



INSTITUTO DE FÍSICA
Universidade Federal Fluminense

Alan Carlos Maioli

QUANTIZAÇÃO DO JOGO CORONEL
BLOTTO

Volta Redonda

2015

Alan Carlos Maioli

**QUANTIZAÇÃO DO JOGO CORONEL
BLOTTO**

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Alexandre Grezzi de Miranda Schmidt

Volta Redonda

2015

M227 Maioli, Alan Carlos.

Quantização do jogo coronel Blotto / Alan Carlos Maioli ; orientador: Alexandre Grezzi de Miranda Schmidt -- Niterói, 2016.

71 p. : il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Fluminense, Instituto de Física, 2016.

Bibliografia: p. 68-71.

1. TEORIA DOS JOGOS. 2. CORONEL BLOTTO (JOGO). I. Schmidt, Alexandre Grezzi de Miranda, Orientador. II. Universidade Federal Fluminense. Instituto de Física, Instituição responsável. III. Título.

CDD 530.12

”We do what we must because we can.”

GLaDOS.

Dedico este trabalho à minha amada esposa que esteve sempre
ao meu lado, e que possui imensa compreensão e carinho.
Dedico-o também à toda a minha família e amigos.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à minha esposa Jéssica Maioli, por me apoiar durante essa jornada, por ter sido uma pessoa paciente, carinhosa e amorosa. Agradeço a toda a minha família, pelo suporte financeiro e emocional. Agradeço a meus pais Aroldo Carlos e Emília por terem me trazido à esse mundo e por terem me educado. Agradeço aos meus sogros José Carlos e Vanusa Cristina pelos momentos de descontração e felicidade, pelas pizzas a noite e os churrascos aos sábados. Agradeço à meus irmãos Augusto e Antônio pelas piadas e às minhas irmãs Liana e Giuliana pela confiança. Agradeço à minha cunhada Natália simplesmente por ser louca. Agradeço à minha vó Dinea por ter me apoiado e me ajudado. Agradeço ao meu avô emprestado Euclides por ser uma fonte de sabedoria.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Alexandre G. M. Schmidt por ter me apoiado durante o meu período sendo professor substituto, pela paciência de me ensinar e de abrir novos caminhos para o conhecimento, por ter sido uma pessoa exemplar, e finalmente por ter sido preocupado e atencioso durante esses dois últimos anos.

Agradeço ao Prof. Dr. Ladário Silva pela ajuda com as aulas de física experimental.

Agradeço ao Prof. Dr. Rogério M. de Almeida, pelos seus ensinamentos durante o suado curso de eletrodinâmica, e pelo seu apoio moral.

Agradeço aos Professores Dr. Carlos E. Fellows, Dr. Marcos Veríssimo, Dr. José O. Huguenin, Dr. Licínio Portugal, pelas piadas e pelos momentos engraçados na copa. Agradeço ao Prof. Dr. Adriano Martins por ter me apresentado o bar do Julião.

Agradeço aos colegas Marcello Passos, Anderson Luiz, Lais Lessa, Matheus

Dalpra, Samuel, e Wagner Balthazar pelo apoio moral, pela amizade, pelos momentos de descontração e pela metáfora da ovelha.

Agradeço à todos os meus alunos, pela cooperação, pelos conflitos, pelos presentes e pelas situações inusitadas.

Agradeço aos técnicos do laboratório de física básica Raiane, Clarissa, Rogério, Franklin e Guilherme pela disposição e apoio durante os meus cursos de física experimental.

E finalmente agradeço ao café, pois sem ele esse trabalho não existiria.

Sumário

1	Introdução	1
2	Fundamentos Teóricos	8
2.1	Formulação Matemática	8
2.1.1	Estratégias puras e mistas	9
2.1.2	<i>Payoff</i>	10
2.1.3	Equilíbrio de Nash	12
2.1.4	Classificação dos jogos	13
2.2	Formulação quântica	14
2.2.1	Base computacional	14
2.2.2	Matriz densidade	15
2.2.3	Características de jogos quânticos	16
3	O dilema do prisioneiro	19
3.1	Forma tradicional	20
3.1.1	O <i>Payoff</i>	20
3.1.2	Equilíbrios de Nash e de <i>Pareto</i>	20
3.2	O dilema do prisioneiro quântico	21
3.2.1	<i>Payoff</i>	24
3.2.2	Equilíbrio de Nash	28

4	Coronel Blotto	30
4.1	Forma clássica	31
4.1.1	Caso trivial	33
4.1.2	O caso não-trivial	34
4.1.3	Equilíbrio de Nash	34
4.1.4	Aplicações	36
4.2	Coronel Blotto quântico	38
4.2.1	Primeiro Modelo	38
4.2.2	Segundo Modelo	46
4.3	Comparação com o jogo clássico	50
4.3.1	Primeiro modelo	51
4.3.2	Segundo modelo	58
5	Conclusões e projetos futuros	61
A	Operador do primeiro modelo	63
B	Operador de emaranhamento	66

Lista de Figuras

- 2.1 Jogo estático. Essa figura foi retirada do artigo de Guo[38] e mostra como um jogo quântico do tipo estático é jogado. Primeiramente é aplicado um operador \hat{U} , depois os dois jogadores aplicam os operadores \hat{U}_1 e \hat{U}_2 referentes as estratégias escolhidas, em terceiro lugar é aplicado um operador inverso \hat{U}^\dagger e finalmente é realizada a medida. 17
- 2.2 Jogo dinâmico. Figura também retirada do artigo de Guo[38] e mostra como um jogo quântico do tipo dinâmico se diferencia do estático. Primeiramente é aplicado um operador \hat{U} , depois os dois jogadores aplicam os operadores \hat{U}_1 e \hat{U}_2 referentes as estratégias escolhidas na forma sequencial, em terceiro lugar é aplicado um operador inverso \hat{U}^\dagger e por ultimo é realizada a medida no estado final. 17
- 3.1 Dilema do prisioneiro. Essa figura[6] representa a montagem de um jogo com dois jogadores. Os operadores \hat{J} e \hat{J}^\dagger são conhecidos por ambos os jogadores e os operadores \hat{U}_a e \hat{U}_b correspondem às estratégias de Alice e Bob respectivamente. . 22

3.2	<i>Payoff</i> de Alice. Gráfico do <i>payoff</i> esperado $\langle \$_a(t_a, t_b) \rangle$ de Alice em função dos parâmetros t_a e t_b que são referentes as escolhas de Alice e Bob respectivamente no espaço de estratégias clássicas.	26
3.3	<i>Payoff</i> de Bob. Gráfico do <i>payoff</i> esperado $\langle \$_b(t_a, t_b) \rangle$ de Bob em função dos parâmetros t_a e t_b que são referentes as escolhas de Alice e Bob respectivamente no espaço de estratégias clássicas.	27
3.4	<i>Payoff</i> esperado. O gráfico representa o <i>payoff</i> esperado de Alice $\langle \$_a(t_a, t_b) \rangle$ (em rosa) e de Bob (em azul) em função dos parâmetros t_a e t_b para o caso com máximo emaranhamento $\gamma = \pi/2$	28
4.1	Exemplo do caso trivial com três territórios. Blotto ao distribuir suas tropas pelos territórios impede a vitória do Inimigo, ou seja, é impossível o Inimigo ganhar.	33
4.2	Exemplo do caso não-trivial com três territórios. Blotto distribui seus 31 soldados pelos territórios e o Inimigo com apenas 22 vence o jogo com uma estratégia mais inteligente, que consiste em ignorar um território para não desperdiçar recursos. O mesmo ocorre em campanhas políticas com recursos finitos.	34
4.3	Vetores da base \mathbb{H}_0	39

4.4	Modelo 1 clássico para o jogo do coronel Blotto. No gráfico acima é considerado um jogo simétrico com 6 soldados para ambos os jogadores. O Inimigo escolhe a estratégia referente ao equilíbrio de Nash e Blotto escolhe estratégias puras. Cada ponto do gráfico está relacionado a uma estratégia pura de Blotto, onde x_2 e x_3 são os números de soldados nos terrenos 2 e 3 respectivamente. No eixo vertical estão os valores do <i>payoff</i> de Blotto. Os pontos em verde claro possuem <i>payoff</i> nulo, aqueles em verde escuro valem $-1/5$ e os que estão em preto são associados ao valor de <i>payoff</i> igual à $-3/5$	52
4.5	Quântico contra Nash clássico. No eixo horizontal dessa figura estão todos os valores de $\phi \in [0, 2\pi]$ quando Blotto utiliza estratégias quânticas e no eixo vertical estão os valores do <i>payoff</i> de Blotto. Os valores correspondentes à curva em azul se referem ao jogo quando o Inimigo aplica seu operador primeiro, enquanto que a curva em amarelo é obtida quando Blotto joga primeiro. Os valores obtidos nesse gráfico resultam de um jogo onde o Inimigo escolhe a estratégia referente ao equilíbrio de Nash clássico, e Blotto utiliza estratégias quânticas, com 2 soldados em cada terreno.	54
4.6	<i>Payoff</i> esperado de Blotto para o jogo com 5 territórios.	56
4.7	<i>Payoff</i> esperado de Blotto para o jogo com 5 territórios no caso trivial.	57

4.8 *Payoff* para o modelo 2 clássico do jogo coronel Blotto. Na figura acima ambos os jogadores possuem 6 soldados. O Inimigo escolhe a estratégia referente ao equilíbrio de Nash e Blotto escolhe estratégias puras. Cada ponto do gráfico está relacionado a uma estratégia pura de Blotto, onde x_2 e x_3 são os números de soldados nos terrenos 2 e 3 respectivamente. No eixo vertical estão os valores do *payoff* de Blotto. Os pontos em verde claro possuem *payoff* igual à zero, já aqueles em verde escuro são associados ao valor $-1/5$ e os que estão em marrom equivalem à $-3/5$ 59

Lista de Tabelas

1.1	Resumo dos jogos	7
2.1	Tabela PQ. Na primeira linha são listadas as possíveis escolhas de Q , na primeira coluna as de Picard, sendo que N representa não girar e F representa girar. Na parte central da tabela foram colocados o vencedor em cada possibilidade. Note que existem quatro possibilidades de vitória pra cada jogador, o que configura um jogo justo.	11
2.2	Tabela <i>payoff</i> PQ. Na primeira linha são listadas as possíveis escolhas de Q , na primeira coluna as de Picard, sendo que N representa não girar e F representa girar. Na parte central da tabela foram colocados o valor do <i>payoff</i> de Picard.	11
3.1	Tabela <i>payoff</i> do dilema do prisioneiro. Essa tabela contém os valores de <i>payoff</i> recebidos por Alice e por Bob devido às jogadas escolhidas. O valor dentro do parantêses representa o <i>payoff</i> de Alice à esquerda e o de Bob à direita. A jogada de Alice foi representada na coluna vertical e a de Bob na horizontal.	20

3.2	Tabela <i>payoff</i> 2. Essa tabela contém os valores de <i>payoff</i> recebidos por Alice e por Bob devido às estratégias escolhidas. O valor dentro do parênteses representa o <i>payoff</i> de Alice à esquerda e o de Bob à direita. A jogada de Alice foi representada na coluna vertical e a de Bob na horizontal. Nessa nova tabela estão incluídos os <i>payoffs</i> referentes à estratégia quântica $\hat{Q} = i\sigma_z$	29
4.1	Estratégias para o caso simétrico: Essa tabela contém o número de soldados distribuídos pelos três terrenos, considerando que o número total de soldados dos dois jogadores são iguais à 30. Note que se qualquer jogador escolher uma estratégia s_i , sempre existirá uma outra estratégia que consegue vencer. . .	35
4.2	Distribuição uniforme: Jogo simétrico com 6 soldados e 3 territórios. A estratégia mista que resulta no equilíbrio de Nash é aquela que possui seus soldados uniformemente distribuídos entre $[0, 4]$, ou seja são as 5 estratégias puras s_i da tabela cada uma com probabilidade $1/5$ de ocorrer. A melhor estratégia que o adversário pode escolher é a mesma estratégia mista. . .	36
4.3	Equilíbrio de Nash clássico com 5 territórios. Jogo simétrico com 10 soldados e 5 territórios. A estratégia mista que resulta no equilíbrio de Nash é aquela que possui seus soldados uniformemente distribuídos entre $[0, 4]$, ou seja são as 5 estratégias puras s_i da tabela cada uma com probabilidade $1/5$ de ocorrer. A melhor estratégia clássica que o adversário pode escolher é a mesma estratégia mista.	55

4.4 Nash em ângulos: Para cada estratégia S_i são associados dois ângulos, que se referem a quantidade de soldados em cada terreno. 58

Resumo

Neste trabalho, foi estudada a teoria quântica de jogos e algumas de suas aplicações. A teoria de jogos possui um papel bastante importante no processo de tomada de decisões, ela serve para modelar situações onde agentes, ou jogadores, se encontram em alguma posição de conflito. O foco do estudo foram os jogos dilema do prisioneiro e coronel Blotto. No jogo dilema do prisioneiro foi apresentado sua forma clássica e todos os seus aspectos relacionados à quantização do mesmo. Para o jogo coronel Blotto foram propostos dois modelos para efetuar a sua quantização, e como será observado, apenas um deles é bom o suficiente para ser considerado um jogo quântico, apesar de ambos os modelos representarem fielmente o jogo clássico.

Abstract

In this work, we studied the quantum game theory and some of its applications. The game theory has a very important role in the decision-making process, it serves to model situations where agents or players, are in any position of conflict. The focus of the study were the games prisoner's dilemma and Colonel Blotto. In the Prisoner's Dilemma was introduced its classic form and all aspects related to its quantization. For the game Colonel Blotto, were proposed two models to make its quantization, and as will be seen, only one of them is good enough to be considered a quantum game, although both models faithfully represent the classical game.

Capítulo 1

Introdução

A teoria de jogos possui um papel bastante importante no processo de tomada de decisões, ela serve para modelar situações onde agentes, ou jogadores, se encontram em alguma posição de conflito. Portanto, é evidente como essa teoria esteve presente ao longo da história da humanidade. Um bom exemplo a se mostrar é o caso conhecido como o problema do contrato de casamento que está presente no Talmude Babilônico, que é um compilado de leis e tradições antigas que serviram de base para as leis civis, criminais e religiosas do povo Judeu durante os primeiros cinco séculos d.c. Tal problema é descrito da seguinte maneira: Um homem que tem três esposas falece, as quais possuem um contrato de casamento que diz que elas devem receber 100, 200 e 300 moedas de prata. O Talmude informa casos aparentemente contraditórios. Caso o homem, ao falecer, possua apenas 100 moedas, elas serão divididas igualmente entre as esposas. Caso o homem possua 300 moedas, a divisão deve ser proporcional, ou seja a primeira recebe 50, a segunda 100 e a outra 150. Mas, se o homem possuir 200 moedas, a divisão se dará da seguinte forma, 50 para a primeira, e 75 para as outras. Essa discrepância

entre as divisões foi finalmente entendida em 1985 [1], onde cada divisão corresponde a um jogo específico. Outro exemplo, que ilustra a presença da teoria de jogos na história da humanidade, é o de Charles Darwin, na primeira edição de seu livro *The Descent of Man, and Selection in Relation to Sex* publicado em 1871. Nele está presente o primeiro argumento (implícito) de teoria de jogos aplicado na biologia evolucionária. Darwin argumenta que a seleção natural irá agir de forma a igualar a razão entre os sexos, ou seja, a proporção de machos e fêmeas obedecem a proporção 1 : 1. Mais a frente na história, em 1928, a teoria de jogos foi reconhecida como uma área única na Matemática após o matemático J. von Neumann publicar seu trabalho [2]. Principalmente, von Neumann investigava jogos de puro conflito, ou seja, jogos de soma zero. Em segundo plano, foram investigados jogos cooperativos, onde era permitida a comunicação entre os jogadores. Ele mostrou que a escolha consciente não é necessária para a teoria de jogos, ou seja, as estratégias podem ser descritas por variáveis que podem ser minimizadas e maximizadas.

Utilizando da ideia de que a escolha consciente não era necessária em conjunto com as estratégias mistas, que constituem de estratégias probabilísticas, J. F. Nash [3] elaborou uma situação chamada de equilíbrio de Nash, que se trata de um ponto de equilíbrio entre as jogadas escolhidas por todos os jogadores. Alguns jogos, como o coronel Blotto [28], apenas possui esse ponto de equilíbrio quando são permitidos aos jogadores utilizarem estratégias probabilísticas, ou seja, o jogador pode escolher várias estratégias diferentes que possuam uma certa probabilidade de ocorrer.

Toda essa interpretação probabilística, contida na teoria de jogos, pode ser reescrita utilizando-se a mecânica quântica, através da superposição de estados ou de uma mistura de matrizes densidade. Então, foi possível unir

a mecânica quântica e a teoria de jogos, duas áreas aparentemente distintas, e assim foi criada a teoria quântica de jogos. Meyer[4] introduziu a idéia de unir conceitos quânticos a certos jogos, explorando a superposição linear de estados quânticos, a interferência e o emaranhamento [5] na estratégia dos jogadores. Já na década de 80 a área de computação quântica surgiu como uma promessa de revolução tanto na Física quanto na área de Computação, e por isso a teoria quântica de jogos é usada no estudo de algoritmos quânticos, e há argumentos de Eisert e colaboradores [6] de que a Natureza possa estar jogando quanticamente em nível molecular. Turner e Chao verificaram que o comportamento de um vírus específico segue o dilema do prisioneiro [7]. Por esta razão jogos quânticos oferecem novas maneiras de cooperar, resolver dilemas e conflitos e alterar situações de equilíbrio — estendendo os limites de aplicação da mecânica quântica tanto em ciência básica quanto aplicada, já que novas técnicas experimentais podem surgir e aquelas já consagradas podem ser refinadas. Desde a quantização do primeiro jogo clássico apresentada por Meyer [4] e Eisert [6] inúmeros outros jogos tiveram suas versões quânticas construídas e analisadas, assim como em menor número, alguns foram realizados experimentalmente: o dilema do prisioneiro [8, 10], e o jogo da minoria [9, 11, 12, 13] e o duelo quântico [14] por exemplo.

Existem várias aplicações e desenvolvimentos em jogos quânticos, tanto do ponto de vista teórico quanto experimental. Toda a metodologia dos jogos quânticos pode ser aplicada para solucionar o famoso dilema do prisioneiro e também a guerra dos sexos [15]. Se por um lado pode-se resolver dilemas, esses jogos também apresentam paradoxos como o de Parrondo [16, 17]. A chave para entender este comportamento é observar que operadores que atuam no espaço de Hilbert podem modelar estratégias clássicas, assim como outras que não possuem análogo clássico, e, uma vez que estes jogos ocorrem

em um mundo quântico efeitos como interferência, superposição de estados e emaranhamento são ingredientes extras que os jogos clássicos não possuem. É justamente o que acontece no problema de Monty-Hall[18, 19], onde um prêmio é colocado atrás de uma de três portas e o jogador escolhe em qual porta ele está. O juiz então abre uma porta onde o prêmio *não está*, e o primeiro jogador escolhe trocar de porta ou manter a sua escolha na porta original. Os operadores na versão quantizada do problema devem dar conta de todas estas possibilidades e muitas vezes o resultado final é inesperado ou até contra-intuitivo. Esses operadores, que estão presentes em situações de conflito, são todos analisados logicamente através da teoria de jogos, eles podem ser simples como flipar uma moeda com dois ou n -lados, e onde um jogador com acesso a estratégias quânticas sempre vence um rival clássico; ou complicados como o confronto entre dois animais agressivos no conhecido jogo *hawk-dove* [20] ou como em um duelo quântico proposto originalmente por Flitney e Abbott [21] e revisto e corrigido criticamente por Schmidt e Paiva [22]. Tais duelos e truelos (confronto entre três jogadores) podem ser usados para modelar a propagação de opiniões [23] no mundo clássico, e quanticamente eles colocam nossa intuição física à prova. Nesse contexto, os leilões reverso e tradicional [24, 25], assim como um jogo de azar quântico [26] e o famoso problema dos bens públicos[27] — neste último a mecânica quântica também oferece resultados melhores do que a metodologia clássica — foram estudados. Estes problemas nos fornecem novas maneiras de pensar a respeito de situações de conflito e são importantes para ampliar nosso conhecimento sobre a mecânica quântica além de nos oferecerem novas ferramentas e ideias sobre a elaboração de algoritmos quânticos.

Boa parte dos estudos relacionados a teoria dos jogos ocorreu durante a guerra fria, e durante aquele momento de possibilidade de guerra iminente

vários jogos relacionados à conflitos foram estudados, como, por exemplo, o duelo. Esse jogo simula um combate entre dois jogadores, ou seja, constitui um confronto direto entre os mesmos. A versão quântica desse jogo está presente em um trabalho publicado [22], por Schmidt e Paiva, onde ambos analisaram o duelo quântico entre duas pessoas, Alice e Bob. O estado inicial do sistema — o produto direto do estado inicial de Alice e Bob — tem um papel fundamental pois os estados vivo e morto são representados por meio de um sistema de dois níveis, e como sabemos, flipar o spin e não flipá-lo são operações reversíveis, ao contrário da transição clássica irreversível de vivo para morto. Assim, no duelo quântico um jogador morto pode atirar, pode ser revivido, e pode inclusive vencer o duelo mesmo partindo do estado morto. Recentemente este jogo foi realizado experimentalmente no Laboratório de Óptica do ICEx, e os resultados teóricos e experimentais estão em excelente concordância [14]. Outra maneira de relacionar combates com teoria de jogos é através do jogo coronel Blotto, onde recursos finitos são alocados em certos locais. Nesse jogo é utilizado o contexto de guerra, ou seja, os recursos são associados ao número de soldados e os locais onde serão alocados tais soldados são chamados de campos de batalha. Apesar de ser utilizado esse contexto de guerra, o jogo também pode ser aplicado em economia e política. Tal aplicação do jogo relacionado a economia é usado para modelar o mercado de aluguéis de casas e leilões fechados, mas também existe a aplicação em política, que serve para modelar eleições em diferentes cenários, como as eleições presidenciais norte-americanas. Porém, existem poucos trabalhos publicados a cerca desse jogo devido a dois motivos: a dificuldade de se estudar e de encontrar situações de equilíbrio, e a falta de similaridade com combates atuais. Apesar dessas dificuldades, a versão tradicional pode ser considerada completamente estudada devido aos trabalhos [28, 29], no

primeiro estão presentes os equilíbrios de Nash para os casos contínuos e no segundo está presente uma generalização do jogo. Nessa dissertação serão propostos dois modelos para a quantização desse importante jogo. Na tabela 1.1 encontram-se os principais jogos clássicos e quânticos, nela estão descritos os pesquisadores relacionados a cada jogo, sendo separados (através das colunas) por sua contribuição nos devidos aspectos, como a versão clássica, a versão quântica e a verificação experimental.

No capítulo 2 vamos introduzir os conceitos matemáticos da teoria clássica de jogos e o formalismo relacionado à mecânica quântica. No capítulo 3 será tratado o dilema do prisioneiro clássico e sua versão quântica utilizando a superposição de estados, emaranhamento e a matriz densidade. No capítulo 4 será descrito o jogo coronel Blotto e algumas de suas principais características e aplicações, depois serão propostos dois modelos utilizando matriz densidade devido a importância das estratégias mistas. Nesse mesmo capítulo será mostrado que ambos os modelos quânticos representam fielmente a versão clássica, mas apenas um deles é bom o suficiente para ser considerado como um jogo quântico. No capítulo 5 serão apresentadas as conclusões e perspectivas futuras.

Jogo	Versão Clássica	Versão Quântica	Verificação Experimental
Dilema do Prisioneiro	Merrill Flood e Melvin Dresher[30], representa um jogo cooperativo.	Eisert <i>et al</i> [6]. O jogador com acesso a estratégias quânticas consegue superar seu adversário clássico.	Foram utilizados RMN[8] (Ressonância Magnética Nuclear) e Métodos ópticos [9, 10, 11, 12, 13].
Jogo da Minoria	Challet[9] e Arthur [31], ambos mostram um jogo cooperativo.	Benjamin <i>et al</i> [32] mostrou que não há equilíbrio de Nash na versão quântica.	Foram verificados usando a técnica RMN [8] e medidas ópticas para o jogo com 4 jogadores[33]
<i>Hawk-Dove</i>	Foi utilizado para descrever a crise cubana de mísseis [30]. Aplicação em economia [34], é usada para analisar crises financeiras.	A.Navaz e A.H.Toor[35] aplicaram a versão quântica para estudar estratégias estáveis evolucionárias.	Não há.
Duelo	Foi proposto por Dresher [36].	Abbott e Flitney [21]. Jogadores podem morrer e reviver antes de o duelo acabar.	Balthazar <i>et al</i> via métodos ópticos [14].
Coronel Blotto	Emile Borel[37], apresenta um jogo de soma zero, jogo não-cooperativo.	Estão presentes, nesta dissertação, dois modelos para quantizar o jogo.	Não há.

Tabela 1.1: Resumo dos jogos

Capítulo 2

Fundamentos Teóricos

A teoria quântica de jogos pode ser considerada como uma generalização da teoria de jogos. Ela contém todos os elementos presentes em teoria de jogos e em adição possui conceitos relacionados à mecânica quântica. Nesse presente capítulo serão introduzidos conceitos importantes relacionados à mecânica quântica e à teoria de jogos.

2.1 Formulação Matemática

A teoria de jogos é um ramo da matemática aplicada que trata da formulação e análise de situações de conflito e nessa seção serão definidos conceitos fundamentais para o entendimento de tal área de trabalho. Em toda a dissertação serão considerados jogos finitos, ou seja, jogos com um número finito n de jogadores, com um conjunto finito de estratégias puras e com um *payoff*¹ associado às estratégias. Essa área é importante, pois através dela é possível modelar problemas que envolvem situações de conflitos e cooperações, sujeitos a uma análise lógica. Mais especificamente, situações onde há:

¹Na subseção 2.1.2 estará presente a definição do *payoff*.

- Pelo menos dois jogadores, que representam indivíduos, companhias, ou espécies biológicas;
- Um conjunto de regras que devem ser seguidas por todos os jogadores;
- Cada jogador possui um certo número de estratégias, que são ações a serem tomadas;
- A utilização destas estratégias, por parte dos jogadores, determina o resultado final do jogo;
- Associado ao resultado final de cada possível estratégia há uma função *payoff*.

Ao longo dessa seção serão definidos matematicamente todos esses conceitos.

2.1.1 Estratégias puras e mistas

As estratégias puras são associadas às escolhas tomadas pelo jogador i . Então um conjunto finito dessas estratégias pode ser escrito:

$$\pi = \{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n'}\} \quad (2.1)$$

onde n' é o número de estratégias puras e π_j se refere à estratégia pura j . Utilizando esse conceito Nash [3] descreveu a estratégia mista: “A estratégia mista de um jogador i será a coleção de números não-negativos que tem sua soma unitária e cada um terá uma correspondência com uma estratégia pura”², ou seja, uma estratégia mista é representada por $s = \sum_j c_j \pi_j$ onde

²Frase do artigo [3] e traduzida livremente. ” *A mixed strategy of a player i will be a collection of non-negative numbers which have unit sum and are in one to one correspondence with pure strategy*”.

$\sum_j c_j = 1$ e cada $c_j \geq 0$ e as estratégias puras são π_j . Note que esses números não-negativos c_j de soma unitária são semelhantes à probabilidade.

2.1.2 *Payoff*

O *payoff* é definido como o quanto cada jogador ganha ao realizar certa jogada, ele é uma função que representa a motivação de um jogador, quanto maior o valor mais atrativa se torna aquela determinada estratégia. Normalmente pode ser interpretado como um ganho em dinheiro, tempo, ou algum tipo de recurso. Esta função depende da estratégia escolhida, se for escolhida estratégia mista o *payoff* também dependerá dos pesos c_j . Para escrevermos essa função, primeiro serão mostradas algumas notações. Supondo agora um conjunto de estratégias mistas $\varsigma = \{s_1, s_2, \dots, s_{n'}\}$, vamos definir que o jogador i escolherá a estratégia $t_j \in \varsigma$ e será escrita como $(\varsigma, t_j) = \{s_1, s_2, \dots, s_{j-1}, t_j, s_{j+1}, \dots, s_n\}$. Agora escreve-se o *payoff* do jogador i que escolheu a estratégia $t_j \in \varsigma$ como: $p_i(\varsigma, t_j)$. Nos capítulos 3 e 4, o *payoff* será representado pelo símbolo cifrão $\$$. Assim sendo, é introduzido o conceito de *payoff* esperado e ele é dado pela seguinte fórmula:

$$\$ = \sum_{j=1}^n p_j \$_j \quad (2.2)$$

Onde $\$_j$ representa o *payoff* de uma estratégia pura e o peso p_j representa a probabilidade de que esse *payoff* ocorra.

Para fixar esse conceito e visualizar a diferença entre o *payoff* das estratégias puras e mistas, será mostrado o seguinte exemplo.

Jogo PQ : Um jogo bastante simples e ilustrativo é o chamado jogo *PQ* [4], onde dois jogadores, *Picard* e *Q*, tem à sua disposição operações de girar uma moeda. As regras — que são conhecidas pelos dois — são

explicadas pelo juiz: a moeda possui duas faces, cara e coroa. Picard escolhe coroa e Q escolhe cara. O juiz coloca secretamente a moeda com uma das faces para cima, e Q escolhe girar ou não a moeda e comunica ao juiz sua estratégia. Em seguida Picard faz o mesmo, e por fim Q escolhe novamente se gira ou se deixa a moeda como está. Finalmente o juiz observa a moeda e declara um dos jogadores como vencedor. Uma análise do problema nos mostra que existem oito possibilidades de acordo com a tabela 2.1.

Q →	NN	NF	FN	FF
P : N	Q	P	P	Q
P : F	P	Q	Q	P

Tabela 2.1: Tabela PQ. Na primeira linha são listadas as possíveis escolhas de Q , na primeira coluna as de Picard, sendo que N representa não girar e F representa girar. Na parte central da tabela foram colocados o vencedor em cada possibilidade. Note que existem quatro possibilidades de vitória pra cada jogador, o que configura um jogo justo.

Assim podemos associar o valor $+1$ para o *Payoff* de Picard caso ele obtenha a vitória, e -1 se ele for derrotado. Assim a tabela 2.1 é reescrita em termo dos *payoffs* e é mostrada na tabela 2.2. Esses valores correspondem ao *payoff* de estratégias puras.

Q →	NN	NF	FN	FF
P : N	-1	+1	+1	-1
P : F	+1	-1	-1	+1

Tabela 2.2: Tabela *payoff* PQ. Na primeira linha são listadas as possíveis escolhas de Q , na primeira coluna as de Picard, sendo que N representa não girar e F representa girar. Na parte central da tabela foram colocados o valor do *payoff* de Picard.

Imaginemos agora a seguinte situação: O jogador Q irá escolher não

virar a moeda duas vezes NN , e Picard escolherá uma estratégia mista, como, por exemplo, escolher N (não virar a moeda) com $1/3$ de chance e $2/3$ de probabilidade de virar a moeda (F), então o *payoff* de Picard relacionado a essa estratégia mista é obtida através da equação (2.2).

$$\$ = \frac{1}{3}(-1) + \frac{2}{3}(+1) = \frac{1}{3} \quad (2.3)$$

Esse resultado possui uma interpretação importante, pois ele corresponde à média ponderada dos *payoffs* obtidos quando o jogo é repetido N^3 vezes. Nesse exemplo, em $1/3$ das vezes em que o jogo ocorre Picard escolhe não virar a moeda e em $2/3$ ele escolhe virar a moeda.

2.1.3 Equilíbrio de Nash

O equilíbrio de Nash é um conceito importante em teoria de jogos, pois ele representa um ponto de equilíbrio entre as estratégias de todos os jogadores. Ele, normalmente, não pode ser obtido através de pura racionalidade dos jogadores, pois cada jogador se baseia na crença de que o(s) outro(s) jogador(es) talvez escolha(m) a estratégia mais atrativa, ou seja a que lhe resultará em maior *payoff*. Formalmente o equilíbrio de Nash é definido: Após cada jogador escolher sua estratégia, é atingido o equilíbrio de Nash quando nenhum jogador tem a ganhar mudando sua estratégia unilateralmente. Então o ponto de equilíbrio $(p_1(\varsigma), p_2(\varsigma), \dots, p_n(\varsigma))$ é representado pelos *payoffs* $p_i(\varsigma)$ de todos os n jogadores:

$$p_i(\varsigma) = \text{Max}_{j \in \{1, 2, \dots, n\}} [p_i(\varsigma, t_j)] \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (2.4)$$

³Considere N um número grande

onde, n' é o número de estratégias, n é o número de jogadores e a maximização é efetuada sabendo que a estratégia dos outros jogadores é mantida fixa. Exemplos de como são obtidos esses pontos de equilíbrio serão mostrados nos capítulos 3 e 4.

Pareto optimal

Um outro ponto (que nem sempre é um equilíbrio de Nash) importante é o *Pareto optimal*. Ele é um conjunto de estratégias de todos os jogadores, que se algum jogador decidir alterar sua estratégia não será possível aumentar o *payoff* de qualquer jogador sem diminuir o *payoff* de algum outro.

2.1.4 Classificação dos jogos

Os jogos em geral podem ser classificados de acordo com seu *payoff*, como é descrito abaixo:

- **Jogo de soma-zero:** Um jogo de soma zero é aquele em que a soma dos *payoffs* de todos os jogadores é nula, como, por exemplo, o jogo PQ.
- **Jogo de soma constante:** É aquele em que a soma dos *payoffs* dos jogadores sempre será um valor constante, o qual é independente da escolha da estratégia de qualquer um dos jogadores.
- **Jogo de soma não constante:** Em tal jogo, a soma dos *payoffs* dos jogadores possui valor que depende da estratégia escolhida por cada jogador, como por exemplo o dilema do prisioneiro descrito no capítulo 3.

Um jogo também pode ser classificado de acordo com sua simetria. Se um jogo não se altera devido à troca de jogadores, então ele é simétrico, caso contrário é assimétrico. Jogos como o dilema do prisioneiro e jogo da velha são simétricos, entretanto jogos como *Monty Hall* e *Penny flip*[38] são assimétricos. O jogo coronel Blotto pode atender as duas características, como será visto no capítulo 4.

2.2 Formulação quântica

2.2.1 Base computacional

Nos atuais computadores a informação é armazenada em bits, cada bit de memória corresponde à uma unidade de informação que pode representar 0 ou 1, a palavra bit é a simplificação do termo em inglês *binary digit* que significa dígito binário. Portanto, com um conjunto de bits pode-se representar qualquer número utilizando a base binária, e com isso efetuar operações matemáticas. Os bits clássicos são representados por 0 e 1.

Utilizando a mecânica quântica pode-se deixar um sistema em uma superposição de estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$, onde os dois estados existem simultaneamente, esse estado é chamado de qbit (bit quântico). Pode-se escrever um qbit como sendo:

$$|\psi_2\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \quad (2.5)$$

onde $a, b \in \mathbb{C}$, de modo que $|a|^2 + |b|^2 = 1$ e $|0\rangle, |1\rangle$ são

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

Outro modo de armazenar informação é utilizando outro tipo de unidade,

como o *trit* que é uma unidade de informação que pode ter três valores possíveis 0, 1 e 2. E a partir dessa ideia pode-se também usar a versão quântica, o *qutrit*.

$$|\psi_3\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle + c|2\rangle \quad (2.7)$$

onde $a, b, c \in \mathbb{C}$, de modo que $|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 = 1$ e $|0\rangle$, $|1\rangle$ e $|2\rangle$ são:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

Nos próximos capítulos utilizaremos essas duas bases para definir a quantização de alguns jogos.

2.2.2 Matriz densidade

A mecânica quântica é uma teoria fundamental na Física. Ela explica o comportamento de partículas em escalas muito pequenas que vão da ordem do comprimento de uma molécula até o de partículas subatômicas. Para caracterizar o estado de uma partícula, ou a mistura de estados, será apresentado o operador densidade e algumas de suas propriedades. Um sistema quântico que pode ser encontrado em um estado $|\psi_i\rangle$ com probabilidade p_i , possui operador densidade na forma

$$\rho = \sum_{i=1}^N p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| \quad (2.9)$$

onde $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ e os estados $|\psi_i\rangle$ não precisam ser ortogonais. O operador densidade é positivo semi-definido e de traço igual à 1. A evolução do operador densidade é dada pela equação abaixo:

$$\rho_2 = \hat{U}\rho\hat{U}^\dagger \quad (2.10)$$

onde \hat{U} é um operador unitário arbitrário. Introduzimos o operador densidade com o objetivo de definirmos os jogos com o formalismo utilizado em mecânica quântica. Outra propriedade importante é a população, que é representada pelos elementos da diagonal principal da matriz densidade. Utilizando como exemplo uma matriz densidade 4×4 escrita em uma base arbitrária $\{|\phi_i\rangle\}$:

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & \rho_{44} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

pode-se dizer que os elementos ρ_{nn} são a população do estado ρ , eles representam a probabilidade média de encontrar o sistema no estado $|\phi_n\rangle$. Estes elementos possuem essa denominação pois ao realizar N medidas encontraremos o sistema no estado $|\phi_n\rangle$ em $N\rho_{nn}$ vezes, sendo N um número grande.

2.2.3 Características de jogos quânticos

De acordo com o artigo de Guo *et al*[38], os jogos quânticos podem ser classificados em dois tipos: o estático e o dinâmico. Em um jogo estático, primeiramente é aplicado no estado inicial um operador \hat{U} , em segundo lugar os dois jogadores aplicam os operadores referentes as suas estratégias de forma simultânea e antes da medida no estado final é aplicado um operador \hat{U}^\dagger como visto na Figura 2.1.

Contrariamente ao jogo estático temos o jogo dinâmico, onde cada jogador

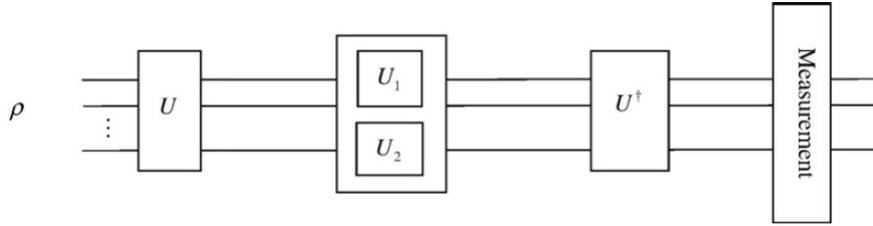


Figura 2.1: Jogo estático. Essa figura foi retirada do artigo de Guo[38] e mostra como um jogo quântico do tipo estático é jogado. Primeiramente é aplicado um operador \hat{U} , depois os dois jogadores aplicam os operadores \hat{U}_1 e \hat{U}_2 referentes as estratégias escolhidas, em terceiro lugar é aplicado um operador inverso \hat{U}^\dagger e finalmente é realizada a medida.

aplica o operador referente a sua estratégia de forma sequencial. O jogo dinâmico se difere no fato de existir uma ordem em que cada jogador escolha sua estratégia, entretanto a estrutura se mantém a mesma, como visto na figura 2.2. O estado final do jogo depende fortemente da ordem que os jogadores aplicam suas estratégias.

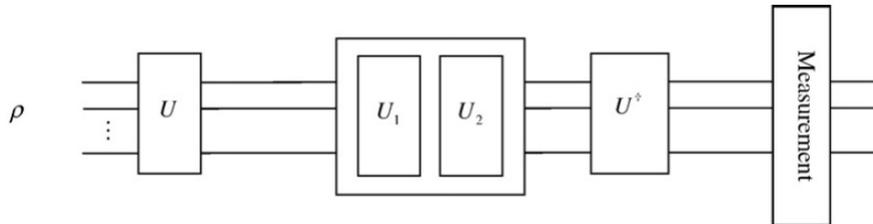


Figura 2.2: Jogo dinâmico. Figura também retirada do artigo de Guo[38] e mostra como um jogo quântico do tipo dinâmico se diferencia do estático. Primeiramente é aplicado um operador \hat{U} , depois os dois jogadores aplicam os operadores \hat{U}_1 e \hat{U}_2 referentes as estratégias escolhidas na forma sequencial, em terceiro lugar é aplicado um operador inverso \hat{U}^\dagger e por ultimo é realizada a medida no estado final.

É necessário dizer que o operador \hat{U} é comumente representado por \hat{J} e é chamado de operador de emaranhamento, pois ele tem o papel de emaranhar

o estado inicial e vincular as estratégias (\hat{U}_1 e \hat{U}_2) escolhidas pelos jogadores.

Um outro conceito relevante é o de jogo justo, o qual significa que nenhum jogador possui vantagens sobre o adversário. Um jogo desse tipo pode ser obtido quando todos os jogadores tem total conhecimento do operador \hat{U} , do estado inicial e possuem acesso ao mesmo espaço de estratégias. No entanto, existem características adicionais, que variam de jogo para jogo e que tornam o jogo não justo. Como, por exemplo, o jogo *Monty Hall*⁴[39], onde, classicamente, o apresentador possui vantagem sobre o participante. Neste jogo estão presentes dois jogadores, o apresentador e o participante. O apresentador mostra 3 portas ao participante e diz que atrás de uma delas contém um prêmio. Logo, o participante deve escolher uma das tais portas. Após escolhida a porta, o apresentador abre uma porta que não contém o prêmio e pergunta se o participante deseja continuar com a porta inicial ou se deseja trocar de porta. Após feita a última escolha, o apresentador abre a porta escolhida e verifica se o participante ganhou o prêmio. Classicamente, o participante consegue dobrar sua chance de vencer caso escolha trocar de porta, o que é completamente contra-intuitivo. Esta possibilidade de trocar de porta é a característica que torna o jogo não justo. Na versão quântica desse jogo [18] é possível tornar o jogo justo permitindo ao participante ter acesso a estratégias quânticas e restringindo o apresentador às clássicas.

⁴Baseado no homônimo *game show* de televisão

Capítulo 3

O dilema do prisioneiro

O dilema do prisioneiro é um problema clássico na teoria dos jogos. Inicialmente foi proposto por Merrill Flood e Melvin Dresher em 1950 e foi adaptado e divulgado por A.W.Tucker [30]. O problema é enunciado da seguinte maneira: Dois criminosos A e B são presos pela polícia, que tem insuficientes provas para condená-los. A polícia oferece a eles um acordo que acarretará em diferentes resultados dependendo de suas duas possíveis escolhas. Cada preso pode contar à polícia dizendo que seu parceiro cometeu o crime (essa escolha é conhecida como acusar), ou poderá ficar em silêncio (cooperar). Os prisioneiros estão incomunicáveis e não tem intenção de salvar o outro. Os resultados de suas escolhas estão descritos abaixo.

- Se A e B se acusarem mutuamente os dois adquirem pena de 3 anos de cadeia.
- Se A e B permanecerem em silêncio (cooperarem) os dois terão pena de 1 ano apenas.
- Se A acusar e B cooperar, o preso A é liberado e o preso B é condenado à 5 anos e vice-versa.

3.1 Forma tradicional

Nessa seção apresentaremos alguns conceitos importantes e suas respectivas aplicações na versão tradicional do problema. Para manter similaridade com a literatura, os jogadores A e B serão chamados de Alice e Bob.

3.1.1 O *Payoff*

O valor do ganho (*payoff*) no contexto do dilema do prisioneiro é apresentado na tabela 3.1. É importante salientar que os valores não são iguais às penas, um exemplo é o caso em que Alice escolhe cooperar com seu cúmplice, ou seja, permanecer em silêncio, e Bob decide acusar Alice, conseqüentemente Alice recebe *payoff* nulo e 5 anos de prisão e Bob adquire *payoff* 5 e é liberado.

(Alice, Bob)	Cooperar	Acusar
Cooperar	(3,3)	(0,5)
Acusar	(5,0)	(1,1)

Tabela 3.1: Tabela *payoff* do dilema do prisioneiro. Essa tabela contém os valores de *payoff* recebidos por Alice e por Bob devido às jogadas escolhidas. O valor dentro do parantêses representa o *payoff* de Alice à esquerda e o de Bob à direita. A jogada de Alice foi representada na coluna vertical e a de Bob na horizontal.

3.1.2 Equilíbrios de Nash e de *Pareto*

No contexto do dilema do prisioneiro na forma tradicional, podemos observar que o equilíbrio de Nash e o *Pareto optimal* não coincidem, ou seja, cada um é relacionado com diferentes estratégias. O equilíbrio de Nash é atingido quando os dois jogadores escolhem acusar o outro que resulta no *payoff* (1,1), pois caso um jogador mude sua estratégia unilateralmente, seu *payoff* diminui, ou seja, passa a ser nulo. Já o equilíbrio de Pareto é obtido quando

os dois jogadores escolhem permanecer em silêncio (Cooperar) e resulta em *payoff* (3, 3), pois se Alice alterar sua estratégia ela diminui o *payoff* de Bob, o mesmo vale para Bob.

3.2 O dilema do prisioneiro quântico

A quantização do dilema prisioneiro foi inicialmente investigada por Eisert, Wilkens e Lewenstein[6]. Foram definidos os estados Acusar $|D\rangle$ e Cooperar $|C\rangle$ como dois vetores de uma base no espaço de Hilbert de um sistema de dois níveis. Aqui utilizaremos a base computacional

$$|C\rangle = |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |D\rangle = |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Para cada estado final do jogo, é associado um vetor da base do produto tensorial entre os espaços de Alice e Bob, $\{|CC\rangle, |CD\rangle, |DC\rangle, |DD\rangle\}$ onde a primeira letra se refere à Alice e a segunda a Bob. O estado inicial do jogo é preparado através de um operador \hat{J} conhecido pelos dois jogadores:

$$|\psi_0\rangle = \hat{J}|CC\rangle \quad (3.2)$$

Em um jogo justo, o operador \hat{J} deve ser simétrico sobre a troca de jogadores, o mesmo faz o papel de emaranhar, o que no jogo é representado pelo fato de Alice não conhecer a jogada de Bob e vice-versa. Sabendo o estado inicial, cada jogador escolhe suas estratégias, que são associadas aos operadores unitários U_a e U_b . Cada jogador aplica o operador no seu respectivo

qubit, portanto o estado do jogo se torna:

$$(\hat{U}_a \otimes \hat{U}_b)\hat{J}|CC\rangle \quad (3.3)$$

O espaço das estratégias S , que deve conter \hat{U}_a e \hat{U}_b , é representado como um subgrupo de matrizes 2×2 unitárias, e será descrito na subseção 3.2.1. O aparelho de medição consiste de uma porta reversível de dois bits seguido por um par de detectores do tipo *Stern-Gerlach*, como pode ser observado na figura 3.1. O estado final $|\psi_f\rangle$ que será medido pelos detectores é:

$$|\psi_f\rangle = \hat{J}^\dagger(\hat{U}_a \otimes \hat{U}_b)\hat{J}|\psi_0\rangle \quad (3.4)$$

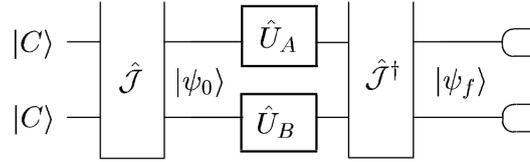


Figura 3.1: Dilema do prisioneiro. Essa figura[6] representa a montagem de um jogo com dois jogadores. Os operadores \hat{J} e \hat{J}^\dagger são conhecidos por ambos os jogadores e os operadores \hat{U}_a e \hat{U}_b correspondem às estratégias de Alice e Bob respectivamente.

Para que a versão quântica do jogo seja uma representação fiel da versão clássica é necessário que o operador \hat{J} comute simultaneamente com os operadores $(\hat{C} \otimes \hat{C})$, $(\hat{C} \otimes \hat{D})$ e $(\hat{D} \otimes \hat{C})$, onde os operadores \hat{C} e \hat{D} representam as estratégias cooperar e acusar, respectivamente.

$$\hat{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Obedecendo as condições de comutação e a condição de que \hat{J} deve ser unitário, vemos que ele pode ser escrito da forma:

$$\hat{J}(\gamma) = \exp\{i\gamma(\hat{D} \otimes \hat{D})/2\} = \begin{pmatrix} \cos(\gamma/2) & 0 & 0 & i \sin(\gamma/2) \\ 0 & \cos(\gamma/2) & -i \sin(\gamma/2) & 0 \\ 0 & -i \sin(\gamma/2) & \cos(\gamma/2) & 0 \\ i \sin(\gamma/2) & 0 & 0 & \cos(\gamma/2) \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

onde γ é um parâmetro real e $\gamma \in [0, \pi/2]$ e pode ser interpretado como uma medida de emaranhamento do jogo, pois caso escolhermos o valor $\gamma = 0$, o operador \hat{J} se torna identidade fazendo com que o jogo não esteja emaranhado.

Pode-se definir o dilema do prisioneiro quântico utilizando matrizes densidades. Como observado na subseção 2.2.2 podemos associar uma evolução através da aplicação de operadores na forma

$$\rho_{final} = \hat{U} \rho_i \hat{U}^\dagger \quad (3.8)$$

onde $\rho_i = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|$ é a matriz densidade referente ao estado inicial, o operador de evolução é associado com $\hat{U} = \hat{J}^\dagger(\hat{U}_a \otimes \hat{U}_b)\hat{J}$ e o ρ_{final} é a matriz densidade associada ao estado final que deverá ser observado.

3.2.1 *Payoff*

A mecânica quântica é uma teoria intrinsecamente probabilística, portanto o *payoff*, para jogos quânticos, foi definido de maneira semelhante à observação de um estado:

$$\langle \$_a \rangle = rP_{CC} + sP_{CD} + tP_{DC} + pP_{DD} \quad (3.9)$$

onde $\langle \$_a \rangle$ representa o *payoff* esperado, $P_{XY} = |\langle XY | \psi_f \rangle|^2$ é a probabilidade conjunta quando os canais X e Y do detector clicam, e as constantes (r, p, t, s) representam os valores da tabela 3.1 que respectivamente são $(3, 1, 5, 0)$ e são conhecidos usualmente por (*Reward, Punishment, Temptation, Sucker's payoff*). Note que o *payoff* esperado $\langle \$_a \rangle$ possui o índice a , pois ele se refere ao *payoff* de Alice, para obtermos o de Bob é suficiente fazer a troca $s \longleftrightarrow t$. O *payoff* também pode ser obtido utilizando a matriz densidade do estado final. Como a matriz densidade é escrita utilizando a base $\{|CC\rangle, |CD\rangle, |DC\rangle, |DD\rangle\}$ as probabilidades P_{XY} serão as populações $\rho_{(XY)(XY)}$ da mesma.

Estratégias

O *payoff* dos dois jogadores dependerá do operador \hat{J} e das estratégias \hat{U}_a e \hat{U}_b . Como foi descrito anteriormente, é suficiente definir um subespaço S de matrizes 2×2 da forma:

$$S = \{U(\theta, \phi) \mid \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi]\} \quad (3.10)$$

onde $U(\theta, \phi)$ é a matriz:

$$U(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} e^{i\phi} \cos(\theta/2) & \sin(\theta/2) \\ -\sin(\theta/2) & e^{-i\phi} \cos(\theta/2) \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Para representar a forma clássica do dilema do prisioneiro é necessário impor $\phi = 0$ e restringir o espaço S para $S_0 = \{U(\theta, 0) \mid \theta \in [0, \pi]\}$, pois dessa forma a probabilidade conjunta de se obter os resultados X e Y é simplesmente o produto das probabilidades individuais de que cada jogador obtenha o resultado desejado $P_{XY} = p_a^{(X)} p_b^{(Y)}$. Cada probabilidade individual p pode ser interpretada tradicionalmente como a probabilidade de jogarmos uma moeda viciada, de modo que $p^C = \cos^2(\theta/2)$ e $p^D = 1 - p^C$. Esse subespaço S_0 é denominado espaço das estratégias clássicas. Para representar graficamente o *payoff* com maior facilidade será utilizado a seguinte parametrização:

$$U(\theta, 0) = U(t\pi, 0) \quad (3.12)$$

Agora o espaço das estratégias clássicas é reescrito da forma $S_0 = \{U(t\pi, 0) \mid t \in [0, 1]\}$. Com essa parametrização é possível associar as estratégias cooperar e acusar com os valores de $t = 0$ e $t = 1$ respectivamente. Pode-se observar o valor do *payoff* de Alice e de Bob nos gráficos 3.2 em rosa e 3.3 em azul respectivamente.

É importante dizer que quando $\gamma = 0$ o jogo não apresenta nenhuma diferença entre o modo quântico e o tradicional, ou seja, $\gamma = 0$ representa o limite clássico.

Obviamente o espaço S contém S_0 e possui mais estratégias, enquanto que no caso clássico há apenas duas. Tais como, por exemplo, a estratégia $\hat{Q} = i\sigma_z$, onde σ_z é uma das matrizes de Pauli. Esse espaço S contém estratégias idênticas mesmo com diferentes valores para θ e ϕ , duas dessas estratégias são $\hat{U}(0, 0) = \hat{U}(4\pi, 0)$, portanto é suficiente utilizar apenas um setor para representar os novos graus de liberdade. Uma maneira de representar boa parte das estratégias existentes é utilizando a seguinte parametrização:

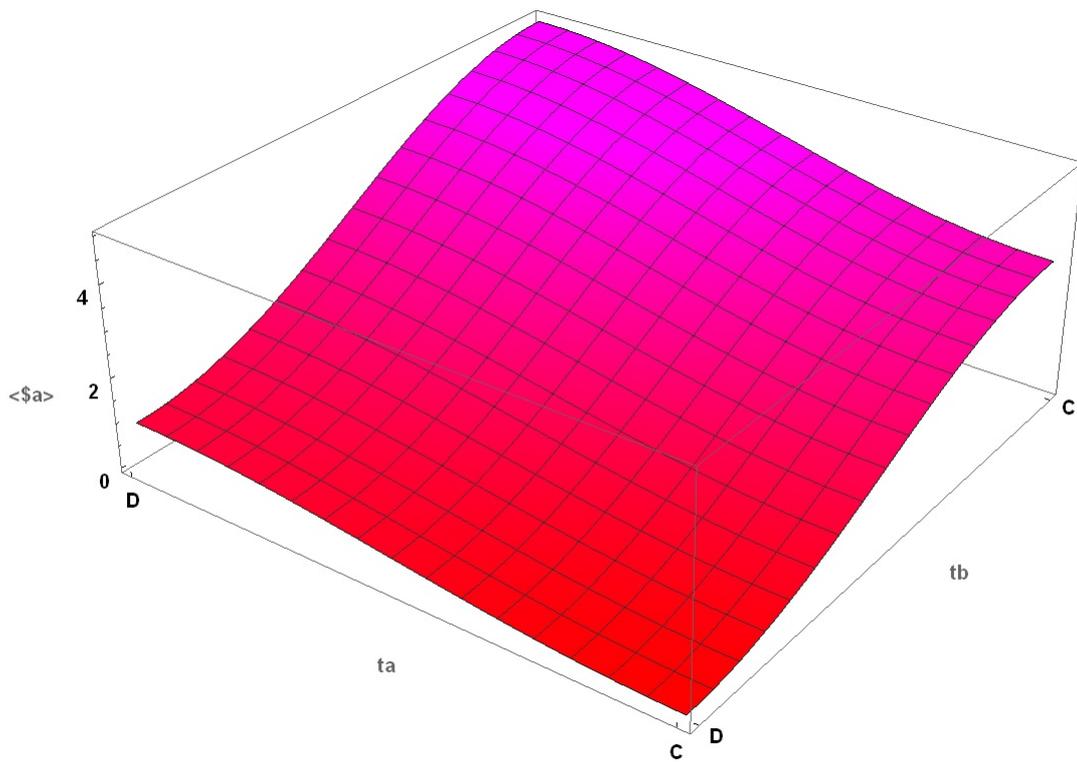


Figura 3.2: *Payoff* de Alice. Gráfico do *payoff* esperado $\langle \$a(t_a, t_b) \rangle$ de Alice em função dos parâmetros t_a e t_b que são referentes as escolhas de Alice e Bob respectivamente no espaço de estratégias clássicas.

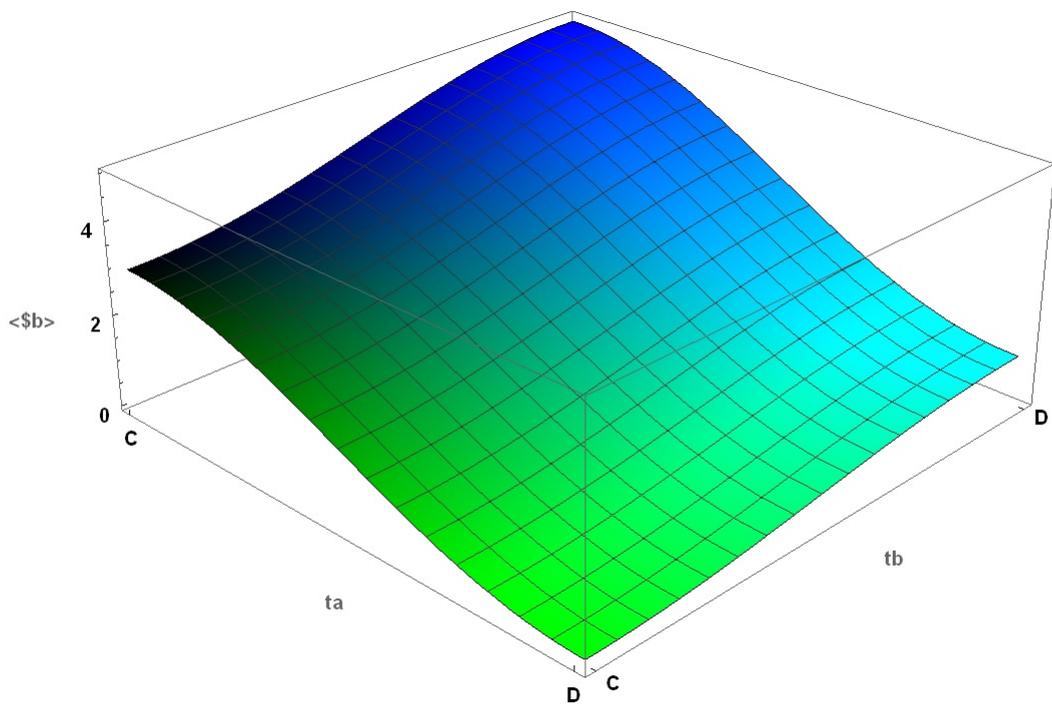


Figura 3.3: *Payoff* de Bob. Gráfico do *payoff* esperado $\langle \$b(t_a, t_b) \rangle$ de Bob em função dos parâmetros t_a e t_b que são referentes as escolhas de Alice e Bob respectivamente no espaço de estratégias clássicas.

$$\hat{U}(t) = \begin{cases} \hat{U}(0, -t\pi/2) & \text{para } -1 \leq t \leq 0 \\ \hat{U}(t\pi, 0) & \text{para } 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (3.13)$$

Usando essa nova parametrização e máximo grau de emaranhamento $\gamma = \pi/2$ pode-se observar através dos gráficos presentes na figura 3.4 os valores dos *payoffs* esperados de Alice $\langle \$_a(t_a, t_b) \rangle$ (em rosa) e Bob $\langle \$_b(t_a, t_b) \rangle$ (em azul), respectivamente.

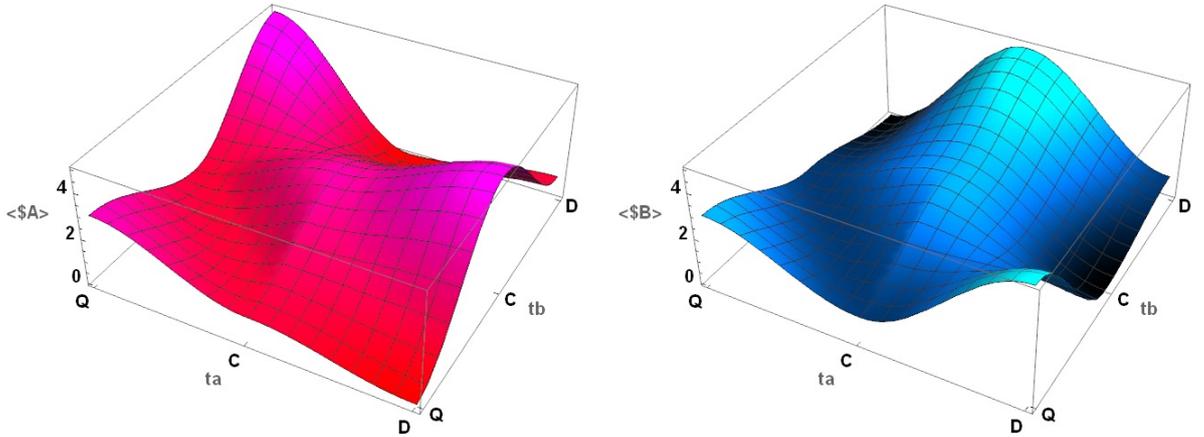


Figura 3.4: *Payoff* esperado. O gráfico representa o *payoff* esperado de Alice $\langle \$_a(t_a, t_b) \rangle$ (em rosa) e de Bob (em azul) em função dos parâmetros t_a e t_b para o caso com máximo emaranhamento $\gamma = \pi/2$.

3.2.2 Equilíbrio de Nash

Analisando o caso onde o jogo é justo, ou seja, o caso onde os dois jogadores tem acesso ao mesmo espaço de estratégias, pode-se inferir que o equilíbrio de Nash ocorre quando cada jogador escolhe a estratégia $\hat{Q} = i\sigma_z$ [6], que não possui análogo clássico. Esse é um ponto de equilíbrio devido ao fato de que cada jogador terá seu *payoff* diminuído caso altere sua estratégia

unilateralmente. Um detalhe importante a se observar é que esse mesmo ponto também é ótimo segundo Pareto, ou seja, não é possível aumentar o *payoff* de um jogador sem diminuir o do outro caso algum jogador mude sua estratégia unilateralmente. Isso pode ser facilmente observado na tabela 3.2.

(Alice, Bob)	Cooperar	Acusar	\hat{Q}
Cooperar	(3,3)	(0,5)	(1,1)
Acusar	(5,0)	(1,1)	(0,5)
\hat{Q}	(1,1)	(5,0)	(3,3)

Tabela 3.2: Tabela *payoff* 2. Essa tabela contém os valores de *payoff* recebidos por Alice e por Bob devido às estratégias escolhidas. O valor dentro do parênteses representa o *payoff* de Alice à esquerda e o de Bob à direita. A jogada de Alice foi representada na coluna vertical e a de Bob na horizontal. Nessa nova tabela estão incluídos os *payoffs* referentes à estratégia quântica $\hat{Q} = i\sigma_z$.

Capítulo 4

Coronel Blotto

“T’ien Chi frequentemente apostava de modo excessivo, com os príncipes, em corridas de cavalos encadeadas. Sun Pin observou que a velocidade de seus cavalos não diferia muito da velocidade dos cavalos dos príncipes. Os cavalos tinham três classes: superior, intermediária e inferior. Assim, Sun Pin disse a T’ien Chi: Meu senhor deveria apostar novamente, porque posso fazê-lo ganhar. T’ien Chi confiou nele e jogou mil moedas de ouro com o rei e os príncipes. Quando se aproximou o momento da disputa, Sun Pin disse: Ponha seu time inferior de cavalos com o melhor deles; seu melhor time contra o intermediário deles; e seu time intermediário contra o inferior deles. Quando os três times competiram, T’ien Chi perdeu uma corrida, mas venceu duas, de modo que, ao final, ganhou as mil moedas de ouro do rei. T’ien Chi, então, apresentou Sun Pin ao Rei Wei. O Rei Wei o indagou sobre questões militares e o nomeou estrategista.”¹ Esse texto ilustra claramente como uma distribuição inteligente de recurso é um fator fundamental para a vitória. Isto é a essência do jogo coronel Blotto.

No presente capítulo será apresentado a versão clássica do jogo coronel

¹Trecho retirado de [40].

Blotto, algumas das suas características e aplicações, mas também serão propostos dois modelos para a versão quântica do mesmo. Após a exposição dos modelos, serão comparados com resultados obtidos através da parte clássica.

4.1 Forma clássica

Coronel Blotto² é um jogo de soma zero que possui dois jogadores A e B (coronel Blotto e Inimigo, respectivamente) e consiste em alocar seus soldados (forças ou recursos) em n territórios (ou campos de batalha). Os jogadores não possuem informação sobre como seu adversário distribuirá suas tropas. O jogador que ganha o território é aquele que possui o maior número de soldados, e finalmente quem vence o jogo é aquele que possui maior número de territórios. O coronel Blotto sempre tem um número de soldados maior ou igual ao do Inimigo. Matematicamente, descreve-se a estratégia de cada jogador utilizando vetores com n componentes, que é exatamente o número de territórios.

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4.1)$$

onde cada x_j indica o número de soldados alocados no território j . O conjunto que contém todas as alocações possíveis de soldados é:

$$\mathbb{S}_i = \{\vec{x} \in \mathbb{N}^n \mid \sum_{j=1}^n x_j \leq X_i\} \quad (4.2)$$

onde o índice i se refere ao jogador Blotto ou Inimigo, X_i é o número total de soldados disponíveis para o jogador i e \mathbb{N}^n é o conjunto de vetores com dimensão n e componentes naturais. Os soldados são considerados unidades

²Também conhecido como *Divide a Dollar*

indivisíveis, portanto o jogo é considerado discreto e o vetor $\vec{x} \in \mathbb{N}^n$.

Após cada jogador escolher sua estratégia, ou seja, cada jogador escolher seu vetor é calculado o *payoff* de Blotto da seguinte forma:

$$\langle \$_B \rangle = \sum_{j=1}^n Sgn(x_j - y_j) \quad (4.3)$$

e para o Inimigo

$$\langle \$_I \rangle = \sum_{j=1}^n Sgn(y_j - x_j) \quad (4.4)$$

Onde x_j e y_j são respectivamente os números de soldados de Blotto e do Inimigo no terreno j , e Sgn é a função sinal.

$$Sgn(z) = \begin{cases} +1 & \text{se } z > 0 \\ 0 & \text{se } z = 0 \\ -1 & \text{se } z < 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

Note que os *payoffs* obedecem a condição de um jogo de soma zero $\langle \$_B \rangle + \langle \$_I \rangle = 0$. É importante destacar que existem variações das regras e definições aqui expostas, por exemplo, é possível transformar esse jogo de soma zero em um jogo de soma constante ou até mesmo em um jogo de soma não constante. Para atingir tais mudanças é suficiente alterar a maneira como o *payoff* é calculado.

Inicialmente o jogo foi proposto e resolvido por Borel [37] com apenas três terrenos $n = 3$. Gross *et al* [41] apresentaram o equilíbrio de Nash usando geometria para os casos especiais $n \geq 3$ simétrico. O significado da simetria está na subseção 2.1.4 e implica em igualdade no número total de soldados dos dois jogadores. Roberson[28] mostrou que no jogo contínuo existem outros pontos de equilíbrio ao utilizar estratégias mistas que obedecem funções

de distribuição específicas. O jogo possui características interessantes que dependem do número de territórios n , da razão entre o número de soldados de Blotto e do Inimigo $\frac{X_B}{X_I}$ e da estratégia escolhida por cada jogador. Para elucidar a afirmação anterior serão expostos aqui alguns exemplos.

4.1.1 Caso trivial

O caso trivial possui essa nomenclatura devido ao fato de existir uma maneira simples de Blotto dividir sua tropa e sempre vencer o jogo independentemente da estratégia utilizada pelo Inimigo. Esse caso ocorre quando $\frac{X_I}{X_B} \leq \frac{1}{n}$. Para ficar mais claro tomaremos $n = 3$, $X_B = 31$ e $X_I = 10$. A maneira que resulta em vitória garantida para Blotto é simplesmente dividir igualmente seus soldados pelos territórios de acordo com a figura 4.1. O caso trivial não possui efeitos interessantes à serem estudados.

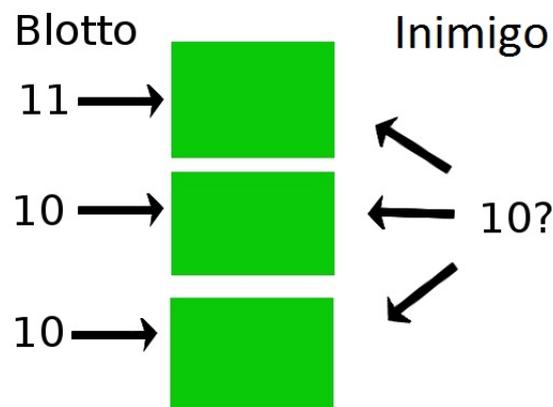


Figura 4.1: Exemplo do caso trivial com três territórios. Blotto ao distribuir suas tropas pelos territórios impede a vitória do Inimigo, ou seja, é impossível o Inimigo ganhar.

4.1.2 O caso não-trivial

Abrange todo o intervalo $\frac{1}{n} < \frac{X_I}{X_B} \leq 1$. Para esse caso é possível que o Inimigo ganhe o jogo usando diferentes estratégias, como, por exemplo, na figura 4.2, ignorar alguns territórios e concentrar seus recursos em outros. Isso significa que tanto o jogador com mais recurso quanto aquele com menos precisam tomar decisões matematicamente corretas para aumentar sua chance de vencer.

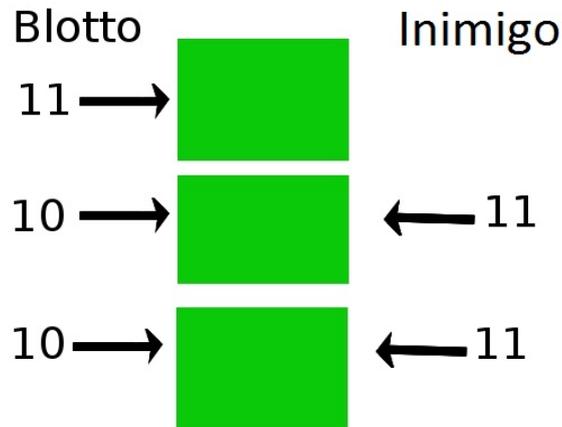


Figura 4.2: Exemplo do caso não-trivial com três territórios. Blotto distribuiu seus 31 soldados pelos territórios e o Inimigo com apenas 22 venceu o jogo com uma estratégia mais inteligente, que consiste em ignorar um território para não desperdiçar recursos. O mesmo ocorre em campanhas políticas com recursos finitos.

4.1.3 Equilíbrio de Nash

É conhecido o fato de não existir equilíbrio de Nash quando os jogadores utilizam apenas estratégias puras. Isso ocorre pois sempre existe uma estratégia melhor que a do adversário, mas obviamente não estamos considerando aqui o caso trivial. Uma boa maneira de visualizar esse fato é considerar o se-

guinte exemplo:

O jogo possui três territórios $n = 3$ e ambos os jogadores possuem o mesmo número total de soldados. Através da tabela 4.1 pode-se observar que se um jogador escolher a estratégia s_1 ele poderá ser vencido pela estratégia s_2 , mas se escolher a estratégia s_2 poderá ser vencido por s_3 , e ao escolher s_3 ele perderá para s_1 . Esse exemplo ilustra a ideia de que o coronel Blotto é um caso mais sofisticado do jogo pedra-papel-tesoura.

Estratégias	terreno 1	terreno 2	terreno 3
s_1	10	10	10
s_2	15	15	0
s_3	17	7	6

Tabela 4.1: Estratégias para o caso simétrico: Essa tabela contém o número de soldados distribuídos pelos três terrenos, considerando que o número total de soldados dos dois jogadores são iguais à 30. Note que se qualquer jogador escolher uma estratégia s_i , sempre existirá uma outra estratégia que consegue vencer.

Para que exista o equilíbrio de Nash é necessário permitir que os jogadores possuam acesso às estratégias mistas, como poder ser visualizado no artigo de Golman *et al*[29]. A estratégia mista que atinge o equilíbrio é aquela que possui os soldados distribuídos uniformemente entre $[0, \frac{2}{n}X_B]$ em cada um de todos os n territórios, como por exemplo o caso da tabela 4.2. Nessa tabela é considerado um jogo simétrico com 6 soldados e $n = 3$ territórios, e estão presentes as 5 estratégias puras, que ao atribuir probabilidades iguais de ocorrer a cada uma delas resulta na estratégia mista referente ao equilíbrio de Nash.

Estratégias	terreno 1	terreno 2	terreno 3
s_1	0	4	2
s_2	1	1	4
s_3	2	3	1
s_4	3	0	3
s_5	4	2	0

Tabela 4.2: Distribuição uniforme: Jogo simétrico com 6 soldados e 3 territórios. A estratégia mista que resulta no equilíbrio de Nash é aquela que possui seus soldados uniformemente distribuídos entre $[0, 4]$, ou seja são as 5 estratégias puras s_i da tabela cada uma com probabilidade $1/5$ de ocorrer. A melhor estratégia que o adversário pode escolher é a mesma estratégia mista.

4.1.4 Aplicações

Utilizando diferentes regras são observadas aplicações do modelo tradicional do coronel Blotto em diferentes áreas como serão expostas a seguir.

Política

Myerson em seu artigo[42] aplica o jogo para modelar eleições em diferentes sistemas eleitorais. O caso mais simples é a eleição com dois candidatos que estão competindo para algum cargo, como por exemplo no segundo turno das eleições para um cargo do poder executivo. Nessa aplicação cada candidato faz promessas que são condizentes com o orçamento disponível ao ser eleito. Assim, por exemplo, supondo que existam 1 milhão de eleitores e o orçamento disponível para o vencedor seja de 1 milhão de reais, cada candidato pode fazer promessas que no máximo sejam consumidos um valor médio de $R\$1,00$ por eleitor. Algumas regras adicionais são:

- Cada eleitor vota em apenas um candidato, e apenas naquele que oferecer maior gasto para seu interesse;
- O candidato com maior número de votos vence;

- O candidato que assumir o cargo irá alocar os recursos de forma consistente com a promessa de campanha;
- As campanhas dos dois candidatos são feitas de maneira independente.

Neste contexto cada eleitor representa um campo de batalha, e o recurso a ser alocado é a quantidade de dinheiro que será gasto para atender o interesse daquele eleitor. É importante salientar que para uma dada campanha (estratégia) existirá uma outra que irá vencê-la. Por exemplo, um candidato igualitário A pode prometer gastar o recurso de forma uniforme, ou seja, uma média de $R\$1,00$ por pessoa, e perder para um candidato B que optar por favorecer 80% da população com um gasto de $R\$1,25$ e ignorando o restante. No entanto, essa estratégia também pode ser vencida por outra ao prometer investir $R\$1,50$ em metade da população e $R\$0,50$ na outra metade, e assim por diante sempre existirá uma estratégia que vence a outra. A partir dessa ideia chega-se a conclusão de que não existe equilíbrio de Nash quando os candidatos usam apenas estratégias puras, e com isso permite-se que os mesmos utilizem estratégias mistas. Com essa nova característica o autor encontra o equilíbrio de Nash.

Economia

Uma aplicação interessante do jogo é aquela introduzida por Szentes *et al*[43] em um artigo sobre economia. Nesse cenário duas pessoas participam de um leilão fechado do tipo primeiro-preço tendo os objetos, a serem leiloados, classificados como *chopsticks*³. Em um leilão fechado cada participante escreve sua oferta em uma carta(ou envelope) fechada que é entregue para o leiloeiro, assim nenhum dos participantes sabe a oferta do adversário. Aquele que der

³Palitos utilizados para saborear comida chinesa ou japonesa

o maior lance leva o produto pelo preço de seu lance, portanto é classificado como leilão de primeiro-preço. Em tal artigo os autores consideram um leilão de três objetos, que deverão ter suas ofertas lançadas simultaneamente dentro do mesmo envelope. E tais objetos são caracterizados como *chopsticks* pelo fato de que o objeto não possui valor caso o jogador adquira apenas um, ou seja, o jogador só recebe *payoff* quando ele consegue adquirir dois ou três objetos. Nessa situação, pode-se interpretar cada objeto como sendo um território e o lance como sendo a quantidade de soldados alocados. Também pode-se dizer que o jogo é simétrico, pois os dois participantes possuem o mesmo orçamento.

4.2 Coronel Blotto quântico

Nessa seção serão exibidos dois modelos, a fim de generalizar o jogo clássico. O procedimento adotado para os dois modelos obedecerá a seguinte ordem: mostrar o estado inicial, evidenciar os operadores que representarão as estratégias de cada jogador, encontrar o estado final e calcular o *payoff* através da matriz densidade pura.

4.2.1 Primeiro Modelo

O primeiro modelo proposto obedecerá a estrutura de um jogo dinâmico, como visto na subseção 2.2.3.

O vetor, que representará o sistema, estará contido em um espaço de Hilbert \mathbb{H} que consiste em um produto direto de dois subespaços \mathbb{H}_0 e \mathbb{H}_T , os quais são relacionados ao número de soldados e aos territórios, respectivamente. O subespaço \mathbb{H}_0 é o que possui dois vetores na base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Um vetor nesse subespaço representa a relação entre os números de soldados

dos dois jogadores. Por exemplo: o vetor $|1\rangle$ representa um território onde Blotto colocou todos seus soldados e o Inimigo não colocou, já o vetor $|0\rangle$ representa um território onde o Inimigo colocou todos seus soldados e Blotto nenhum e, finalmente, um vetor que está em uma superposição de estados da forma $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ é entendido como possuindo uma igualdade entre o número de soldados dos dois jogadores. Para ilustrar melhor o que esse vetor realmente representa é utilizada a figura 4.3, que apresenta no eixo vertical, em verde, que Blotto possui soldados a mais que o Inimigo, e no eixo horizontal o contrário.

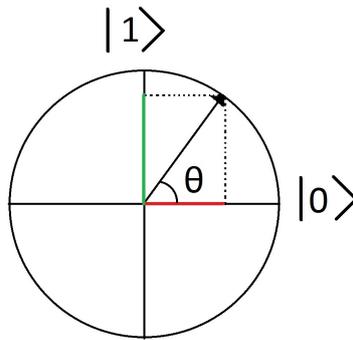


Figura 4.3: Vetores da base \mathbb{H}_0

Na figura 4.3 pode-se visualizar um vetor arbitrário que está contido na base \mathbb{H}_0 . O vetor representa uma relação entre o número de soldados de Blotto e Inimigo, que pode ser observada através do ângulo θ . Tal ângulo θ está limitado entre $[0, \pi/2]$, quando ele é nulo o vetor se torna $|0\rangle$, o qual significa que o Inimigo colocou todos os seus soldados e Blotto nenhum, já se o ângulo possuir valor $\theta = \pi/2$, ele representará o fato de que Blotto colocou todos seus soldados e o Inimigo nenhum. Caso o ângulo θ seja igual a $\pi/4$, isso

indica que os dois colocaram o mesmo número de soldados. Pode-se observar nessa figura que no eixo vertical, em verde, a quantidade de soldados que Blotto possui a mais que o Inimigo, e no eixo horizontal, em vermelho, temos a quantidade de soldados que o Inimigo possui a menos que Blotto.

O outro espaço de Hilbert \mathbb{H}_T , está relacionado com os terrenos, e o número de vetores que formam uma base do mesmo é igual ao número de territórios. A base de terrenos será denotada por $\{|T_j\rangle\}$ com $j = 1, 2, \dots, n$, onde n é o número de terrenos.

Assim pode-se definir o estado inicial

$$|\psi_i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n |T_j\rangle \quad (4.6)$$

este estado inicial significa que tanto Blotto quanto Inimigo possuem o mesmo número de soldados em todos os territórios.

Explorando o ângulo de rotação

Para que um jogador coloque os seus soldados ele deve aplicar um operador de rotação \hat{R} no vetor relacionado ao número de soldados, de modo que:

$$\hat{R}(\lambda) = \begin{pmatrix} \cos(\lambda) & -\sin(\lambda) \\ \sin(\lambda) & \cos(\lambda) \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

ou seja, para Blotto colocar soldados, ele terá que girar o vetor inicial $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ no sentido anti-horário e isso fará com que o vetor se aproxime de $|1\rangle$, entretanto o Inimigo terá que girar o vetor no sentido horário fazendo com que o vetor se aproxime de $|0\rangle$. O ângulo λ receberá daqui para frente uma nova notação e será escrito como λ_j^X onde o sub-índice j corresponde a um terreno específico $|T_j\rangle$ e o super-índice está relacionado ao jogador, então

$X = B$ ou $X = I$. O ângulo de rotação usado por Blotto é

$$\lambda_j^B = \frac{\pi}{4} \frac{x_j}{X_B} \quad (4.8)$$

e para o Inimigo

$$\lambda_j^I = -\frac{\pi}{4} \frac{y_j}{X_B} \quad (4.9)$$

onde x_j e y_j são os números de soldados escolhidos para o terreno j de Blotto e Inimigo, respectivamente. Portanto, Blotto irá girar o vetor $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ de uma fração x_j/X_B de $\pi/4$. Caso Blotto decida alocar no terreno j todos seus soldados, ele girará o vetor em um ângulo $\pi/4$ e o vetor final é $|1\rangle$. O mesmo vale para o Inimigo, a diferença é que ele gira o vetor $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ na direção contrária, note também que o ângulo máximo que o Inimigo consegue girar o vetor é

$$\lambda_j^I = -\frac{\pi}{4} \frac{X_I}{X_B} \quad (4.10)$$

e se o jogo for simétrico isso se resume a $-\pi/4$.

Estratégias

É necessário definir os operadores que representam estratégias. Seja \hat{U} o operador

$$\hat{U}_B = \sum_{j=1}^n R(\lambda_j^B) \otimes \Pi_j \quad (4.11)$$

onde Π_j é o projetor $|T_j\rangle\langle T_j|$. O operador do Inimigo é semelhante: $\hat{U}_I = \sum_{j=1}^n R(\lambda_j^I) \otimes \Pi_j$. Os operadores de ambos os jogadores são unitários e a prova de sua unitariedade é demonstrada no apêndice A.

Note que nesse modelo os dois jogadores atuam com os operadores nos dois subespaços \mathbb{H}_s e \mathbb{H}_T . Ou seja, o jogo é dinâmico, como já foi dito anteriormente. Outra propriedade interessante desse modelo é o fato de que

os operadores do Inimigo e Blotto comutam, então temos um jogo dinâmico onde a ordem das estratégias aplicadas não alteram o resultado. Note que o operador \hat{U} de Blotto ou Inimigo faz o papel de uma matriz de emaranhamento, pois ele emaranha os dois sistemas com diferentes estados, como vemos na equação abaixo.

$$\begin{aligned}\hat{U}_B|\psi_i\rangle &= \left(\sum_{j=1}^n R(\lambda_j^B) \otimes \Pi_j\right) \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{j=1}^n |T_j\rangle\right)\right] \quad (4.12) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2n}} \sum_{j=1}^n [R(\lambda_j^B)(|0\rangle + |1\rangle)] \otimes |T_j\rangle\end{aligned}$$

Com o objetivo de clarificar essa ideia será apresentado um estado final de um jogo com 3 terrenos ($n = 3$) e cada jogador possuindo 6 soldados no total. Nesse exemplo Blotto alocará 3 soldados nos terrenos 1 e 2 e o Inimigo colocará 5 de seus soldados no território 2 e apenas 1 soldado no terreno 3. Para simplificar a notação, será definido $|\psi_0\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$. Primeiramente, Blotto aplica sua estratégia.

$$\begin{aligned}\hat{U}_B|\psi_i\rangle &= \left(\sum_{j=1}^n R\left(\frac{\pi}{4} \frac{x_j}{X_B}\right) \otimes \Pi_j\right) [|\psi_0\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sum_{j=1}^3 |T_j\rangle\right)] \quad (4.13) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{j=1}^n [R\left(\frac{\pi}{4} \frac{x_j}{X_B}\right) |\psi_0\rangle] \otimes |T_j\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[R\left(\frac{3\pi}{64}\right) |\psi_0\rangle \otimes |T_1\rangle + R\left(\frac{3\pi}{64}\right) |\psi_0\rangle \otimes |T_2\rangle + |\psi_0\rangle \otimes |T_3\rangle \right]\end{aligned}$$

Em seguida, o Inimigo aplica sua estratégia

$$\begin{aligned}
\hat{U}_I \hat{U}_B |\psi_i\rangle &= \hat{U}_I (\hat{U}_B |\psi_i\rangle) & (4.14) \\
&= \hat{U}_I \frac{1}{\sqrt{3}} \left[R\left(\frac{3\pi}{6\ 4}\right) |\psi_0\rangle \otimes |T_1\rangle + R\left(\frac{3\pi}{6\ 4}\right) |\psi_0\rangle \otimes |T_2\rangle + |\psi_0\rangle \otimes |T_3\rangle \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[R\left(\frac{3\pi}{6\ 4}\right) |\psi_0\rangle \otimes |T_1\rangle + R\left(-\frac{2\pi}{6\ 4}\right) |\psi_0\rangle \otimes |T_2\rangle + R\left(-\frac{1\pi}{6\ 4}\right) |\psi_0\rangle \otimes |T_3\rangle \right]
\end{aligned}$$

Esse estado final resulta em vitória para o Inimigo, pois nos terrenos T_2 e T_3 os ângulos que serão responsáveis pela rotação do vetor $|\psi_0\rangle$ são negativos. Note que na equação (4.14) acima diferentes estados do subespaço \mathbb{H}_0 estão emaranhados com os vetores da base do subespaço de terrenos \mathbb{H}_T . Esses operadores \hat{U}_B e \hat{U}_I representam fielmente o jogo clássico, como será demonstrado na seção 4.3. Para obter-se a versão quântica do jogo é necessário criar estratégias quânticas e vincular tais estratégias a operadores. Tal operador quântico é uma extensão do clássico, que obedece a mesma forma do operador \hat{U} .

$$\hat{U} = \sum_{j=1}^n \hat{Q}(\lambda_j, \phi) \otimes \Pi_j \quad (4.15)$$

Onde o operador $\hat{Q}(\lambda_j, \phi)$ é descrito na matriz abaixo:

$$\hat{Q}(\lambda_j, \phi) = \begin{pmatrix} \cos(\lambda_j)e^{i\phi} & -\sin(\lambda_j) \\ \sin(\lambda_j) & \cos(\lambda_j)e^{-i\phi} \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Onde o ângulo λ_j continua se referindo ao número de jogadores e a variável ϕ não possui interpretação ainda, devido a falta de analogia com o jogo clássico.

Operador de emaranhamento

Em um número n arbitrário de terrenos, o operador de emaranhamento \hat{J} deve comutar com todas as estratégias clássicas, afim de manter a completa descrição do problema clássico.

$$[\hat{J}, \hat{U}_X] = 0 \quad (4.17)$$

onde \hat{U}_X é o operador \hat{U} referente às estratégias clássicas do jogador X . Obviamente, o operador \hat{J} , referente ao emaranhamento do sistema, depende da dimensão de \hat{U}_X , ou seja, depende do número de territórios. Aqui será descrito o operador \hat{J} para o caso geral com um número arbitrário n de terrenos.

$$\hat{J} = e^{i\gamma\hat{A}/2} \quad (4.18)$$

onde o operador \hat{A} é definido como o produto direto de dois operadores:

$$\hat{A} = \hat{D} \otimes \hat{E} \quad (4.19)$$

A matriz que representa o operador \hat{D} é a mesma encontrada na equação (3.6) e a matriz que representa \hat{E} possui dimensão n e elementos somente na diagonal principal, desde que pelo menos um dos elementos possua sinal diferente dos demais.

$$\hat{E} = \begin{pmatrix} \pm i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \pm i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \pm i \end{pmatrix}_{n \times n} \quad (4.20)$$

Então, o operador \hat{J} é escrito da forma

$$\hat{J} = \cos(\gamma/2)\hat{\mathbb{1}}_{2n} + i \sin(\gamma/2)\hat{D} \otimes \hat{E} \quad (4.21)$$

O parâmetro γ é um número real que indica o quanto o sistema está emaranhado.

Definindo o *payoff*

Blotto e o Inimigo escolhem suas estratégias logo após aplicada a matriz de emaranhamento e então calcula-se o *payoff* de cada um através do estado final.

$$|\psi_f\rangle = \hat{J}^\dagger \hat{U}_B \hat{U}_I \hat{J} |\psi_i\rangle \quad (4.22)$$

Os operadores \hat{J} e \hat{J}^\dagger indicam que Blotto e o Inimigo não conhecem a estratégia do rival. É definido o *payoff* utilizando a função sinal de maneira semelhante ao caso clássico. Portanto, quanto maior for o módulo quadrado da projeção do estado final no vetor $|1\rangle \otimes |T_j\rangle$, maior será o número de soldados de Blotto com relação ao Inimigo. A partir dessa ideia pode-se comparar o módulo quadrado da projeção do estado $|\psi_0\rangle \otimes |T_j\rangle$ com aquele que possui mesmo número de soldados de Blotto e Inimigo, no estado $|1\rangle \otimes |T_j\rangle$, que equivale $1/2n$. Portanto, o *payoff* de Blotto é definido como:

$$\langle \$_B \rangle = \sum_{j=1}^n Sgn \left(\|\langle 1| \otimes \langle T_j | \psi_f \rangle\|^2 - \frac{1}{2n} \right) \quad (4.23)$$

E de maneira análoga, o *payoff* do Inimigo:

$$\langle \$_I \rangle = \sum_{j=1}^n Sgn \left(-\|\langle 1| \otimes \langle T_j | \psi_f \rangle\|^2 + \frac{1}{2n} \right) \quad (4.24)$$

Aplicando essa definição do *payoff* esperado de cada jogador no exemplo contido na equação (4.14), obtemos os valores $\langle \$_B \rangle = -1$ para Blotto e $\langle \$_I \rangle = 1$ para o Inimigo.

Matriz densidade

Uma maneira importante de formular o jogo é usando matriz densidade, pois dessa maneira pode-se construir estratégias mistas. Tal matriz será representada na base $\{|i\rangle \otimes |T_j\rangle\}$ com $i = 0, 1$ e $j = 1, \dots, n$.

$$\rho = \begin{pmatrix} \langle 0, T_1 | \psi_f \rangle \langle \psi_f | 0, T_1 \rangle & \langle 0, T_1 | \psi_f \rangle \langle \psi_f | 1, T_1 \rangle & \dots & \langle 0, T_1 | \psi_f \rangle \langle \psi_f | 1, T_n \rangle \\ \langle 1, T_1 | \psi_f \rangle \langle \psi_f | 0, T_1 \rangle & \langle 1, T_1 | \psi_f \rangle \langle \psi_f | 1, T_1 \rangle & \dots & \langle 1, T_1 | \psi_f \rangle \langle \psi_f | 1, T_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle 1, T_n | \psi_f \rangle \langle \psi_f | 0, T_1 \rangle & \langle 1, T_n | \psi_f \rangle \langle \psi_f | 1, T_1 \rangle & \dots & \langle 1, T_n | \psi_f \rangle \langle \psi_f | 1, T_n \rangle \end{pmatrix}$$

Note que o elemento $[\rho]_{11}$ da matriz densidade representa a probabilidade de encontrarmos o estado $|0, T_0\rangle$ ao medir o estado $|\psi_f\rangle$. Consequentemente é possível reescrever o *payoff* utilizando os elementos da matriz densidade.

$$\langle \$_B \rangle = \sum_{j=1}^n \text{Sgn} \left(\rho_{2j,2j} - \frac{1}{2n} \right) \quad (4.25)$$

e o do Inimigo é obtido efetuando $\langle \$_I \rangle = -\langle \$_B \rangle$. Na seção 4.3 será efetuado um exemplo com o objetivo de comparar o modelo com a versão clássica.

4.2.2 Segundo Modelo

Neste segundo modelo cada jogador terá acesso a apenas um espaço de Hilbert, ou seja, os estados de Blotto estão contidos em \mathbb{H}_B e os do Inimigo em \mathbb{H}_I . Os espaços possuem o mesmo número de vetores na base e representam

como os soldados estão distribuídos através dos campos de batalha. A base de um dos espaços é $\{|T_j\rangle\}$, onde $j = 1, 2, \dots, n$.

O estado inicial é:

$$|\psi_i\rangle = |T_1\rangle \otimes |T_1\rangle \equiv |T_1, T_1\rangle \quad (4.26)$$

onde $|\psi_i\rangle \in \mathbb{H}$ e $\mathbb{H} = \mathbb{H}_B \otimes \mathbb{H}_I$. Esse estado pode ser interpretado como se todos os soldados de ambos os jogadores estivessem presente no primeiro território. A estratégia consiste em movimentar essas tropas para outro território, e isso é feito quando cada jogador aplica no estado inicial um operador \hat{U} que leva o estado $|T_1\rangle$ em algum estado desejável que representa como todos os soldados estão distribuídos. Por exemplo, se Blotto aplicar o operador identidade no estado inicial ele termina com o estado final $|T_1\rangle$, ou seja, todos os seus soldados estarão no terreno 1. Esse modelo de jogo é estático, ou seja, os dois jogadores aplicam suas jogadas simultaneamente em espaços diferentes.

Considerando n dimensões, pode-se levar o estado inicial em uma superposição de estados $|T_j\rangle$, usando operadores de rotação. Por exemplo, para $n = 2$ o operador que leva o estado inicial para uma superposição de $|T_1\rangle$ e $|T_2\rangle$ é:

$$\hat{U}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

Para $n = 3$ o operador \hat{U} é a sucessão de operadores de rotação.

$$\hat{U}(\theta, \phi) = \hat{R}_z(\theta)\hat{R}_y(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\phi) & 0 & -\sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

ou seja,

$$\hat{U}(\theta, \phi) = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\phi) & -\sin(\theta) & -\cos(\theta)\sin(\phi) \\ \sin(\theta)\cos(\phi) & \cos(\theta) & -\sin(\theta)\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

Observe que o operador $\hat{U}(\frac{\pi}{2}, 0)$ leva o estado $|T_1\rangle$ em $|T_2\rangle$, e o operador $\hat{U}(0, \frac{\pi}{2})$ leva o estado inicial em $|T_3\rangle$.

Já em um número arbitrário n de terrenos o operador \hat{U} é a sucessão de $n - 1$ operadores de rotação.

$$\hat{U} = \hat{R}_{x_{n-1}}\hat{R}_{x_{n-2}}\dots\hat{R}_{x_2}\hat{R}_{x_1} \quad (4.30)$$

Esse operador é suficiente para representar o modelo tradicional. Portanto, qualquer outro operador unitário pode ser considerado como um possível representante de uma estratégia quântica.

Emaranhamento

É importante obter o operador de emaranhamento, pois ele é responsável por conectar as estratégias dos dois jogadores. Aqui existe uma dificuldade de encontrar o operador ao analisar o caso geral, ou seja, o jogo com n arbitrário. Pois, ao ser efetuada a análise para o caso $n = 3$, foi verificado que não existe um operador que comute simultaneamente com todas as estratégias clássicas,

o procedimento está presente no apêndice B. Nesse presente modelo, apenas é conhecido o operador para o caso especial $n = 2$, que é o mesmo utilizado no dilema do prisioneiro.

Estado final

O estado final é aquele em que será feita a medida para podermos efetuar o cálculo do *payoff*. Tal estado é dado pela equação

$$|\psi_f\rangle = \hat{J}^\dagger(\hat{U}_B \otimes \hat{U}_I)\hat{J}|\psi_i\rangle \quad (4.31)$$

e através dessa equação, é definido o *payoff* de Blotto:

$$\langle \$_B \rangle = \sum_{j=1}^n \text{Sgn}(X_B P_j^B - X_I P_j^I) \quad (4.32)$$

onde X_k é o número total de soldados do jogador k e P_j^k fisicamente significa a probabilidade de encontrar o subsistema do jogador k no estado $|T_j\rangle$ e no contexto do jogo ele significa a porcentagem de soldados que está presente no território j . Matematicamente, define-se P_j^k de Blotto e do Inimigo de maneiras diferentes, de acordo com as equações abaixo.

$$P_j^B = \sum_{i=1}^n \|\langle T_j, T_i | \psi_f \rangle\|^2 \quad (4.33)$$

e

$$P_j^I = \sum_{i=1}^n \|\langle T_i, T_j | \psi_f \rangle\|^2 \quad (4.34)$$

O *payoff* do Inimigo é $\$_I = -\$_B$. Caso seja de interesse considerar um jogo discreto, os produtos $X_B P_j^B$ e $X_I P_j^I$ devem ser números inteiros, pois equivalem ao número de soldados no terreno j de Blotto e Inimigo, respectivamente.

Matriz densidade

Assim sendo, a matriz densidade ρ é escrita na base $\{|T_i, T_j\rangle\}$ que equivale à $\{|T_i\rangle\} \otimes \{|T_j\rangle\}$ com $i, j = 1, 2, \dots, n$ e de acordo com a notação da equação 4.26.

$$\begin{pmatrix} \langle T_1, T_1 | \psi_f \rangle \langle \psi_f | T_1, T_1 \rangle & \langle T_1, T_1 | \psi_f \rangle \langle \psi_f | T_2, T_1 \rangle & \dots & \langle T_1, T_1 | \psi_f \rangle \langle \psi_f | T_n, T_n \rangle \\ \langle T_1, T_2 | \psi_f \rangle \langle \psi_f | T_1, T_1 \rangle & \langle T_1, T_2 | \psi_f \rangle \langle \psi_f | T_1, T_2 \rangle & \dots & \langle T_1, T_2 | \psi_f \rangle \langle \psi_f | T_n, T_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle T_n, T_n | \psi_f \rangle \langle \psi_f | T_1, T_1 \rangle & \langle T_n, T_n | \psi_f \rangle \langle \psi_f | T_1, T_2 \rangle & \dots & \langle T_n, T_n | \psi_f \rangle \langle \psi_f | T_n, T_n \rangle \end{pmatrix}$$

Análogo ao modelo anterior pode-se utilizar a matriz densidade com a finalidade de obter o *payoff*. Assim, as probabilidades de se encontrar o subsistema do jogador no terreno j se tornam

$$P_j^B = \sum_{i=1+n(j-1)}^{jn} \rho_{i,i} \quad (4.35)$$

e para o Inimigo

$$P_j^I = \sum_{i=1}^n \rho_{n(i-1)+j, n(i-1)+j} \quad (4.36)$$

Note que ambos correspondem a soma de alguns elementos localizados na diagonal principal da matriz densidade.

4.3 Comparação com o jogo clássico

Nessa seção será feita a comparação do jogo quântico com sua versão clássica. Como todo jogo quântico deve conter todas as características de um jogo clássico, será calculado o valor do *payoff* no equilíbrio de Nash usando apenas estratégias clássicas. Também é necessário confrontar os dois jogadores

quando os mesmos possuem acessos a diferentes espaços de estratégias. Em ambos os modelos é feita a comparação apenas com a versão clássica, discreta e simétrica do coronel Blotto.

4.3.1 Primeiro modelo

Equilíbrio de Nash clássico

O exemplo utilizado nessa subseção será o mesmo apresentado na subseção 4.1.3, ou seja, um jogo com $n = 3$ territórios e simétrico com 6 soldados para ambos os jogadores. O equilíbrio de Nash é atingido quando ambos os jogadores distribuem seus soldados obedecendo uma distribuição uniforme através dos campos de batalha, como visto na subseção 4.1.3. O caso a ser comparado será o mesmo da tabela 4.2. O Inimigo escolherá as estratégias S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 cada uma com a probabilidade de um quinto, em contrapartida, Blotto escolherá estratégias puras. Nesse cenário Blotto jamais poderá obter um *payoff* maior do que zero, pois o valor nulo do mesmo é obtido quando Blotto joga a estratégia referente ao equilíbrio de Nash. A partir do gráfico 4.4 é possível ver todos os valores do *payoff* de Blotto quando ele escolhe estratégias puras contra a estratégia do equilíbrio de Nash do Inimigo.

O cálculo de qualquer *payoff* esperado é a soma do produto do *payoff* de estratégias puras pela probabilidade dele ocorrer, como visto na subseção 2.1.2. O cálculo do *payoff* representado na figura 4.4 é calculado da seguinte maneira:

$$\langle \$_B \rangle = \frac{1}{5} \left(\sum_{i=1}^5 \langle \$_i \rangle \right) \quad (4.37)$$

onde, $\langle \$_i \rangle$ é o *payoff* de uma matriz densidade pura ρ_i quando o Inimigo escolhe a estratégia S_i da tabela 4.2. O *payoff* esperado $\langle \$_B \rangle$ ficará em função do número de soldados x_1, x_2, x_3 que devem ser alocados por Blotto.

Note que, de acordo com a figura 4.4, não existe estratégia pura que resulte

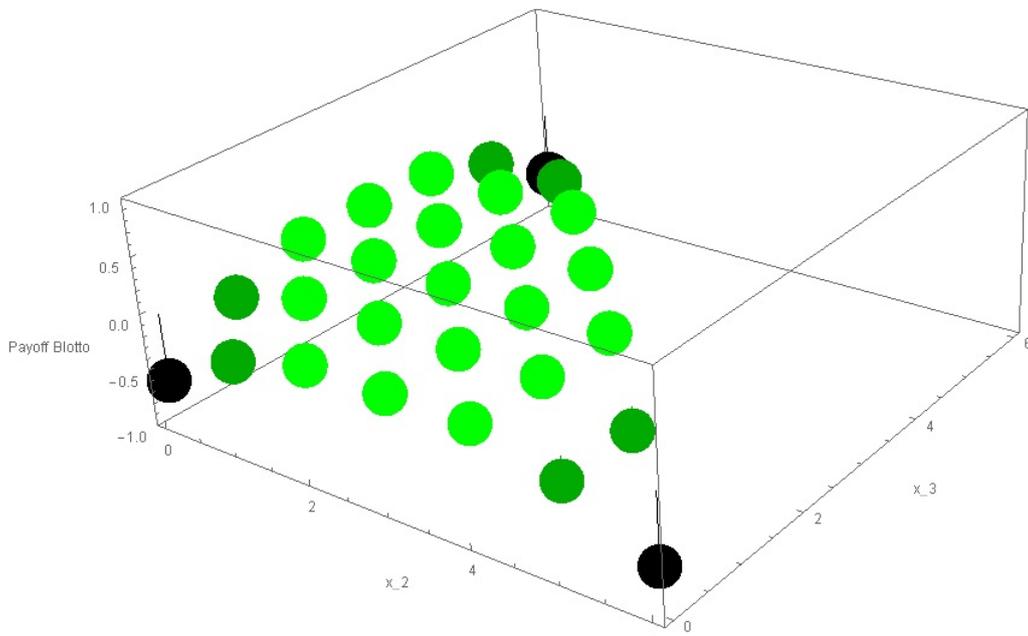


Figura 4.4: Modelo 1 clássico para o jogo do coronel Blotto. No gráfico acima é considerado um jogo simétrico com 6 soldados para ambos os jogadores. O Inimigo escolhe a estratégia referente ao equilíbrio de Nash e Blotto escolhe estratégias puras. Cada ponto do gráfico está relacionado a uma estratégia pura de Blotto, onde x_2 e x_3 são os números de soldados nos terrenos 2 e 3 respectivamente. No eixo vertical estão os valores do *payoff* de Blotto. Os pontos em verde claro possuem *payoff* nulo, aqueles em verde escuro valem $-1/5$ e os que estão em preto são associados ao valor de *payoff* igual à $-3/5$.

em um *payoff* de Blotto maior que zero, mas também qualquer estratégia mista escolhida por Blotto terá a mesma propriedade. Portanto, o modelo aqui descrito representa fielmente a versão clássica do coronel Blotto. Outro ponto importante a se notar é o fato do emaranhamento não influenciar o resultado final, pois seu operador comuta com todas as estratégias clássicas.

Clássico *versus* quântico

1. **Três terrenos:** É importante confrontar a versão clássica do jogo com a versão quântica, pois dessa forma é possível observar novos aspectos do modelo e também colocar nossa intuição física a prova. Esse confronto será feito da seguinte maneira: o Inimigo escolherá as estratégias referentes ao equilíbrio de Nash clássico, que é a melhor opção disponível classicamente, como na tabela 4.2, e Blotto poderá jogar qualquer estratégia quântica. Para exemplificar esses novos aspectos, o espaço de estratégia de Blotto será restrito, e essa restrição será feita adotando os valores $x_1 = x_2 = x_3 = 2$. A vantagem dessa abordagem é usar apenas uma variável (ϕ) no cálculo do *payoff* de Blotto. Através da figura 4.5 é possível ver que o valor do *payoff* de Blotto possui dependência da variável ϕ , ou seja $\langle \$_B \rangle = \langle \$_B(\phi) \rangle$. Pode-se também observar nesta figura que a ordem em que as estratégias são aplicadas afetam o resultado, isso ocorre devido ao fato de que as estratégias quânticas não comutam entre si, nem com estratégias clássicas e também não comutam com o operador de emaranhamento. Assim é exibido, abaixo, o operador de emaranhamento \hat{J} utilizado para o jogo com três terrenos ($n = 3$).

$$\hat{J} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\hat{\mathbb{1}}_6 + i\hat{D} \otimes \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \right] \quad (4.38)$$

Na figura 4.5 apresentamos o *payoff* esperado de Blotto com esse operador de emaranhamento. A escolha desse operador foi arbitrária, visto que, existem outros operadores que emaranham o sistema, como visto na subseção 4.2.1. Assim sendo, dependendo do valor de ϕ escolhido por

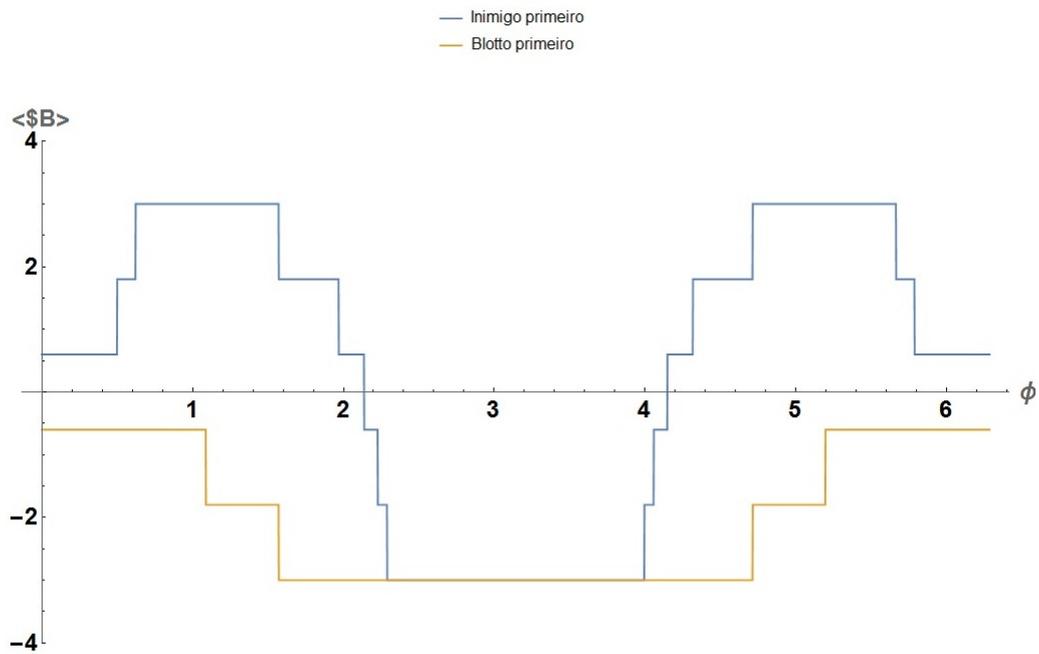


Figura 4.5: Quântico contra Nash clássico. No eixo horizontal dessa figura estão todos os valores de $\phi \in [0, 2\pi]$ quando Blotto utiliza estratégias quânticas e no eixo vertical estão os valores do *payoff* de Blotto. Os valores correspondentes à curva em azul se referem ao jogo quando o Inimigo aplica seu operador primeiro, enquanto que a curva em amarelo é obtida quando Blotto joga primeiro. Os valores obtidos nesse gráfico resultam de um jogo onde o Inimigo escolhe a estratégia referente ao equilíbrio de Nash clássico, e Blotto utiliza estratégias quânticas, com 2 soldados em cada terreno.

Blotto, ele consegue vencer a estratégia referente ao equilíbrio de Nash clássico. Essa afirmação implica na ideia de que tal estratégia deixa de resultar em um equilíbrio de Nash, podendo assim ser futuramente investigado a possível existência de um equilíbrio de Nash quântico.

2. **Cinco terrenos:** Apenas a fim de comparação, será efetuado o confronto do jogo simétrico com dez soldados e cinco territórios como está apresentado no artigo [29]. O Inimigo escolherá a estratégia referente ao equilíbrio de Nash clássico, presente na tabela 4.3, porém Blotto escolherá uma estratégia quântica.

Estratégias	terreno 1	terreno 2	terreno 3	terreno 4	terreno 5
s_1	4	3	2	1	0
s_2	0	4	3	2	1
s_3	1	0	4	3	2
s_4	2	1	0	4	3
s_5	3	2	1	0	4

Tabela 4.3: Equilíbrio de Nash clássico com 5 territórios. Jogo simétrico com 10 soldados e 5 territórios. A estratégia mista que resulta no equilíbrio de Nash é aquela que possui seus soldados uniformemente distribuídos entre $[0, 4]$, ou seja são as 5 estratégias puras s_i da tabela cada uma com probabilidade $1/5$ de ocorrer. A melhor estratégia clássica que o adversário pode escolher é a mesma estratégia mista.

Na figura 4.6 é apresentado o *payoff* esperado de Blotto em função de ϕ quando o mesmo aloca dois soldados em cada território. Assim, é possível observar que existem valores de ϕ que vencem o equilíbrio de Nash clássico, isso significa que, ao permitir os jogadores terem acesso à estratégia quânticas, o equilíbrio de Nash clássico deixa de ser um ponto de equilíbrio. O operador de emaranhamento utilizado para o

calculo desse *payoff* esperado é

$$\hat{J} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\hat{\mathbb{1}}_6 + i\hat{D} \otimes \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \right] \quad (4.39)$$

Outra característica importante a se notar é o fato de que o *payoff* esperado possui diferentes valores que dependem da ordem de aplicação dos operadores de cada jogador, essa diferença de valores existe devido ao fato de que o operador referente às estratégias quânticas não comuta com o operador referente às estratégias clássicas.

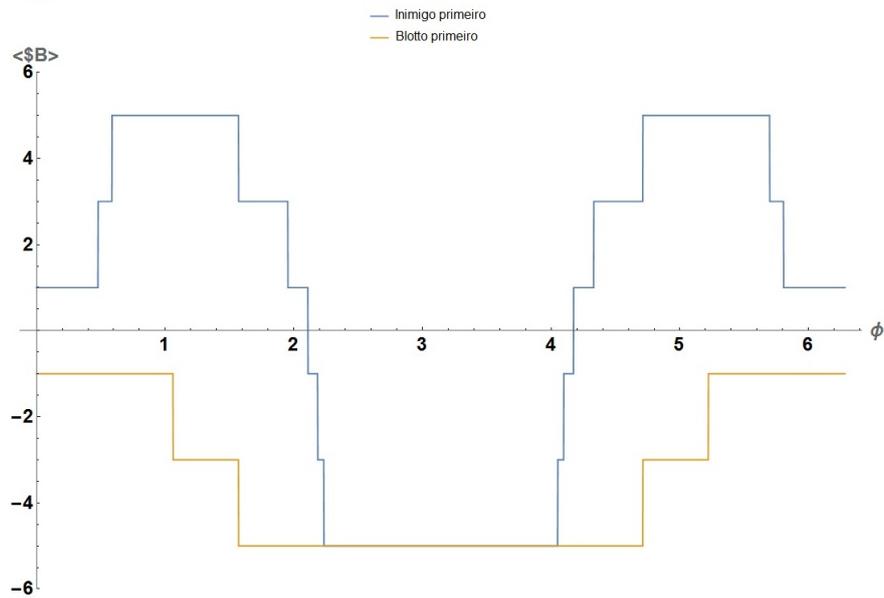


Figura 4.6: *Payoff* esperado de Blotto para o jogo com 5 territórios.

Na figura 4.6 ambos os jogadores possuem 10 soldados. O Inimigo escolhe a estratégia referente ao equilíbrio de Nash clássico. Blotto

escolhe estratégia quântica pura com dois soldados em cada terreno, a qual está em função da variável ϕ .

Caso trivial

Nessa subsecção será analisado o confronto para o caso trivial com 5 territórios, ou seja, o Inimigo distribuirá igualmente cem soldados através dos terrenos (vinte soldados em cada território). Entretanto, Blotto alocará apenas um soldado no primeiro território, mas ele terá acesso às estratégias quânticas. O operador de emaranhamento utilizado nesse exemplo é o mesmo da equação (4.39). Os valores do *payoff* esperado de Blotto são mostrados na figura 4.7. É importante salientar que Blotto pode alcançar a vitória mesmo estando

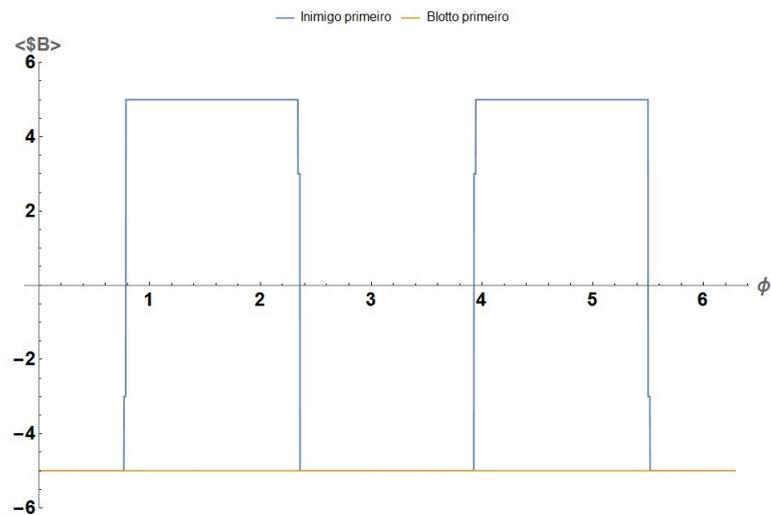


Figura 4.7: *Payoff* esperado de Blotto para o jogo com 5 territórios no caso trivial.

em desvantagem numérica, caso ele possua acesso às estratégias quânticas. Consequentemente, o caso trivial deixa de ser trivial, pois a vitória para o Inimigo não é garantida.

4.3.2 Segundo modelo

Equilíbrio de Nash clássico

Para verificar se esse modelo é uma representação fiel do modo tradicional é necessário obedecer o mesmo procedimento utilizado no modelo 1, ou seja, encontrar o valor do *payoff* de Blotto quando o Inimigo joga as estratégias referentes ao equilíbrio de Nash clássico. Todos os valores de *payoff* de Blotto de um jogo simétrico com 6 soldados e $n = 3$ terrenos são mostrados na figura 4.8, onde x_2, x_3 são os números de soldados que Blotto aloca nos terrenos $j = 2$ e $j = 3$ respectivamente. É importante destacar que nem todos os valores de ângulos podem ser escolhidos, pois aqui está sendo considerado o jogo discreto, ou seja, os soldados são representados por números inteiros. A tabela 4.2 é reescrita na tabela 4.4 em função dos ângulos θ e ϕ . Tais ângulos estão relacionados às matrizes de rotação \hat{R}_z e \hat{R}_y respectivamente.

Estratégias	ϕ	θ
s_1	$\arcsen(1/\sqrt{3})$	$\pi/2$
s_2	$\arcsen(\sqrt{2/3})$	$\pi/4$
s_3	$\arcsen(1/\sqrt{6})$	$\arcsen(\sqrt{3/5})$
s_4	$\pi/4$	0
s_5	0	$\arcsen(1/\sqrt{3})$

Tabela 4.4: Nash em ângulos: Para cada estratégia S_i são associados dois ângulos, que se referem a quantidade de soldados em cada terreno.

Pode-se observar, através do exemplo, na figura 4.8 que esse modelo reconstrói a versão clássica do jogo coronel Blotto. A desvantagem desse modelo é o fato de que não há operador de emaranhamento para $n = 3$. Isso resulta na não existência de operadores quânticos, pois qualquer outro operador que não seja obtido diretamente através da equação 4.30 será nada mais do que uma outra maneira de rotacionar o vetor $|T_1\rangle$. Portanto, não é

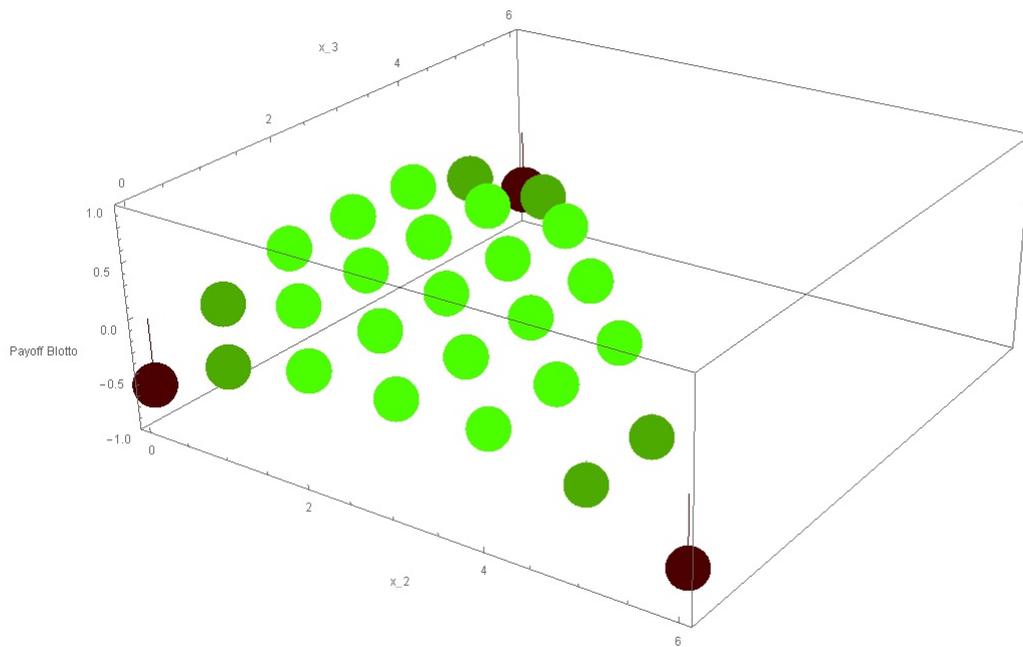


Figura 4.8: *Payoff* para o modelo 2 clássico do jogo coronel Blotto. Na figura acima ambos os jogadores possuem 6 soldados. O Inimigo escolhe a estratégia referente ao equilíbrio de Nash e Blotto escolhe estratégias puras. Cada ponto do gráfico está relacionado a uma estratégia pura de Blotto, onde x_2 e x_3 são os números de soldados nos terrenos 2 e 3 respectivamente. No eixo vertical estão os valores do *payoff* de Blotto. Os pontos em verde claro possuem *payoff* igual à zero, já aqueles em verde escuro são associados ao valor $-1/5$ e os que estão em marrom equivalem à $-3/5$.

possível realizar o confronto do Inimigo, utilizando as estratégias referentes ao equilíbrio de Nash, com o Blotto utilizando de estratégias quânticas.

Capítulo 5

Conclusões e projetos futuros

Foram propostos dois modelos, com o objetivo de estender o jogo coronel Blotto para o domínio quântico. Ambos os modelos representam fielmente a versão clássica do jogo, devido ao fato de manterem o *payoff* e o equilíbrio de Nash ao serem comparados com a versão clássica. Apenas um desses modelos se mostrou bom o suficiente para ser estendido à versão quântica, que é o modelo 1 da subseção 4.2.1. Nele foi possível encontrar um operador de emaranhamento, para qualquer número n de territórios, que comute com todas as estratégias clássicas. Essa condição é necessária devido ao fato de que mesmo com emaranhamento o jogo deve representar fielmente a sua versão clássica. Assim sendo, foi possível estender o jogo para o domínio quântico. Vale a pena salientar que, ao estender as estratégias para o domínio quântico, apenas um operador foi exibido, aquele presente na equação (4.15). Entretanto, futuramente será investigado a possível existência de outros operadores. Vale também lembrar que, no modelo 1, o equilíbrio de Nash clássico deixa de ser um ponto de equilíbrio, visto que existem estratégias quânticas que vencem a melhor estratégia clássica. Outro fato a destacar é a possibilidade de vitória para o jogador em desvantagem no caso trivial. Esse resultado é importante,

pois isso é uma característica nova que não ocorre na versão clássica do jogo. Todavia, o segundo modelo não é indicado para representar o jogo quântico, pois não existe operador de emaranhamento para $n = 3$ que comute com todas as estratégias clássicas, sendo assim impossível estender as estratégias para o domínio quântico.

Futuramente, serão investigados: o *payoff* relacionado às estratégias quânticas e mistas do modelo 1, a comparação entre o equilíbrio de Nash no caso contínuo, e com isso uma possível verificação experimental.

Apêndice A

Operador do primeiro modelo

Operadores unitários são de extrema importância em mecânica quântica, pois eles preservam o produto escalar e conseqüentemente a norma de vetores que pertencem a um espaço de Hilbert \mathbb{E} . O produto escalar entre dois vetores representa o coeficiente de uma projeção de um vetor sobre o outro, como pode ser visto na equação A.1 ao projetarmos o vetor $|\phi_2\rangle$ no vetor $|\phi_1\rangle$, ambos pertencendo à \mathbb{E}

$$|\phi_1\rangle\langle\phi_1|\phi_2\rangle = c_{12}|\phi_1\rangle \quad (\text{A.1})$$

E o módulo quadrado desse coeficiente $|c_{12}|^2$ é interpretado como a probabilidade de encontrar o estado $|\phi_2\rangle$ no estado $|\phi_1\rangle$.

Um operador unitário é aquele que possui a sua matriz inversa igual a sua matriz adjunta, ou seja, $\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{\mathbb{1}}$, portanto esse tipo de operador preserva o produto escalar, como pode ser visto nas equações A.2 e A.3.

$$\hat{U}|\phi_1\rangle = |\overline{\phi_1}\rangle \quad , \quad \hat{U}|\phi_2\rangle = |\overline{\phi_2}\rangle \quad (\text{A.2})$$

$$\langle \overline{\phi_2} | \overline{\phi_1} \rangle = \langle \phi_2 | \hat{U}^\dagger \hat{U} | \phi_1 \rangle = \langle \phi_1 | \phi_2 \rangle = c_{12} \quad (\text{A.3})$$

A partir desse conceito é importante verificar que o operador referente à estratégia escolhida por Blotto no primeiro modelo é unitário. O tal operador consiste em um produto direto de dois operadores $R(\lambda_j^B)$ e Π_j , os quais estão relacionados, respectivamente, ao número de soldados e ao território, de acordo com a equação abaixo.

$$\hat{U} = \sum_{j=1}^N R(\lambda_j^B) \otimes \Pi_j \quad (\text{A.4})$$

A prova da unitariedade está contida na equação abaixo.

$$\begin{aligned} \hat{U}_B \hat{U}_B^\dagger &= \left(\sum_{j=1}^n R(\lambda_j^B) \otimes \Pi_j \right) \left(\sum_{k=1}^n R(\lambda_k^B) \otimes \Pi_k \right)^\dagger & (\text{A.5}) \\ &= \left(\sum_{j=1}^n R(\lambda_j^B) \otimes \Pi_j \right) \left(\sum_{k=1}^n R^\dagger(\lambda_k^B) \otimes \Pi_k^\dagger \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^n R(\lambda_j^B) \otimes \Pi_j \right) \left(\sum_{k=1}^n R^\dagger(\lambda_k^B) \otimes \Pi_k \right) \\ &= \sum_{j,k=1}^n R(\lambda_j^B) R^\dagger(\lambda_k^B) \otimes \Pi_j \Pi_k \end{aligned}$$

Cabe aqui utilizar seguinte a propriedade dos projetores $\Pi_j \Pi_k = \Pi_j \delta_{j,k}$,

onde $\delta_{j,k}$ é a delta de Kronecker.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j,k=1}^n R(\lambda_j^B) R^\dagger(\lambda_k^B) \otimes \Pi_j \delta_{j,k} & (A.6) \\
&= \sum_{j=1}^n R(\lambda_j^B) R^\dagger(\lambda_j^B) \otimes \Pi_j \\
&= \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_2 \otimes \Pi_j \\
&= \mathbb{1}_2 \otimes \sum_{j=1}^n \Pi_j \\
&= \mathbb{1}_2 \otimes \mathbb{1}_n = \mathbb{1}_{2n}
\end{aligned}$$

a prova para o operador do Inimigo é análoga.

Apêndice B

Operador de emaranhamento

Nesse apêndice será apresentado o procedimento utilizado para obter o operador de emaranhamento. Em qualquer jogo quântico, o operador de emaranhamento deve comutar com todas as estratégias clássicas \hat{U}_c , para que o mesmo represente fielmente o jogo clássico.

$$[\hat{J}, \hat{U}_c] = 0 \tag{B.1}$$

Outra característica importante é o fato de que a probabilidade deve ser sempre conservada, isso implica no fato de que o operador de emaranhamento deve ser unitário. Obedecendo essa característica procuramos um operador de emaranhamento que tem a forma

$$e^{i\gamma\hat{A}\otimes\hat{B}/2} \tag{B.2}$$

onde γ é o grau de emaranhamento. Para que esse operador possa ser escrito de forma sucinta é suficiente impor que qualquer potência par do operador

$\hat{A} \otimes \hat{B}$ seja igual a identidade

$$\left(\hat{A} \otimes \hat{B}\right)^{2n} = \hat{1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (\text{B.3})$$

caso essa imposição seja satisfeita, o operador de emaranhamento da equação B.2 pode ser expandido em série de potências

$$e^{i\gamma\hat{A} \otimes \hat{B}/2} = \cos(\gamma/2)\hat{1} + i \sin(\gamma/2)\hat{A} \otimes \hat{B} \quad (\text{B.4})$$

. Utilizando essa equação com a condição encontrada na equação B.1, pode-se obter obter a seguinte propriedade

$$\left[\hat{A} \otimes \hat{B}, \hat{U}_c\right] = 0 \quad (\text{B.5})$$

ou seja, para obter o operador de emaranhamento é suficiente encontrar as matrizes \hat{A} e \hat{B} que obedecem as propriedades acima. Para o modelo 2 não existe matriz \hat{A} e \hat{B} que seja diferente da identidade e que comute com as estratégias clássicas.

Referências Bibliográficas

- [1] R. J. Aumann, M. Maschler, (1985), Game Theoretic Analysis of a Bankruptcy Problem from the Talmud, J. Econ. Theor. **36**, 195-213.
- [2] Neumann, J. v. (1928), "Zur Theorie der Gesellschaftsspiele", Mathematische Annalen 100 (1): 295-320, English translation: Tucker, A. W.; Luce, R. D., eds. (1959), "On the Theory of Games of Strategy", Contributions to the Theory of Games 4, pp. 13-42
- [3] J. F. Nash, "Non-Cooperative Games" The Annals of Mathematics (1951) **54(2)**:286-295 .
- [4] D.A.Meyer, Phys.Rev.Lett.**82** (1999) 1052.
- [5] C.Cohen-Tannoudji, B.Diu, F.Lalöe, *Quantum Mechanics*, vol.I., John-Wiley (2005).
- [6] J. Eisert, M. Wilkens, M. Lewenstein, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 3077.
- [7] P.E. Turner, L. Chao L, Nature **398** (1999) 441.
- [8] Jiangfeng Du, H. Li, Xiaodong Xu, Mingjun Shi, Jihui Wu, Xianyi Zhou, Rongdian Han, Phys.Rev.Lett.**88** 137902 (2002).
- [9] D. Challet, Y.-C. Zhang, Physica A **246** (1997) 407.

- [10] A.R.C. Pinheiro, C.E.R. Souza, D.P. Caetano, J.A.O. Huguenin, A.G.M. Schmidt, A.Z. Khoury, *J. Opt. Soc. Am. B* **30** (2013) 3210.
- [11] S. C. Benjamin, P. M. Hayden, *Phys.Rev. A* **64**, 030301 (2001).
- [12] J.B. Satinover, D. Sornette, *Eur.Phys.J.B* **60** (2007) 369.
- [13] C. Schmid, A. P. Flitney, W. Wiecek, N. Kiesel, H. Weinfurter, L. C. L. Hollenberg, *New. J. Phys.* **12** (2010) 063031.
- [14] W. F. Balthazar, M. H. Passos, A. G. M. Schmidt, D. P. Caetano, J. A. O. Huguenin, *J. Phys. B* **48** (2015) 165505.
- [15] A. Nawaz, A. H. Toor. *J. Phys. A: Math. Gen.* **37** (2004) 4437-4443.
- [16] J. M. R. Parrondo , G. P. Harmer and D. Abbott 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 5226.
- [17] A. P. Flitney and D. Abbott 2003 *Physica A* 324 152.
- [18] A. P. Flitney and D. Abbott 2002 *Phys. Rev. A* **65** 062318.
- [19] Chuan-Feng Li, Yong-Sheng Zhang, Yun-Feng Huang, Guang-Can Guo. Quantum strategies of quantum measurements. *Physics Letters A* **280** (2001) 257-260.
- [20] M. Tomassini, L. Luthi, M. Giacobini. Hawks and Doves on small-world networks. *Physical Review E* **73**, (2006) 016132.
- [21] A.P. Flitney, D. Abbott, *J.Opt.* **B 6** (2004) S860.
- [22] A.G.M.Schmidt, M. M. Paiva, *J. Phys. A* **451** (2012) 125304.
- [23] P. Amengual, R. Toral, *Comput. Sci. Eng.* **8** (2006) 88.

- [24] T. Hogg, P. Harsha, K.-Y. Chen, Int. J. Quant. Inf. **5**, 751 (2007).
- [25] Q. Zeng, B. R. Davis, D. Abbott, Fluct. Noise Lett. **7** (2007) L439
- [26] L. Goldenberg, L. Vaidman, S. Wiesner, Phys.Rev.Lett.**82**, 3356 (1999).
- [27] Kay-Yut Chen, T. Hogg, R. Beausoleil, Quant. Inf. Proc. **6** (2002) 449.
- [28] Roberson B. Econ Theory **29**, 1-24 (2006).
- [29] Golman R., Page S. E.. Public Choice, 2009, **138**, Number 3-4, Page 279
- [30] Poundstone, W. *Prisioner's Dilemma*. Knopf Doubleday Publishing Group. 1992.
- [31] Arthur, W. Brian . "Inductive Reasoning and Bounded Rationality". American Economic Review (Papers and Proceedings) **84**: 406-411.
- [32] Benjamin S.C. and Hayden P.M. Phys. Rev. A **64** (2001) 030301.
- [33] C. Schmid, A. P. Flitney, W. Wieczorek, N. Kiesel, H. Weinfurter, L. C. L. Hollenberg. New J. of Phys. **12** (2010) 063031.
- [34] M. Hanauske, J. Kunz, S. Bernius, and W. König. Physica A, **389**, no. 21, pp. 5084-5102, 2010.
- [35] A. Nawaz, A. H. Toor. CHIN. PHYS. LETT. **27**, No. 5 (2010) 050303.
- [36] M. Dresher. *Games of Strategy: Theory and Applications*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1961.
- [37] *Jeux ou la psychologie joue un role fundamental. Applications des Jeux de Hasard* (Lectures by Emile Borel(1921), trancribed by Jean Ville). Paris: Gauthier-Villars, Tome. IV, Fascicule 2. 1938.

- [38] H.Guo, J. Zhang, G.J.Koehler, Decision Support Systems **46** (2008) 318.
- [39] Gillman, L.. (1992). The American Mathematical Monthly, **99(1)**, 3-7.
- [40] S. Tzu, S. Pin. *A arte da guerra*. WWF Martins Fontes. São Paulo 2012.
- [41] O. Gross , R. Wagner. RAND Corporation RM-408 (1950)
- [42] R. B. Myerson. Amer. Polit. Sci. Rev., **87** (1993), pp. 856-869.
- [43] B. Szentes and R. Rosenthal. Games and Economic Behavior, **44**: 114-133 (2003).
- [44] A. Friedman, *Differential Games*, Dover (1971).