices latinos indicando o grupo de calibre. Retornemos, então, à ação original (3.1) e tomaremos somente sua parte livre de interações, isto é, sua parte quadrática [75],

$$S_{quad} = \int d^d x \left\{ \frac{1}{4} (\partial_\mu Y_\nu^A - \partial_\nu Y_\mu^A)^2 + \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu Y_\mu^A)^2 + \bar{\varphi}_\mu^{AB} \partial^2 \varphi_\mu^{AB} + \right. \\ \left. - \lambda^2 \kappa (f^{ABC} Y_\mu^A \varphi_\mu^{BC} + f^{ABC} Y_\mu^A \bar{\varphi}_\mu^{BC}) - \lambda^4 d \left[ \frac{N(N-1)}{2} \right] \right\}, \quad (4.1)$$

onde  $(\varphi_\mu^{AB}, \bar{\varphi}_\mu^{AB})$  é um par de campos bosônicos complexos,  $f^{ABC} Y_\mu^A \varphi_\mu^{BC}$  e  $f^{ABC} Y_\mu^A \bar{\varphi}_\mu^{BC}$  são operadores locais compostos e  $\lambda$  é o parâmetro de Gribov. Adotaremos, por iniciativa simples, o uso de  $N = 5$ , uma vez que estaremos tratando uma teoria de Yang-Mills para o grupo  $SO(5)$ . Empregaremos este valor em algum momento, entretanto, por agora, usaremos  $N$ , como forma geral. Embora iremos trabalhar em  $d = 4$  dimensões, por hora, também deixaremos  $d$  no elemento de volume de  $S_{quad}$ .

A 1-laço, a ação efetiva é definida como

$$e^{-\Gamma^{(1)}} = \int [D\Phi] e^{-S_{quad}}. \quad (4.2)$$

Integramos sobre todos os campos e encontramos

$$\int [D\Phi] e^{-S_{quad}} = e^{\frac{dN(N-1)}{2} \lambda^4} \int [dY] \exp \left[ -\frac{1}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} (Y_\mu^a \mathcal{O}_{\mu\nu}^{ab} Y_\nu^b) \right], \quad (4.3)$$

onde

$$\mathcal{O}_{\mu\nu}^{ab} = \delta^{ab} \left[ p^2 \delta_{\mu\nu} - \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right) p_\mu p_\nu + \frac{2N\kappa^2 \lambda^4}{p^2} \delta_{\mu\nu} \right]. \quad (4.4)$$

Usamos uma conhecida fórmula, *i.e.*,  $\det \mathcal{O} = e^{\text{Tr} \ln \mathcal{O}}$ , logo

$$\int [D\Phi] e^{-S_{quad}} = e^{\frac{dN(N-1)}{2} \lambda^4} (\det \mathcal{O}_{\mu\nu}^{ab})^{-\frac{1}{2}} \\ = \exp \left\{ \lambda^4 d \left[ \frac{dN(N-1)}{2} \right] - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \mathcal{O}_{\mu\nu}^{ab} \right\}. \quad (4.5)$$

Agora, calculamos o traço,

$$\text{Tr} \ln \mathcal{O}_{\mu\nu}^{ab} = \lambda^2 \left[ \frac{N(N-1)}{2} \right] (d-1) \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \ln \left( \frac{p^4 + 2N\kappa^2 \lambda^4}{p^2} \right), \quad (4.6)$$

o que nos permite obter

$$\Gamma^{(1)} = -\lambda^4 d \left[ \frac{N(N-1)}{2} \right] + \frac{(d-1)}{2} \left[ \frac{N(N-1)}{2} \right] \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} (\ln(p^4 + 2N\kappa^2 \lambda^4)), \quad (4.7)$$

onde usamos

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \ln p^2 = 0. \quad (4.8)$$

Em (4.7) aplicamos a regularização dimensional  $d = 4 - \epsilon$ , juntamente com o método  $\overline{\text{MS}}$  de renormalização [81]. Logo, cada termo em (4.7), será modificado como segue. Primeiro, a integral  $d$ -dimensional,

$$\int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} [\ln(p^4 + 2N\kappa^2 \lambda^4)] = - \left( \frac{2N\kappa^2 \lambda^4}{32\pi^2} \right) \left( \frac{2N\kappa^2 \lambda^4}{\mu^4} - 3 \right) + \left( \frac{4}{\epsilon} \right) \left( \frac{2N\kappa^2 \lambda^4}{32\pi^2} \right). \quad (4.9)$$

Enquanto isso, o parâmetro bruto<sup>2</sup>, tem origem a partir de

$$-d \left[ \frac{N(N-1)}{2} \right] \lambda_0^4 = -(4-\epsilon) \left[ \frac{N(N-1)}{2} \right] Z_M^2 \lambda^4, \quad (4.10)$$

onde o fator  $Z_M^2$  de renormalização, conforme [63, 82], explicitamente escrevemos

$$Z_M^2 = \left[ 1 + \frac{3}{2} \left( \frac{N\kappa^2}{16\pi^2} \right) \frac{1}{\epsilon} \right] \lambda^4. \quad (4.11)$$

Usamos (4.10) e (4.9) em (4.7) e temos, portanto, a ação quântica renormalizada a 1-laço,

$$\Gamma_r^{(1)} = -4\lambda^4 \left[ \frac{N(N-1)}{2} \right] - \frac{3}{32\pi^2} \left[ \frac{N(N-1)}{2} \right] (N\kappa^2 \lambda^4) \left[ \ln \left( \frac{2N\kappa^2 \lambda^4}{\mu^4} \right) - \frac{8}{3} \right]. \quad (4.12)$$

Definimos

$$\gamma^4 \equiv 2\kappa^2 \lambda^4, \quad (4.13)$$

por ser um parâmetro de massa mais conveniente. Quando observamos em um primeiro momento, tal escolha parece ser meramente um *ansatz* algébrico para simplificar os

<sup>2</sup>N.T. Do inglês *bare*.

cálculos. Entretanto, mostraremos na Seção 4.3 como tal escolha é fisicamente consistente no lugar de usar  $\lambda$ . Portanto, (4.12) se torna

$$\Gamma_r^{(1)} = -\frac{\gamma^4}{2k^2} 4 \left[ \frac{N(N-1)}{2} \right] - \frac{3}{32\pi^2} \left[ \frac{N(N-1)}{2} \right] \frac{N\gamma^4}{2} \left[ \ln \left( \frac{N\gamma^4}{\mu^4} \right) - \frac{8}{3} \right]. \quad (4.14)$$

Seguindo a prescrição de Gribov-Zwanziger [75], podemos determinar o parâmetro de Gribov pela minimização da ação quântica, ou seja,

$$\frac{\partial \Gamma_r^{(1)}}{\partial \gamma^2} = 0. \quad (4.15)$$

E obtemos o resultado

$$\frac{N\kappa^2}{16\pi^2} \left[ \frac{5}{8} - \frac{3}{8} \ln \left( \frac{N\gamma^4}{\mu^4} \right) \right] = 1. \quad (4.16)$$

Equivalentemente, podemos colocá-lo na forma

$$\gamma^2 = \frac{e^{\frac{5}{6}}}{\sqrt{N}} \mu^2 e^{-\frac{4}{3} \left( \frac{16\pi^2}{N\kappa^2} \right)}. \quad (4.17)$$

Adicionalmente, temos o parâmetro de acoplamento a 1-laço [50] como

$$\frac{N\kappa^2}{16\pi^2} = \frac{1}{\frac{11}{3} \ln \frac{\mu^2}{\bar{\Lambda}^2}}, \quad (4.18)$$

onde  $\bar{\Lambda}$  é corte na escala de energia. Pela inserção de (4.18) dentro de (4.17) por  $N = 5$ , encontramos

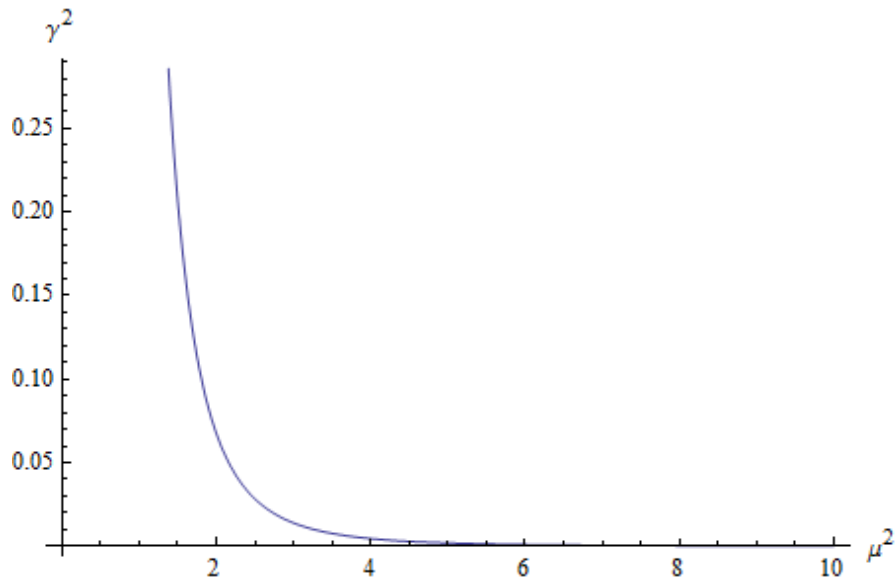
$$\gamma^2 = \frac{e^{\frac{5}{6}}}{\sqrt{5}} \bar{\Lambda}^2 \left( \frac{\mu^2}{\bar{\Lambda}^2} \right)^{-35/9}. \quad (4.19)$$

Portanto, quanto maior for a escala de energia, será menor o parâmetro de Gribov, cujo comportamento plotamos na Figura 4.1.

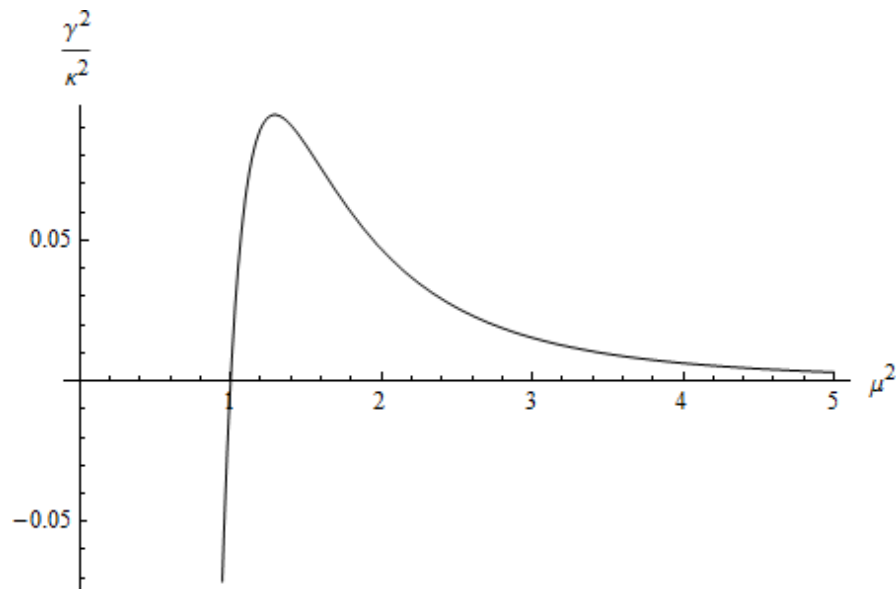
Conforme mencionamos na Seção 3.4, a razão a seguir é crucial para a teoria que modelamos.

$$\frac{\gamma^2}{\kappa^2} = \alpha \bar{\Lambda}^2 \left( \frac{\mu^2}{\bar{\Lambda}^2} \right)^{-35/9} \ln \left( \frac{\mu^2}{\bar{\Lambda}^2} \right), \quad (4.20)$$

com  $\alpha = 55e^{5/6} / (48\pi^2\sqrt{5})$ . O comportamento dessa razão é ilustrado na Figura (4.2). E o importante limite  $\gamma^2/\kappa^2 \rightarrow 0$  é atingido em  $\mu^2 = \bar{\Lambda}^2$ .



**Figura 4.1** Parâmetro de Gribov em função da escala de energia. A energia  $\mu^2$  está em unidades de  $\bar{\Lambda}^2$  e o parâmetro de Gribov em unidades de  $(e^{5/6}/\sqrt{5})\bar{\Lambda}^2$ .

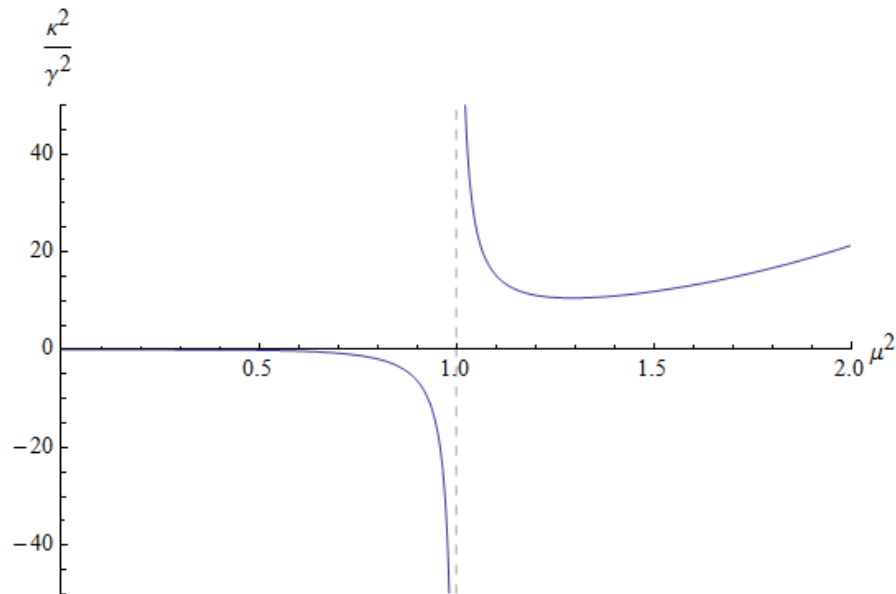


**Figura 4.2** A razão  $\gamma^2/\kappa^2$  como função da escala de energia. A razão  $\gamma^2/\kappa^2$  está em unidades de  $\alpha\bar{\Lambda}^2$  e a escala de energia  $\mu^2$  está em unidades de  $\bar{\Lambda}^2$ .

Após combinarmos (3.48) e (4.20), obtemos

$$\frac{\kappa^2}{\gamma^2} \equiv 4\pi G = \frac{1}{\alpha\bar{\Lambda}^2} \left(\frac{\mu^2}{\bar{\Lambda}^2}\right)^{35/9} \frac{1}{\ln\left(\frac{\mu^2}{\bar{\Lambda}^2}\right)}, \quad (4.21)$$

o qual nos mostra o comportamento da constante gravitacional de Newton. Enquanto isso, o comportamento de  $\kappa^2/\gamma^2$  é mostrado na Figura 4.3. As equações (4.20) e (4.21) demarcam a transição entre a teoria quântica e o regime de gravidade geometricamente



**Figura 4.3** A razão  $\kappa^2/\gamma^2 \equiv 4\pi G$  como função da escala de energia.  $4\pi G$  está em unidades de  $1/(\alpha\bar{\Lambda}^2)$  e a escala de energia em unidades de  $\bar{\Lambda}^2$ .

clássica. Tal transição ocorre em  $\mu = \bar{\Lambda}$ . Quando  $\mu < \bar{\Lambda}$  teríamos uma fase geométrica da teoria. Para  $\mu > \bar{\Lambda}$ , passamos para região quântica. A divergência na transição, ou seja, justamente no polo de Landau, indica uma descontínua transição entre os setores da teoria, embora estejamos em temperatura zero. Ademais, o fato de termos uma mudança de sinal, a qual está associada ao cruzar o polo de Landau, induz uma mudança de sinal global na ação (3.49).

### 4.1.2 Estimativas numéricas a 1-laço

Uma maneira usual de resolver a equação de *gap* de massa consiste em fixar  $\bar{\Lambda}$  e  $\mu$ , entretanto resolveremos de outra forma, isto é, fixaremos a constante gravitacional de Newton e checaremos se esta é uma solução consistente.

Contudo, para que tenhamos uma solução consistente, necessitamos de um parâmetro de acomplamento tão menor quanto possível. Adicionalmente, devemos ter  $\mu^2 > \bar{\Lambda}^2$  como, pelo menos, em uma primeira tentativa. Conformemente, temos um determinado intervalo para tal realização, ou seja,

$$\begin{aligned} 0 < \frac{N\kappa^2}{16\pi^2} < 1, \\ 0 < \ln\left(\frac{\mu^2}{\bar{\Lambda}^2}\right) < 1. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Consideremos, por exemplo,  $\mu^2 = 2\bar{\Lambda}^2$  em (4.21), o qual fornece  $\ln(\mu^2/\bar{\Lambda}^2) = 0,6931$ , sendo este satisfatório ao intervalos (4.22). Uma maneira de obtermos a escala  $\bar{\Lambda}$  consiste em impor o valor experimental da constante gravitacional de Newton, isto é,  $G = 6,707 \times 10^{-33} \text{ TeV}^{-2}$  em (4.21). Tal imposição nos resulta que

$$\bar{\Lambda}^2 \approx 2,122 \times 10^{33} \text{ TeV}^2 . \quad (4.23)$$

Este resultado nos permite estimar a constante cosmológica renormalizada. Ao combinarmos (3.49), (4.19) e (4.23), obtemos

$$\Lambda^2 \approx 1,106 \times 10^{32} \text{ TeV}^2 . \quad (4.24)$$

Comparamos (4.24) com a bem conhecida predição teórica realizada pela teoria quântica de campos [85], *i.e.*,  $\Lambda_{QFT}^2 \sim -3,71 \times 10^{28} \text{ TeV}^2$ , e vemos diretamente que o resultado (4.24) que obtivemos está três ordens de grandeza acima daquela estabelecida teoricamente. Portanto, vislumbramos que nossa primeira tentativa para estimar o valor teórico da constante cosmológica renormalizada da nossa teoria nos aponta um caminho razoável para percorrermos com os cálculos realizados no regime infravermelho das teorias de Yang-Mills no cenário de Gribov-Zwanziger. Por isso, faremos refinamentos ao valor (4.24) sob duas perspectivas: (i) Empregaremos métodos numéricos de aprimoramento; (ii) Adotaremos cálculos em laços superiores.

Este é um momento oportuno para lembrar que os dados observacionais indicam que a constante cosmológica vale  $\tilde{\Lambda}^2 \sim 1,686 \times 10^{-92} \text{ TeV}^2$ . Portanto, o problema da constante cosmológica continua perante o valor (4.24) que primariamente estimamos. Afinal, conforme mencionamos sobre a imposição de que o valor da constante cosmológica renormalizada venha compensar o valor da predição teórica feita através da teoria quântica de campos.

Por último, mas não menos importante, ponderamos o corte na escala de energia, o qual é mostrado em (4.23), e uma vez que a energia de Planck é  $E_p^2 = 1,491 \times 10^{32} \text{ TeV}^2$ , observamos que  $\bar{\Lambda}^2$  em (4.23) está 1 ordem de grandeza acima da ordem de grandeza da energia de Planck. Por outro lado, a constante cosmológica renormalizada e a energia de Planck são da mesma ordem de grandeza.

#### 4.1.2.1 Métodos de aprimoramento

O principal objetivo nesta seção é calcularmos os melhores valores para  $N\kappa^2/16\pi^2$  e  $\ln(\mu^2/\bar{\Lambda}^2)$ , os quais estão restritos aos intervalos indicados em (4.22). Para lidarmos com esta tarefa, aplicamos três métodos, tal como descreveremos a seguir.

##### $M_1$ : Método da série de Taylor

Apenas por brevidade, escrevemos (4.18) como

$$\frac{1}{a} = \frac{11}{3} \ln b, \quad (4.25)$$

onde

$$\begin{aligned} a &= \frac{N\kappa^2}{16\pi^2}, \\ b &= \frac{\mu^2}{\bar{\Lambda}^2}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Agora, expandimos o lado direito de (4.25) como uma série de Taylor no ponto crítico  $\mu = \bar{\Lambda}$ , *i.e.*,  $b = 1$ , tal como segue

$$\ln(b) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^{n-1} (b-1)^n, \quad (4.27)$$

com  $0 < \ln b < 1$ , o qual concorda com o permitido em (4.22). Investigamos a série (4.27) sob duas perspectivas:

- Perspectiva (i): *O ponto extremo*

A expansão para  $\ln(b)$  tem raio de convergência igual a 1. Precisamente, usamos o teste da série alternada para verificar que em  $b = 0$  a série não converge, mas converge em  $b = 2$ . Logo, a série é convergente enquanto  $0 < b \leq 2$ . Portanto, o ponto extremo ocorre em  $b = 2$  e este é um máximo global. Há um curioso fato quando truncamos em  $n^{\text{th}}$  com  $n = 2\ell$ ,  $\ell \in \mathbb{N}$ . Todos os truncamentos têm um máximo em  $b = 2$ , *i.e.*,  $\mu^2/\bar{\Lambda}^2 = 2$ . Novamente, temos somente um máximo global em cada truncamento. Quando procuramos o máximo global para  $\ln(b)$ , encontramos o mínimo global para  $N\kappa^2/16\pi^2$ . Assim, com  $b = 2$ , obtemos  $\ln(\mu^2/\bar{\Lambda}^2) = 0,6931$  e  $N\kappa^2/16\pi^2 = 0,3935$ , o qual é válido para os intervalos descritos em (4.22) e eles combinam com as estimativas numéricas



anteriores. Neste sentido, temos uma confirmação da primeira investida que realizamos em [80].

- Perspectiva (ii): *Um limite para a expansão de  $\ln(b)$  como uma série de Taylor*

Se  $a < 1$ , então

$$\ln(b) > 3/11 \iff \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^{n-1} (b-1)^n > 3/11 . \quad (4.28)$$

Neste intervalo, resolvemos a inequação (4.28) para vários valores de  $n$ . A Tabela 4.1 mostra alguns destes valores para ilustrar nosso próximo argumento. Notamos que as escolhas para os valores de  $b$  estão restritas a  $1,314 < b < b_{sup}$

$n$	$b_{sup}$
2	2,674
4	2,476
8	2,305
10	2,261
20	2,158
50	2,079
100	2,046
1000	2,007
5000	2,002
10000	2,000

**Tabela 4.1** O limite superior para o intervalo que limita os valores de  $b$  através do uso unicamente de valores pares para  $n$ .

enquanto  $n$  é par, onde os valores de  $b_{sup}$  diminuem quando os valores de  $n$  aumentam. Como podemos observar na Tabela 4.1, por exemplo,  $n = 8 \Rightarrow b_{sup} \approx 2,305$ ,  $n = 10 \Rightarrow b_{sup} \approx 2,261$  e — como exatamente esperávamos —  $n \rightarrow \infty \Rightarrow b_{sup} \rightarrow 2,000$ . Enquanto  $n$  é ímpar, obtemos intervalos como  $b > 1,313$ , ou seja, sem um limite superior. Portanto, temos um modo distinto de confirmar a primeira escolha que fizemos para  $\ln(\mu^2 \bar{\Lambda}^2)$ . Mais uma vez, estamos livres para escolher qualquer valor para  $\ln(b)$  com relação aos intervalos (4.22). Se escolhermos, por exemplo,  $a = 0,4300$ , temos  $b = 1,886 \Rightarrow \ln(b) \equiv \ln(\mu^2 \bar{\Lambda}^2) \approx 0,6342$ .

Aplicando estes valores na equação (4.21), obtemos

$$\bar{\Lambda}^2 \approx 1,845 \times 10^{33} TeV^2 \quad (4.29)$$

e

$$\Lambda^2 \approx 1,208 \times 10^{32} TeV^2 . \quad (4.30)$$

interpretamos estes resultados como uma verificação numérica dos valores (4.23) e (4.24) devido ao fato de que as ordens de grandeza deles são mantidas. Assim, confirmamos a primeira intuição que apresentamos em [80].

$M_2$  : **Método via valor de equilíbrio**

Aplicaremos uma técnica que permite determinar um valor de equilíbrio entre dois valores retornados pelas funções  $N\kappa/16\pi^2$  e  $\ln(\mu^2/\bar{\Lambda}^2)$ , as quais apresentam comportamento monotônicos. Por mera simplificação, escrevemos (4.18) como

$$f(\kappa^2)h(\mu^2, \bar{\Lambda}^2) = \frac{3}{11} , \quad (4.31)$$

onde

$$\begin{aligned} f(\kappa^2) &= \frac{N\kappa^2}{16\pi^2} , \\ h(\mu^2, \bar{\Lambda}^2) &= \ln\left(\frac{\mu^2}{\bar{\Lambda}^2}\right) . \end{aligned} \quad (4.32)$$

Com o intuito de obtermos pequenos valores para  $h(\mu^2, \bar{\Lambda}^2)$  e  $f(\kappa^2)$ , a melhor escolha para obtermos o valor de equilíbrio é atribuir  $h(\mu^2, \bar{\Lambda}^2) = f(\kappa^2)$ , tal que

$$h(\mu^2, \bar{\Lambda}^2) = \left(\frac{3}{11}\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \ln\left(\frac{\mu^2}{\bar{\Lambda}^2}\right) \approx 0,5222 \Rightarrow \frac{\mu^2}{\bar{\Lambda}^2} \approx 1,686 . \quad (4.33)$$

Portanto,

$$\bar{\Lambda}^2 \approx 1,449 \times 10^{33} TeV^2 \quad (4.34)$$

e

$$\Lambda^2 \approx 1,468 \times 10^{32} TeV^2 . \quad (4.35)$$

Concluimos que (4.34) e (4.35) não mostram qualquer melhoria significativa em relação aos valores (4.23) e (4.24).

$M_3$  : **Método via série geométrica**

Façamos uma analogia com a série geométrica para tratarmos a busca do melhor logaritmo. Devido aos intervalos (4.22), podemos tratar o logaritmo em (4.18) como uma série geométrica. Primeiro, definimos

$$q = 1 - \ln \frac{\mu^2}{\Lambda^2} \quad (4.36)$$

onde  $q$  deve obedecer

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \quad (4.37)$$

tal que a expressão em (4.18) seja escrita como

$$\frac{N\kappa^2}{16\pi^2} = \frac{3}{11} \left( \frac{1}{1-q} \right). \quad (4.38)$$

Segundo, usamos (4.22) e (4.38) para escrever

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n < \frac{11}{3}. \quad (4.39)$$

A partir deste ponto, testamos vários truncamentos da inequação (4.39) para lidar com uma desigualdade polinomial de grau  $N$ . Tal procedimento nos permite determinar o ótimo intervalo  $q \in (0, 0,7273)$ . Para esclarecer este ponto, por exemplo, a Tabela 4.2 mostra a evolução deste intervalo para  $q$ , o que diretamente implica em determinar os valores dos logaritmos. Para  $N > 30$  podemos observar que não há obtenção

$N$	$q_{sup}$
5	0,7974
8	0,7470
10	0,7367
20	0,7276
30	0,7273
40	0,7273
100	0,7273
1000	0,7273

**Tabela 4.2** O limite superior  $q_{sup}$  para o intervalo de valores de  $q$  como função do polinômio de grau  $N$ .

de dígitos significativos para o limite superior para  $q$ . Deste modo, escolhemos  $q \approx 0,7273$  como um valor extremo válido, o qual implica em  $\ln(\mu^2/\Lambda^2) \approx 0,2727$  e

$N\kappa^2/16\pi^2 \approx 0,3803$ . Tais valores oferecem os seguintes resultados.

$$\bar{\Lambda}^2 \approx 1,052 \times 10^{32} TeV^2, \quad (4.40)$$

e

$$\Lambda^2 \approx 2,810 \times 10^{32} TeV^2. \quad (4.41)$$

Portanto,  $\bar{\Lambda}^2$  diminui de uma ordem de grandeza. Observamos diretamente que tais valores podem ser obtidos a partir de (4.38). O método polinomial foi empregado aqui para verificar a peculiar característica de colocarmos a equação (4.18) como uma série geométrica. Reforçamos que o limite superior para  $N < 30$  nos leva a um intervalo inválido para  $N\kappa^2/16\pi^2$ .

Pelo outro extremo, escolhemos  $q = 1,000 \times 10^{-4}$ , o que resulta em  $\ln(\mu^2/\bar{\Lambda}^2) \approx 0,9999$  e  $N\kappa^2/16\pi^2 \approx 0,2728$ . Usamos tais valores para determinar

$$\bar{\Lambda}^2 \approx 4,851 \times 10^{33} TeV^2. \quad (4.42)$$

e

$$\Lambda^2 \approx 7,666 \times 10^{31} TeV^2. \quad (4.43)$$

Todavia, obtivemos um melhor valor para a constante cosmológica renormalizada. Entretanto, o corte na escala de energia é o pior encontrado até este ponto. Para resumir os resultados encontrados em cada método, construímos a Tabela 4.3.

	$I$	$M_1$	$M_2$	$M_{3a}$	$M_{3b}$
$\bar{\Lambda}^2 (TeV^2)$	$2,122 \times 10^{33}$	$1,845 \times 10^{33}$	$1,449 \times 10^{33}$	$1,052 \times 10^{32}$	$4,851 \times 10^{33}$
$\Lambda^2 (TeV^2)$	$1,106 \times 10^{32}$	$1,208 \times 10^{32}$	$1,468 \times 10^{32}$	$2,810 \times 10^{32}$	$7,666 \times 10^{31}$

**Tabela 4.3** O corte na escala  $\bar{\Lambda}^2$  e a constante cosmológica renormalizada  $\Lambda^2$  obtidos em cada método. A coluna  $I$  mostra as estimativas iniciais. As demais colunas,  $M_1, M_2, M_{3a}$  e  $M_{3b}$ , mostram os valores obtidos via série de Taylor, valor de equilíbrio e série geométrica, respectivamente.

Ao compararmos os valores numéricos obtidos para  $\bar{\Lambda}^2$  e  $\Lambda^2$  através do emprego dos métodos  $M_1, M_2$  and  $M_3$ , os quais estão listados na Tabela 4.3, observamos que as ordens de grandeza daqueles resultados são quase imutáveis. A única exceção ocorre para  $\bar{\Lambda}^2$  na coluna  $M_{3b}$ , a qual é causada pelo alto valor extremo para o logaritmo  $\ln(\mu^2/\bar{\Lambda}^2)$ .

### 4.1.3 $\bar{\Lambda}^2$ como a energia de Planck

Introduziremos um caminho diferente para determinar os valores da constante gravitacional de Newton e a constante cosmológica. Assim, fizemos diferentemente tudo quando fixamos o corte da escala de energia  $\bar{\Lambda}^2$  igual à energia de Planck, *i.e.*,  $\bar{\Lambda} = E_p = 1,221 \times 10^{16} \text{ TeV}$ . Anteriormente, na Seção 4.1.2 encontramos um valor otimizado para o o logaritmo, tal que pudéssemos determinar o corte e a constante cosmológica renormalizada. Com a ajuda do logaritmos determinados anteriormente e a equação (4.61), podemos calcular a constante gravitacional de Newton  $G_p$  para cada método utilizado em 4.1.2. Os valores que encontramos estão dispostos na Tabela 4.4.

	$I$	$M_1$	$M_2$	$M_{3a}$	$M_{3b}$
$G_p(\text{TeV}^{-2})$	$9,551 \times 10^{-32}$	$8,301 \times 10^{-32}$	$6,521 \times 10^{-32}$	$5,254 \times 10^{-32}$	$2,183 \times 10^{-31}$
$\Lambda_p(\text{TeV})$	$7,766 \times 10^{30}$	$9,765 \times 10^{30}$	$1,510 \times 10^{31}$	$6,271 \times 10^{31}$	$2,355 \times 10^{30}$

**Tabela 4.4** Os valores da constante gravitacional de Newton e a constante cosmológica calculados com base nos logaritmos determinados em cada método apresentado na Seção 4.1.2 enquanto o corte da escala de energia for igual à energia de Planck.

Observamos que todos os valores de  $G_p$  permanecem em 1 ordem de grandeza acima da ordem de grandeza de  $G$ . Um confronto direto com os valores apresentados na Tabela 4.2 podemos notar que um melhor valor é obtido quando usamos o método  $M_{3b}$ , *i.e.*, enquanto aplicamos o logaritmo obtido com a série geométrica para  $\kappa^2$ . O mais próximo que podemos ficar de  $G = 6,707 \times 10^{-33} \text{ TeV}^2$  ocorreu quando usamos o método  $M_{3a}$ . O respectivo preço a pagar consiste em lidar com um valor da constante cosmológica maior do que o encontrado pelo método  $M_{3b}$ . Entretanto, a ordem de grandeza é a mesma quando comparamos com os valores determinados para  $\Lambda^2$  através da utilização dos métodos  $M_{3a}$  e  $M_{3b}$ . Consequentemente, o par de valores obtidos usando o método  $M_{3a}$  é escolhido o melhor para futuros esclarecimentos.

Finalizados todos os esforços para fornecer os melhores valores a 1-laço, teremos que pesquisar novos valores para  $\bar{\Lambda}^2$  e  $\Lambda^2$  a 2-laços na Seção 4.2.

## 4.2 Estimativas numéricas a 2-laços

O cálculo da equação de *gap* de massa a 2-laços é uma tarefa inviável para ser executada simplesmente usando mãos, lápis e papel. Portanto, sofisticados programas

algébricos foram construídos, tais como os programas **FORM** e **QGraph**, para lidar com o cálculo da equação de *gap* de massa. Usaremos o principal resultado que Ford e Gracey obtiveram em [79] para servir ao nosso propósito de obter valores melhores para o corte na escala de energia e para a constante cosmológica renormalizada.

### 4.2.1 Função $\beta$ a 2-laços

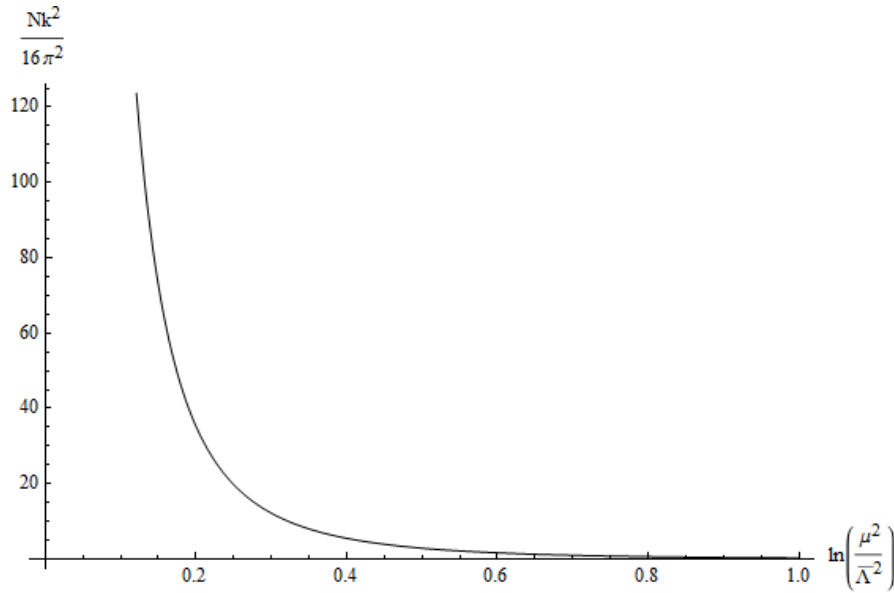
Primeiro, temos a função  $\beta$  a 2-laços [79, 81],

$$\beta(\kappa^2) = -\frac{11N}{3} \left( \frac{\kappa^2}{16\pi^2} \right)^2 - \frac{34}{3} N^2 \left( \frac{\kappa^2}{16\pi^2} \right)^3. \quad (4.44)$$

E o parâmetro de acoplamento,

$$\frac{N\kappa^2}{16\pi^2} = \frac{1}{\frac{11}{3} \ln\left(\frac{\mu^2}{\bar{\Lambda}^2}\right) - \frac{102}{121} \left\{ \frac{\ln\left[\ln\left(\frac{\mu^2}{\bar{\Lambda}^2}\right)\right]}{\left[\ln\left(\frac{\mu^2}{\bar{\Lambda}^2}\right)\right]^2} \right\}}, \quad (4.45)$$

com  $\bar{\Lambda}$  como o corte na escala de energia. A evolução do parâmetro de acoplamento  $\kappa$  em relação à escala de energia  $\mu$  pode ser observada na Figura 4.4.



**Figura 4.4** Evolução do termo associado ao parâmetro  $\kappa^2$  como função do logaritmo  $\ln(\mu^2/\bar{\Lambda}^2)$  associado à escala de energia  $\mu^2$ .

Apenas para simplificar a notação, usaremos (4.32). Realizamos a expansão de Taylor em (4.45), tal que

$$f(\kappa) = \frac{3}{11} - \frac{135}{121}(h-1) + \frac{288}{121}(h-1)^2 - \frac{475}{121}(h-1)^3 + \frac{125}{22}(h-1)^4 + O((h-1)^5), \quad (4.46)$$

onde  $h \equiv h(\mu)$ . Logo, se truncarmos a expansão (4.46) na quarta ordem e, simultaneamente, obedecermos ao intervalo  $0 < f(\kappa) < 1$ , então encontramos  $h(\mu) > 0,6938$ . Portanto, obtemos  $0,6938 < \ln(\mu^2/\bar{\Lambda}^2) < 1,000$ , o que nos permite escolher valores para o logaritmo em  $h(\mu)$  e, conseqüentemente, possibilitar que calculemos  $\bar{\Lambda}^2$  e  $\Lambda^2$ . Isto nos leva a escolha para o logaritmo, *i.e.*,  $\ln(\mu^2/\bar{\Lambda}^2) = 0,9999$ .

Para outros truncamentos não obtivemos qualquer novo resultado que fosse significativo quando comparado com o obtido por (4.44).

## 4.2.2 Equação de gap de massa a 2-laços

Em [79], Ford e Gracey determinaram a equação de *gap* de massa a 2-laços com *quarks* massivos. O método  $\overline{\text{MS}}$  foi utilizado no processo de renormalização. Por estarmos lidando com uma teoria de Yang-Mills pura, ou seja, sem férmions, temos total liberdade para fazer  $N_f = 0$  e  $m_q = 0$  em [79] e, agora, a equação de *gap* de massa é simplificada para ser escrita como

$$1 = \left(\frac{N\kappa^2}{16\pi^2}\right) \left[\frac{5}{8} - \frac{3}{8} \ln\left(\frac{N\gamma^4}{\mu^4}\right)\right] + \left(\frac{N\kappa^2}{16\pi^2}\right)^2 \left\{ \frac{3893}{1536} - \frac{22275}{4096} s_2 + \frac{29}{128} \zeta(2) - \frac{65}{48} \ln\left(\frac{N\gamma^4}{\mu^4}\right) + \frac{35}{128} \ln^2\left(\frac{N\gamma^4}{\mu^4}\right) + \frac{411}{1024} \sqrt{5} \zeta(2) - \frac{1317\pi^2}{4096} \right\}, \quad (4.47)$$

com  $s_2 = (2\sqrt{3}/9)\text{Cl}_2(2\pi/3)$ . Lembramos que  $\text{Cl}_2(\theta)$  é conhecida como função de Clausen, a qual é definida por

$$\text{Cl}_2(\theta) = - \int_0^\theta \ln \left\{ 2 \sin \left( \frac{\theta'}{2} \right) \right\} d\theta'. \quad (4.48)$$

Com  $\theta = 2\pi/3$ , temos  $\text{Cl}_2(\theta = 2\pi/3) = -\pi^2/6$ . Ainda,  $\zeta(z)$  é função  $\zeta$  de Euler-Riemann, a qual é definida como

$$\zeta(z) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{z^{\ell}}. \quad (4.49)$$

Portanto,  $\zeta(2) = \pi^2/6$ .

Primeiro, resolvemos o sistema de equações composto por (4.45) e (4.47), tal que nos permita analisar o comportamento do parâmetro de Gribov relacionado à escala de energia. Por esse procedimento, obtemos duas raízes, as quais são

$$\begin{aligned} \gamma_m^2 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \mu^2 [h(\mu)]^{-\frac{187}{35} \frac{\mathcal{P}(\mu)}{\mathcal{Q}(\mu)}} e^{\mathcal{R}(\mu)}, \\ \gamma_p^2 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \mu^2 [h(\mu)]^{-\frac{187}{35} \frac{\mathcal{P}(\mu)}{\mathcal{Q}(\mu)}} e^{\mathcal{W}(\mu)}, \end{aligned} \quad (4.50)$$

tal que

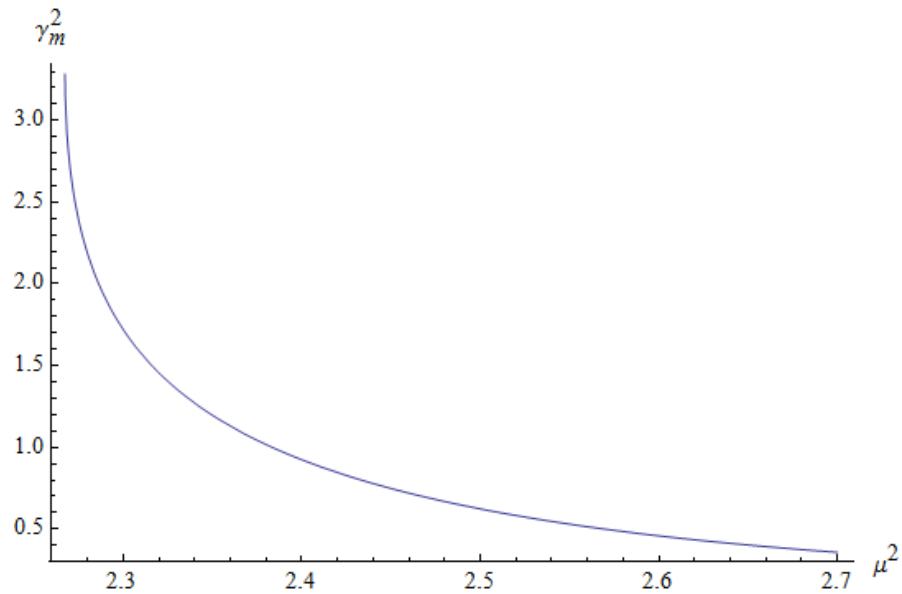
$$\begin{aligned} h &\equiv h(\mu) = \ln \left( \frac{\mu^2}{\Lambda^2} \right), \quad \mathcal{P}(\mu) = h^2 (65h + 88), \quad \mathcal{Q}(\mu) = [11h^3 - 34 \ln(h)]^2, \\ \mathcal{R}(\mu) &= \frac{1}{1680 \mathcal{Q}(\mu)} [\mathcal{S}(\mu) - \sqrt{2} \mathcal{T}(\mu)], \\ \mathcal{W}(\mu) &= \frac{1}{1680 \mathcal{Q}(\mu)} [\mathcal{S}(\mu) + \sqrt{2} \mathcal{T}(\mu)], \\ \mathcal{S}(\mu) &= c_1 h^6 + c_2 h^5 + c_3 \ln^2(h), \\ \mathcal{T}(\mu) &= \sqrt{\mathcal{Q}(\mu) [-c_4 h^6 - c_5 h^5 + c_6 h^4 + c_7 \ln(h) h^3 + c_8 \ln(h) h^2 - c_9 \ln^2(h)]}, \end{aligned} \quad (4.51)$$

com  $c_1 = 94.380$ ,  $c_2 = 255.552$ ,  $c_3 = 901.680$ ,  $\bar{c} = 197.728 + 7(-3.487 + 2.475\sqrt{3} + 822\sqrt{5})\pi^2$ ,  $c_4 = 1.815\bar{c}$ ,  $c_5 = 158.442.240$ ,  $c_6 = 2.368.796.672$ ,  $c_7 = 11.220\bar{c}$ ,  $c_8 = 48.9730.560$  e  $c_9 = 17.340\bar{c}$ .

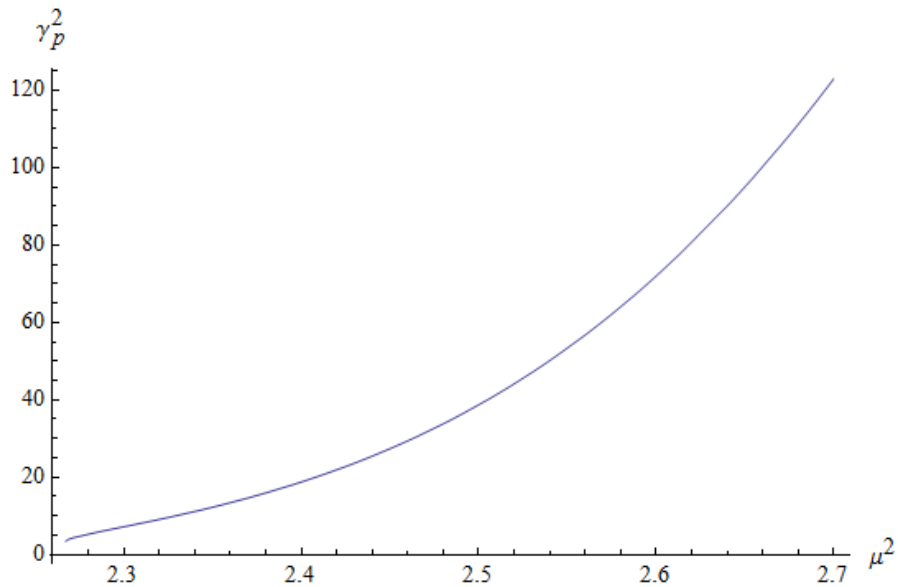
O comportamento de  $\gamma_m^2$  e  $\gamma_p^2$  em (4.50) pode ser claramente observado na Figura 4.5 e na Figura 4.6, respectivamente.

Comparando os comportamentos de  $\gamma_p^2$  e  $\gamma_m^2$ , temos este último unicamente como aquele com comportamento esperado no regime infravermelho, ou seja, o parâmetro de massa diminui enquanto a energia aumenta. Consequentemente, descartamos a raiz  $\gamma_p^2$  sob esta justificativa física.





**Figura 4.5** O parâmetro de Gribov  $\gamma_m^2$  como função da escala de energia  $\mu^2$ . Ambos,  $\gamma_m^2$  e  $\mu^2$ , estão quantificados em unidades de  $\bar{\Lambda}^2$ .



**Figura 4.6** O parâmetro de Gribov  $\gamma_p^2$  como função da escala de energia  $\mu^2$ . Ambos,  $\gamma_p^2$  e  $\mu^2$ , estão quantificados em unidades de energia de  $\bar{\Lambda}^2$ .

### 4.2.3 Estimativas numéricas para a constante cosmológica re-normalizada e o corte da escala de energia

Neste ponto, realizamos manipulações algébricas com a equação de *gap* de massa (4.47) e a escolha para o logaritmo  $\ln(\mu^2/\bar{\Lambda}^2)$ . Em consequência da forma quadrática da equação de *gap* de massa a 2-laços, somos levados a dois resultados para o corte

da escala de energia, isto é,  $\bar{\Lambda}$ , os quais são

$$\bar{\Lambda}^2 \approx 6,150 \times 10^{32} TeV^2 \quad (4.52)$$

e

$$\bar{\Lambda}^2 \approx 1,574 \times 10^{30} TeV^2, \quad (4.53)$$

entretanto, o segundo valor não nos interessa por ter sido obtido com a equação para  $\gamma_p^2$  em (4.50), o qual apresenta um comportamento não-físico. Todavia, o primeiro valor (4.52) para  $\bar{\Lambda}^2$  está situado, em ordem de grandeza, como  $\tau_o = 10^{-44}s$ , ou seja, uma ordem de grandeza ao redor do tempo de Planck. O resultado completo, ou seja,  $\tau = 2,654 \times 10^{-44}s$ , está muito próximo daquele estabelecido teoricamente, isto é,  $t_p = 5,391 \times 10^{-44}s$ . O primeiro valor está bem próximo do tempo de Planck, tornando-se, portanto, uma boa estimativa para a transição entre os setores desta teoria de gravidade induzida. Finalmente, (4.52) é um resultado aprimorado para o corte na escala de energia até este ponto.

O principal objetivo na busca do logaritmo nos permite obter

$$\Lambda^2 \approx 7,665 \times 10^{31} TeV^2, \quad (4.54)$$

o qual é um resultado significativo através da equação de *gap* de massa a 2-laços.

Os resultados (4.54) e (4.42) são melhores que aqueles obtidos em [80].

#### 4.2.4 Eliminação mais simples dos logaritmos

O procedimento mais simples e direto para simplificar a equação de *gap* de massa (4.47) consiste em zerar os logaritmos através de uma específica razão entre  $\mu$  e  $\bar{\Lambda}$ . Neste intuito, impomos

$$\frac{\gamma^2}{\mu^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}. \quad (4.55)$$

Portanto, a equação (4.47) pode ser resolvida e ela retorna um único valor permitido, ou seja,  $N\kappa^2/16\pi^2 \approx 0,4013$  e, na sequência, encontramos  $\ln(\mu^2/\bar{\Lambda}^2) \approx 0,9067$ . Estes valores são utilizados para determinarmos os seguintes resultados a 2-laços para o corte da escala de energia e a constante cosmológica renormalizada,

$$\bar{\Lambda}^2 \approx 1,066 \times 10^{30} TeV^2 \quad (4.56)$$

e

$$\Lambda^2 \approx 3,589 \times 10^{31} TeV^2 . \quad (4.57)$$

Verificamos que esta simples escolha para eliminar logaritmos não é válida a 1-laço porque nesta ordem temos  $N\kappa^2/16\pi^2 = 1,600$  e este valor par o termo relacionado ao parâmetro de acoplamento está fora do intervalo descrito em (4.22). Consequentemente, não podemos determinar os valores do corte na escala de energia e da constante cosmológica renormalizada.

### 4.3 A escolha do parâmetro de massa

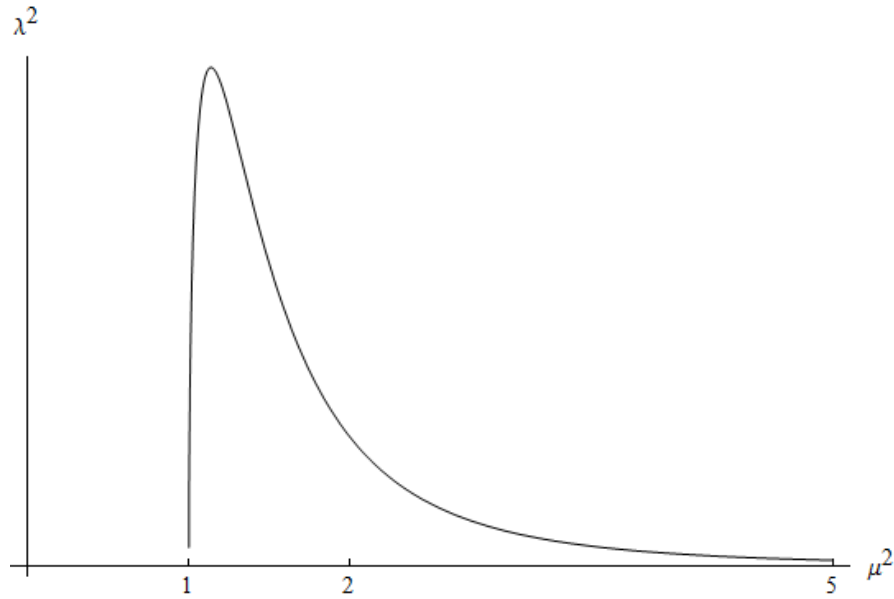
Embora os resultados anteriormente determinados sejam adequados, poderíamos argumentar se outro parâmetro de massa nos daria condições consistentes e melhores para determinar a constante cosmológica renormalizada ou o corte na escala de energia. Uma vez que não estamos considerando qualquer efeito relacionados aos condensados de dimensão 2, a outra possibilidade seria adotar  $\lambda^4$  ao invés de  $\gamma^4$ , os quais foram definidos na Seção 4.1.1. Vamos reconsiderar (4.13) e reescrever a equação de *gap* de massa levando em conta  $\lambda^4$  no lugar de  $\gamma^4$ . Tal troca nos leva a

$$\lambda^2 = e^{\frac{5}{6}} \frac{\mu^2}{(2N\kappa^2)^{1/2}} e^{-\frac{4}{3} \left( \frac{16\pi^2}{N\kappa^2} \right)} . \quad (4.58)$$

Ao manipularmos (4.18) e (4.58), obtemos

$$\lambda^2 = \xi \bar{\Lambda}^2 \left( \frac{\mu^2}{\bar{\Lambda}^2} \right)^{-35/9} \ln^{1/2} \left( \frac{\mu^2}{\bar{\Lambda}^2} \right) , \quad (4.59)$$

com  $\xi = e^{5/6} (11/(96\pi^2))^{1/2}$ . E (4.59) indica novamente que o menor parâmetro de Gribov está relacionado à mais alta energia. Podemos observar na Figura 4.7 o comportamento do parâmetro de massa  $\lambda^2$  quando a escala de energia aumenta. Assim, podemos observar o valor nulo para  $\lambda^2$  quando  $\mu = \bar{\Lambda}$ . Existe outra grave questão aqui porque o parâmetro de massa  $\lambda^2$  apresenta um máximo local quando  $\mu^2 = e^{9/70} \bar{\Lambda}^2$ , o que indica —antes deste ponto— uma diminuição do parâmetro de massa enquanto a escala de energia também está diminuindo. Fisicamente, tal comportamento é completamente antagônico ao esperado no regime de baixas energias. Neste regime, esperamos um comportamento monótono de crescimento do valor do parâmetro de massa enquanto a escala de energia diminui.



**Figura 4.7** O alternativo parâmetro de Gribov como função da escala de energia. A energia está quantificada em unidades de  $\bar{\Lambda}^2$  e o parâmetro  $\lambda^2$  em unidades de  $\xi\bar{\Lambda}^2$ .

A partir de (4.13), (4.18) e (4.19) obtemos

$$\frac{\lambda^2}{\kappa^2} = \rho \bar{\Lambda}^2 \left( \frac{\mu^2}{\bar{\Lambda}^2} \right)^{-35/9} \ln^{3/2} \left( \frac{\mu^2}{\bar{\Lambda}^2} \right), \quad (4.60)$$

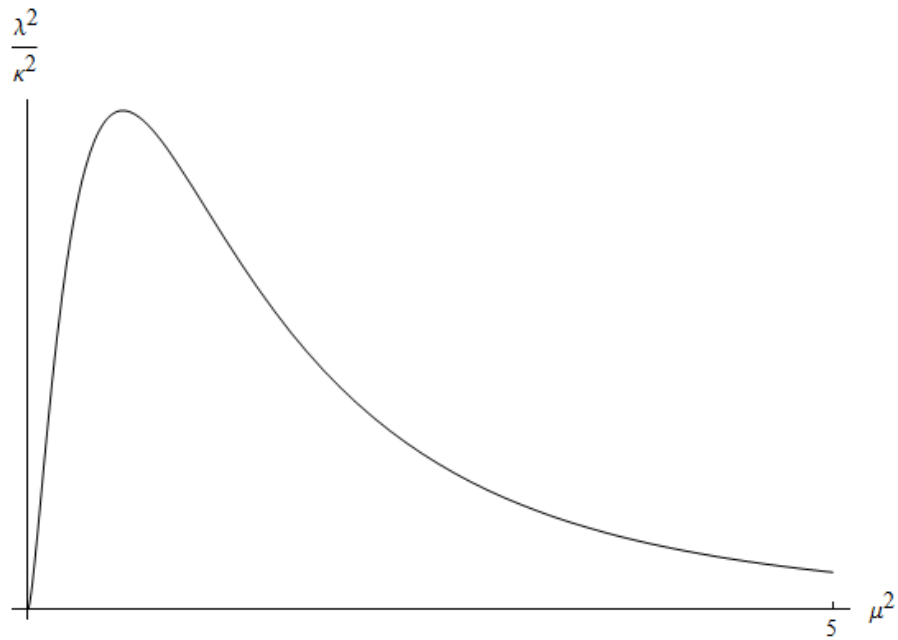
com  $\rho = 55e^{5/6}/(192\pi^3)(11/6)^{1/2}$ . O comportamento da razão (4.60) pode ser observado na Figura 4.8. A Figura 4.8 claramente mostra a inexistência da transição de regimes, uma vez que a contração de Inönü-Wigner nunca irá acontecer. Tal improbidade é imediatamente notável quando não temos a fase geométrica induzida devido ao limite nulo para a razão  $\lambda^2/\kappa^2$ . Novamente, podemos usar a identificação (3.48) em (4.60) para obtermos a relação direta entre a escala de energia, o corte e a constante gravitacional de Newton,

$$\frac{1}{G} = \tau \bar{\Lambda}^2 \left( \frac{\mu^2}{\bar{\Lambda}^2} \right)^{-35/9} \ln^{3/2} \left( \frac{\mu^2}{\bar{\Lambda}^2} \right), \quad (4.61)$$

onde  $\tau = \frac{55}{48\pi^2} e^{5/6} \left( \frac{11}{6} \right)^{1/2}$ . Fatalmente, a inversa de (4.60) é

$$\frac{\kappa^2}{\lambda^2} \equiv 4\pi G = \frac{1}{\rho \bar{\Lambda}^2} \left( \frac{\mu^2}{\bar{\Lambda}^2} \right)^{35/9} \frac{1}{\ln^{3/2} \left( \frac{\mu^2}{\bar{\Lambda}^2} \right)}. \quad (4.62)$$

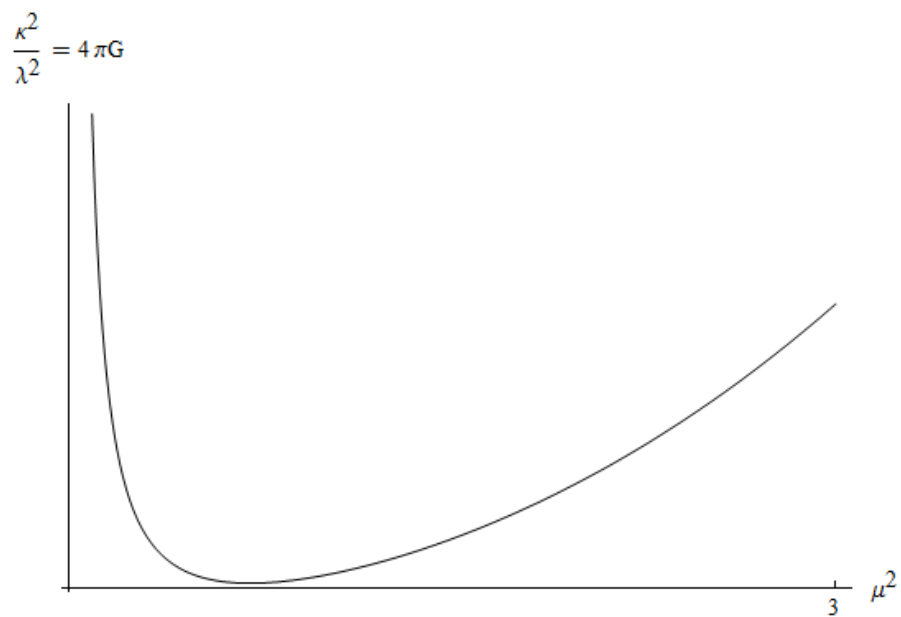
Ela está ilustrada na Figura (4.9).



**Figura 4.8** A razão  $\lambda^2/\kappa^2 \equiv 1/(4\pi G)$  como função da escala de energia  $\mu^2$ . A escala de energia está quantificada em unidades de  $\bar{\Lambda}^2$  enquanto a razão  $\lambda^2/\kappa^2$  está em unidades de  $\rho\bar{\Lambda}^2$ .

Reforçamos mais uma vez sobre a fatídica inexistência da contração de Inönü-Wigner, assim como a ausência do ponto de transição de regimes quando usamos  $\lambda^2$  como parâmetro de massa da teoria. Portanto, fizemos a escolha correta ao empregar o parâmetro de Gribov  $\gamma^2$  na construção da presente teoria de gravidade induzida.

Após a análise do comportamento dos parâmetros quânticos relacionados aos parâmetros gravitacionais, continuamos pesquisando estimativas melhores para o corte da escala de energia  $\bar{\Lambda}^2$  e a para a constante cosmológica renormalizada  $\Lambda^2$ .



**Figura 4.9** A razão  $\kappa^2/\lambda^2 \equiv 4\pi G$  como função da escala de energia  $\mu^2$ . A escala de energia está quantificada em unidades de  $\bar{\Lambda}^2$  enquanto  $4\pi G$  é quantificada em unidades de  $1/(\rho\bar{\Lambda}^2)$ .

# Capítulo 5

## Geometrias de Schwarzschild-de Sitter modificadas

No Capítulo 3 desenvolvemos uma teoria de gravidade induzida e fomos bem sucedidos nesta construção ao propor que uma teoria de Yang-Mills para o grupo  $SO(m, n)$  pudesse ser mapeada em uma teoria de gravidade [11]. Neste ponto estamos interessados em testar tal teoria através da investigação de questões clássicas, tais como soluções com simetria esférica. O interesse em estudar soluções esféricas não somente tem peso astrofísico, mas também leva em conta o ponto de vista teórico para testar qualquer teoria de gravidade. Como mostraremos, este é o principal ponto deste capítulo, ou seja, vamos estudar as primeiras soluções de buracos negros para a teoria de gravidade induzida para o grupo  $SO(5)$  sem considerar efeitos de torção neste primeiro momento. O principal objetivo é entendermos qual o nível de contribuição que as equações de campo da nossa teoria se assemelham às de Einstein e, claro, em qual limite a recuperamos.

### 5.1 A geometria do espaço-tempo de Schwarzschild-de Sitter

A primeira solução analítica encontrada para as equações de Einstein foi a geometria de Schwarzschild em 1916 [86]. Em seguida, de Sitter apresentou uma solução que envolveu apenas a constante cosmológica. Quando o limite newtoniano e a constante cosmológica são considerados, temos o espaço-tempo de Schwarzschild-de Sitter.

Mostraremos a obtenção da solução que leva ao espaço-tempo de Schwarzschild-de Sitter usando formas diferenciais. Por ser uma forma de solução raramente apresentada na literatura padrão da Relatividade Geral, explicitaremos certos passos dos cálculos de forma mais detalhada.

Primeiramente, assumiremos uma geometria esfericamente simétrica mais geral, O espaço-tempo esfericamente simétrico em coordenadas de Schwarzschild descrito por

$$e^0 = e^{\alpha(t,r)} dt \quad , \quad e^1 = e^{\beta(t,r)} dr \quad , \quad e^2 = r d\theta \quad , \quad e^3 = r \sin\theta d\phi \quad , \quad (5.1)$$

onde  $\alpha(t, r)$  e  $\beta(t, r)$  são funções escalares, enquanto  $dt, dr, d\theta, d\phi$  é uma base no espaço cotangente. Na Relatividade Geral de Einstein, a torção é nula, portanto,

$$T^a = 0 \Rightarrow de^a + \omega^a_b e^b = 0 \quad , \quad (5.2)$$

onde  $a \in \{0, 1, 2, 3\}$ , o que equivalentemente corresponde à  $(t, r, \theta, \phi)$ . Usamos (5.2) para determinar as componentes da conexão de spin, como segue.

$$\begin{aligned} de^0 &= e^{\alpha(t,r)} (\partial_t \alpha(t, r) dt dt + \partial_r \alpha(t, r) dr dt) \\ &= e^{\alpha(t,r)} \partial_r \alpha dr dt \equiv e^{-\beta(t,r)} \partial_r \alpha(t, r) e^1 e^0 \quad , \\ de^1 &= e^{\beta(t,r)} (\partial_t \beta(t, r) dt dr + \partial_r \beta(t, r) dr dr) \\ &= e^{\beta(t,r)} \partial_r \beta dt dr \equiv e^{-\alpha(t,r)} \partial_t \beta(t, r) e^0 e^1 \quad , \\ de^2 &= dr d\theta \equiv \frac{1}{r} e^{\beta(t,r)} e^1 e^2 \quad , \\ de^3 &= \sin\theta dr d\phi + r \cos\theta d\theta d\phi = \frac{1}{r} e^{-\beta(t,r)} e^1 e^3 + \frac{1}{r} \cot\theta e^2 e^3 \quad , \end{aligned} \quad (5.3)$$

em seguida,

$$\begin{aligned} de^0 + \omega^0_c e^c &= 0 \\ \omega^0_0 e^0 + \omega^0_1 e^1 + \omega^0_2 e^2 + \omega^0_3 e^3 &= -de^0 \\ \Rightarrow \omega^0_1 &= e^{-\beta(t,r)} \partial_r \alpha(t, r) e^0 \quad \text{e} \quad \omega^0_2 e^2 + \omega^0_3 e^3 = 0 \quad . \end{aligned} \quad (5.4)$$

Acima, usamos o caráter antissimétrico da conexão de spin, o que nos leva à  $\omega^a_a = 0$ , enquanto a métrica do espaço tangente,  $\eta = (-1, 1, 1, 1)$ , nos permite deduzir que  $\omega^i_0 = \omega^0_i$ , onde  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Devido a estes motivos, teremos ainda pela frente  $\omega^i_j = -\omega^j_i$ , com  $j \in \{1, 2, 3\}$ . Continuamos, analogamente, na busca das demais



componentes,

$$\begin{aligned} de^1 + \omega^1{}_{\epsilon} e^{\epsilon} = 0 &\Rightarrow \omega^1{}_2 e^2 + \omega^1{}_3 e^3 = -e^{-\alpha(t,r)} \partial_t \beta(t,r) e^0 e^1 \\ de^2 + \omega^2{}_{\epsilon} e^{\epsilon} = 0 &\Rightarrow \omega^2{}_0 e^0 + \omega^2{}_1 e^1 + \omega^2{}_3 e^3 = -\frac{1}{r} e^{-\beta(t,r)} e^1 e^2, \end{aligned} \quad (5.5)$$

com  $\omega^0{}_2 e^2 + \omega^0{}_3 e^3 = 0$ , temos  $\omega^0{}_2 = 0$  e  $\omega^0{}_3 = 0$  ou  $\omega^0{}_3 \propto e^3$ .

$$de^3 + \omega^3{}_{\epsilon} e^{\epsilon} = 0 \Rightarrow \omega^3{}_0 e^0 + \omega^3{}_1 e^1 + \omega^3{}_2 e^2 = -\frac{1}{r} e^{-\beta(t,r)} e^1 e^3 - \frac{1}{r} \cot \theta e^2 e^3, \quad (5.6)$$

o que nos permite concluir que  $\omega^0{}_3 = \omega^3{}_0 = 0$ ,  $\omega^2{}_1 = r^{-1} e^{-\beta(t,r)} e^2$ ,  $\omega^3{}_1 = r^{-1} e^{-\beta(t,r)} e^3$  e  $\omega^3{}_2 = r^{-1} \cot \theta e^3$ . Ademais,  $\omega^2{}_1 = -\omega^1{}_2$ ,  $\omega^3{}_1 = -\omega^1{}_3$  e  $\omega^2{}_3 = -\omega^3{}_2$ . Logo,

$$\begin{aligned} \omega^1{}_2 e^2 + \omega^1{}_3 e^3 &= -e^{-\alpha(t,r)} \partial_t \beta(t,r) e^0 e^1 \\ -\frac{1}{r} e^{-\beta(t,r)} \underbrace{e^2 e^2}_{=0} - \frac{1}{r} e^{-\beta(t,r)} \underbrace{e^3 e^3}_{=0} &= -e^{-\alpha(t,r)} \partial_t \beta(t,r) e^0 e^1 \\ \Rightarrow -e^{-\alpha(t,r)} \partial_t \beta(t,r) e^0 e^1 = 0 &\Rightarrow \partial_t \beta(t,r) = 0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Portanto, somente o fato de não admitirmos torção, conforme a equação de estrutura de Cartan, chegamos à conclusão que  $\beta$  é independente do tempo. O próximo passo é mostrar se ocorre independência temporal para  $\alpha$ . Para tal, precisaremos resolver a equação de campo de Einstein com constante cosmológica,

$$\varepsilon_{abcd} \left( R^{bc} - \frac{\tilde{\Lambda}^2}{3} e^b e^c \right) e^d = 0. \quad (5.8)$$

Antes, necessitamos calcular as 2-formas de curvatura. Como mencionamos no Capítulo 3, a primeira equação de estrutura de Cartan,  $R^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_{\epsilon} \omega^{\epsilon}{}_b$ , relaciona a curvatura com a conexão de spin. Uma vez que temos as componentes da conexão, obtemos

$$\begin{aligned} R^a{}_a &= \underbrace{d\omega^a{}_a}_{=0} + \omega^a{}_{\epsilon} \omega^{\epsilon}{}_a \\ \Rightarrow R^0{}_0 &= \omega^0{}_1 \omega^1{}_0 + \omega^0{}_2 \omega^2{}_0 + \omega^0{}_3 \omega^3{}_0 \\ R^0{}_0 &= [\partial_r \alpha(t,r) e^{-\beta(r)}]^2 e^0 e^0 = 0, \\ \Rightarrow R^i{}_i &= \underbrace{d\omega^i{}_i}_{=0} + \underbrace{\omega^i{}_1 \omega^1{}_i}_{=0} + \underbrace{\omega^i{}_2 \omega^2{}_i}_{=0} + \underbrace{\omega^i{}_3 \omega^3{}_i}_{=0} \\ R^i{}_i &= 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

De forma análoga, obtemos as demais 2-formas de curvatura,

$$\begin{aligned}
 R^1_0 &= e^{-2\beta(r)} [\partial_r^2 \alpha(t, r) + (\partial_r \alpha(t, r)) - \partial_r \alpha(t, r) \partial_r \beta(r)] e^1 e^0, \\
 R^2_0 &= \frac{1}{r} e^{-2\beta r} \partial_r \alpha(t, r) e^2 e^0, \\
 R^3_0 &= \frac{1}{r} e^{-2\beta r} \partial_r \alpha(t, r) e^3 e^0, \\
 R^2_1 &= \frac{1}{r} e^{-2\beta r} \partial_r \beta(r) e^2 e^1, \\
 R^3_1 &= \frac{1}{r} e^{-2\beta r} \partial_r \beta(r) e^3 e^1, \\
 R^3_2 &= \frac{1}{r^2} (1 - e^{-2\beta r}) e^3 e^2.
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

Podemos agora, substituir (5.9) e (5.10) em (5.8). Logo, com  $\alpha = 0$ ,

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{0bcd} \left( R^{bc} - \frac{\tilde{\Lambda}^2}{3} e^b e^c \right) e^d &= 0 \\
 \left[ 2 (R^3_1 e^2 - R^3_2 e^1 - R^2_1 e^3) - 2\tilde{\Lambda}^2 \right] e^1 e^2 e^3 &= 0 \\
 2r e^{-2\beta} \partial_r \beta(r) + 1 - e^{-2\beta} - \tilde{\Lambda}^2 r^2 &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Com  $\alpha = 1$ ,

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{1bcd} \left( R^{bc} - \frac{\tilde{\Lambda}^2}{3} e^b e^c \right) e^d &= 0 \\
 \left[ 2 (R^3_0 e^2 - R^3_2 e^0 - R^2_0 e^3) - 2\tilde{\Lambda}^2 \right] e^0 e^2 e^3 &= 0 \\
 2r e^{-2\beta(r)} \partial_r \alpha(t, r) - 1 + e^{-2\beta(r)} + \tilde{\Lambda}^2 r^2 &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Somamos as equações diferenciais oriundas de (5.11) e (5.12), obtemos

$$\partial_r [\alpha(t, r) + \beta(r)] = 0 \Rightarrow \alpha(t, r) = f(r) + g(t). \tag{5.13}$$

Agora, quando reescalamos a coordenada temporal, ou seja,  $dt \rightarrow e^{-g(t)} dt$ , obtemos  $e^{\alpha(t, r)} = e^{f(r)}$ , o que seria equivalente a escolhermos  $g(t) = 0$ . Enfim, simplesmente renomeando  $f(r)$  para  $\alpha(r)$ , temos  $\partial_r (\alpha(r) + \beta(r)) = 0 \Rightarrow \alpha(r) = -\beta(r)$ .

Finalmente, vamos resolver a equação diferencial em (5.11). Um fato bastante interessante, ao usarmos o formalismo de formas diferenciais, consiste em não precisarmos da

segunda equação diferencial em (5.12) para encontrar a forma de  $\beta(r)$ . Prosseguindo,

$$\begin{aligned} 2re^{-2\beta}\partial_r\beta(r) + 1 - e^{-2\beta}\partial_r\beta(r) - \tilde{\Lambda}^2r^2 &= 0 \\ \partial_r(re^{-2\beta}) &= 1 - \tilde{\Lambda}^2r^2. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Integrando a última linha de (5.14) e assumindo o limite newtoniano para fixar a constante de integração como  $-2GM$ , encontramos

$$e^{-2\beta(r)} = 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{1}{3}\tilde{\Lambda}^2r^2, \quad (5.15)$$

o que nos leva à métrica de Schwarzschild-de Sitter,

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{1}{3}\tilde{\Lambda}^2r^2 \right) dt^2 + \frac{1}{\left( 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{1}{3}\tilde{\Lambda}^2r^2 \right)} + r^2 d\Omega^2, \quad (5.16)$$

onde  $d\Omega^2 = d\theta^2 + r\text{sen}^2\theta d\phi^2$ .

Quando fazemos  $\tilde{\Lambda}^2 = 0$ , ou seja, estamos lidando com uma geometria sem constante cosmológica, retornamos diretamente para a primeira solução analítica para as equações de Einstein, *i.e.*, a solução de Schwarzschild.

## 5.2 Soluções esfericamente simétricas da teoria de gravidade induzida

Para obtermos soluções para as equações de campo (3.63) e (3.73), as quais foram determinadas no Capítulo 3, assumiremos um espaço-tempo esfericamente simétrico. Primeiro, mostraremos as equações de campo (3.63) e (3.73) simplificadas para o grupo  $SO(5)$  e não levaremos em conta os efeitos da torção. Segundo, estudaremos dois regimes relacionados ao termo de curvatura quadrático. No primeiro, trataremos o termo quadrático de curvatura como uma perturbação da equação de campo obtida pela ação de Einstein-Hilbert com constante cosmológica. No segundo regime, vamos em busca de uma geometria do espaço-tempo sob a forte influência daquele termo quadrático de curvatura.

### 5.2.1 O sistema de equações diferenciais

Conforme mencionamos anteriormente, consideraremos um espaço-tempo com torção nula. Uma vez que estamos considerando a teoria de gravidade induzida a partir da ação de Yang-Mills para o grupo  $SO(5)$ , devemos atribuir  $\epsilon = 1$ . Portanto, temos as equações de campo na sua forma simplificada,

$$\frac{3}{2\Lambda^2} R^{bc} \star (R_{bc} e_a) - \varepsilon_{abcd} \left( R^{bc} e^d - \frac{\tilde{\Lambda}^2}{3} e^b e^c e^d \right) = 0, \quad (5.17)$$

$$D \star R_{ab} = 0. \quad (5.18)$$

O espaço-tempo esfericamente simétrico em coordenadas de Schwarzschild descrevemos como

$$e^0 = e^{\alpha(r)} dt, \quad e^1 = e^{\beta(r)} dr, \quad e^2 = r d\theta, \quad e^3 = r \sin\theta d\phi. \quad (5.19)$$

Portanto, aplicamos (5.19) em (5.17), analogamente como realizamos na Seção 5.1 e encontramos as respectivas equações diferenciais

$$\sigma \left[ 2 \left( \frac{e^{-2\beta} \partial_r \beta}{r} \right)^2 + \left( \frac{1 - e^{-2\beta}}{r^2} \right)^2 \right] + 2 \left( \frac{e^{-2\beta} \partial_r \beta}{r} \right) + \frac{1 - e^{-2\beta}}{r^2} + 3\lambda = 0, \quad (5.20)$$

$$\sigma \left[ 2 \left( \frac{e^{-2\beta} \partial_r \alpha}{r} \right)^2 + \left( \frac{1 - e^{-2\beta}}{r^2} \right)^2 \right] - 2 \left( \frac{e^{-2\beta} \partial_r \alpha}{r} \right) + \frac{1 - e^{-2\beta}}{r^2} + 3\lambda = 0, \quad (5.21)$$

$$\sigma \left\{ \left[ e^{-(\alpha+\beta)} \partial_r (e^{-\beta} \partial_r e^\alpha) \right]^2 + \left( \frac{e^{-2\beta} \partial_r \alpha}{r} \right)^2 + \left( \frac{e^{-2\beta} \partial_r \beta}{r} \right)^2 \right\} +$$

$$- e^{-(\alpha+\beta)} \partial_r (e^{-\beta} \partial_r e^\alpha) - \frac{e^{-2\beta} \partial_r \alpha}{r} + \frac{e^{-2\beta} \partial_r \beta}{r} + 3\lambda = 0, \quad (5.22)$$

$$\partial_r \mathcal{R} = 0, \quad (5.23)$$

para  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 1$  e  $\alpha = 2$ , respectivamente. Em (5.23),  $\mathcal{R}$  é o escalar de curvatura. Observamos que as equações diferenciais obtidas para  $\alpha = 2$  e  $\alpha = 3$  são idênticas. As constantes em (5.20), (5.21) e (5.22) são  $\sigma \equiv -3/(2\Lambda^2)$  e  $\lambda \equiv -\tilde{\Lambda}^2/3$ .

Subtraímos (5.20) e (5.21) e obtemos

$$\frac{2}{r} e^{-2\beta} (\partial_r \beta + \partial_r \alpha) \left[ 1 + \frac{\sigma}{2} \left( \frac{e^{-2\beta}}{r} \right) (\partial_r \beta - \partial_r \alpha) \right] = 0, \quad (5.24)$$

que nos mostra dois possíveis vínculos:

- (i)  $\partial_r(\alpha + \beta) = 0$  ;
- (ii)  $1 + \frac{\sigma}{2} \left( \frac{e^{-2\beta}}{r} \right) (\partial_r \beta - \partial_r \alpha) = 0$  .

O vínculo (i) nos leva a  $\alpha = -\beta$ , o qual é o padrão em estudos de soluções esfericamente simétricas. Tal vínculo nos permite simplificar o sistema formado por (5.20), (5.21), (5.22). Isto é o mais próximo da literatura padrão e, diretamente, ele nos abre uma janela para investigar nossos propósitos. Portanto, deixamos o vínculo (ii) para futuros trabalhos.

Vale ressaltar que, mesmo quando aplicamos o vínculo (i) ficamos com um sistema sobredeterminado composto por três equações diferenciais, (5.20), (5.22) e (5.23).

## 5.2.2 A solução perturbativa

Aqui, assumiremos a busca por uma geometria do espaço-tempo sob uma pequena influência do termo quadrático de curvatura a partir de (5.20). Para tal, multiplicamos (5.20) por  $\lambda$  e encontramos

$$\eta \left[ 2 \left( \frac{e^{-2\beta} \partial_r \beta}{r} \right)^2 + \left( \frac{1 - e^{-2\beta}}{r^2} \right)^2 \right] + \lambda \left[ 2 \left( \frac{e^{-2\beta} \partial_r \beta}{r} \right) + \frac{1 - e^{-2\beta}}{r^2} + 3\lambda \right] = 0 , \quad (5.25)$$

onde  $\eta = \sigma \lambda \equiv \tilde{\Lambda}^2 / 2\Lambda^2$  é o que consideramos como parâmetro de perturbação devido à  $\Lambda^2 \gg \tilde{\Lambda}^2$ . Nesta forma, resolvemos tal equação diferencial aplicando teoria de perturbação. Os termos quadráticos em (5.25), os quais surgem após tratamos o termo de curvatura quadrática, formam a parte da equação diferencial que será tratada como uma perturbação. Os demais termos de (5.25) são aqueles comumente encontrados quando substituímos a métrica esfericamente simétrica na equação de campo de Einstein com constante cosmológica. Tal parte, quando resolvida isoladamente, nos leva à bem conhecida solução de Schwarzschild-de Sitter.

Por simplicidade, definimos  $u(r) = 1 - e^{-2\beta(r)}$ , pois dessa maneira, podemos escrever (5.25) em um formato mais compacto, *i.e.*,

$$\eta \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{d}{dr} u(r) \right)^2 + \left( \frac{u(r)}{r^2} \right)^2 \right] + \rho \left( r \frac{d}{dr} u(r) + u(r) + 3\rho r^2 \right) = 0 . \quad (5.26)$$

A solução perturbativa é da forma geral

$$u(r) = u_0(r) + \eta u_1(r) + \eta^2 u_2(r) + \eta^3 u_3(r) + \dots \quad (5.27)$$

Ao substituímos (5.27) em (5.26), encontramos

$$\eta \left[ \frac{1}{2} (\eta^k d_k)^2 + (\eta^k u_k)^2 \right] + \rho (r \eta^k d_k + \eta^k u_k + 3\rho r^2) = 0, \quad (5.28)$$

onde adotamos a notação  $d_k \equiv du_k(r)/dr$  e  $u_k \equiv u_k(r)$ , com  $k \in [0, \infty)$ . Empregamos a convenção de soma em  $k$  para facilitar a escrita de (5.28). Desse modo, a partir de (5.28), determinamos as equações diferenciais, ordem a ordem, como segue:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}(ru_0) + 3\rho r^2 &= 0, \\ \frac{d}{dr}(ru_1) + \frac{1}{2\rho} \left( \frac{du_0}{dr} \right)^2 + \frac{u_0^2}{\rho r^2} &= 0, \\ \frac{d}{dr}(ru_2) + \frac{1}{\rho} \left( \frac{du_0}{dr} \frac{du_1}{dr} \right) + \frac{2u_0 u_1}{\rho r^2} &= 0, \\ \frac{d}{dr}(ru_3) + \frac{1}{2\rho} \left( \frac{du_1}{dr} \right)^2 + \frac{u_1^2}{\rho r^2} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{du_0}{dr} \frac{du_2}{dr} \right) + \frac{2u_0 u_2}{\rho r^2} &= 0, \\ \frac{d}{dr}(ru_4) + \frac{1}{\rho} \left( \frac{du_0}{dr} \frac{du_3}{dr} \right) + \frac{2u_0 u_3}{\rho r^2} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{du_1}{dr} \frac{du_2}{dr} \right) + \frac{2u_1 u_2}{\rho r^2} &= 0, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (5.29)$$

Com a hierarquia de equações (5.29), resolvemos, iterativamente, as equações acima. Primeiro, na ordem zero, encontramos

$$u_0 = \frac{\tilde{\Lambda}^2}{3} r^2 + \frac{2GM}{r}, \quad (5.30)$$

onde a constante em  $1/r$ , encontramos no limite newtoniano. Em seguida, substituímos na ordem 1 para determinarmos  $u_1$ . Em cada ordem, encontramos as funções  $u_k$  que serão usadas na equação diferencial da ordem seguinte, isto é,  $k+1$ . Desse modo encontramos as funções  $u_k$  para cada ordem  $k$  a menos de uma constante de integração. Logo, determinamos a seguinte solução para (5.25).

$$e^{-2\beta} = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k \sum_{\ell=1}^{k+2} \mathcal{C}_{k\ell} r^{5-3\ell}, \quad (5.31)$$

com constantes  $\mathcal{C}_{k\ell}$ 's. As constantes  $\mathcal{C}_{k2}$ , com  $k = 0, 1, 2, \dots$ , são as constantes

de integração. As demais constantes são dependentes daquelas presentes nas ordens anteriores.

A seguir, dispomos uma lista das constantes  $\mathcal{C}_{k\ell}$ , até a quarta ordem, estão dispostas na matriz a seguir.

$$\begin{pmatrix} \frac{\tilde{\Lambda}^2}{3} & 2GM & & & & & \\ \frac{\tilde{\Lambda}^2}{3} & \mathcal{C}_{12} & \frac{6G^2M^2}{\tilde{\Lambda}^2} & & & & \\ 2\frac{\tilde{\Lambda}^2}{3} & \mathcal{C}_{22} & \frac{6GM}{\tilde{\Lambda}^2}\Omega_1 & -\frac{36G^3M^3}{\tilde{\Lambda}^4} & & & \\ 5\frac{\tilde{\Lambda}^2}{3} & \mathcal{C}_{32} & \frac{9}{2\tilde{\Lambda}^2}\Omega_2 & \frac{54G^2M^2}{\tilde{\Lambda}^4}\Omega_4 & \frac{312G^4M^4}{\tilde{\Lambda}^6} & & \\ 14\frac{\tilde{\Lambda}^2}{3} & \mathcal{C}_{42} & -\frac{3}{\tilde{\Lambda}^2}\Omega_3 & \frac{3GM}{\tilde{\Lambda}^2}\Omega_5 & \frac{54G^2M^2}{\tilde{\Lambda}^4}\Omega_6 & -\frac{3564G^5M^5}{\tilde{\Lambda}^8} & \end{pmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \mathcal{C}_{12} - 2GM, \\ \Omega_2 &= [\mathcal{C}_{12}^2 + 4GM(6GM - 2\mathcal{C}_{12} - \mathcal{C}_{22})], \\ \Omega_3 &= [\mathcal{C}_{12}(\mathcal{C}_{12} + \mathcal{C}_{22} - 12GM) - 2GM(2\mathcal{C}_{22} + \mathcal{C}_{32} - 20GM)], \\ \Omega_4 &= (8GM - 3\mathcal{C}_{12}), \\ \Omega_5 &= [3\mathcal{C}_{12}^2 - 2GM(12\mathcal{C}_{12} + 3\mathcal{C}_{22} - 24GM)], \\ \Omega_6 &= 2(\mathcal{C}_{12} - 3GM). \end{aligned} \tag{5.32}$$

De forma mais explícita, truncando (5.31) na quarta ordem, temos

$$\begin{aligned} e^{-2\beta} &\approx \left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\tilde{\Lambda}^2}{3}r^2\right) - \eta \left(\frac{\mathcal{C}_{12}}{r} + \mathcal{C}_{11}r^2 + \frac{\mathcal{C}_{13}}{r^4}\right) + \\ &- \eta^2 \left(\frac{\mathcal{C}_{22}}{r} + \mathcal{C}_{21}r^2 + \frac{\mathcal{C}_{23}}{r^4} + \frac{\mathcal{C}_{24}}{r^7}\right) + \\ &- \eta^3 \left(\frac{\mathcal{C}_{32}}{r} + \mathcal{C}_{31}r^2 + \frac{\mathcal{C}_{32}}{r^4} + \frac{\mathcal{C}_{34}}{r^7} + \frac{\mathcal{C}_{35}}{r^{10}}\right) + \\ &- \eta^4 \left(\frac{\mathcal{C}_{42}}{r} + \mathcal{C}_{41}r^2 + \frac{\mathcal{C}_{43}}{r^4} + \frac{\mathcal{C}_{44}}{r^7} + \frac{\mathcal{C}_{45}}{r^{10}} + \frac{\mathcal{C}_{46}}{r^{13}}\right). \end{aligned} \tag{5.33}$$

Em regiões bem distantes do horizonte de eventos da distribuição de massa, onde  $r \gg 2GM$ , obtemos

$$ds^2 = - \left(1 - \tilde{\Upsilon}r^2\right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \tilde{\Upsilon}r^2\right)} + r^2 d\Omega^2, \tag{5.34}$$

com

$$\tilde{\Upsilon} \approx \frac{\tilde{\Lambda}^2}{3} + \eta \left( \frac{\tilde{\Lambda}^2}{3} \right) + \eta^2 \left( 2 \frac{\tilde{\Lambda}^2}{3} \right) + \eta^3 \left( 5 \frac{\tilde{\Lambda}^2}{3} \right) + \eta^4 \left( 14 \frac{\tilde{\Lambda}^2}{3} \right), \quad (5.35)$$

a qual é, perturbativamente, um espaço-tempo assintoticamente de Sitter. Vemos diretamente que no limite  $\eta \rightarrow 0$ , recuperamos um espaço-tempo de de Sitter. Ademais, sem qualquer tipo de truncamento, temos

$$e^{-2\beta} = 1 - \sum_{w=0}^{\infty} \eta^w a_w \left( \frac{\tilde{\Lambda}^2}{3} r^2 \right), \quad (5.36)$$

onde

$$a_w = \frac{(2w)!}{(w+1)!w!} \quad (5.37)$$

são os chamados números de Catalan<sup>1</sup>.

O próximo passo consiste em determinarmos os horizontes de eventos. Concentraremos nossos cálculos na análise em primeira ordem. Logo, escrevemos a solução perturbativa como

$$e^{-2\beta} \approx 1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\tilde{\Lambda}^2}{3} r^2 - \eta \left( \frac{\mathcal{C}_{12}}{r} + \frac{\tilde{\Lambda}^2}{3} r^2 - \frac{1}{r^4} \frac{6G^2 M^2}{\tilde{\Lambda}^2} \right). \quad (5.38)$$

Na busca de uma solução perturbativa, não houve motivo para nos preocuparmos com a segunda equação de campo, pois esta fica na forma  $\eta \partial \mathcal{R} = 0$ , logo, não havendo ordem zero, e, portanto, sem possibilidade alguma de empregarmos teoria de perturbação para encontrar uma solução consistente.

### 5.2.2.1 Horizonte de eventos da distribuição de massa e o horizonte de eventos cosmológico

Usaremos a solução perturbativa (5.38) para calcular o horizonte de eventos da distribuição de massa e o horizonte de eventos cosmológico. Tais horizontes são determinados quando atribuímos  $e^{-2\beta} = 0$ . Logo, devemos resolver a seguinte equação

<sup>1</sup>Tais números receberam esse nome após a descoberta de tal sequência pelo matemático belga Eugène C. Catalan (1814 – 1894), o qual foi responsável por várias contribuições para a matemática combinatória[87].



algébrica

$$r^3 \left( r - 2GM - \frac{\tilde{\Lambda}^2}{3} r^3 \right) - \eta \left( \frac{\tilde{\Lambda}^2}{3} r^6 + \mathcal{C}_{12} r^3 - \frac{6G^2 M^2}{\tilde{\Lambda}^2} \right) = 0, \quad (5.39)$$

onde  $\mathcal{C}_{12}$  é uma constante de integração. Desse modo, temos uma equação algébrica com uma perturbação. Portanto, devemos encontrar a solução perturbativamente, a qual, em primeira ordem, temos a seguinte forma da solução,

$$r \approx r_0 + \eta r_1. \quad (5.40)$$

Não há razão para nos preocuparmos com termos de ordem mais elevada, pois usaremos o elemento de linha truncado na primeira ordem. Substituímos (5.40) em (5.39) e encontramos um sistema de duas equações algébricas. Em ordem zero, prontamente com a substituição das constantes  $\mathcal{C}$ 's, temos

$$r_0^3 - \frac{3}{\tilde{\Lambda}^2} r_0 + \frac{6GM}{\tilde{\Lambda}^2} = 0, \quad (5.41)$$

enquanto, em primeira ordem,

$$3r_1 r_0^3 \left( 1 - \frac{\tilde{\Lambda}^2}{3} r_0^2 \right) - \mathcal{C}_{12} r_0^3 - \frac{\tilde{\Lambda}^2}{3} r_0^6 + \frac{6G^2 M^2}{\tilde{\Lambda}^2} = 0. \quad (5.42)$$

Para determinarmos a natureza das raízes de (5.41), devemos verificar o seu polinômio discriminante, o qual é

$$\Delta = \frac{108}{\tilde{\Lambda}^6} \left( 1 - 9G^2 M^2 \tilde{\Lambda}^2 \right), \quad (5.43)$$

Se, e somente se  $\Delta > 0$ , a equação (5.41) tem raízes reais. Para satisfazermos tal condição, devemos ter  $3GM\tilde{\Lambda} < 1$ , uma vez que  $\tilde{\Lambda} \equiv \sqrt{\tilde{\Lambda}^2}$ ,  $G$  e  $M$  são quantidades positivas.

Usamos o método trigonométrico para encontrar todas as raízes de (5.41). Neste sentido, obtemos suas duas raízes positivas,

$$\begin{aligned} r_{01} &= \frac{2}{\tilde{\Lambda}} \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos \left( 3GM\tilde{\Lambda} \right) - \frac{\pi}{3} \right], \\ r_{02} &= \frac{2}{\tilde{\Lambda}} \cos \left[ \frac{1}{3} \arccos \left( 3GM\tilde{\Lambda} \right) + \frac{\pi}{3} \right], \end{aligned} \quad (5.44)$$

ou, em uma forma sucinta, após aplicarmos a regra de soma e subtração de arcos, escrevemos

$$\begin{aligned} r_{01} &= \frac{1}{\tilde{\Lambda}} \left( c_\xi + \sqrt{3}s_\xi \right) , \\ r_{02} &= \frac{1}{\tilde{\Lambda}} \left( c_\xi - \sqrt{3}s_\xi \right) , \end{aligned} \quad (5.45)$$

onde  $c_\xi \equiv \cos \xi$ ,  $s_\xi \equiv \sin \xi$  e  $\xi = 1/3 \arccos(3GM\tilde{\Lambda})$ . A última raiz é  $r_{03} = -(r_{01} + r_{02})$ , a qual é essencialmente negativa e ela não tem significado físico pelo fato de estarmos calculando horizontes de eventos. As raízes em (5.44) representam os termos de ordem zero dos horizontes eventos, tanto cosmológico quanto da distribuição de massa. Devido  $0 < 3GM\tilde{\Lambda} < 1$ , então  $0 < \arccos(3GM\tilde{\Lambda}) < \pi/2$ , o que implica em  $r_{01} > r_{02} > 0$ . Assim,  $r_{02}$  é o termo de ordem zero do horizonte de eventos da distribuição de massa  $M$ , enquanto  $r_{01}$  é o termo de ordem zero do horizonte de eventos cosmológico.

Consequentemente, o derradeiro passo que daremos para determinar os horizontes de eventos consiste na substituição de (5.44) em (5.42). Após completarmos esta tarefa, podemos descrever os dois horizontes como  $r_b = r_{02} + \eta r_{12}$ , o horizonte de eventos da distribuição esférica de massa, e  $r_c = r_{01} + \eta r_{11}$ , o horizonte de eventos cosmológico, tal que

$$r_{1\ell} = \frac{1}{3 \left( 1 - \frac{\tilde{\Lambda}^2}{3} r_{0\ell}^2 \right)} \left( -\frac{6G^2 M^2}{\tilde{\Lambda}^2} \frac{1}{r_{0\ell}^3} + \mathcal{C}_{12} + \frac{\tilde{\Lambda}^2}{3} r_{0\ell}^3 \right) , \quad (5.46)$$

com  $\ell = 1$  ou  $\ell = 2$ .

Logo, escrevemos a forma completa dos horizontes de eventos,

$$\begin{aligned} r_b &= \frac{1}{\tilde{\Lambda}} \left\{ \left( c_\xi - \sqrt{3}s_\xi \right) + \right. \\ &\quad \left. + \eta \frac{\sec(3\xi)}{6} \left[ -\frac{18G^2 M^2 \tilde{\Lambda}^2}{(c_\xi - \sqrt{3}s_\xi)^2} + 3\mathcal{C}_{12} \left( c_\xi - \sqrt{3}s_\xi \right) + \left( c_\xi - \sqrt{3}s_\xi \right)^4 \right] \right\} , \\ r_c &= \frac{1}{\tilde{\Lambda}} \left\{ \left( c_\xi + \sqrt{3}s_\xi \right) + \right. \\ &\quad \left. + \eta \frac{\sec(3\xi)}{6} \left[ -\frac{18G^2 M^2 \tilde{\Lambda}^2}{(c_\xi + \sqrt{3}s_\xi)^2} + 3\mathcal{C}_{12} \left( c_\xi + \sqrt{3}s_\xi \right) + \left( c_\xi + \sqrt{3}s_\xi \right)^4 \right] \right\} . \end{aligned} \quad (5.47)$$

Vemos imediatamente que no limite  $\eta \rightarrow 0$  recuperamos os dois horizontes de eventos de um espaço-tempo de Schwarzschild-de Sitter.

### 5.2.2.2 Sobre singularidades no regime perturbativo

Neste momento, através de alguns invariantes de curvatura, analisaremos a questão das singularidades na solução perturbativa. Em primeira ordem, calculamos o invariante de Kretschmann,

$$\mathcal{R}^{\alpha\beta\gamma\delta}\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{48G^2M^2}{r^6} + \frac{8}{3}\tilde{\Lambda}^4 + \eta \left[ \left( \frac{24\mathcal{C}_{02}^2}{r^6} - \frac{180\mathcal{C}_{01}^3}{\tilde{\Lambda}^2 r^9} \right) + \left( 2\tilde{\Lambda}^4 - \frac{8\tilde{\Lambda}^4}{r^6} \right) \right], \quad (5.48)$$

logo,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \mathcal{R}^{\alpha\beta\gamma\delta}\mathcal{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} \rightarrow \infty, \quad (5.49)$$

o qual é ligeiramente desviado do tradicional invariante de Kretschmann por causa do termo perturbativo. Interpretamos que este é um tipo de singularidade física na origem. Temos aqui uma peculiar característica do escalar de curvatura

$$\mathcal{R} = 4\tilde{\Lambda}^2 + \eta \left( \frac{6\mathcal{C}_{13}}{r^6} + 4\tilde{\Lambda}^2 \right). \quad (5.50)$$

Não há singularidades caso consideremos apenas ordem zero. Caso contrário, a natureza física do termo quadrático na equação de campo nos remete a

$$\lim_{r \rightarrow 0} \mathcal{R} \rightarrow \infty. \quad (5.51)$$

A singularidade física em  $r = 0$ , evidenciada em (5.48) está de acordo com o resultado usual obtido na Relatividade Geral de Einstein. Poderíamos ir adiante e realizar cálculos de outros invariantes de curvatura, mas percebemos que (5.48) sozinho garante a singularidade física na origem, tal como esperado. Quando tomamos o limite  $\eta \rightarrow 0$ , encontramos o escalar de curvatura constante, tal como se apresenta na teoria original de Einstein.

### 5.2.3 A solução exata

Neste ponto, estudaremos o regime onde existe uma forte influência do termo quadrático de curvatura. Analiticamente, para tal fim, subtraímos as equações diferenciais que obtivemos para  $\alpha = 2$  e  $\alpha = 0$ , *i.e.*, (5.21) e (5.22), respectivamente. Adicionalmente,

sob o vínculo  $\alpha + \beta = 0$ , encontramos a seguinte equação diferencial,

$$\sigma \left[ \left( \frac{\partial_r^2 e^{-2\beta}}{2} \right)^2 - \left( \frac{1 - e^{-2\beta}}{r^2} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \partial_r^2 e^{-2\beta} - \frac{1 - e^{-2\beta}}{r^2} = 0. \quad (5.52)$$

A partir da equação (5.52), encontramos apenas duas soluções permitidas, *i.e.*,

$$\begin{aligned} e^{-2\beta} &= 1 - \Upsilon_p r^2, \\ e^{-2\beta} &= 1 - \Upsilon_m r^2, \end{aligned} \quad (5.53)$$

com

$$\begin{aligned} \Upsilon_p &= \frac{\Lambda^2}{3} \left[ 1 + \sqrt{1 - 2 \frac{\tilde{\Lambda}^2}{\Lambda^2}} \right], \\ \Upsilon_m &= \frac{\Lambda^2}{3} \left[ 1 - \sqrt{1 - 2 \frac{\tilde{\Lambda}^2}{\Lambda^2}} \right]. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Ambos  $\Upsilon_p$  e  $\Upsilon_m$  são constantes que caracterizam o elemento de linha quadrado,  $ds^2$ , de cada espaço-tempo, ou seja,

$$ds^2 = - (1 - \Upsilon_p r^2) dt^2 + \frac{1}{(1 - \Upsilon_p r^2)} + r^2 d\Omega^2, \quad (5.55)$$

e

$$ds^2 = - (1 - \Upsilon_m r^2) dt^2 + \frac{1}{(1 - \Upsilon_m r^2)} + r^2 d\Omega^2. \quad (5.56)$$

Verificamos que as soluções (5.53) satisfazem o sistema de equações diferenciais constituído por (5.20), (5.21), (5.22) e (5.23), simultaneamente. Entendemos que é uma verificação necessária, uma vez que este sistema de equações é sobredeterminado, tal como mencionamos anteriormente. Não obstante, enquanto  $\Lambda^2 \gg \tilde{\Lambda}^2$ , expandimos (5.54), truncamos na primeira ordem e encontramos

$$\begin{aligned} \Upsilon_n &\approx \frac{\tilde{\Lambda}^2}{3}, \\ \Upsilon_w &\approx \frac{2}{3} \Lambda^2, \end{aligned} \quad (5.57)$$

o que simplifica os espaços-tempo descritos por (5.55) e (5.56), tal como segue.

$$ds^2 = - (1 - \Upsilon_n r^2) dt^2 + \frac{2}{(1 - \Upsilon_n r^2)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (5.58)$$

o qual notamos ser um espaço-tempo de de Sitter com um raio muito elevado, pois  $\Upsilon_n$  tem um valor baixo. E,

$$ds^2 = -(1 - \Upsilon_w r^2) dt^2 + \frac{2}{(1 - \Upsilon_w r^2)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) , \quad (5.59)$$

representa uma geometria do tipo de Sitter, mas com um raio muito pequeno, pois o valor de  $\Lambda^2$  é bastante elevado, conforme calculamos no Capítulo 4. Seja como for, observamos que cada uma das soluções exatas aproximadas, (5.58) e (5.59), descrevem um espaço-tempo sem um horizonte de eventos de uma distribuição esférica de massa. A influência do termo quadrático de curvatura em (5.20) nos deixa, em uma aproximação em primeira ordem, com dois espaços-tempo assintoticamente de Sitter, as quais são as geometrias mais simples que poderíamos determinar.

Lembrando que  $\eta = \tilde{\Lambda}^2/2\Lambda$ , fazemos a expansão,

$$\Upsilon_m = \frac{\Lambda^2}{3} \left(1 - \sqrt{1 - 4\eta}\right) = \frac{\Lambda^2}{3} (2\eta + 2\eta^2 + 4\eta^3 + 10\eta^4 + 28\eta^5 \dots) , \quad (5.60)$$

onde os termos apresentam uma ordem escondida, uma vez que, após expandirmos (5.60) em torno do parâmetro  $\eta$ , substituímos  $\Lambda^2 = \tilde{\Lambda}^2/(2\eta)$  e obtemos

$$\Upsilon_m = \frac{\tilde{\Lambda}^2}{3} + \eta \left(\frac{\tilde{\Lambda}^2}{3}\right) + \eta^2 \left(2\frac{\tilde{\Lambda}^2}{3}\right) + \eta^3 \left(5\frac{\tilde{\Lambda}^2}{3}\right) + \eta^4 \left(14\frac{\tilde{\Lambda}^2}{3}\right) + \dots . \quad (5.61)$$

Finalmente, enquanto olhamos para regiões onde  $r \gg 2GM$ , temos  $\tilde{\Upsilon} = \Upsilon_m$ , e encontramos essa compatibilidade entre ambas as soluções geométricas encontradas, (5.58) e (5.34).

### 5.2.3.1 Horizontes cosmológicos

Analisaremos a estrutura do espaço-tempo calculado na Seção 5.2.3. Atribuímos  $e^{-2\beta} = 0$  para encontrar o horizonte de eventos cosmológico associado a cada um dos valores de  $\Upsilon$ , *i.e.*,  $\Upsilon_p$  e  $\Upsilon_m$ ,

$$\begin{aligned} r_{c_p} &= \frac{1}{\sqrt{\Upsilon_p}} , \\ r_{c_m} &= \frac{1}{\sqrt{\Upsilon_m}} . \end{aligned} \quad (5.62)$$

Quando aplicamos as aproximações (5.57), temos

$$\begin{aligned} r_{c_n} &= \frac{1}{\sqrt{\Upsilon_n}}, \\ r_{c_w} &= \frac{1}{\sqrt{\Upsilon_w}}, \end{aligned} \quad (5.63)$$

onde cada um deles está relacionado às geometrias descritas por (5.58) e (5.59). O horizonte  $r_{c_n}$  é muito maior que o horizonte  $r_{c_w}$  devido aos valores  $\Upsilon_n$  e  $\Upsilon_w$ . A aparente singularidade pode ser evitada quando colocamos (5.58) e (5.59) em coordenadas de Kruskal-Szekeres. Logo, o elemento de linha escrevemos

$$ds^2 = \frac{1}{\sqrt{\Upsilon}} \frac{1}{(1 - UV)^2} [-4dUdV + (1 + UV)^2] d\Omega^2, \quad (5.64)$$

embora, também podemos escrever em novas coordenadas para dois eixos auxiliares, os quais são definidos como  $X = (U + V)/2$  e  $T = (U - V)/2$ . Logo,

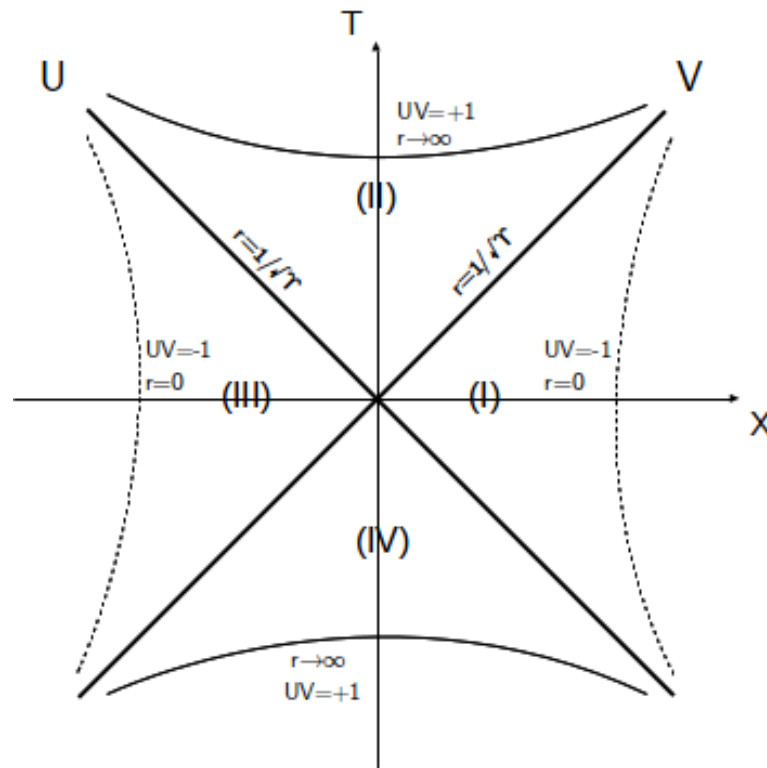
$$ds^2 = \left( \frac{1}{\sqrt{\Upsilon}} + r \right)^2 (-dT^2 + dX^2) + \frac{1}{\sqrt{\Upsilon}} \left( \frac{1 + X^2 - T^2}{1 - X^2 - T^2} \right)^2 d\Omega^2, \quad (5.65)$$

onde  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ . Uma vez que não precisamos distinguir estas constantes no diagrama de Kruskal, deixaremos  $\Upsilon$  para representar  $\Upsilon_n$ ,  $\Upsilon_n$ ,  $\Upsilon_p$  ou  $\Upsilon_m$ . A estrutura do espaço-tempo em cada cenário correspondente ao seu respectivo horizonte de eventos cosmológico elencados em (5.62) ou (5.63) pode ser visualizada na Figura 5.1. Reforçamos que a diferença entre eles consiste unicamente nos valores que  $\Upsilon$  pode assumir e no alcance de  $r$  para cada uma dessas circunstâncias.

Sobre os vetores de Killing, temos os seguintes pontos a serem levantados para cada região na Figura 5.1:

- (I): O vetor de Killing  $\partial_t$  é tipo-tempo e futuro-orientado.
- (II) e (III): O vetor de Killing  $\partial_t$  é tipo-espaço.
- (IV): O vetor de Killing  $\partial_t$  é tipo-tempo e passado-orientado.

Além disso, nas superfícies  $U = 0$  e  $V = 0$  o vetor de Killing  $\partial_t$  é tipo-luz.



**Figura 5.1** Diagrama do espaço-tempo de de Sitter sob coordenadas de Kruskal-Szekeres. Em  $r = 0$  as linhas pontilhadas são origens antípoda das coordenadas polares sobre a 3-esfera. O infinito futuro  $\mathcal{F}^+$  e infinito passado  $\mathcal{F}^-$  são delimitados por  $r \rightarrow \infty$ . As geodésicas tipo-luz são representadas pelas linhas cheias inclinadas em  $45^\circ$  em relação aos eixos T e X.  $\Upsilon$  significa aqui tanto para  $\Upsilon_n$  quanto para  $\Upsilon_w$ , assim como para  $\Upsilon_p$  ou  $\Upsilon_m$ . Optamos por escrever apenas  $\Upsilon$  uma vez que os elementos de linha (5.55), (5.56), (5.58) e (5.59) têm estruturas geométricas similares.

### 5.2.3.2 Sobre singularidades nas soluções exatas

Determinamos o escalar de curvatura, ou seja,  $\mathcal{R} = 12\Upsilon$  e o invariante de Kretschmann,  $\mathcal{K} = 24\Upsilon^2$ . Claramente, há um valor distinto dos invariantes para cada valor de  $\Upsilon$ . Tanto  $\mathcal{R}$  quanto  $\mathcal{K}$  são finitos e não temos singularidades físicas na origem, o que entendemos ser significativo devido ao fato de que o espaço-tempo de de Sitter originalmente também não apresenta singularidade física em  $r = 0$ .

## 5.3 Um breve estudo termodinâmico

A fim de completar nossa análise das soluções encontradas nas Seção 5.2.2 e Seção 5.2.3, estudaremos as quantidades termodinâmicas relacionadas aos horizontes de eventos,

tanto cosmológicos quanto dos buracos negros. Primeiramente, na Subseção 5.3.1 apresentaremos brevemente os fundamentos da termodinâmica de buracos negros, onde nos concentraremos nas definições e conceitos mais importantes, os quais estarão fortemente baseadas em [1]. Segundo, mostraremos as quantidades termodinâmicas envolvidas com as nossas soluções.

### 5.3.1 Fundamentos

A gravidade de superfície podemos definir da seguinte forma. Seja um vetor de Killing  $\xi^a$  normal ao horizonte de eventos. Como  $xi^a$  é uma superfície ortogonal, ele deve satisfazer a equação da geodésica

$$\xi^a \nabla_a \xi^b = \kappa \xi^b . \quad (5.66)$$

Sobre a mecânica dos buracos negros, temos as quatro leis [88]:

- *Lei zero:* A gravidade de superfície é constante sobre todo o horizonte de eventos.
- *Primeira lei:* Para um buraco negro estacionário com área da superfície do horizonte  $A$ , carga elétrica  $Q$  e momento angular  $J$ , a variação da sua massa  $M$  durante um processo quasi-estático é dada por

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi G} \delta A + \Phi \delta Q + \Omega \delta J , \quad (5.67)$$

onde  $\Phi$  é o potencial eletrostático e  $\Omega$  é a velocidade angular do horizonte de eventos.

- *Segunda lei:* A área da superfície  $A$  nunca diminuirá em processo físicos se o tensor energia-momento  $\mathcal{T}_{ab}$  satisfaz a condição dominante de energia  $\mathcal{T}_{ab} \xi^a \xi^b \geq 0$ .
- *Terceira lei:* A gravidade de superfície nula jamais pode ser atingida por qualquer processo físico durante um finito intervalo de tempo.

Enfatizamos que em nosso estudo, não levaremos em conta efeitos de rotação ou a carga elétrica da distribuição de massa. Desse modo, na segunda lei, temos a simplificação  $\delta M = \kappa/8\pi G \delta A$  que atenderá plenamente os cálculos que empregamos



na termodinâmica das soluções que encontramos anteriormente. Em geral, os termos  $\Omega\delta J + \Phi\delta Q$  são mostrados como a variação do trabalho realizado durante o processo e simbolizado, frequentemente, pelo breve símbolo  $\delta W$ .

Temos um notável paralelo entre as leis da mecânica dos buracos negros e a as leis termodinâmicas, tal como mostra a Tabela 5.1.

Lei	Termodinâmica	Buracos negros
Zero	A temperatura $T$ de um corpo em equilíbrio térmico é constante.	A gravidade de superfície do horizonte de um buraco negro estacionário é constante.
Primeira	$dU = TdS + dW$	$dM = \frac{\kappa}{8\pi G}dA + \Omega dJ + \Phi dQ$
Segunda	$\Delta S \geq 0$ em qualquer processo físico.	$\Delta A \geq 0$ em qualquer processo físico.
Terceira	$T = 0$ é impossível de ser atingida através de qualquer processo físico.	$\kappa = 0$ é impossível de ser atingida através de qualquer processo físico.

**Tabela 5.1** Um quadro-resumo da correspondência entre as leis termodinâmicas e as leis da mecânica dos buracos negros. Adaptada de [1].

Como é mostrado na Tabela 5.1,  $U \leftrightarrow M$ ,  $T \leftrightarrow \alpha\kappa$  e  $S \leftrightarrow (1/8\pi G)A$ , sendo  $\alpha$  uma constante. Logo,  $U$  e  $M$  representam a mesma quantidade física: a energia do sistema. Tamanho paralelo levou Bekenstein, em 1973, a estabelecer uma conjectura onde  $T \propto \kappa$  e  $S \propto A$  [89]. Isto levou à solução de um paradoxo, o qual pode ser descrito como: *Se uma parte da entropia da matéria é gradualmente diminuída dentro de um buraco negro, então a entropia global no universo observável diminuirá. A entropia no sentido usual é simplesmente perdida.* Entretanto, quando a entropia dos buracos negros é proporcional à área da superfície do horizonte de eventos, então a segunda lei da termodinâmica é posta na forma generalizada  $\delta S_{Universe} + \delta S_{black\ hole} \geq 0$  [89]. Desse modo, o paradoxo é solucionado.

Hawking, em 1974, mostrou que efeitos quânticos no processo de criação de partículas resultam em uma emissão efetiva de partículas do buraco negro com uma temperatura termodinâmica proporcional à superfície de gravidade [44]. Esta é conhecida como temperatura Hawking e está relacionada à gravidade de superfície por

$$T_{hor} = \frac{\kappa\hbar}{2\pi}. \quad (5.68)$$

Deixamos a constante de Planck reduzida em (5.68), pois é uma forma imediata de vermos que a mecânica quântica está presente nas leis termodinâmicas que regem os buracos negros. Em breve, retomaremos nossa convenção, onde  $\hbar = 1$ .

Uma vez fixada a constante de proporcionalidade entre  $T$  e  $\kappa$ , conforme os cálculos de Hawking, a constante de proporcionalidade para a entropia é, portanto, determinada

sob a imposição de que  $T\delta S = \kappa/(8\pi G)\delta A$ . Logo, temos a entropia de Bekenstein-Hawking,

$$S = \frac{A}{4G} \equiv \frac{\pi r^2}{G}, \quad (5.69)$$

onde  $r$  é o raio do horizonte de eventos e  $A$  é área da superfície do horizonte. Esta é a maneira de escrever a entropia a partir da sua forma plena, ou seja,  $S = Ak_B c^3/(4\hbar G)$ , após usarmos  $k_B = c = \hbar = 1$ .

As contribuições de Bekenstein e Hawking abriram janelas para importantes investigações no cenário da gravidade quântica. Entendemos que qualquer teoria de gravidade modificada deve ser preocupar em investigar a natureza termodinâmica dos horizontes de eventos como uma forma de testar a consistência dessas teorias.

### 5.3.2 A termodinâmica das geometrias de uma teoria de gravidade induzida

Apresentaremos os resultados obtidos para as grandezas termodinâmicas das soluções que encontramos para a teoria de gravidade induzida. Conforme segue, separamos os resultados que concernem à cada natureza de solução, isto é, a de origem perturbativa e a de origem exata.

### 5.3.3 Sobre os horizontes de eventos como soluções perturbativas

Calculamos a gravidade de superfície relacionada a cada horizonte de eventos e analisamos seus comportamentos perante uma mudança na massa  $M$ . Como vimos, no caso perturbativo, temos dois horizontes,  $r_b$  e  $r_c$ , os quais estão explicitamente mostrados em (5.47). Portanto, aplicamos (5.66) para obtermos

$$\kappa_b = \frac{1}{3}\tilde{\Lambda}^2 r_b - \frac{GM}{r_b^2} + \frac{\eta}{2} \left[ -\frac{2GM}{r_b^2} + \frac{2}{3}\tilde{\Lambda}^2 r_b + \frac{48}{\tilde{\Lambda}^2} \frac{G^2 M^2}{r_b^5} \right], \quad (5.70)$$

a qual é, em primeira ordem, a gravidade de superfície no horizonte de eventos da distribuição de massa. Para analisar o comportamento da gravidade de superfície, colocamos  $r_b$  na forma

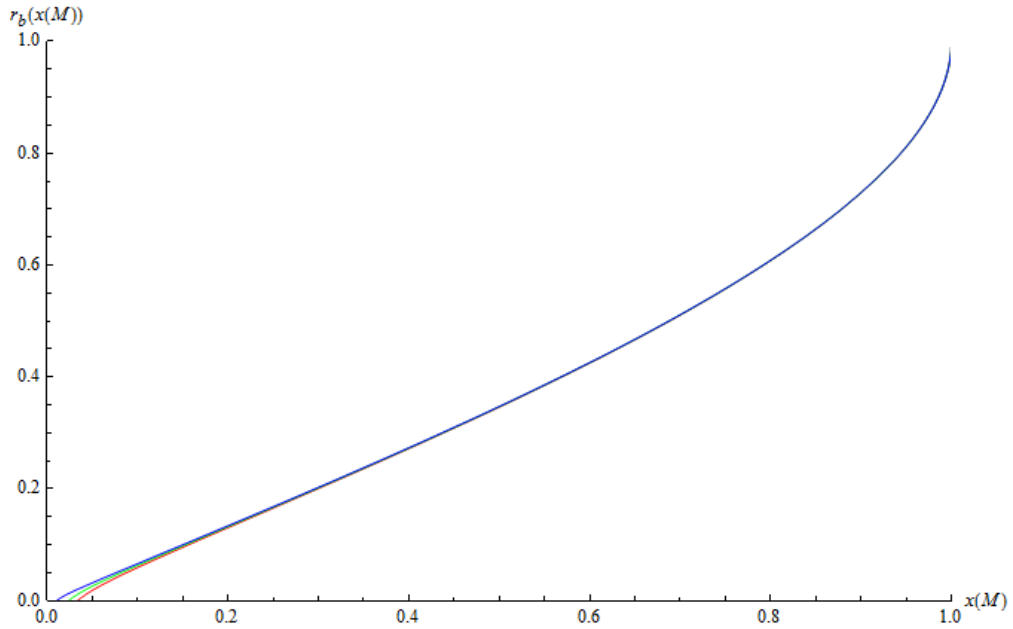
$$r_b = r_{02} \left( 1 + \eta \frac{r_{12}}{r_{02}} \right). \quad (5.71)$$

Logo, expandimos (5.70), truncamos na primeira ordem e obtemos

$$\kappa_b \approx \frac{\tilde{\Lambda}^2}{3} r_{02} - \frac{GM}{r_{02}^2} + \eta \left[ 2GM r_{12} + \frac{2GM r_{12}}{r_{02}^3} - \frac{GM \tilde{\Lambda}^2}{r_{02}^2} \frac{r_{02}}{3} + \frac{24G^2 M^2}{\tilde{\Lambda}^2} r_{02}^5 \right], \quad (5.72)$$

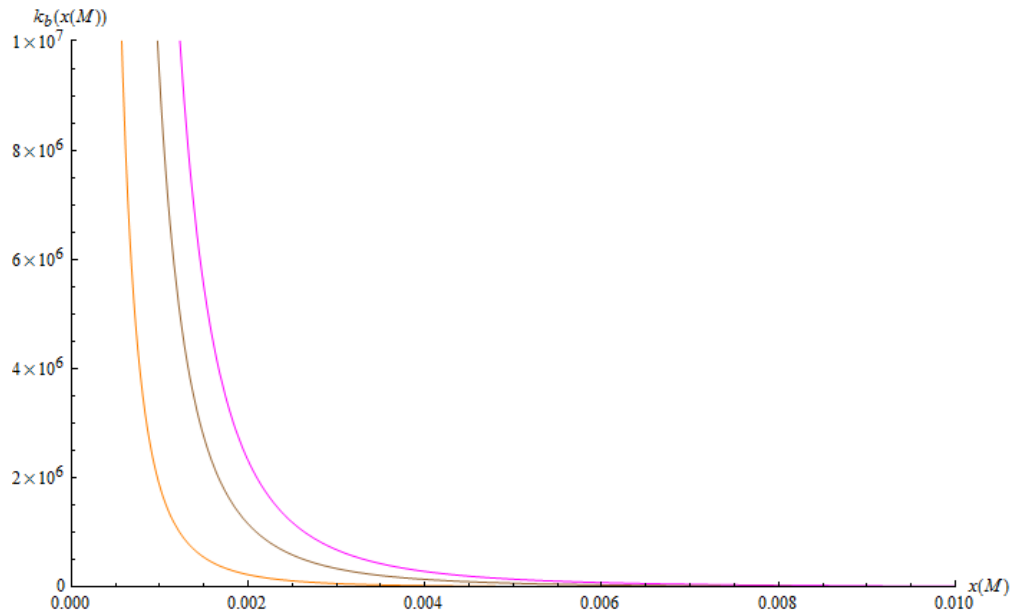
onde  $r_{02}$  e  $r_{12}$  são mostrados em (5.44) e (5.46). Neste ponto, assumimos, por hipótese,  $\mathcal{C}_{12} \approx 2GM$ , o que interpretamos ser razoável, uma vez que esta constante de integração aparece no fator  $1/r$  em (5.47) e, além disso, multiplicada pelo termo de expansão, o qual estimamos ter um valor muito pequeno. Embora seja uma forte hipótese, esta é importante para um primeiro estudo do comportamento dos horizontes de eventos e das grandezas termodinâmicas relacionadas.

Qualitativamente, apresentamos os comportamentos de  $r_b$  e  $\kappa_b$  na Figura 5.2 e na Figura 5.3. A fim de obtermos uma melhor visualização do comportamento dos horizontes, exageramos o valor do parâmetro de expansão. Adotamos este procedimento para todos os gráficos desta seção, onde também adotamos a parametrização  $3GM\tilde{\Lambda} = x(M)$  e, portanto, tanto os horizontes quanto as gravidades de superfícies a eles relacionadas serão escritas em função de  $x(M)$ .



**Figura 5.2** Horizonte de eventos da distribuição de massa em função da massa.  $r_b(x(M))$  se encontra em unidades de  $1/\tilde{\Lambda}$ . As curvas vermelha, verde e azul correspondem a  $\eta = 0.001$ ,  $\eta = 0.0005$  e  $\eta = 0.0001$ , respectivamente. Todas curvas obtidas mostram que o horizonte aumenta quando a massa aumenta.

Portanto, observamos que o crescimento da massa  $M$  implica no aumento do horizonte de eventos  $r_b$ , enquanto que há uma diminuição de  $\kappa_b$ . De acordo com (5.68), a



**Figura 5.3** Gravidade de superfície em função da massa  $M$ . As curvas magenta, marrom e laranja são obtidas com  $\eta = 0.001$ ,  $\eta = 0.0005$  e  $\eta = 0.0001$ , respectivamente. Todas curvas obtidas mostram que a gravidade de superfície diminui quando a massa da distribuição esférica aumenta.

temperatura associada a esta gravidade de superfície,  $T_b = \kappa_b/2\pi$ , tem o mesmo comportamento de  $\kappa_b$ . Durante todo o processo de aumento da massa  $M$ , mantivemos  $\tilde{\Lambda}^2$  constante.

Para os esboços das curvas mostradas tanto na Figura 5.2 quanto na Figura 5.3, devido à parametrização, tomamos o devido cuidado com os valores atribuídos a  $x(M)$ , tal que não obtivéssemos resultados não-físicos, tal como  $\kappa_b \leq 0$  ou  $r_b \leq 0$ .

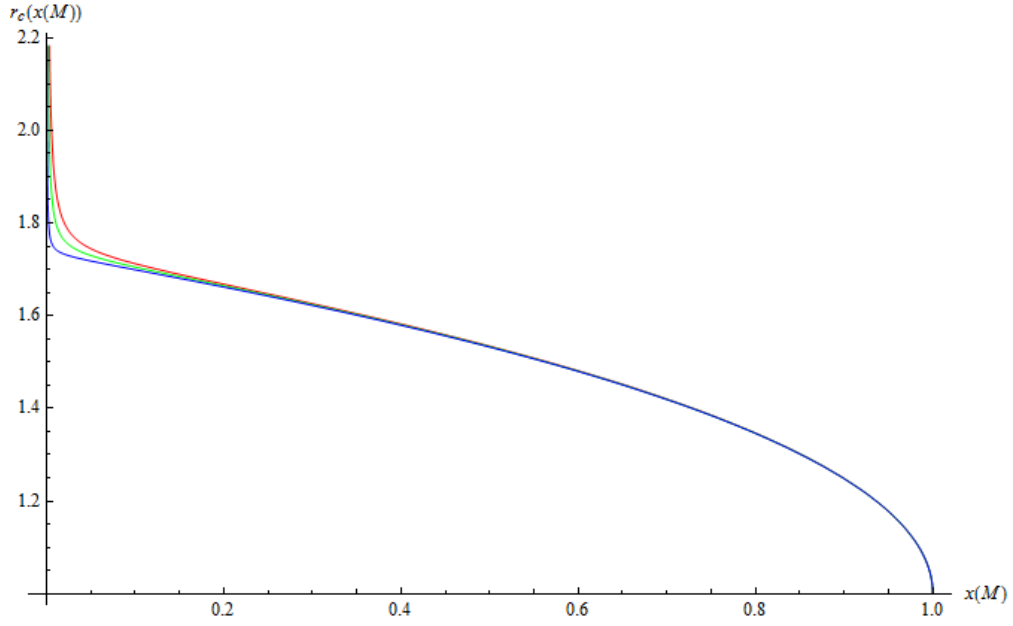
Analogamente, determinamos a gravidade de superfície do horizonte de eventos cosmológico,

$$\kappa_c = \frac{1}{3}\tilde{\Lambda}^2 r_c - \frac{GM}{r_c^2} + \frac{\eta}{2} \left[ -\frac{2GM}{r_c^2} + \frac{2}{3}\tilde{\Lambda}^2 r_c + \frac{48}{\tilde{\Lambda}^2} \frac{G^2 M^2}{r_c^5} \right], \quad (5.73)$$

cuja expansão, truncada em primeira ordem, obtemos como

$$\kappa_c \approx \frac{\tilde{\Lambda}^2}{3} r_{01} - \frac{GM}{r_{01}^2} + \eta \left[ 2GM r_{11} + \frac{2GM r_{11}}{r_{01}^3} - \frac{GM}{r_{01}^2} \frac{\tilde{\Lambda}^2}{3} r_{01} + \frac{24G^2 M^2}{\tilde{\Lambda}^2} r_{01}^5 \right]. \quad (5.74)$$

A Figura 5.4 e a Figura 5.5 qualitativamente mostram o comportamento do horizonte cosmológico e da gravidade de superfície, respectivamente, quando mudamos a massa  $M$ .



**Figura 5.4** Horizonte cosmológico em função da massa da distribuição.  $r_c(x(M))$  se encontra em unidades  $\tilde{\Lambda}$ . As curvas vermelha, verde e azul são obtidas para  $\eta = 0.001$ ,  $\eta = 0.0005$  e  $\eta = 0.0001$ , respectivamente, e mostram que o horizonte cosmológico diminui quando a massa da distribuição aumenta.

Em suma, quando a massa  $M$  da distribuição esférica aumenta, então, tanto  $r_c$  quanto  $\kappa_c$  diminuem. Novamente, conforme (5.68), a temperatura Hawking  $T_c = \kappa_c/2\pi$  associada a este horizonte de eventos cosmológico também diminuirá.

A partir de (5.69), determinaremos as seguintes entropias relacionadas às áreas das superfícies dos horizontes de eventos. Por hipótese, a fórmula para a entropia será aquela obtida por Hawking e Bekenstein, tal como indicada em (5.69).

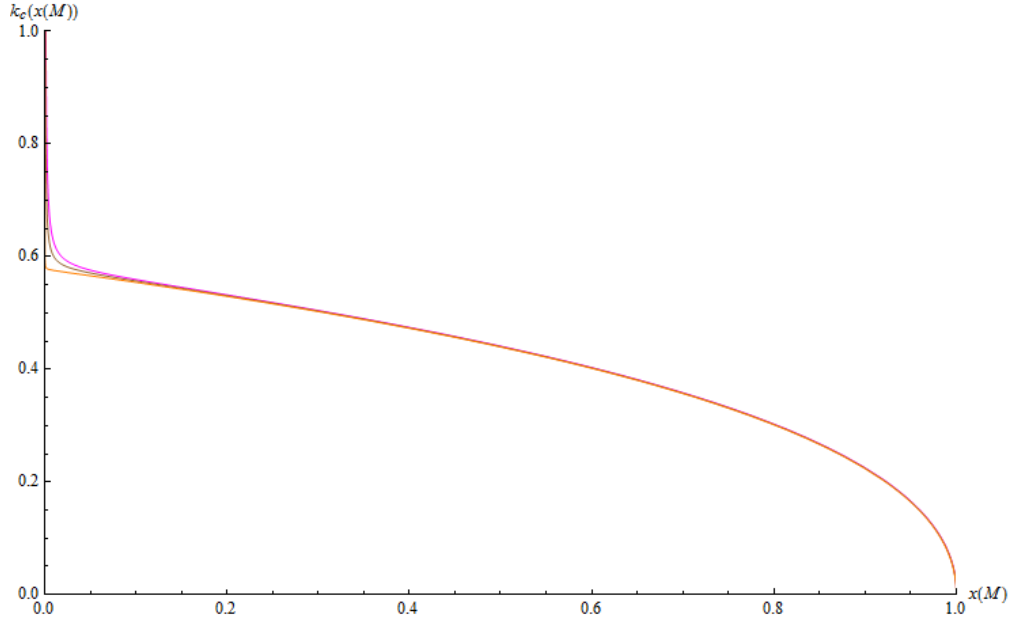
Primeiro, a entropia da distribuição de massa,

$$S_b = \frac{\pi r_b^2}{G} \approx \frac{\pi}{G} r_{02}^2 \left( 1 + 2\eta \frac{r_{12}}{r_{02}} \right). \quad (5.75)$$

Enquanto isso, a entropia relacionada à área da superfície do horizonte cosmológico,

$$S_c = \frac{\pi r_c^2}{G} \approx r_{01}^2 \left( 1 + 2\eta \frac{r_{11}}{r_{01}} \right), \quad (5.76)$$

com  $r_b$  e  $r_c$  são mostrados em (5.47), enquanto  $r_{03}$ ,  $r_{13}$ ,  $r_{01}$  e  $r_{11}$  estão elencados em (5.44) e (5.46). Usando novamente  $\mathcal{C}_{12} \approx 2GM$ , o comportamento de cada entropia é mostrado na Figura 5.6 e na Figura 5.7.



**Figura 5.5** Gravidade de superfície no horizonte cosmológico em função da massa. As curvas magenta, marrom e laranja são obtidas com  $\eta = 0.001$ ,  $\eta = 0.0005$  e  $\eta = 0.0001$ , respectivamente, e mostram que a gravidade de superfície diminui quando a massa da distribuição aumenta.

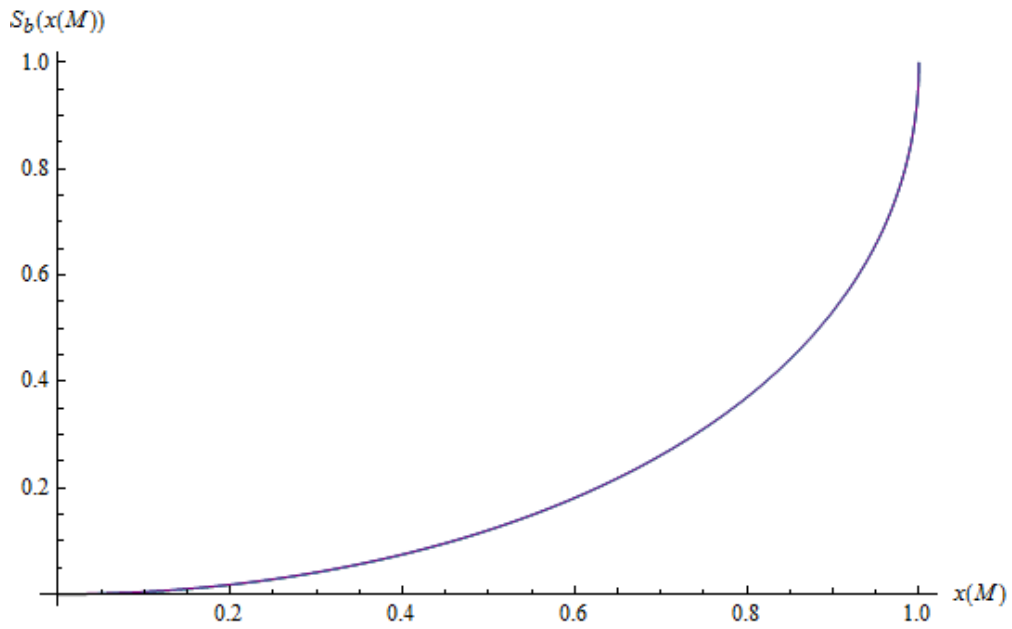
De acordo com o comportamento dos horizontes em relação à massa  $M$ , concluímos que um aumento de  $M$  implica em um aumento da entropia  $S_b$ . Contrariamente, tal aumento da massa  $M$ , implica na diminuição da entropia  $S_c$ . Notamos que tais comportamentos das entropias estão em acordo com o mostrado em [90], claro, considerando o pequeno desvio numérico devido à aproximação de origem perturbativa.

### 5.3.4 Sobre os horizontes de eventos como soluções exatas

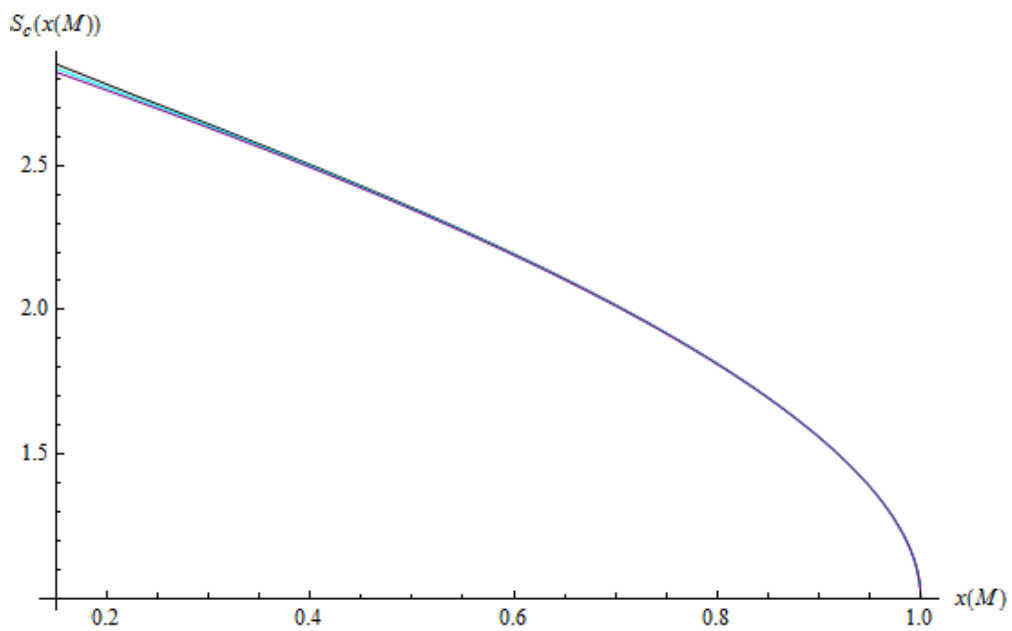
Neste caso, temos  $f(r) = 1 - \Upsilon r^2$ , com  $\Upsilon \in \{\Upsilon_p, \Upsilon_m, \Upsilon_n, \Upsilon_w\}$ . Diretamente, obtemos cada gravidade de superfície correspondente à cada valor de  $\Upsilon$ . Portanto, quando aplicamos (5.66), a gravidade de superfície do horizonte de eventos cosmológico é dada por

$$\kappa_c = \sqrt{\Upsilon} . \quad (5.77)$$

Com (5.68), obtemos a temperatura  $T_c = \kappa_c/2\pi$ . No caso  $\Upsilon = \Upsilon_n$ , a respectiva gravidade de superfície assim como a respectiva temperatura são ambas compatíveis com aquelas obtidas originalmente para um espaço-tempo de de Sitter [90].



**Figura 5.6** Entropia da distribuição em função da massa. As curvas se sobrepõem, mesmo com  $\eta = 0.001$ ,  $\eta = 0.0005$  e  $\eta = 0.0001$ .



**Figura 5.7** Entropia do horizonte cosmológico. As curvas preta, ciano e púrpura são obtidas com  $\eta = 0.001$ ,  $\eta = 0.0005$  e  $\eta = 0.0001$ . À medida que a massa da distribuição aumenta, tais curvas se sobrepõem.

Ao aplicarmos (5.69), temos a entropia relacionada à geometria tipo de Sitter,

$$S_c = \frac{\pi}{G\Upsilon} . \quad (5.78)$$

Quando  $\Upsilon = \Upsilon_n$ , encontramos

$$S_c \approx \frac{3\pi}{G\tilde{\Lambda}^2}, \quad (5.79)$$

a qual está em acordo com a entropia padrão do espaço-tempo de de Sitter.

Notavelmente, na região  $r \gg 2GM$ , observamos que as entropias, tanto no cenário perturbativo quanto no exato, podem ser conectadas, a menos de correções em  $\eta$ . Claramente concluímos que, no limite  $\eta \rightarrow 0$ , ambas as entropias são equivalentes.



# Capítulo 6

## Estudo cosmológico preliminar

Estudaremos o cenário cosmológico da teoria de gravidade emergente desenvolvida no Capítulo 3.

Estamos interessandos, particularmente, nas soluções cosmológicas que possam descrever o universo primordial. Sabemos que o paradigma atual para descrever o universo primordial é a inflação [91–94]. Neste cenário, o modelo cosmológico padrão, também denominando  $\Lambda$ CDM, é precedido por uma fase exponencialmente acelerada que deveria ser o principal responsável na resolução de problemas relacionados à métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW), tais como: o problema da planeza, isotropia, o problema do horizonte e o excesso de monopolos.

Na comunidade cosmológica, percebemos um grande interesse em modelos de ricochete<sup>1</sup>. Estes modelos são alternativas viáveis à inflação [95–97]. Universos em ricochete são modelos que não apresentam singularidades, os quais podem ser deduzidos a partir de teorias que consideram derivadas superiores e teorias de gravidade quântica [98–105]. Todos estes resultados sugerem que o universo primordial é o cenário mais proeminente para investigar teorias físicas que trabalham com energias muito elevadas.

Neste capítulo nos concentraremos em obter modelos cosmológicos para a teoria de gravidade induzida a partir da teoria de Yang-Mills para o grupo  $SO(m, n)$  que apresentamos no Capítulo 3. Da mesma maneira que fizemos no Capítulo 5, consideraremos as contribuições de todos os vácuos para a teoria. Desse modo, aplicaremos as 1-formas relacionadas à métrica de FLRW nas equações de campo (3.76) e (3.73). Apresentaremos uma síntese do Modelo Cosmológico Padrão na Seção 6.1. Na Seção 6.2

---

<sup>1</sup>N.T.: Do inglês *bouncing*

modelaremos as equações dinâmicas que governarão a cosmologia da teoria de gravidade induzida. Nas Seções 6.3 e 6.4 discutiremos os modelos cosmológicos.

## 6.1 Sobre o Modelo Cosmológico Padrão

### 6.1.1 Princípios cosmológicos e as equações de Friedmann

O principal foco da cosmologia é a descrição do Universo como uma única entidade [45, 47]. O Modelo Cosmológico Padrão é fundamentado no Princípio Cosmológico. Podemos enunciar tal princípio da seguinte forma:

*Em larga escala o Universo é homogêneo e isotrópico.*

Este princípio assume que o espaço-tempo pode ser folheado em hipersuperfícies tipo-espaço que são esfericamente simétricas em qualquer ponto sobre elas. A formulação do princípio cosmológico é realizada considerando uma escala de tempo cosmológica, onde em cada folheação o instante é constante. Esta é uma maneira de estabelecer a homogeneidade em cada 3-superfície. Uma vez que isotropia também é um requerimento do Princípio Cosmológico, demanda-se, então, que não há direções privilegiadas.

A radiação cósmica de fundo em microondas é uma das evidências que garantem a validade do Princípio Cosmológico. A detecção desta radiação indica que a temperatura atual do Universo é  $T = 2,726K$ , mas para que esta temperatura seja registrada hoje, estima-se que o Universo emitiu essa radiação quando ele tinha  $3,8 \times 10^5$  anos. As características da radiação cósmica de fundo em microondas delineiam que o Universo era muito denso e com temperatura muito elevada, tal que, para que a temperatura atual fosse atingida, então este sofreu uma expansão e foi sendo resfriado.

Um outro princípio adotado na construção dos modelos cosmológicos pode ser enunciado como segue.

Postulado de Weyl: *As linhas mundo das partículas de um fluido cosmológico são hipersuperfícies ortogonais.*

Este postulado nos possibilita definir um sistema de coordenadas co-móveis, onde não há termos como  $dx^i dx^j$ , com  $i \neq j$ , no tensor métrico. De acordo com os princípios cosmológico e de Weyl, podemos introduzir um tempo cósmico, o qual é o tempo próprio de um observador se movendo com a matéria em expansão. Portanto, o

elemento de linha que descreve um Universo homogêneo e isotrópico em expansão, em coordenadas co-móveis pode ser escrito como

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[ \frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \mathit{sen}^2\theta d\phi^2) \right], \quad (6.1)$$

a qual conhecemos como métrica FLRW. Juntamente com o princípio cosmológico e o de Weyl, as equações de Einstein governam o Universo em expansão no Modelo Cosmológico Padrão. A partir da métrica FLRW e as equações de Einstein, obtemos as equações de Friedmann,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} - \frac{\tilde{\Lambda}^2}{3} &= \frac{8\pi G}{3}\rho, \\ 2\left(\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\tilde{\Lambda}^2}{3}\right) &= -\frac{8\pi G}{3}(\rho + 3p), \end{aligned} \quad (6.2)$$

onde  $a \equiv a(t)$  é o fator de escala e  $\tilde{\Lambda}^2$  é a constante cosmológica. Oriundos do tensor energia-momento na equação de Einstein,  $\rho \equiv \rho(t)$  e  $p \equiv p(t)$  representam a densidade de energia e a pressão do fluido. O fator de curvatura  $k$  pode assumir os valores 1, 0 ou  $-1$ , referindo-se à forma da seção espacial, a qual pode ser fechada, plana ou aberta, respectivamente.

Em cada instante cósmico  $t$ , podemos construir os parâmetros cosmológicos  $H(t) = \dot{a}/a$ , o parâmetro de Hubble,  $q(t) = -\ddot{a}/\dot{a}^2$ , o parâmetro de desaceleração,  $\rho_c = 3H^2/(8\pi G)$ , a densidade crítica, e  $\Omega(t) = \rho/\rho_c$ , o parâmetro de densidade. Estes parâmetros são frequentemente utilizados nas pesquisas em Cosmologia, pois permitem caracterizar a dinâmica do Universo em cada momento de sua evolução. Dentre estes parâmetros, destacamos o parâmetro de desaceleração  $q(t)$  que mede a evolução temporal do fator de escala.

Derivando a primeira equação em (6.2) e substituindo na segunda, encontramos

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0, \quad (6.3)$$

ou seja, a equação que caracteriza a conservação de energia, conforme a Relatividade Geral, pois (6.3) é também derivada através da conservação do tensor energia-momento. Uma maneira de resolver (6.3) é através de uma equação de estado  $p = w\rho$ ,

onde  $w$  é uma constante arbitrária. Desse modo, usando a equação de estado, integramos (6.3) e encontramos

$$\rho = \frac{\text{constante}}{a^{3(1+w)}} , \quad (6.4)$$

a relação entre a densidade de energia e o fator de escala. De acordo com o valor de  $w$  na (6.4), podemos caracterizar diferentes épocas do Universo, as quais foram governadas por alguma forma predominante no fluido de matéria. Citando as situações mais frequentes na literatura, temos: (i)  $w = 0$ , caracteriza uma época dominada por poeira; (ii)  $w = 1/3$ , uma época dominada por radiação; (ii)  $w = -1$ , época dominada pela constante cosmológica.

### 6.1.2 Os modelos cosmológicos de Lemaître e de Friedmann

Os modelos de Lemaître assumem que a constante cosmológica seja significativa na dinâmica do Universo, embora assumam também que a densidade de energia e de matéria seja desprezível quando comparada com a constante cosmológica.

Para cada forma da seção espacial, encontramos um modelo como solução para (6.2) com  $\rho = p = 0$ . Para  $k = 1$ , encontramos

$$a(t) = \sqrt{\frac{3}{|\tilde{\Lambda}^2|}} \sinh \left( \sqrt{\frac{|\tilde{\Lambda}^2|}{3}} t \right) , \quad (6.5)$$

onde, necessariamente, devido às equações dinâmicas,  $\tilde{\Lambda} < 0$ .

Para  $k = 0$ ,

$$a(t) = a_0 \exp \left( \sqrt{-\frac{\tilde{\Lambda}^2}{3}} t \right) , \quad (6.6)$$

onde temos uma geometria de de Sitter, compatível apenas com  $\tilde{\Lambda}^2 < 0$ . Consequentemente, o  $H$  é constante.

Para  $k = -1$ ,

$$\begin{aligned} a(t) &= \sqrt{\frac{3}{|\tilde{\Lambda}^2|}} \sinh \left( \sqrt{\frac{|\tilde{\Lambda}^2|}{3}} t \right) , \text{ se } \tilde{\Lambda}^2 < 0 , \\ a(t) &= \sqrt{\frac{3}{\tilde{\Lambda}^2}} \text{sen} \left( \sqrt{\frac{\tilde{\Lambda}^2}{3}} t \right) , \text{ se } \tilde{\Lambda}^2 > 0 . \end{aligned} \quad (6.7)$$

Os modelos de Friedmann usam um fluido perfeito para descrever o conteúdo de material do Universo. Isso nos leva a considerar plenamente o sistema de equações composto por (6.2) e (6.4). Para pequenos intervalos de tempo e  $w > -1/3$ , desprezamos o termo  $k/a^2$  na primeira equação em (6.2). Através de (6.4) e a primeira equação em (6.2), colocamos o fator de escala como

$$a(t) \propto t^{\left(\frac{2}{3}(1+w)\right)}. \quad (6.8)$$

Para uma fase de radiação, isto é,  $w = 1/3$ , obtemos  $a(t) \propto t^{1/2}$ , onde o Universo primordial era composto predominantemente por partículas relativísticas. Na fase em que a matéria não-relativística predomina, com  $w = 0$  e um universo plano, temos  $a(t) \propto t^{2/3}$ .

## 6.2 Equações de Friedmann modificadas

Na construção de um cenário cosmológico, levaremos em conta um universo sem torção, tal como realizamos no Capítulo 5. Portanto, a ação (3.74) sem os termos de torção será também considerada, em tal forma que, novamente, duas constantes serão empregadas: a constante cosmológica renormalizada  $\Lambda^2$  e a constante cosmológica observacional  $\tilde{\Lambda}^2$ . Adicionalmente à ação de gravidade induzida (3.49), teremos a ação de matéria ,

$$S_{Grav-mat} = \epsilon S_{grav} + S_{mat}. \quad (6.9)$$

No nível semi-clássico, devido à identificação (3.48), ocorre uma dependência da escala de energia associada ao parâmetro  $\Lambda^2$ . Desse modo, detalharemos como a teoria se comporta perante três regimes ditados pela curvatura: o regime dominado por curvaturas com altíssimas magnitudes (HC), o regime de curvaturas com altas magnitudes (AC) e o regime de curvaturas com baixas magnitudes (BC).

A ação de matéria que acoplaremos à ação de gravidade induzida modificada, terá um fluido perfeito como responsável para descrever o conteúdo de matéria do universo que estamos considerando. A 3-forma energia-momento  $\tau_a$  é obtida a partir da ação de matéria quando a variamos em relação a *vierbein*,

$$\frac{\delta S_{mat}}{\delta e^a} = -\tau_a, \quad (6.10)$$

onde  $\star\tau_a = \mathcal{T}_{ab}e^b$ . Logo,

$$\tau_a = \frac{1}{6}\mathcal{T}_a{}^b\varepsilon_{bcd}e^ce^de^f. \quad (6.11)$$

As componentes desta 3-forma podemos associar, conforme nossos objetivos, ao tensor energia-momento de um fluido perfeito, o qual pode ser escrito como

$$\mathcal{T}_a{}^b = (\rho + p)u_a u^b + p\delta_a{}^b, \quad (6.12)$$

onde as quantidades  $\rho$  e  $p$  representam a densidade de energia e a pressão. No referencial co-móvel, temos  $u^0u_0 = -1$  e  $u^i u_i = 0$ , com  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Portanto, na presença de matéria e sem termos de torção, podemos escrever as equações de campo (3.76) e (3.73) como

$$\frac{3\epsilon}{2\chi\hat{\rho}}R^{bc}\star(R_{bc}e_a) - \varepsilon_{abcd}\left(R^{bc}e^d - \frac{\epsilon\chi\tilde{\rho}}{3}e^be^ce^d\right) - 2\chi\tau_a = 0 \quad (6.13)$$

$$D\left(\frac{3}{\chi\hat{\rho}}\star R^a{}_b\right) = 0, \quad (6.14)$$

onde definimos  $\tilde{\rho} = \tilde{\Lambda}^2/\chi$ ,  $\hat{\rho} = \Lambda^2/\chi$  e  $\chi = 8\pi G$ .

Assumiremos a métrica FLRW, uma vez que consideraremos uma geometria do espaço-tempo homogênea e isotrópica, o que significa que há uma folheação particular onde cada seção espacial é maximalmente simétrica [1, 45, 47, 106]. Portanto, temos as seguintes componentes da 1-forma *vierbein* para tal geometria,

$$\begin{aligned} e^0 &= dt, \\ e^1 &= \frac{a(t)}{\sqrt{1-kr^2}}dr, \\ e^2 &= a(t)r d\theta, \\ e^3 &= a(t)r\sin\theta d\phi. \end{aligned} \quad (6.15)$$

A partir da equação de estrutura com torção nula,

$$\omega^a{}_b = -de^a, \quad (6.16)$$

encontramos as componentes da conexão de spin, tal como segue. Primeiramente, devido à antissimetria da conexão, temos  $\omega^a_b = \omega_b^a$  e  $\omega^a_a = 0$ .

$$\begin{aligned}
\omega^0_b e^b &= -de^0 = 0 \Rightarrow \omega^0_1 e^1 + \omega^0_2 e^2 + \omega^0_3 e^3 = 0, \\
\omega^1_b e^b &= -de^1 = -\frac{\dot{a}}{a} e^0 e^1 \Rightarrow \omega^1_0 = \frac{\dot{a}}{a} e^1, \\
\omega^2_b e^b &= -de^2 = -\frac{\dot{a}}{a} e^0 e^2 - \frac{u}{ar} e^1 e^2 \\
&\Rightarrow \omega^2_0 = \frac{\dot{a}}{a} e^2, \quad \omega^2_1 = \frac{u}{ar} e^2, \\
\omega^3_b e^b &= -de^3 = -\frac{\dot{a}}{a} e^0 e^3 - \frac{\cot \theta}{ar} e^2 e^3 \\
&\Rightarrow \omega^3_0 = \frac{\dot{a}}{a} e^3, \quad \omega^3_1 = \frac{u}{ar} e^3, \quad \omega^3_2 = \frac{\cot \theta}{ar} e^3.
\end{aligned} \tag{6.17}$$

Com as componentes da conexão de spin, listadas em (6.17), o próximo passo consiste em determinarmos as componentes da 2-forma de curvatura. Usamos  $R^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_c \omega^c_b$  para obtermos

$$\begin{aligned}
R^1_0 &= d\omega^1_0 + \omega^1_c \omega^c_0 = \frac{\ddot{a}}{a} e^0 e^1, \\
R^2_0 &= d\omega^2_0 + \omega^2_c \omega^c_0 = \frac{\ddot{a}}{a} e^0 e^2, \\
R^3_0 &= d\omega^3_0 + \omega^3_c \omega^c_0 = \frac{\ddot{a}}{a} e^0 e^3, \\
R^2_1 &= d\omega^2_1 + \omega^2_c \omega^c_1 = \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) e^2 e^1, \\
R^3_1 &= d\omega^3_1 + \omega^3_c \omega^c_1 = \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) e^3 e^1, \\
R^3_2 &= d\omega^3_3 + \omega^3_c \omega^c_3 = \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) e^3 e^2.
\end{aligned} \tag{6.18}$$

Substituiremos as componentes (6.18) em (6.13). Logo, com  $\alpha = 0$ , termo a termo, encontramos

$$\begin{aligned}
 R^{bc} \star (R_{bc}e_0) &= 2 [R^{21} \star (R_{21}e_0) + R^{31} \star (R_{31}e_0) + R^{32} \star (R_{32}e_0)] \\
 &= 6 \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right)^2 e^1 e^2 e^3 , \\
 \varepsilon_{0bcd} R^{bc} e^d &= 2 (R^{31} e^2 - R^{21} e^3 - R^{32} e^1) = 6 \left( \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right) , \\
 \varepsilon_{0bcd} e^b e^c e^d &= 6 e^1 e^2 e^3 , \\
 \tau_0 &= \frac{1}{6} \tau_0^b \varepsilon_{bcd} e^c e^d e^f = -\rho e^1 e^2 e^3 .
 \end{aligned} \tag{6.19}$$

Finalmente, substituindo os termos acima em (6.13), temos a primeira equação de Friedmann modificada pela teoria,

$$\frac{3\epsilon}{2\chi\hat{\rho}} h^2 - h + \frac{\chi}{3} (\epsilon\tilde{\rho} + \rho) = 0 , \tag{6.20}$$

onde

$$h = H^2 + \frac{k}{a^2} , \quad H = \frac{\dot{a}}{a} , \tag{6.21}$$

com  $H$  como parâmetro de Hubble.

Com  $\alpha = 1$ , procedemos os cálculos de maneira análoga ao que realizamos anteriormente e determinamos

$$\frac{3\epsilon}{\chi\hat{\rho}} \ell^2 - 2\ell - \frac{\epsilon\chi}{3} \tilde{\rho} - h + \frac{3\epsilon}{2\chi\hat{\rho}} h^2 - \chi p = 0 , \tag{6.22}$$

onde

$$\ell = \frac{\ddot{a}}{a} . \tag{6.23}$$

Subtraímos (6.20) de (6.22) e obtemos a segunda equação de Friedmann modificada, ou seja,

$$\frac{3\epsilon}{2\chi\hat{\rho}} \ell^2 - \ell - \frac{\chi}{6} (-2\epsilon\tilde{\rho} + \rho + 3p) = 0 . \tag{6.24}$$

Quando considerarmos  $\Lambda^2 \equiv \Lambda^2(t)$ , torna-se mais eficaz traduzir (6.14) em coordenadas espaço-temporais, tal que

$$\nabla_\alpha \left( \frac{1}{\Lambda^2} \mathcal{R}^\alpha{}_{\beta\mu\nu} \right) = 0 . \tag{6.25}$$



Calculamos o escalar de curvatura, o qual é  $\mathcal{R} = 6(\ell + h)$ , usamos a identidade de Bianchi em (6.25) e encontramos

$$\partial_t(\ell + h) - \ell \partial_t \ln \Lambda^2 = 0 . \quad (6.26)$$

O sistema composto por (6.20), (6.24) e (6.26) governa a evolução dos modelos cosmológicos que discutiremos em seguida.

No Capítulo 3, mostramos a indução de uma teoria geometrodinâmica a partir da teoria de Yang-Mills pura. No Capítulo 4 mostramos que a escala de energia desta transição entre tais teorias é próximo da ordem de grandeza da energia de Planck. Logo, o período desta transição é compatível com o fim da Era de Planck, tal como é conhecido na cosmologia. Portanto, esperamos que esta descrição clássica de gravidade seja válida em energias muito altas, o que entendemos como o regime de curvatura com altíssimas magnitudes, o qual denominamos regime de hipercurvaturas do espaço-tempo.

De acordo com a identificação que implementamos no Capítulo 3, temos a constante gravitacional de Newton  $G$  relacionada aos parâmetros  $\kappa^2$  e  $\gamma^2$ . Enquanto os parâmetros  $\kappa^2$  e  $\gamma^2$  mostrarem um comportamento como parâmetros *runnings*, deveríamos ter  $\Lambda^2$  ou  $G$  também variando nesta pequena região de transição de regimes em torno da escala de Planck. Suponhamos que  $G$  seja constante, enquanto  $\Lambda^2$  se comporte como um parâmetro *running*, embora esperamos que ocorra uma estabilização desse  $\Lambda^2$  quando a energia for muito elevada. Não obstante, consideraremos uma pequena região, muito próxima ao limite de Planck, na qual a gravidade se comporta classicamente, mas  $\Lambda^2$  ainda possui um comportamento *running* intrínscico. Este curto período nos referiremos como regime de hipercurvaturas, o que se assemelha a um regime de altíssimas energias desta teoria de gravidade. Tais afirmações são razoáveis quando a curvatura está sendo comparada com outra quantidade equivalente, a qual deveria ser a escala de energia característica da teoria, dada por  $\hat{\rho}$ , a qual está relacionada a  $\Lambda^2$ .

Para resolver o sistema composto por (6.20), (6.24) e (6.26) devemos especificar a dependência temporal de  $\Lambda^2$ . O comportamento do  $\Lambda^2$  dependente do tempo é similarmente próximo do comportamento do parâmetro de Gribov  $\gamma^2$  no regime não-perturbativo da teoria de Yang-Mills original. Ainda não foi possível estabelecer um método para calcular tal dependência temporal, uma vez que técnicas não-perturbativas não mais são válidas. Atualmente, procuramos tal forma de calcular

essa dependência, mas até o momento nada encontramos e deixamos como uma perspectiva de trabalho que está fora do escopo desta tese.

## 6.3 Regime de altas curvaturas

Neste regime, cujas curvaturas possuem altas magnitudes, os parâmetros  $G$  e  $\Lambda^2$  atingiram estabilidade. Aqui, os efeitos relacionados aos *runnings* serão desprezados. Este é um regime de curvaturas elevadas nesta teoria de gravidade induzida. Por  $\Lambda^2$  não depender do tempo, temos a dinâmica cosmológica governada por

$$\partial_t (h + \ell) = 0 , \quad (6.27)$$

juntamente com (6.20) e (6.24).

Mostraremos, a seguir, dois tipos de universos: um espaço-tempo preenchido com matéria e outro com a ausência da mesma, ou seja, o vácuo.

### 6.3.1 Universo vazio

No caso do vácuo, temos (6.20) e (6.24) simplificadas como

$$\begin{aligned} \frac{3\epsilon}{2\Lambda} h^2 - h + \frac{\epsilon\tilde{\Lambda}}{3} &= 0 , \\ \frac{3\epsilon}{2\Lambda} \ell^2 - \ell + \frac{\epsilon\tilde{\Lambda}}{3} &= 0 . \end{aligned} \quad (6.28)$$

Podemos imediatamente observar que as equações acima possuem raízes

$$\Lambda_{p,m} \equiv \frac{\epsilon\Lambda^2}{3} \left( 1 \pm \sqrt{1 - 2\frac{\tilde{\Lambda}^2}{\Lambda^2}} \right) . \quad (6.29)$$

Uma vez que tanto  $h$  quanto  $\ell$  são constantes, temos (6.26) satisfeita. Como o escalar de curvatura é dado por  $\mathcal{R} = 6(h + \ell)$ , então, quando  $\ell = h$ , temos  $\mathcal{R} = 12\Lambda_{p,m}$ . Enquanto  $\ell \neq h$ , temos  $\mathcal{R} = 4\epsilon\Lambda^2$ .

Determinamos a evolução do fator de escala  $a \equiv a(t)$ , simplesmente integrando  $h = \Lambda_{p,m}$ . Logo, encontramos como soluções,

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{1}{\Lambda_{p,m}} \cosh\left(\sqrt{\Lambda_{p,m}}t\right) \quad \text{para } k = -1, \\ a(t) &= \frac{1}{\Lambda_{p,m}} \exp\left(\sqrt{\Lambda_{p,m}}t\right) \quad \text{para } k = 0, \\ a(t) &= \frac{1}{\Lambda_{p,m}} \sinh\left(\sqrt{\Lambda_{p,m}}t\right) \quad \text{para } k = 1, \end{aligned} \quad (6.30)$$

onde  $\Lambda_{p,m}$  está detalhado (6.29). Se  $\epsilon = 1$ , verificamos que estas três soluções acima representam folheações distintas de um universo de de Sitter com uma constante cosmológica efetiva  $\Lambda_{p,m}$ . Caso  $\epsilon = -1$ , conseqüentemente,  $\Lambda_{p,m} < 0$ , e as funções hiperbólicas são, na verdade, funções trigonométricas usuais. Dessa forma, quando  $\epsilon = -1$ , as soluções listadas em (6.30) representam folheações distintas de um universo de anti-de Sitter.

Consideremos o parâmetro de desaceleração

$$q \equiv -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = \frac{-1}{1 - \frac{k}{a^2\Lambda_{p,m}}}. \quad (6.31)$$

Tal parâmetro será sempre negativo, indicando, portanto, que o universo se encontra em sua fase de expansão acelerada. A constante cosmológica efetiva  $\Lambda_{p,m}$  depende de  $\Lambda^2$  e  $\tilde{\Lambda}^2$ . Levando em conta que  $\tilde{\Lambda}^2/\Lambda^2 \ll 1$ , podemos expandir (6.29), cujo truncamento em primeira ordem nos leva a

$$\Lambda_{p,m} \approx \frac{\epsilon\Lambda^2}{3} \left[ 1 \pm \left( 1 - \frac{\tilde{\Lambda}^2}{\Lambda^2} \right) \right]. \quad (6.32)$$

Logo, obtemos uma raiz de valor superior e outra de valor inferior, respectivamente,

$$\begin{aligned} \Lambda_p &\approx \frac{2\epsilon\Lambda^2}{3}, \\ \Lambda_m &\approx \frac{\epsilon\tilde{\Lambda}^2}{3}. \end{aligned} \quad (6.33)$$

O elevado valor de  $\Lambda_p$ , juntamente com  $\epsilon = 1$ , indica que o universo se encontraria em uma fase de de Sitter bastante intensa. Portanto, ele pode estar relacionado à uma expansão inflacionária. Em um outro extremo, teremos uma fase de expansão calmamente acelerada, a qual entendemos como similar à expansão indicada pelo modelo  $\Lambda$ CDM.

### 6.3.2 Universo preenchido por matéria

Consideramos agora um universo cujo conteúdo de matéria é descrito por um fluido perfeito. Uma descrição completa leva em conta uma equação de estado, a qual, usualmente, estabelece uma relação entre a densidade de energia e a pressão, ou seja,  $p = p(\rho)$ . Denominamos fluidos com este tipo de equação de estado como fluidos barotrópicos. De forma bem comum em Relatividade Geral, tal espécie de fluido especifica plenamente a dinâmica do sistema de equações cosmológicas. Mostraremos que no regime em questão, tal fato não se aplica.

A dinâmica do espaço-tempo preenchido por matéria, neste regime, é dada pelo sistema composto por (6.20), (6.24) e (6.26). Temos um sistema, inicialmente, de três equações e as variáveis  $a(t)$ ,  $\rho(t)$  e  $p(t)$  que determinarão a evolução do espaço-tempo e da matéria. Se considerarmos a equação de estado, passaremos a ter um sistema de equações sobredeterminado. Observando atentamente o conjunto de equações (6.20), (6.24) e (6.26), concluímos que este pode ser resolvido independentemente de uma equação de estado. Uma forma de reconciliarmos esta situação com uma possível descrição termodinâmica da matéria, interpretaremos que o campo gravitacional não distingue a natureza dos campos de matéria. Isso nos leva a deduzir que qualquer fluido perfeito, no regime AC, gravitaria de forma similar.

Resolvemos o sistema mencionado acima, partindo da (6.26), que nos mostra um escalar de curvatura constante, pois  $\mathcal{R} = 6(h + \ell)$ . Desse modo, temos liberdade para definir uma constante  $\mathcal{R}_0$ , tal que

$$\ell = \frac{\mathcal{R}_0}{6} - h . \quad (6.34)$$

Logo, substituindo (6.34) em (6.24) e combinando com (6.20), obtemos

$$h = \frac{\chi^2 \hat{\rho}}{4\chi \hat{\rho} - \mathcal{R}_0} (\rho + p) + \frac{\mathcal{R}_0}{12} . \quad (6.35)$$

Por outro lado, simplesmente pela definição de  $h$ , temos

$$\dot{h} = 2H(\ell - h) \Rightarrow \dot{h} = \frac{1}{3}H (\mathcal{R}_0 - 12h) \Rightarrow h = \frac{C_0}{a^4} + \frac{\mathcal{R}_0}{12} , \quad (6.36)$$

onde  $\mathcal{C}_0$  é uma constante de integração. Para encaminharmos a solução de (6.36), primeiro definimos  $a^2(t) = z(t)$ , tal que

$$\dot{z}^2 - \frac{\mathcal{R}_0}{3}z^2 + 4kz = 4\mathcal{R}_0. \quad (6.37)$$

As soluções que encontramos para (6.37) foram designadas em três situações.

(I)  $\mathcal{R}_0 \neq 0$ : Nesta, obtemos a solução

$$z(t) = z_0 e^{\pm\alpha t} + \frac{9k^2 - 3\mathcal{R}_0\mathcal{C}_0}{\mathcal{R}_0^2 z_0} e^{\mp\alpha t} + \frac{6k}{\mathcal{R}_0}, \quad (6.38)$$

com  $\alpha = (\mathcal{R}_0/3)^{1/2}$  e  $z_0$  como uma constante de integração positiva. As possíveis facetas desta solução dependem dos valores atribuídos a  $k$ ,  $\mathcal{R}_0$  e  $\mathcal{C}_0$ . Caso, particularmente,  $\mathcal{R}_0\mathcal{C}_0 < 3k^2$ , a solução pode descrever um ricochete<sup>2</sup>.

(II)  $\mathcal{R}_0 = 0$  e  $k \neq 0$ : Desse modo, a solução que encontramos mostra que o fator de escala evolui como

$$a(t) = \sqrt{\mathcal{C}_0 k - k \left( t \pm \sqrt{|\mathcal{C}_0|} \right)^2}, \quad (6.39)$$

onde a origem do tempo foi escolhida para representar a singularidade clássica. Observamos que não há mudança qualitativa em relação ao uso dos sinais dentro do termo quadrático. Quando  $k = 1$ , temos uma solução do tipo Big Bang ou do tipo Big Crunch com uma singularidade inicial e uma singularidade final. O fator de escala tem um intervalo máximo de  $\Delta t = 2\sqrt{\mathcal{R}_0}$ , onde  $a_{max} = \sqrt{\mathcal{R}_0}$ . Quando  $k = -1$ , temos dois cenários disjuntos:

- (i) Um universo em expansão com uma singularidade inicial;
- (ii) Um universo em colapso com uma singularidade no futuro.

Por exemplo, para o sinal positivo, a singularidade inicial está localizada em  $t = 0$ , enquanto a singularidade final na fase de colapso está em  $t = -2\sqrt{\mathcal{C}_0}$ .

(III)  $k = 0$

---

<sup>2</sup>Do inglês *bounce*

Para a derradeira forma de solução, consideramos uma seção espacial plana. Desse modo, encontramos uma solução dada por

$$\begin{aligned} a(t) &= \sqrt{-2t\sqrt{\mathcal{C}_0}}, \text{ se } t < 0, \\ a(t) &= \sqrt{2t\sqrt{\mathcal{C}_0}}, \text{ se } t > 0. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Em (6.40) adequamos a constante de integração para localizar a singularidade clássica em  $t = 0$ . Quando observamos (6.40), temos a fase de colapso para  $t < 0$ , a qual atinge a singularidade. Enquanto, uma singularidade em  $t = 0$  inicia uma fase de expansão.

Abordaremos agora a questão da densidade de energia e da pressão. Podemos combinar (6.20), (6.35) e (6.36) para obtermos

$$\rho = \left[ \frac{3\mathcal{C}_0(4\chi\hat{\rho} - \mathcal{R}_0)}{4\chi^2\hat{\rho}} \right] \frac{1}{a^4} - \left( \frac{9\mathcal{C}_0^2}{2\chi^2\hat{\rho}} \right) \frac{1}{a^8} - \left( \tilde{\rho} - \frac{\mathcal{R}_0}{4\chi} + \frac{\mathcal{R}_0^2}{32\chi^2\hat{\rho}} \right), \quad (6.41)$$

$$p = -\rho + \left( \frac{4\chi - \mathcal{R}_0}{\chi^2\hat{\rho}} \right) \frac{\mathcal{C}_0}{a^4}. \quad (6.42)$$

Se particularizarmos (6.42) para  $\mathcal{C}_0 = 0$ , encontramos a densidade de energia fixada em termos das demais densidades  $\hat{\rho}$  e  $\tilde{\rho}$ , enquanto a relação entre pressão e densidade de energia se torna  $p = -\rho$ . Observamos que esta é uma circunstância que nos leva a uma redefinição simples de  $\tilde{\rho}$ . Entretanto, saindo desse cenário restrito, assumiremos  $\xi_0 \neq 0$ . Podemos usar  $a(t)$  para determinar  $\rho(t)$  e  $p(t)$ . Entretanto, se tivéssemos assumido um fluido barotrópico, ou seja,  $p = w\rho$  com  $w$  constante, deveríamos encontrar  $w = -1$  através de (6.35) e (6.36). Portanto, a teoria neste regime de curvatura não permite uma equação de estado para um fluido barotrópico. Consequentemente, claro, somente quando consideramos  $\tilde{p} = -\tilde{\rho}$ , temos um resultado consistente para a equação de estado com apenas a constante cosmológica observacional.

No universo de FLRW, a conservação do tensor energia-momento de um fluido barotrópico permite obtermos a densidade de energia em função do fator de escala. Comumente, quando  $p = w\rho$ , temos  $\rho \propto a^{-3(1+w)}$ . Interpretamos que a densidade de energia e a pressão dadas por (6.41) e (6.42) devem estar relacionadas com alguma forma de não-conservação do tensor energia-momento. Algo bastante peculiar na teoria. Podemos mostrar essa expectativa ao derivarmos (6.20) em relação ao tempo e,

em seguida, combinamos com (6.24) e (6.36) para determinarmos

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) + \frac{\dot{\rho}^2}{8(H(\rho + \tilde{\rho} - \hat{\rho}/2))} = 0, \quad (6.43)$$

onde o terceiro termo da equação acima nos indica, em geral, essa característica não conservativa. Sem o terceiro termo de (6.43), encontramos a equação de compatibilidade do universo de Friedmann usual (6.3). Logo, o terceiro termo é uma consequência da parte quadrática na equação de campo obtida em relação a *vierbein*.

## 6.4 Regime de baixas curvaturas

Neste regime de curvaturas com baixas magnitudes, conseguimos resgatar o modelo  $\Lambda$ CDM. Este é um regime que conseguimos atingir quando  $\Lambda^2 \rightarrow \infty$ . Portanto, a dinâmica do universo é governada por

$$h = \frac{\chi}{3}(\rho + \epsilon\tilde{\rho}), \quad (6.44)$$

$$\ell = -\frac{\chi}{6}(\rho + 3p - 2\epsilon\tilde{\rho}), \quad (6.45)$$

as quais são similares às obtidas pelas equações de Einstein com o termo de constante cosmológica. Um detalhe que adicionamos, fica por conta do parâmetro  $\epsilon$ , o qual determina o sinal da constante cosmológica. Particularmente, apenas quando  $\epsilon = 1$ , temos as soluções que satisfazem o modelo  $\Lambda$ CDM.

A transição de regimes que induz esta teoria de gravidade, esperamos que ocorra em escalas de energia da ordem de  $10^{16}TeV$ . Portanto, o regime BC deveria ser válido muito antes da nucleossíntese do universo primordial, a qual ocorreu na ordem de  $MeV$ . Entendemos, portanto, que o regime BC imita o modelo  $\Lambda$ CDM com constante  $\tilde{\Lambda}^2$ .

## Capítulo 7

# Gravidade induzida para o grupo de calibre $SL(5, \mathbb{R})$

No intuito de investigarmos novas simetrias, enveredaremos em um grupo com maiores desdobramentos, especificamente o grupo de calibre  $SL(5, \mathbb{R})$ . A motivação para tal construção está intrinsicamente relacionada ao que realizamos para os grupos de calibre  $SO(m, n)$ , conforme apresentamos no Capítulo 3. Um ponto importante que ressaltamos é acerca da relevância das teorias de calibre de gravidade explicitarem que o Princípio de Equivalência e a deformação do espaço-tempo são consequências dinâmicas de tais teorias, cruciais no desenvolvimento de uma teoria quântica de gravidade. Nos trabalhos desenvolvidos em [13–16, 19, 41, 107] temos claramente o emprego do mecanismo de Higgs para a emergência da *vierbein*. O mecanismo empregado aqui, novamente, será dinâmico. A geração dinâmica de um parâmetro de massa sob o cenário de Gribov-Zwanziger nos trará o parâmetro necessário para adimensionalizar o campo de calibre que unicamente poderá ser relacionado a um ente geométrico de gravidade, ou seja, a *vierbein*.

Nosso trabalho, portanto, é mostrar uma nova indução de uma teoria de Yang-Mills a uma teoria clássica de gravidade, tal como desenvolvemos no Capítulo 3.



## 7.1 Teoria de Yang-Mills para o grupo $SL(5, \mathbb{R})$

### 7.1.1 A estrutura do grupo $SL(5, \mathbb{R})$

O grupo linear especial  $SL(5, \mathbb{R})$  é representado por um conjunto de todas as matrizes reais  $5 \times 5$ , as quais são inversíveis com determinante igual a 1. Por construção,  $GL(5, \mathbb{R}) \supset SL(5, \mathbb{R})$ , e por tal relação podemos tomar os 25 geradores do grupo linear geral,  $GL(5, \mathbb{R})$ , os quais serão denotados por  $L^A_B$ , para construirmos os 24 geradores de traço nulo do grupo especial linear,  $SL(5, \mathbb{R})$ , tais que

$$J^A_B = L^A_B - \frac{1}{5} \delta^A_B L, \quad (7.1)$$

onde os índices latinos maiúsculos são rotulados como  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ . O traço é denotado como  $L = L^A_A$ . Da mesma forma que apresentado em [41], escolhamos  $J^4_4 = 0$ . A métrica de Killing é normalizada por  $Tr(J^A_B J^C_D) = -\delta^A_D \delta^C_B$ . Consequentemente, obtemos a álgebra de Lie do grupo linear especial,

$$[J^A_B, J^C_D] = \delta^C_B J^A_D - \delta^A_D J^C_B. \quad (7.2)$$

Segundo [108], há uma forma de representação matricial para o grupo linear especial,

$$SL(5, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4 \times GL(4, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^4_*,$$

onde  $GL(4, \mathbb{R})$  é o grupo linear geral de matrizes reais inversíveis  $4 \times 4$ ,  $\mathbb{R}^4$  e  $\mathbb{R}^4_*$  são os grupos de pseudo-translações. Conseguimos obter tal representação quando realizamos uma projeção na quarta coordenada  $A = (a, 4)$ . Ao aplicarmos esta decomposição à álgebra (7.2) teremos as álgebras relacionadas a cada setor de (7.1.1). O grupo  $SL(5, \mathbb{R})$  é um grupo de Lie com sua respectiva álgebra de Lie  $\mathfrak{sl}$ , a qual podemos decompor na forma

$$\mathfrak{sl} = \mathfrak{r} \oplus \mathfrak{gl} \oplus \mathfrak{r}_*, \quad (7.3)$$

e este tipo de decomposição nos permite construir as seguintes relações de comutação entre os elementos de cada grupo.

$$\begin{aligned}
 [\mathfrak{gl}, \mathfrak{gl}] &\subseteq \mathfrak{gl} , \\
 [\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] &\subseteq \emptyset , \\
 [\mathfrak{r}^*, \mathfrak{r}^*] &\subseteq \emptyset , \\
 [\mathfrak{r}, \mathfrak{gl}] &\subseteq \mathfrak{r} , \\
 [\mathfrak{r}^*, \mathfrak{gl}] &\subseteq \mathfrak{r}^* , \\
 [\mathfrak{r}, \mathfrak{r}^*] &\subseteq \mathfrak{gl} ,
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

onde  $\mathfrak{gl}$  é a álgebra de Lie do grupo  $GL(4, \mathbb{R})$ ,  $\mathfrak{r}$  e  $\mathfrak{r}_*$  são as álgebras dos grupos de pseudo-translações.

Por simplicidade, denotamos  $J_a = J^4_a$  e  $J^*_a = J^a_4$ , onde índices latinos minúsculos são rotulados como  $\{0, 1, 2, 3\}$ . Agora, com tais geradores, obtemos a álgebra das pseudo-translações,

$$\begin{aligned}
 [J_a, J_b] &= 0 , \\
 [J^*_a, J^*_b] &= 0 , \\
 [J_a, J^*_b] &= -J^b_a .
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

Enquanto a álgebra do setor linear geral é

$$\begin{aligned}
 [J^a_b, J_c] &= -\delta^a_c J_b , \\
 [J^a_b, J^*_c] &= \delta^c_b J^*_a , \\
 [J^a_b, J^c_d] &= \delta^c_b J^a_d - \delta^a_d J^c_b .
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

Antes de prosseguirmos, decompomos o grupo linear geral,  $GL(4, \mathbb{R})$ , tal que o grupo ortogonal especial  $SO(4)$  fique explícito, ou seja,

$$GL(4, \mathbb{R}) = SO(4) \times S(10) . \tag{7.7}$$

O conjunto  $S(10)$  é um espaço simétrico com 10 parâmetros. Consequentemente, decomponos a álgebra de Lie  $\mathfrak{gl}$  de  $GL(4, \mathbb{R})$  da seguinte maneira

$$\mathfrak{gl} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{c} , \quad (7.8)$$

onde as subálgebras  $\mathfrak{h}$  e  $\mathfrak{c}$  são relacionadas ao  $SO(4)$  e ao  $S(10)$ , respectivamente. A partir de (7.8),

$$\begin{aligned} [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] &\subseteq \mathfrak{h} , \\ [\mathfrak{h}, \mathfrak{c}] &\subseteq \mathfrak{c} , \\ [\mathfrak{c}, \mathfrak{c}] &\subseteq \mathfrak{h} . \end{aligned} \quad (7.9)$$

A decomposição (7.1.1) nos permite escrever  $J^a_b = Q^a_b + P^a_b$ , onde  $Q \in SO(4)$  e  $P \in S(10)$ . Portanto, a álgebra (7.6) será adequadamente separada, *i.e.*,

$$\begin{aligned} [Q^a_b, J_c] &= -\frac{1}{2} (\delta^a_c J_b - \delta_{bc} J^a) , \\ [P^a_b, J_c] &= -\frac{1}{2} (\delta^a_c J_b + \delta_{bc} J^a) , \\ [Q^a_b, J^c_*] &= \frac{1}{2} (\delta^c_b J^a_* - \delta^{ac} J_{*b}) , \\ [P^a_b, J^c_*] &= \frac{1}{2} (\delta^c_b J^a_* + \delta^{ac} J_{*b}) , \end{aligned} \quad (7.10)$$

onde percebemos claramente uma mescla entre os setores de pseudo-translações. Enquanto isso, para o setor referente ao  $GL(4, \mathbb{R})$ , obtemos a seguinte forma de decomposição da álgebra,

$$\begin{aligned} [Q^a_b, Q^c_d] &= -\frac{1}{2} (\delta^a_d Q^c_b - \delta_{bd} Q^{ca} + \delta^{ca} Q_{bd} - \delta^c_b Q^a_d) , \\ [P^a_b, P^c_d] &= \frac{1}{2} (\delta^c_b Q^a_d + \delta^{ac} Q_{bd} - \delta_{bd} Q^{ca} - \delta^a_d Q^c_b) , \\ [Q^a_b, P^c_d] &= \frac{1}{2} (\delta^c_b P^a_d - \delta^{ac} P_{bd} + \delta_{bd} P^{ac} - \delta^a_d P^c_b) . \end{aligned} \quad (7.11)$$

Finalmente, temos a decomposição completa, *i.e.*,

$$SL(5, \mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^4 \times [SO(4) \times S(10)] \times \mathbb{R}^4 ,$$

cuja álgebra é composta pelas sub-álgebras (7.5), (7.10) e (7.11).

A seguir, algumas observações importantes:

- (i) O grupo  $SO(4)$  é um grupo de estabilidade, tanto em relação ao grupo  $SL(5, \mathbb{R})$  quanto para o grupo  $GL(4, \mathbb{R})$ . Isto pode ser confirmado quando observamos as decomposições das algébras (7.10) e (7.11).
- (ii) O coset  $S(10)$  é trivial. Isto significa que ele pode ser contraído a um ponto [109].
- (iii) As pseudo-translações são simétricas, mas devido à terceira comutação em (7.5), este não é, devidamente, um espaço trivial.
- (iv) De posse de uma escala de massa, podemos empregar a contração de Inönü-Wigner para tornar abelianas as comutações entre as pseudo-translações [51] e, por sua vez, tornar, em algum momento, o espaço trivial.

### 7.1.2 A ação de Yang-Mills para o grupo $SL(5, \mathbb{R})$ e os campos de calibre

Inicialmente, escrevemos a ação de Yang-Mills pura relacionada ao grupo  $SL(5, \mathbb{R})$  em um espaço euclidiano 4-dimensional,  $\mathbb{R}^4$ ,

$$S_{\text{YM}} = \frac{1}{2} \int F_A^B * F_B^A, \quad (7.12)$$

onde  $F = dY + \kappa Y Y$  é 2-forma da intensidade de campo relacionada a 1-forma da conexão de calibre  $Y$ ,  $d$  é a derivada exterior e  $\kappa$  é o parâmetro de acoplamento. Por clareza, escrevemos em componentes, tanto a 2-forma intensidade de campo quanto a 1-forma da conexão de calibre  $Y$ ,

$$\begin{aligned} Y &= Y_A^B J^A{}_B, \\ F &= F_A^B J^A{}_B. \end{aligned} \quad (7.13)$$

A ação (7.12) é invariante sob transformações de calibre associadas ao grupo  $SL(5, \mathbb{R})$ , ou seja,  $Y \mapsto U^{-1} \left( \frac{1}{\kappa} d + Y \right) U$ , onde  $U \in SL(5, \mathbb{R})$ . Infinitesimalmente tais transformações simplificadaamente se apresentam como

$$Y \mapsto Y + \mathcal{D}\alpha, \quad (7.14)$$

com  $\mathcal{D} = d + \kappa Y$  representando a derivada covariante exterior relacionada à conexão de calibre  $Y$ .

Da mesma maneira que descrevemos no Capítulo 3, neste ponto o espaço-tempo e o espaço do grupo de calibre não estão dinamicamente associados um ao outro. Não podemos relacionar os graus de liberdade da ação de Yang-Mills pura com os de uma ação de gravidade. Ressaltamos que isto se deve porque o campo de calibre tem dimensão UV igual 1 e a *vierbein* é adimensional, tal como o tensor métrico. Aqui, temos imediatamente o ponto onde um parâmetro de massa se faz totalmente necessário, tal que a constante gravitacional de Newton possa vir à tona. Seguimos, então, aplicando a decomposição do grupo que foi detalhada na Seção 7.1.1 à ação (7.12). Primeiro, vemos que a 1-forma da conexão de calibre se decompõe como

$$Y = Y_A{}^B J^A{}_B = A_a{}^b Q^a{}_b + M_a{}^b P^a{}_b + \theta^a J_a + \pi_a J_*^a, \quad (7.15)$$

e, por sua vez, decomponemos a 2-forma da intensidade de campo, *i.e.*,

$$\begin{aligned} F &= F_A{}^B J^A{}_B \\ &= \left[ F_a{}^b + \kappa M_a{}^c M_c{}^b + \frac{\kappa}{2} (\pi_a \theta^b - \pi^b \theta_a) \right] Q^a{}_b + \left[ \nabla M_a{}^b + \frac{\kappa}{2} (\pi_a \theta^b + \pi^b \theta_a) \right] P^a{}_b + \\ &+ (\nabla \theta^a - \kappa M_b{}^a \theta^b) J_a + (\nabla \pi_a + \kappa M_a{}^b \pi_b) J_*^a, \end{aligned} \quad (7.16)$$

tal que  $\nabla = d + \kappa A$  represente a derivada covariante em relação a conexão de calibre do setor  $SO(4)$ . Adicionalmente, denotamos  $F_a{}^b = dA_a{}^b + \kappa A_a{}^c A_c{}^b$ . Assim, podemos escrever a ação (7.12) como

$$\begin{aligned} S_{\text{YM}} &= \frac{1}{2} \int \left\{ F_a{}^b * F^a{}_b + 2\kappa F_a{}^b * (\pi_b \theta^a) + 2\nabla \theta^a * \nabla \pi_a + \kappa^2 \pi_a \theta^b * (\pi_b \theta^a) + \right. \\ &+ \nabla M_a{}^b * \nabla M^a{}_b + \kappa^2 M_a{}^c M_c{}^b * (M_b{}^d M_d{}^a) + 2\kappa F_a{}^b * (M_b{}^d M_d{}^a) + \\ &+ 2\kappa \nabla \theta^a * (M_a{}^b \pi_b) - 2\kappa \nabla \pi_a * (M^a{}_b \theta^b) + 2\kappa \nabla M_a{}^b * (\pi^a \theta_b) + \\ &\left. - 2\kappa^2 M_a{}^b \theta^b * (M_a{}^c \pi_c) + 2\kappa^2 M_a{}^c M_c{}^b * (\pi_b \theta^a) \right\} \end{aligned} \quad (7.17)$$

As transformações de calibre (7.14) também podem ser separadas de acordo com cada setor,

$$\begin{aligned}
 A_a^b &\longmapsto A_a^b + d\zeta_a^b + \kappa (A_a^c \zeta_c^b - A_c^b \zeta_a^c + M_a^c \xi_c^b - M_c^b \xi_a^c) + \\
 &\quad - \frac{\kappa}{2} (\theta_a \beta^b - \theta^b \beta_a - \pi_a \eta^b + \pi^b \eta_a) , \\
 M_a^b &\longmapsto M_a^b + d\xi_a^b + \kappa (M_a^c \zeta_c^b - M_c^b \zeta_a^c + A_a^c \xi_c^b + A_c^b \xi_a^c) + \\
 &\quad - \frac{\kappa}{2} (\theta_a \beta^b + \theta^b \beta_a - \pi_a \eta^b - \pi^b \eta_a) , \\
 \theta^a &\longmapsto \theta^a + d\eta^a + \kappa (A_b^a \eta^b - M_b^a \eta^b - \theta^b \zeta_b^a + \theta^b \xi_b^a) , \\
 \pi_a &\longmapsto \pi_a + d\beta_a + \kappa (A_a^b \beta_b + M_a^b \beta_b - \pi_b \zeta_a^b + \pi_b \xi_a^b) ,
 \end{aligned} \tag{7.18}$$

uma vez que o parâmetro de calibre também é separado de um modo similar, ou seja, na forma

$$\alpha = \zeta_a^b Q_b^a + \xi_a^b P_b^a + \eta_a J^a + \beta_a J_*^a .$$

Observamos, notoriamente, que a ação (7.17) é invariante sob uma simetria discreta, tal como segue,

$$\begin{aligned}
 A &\longmapsto A , \\
 M &\longmapsto -M , \\
 \theta &\longmapsto \pi , \\
 \pi &\longmapsto \theta .
 \end{aligned} \tag{7.19}$$

Deduzimos que tal simetria implica em uma indistinguibilidade dos campos de calibre  $\pi$  e  $\theta$ .

## 7.2 Gravidade induzida

Mostramos que (7.17) é a forma decomposta da ação de Yang-Mills para o grupo  $SL(5, \mathbb{R})$ . Mostraremos como a ação (7.17) pode ser associada com uma teoria geometrodinâmica de gravidade. Consideraremos unicamente a ação (7.17) e o parâmetro de massa, ou seja, o parâmetro de Grivov  $\gamma^2$ , conforme discutimos no Capítulo 4 e no Capítulo 3. Deste ponto em diante, assumiremos um parâmetro de massa, tal como

fizemos no Capítulo 3. O parâmetro de Gribov é o que empregamos para este fim e a quebra suave de simetria de BRST agregada a este parâmetro.

### 7.2.1 Redefinições dos campos de calibre e a contração de Inönü-Wigner

A entrada de um parâmetro de massa nos permite realizar a redefinição dos campos. Portanto, eis as redefinições de cada um deles.

$$\begin{aligned} \{A_a^b, M_a^b\} &\longmapsto \frac{1}{\kappa} \{A_a^b, M_a^b\}, \\ \{\theta^a, \pi_a\} &\longmapsto \frac{\gamma}{\kappa} \{\theta^a, \pi_a\}. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Logo, reescrevemos ação (7.17) como

$$\begin{aligned} S_{\text{YM}} &= \frac{1}{2\kappa^2} \int \left\{ \bar{F}_a^b * \bar{F}_b^a + 2\gamma^2 \bar{F}_a^b * (\theta_b \pi^a) + 2\gamma^2 \bar{\nabla} \pi^a * (\nabla \theta_a) + \right. \\ &+ \gamma^4 (\theta_a \pi^b) * (\theta_b \pi^a) + \bar{\nabla} M_a^b * (\bar{\nabla} M_b^a) + M_a^c M_c^b * (M_b^d M_d^a) + \\ &+ 2\bar{F}_a^b * (M_b^d M_d^a) - 2\gamma^2 \bar{\nabla} \pi^a * (M_a^b \theta_b) + 2\gamma^2 \bar{\nabla} \theta_a * (M_a^b \pi^b) + \\ &\left. - 2\gamma^2 \bar{\nabla} M_a^b * (\theta^a \pi_b) - 2\gamma^2 M_a^b \pi^b * (M_a^c \theta_c) - 2\gamma^2 M_a^c M_c^b * (\theta_b \pi^a) \right\}. \end{aligned} \quad (7.21)$$

O uso das redefinições nos deixa com os campos de calibre  $\theta^a$  e  $\pi^a$  com dimensão zero. Dessa forma, ambos são candidatos a exercer o papel da *vierbein*. Por outro lado, os campos de calibre  $A$  e  $M$  permanecem com dimensão 1. Ademais, ressaltamos que evidenciar  $1/\kappa$  durante a redefinição é considerado um procedimento usual em teorias de Yang-Mills [9]. Conseqüentemente, temos a fatorização da ação (7.21). Podemos notar tal fato quando olhamos para as quantidades  $\bar{F}_a^b = dA_a^b + A_a^c A_c^b$  e  $\bar{\nabla} = d + A$ .

Para preservar a estrutura algébrica dos campos  $\theta$  e  $\pi$ , impomos que o mapeamento seja realizado também sobre as álgebras, ou seja,  $\{J_a, J_*^a\} \longmapsto \kappa \gamma^{-1} \{J_a, J_*^a\}$ . Essa imposição garante que  $\{\theta, \pi\} \longmapsto \{\theta, \pi\}$ . Notavelmente, tal feito apenas afeta a última relação de comutação da álgebra (7.5), a qual se apresenta agora como

$$[J_a, J_*^b] = -\frac{\gamma^2}{\kappa^2} J_a^b. \quad (7.22)$$

Agora, executaremos a deformação da teoria baseada no grupo  $SL(5, \mathbb{R})$  em uma teoria reduzida com invariância de calibre do grupo  $SO(4)$ . Podemos realizar esta redução em duas etapas distintas. Primeiramente, no regime de baixas energias, devido ao parâmetro de massa que permitiu a redefinição dos campos de calibre, deduzimos a ação (7.21). A respectiva consequência para a álgebra é descrita pela comutação (7.22). Portanto, para um regime no qual temos  $\gamma^2/\kappa^2 \rightarrow 0$ , as pseudo-translações se tornam dois pares independentes de translações. O teorema de Inönü-Wigner [51] garante essa contração. Logo, a partir da trivialidade das translações, o grupo pode ser continuamente deformado como  $SL(5, \mathbb{R}) \mapsto GL(4, \mathbb{R})$ , tal como pode ser constatado em [11, 109]. Na segunda etapa, temos a contração  $GL(4, \mathbb{R}) \mapsto SO(4)$ , a qual é garantida por causa da trivialidade do setor  $S(10)$ . Este setor é isomórfico a um espaço vetorial [109]. Além disso, o Teorema de Redução, o qual se encontra em [109](pág. 83), sobre a redução de um fibrado principal em um subfibrado principal menor, garante que a conexão reduzida  $A$  define uma conexão para o setor  $SO(4)$ . O restante dos campos de calibre sobrevivem como campos de matéria. Depois de todas as contrações realizadas, as transformações de calibre (7.18) são reduzidas a

$$\begin{aligned}
A_a{}^b &\mapsto A_a{}^b + \bar{\nabla} \zeta_a{}^b, \\
M_a{}^b &\mapsto M_a{}^b + M_a{}^c \zeta_c{}^b - M^b{}_c \zeta_a{}^c, \\
\theta^a &\mapsto \theta^a - \theta^b \zeta_b{}^a, \\
\pi_a &\mapsto \pi_a - \pi_b \zeta_a{}^b.
\end{aligned} \tag{7.23}$$

Logo, obtemos as transformações de calibre para o grupo  $SO(4)$ .

### 7.2.2 Observáveis, geometria e gravidade

Podemos, portanto, identificar a teoria de calibre para o grupo  $SO(4)$ , descrita pela ação (7.21), com uma teoria de gravidade. Para tal, é crucial identificarmos alguns operadores invariantes de calibre. Por estarmos interessados em uma teoria no regime infravermelho, precisamos saber quais os operadores que serão observáveis físicos. Apenas como um breve exemplo, embora ainda não estando em sua forma final devido à ausência de experimentação, há uma previsão teórica em cromodinâmica quântica sobre os operadores invariantes de calibre associados com hádrons e *glueballs* [110],[111].



Se estivermos falando de teorias de gravidade, os operadores invariantes de calibre devem corresponder aos entes geométricos da teoria. Logo, os operadores

$$\begin{aligned}\sigma_{\mu\nu} &= \delta_{ab}\theta_\mu^a\pi_\nu^b \\ \Theta^\alpha{}_{\mu\nu} &= \delta_{ab}\sigma^{\alpha\beta}\theta_\beta^b(\partial_\mu\pi_\nu^a + A^a{}_{\mu c}\pi_\nu^c),\end{aligned}\quad (7.24)$$

são invariantes de calibre e carregam graus de liberdade do tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  e a conexão afim  $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$ . Assim, é razoável identificarmos uma geometria efetiva como

$$\begin{aligned}g_{\mu\nu} &= \langle \sigma_{\mu\nu} \rangle, \\ \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} &= \langle \Theta^\alpha{}_{\mu\nu} \rangle,\end{aligned}\quad (7.25)$$

onde o valor esperado deveria ser tomado em relação à ação mais completa possível, tal como mostraremos na Seção seguinte. As relações (7.25) podem ser exatamente realizadas pelo mapeamento dos campos de calibre  $\pi$  e  $\theta$  na *vierbein* do espaço-tempo efetivo, enquanto  $A$  é mapeada na conexão de spin. Conforme apresentado em (7.19), a simetria discreta entre  $\theta$  e  $\pi$  é necessária para que possamos identificar ambos os setores translacionais com a *vierbein*. Sob tal consideração, mapeamos a teoria de calibre, cujo espaço base é o  $\mathbb{R}^4$ , em um espaço-tempo deformado, cujo espaço base, agora deformado, é o  $\mathbb{M}^4$ . Tal mapeamento é construído similarmente como fizemos em [11]. Primeiro, impomos que as p-formas em  $\mathbb{R}^4$  sejam mapeadas em p-formas em  $\mathbb{M}^4$  e, conseqüentemente, os Hodge duais em  $\mathbb{R}^4$  sejam mapeados em Hodge duais em  $\mathbb{M}^4$ . Segundo, após a quebra de simetria, os campos  $\theta$  e  $\pi$  são redundantes. Esta característica e a simetria (7.19) permitem, conforme mencionamos há pouco, que os redefinidos campos de calibre sejam identificados com a *vierbein*. Mantendo o mesmo procedimento para os campos  $A$  e  $M$ , consistentemente, demandamos

$$\begin{aligned}\omega_a{}^b &= \delta_a^\alpha\delta_b^\beta A_\alpha{}^\beta, \\ \frac{1}{2}e^a &= \delta_a^\alpha\theta^\alpha = \delta_a^\alpha\pi^\alpha, \\ m_a{}^b &= \delta_a^\alpha\delta_b^\beta M_\alpha{}^\beta,\end{aligned}\quad (7.26)$$

onde  $\omega_a{}^b$  é a 1-forma da conexão de spin,  $m_a{}^b$  é a 1-forma do campo de matéria. Os índices latinos góticos  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ .. se referem ao espaço tangente  $T_X(\mathbb{M})$  em  $X \in \mathbb{M}^4$ .

O mapeamento representado em (7.26) quando aplicamos na ação (7.21), resulta-nos uma nova ação, isto é,

$$S_{\text{YM}} \longmapsto S_{\text{map}},$$

a qual explicitamente escrita se apresenta como

$$\begin{aligned}
 S_{map} = & \frac{\gamma^2}{\kappa^2} \int \left\{ \frac{1}{2\gamma^2} R_a^b \star R_b^a + \frac{1}{8} \epsilon_{abcd} R^{ab} e^c e^d + \frac{1}{4} T^b \star T_b - \frac{\gamma^2}{64} \epsilon_{abcd} e^a e^b e^c e^d + \right. \\
 & + \frac{1}{2\gamma^2} Dm_a^b \star Dm_b^a + \frac{1}{2\gamma^2} m_a^c m_c^b \star (m_b^d m_d^a) + \frac{1}{\gamma^2} R_a^b \star (m_b^c m^a_c) + \\
 & \left. + \frac{1}{4} m_b^a e^b \star (m_a^c e_c) + \frac{1}{8} \epsilon^{abcd} m_{aI} m^I_b e_c e_d \right\}. \quad (7.27)
 \end{aligned}$$

Para interpretarmos a ação (7.27) como um teoria de gravidade em 4 dimensões, devemos identificar o parâmetro de Gribov  $\gamma$  e o parâmetro de acoplamento  $\kappa$  com a constante cosmológica  $\Lambda^2$  e a constante gravitacional de Newton  $G$ , tal como realizamos na teoria para o grupo  $SO(m, n)$ . Como segue, realizamos a identificação como

$$\gamma^2 = \frac{\kappa^2}{4\pi G} = \frac{4\Lambda^2}{3}. \quad (7.28)$$

Portanto, obtemos a ação gravitacional efetiva da teoria,

$$\begin{aligned}
 S_{Grav} = & \frac{1}{16\pi G} \int \left\{ -\frac{3}{2\Lambda^2} R_a^b \star R_b^a + \frac{1}{2} \epsilon_{abcd} R^{ab} e^c e^d + T^b \star T_b - \frac{\Lambda^2}{12} \epsilon_{abcd} e^a e^b e^c e^d + \right. \\
 & + \frac{3}{2\Lambda^2} Dm_a^b \star Dm_b^a + \frac{3}{2\Lambda^2} m_a^c m_c^b \star (m_b^d m_d^a) + \frac{3}{\Lambda^2} R_a^b \star (m_b^c m^a_c) + \\
 & \left. + m_b^a e^b \star (m_a^c e_c) + \frac{1}{2} \epsilon^{abcd} m_{aI} m^I_b e_c e_d \right\}. \quad (7.29)
 \end{aligned}$$

A ação (7.29) descreve uma teoria de gravidade no formalismo de primeira ordem, o qual usa a *vierbein*  $e^a$  e a conexão de spin  $\omega_b^a$  como campos fundamentais, acoplada a campos de matéria  $m_b^a$ . Terminamos, portanto, a construção de uma ação gravitacional modificada em relação à ação que descreve a Relatividade Geral. Imediatamente reconhecemos o termo de Einstein-Hilbert e o termo da constante cosmológica quando olhamos para os quatro primeiros termos de (7.29), onde também encontramos o termo quadrático de curvatura e o termo quadrático da torção. Enquanto isso, os cinco termos restantes de (7.29) são acoplamentos da curvatura e da torção com os campos de matéria, assim como interações entre os próprios campos de matéria e estes com a *vierbein*.

Analisando (7.28), temos o alto valor para a constante cosmológica renormalizada, uma vez que a constante gravitacional de Newton é esperada com um valor muito pequeno no presente estágio do Universo. Interpretamos esta relação entre as constantes gravitacionais como uma razoável característica do modelo em questão, pois

um dos seus principais *ansätze* consiste em uma compensação entre a constante cosmológica supracitada,  $\Lambda^2$ , e a constante cosmológica prevista pela teoria quântica de campos. Existe, então, uma chance de se obter uma constante cosmológica completa que coincida com os dados observacionais [85, 112]. A compensação que esperamos está expressa na imposição  $\tilde{\Lambda}^2 = \Lambda^2 + \Lambda_{qft}^2$ . Uma possibilidade para tal condição consiste em considerar a questão da energia escura, o qual ainda é um ponto que requer mais investigações. Outro ponto, agora apontando para o setor de matéria, é observar que  $m$  é massivo, tal como pode ser constatado olhando para os dois últimos termos em (7.29), e desse modo, tem alcance finito. A fim de, futuramente, entendermos a dinâmica desta teoria de gravidade, obtemos, tal como segue, as equações de campo ao variarmos (7.29) em relação à *vierbein*, à conexão de spin e ao campo de matéria, respectivamente. Logo, desenvolvemos os mesmos passos executados no Capítulo 3. Isso nos remete a aplicar a equação de Euler-Lagrange (3.51) para cada campo mencionado anteriormente. Assim, obtemos

$$\begin{aligned}
& - \frac{3}{2\Lambda^2} R^{bc} \star (R_{bc} e_a) + D \star T_a + T^b \star (T_b e_a) + \epsilon_{abcd} R^{bc} e^d + \\
& - \frac{\Lambda^2}{3} \epsilon_{abcd} e^b e^c e^d = - \frac{3}{2\Lambda^2} [D m^b{}_c \star (D m_b{}^c e_a) + \\
& + m_b{}^c m_c{}^d \star (m_d{}^l m_l{}^b e_a) + 2R^b{}_c \star (m^c{}_\delta m^{\delta b} e_a)] + \\
& + m^b{}_a \star (m^c{}_b e_c) - m_b{}^c e_c \star (m_\delta{}^b e^\delta e_a) - \epsilon_{abcd} m^b{}_l m^{lc} e^d,
\end{aligned} \tag{7.30}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{\Lambda^2} D \star R_{ab} - \epsilon_{abcd} T^c e^d + e_a \star T_b - e_b \star T_a = \\
& = - \frac{3}{\Lambda^2} [m_a{}^c \star D m_{cb} - m_b{}^c \star D m_{ca} + D \star (m_a{}^c m_{cb})],
\end{aligned} \tag{7.31}$$

$$\begin{aligned}
& D \star D m_{ab} + m_a{}^c \star (m_c{}^d m_{db}) + \\
& + m_b{}^c \star (m_c{}^d m_{da}) + m_a{}^c \star R_{cb} + m_b{}^c \star R_{ca} + \\
& - \frac{\Lambda^2}{3} [e_b \star (m_{ac} e^c) + e_a \star (m_{bc} e^c)] + \\
& + \frac{\Lambda^2}{3} (\epsilon_{acdl} m^l{}_b e^c e^d + \epsilon_{bcdl} m^l{}_a e^c e^d) = 0.
\end{aligned} \tag{7.32}$$

Sobre o limite clássico da (7.30), enfatizamos que sob baixas curvaturas e devido ao elevado valor da constante cosmológica renormalizada  $\Lambda^2$ , conforme determinamos no Capítulo 4, a divergência da 2-forma de curvatura na (7.31) não é problemática,

pois, neste caso, permite soluções com torção nula. Em curvaturas com pequenas magnitudes temos  $(3/\Lambda^2)D \star R^{ab} \approx 0$ , logo encontramos uma equação algébrica para a torção, *i.e.*,

$$-\epsilon_{abcd}T^c e^d + e_a \star T_b - e_b \star T_a = F_{ab}(m) \quad , \quad (7.33)$$

onde resumimos os termos que contêm campos de matéria à  $F_a(m)$ . Com esta equação,  $T = 0$  é uma solução. Sob tais limites, *i.e.*, pequenas curvaturas e  $T = 0$ , temos  $(3/2\Lambda^2)R^{bc} \star (R_{bc}e_a) \approx 0$  e (7.30) se torna

$$\epsilon_{abcd}R^{bc}e^d - \frac{\Lambda^2}{3}\epsilon_{abcd}e^b e^c e^d = F_a(m) \quad , \quad (7.34)$$

onde as equações de Einstein com a constante cosmológica renormalizada são recuperadas com  $m = 0$ . Se considerarmos todas as contribuições de vácuo, temos, ao invés de  $\Lambda^2$ , a constante cosmológica observacional  $\tilde{\Lambda}^2$ . Caso  $m \neq 0$ , encontramos as equações de Einstein com constante cosmológica (renormalizada ou observacional) acopladas a campos de matéria, os quais ainda precisam de maiores estudos para afirmarmos algo sobre sua natureza. Se abandonarmos a condição  $T = 0$ , então temos os acoplamentos com os campos de matéria  $m$ , o que consideramos promissor nesta teoria de gravidade, pois esta não necessita, em um primeiro momento, receber de maneira *ad hoc* qualquer tipo de tensor energia-momento para acoplar geometria e matéria. Neste contexto, teremos o oportuno cenário para estudar como a torção pode revelar o conteúdo de spin dos campos de matéria  $m$ . Indo além, poderemos inserir um tensor densidade de spin na (7.31) para lidar com uma distribuição de matéria para compreender cenários com torção.

### 7.3 Sobre os setores quântico e efetivo da teoria

A teoria de gravidade que construímos necessita de um parâmetro de massa que separe dois setores: (i) o setor quântico, *i.e.*, a teoria perturbativa de Yang-Mills pura; (ii) o setor efetivo, *i.e.*, a teoria geometrodinâmica de gravidade. O parâmetro de massa que implementamos foi o parâmetro de Gribov, o qual é necessário para manter a consistência quântica das teorias de Yang-Mills no regime de baixas energias, ou seja, no setor infravermelho [58, 61, 63]. O termo de Gribov-Zwanziger, relacionado ao parâmetro de Gribov, é o encarregado pela quebra suave de BRST no regime infravermelho, embora em altas energias a simetria BRST é totalmente restaurada. Relembramos que disponibilizamos um panorama do cenário de Gribov-Zwanziger no

Apêndice A e não entraremos em detalhes neste momento. A consequência para a teoria de gravidade induzida que apresentamos consiste no fato de que, em altas energias, a teoria é quanticamente consistente. Assim, em alguma escala mais baixa de energia, a quebra suave de BRST ocorre. Nesta escala, os propagadores dos campos fundamentais não podem mais ser relacionados com excitações físicas [61, 63, 64] por causa do aparecimento de polos complexos, tal como podemos observar a seguir.

$$\begin{aligned}
\langle A_\mu^{ab} A_\nu^{cd} \rangle_p &= \frac{\kappa^2}{2} (\delta^{ac} \delta^{bd} - \delta^{ad} \delta^{bc}) \left( \frac{p^2}{p^4 + \gamma^4} \right) T_{\mu\nu} , \\
\langle M_\mu^{ab} M_\nu^{cd} \rangle_p &= \frac{\kappa^2}{2} (\delta^{ac} \delta^{bd} + \delta^{ad} \delta^{bc}) \left( \frac{p^2}{p^4 + \gamma^4} \right) T_{\mu\nu} , \\
\langle \theta_\mu^a \pi_\nu^b \rangle_p &= \delta^{ab} \frac{\kappa^2}{\gamma^2} \left( \frac{p^2}{p^4 + \gamma^4} \right) T_{\mu\nu} ,
\end{aligned} \tag{7.35}$$

onde  $T_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu / p^2$  é o projetor transversal no espaço de momentos. Também usamos a redefinição dos campos. Como tais propagadores não possuem uma representação de Källén-Lehmann, então notamos que estes estados são removidos do espectro físico da teoria. Esta é uma das motivações que nos levaram a identificar os novos operadores invariantes de calibre com estados físicos. Tal como discutimos anteriormente, identificamos estes operadores com uma geometria efetiva do espaço-tempo.

Finalmente, ressaltamos que a escolha do parâmetro de Gribov como parâmetro de massa que permitiu a transição de uma teoria de Yang-Mills para um teoria de gravidade, foi a escolha mais simples. O cenário de Gribov-Zwanziger pode ser melhorado quando se considera operadores compostos de dimensão 2 e seus respectivos condensados [63, 64]. Denominam tal melhoria como formalismo de Gribov-Zwanziger refinado. Por simplicidade, não adotamos este formalismo refinado. Deixamos as pesquisas neste cenário para o futuro, onde, eventualmente, esperamos melhores estimativas numéricas na obtenção dos parâmetros quânticos que adotamos na construção da presente teoria.

# Capítulo 8

## Conclusões e perspectivas

Teorias de calibre aliadas com mecanismos dinâmicos de geração de massa que permitem as redefinições dos campos podem induzir uma teoria de gravidade que, sob limites adequados, recuperam a Teoria Geral da Relatividade. Extensivamente, tal como era de se esperar de uma teoria efetiva de gravidade, termos além de Einstein-Hilbert expandem os limites das previsões teóricas da gravidade einsteiniana.

O parâmetro de massa na teoria, ou seja, o parâmetro de Gribov é de suma importância nesta teoria de gravidade induzida. O parâmetro de Gribov é responsável por conduzir a deformação da teoria de Yang-Mills no regime infravermelho a uma teoria geométrica de gravidade. Tal efeito, denominamos indução. Há dois mecanismos sutis que governam tal indução: A quebra dinâmica de simetria, sustentada pelo parâmetro de Gribov, e a contração de Inönü-Wigner que se torna o núcleo do mapeamento entre Yang-Mills e gravidade. Mostramos como empregar este mecanismo no Capítulo 3 para os grupos  $SO(m, n)$ .

No Capítulo 4, com o intuito de entendermos e determinarmos essa transição de setores, ou seja, a migração de uma teoria de calibre não-abeliana e a teoria geometrodinâmica de gravidade, fizemos estimativas para os valores do corte na escala de energia  $\bar{\Lambda}^2$  e a constante cosmológica renormalizada  $\Lambda^2$ .

Primeiro, buscamos realizar essas estimativas através do uso de métodos numéricos, os quais mostramos na Seção 4.1.2. Tais métodos foram aplicados nas equações de *gap* a 1 e 2-laços e permitiram, sob um valor  $G$  fixado, que chegássemos a duas convicções: (i) Nossa primeira tentativa em escolher um valor do logaritmo no intervalo (4.22) foi bem razoável e concordou com o que realizamos em [80]. (ii) As estimativas a 1-laço

receberam aprimoramentos. A prova disso está nos valores  $\bar{\Lambda}^2 = 1,052 \times 10^{32} \text{ TeV}^2$  e  $\Lambda^2 = 7,666 \times 10^{31} \text{ TeV}^2$  para o corte na escala de energia e para a constante cosmológica renormalizada, respectivamente, usando o método  $M_{3a}$  e  $M_{3b}$ , *i.e.*, os dois limites do método da série geométrica. Entretanto, o método  $M_{3b}$  nos deixa com o melhor par de estimativas a 1-laço.

Ainda considerando a equação de *gap* a 1-laço, alternativamente, assumimos  $\bar{\Lambda}$  igual a energia de Planck e estimamos os valores da constante de Newton  $G_p$  e da constante cosmológica  $\Lambda_p$ . O resultado, após empregarmos os métodos  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_{3a}$  e  $M_{3b}$  nos manteve 1 ordem de grandeza acima do valor exato da constante gravitacional de Newton  $G$ . A razão  $G_p/G = 7,834$  foi a menor que obtida quando comparamos todas as razões  $G_p/G$  em todos os métodos. A constante cosmológica renormalizada, portanto, estimamos  $\Lambda^2 = 6,271 \times 10^{31} \text{ TeV}^2$ , a qual está ancorada na mesma ordem de magnitude do que havíamos estimado anteriormente, sem igualar o corte da escala de energia com a energia de Planck em Seção 4.1.2.

Depois que esgotamos as estimativas a 1-laço, fomos para uma terceira tentativa, onde consideramos a equação de *gap* a 2-laços. Após expandirmos a equação de *gap*, encontramos o alto valor do logaritmo  $\ln(\mu^2/\bar{\Lambda}^2) = 0,9999$ . A forma quadrática da equação de *gap* a 2-laços resultou em dois valores  $\gamma_m$  e  $\gamma_p$  para o parâmetro de massa. Portanto, foi necessário investigarmos a validade física desses valores. Observamos que um comportamento não-físico para os valores de  $\gamma_p$ , pois discorda com comportamento do parâmetro de Gribov em função da escala de energia, como mostramos na Figura 4.4. Entretanto, o comportamento físico de  $\gamma_m$  é mostrado na Figura 4.5. Logo, calculamos o corte da escala de energia e a constante cosmológica renormalizada,  $\bar{\Lambda}^2 = 6,150 \times 10^{32} \text{ TeV}^2$  e  $\bar{\Lambda}^2 = 7,665 \times 10^{31} \text{ TeV}^2$ , respectivamente. Quando comparamos com o melhor par de estimativas a 1-laço, *i.e.*,  $\bar{\Lambda}^2 = 4,851 \times 10^{33} \text{ TeV}^2$  e  $\Lambda^2 = 7,666 \times 10^{31} \text{ TeV}^2$ , notamos que houve uma correção pequena, mas não influenciou na ordem de grandeza da constante cosmológica renormalizada. Para o corte da escala de energia, a estimativa ficou 1 ordem de grandeza abaixo. A quarta e última tentativa consistiu na eliminação simples dos logaritmos. Para tal, usamos o valor  $\gamma^4 = \sqrt{5}\mu$  e calculamos o menor  $\bar{\Lambda}^2$ , mas a ordem de grandeza de  $\Lambda^2$  permaneceu igual àquelas que encontramos através dos outros métodos mostrados na Seção 4.1 e na Seção 4.2. Apesar de encontrarmos estimativas razoáveis após usar esta simples eliminação dos logaritmos na equação de *gap* a 2-laços, não conseguimos sucesso com esta mesma realização na equação a 1-laço. Isso ocorreu porque o valor da função beta a 1-laço ficou fora do intervalo permitido, *i.e.*, encontramos  $N\kappa/16\pi^2 > 1$ . Todavia,

o método mais simples de eliminar logaritmos não leva a valores otimizados para o parâmetro de massa, principalmente pela ausência de um valor válido para a função beta a 1-laço. Como perspectiva, buscaremos novos métodos de aprimoramento das estimativas numéricas.

No Capítulo 5 e no Capítulo 6, buscamos realizar testes clássicos para a teoria de gravidade induzida que construímos para os grupos  $SO(m, n)$ . No Capítulo 5, ficamos restritos à teoria de gravidade induzida a partir da teoria de Yang-Mills para o grupo  $SO(5)$  e buscamos soluções esfericamente simétricas para as equações de campo.

De forma simplificada, neste primeiro estudo das soluções, optamos por não considerar a torção naquelas equações. Através da torção nula e das equações de campo de Einstein, mostramos que a geometria de Schwarzschild-de Sitter apresenta simetria esférica e, portanto, conseguimos representar as componentes da métrica com funções escalares que não dependam do tempo. Essa simetria também foi assumida nas equações de campo (5.17) e (5.18). Usamos esta simetria esférica e construímos um conjunto de equações diferenciais que permitiram que estudássemos o termo quadrático de curvatura em (5.17). Analisamos tal termo em dois regimes: (i) Perturbativo: Neste regime, tratamos a contribuição oriunda do termo quadrático de curvatura como uma perturbação com parâmetro  $\eta \equiv \tilde{\Lambda}^2/2\Lambda^2$ ; (ii) Exato: Neste regime, o termo quadrático de curvatura foi plenamente considerado. No regime (i), Encontramos uma solução perturbativa e a explicitamos até quarta ordem, tal como pode ser visualizado em (5.2.2). O uso das funções  $e^{-2\beta}$  permitiram que uma métrica modificada de Schwarzschild-de Sitter fosse determinada. Através dela, vemos que o termo de ordem zero contempla o conhecido espaço-tempo de Schwarzschild-de Sitter. Diante da geometria deformada, quando lidamos com regiões  $r \gg 2GM$ , encontramos a métrica de de Sitter com os devidos termos de correção perturbativa. Isso pode ser visto em (5.35). Na ordem zero, temos a própria solução para uma geometria de de Sitter com constante cosmológica  $\tilde{\Lambda}^2$ . Interessantemente, encontramos que os coeficientes da expansão são os números de Catalan, os quais formam uma bem conhecida sequência em matemática combinatória. Ainda não entendemos o significado completo de encontrarmos tal sequência na solução de de Sitter. Este é um curioso fato que exploraremos futuramente.

Usamos a solução perturbativa, até primeira ordem, e encontramos os horizontes de eventos para a geometria de Schwarzschild-de Sitter deformada (5.47). Observamos que estes horizontes são aqueles encontrados para uma geometria de Schwarzschild-de



Sitter mais uma correção em primeira ordem. Claramente, notamos que no limite  $\eta \rightarrow 0$ , tal geometria é recuperada.

Sobre a singularidade na origem, determinamos o invariante de Kretschmann, até primeira ordem, e verificamos que em (5.48) temos uma singularidade em  $r = 0$ . O fato interessante a respeito da solução perturbativa encontramos no invariante de curvatura (5.50), o qual mostra que o termo de correção também indicou uma singularidade em  $r = 0$ , diferentemente do que obtemos em Relatividade Geral, onde este invariante é constante, o que mostra ser um indício da natureza física do termo quadrático de curvatura.

No regime (ii), encontramos uma geometria de de Sitter, onde há uma dependência nas constantes  $\tilde{\Lambda}^2$  e  $\Lambda^2$ . A solução exata (5.53) nos mostrou que não teremos o termo de massa. As geometrias (5.55) e (5.56) mostram esse fato. Tais soluções satisfazem o sistema sobredeterminado composto pelas equações diferenciais (5.20), (5.22) e (5.23), onde está assumido  $\alpha + \beta = 0$ . Esta solução, realmente, era o que deveríamos esperar como a mais simples possível. Quando expandimos  $\Upsilon_m$  em (5.54), temos  $\tilde{\Upsilon} = \Upsilon_m$ . Para regiões onde  $r \gg 2GM$ , obtemos a compatibilidade desejada entre ambas as soluções geométricas encontradas, (5.58) e (5.34). Os horizontes cosmológicos respectivos aos valores  $\Upsilon$  foram determinados e encontramos uma estrutura causal similar àquela obtida para a geometria de de Sitter, tal como ilustramos na Figura 5.1.

Conforme esperado, não temos singularidade física em  $r = 0$ , uma vez que os invariantes de curvatura e de Kretschmann são constantes mesmo nessa geometria de Schwarzschild-de Sitter modificada.

Realizamos um breve estudo termodinâmico para os horizontes obtidos tanto no regime perturbativo quanto no exato. Para a gravidade de superfície, encontramos os comportamentos esperados quando a massa aumenta, ou seja, esta, mesmo com o termo de correção, diminui com a expansão do horizonte devido ao aumento da massa. No que se refere à anomalia para pequenos valores de  $M$ , a gravidade de superfície do horizonte da distribuição esférica de massa também sofre tal anomalia, mostrando-se crescente para pequenas massas. A gravidade de superfície no horizonte cosmológico seguiu, mesmo com o termo de correção em primeira ordem, o mesmo protocolo que a original de um espaço-tempo de de Sitter. O comportamento dessas gravidades de superfície são diretamente relacionados a temperatura Hawking. No caso da entropia, encontramos, conforme (5.75) e (5.76), para a solução perturbativa, um pequeno desvio da entropia determinada para a geometria de Schwarzschild-de Sitter. No caso

da solução exata, a alteração no valor da entropia se deu por causa dos valores de  $\Upsilon$ . Entretanto, quando tomamos o limite, ou seja, para  $\Upsilon_n$ , encontramos a entropia do espaço-tempo de de Sitter com constante cosmológica observacional  $\tilde{\Lambda}^2$ .

Como perspectiva, buscaremos soluções perturbativas com rotação e carga elétrica. Ainda considerando soluções no vácuo, estudaremos os termos de correção de ordem superior a 1. Nosso interesse consiste em verificar se a adição de termos de correção maiores que 1 mostrarão alguma anomalia no comportamento dos horizontes de eventos, assim como nas quantidades termodinâmicas associadas.

No Capítulo 6, estudamos a cosmologia da teoria de gravidade induzida a partir das teorias de Yang-Mills para os grupos  $SO(m, n)$ . Consideramos a métrica de FLRW como primeira abordagem quando assumimos um espaço-tempo riemanniano devido ao anulamento dos termos de torção nas equações de campo. O termo quadrático de curvatura permitiu que determinássemos uma dinâmica modificada comparada com a dinâmica do modelo cosmológico padrão. As dinâmicas encontradas estão relacionadas aos regimes governados por  $\Lambda^2$ . No setor de baixas curvaturas, a cosmologia da teoria de gravidade induzida imita o modelo  $\Lambda$ CDM quando o grupo inicial para a teoria de Yang-Mills é o  $SO(5)$ , portanto, quando  $\epsilon = 1$ , conforme nossas convenções. Neste caso, o termo de correção vindo do acoplamento com  $\Lambda^2$ , o qual é da ordem de  $10^3 2T_e V^2$ , é suprimido. Portanto, esperamos que o regime de baixas curvaturas seja atingido antes da nucleossíntese do universo primordial, a qual ocorre na ordem de  $MeV$ . Essa recuperação do modelo  $\Lambda$ CDM é feita unicamente para  $\epsilon = 1$ . Os demais grupos contidos em  $SO(m, n)$ , ou seja, para (anti)-de Sitter, quando  $\epsilon = -1$ , não permitem que recuperemos o modelo  $\Lambda$ CDM. No setor de curvaturas elevadas, a escala de energia é similar àquela da usual fase inflacionária. Analisamos, neste regime, tanto o universo vazio quanto o universo preenchido com um fluido perfeito. Para o vácuo, encontramos três soluções para o fator de escala, cuja dependência tem relação com  $\epsilon$  e a curvatura da seção espacial, tal como podemos observar em (6.30). Deduzimos que apenas soluções com  $\epsilon = 1$  mostram uma fase de Sitter de expansão. Isso indica que a gravidade induzida com o grupo  $SO(5)$  permite um modelo cosmológico com uma fase primordial de de Sitter que está conectada ao modelo  $\Lambda$ CDM de forma consistente.

A teoria de gravidade induzida que empregamos neste estudo cosmológico preliminar aumenta a quantidade de equações dinâmicas. A equação dinâmica extra torna o sistema determinado e, conseqüentemente, não introduzimos uma equação de estado para o fluido perfeito. Isso nos levou a interpretar que no regime de altas curvaturas, qualquer fluido gravitacional da mesma maneira. Para as soluções possíveis, encontramos

soluções singulares, seja uma singularidade no passado ou no futuro, respectivamente, um *Big Bang* ou *Big Crunch*. Ademais, encontramos uma solução não singular com um único ricochete, o qual pode ser simétrico ou assimétrico, pois dependerá dos parâmetros livres desta solução singular. No regime de hipercurvaturas devemos lidar com um valor *running* para  $\Lambda^2$ . Entretanto, ainda não temos um estudo completo sobre como lidar com este *running* e deixamos esse ponto para trabalhos futuros. Além dessa perspectiva, investigaremos como a cosmologia desta teoria de gravidade induzida pode ser modificada com a presença de torção, o que traria um grau de liberdade a mais.

No Capítulo 7 implementamos para o grupo  $SL(5, \mathbb{R})$  a mesma prescrição usada para os grupos  $SO(m, n)$ . Mostramos no Capítulo 4 que estimativas a 1 e 2-laços, a razão entre o parâmetro de Gribov e o parâmetro de acoplamento pode ser associada com um parâmetro que descreve a transição entre os dois setores da teoria. O regime de altas energias onde temos uma teoria de Yang-Mills para o grupo  $SL(5, \mathbb{R})$  em quatro dimensões euclidianas e o regime de baixas energias onde obtivemos uma teoria geometrodinâmica com o termo de Einstein-Hilbert, a constante cosmológica e o campo de matéria. A transição entre os setores é mediada pela quebra suave de simetria de BRST associada ao parâmetro de Gribov. Conforme observamos na Figura 4.2, quando a razão  $\gamma^2/\kappa^2$  aumenta com a diminuição da energia e, após um máximo, tal razão vai a zero rapidamente. Neste ponto, o grupo de calibre sofre uma quebra de simetria para o grupo  $SO(4)$  e a fase geométrica se inicia. Nesta fase, identificamos os graus de liberdade da teoria original com a *vierbein*, a conexão de spin e o campo de matéria. Realmente, assumimos que a razão  $\gamma^2/\kappa^2$  é um razoável candidato para demarcar essa transição e que ele pode descrever a teoria em qualquer escala.

A teoria de gravidade induzida, no presente caso, é governada pela ação gravitacional (7.29). Nesta ação temos o termo quadrático de curvatura proporcional a  $1/\Lambda^2$ . Devido ao alto valor de  $\Lambda^2$ , conforme estimamos no Capítulo 4, este termo é desprezível quando comparado ao termo de Einstein-Hilbert em um regime de baixas curvaturas. Se não levarmos em conta, por um momento, os campos de matéria, temos uma ação de gravidade similar a encontrada em Relatividade Geral acrescentada com termos de torção. Estes termos serão significativos quando levarmos em conta o acoplamento com férmions. Caso contrário, esperamos que sejam pouco significativos. Levando em consideração os campos de matéria, podemos observar em (7.29) que tais campos têm alcance bem pequeno, devido ao fator  $\Lambda^2$ . Estamos procurando entender como podemos relacionar este campo  $m$  com matéria escura, entretanto, até o momento,

ainda não compreendemos completamente a natureza desse campo e, portanto, esta é apenas uma perspectiva de trabalho. No caso da constante cosmológica renormalizada, procuraremos associá-la com energia escura, ou seja, uma outra perspectiva. Neste processo, a constante de Newton, sendo um fator global, não interferiu em nossa análise.

Sobre a equação de campo (7.30), conseguimos recuperar as equações de Einstein no limite onde o termo quadrático de curvatura é bem menor que o valor de  $\Lambda^2$  e, ao mesmo tempo, quando desprezamos os termos de matéria e os de torção. Se, neste limite, considerarmos  $T \neq 0$ , teremos como investigar a maneira como torção e tais campos se acoplam. Existe ainda a possibilidade de introduzirmos um tensor densidade de spin em (7.31) para investigarmos o conteúdo de spin dos campos de matéria acoplada à torção. Um outra perspectiva bem promissora para esta teoria é, sem incluir um tensor energia-momento como *ansatz*, buscarmos entender o acoplamento entre geometria e matéria. Compreendemos que este é um trabalho que demandará muitos esforços diante do sistema sofisticado das equações de campo obtidas para esta teoria de gravidade induzida.

# Apêndice A

## Um panorama do cenário Gribov-Zwanziger

Uma breve descrição do cenário de Gribov-Zwanziger apresentaremos neste ponto, tal que os pontos principais desta teoria sejam apresentados ao leitor, juntamente com as referências para um futuro aprofundamento sobre o tópico a quem interessar possa. O amplo espectro de tecnicidades pode ser encontrado nas referências [58–60, 63, 71, 75, 113]. Uma abordagem didática e esclarecedora se encontra na teses [111] e [110] e outras nestas citadas.

A quantização das teorias de Yang-Mills nos confronta como uma árduo trabalho a ser realizado. Inicialmente, o procedimento estabelecido por Faddeev e Popov [114] foi bem-sucedido no regime perturbativo quanto à quantização dos campos de calibre. Entretanto, há uma falha durante tal processo implementado por Faddeev e Popov, pois ocorrem cópias ilegítimas, fisicamente falando, que tornam o processo de quantização incompleto no regime infravermelho. Neste ambiente não-perturbativo das teorias de calibre nasce o problema de Gribov. O que chamamos de problema de Gribov, o qual também foi demonstrado por Singer [59] é a verificação de réplicas dos mesmos campos de calibre em uma determinada região. A maneira ideal de tratar a eliminação de tais réplicas consiste em determinar a famosa *RMF*, ou seja, a denominada Região Modular Fundamental, cuja resolução é um problema em aberto e bastante desafiador. Uma forma de contornar tal dificuldade em cálculos explícitos compete em nos restringirmos ao que conhecemos como *Primeira região de Gribov*. De acordo com [60, 71, 75, 113], tais cópias dentro da *Primeira Região de Gribov* não afetam os propagadores da teoria e podem ser calculados em tal domínio. Zwanziger

implementou um procedimento para atacar o problema, onde seu método consistiu em introduzir um conjunto de campos na integral funcional em um espaço euclidiano, o qual ficou restrito à região de Gribov  $\Omega$  sob o calibre de Landau, ou seja,  $\partial_\mu Y_\mu^A = 0$ . Desta forma, temos o operador de Faddeev-Popov,

$$M^{AB} = -\partial_\mu D_\mu^{AB} , \quad (\text{A.1})$$

o qual é positivo definido, e, ainda, temos que

$$\Omega = \{Y_\mu^A, \partial_\mu Y_\mu^A = 0, M^{AB} > 0, \} \quad (\text{A.2})$$

com  $D_\mu^{AB} = \delta^{AB} \partial_\mu - gf^{ABC} Y^B Y^C$ .

A quantização tem seu início com a ação clássica de Yang-Mills para o grupo  $SU(N)$ ,

$$S_{YM} = \int d^4x F_{\mu\nu}^A F_{\mu\nu}^A , \quad (\text{A.3})$$

o qual ganha um termo não-local que lida com o problema de Gribov conforme se segue,

$$S_h = \int d^4x \gamma^4 g^2 f^{ABC} Y_\mu^B \overline{M}^{AB} f^{DEC} Y^E_\mu , \quad (\text{A.4})$$

onde,  $M^{AB}(x) \overline{M}^{BC}(x, y) = \delta^4(x - y) \delta^{AC}$ . O parâmetro de Gribov  $\gamma$  é determinado sob o cálculo da equação de *gap* de massa. Em [60, 63, 71] é demonstrado que

$$e^{-S_h} = \int [d\Phi] e^{-S_{loc}} , \quad (\text{A.5})$$

o qual  $[d\Phi] \equiv [d\varphi][d\overline{\varphi}][d\omega][d\overline{\omega}]$  e

$$S_{loc} = \int d^4x \left[ -\overline{\varphi}_\mu^{AC} M^{AB} \varphi_\mu^{BC} + \overline{\omega}_\mu^{ac} M^{ab} \overline{\omega}_\mu^{bc} - \gamma^2 g f^{ABC} Y_\mu^A (\varphi_\mu^{BC} + \varphi_\mu^{BC}) \right] , \quad (\text{A.6})$$

de forma que o par conjugado  $(\overline{\varphi}_\mu^{AC}, \varphi_\mu^{BC})$  são campos bosônicos e  $(\overline{\omega}_\mu^{AC}, \omega_\mu^{AC})$  são campos fermiônicos.

A ação local é construída por

$$\mathcal{Z} = \int [d\Psi] e^{-S_{GZ}} , \quad (\text{A.7})$$

com  $[d\Psi] \equiv [dY][d\varphi][d\bar{\varphi}][d\omega][d\bar{\omega}][db][dc][d\bar{c}]$  e  $S_{GZ}$  é chamada ação de Gribov-Zwanziger, a qual é pode ser estendida na seguinte maneira

$$S_{GZ} = S_{YM} + S_{gf} + S_{loc} + S_{\gamma} , \quad (\text{A.8})$$

na qual,

$$\begin{aligned} S_{gf} &= \int d^4x (b^A \partial_\mu Y_\mu^A - \bar{c}^A M^{AB} c^B) , \\ S_{\gamma} &= \int d^4x 4\gamma^4 (N^2 - 1) . \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

A inserção crucial  $S_{\gamma}$  é uma maneira de satisfazer a condição horizonte, ou seja, a equação de *gap* de massa,

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial \gamma^2} = 0 , \quad (\text{A.10})$$

onde  $\Gamma$  é a ação quântica, a qual é determinada por

$$e^{-\Gamma} = \int [d\Psi] e^{-S_{GZ}} . \quad (\text{A.11})$$

A ação quadrática (4.1) como mencionada na Seção 4.1.1 é obtida a partir da  $S_{GZ}$ , onde consideramos apenas a parte livre de interações, comumente chamada de *part* quadrática, ou seja, a parte não-interagente da ação de Gribov-Zwanziger. Diretamente, podemos observar que os campos fermiônicos não contribuem na ação quadrática.

# Referências Bibliográficas

- [1] Robert M. Wald. *General Relativity*. 1984.
- [2] Ryoyu Utiyama. Invariant theoretical interpretation of interaction. *Phys. Rev.*, 101:1597–1607, Mar. 1956. doi: 10.1103/PhysRev.101.1597.
- [3] T. W. B. Kibble. Lorentz Invariance and the Gravitational Field. *J. Math. Phys.*, 2(2):212–221, 1961. doi: 10.1063/1.1703702. URL <http://scitation.aip.org/content/aip/journal/jmp/2/2/10.1063/1.1703702>.
- [4] Dennis W. Sciama. The Physical Structure of General Relativity. *Rev. Mod. Phys.*, 36:463–469, Jan. 1964. doi: 10.1103/RevModPhys.36.463. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.36.463>.
- [5] Steven Weinberg. *The Quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations*. Cambridge University Press, 2005.
- [6] Steven Weinberg. *The quantum theory of fields. Vol. 2: Modern applications*. Cambridge University Press, 2013.
- [7] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction To Quantum Field Theory*. Frontiers in Physics. "Reading, USA: Addison-Wesley", 1995.
- [8] G. 't Hooft. *Under the Spell of the Gauge Principle*. Advanced series in mathematical physics. World Scientific, 1994.
- [9] Claude Itzykson and Jean B. Zuber. *Quantum Field Theory*. International Series In Pure and Applied Physics. Mcgraw-Hill, 1980.
- [10] Ashok Das. *Lectures on Quantum Field Theory*. World Scientific, 2008.
- [11] R. F. Sobreiro, A. A. Tomaz, and V. J. Vasquez Otoyá. de Sitter gauge theories and induced gravities. *Eur. Phys. Jour. C*, 72:1991, 2012. doi: 10.1140/epjc/s10052-012-1991-4.



- [12] F. W. Hehl, G. D. Kerlick, and P. Von Der Heyde. On a New Metric Affine Theory of Gravitation. *Phys. Lett.*, B63:446–448, 1976. doi: 10.1016/0370-2693(76)90393-2.
- [13] S. W. MacDowell and F. Mansouri. Unified Geometric Theory of Gravity and Supergravity. *Phys. Rev. Lett.*, 38:739, 1977. doi: 10.1103/PhysRevLett.38.1376,10.1103/PhysRevLett.38.739. [Erratum: *Phys. Rev. Lett.*38,1376(1977)].
- [14] K. S. Stelle and Peter C. West. Spontaneously Broken De Sitter Symmetry and the Gravitational Holonomy Group. *Phys. Rev.*, D21:1466, 1980. doi: 10.1103/PhysRevD.21.1466.
- [15] Arkady A. Tseytlin. On the Poincare and De Sitter Gauge Theories of Gravity With Propagating Torsion. *Phys. Rev.*, D26, 1982.
- [16] Heinz R. Pagels. Gravitational Gauge Fields and the Cosmological Constant. *Phys. Rev.*, D29:1690, 1984. doi: 10.1103/PhysRevD.29.1690.
- [17] Alejandro Mardones and Jorge Zanelli. Lovelock-Cartan theory of gravity. *Class. Quant. Grav.*, 8:1545–1558, 1991.
- [18] Prasanta Mahato. De Sitter group and Einstein-Hilbert Lagrangian. *Phys. Rev.*, D70:124024, 2004.
- [19] Romualdo Tresguerres. Dynamically broken Anti-de Sitter action for gravity. *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.*, 5, 2008.
- [20] Eckehard W. Mielke. Einsteinian gravity from a spontaneously broken topological BF theory. *Phys. Lett.*, B688:273–277, 2010. doi: 10.1016/j.physletb.2010.04.030.
- [21] Jorge Zanelli. Lecture notes on Chern-Simons (super-)gravities. Second edition (February 2008). In *Proceedings, 7th Mexican Workshop on Particles and Fields (MWPF 1999)*, 2005.
- [22] Albert Einstein. The Foundation of the General Theory of Relativity. *Annalen Phys.*, 49:769–822, 1916. doi: 10.1002/andp.200590044. [Annalen Phys.14,517(2005)].
- [23] Abhay Ashtekar and Jerzy Lewandowski. Background independent quantum gravity: A Status report. *Class. Quant. Grav.*, 21:R53, 2004.

- [24] Abhay Ashtekar, Martin Reuter, and Carlo Rovelli. *From General Relativity to Quantum Gravity*. 2014.
- [25] Carlo Rovelli and Francesca Vidotto. *Covariant Loop Quantum Gravity*. Cambridge University Press, 2014.
- [26] I. L. Buchbinder, S. D. Odintsov, and I. L. Shapiro. *Effective action in quantum gravity*. 1992.
- [27] M. Asorey, J. L. Lopez, and I. L. Shapiro. Some remarks on high derivative quantum gravity. *Int. J. Mod. Phys.*, A12:5711–5734, 1997.
- [28] Joe Henson. *The Causal set approach to quantum gravity*. 2006.
- [29] Graham Brightwell, Joe Henson, and Sumati Surya. A 2D model of causal set quantum gravity: The Emergence of the continuum. *Class. Quant. Grav.*, 25:105025, 2008.
- [30] Renate Loll and Ben Ruijl. Locally Causal Dynamical Triangulations in Two Dimensions. *Phys. Rev.*, D92(8):084002, 2015.
- [31] J. Ambjorn, A. Goerlich, J. Jurkiewicz, and R. Loll. Nonperturbative Quantum Gravity. *Phys. Rept.*, 519:127–210, 2012.
- [32] M. J. Duff. M theory (The Theory formerly known as strings). *Int. J. Mod. Phys.*, A11:5623–5642, 1996.
- [33] Edward Witten. Anti-de Sitter space and holography. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 2:253–291, 1998.
- [34] Nathan Seiberg and Edward Witten. String theory and noncommutative geometry. *JHEP*, 09:032, 1999.
- [35] B. Zwiebach. *A First Course in String Theory*. Cambridge University Press, New York, 2009.
- [36] J. Polchinski. *String Theory*, volume 1 of *Cambridge Monographs on Mathematical Physics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [37] S. W. Hawking and W. Israel. *General Relativity*. Univ. Pr., Cambridge, UK, 1979.

- [38] M. Reuter. Nonperturbative evolution equation for quantum gravity. *Phys. Rev.*, D57:971–985, 1998.
- [39] Martin Reuter and Frank Saueressig. Quantum Einstein Gravity. *New J. Phys.*, 14:055022, 2012.
- [40] Carlos Barcelo, Matt Visser, and Stefano Liberati. Einstein gravity as an emergent phenomenon? *Int. J. Mod. Phys.*, D10:799–806, 2001.
- [41] Eckehard W. Mielke. Spontaneously broken topological  $SL(5, \mathbb{R})$  gauge theory with standard gravity emerging. *Phys. Rev.*, D83, 2011.
- [42] Ricardo Paszko and Roldão Rocha. Quadratic gravity from BF theory in two and three dimensions. *Gen. Rel. Grav.*, 47(8):94, 2015.
- [43] Carlo Rovelli. Strings, loops and others. 1997. URL <http://arxiv.org/abs/gr-qc/9803024>.
- [44] S. W. Hawking. Particle Creation by Black Holes. *Commun. Math. Phys.*, 43:199–220, 1975.
- [45] B. Ryden. *Introduction to cosmology*. 2003.
- [46] V. Mukhanov. *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge University Press, Oxford, 2005.
- [47] Sean M. Carroll. *Spacetime and geometry: An introduction to general relativity*. 2004.
- [48] Steven Weinberg. *Cosmology*. Oxford Univ. Press, 2008.
- [49] H. David Politzer. Reliable Perturbative Results for Strong Interactions? *Phys. Rev. Lett.*, 30:1346–1349, June 1973. doi: 10.1103/PhysRevLett.30.1346. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.30.1346>.
- [50] David J. Gross and Frank Wilczek. Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories. *Phys. Rev. Lett.*, 30:1343–1346, June 1973. doi: 10.1103/PhysRevLett.30.1343. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.30.1343>.
- [51] E. İnönü and E. P. Wigner. On the Contraction of Groups and Their Representations. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 39(6):510–524, 1953. doi: 10.1073/pnas.39.6.510. URL <http://www.pnas.org/content/39/6/510.full.pdf>.

- [52] L. H. Ryder. *QUANTUM FIELD THEORY*. Cambridge University Press, 1996.
- [53] V. De Sabbata and M. Gasperini. *Introduction to Gravitation*. World Scientific, 1986.
- [54] V. A. Rubakov. *Classical theory of gauge fields*. Princeton University Press, 2002.
- [55] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. Boca Raton, USA: Taylor & Francis, 2003.
- [56] O. Piguet and S.P. Sorella. *Algebraic Renormalization: Perturbative Renormalization, Symmetries and Anomalies*. Lecture Notes in Physics Monographs. Springer Berlin Heidelberg, 1995.
- [57] O. Piguet and S. P. Sorella. Algebraic renormalization: Perturbative renormalization, symmetries and anomalies. *Lect. Notes Phys.*, M28:1–134, 1995.
- [58] V. N. Gribov. Quantization of non-Abelian gauge theories. *Nucl.Phys.B*, 139 (1-2):1–19, 1978.
- [59] I. M. Singer. Some Remarks on the Gribov Ambiguity. *Commun. Math. Phys.*, 60:7–12, 1978. doi: 10.1007/BF01609471.
- [60] David Dudal, Nele Vandersickel, Henri Verschelde, and Silvio P. Sorella. Aspects of the Gribov-Zwanziger framework. *PoS*, QCD-TNT09:012, 2009.
- [61] Daniel Zwanziger. Renormalizability of the critical limit of lattice gauge theory by BRS invariance. *Nucl. Phys. B*, 399(2-3):477–513, 1993. doi: 10.1016/0550-3213(93)90506-K. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/055032139390506K>.
- [62] Nicola Maggiore and Martin Schaden. Landau gauge within the Gribov horizon. *Phys. Rev. D*, 50:6616–6625, Nov. 1994. doi: 10.1103/PhysRevD.50.6616. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.50.6616>.
- [63] D. Dudal, R. F. Sobreiro, S. P. Sorella, and H. Verschelde. Gribov parameter and the dimension two gluon condensate in euclidean yang-mills theories in the landau gauge. *Phys. Rev. D*, 72:014016, July 2005. doi: 10.1103/PhysRevD.72.014016. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.72.014016>.

- [64] D. Dudal, S. P. Sorella, and N. Vandersickel. Dynamical origin of the refinement of the Gribov-Zwanziger theory. *Phys. Rev. D*, 84:065039, Sept. 2011. doi: 10.1103/PhysRevD.84.065039. URL <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.84.065039>.
- [65] D. Lovelock. The Einstein tensor and its generalizations. *J. Math. Phys.*, 12: 498–501, 1971.
- [66] Guilherme de Berredo-Peixoto and Ilya L. Shapiro. Conformal quantum gravity with the Gauss-Bonnet term. *Phys. Rev.*, D70:044024, 2004. doi: 10.1103/PhysRevD.70.044024.
- [67] Guilherme de Berredo-Peixoto and Ilya L. Shapiro. Higher derivative quantum gravity with Gauss-Bonnet term. *Phys. Rev.*, D71:064005, 2005. doi: 10.1103/PhysRevD.71.064005.
- [68] A. Achúcarro and P. K. Townsend. A Chern-Simons Action for Three-Dimensional anti-De Sitter Supergravity Theories. *Phys. Lett.*, B180:89, 1986.
- [69] H. T. Nieh and C. N. Yang. A torsional topological invariant. *Int. J. Mod. Phys.*, A22:5237–5244, 2007.
- [70] R. F. Sobreiro, A. A. Tomaz, and V. J. Vasquez Otoyá. Gauge theories and gravity. *PoS*, ICMP2012:019, 2012.
- [71] S. P. Sorella. Gribov horizon and BRST symmetry: A Few remarks. *Phys. Rev.*, D80:025013, 2009. doi: 10.1103/PhysRevD.80.025013.
- [72] R. Aldrovandi and J. G. Pereira. A Second Poincaré group. In *Conference on Topics in Theoretical Physics II: Festschrift for A.H. Zimerman Sao Paulo, Brazil, November 20, 1998*, 1998.
- [73] Viorel Chiritoiu and Gheorghe Zet. Towards a quantization of gauge fields on de Sitter group by functional integral method. *Eur. Phys. J.*, C57, 2008.
- [74] W. Thirring and E.M. Harrell. *Classical Mathematical Physics: Dynamical Systems and Field Theories*. Springer New York, 2003. ISBN 9780387406152.
- [75] D. Zwanziger. Local and Renormalizable Action From the Gribov Horizon. *Nucl. Phys.*, B323:513–544, 1989. doi: 10.1016/0550-3213(89)90122-3.
- [76] M. Daniel and C. M. Viallet. The Geometrical Setting of Gauge Theories of the Yang-Mills Type. *Rev. Mod. Phys.*, 52, 1980.

- [77] A. Trautman. *Fiber Bundles, Gauge Fields, and Gravitation*. 1981.
- [78] M. A. L. Capri, D. Dudal, D. Fiorentini, M. S. Guimaraes, I. F. Justo, A. D. Pereira, B. W. Mintz, L. F. Palhares, R. F. Sobreiro, and S. P. Sorella. Exact nilpotent nonperturbative BRST symmetry for the Gribov-Zwanziger action in the linear covariant gauge. *Phys. Rev.*, D92(4):045039, 2015.
- [79] F. R. Ford and J. A. Gracey. Two loop anti-MS Gribov mass gap equation with massive quarks. *J. Phys.*, A42:325402, 2009. doi: 10.1088/1751-8113/42/32/325402,10.1088/1751-8113/43/22/229802. [Erratum: *J. Phys.*43,229802(2010)].
- [80] T. S. Assimos, A. D. Pereira, T. R. S. Santos, R. F. Sobreiro, A. A. Tomaz, and V. J. Vasquez Otoyá. Dark gravity from a renormalizable gauge theory. *arXiv*, 2013. URL <http://arxiv.org/abs/1305.1468>.
- [81] John C. Collins. *Renormalization*, volume 26 of *Cambridge Monographs on Mathematical Physics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986. URL <http://www-spires.fnal.gov/spires/find/books/www?cl=QC174.17.R46C65::1985>.
- [82] J. A. Gracey. Three loop MS-bar renormalization of the Curci-Ferrari model and the dimension two BRST invariant composite operator in QCD. *Phys. Lett.*, B552:101–110, 2003.
- [83] Jacques C. R. Bloch, Attilio Cucchieri, Kurt Langfeld, and Tereza Mendes. Propagators and running coupling from SU(2) lattice gauge theory. *Nucl. Phys.*, B687:76–100, 2004. doi: 10.1016/j.nuclphysb.2004.03.021.
- [84] Attilio Cucchieri and Tereza Mendes. Landau-gauge propagators in Yang-Mills theories at  $\beta = 0$ : Massive solution versus conformal scaling. *Phys. Rev.*, D81:016005, 2010. doi: 10.1103/PhysRevD.81.016005.
- [85] Steven Weinberg. The cosmological constant problem. *Rev. Mod. Phys.*, 61: 1–23, Jan. 1989. doi: 10.1103/RevModPhys.61.1.
- [86] Charles W. Misner, Kip S. Thorne, and John A. Wheeler. *Gravitation*. W. H. Freeman, San Francisco, 1973.
- [87] Richard Stanley and Eric W. Weisstein. Catalan Numbers – From MathWorld – A Wolfram Web Resource. URL <http://mathworld.wolfram.com/CatalanNumber.html>.

- [88] James M. Bardeen, B. Carter, and S. W. Hawking. The Four laws of black hole mechanics. *Commun. Math. Phys.*, 31:161–170, 1973.
- [89] Jacob D. Bekenstein. Black holes and entropy. *Phys. Rev.*, D7:2333–2346, 1973. doi: 10.1103/PhysRevD.7.2333.
- [90] G. W. Gibbons and S. W. Hawking. Cosmological Event Horizons, Thermodynamics, and Particle Creation. *Phys. Rev.*, D15:2738–2751, 1977. doi: 10.1103/PhysRevD.15.2738.
- [91] Alan H. Guth. The Inflationary Universe: A Possible Solution to the Horizon and Flatness Problems. *Phys. Rev.*, D23:347–356, 1981.
- [92] Andrei D. Linde. A New Inflationary Universe Scenario: A Possible Solution of the Horizon, Flatness, Homogeneity, Isotropy and Primordial Monopole Problems. *Phys. Lett.*, B108:389–393, 1982.
- [93] Alexei A. Starobinsky. Spectrum of relict gravitational radiation and the early state of the universe. *JETP Lett.*, 30:682–685, 1979. [Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.30,719(1979)].
- [94] James M. Bardeen, Paul J. Steinhardt, and Michael S. Turner. Spontaneous Creation of Almost Scale - Free Density Perturbations in an Inflationary Universe. *Phys. Rev.*, D28:679, 1983.
- [95] Fabio Finelli and Robert Brandenberger. On the generation of a scale invariant spectrum of adiabatic fluctuations in cosmological models with a contracting phase. *Phys. Rev.*, D65:103522, 2002. doi: 10.1103/PhysRevD.65.103522.
- [96] Laura E. Allen and David Wands. Cosmological perturbations through a simple bounce. *Phys. Rev.*, D70:063515, 2004. doi: 10.1103/PhysRevD.70.063515.
- [97] Patrick Peter and Nelson Pinto-Neto. Cosmology without inflation. *Phys. Rev.*, D78:063506, 2008. doi: 10.1103/PhysRevD.78.063506.
- [98] Robert H. Brandenberger, Viatcheslav F. Mukhanov, and A. Sornborger. A Cosmological theory without singularities. *Phys. Rev.*, D48:1629–1642, 1993. doi: 10.1103/PhysRevD.48.1629.
- [99] Viatcheslav F. Mukhanov and Robert H. Brandenberger. A Nonsingular universe. *Phys. Rev. Lett.*, 68:1969–1972, 1992. doi: 10.1103/PhysRevLett.68.1969.

- [100] Tirthabir Biswas, Anupam Mazumdar, and Warren Siegel. Bouncing universes in string-inspired gravity. *JCAP*, 0603:009, 2006. doi: 10.1088/1475-7516/2006/03/009.
- [101] Martin Bojowald. Absence of singularity in loop quantum cosmology. *Phys. Rev. Lett.*, 86:5227–5230, 2001. doi: 10.1103/PhysRevLett.86.5227.
- [102] Felipe Tovar Falciano, Nelson Pinto-Neto, and Ward Struyve. Wheeler-DeWitt quantization and singularities. *Phys. Rev.*, D91(4):043524, 2015. doi: 10.1103/PhysRevD.91.043524.
- [103] N. Pinto-Neto, F. T. Falciano, Roberto Pereira, and E. Sergio Santini. The Wheeler-DeWitt Quantization Can Solve the Singularity Problem. *Phys. Rev.*, D86:063504, 2012. doi: 10.1103/PhysRevD.86.063504.
- [104] Felipe T. Falciano, Nelson Pinto-Neto, and E. Sergio Santini. An Inflationary Non-singular Quantum Cosmological Model. *Phys. Rev.*, D76:083521, 2007. doi: 10.1103/PhysRevD.76.083521.
- [105] N. Pinto-Neto, E. Sergio Santini, and F. T. Falciano. Quantization of Friedmann cosmological models with two fluids: Dust plus radiation. *Phys. Lett.*, A344: 131–143, 2005. doi: 10.1016/j.physleta.2005.06.080.
- [106] Lewis Ryder. *Introduction to general relativity*. 2009. URL <http://www.cambridge.org/9780521845632>.
- [107] Siegfried Gotzes and Allen C. Hirshfeld. A Geometric Formulation of the  $SO(3,2)$  Theory of Gravity. *Annals Phys.*, 203, 1990.
- [108] S. Kobayashi. *Transformation Groups in Differential Geometry*. Classics in Mathematics. U.S. Government Printing Office, 1995. ISBN 9783540586593. URL <https://books.google.com.br/books?id=cqghIkyM4SUC>.
- [109] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*. Number v. 1 in A Wiley Publication in Applied Statistics. Wiley, 1996. ISBN 9780471157335. URL <https://books.google.com.br/books?id=BHp4wPTwaVwC>.
- [110] Rodrigo Ferreira Sobreiro. *Non-perturbative aspects of Yang-Mills theories*. PhD thesis, Rio de Janeiro State U., 2007. URL <https://inspirehep.net/record/751639/files/arXiv:0705.4107.pdf>.



- 
- [111] Nele Vandersickel. *A Study of the Gribov-Zwanziger action: from propagators to glueballs*. PhD thesis, Gent U., 2011. URL <https://inspirehep.net/record/895203/files/arXiv:1104.1315.pdf>.
- [112] Ilya L. Shapiro and Joan Solà. On the possible running of the cosmological “constant”. *Phys. Lett. B*, 682(1):105–113, 2009. doi: 10.1016/j.physletb.2009.10.073. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269309012805>.
- [113] R. F. Sobreiro and S. P. Sorella. Introduction to the Gribov ambiguities in Euclidean Yang-Mills theories. In *13th Jorge Andre Swieca Summer School on Particle and Fields Campos do Jordao, Brazil, January 9-22, 2005*, 2005.
- [114] L. D. Faddeev and V. N. Popov. Feynman Diagrams for the Yang-Mills Field. *Phys. Lett.*, B25, 1967.