

Universidade Federal Fluminense



Não-separabilidade de graus de liberdade de um feixe laser e aplicações em informação quântica

Wagner Franklin Balthazar

Volta Redonda

2016

Universidade Federal Fluminense



Não-separabilidade de graus de liberdade de um feixe laser e aplicações em informação quântica

Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Física.

Wagner Franklin Balthazar

Orientador: **Prof. Dr. José Augusto Oliveira Huguenin**

Volta Redonda - RJ

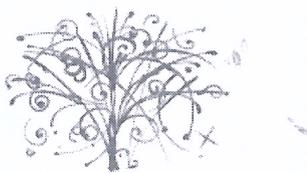
2016

B197 Balthazar, Wagner Franklin.
Não-separabilidade de graus de liberdade de um feixe laser
e aplicações em informação quântica / Wagner Franklin
Balthazar; orientador: José Augusto Oliveira Huguenin. --
Volta Redonda, 2016.
145 p. : il.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal Fluminense,
Instituto de Física, Volta Redonda, 2016.
Bibliografia: p. 137-145.

1.INFORMAÇÃO QUÂNTICA. 2.JOGOS QUÂNTICOS. 3.FEIXE DE
LASER. 4.DESIGUALDADE DE MERMIN. I. Huguenin, José Augusto
Oliveira, Orientador. II.Universidade Federal Fluminense.
Instituto de Física, Instituição responsável. III.Título.

CDD 530.120285



INSTITUTO DE FÍSICA

Universidade Federal Fluminense

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

RUA GAL MILTON TAVARES DE SOUZA, SN

24210-346 – NITERÓI - RIO DE JANEIRO

TEL: (21)2629-5878 - FAX: 2629-5887

E-MAIL: cpg@ if.uff.br

Ata dos trabalhos finais da Comissão Examinadora da tese apresentada por **Wagner Franklin Balthazar**. No vigésimo sexto dia de fevereiro de dois mil e dezesseis, às dez horas, reuniram-se no Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal Fluminense os membros da Comissão Examinadora constituída pelos professores doutores José Augusto Oliveira Huguenin (ICEx/UFF), Ernesto Galvão (IF/UFF), Paulo Henrique Souto Ribeiro (UFSC), Roberto Silva Sarthour Júnior (CBPF), Malena Hor-Meyll (UFRJ), sob a presidência do primeiro, para prova pública de apresentação da tese intitulada "**Graus de liberdade de um feixe laser e aplicações em informação quântica**", tendo em vista as exigências do Regulamento Específico do curso de Física relacionadas com a conclusão do Doutorado em Física pela Universidade Federal Fluminense. A tese foi elaborada sob a orientação do professor José Augusto Oliveira Huguenin(ICEx/UFF). Após a exposição do trabalho, o aluno respondeu às questões formuladas pelos integrantes da Comissão Examinadora, que apresentou parecer no sentido de aprová-lo. Para constar, foi lavrada a presente ata, que vai assinada pelos membros da Comissão Examinadora e pelo doutorando.

Volta Redonda, vinte e seis de fevereiro de dois mil e dezesseis.

Dr. José Augusto Oliveira Huguenin

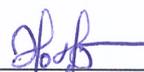
Dr. Ernesto Galvão

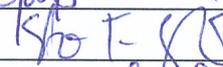
Dr. Paulo Henrique Souto Ribeiro

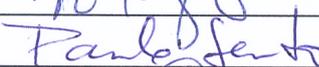
Dr. Roberto Silva Sarthour Júnior

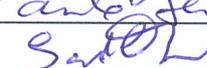
Dra. Malena Hor-Meyll

Wagner Fraklin Baltazhar

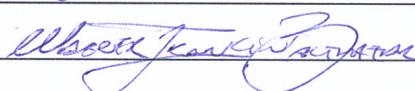












À memória de Sebastião Roberto Balthazar.

Pai dedicado e homem honesto.

*Este trabalho é dedicado a minha esposa Erika, aos meus filhos Heitor e
Lavínia e a minha mãe Maria. Amo vocês!*

Agradecimentos

São muito os agradecimentos por conseguir concluir este trabalho. Em primeiro lugar agradeço à Deus, por manter a minha fé cada dia mais viva. Ao Senhor todo meu amor e gratidão.

Agradeço a minha família por todos esses anos em que se privaram de várias coisas para que eu pudesse estudar. Aos meus amados filhos pelas horas em que não pude brincar. À amada esposa pelas horas que não pude dar atenção. Sem vocês não teria conseguido. Essa conquista também pertence a vocês!

Obrigado aos meus pais por tudo! Não podia ter pais melhores. A minha mãe Maria pelo amor e confiança de sempre. Ao meu pai Roberto pelo amor e cuidado. Ao meu irmão Gustavo, por seu grande coração. Impossível esquecer minha avó Genny, tenho certeza que onde estiver está orgulhosa. Não seria nada sem vocês. Amo vocês!

Agradeço ao meu orientador Prof. José Augusto Oliveira Huguenin por confiar em mim. Poucos se aventurariam a tal desafio, de orientar num doutorado em física, um licenciado em física com mestrado em ensino. Lembro que te fiz uma única promessa no início do curso, muito trabalho. Essa é uma promessa que dou como cumprida. Agradeço pelo amigo e irmão que fiz para a vida no decorrer destes 4 anos. Não há título com esse valor. Muito obrigado!

Obrigado a todos os colegas e amigos do ICEX. Ao Prof. Ladário da Silva pela parceria, incentivo e amizade. Ao Prof. Alexandre Schmidt pelas conversas, amizade e colaboração. Ao Prof. Dilson Caetano pelas horas de laboratório, pelas discussões e companheirismo. Ao Prof. Rogério Menezes de Almeida pelo apoio no primeiro período e por ser um grande camarada. Ao Prof. Luiz Telmo pela amizade e incentivo. Enfim, a todos os outros professores do ICEX-UFF pelo respeito com que me trataram ao longo desses 4 anos.

Não podia deixar de agradecer aos meus colegas de turma, Paulo Victor e Anderson. Para que houvesse a primeira extensão de turma de pós-graduação em física no ICEX-UFF em Volta Redonda, a condição era que houvesse no mínimo 3 alunos. Iniciamos essa jornada. Obrigado pela parceria ao longo desses 4 anos. Agradeço aos colegas Jaime, Samuel, Allan

e Laís pelas conversas nesse período. Não poderia esquecer do companheiro de laboratório Marcelo Passos e do grande parceiro Hélio, do qual sentiremos sempre saudades.

Agradeço aos professores Carlos Eduardo Souza e Antonio Zelaquett Khoury pela excelente recepção no laboratório de óptica quântica e pelas discussões em grupo. Ao professor Ernesto Galvão pelas discussões.

A cada etapa vencida, tenho que me lembrar do Sr. Mário di Biasi, que por intermédio do amigo Peter, me concedeu uma bolsa de estudos na Fundação Educacional Rosemar Pimentel. Sem essa ajuda, não teria feito meu primeiro curso superior. Agradeço por terem aberto a primeira porta, onde estiverem meu muito obrigado.

Não posso esquecer a minha querida amiga Mônica Seraphim pela ajuda e amizade. Muito obrigado!

Meu muito obrigado a dois amigos que se foram há muito tempo, o Sr. Hermiton Consani Moura e o Sr. Carlos Moore. Agradeço a vocês pelo muito que contribuíram para que eu entendesse a importância de me tornar um homem melhor.

Agradeço todos meus familiares, amigos e colegas que confiam no meu trabalho e torcem por mim. Muito obrigado por fazerem parte de minha vida! Desejo sinceramente muita felicidade e paz para todos.

O oposto de uma afirmação correta é uma afirmação falsa. Mas o oposto de uma verdade profunda pode ser muito bem outra verdade profunda.

Neils Bohr

Deus viu que a luz era boa.

Gênesis 1:4

Resumo

Graus de liberdade de um feixe laser têm sido amplamente utilizados para emular estados quânticos, mesmo quando o emaranhamento é uma exigência. Neste caso, utilizamos os modos não-separáveis. Ao longo desta tese, manipulamos três graus de liberdade de um feixe laser, a saber, polarização, modos transversos e caminho. De acordo com o melhor do nosso conhecimento, pela primeira vez o caminho, associado a polarização e modos transversos, foi utilizado para configurar um estado clássico tripartido de um feixe laser, com objetivo de emular estados com propriedades quânticas. Isso nos levou a um trabalho fundamental, demonstrar experimentalmente que esse estado não-separável tripartido é caracterizado por de violar uma desigualdade tipo-Mermin. Também apresentamos aplicações dos modos bipartido e tripartido para realizar operações condicionais que podem ser usadas para implementar portas lógicas quânticas e realizar jogos quânticos. Apresentamos duas portas lógicas que realizam operações condicionais. A primeira é uma porta de fase π , cujo controle de fase condicional ocorre quando, para um dado estado de polarização, o feixe passa por um conversor astigmático e adquire uma fase de Gouy. Também apresentamos a realização de uma operação condicional associada à porta Toffoli, onde manipulamos os três graus de liberdade, para verificar experimentalmente seu funcionamento. Mostramos que essa operação é capaz de gerar estados tipo-GHZ, um análogo clássico de um emaranhamento tripartido. Utilizando modos de polarização e modos transversos, realizamos dois jogos quânticos. O primeiro é a demonstração experimental do duelo quântico sequencial, onde o estado dos jogadores que atiram um no outro em sequência é representado pela polarização e modos transversos. Emulamos experimentalmente várias situações de combate, como o caso em que os jogadores iniciam o duelo vivos ou numa superposição de vivo ou morto. Apresentamos também um jogo original, o duelo simultâneo, onde Alice e Bob atiram um no outro simultaneamente. Nós discutimos a construção do operador simultâneo em função dos parâmetros de tiro de Alice e Bob e emulamos várias situações de combate para esse jogo. Além disso, propomos uma implementação do duelo quântico simultâneo utilizando fótons gêmeos e óptica linear.

Palavras-chave: informação quântica, jogos quânticos, feixe de laser e desigualdade de Mermin.

Abstract

Degrees of freedom of a laser beam have been widely used to emulate quantum states, even when entanglement is a requirement. In this case, we use non-separable modes. In this thesis, we manipulate these three degrees of freedom of a laser beam, polarization, transverse modes and path. According to the best of our knowledge, for the first time, the path is associated with the polarization and transverse modes to set up a tripartite classical state of a laser beam, in order to emulate states with quantum properties. In this way, we have a fundamental work to demonstrate experimentally that this tripartite non-separable state is characterized by violation of Mermin-type inequality. We present applications of a bipartite and tripartite modes to perform conditional operators which can be used to implement quantum gates and perform quantum games. Two logic gates that realize conditional operations are presented. The first is a π phase gate, whose conditional phase control occurs when, for a given polarization state, the beam passes through an astigmatic converter and acquires a Gouy phase. We also present the realization of a conditional operation that is associated with Toffoli gate, where we manipulate the three degrees of freedom to experimentally verify its operation. We show that this operation is able to generate GHZ-type states, a classical analogue of a tripartite entanglement. Using polarization and transverse modes, we implement two quantum games. The first is an experimental demonstration of a sequential quantum duel, where the state of the players that shoot each other sequentially, is represented by the polarizations and transverse modes. We emulate experimentally different combat situations, as in the case where the players start the duel alive or in an alive-dead superposition. We also present an original quantum game, the simultaneous quantum duel, where Alice and Bob shoot each other simultaneously. We discussed the construction of the simultaneous operator as a function of Alice and Bob's shooting parameters and we emulate many different combat situations for this game. Moreover, we propose an implementation of simultaneous quantum duel using twin photons and linear optics.

Keywords: quantum information, quantum games, laser beam and Mermin's inequality.

Lista de abreviaturas e siglas

<i>BS</i>	Divisor de feixe, do inglês <i>Beam Splitter</i> .
<i>CL</i>	Lentes cilíndricas, do inglês <i>Cylindrical Lenses</i> .
<i>CCD</i>	Dispositivo de carga acoplada do inglês <i>Charge Coupled Device</i> .
<i>DP</i>	Prisma de Dove, do inglês <i>Dove prism</i> .
<i>HWP</i>	Placa de meia onda, do inglês <i>Half Wave Plate</i> .
<i>MZIM</i>	Interferômetro de Mach-Zehnder com uma reflexão espelho adicional, do inglês <i>Mach-Zehnder Interferometer with one additional Mirror</i> .
<i>PBS</i>	Divisor de feixe polarizado, do inglês <i>Polarized Beam Splitter</i> .
<i>QWP</i>	Placa de quarto de onda, do inglês <i>Quarter Wave Plate</i> .
<i>SPDC</i>	Conversão paramétrica descendente espontânea, do inglês <i>Spontaneous Parametric Down Conversion</i> .
<i>SWP</i>	Placa de onda S, do inglês <i>S Wave Plate</i> .

Sumário

	Introdução	21
1	GRAUS DE LIBERDADE DE UM FEIXE LASER	27
1.1	Polarização da Luz	28
1.2	Caminho	33
1.3	Modos Transversos	33
1.3.1	Modos Hermite e Laguerre Gauss	35
1.4	Analogia entre polarização, modos transversos e caminho	39
2	INFORMAÇÃO E COMPUTAÇÃO QUÂNTICA COM GRAUS DE LIBERDADE DE UM FEIXE LASER	43
2.1	Q-bits	43
2.2	Portas lógicas quânticas	44
2.3	Estados de Bell e GHZ	49
2.4	Q-bits fotônicos	50
2.5	Descrição quântica dos modos não-separáveis	51
2.5.1	Não-separabilidade de um sistema Tripartite	54
3	TEORIA DOS JOGOS QUÂNTICOS	57
3.1	Dilema do prisioneiro	57
3.2	Duelo quântico sequencial	59
4	DUELO QUÂNTICO SIMULTÂNEO	63
4.1	Jogadores e regras do jogo	63
4.2	Construindo o operador simultâneo	65
4.3	Resultados teóricos	69
4.3.1	Alice e Bob iniciam o duelo vivos	69
4.3.2	Alice e Bob iniciam o duelo em um estado de Bell	71
4.3.3	Um jogador aumenta/diminui sua habilidade de tiro	73

5	IMPLEMENTAÇÃO DE JOGOS QUÂNTICOS COM ÓPTICA LI- NEAR	77
5.1	Implementação óptica do duelo quântico sequencial	77
5.1.1	Experimento e resultados	82
5.1.2	Alice e Bob iniciam o duelo vivos	82
5.1.3	Bob inicia o duelo em uma superposição de vivo e morto	90
5.2	Proposta de implementação óptica do duelo quântico simultâneo	93
5.2.1	Proposta experimental	93
6	ESTADOS TRIPARTIDOS NÃO-SEPARÁVEIS E VIOLAÇÃO DA DESIGUALDADE DE MERMIN	99
6.1	Preparação do estado	99
6.2	Demonstração experimental da violação da desigualdade de Mermin	100
7	OPERAÇÕES CONDICIONAIS EM GRAUS DE LIBERDADE DE UM FEIXE LASER PARA REALIZAÇÃO DE PORTAS LÓGICAS QUÂNTICAS	107
7.1	Porta de fase π	107
7.1.1	Resultados e discussões	110
7.1.2	Porta de fase quântica	114
7.2	Porta Toffoli	116
7.2.1	Experimento	117
8	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	123
	APÊNDICE A – VIOLAÇÃO DA DESIGUALDADE TIPO-MERMIN COM MODOS DE UM FEIXE LASER	127
	ANEXO A – LISTA DE PUBLICAÇÕES	135
	REFERÊNCIAS	137

Introdução

Uma das mais notórias teorias desenvolvidas na física se faz presente no trabalho de unificação desenvolvido no século XIX por James Clerk Maxwell [1]. Neste trabalho, ele consolida o eletromagnetismo em suas famosas equações, que adicionadas à força de Lorentz [2], explicam todo o eletromagnetismo clássico, além de unificar dois grandes campos da ciência, a óptica e o eletromagnetismo. Estas descobertas tiveram importantes consequências na tecnologia e na sociedade. Alguns anos depois, outra ideia fundamental veio à tona com o experimento da radiação do corpo negro, que levou Max Planck à ideia dos *quanta* de energia [3, 4]. Albert Einstein, em 1905, explicou que a luz interage com a matéria em pacotes discretos de energia [5]. Seu trabalho sobre o efeito fotoelétrico deu origem ao conceito do fóton.

O surgimento da mecânica quântica muda por completo nosso entendimento acerca do mundo das escalas atômicas – das partículas, da radiação eletromagnética e da interação entre ambos. Podemos citar dois princípios que refletem essa ideia. Primeiramente o da complementaridade e o papel do observador enunciado por Neils Bohr [6], depois o princípio da incerteza enunciado por Werner Heisenberg [7]. Outro fenômeno quântico que se distancia da física clássica é o que ocorre quando temos um sistema em um estado de superposição, exemplificado pelo famoso problema do Gato de Schrödinger [8]. Esses sistemas de partículas em estados de superposição podem dar origem a estados emaranhados. O fenômeno do emaranhamento ocorre em razão da natureza probabilística da mecânica quântica e pelo fato do sistema quântico emaranhado não ser fatorável, isto significa que ele não pode ser escrito como um produto dos subsistemas que o constituem. Isso acontece, por exemplo, quando uma fonte emite pares de partículas (*spin* $\frac{1}{2}$ em um estado singleto) perfeitamente (anti-) correlacionadas. Esses estados apresentam um comportamento não-local, ou seja, a medida realizada no estado de uma das partículas afeta a outra instantaneamente, independente da distância entre elas. Isso é explicado pelo colapso da função de onda, através da interpretação de Copenhague, onde a função de onda dá uma descrição completa do sistema físico. Essa característica singular do mundo atômico era questionada por Einstein–Podolsky–Rosen (EPR). Eles acreditavam que a mecânica quântica era uma teoria incompleta, por não prever com exatidão o resultado

de medidas que correspondam a uma realidade física. Para EPR a função de onda não era capaz de descrever completamente o estado emaranhado, faltava a ela uma teoria das variáveis ocultas, capaz de devolver a mecânica quântica o realismo físico. Eles propuseram um experimento mental, conhecido como paradoxo EPR [9], cujo objetivo era devolver a teoria seu poder de predição, como ocorre na física clássica. Em 1964, John Bell [10] mostrou que a teoria das variáveis ocultas impunha limites às medidas de correlação, dando origem à conhecida desigualdade de Bell. Um estado emaranhado é capaz de violar essa desigualdade, como demonstrado experimentalmente por Aspect et al nas Refs.[11, 12, 13].

Atualmente, estados emaranhados são recursos importantes para um grande número de protocolos de informação quântica [14]. Podemos citar a criptografia quântica [15, 16, 17, 18] e as portas lógicas quânticas [19, 20, 21]. Neste cenário, a preparação de estados de dois q-bits tem sido investigadas, principalmente, por sua importância para implementação de portas lógicas ou para construção de circuitos que definem novos algoritmos, como ocorre na Teoria dos Jogos quânticos, onde novos algoritmos são implementados nos diferentes jogos. De forma geral, qualquer sistema físico de dois níveis, que podemos denotar por $|0\rangle$ ou $|1\rangle$, pode ser utilizado para codificar um q-bit. Alguns exemplos são o *spin* $\frac{1}{2}$ de uma partícula, um elétron em dois diferentes níveis de energia e a polarização horizontal e vertical de um fóton. Para o caso do campo eletromagnético, os graus de liberdade do mesmo, como a polarização e o modos transversos, têm sido explorados em trabalhos fundamentais da óptica não-linear [22, 23] e da óptica quântica [24, 25], para codificar q-bits.

No cenário da computação e informação quântica, algoritmos têm uma forma geral. Para um dado estado inicial, aplica-se um sequência de operadores unitários e mede-se o estado de saída. A Teoria dos Jogos tem mostrado que superposição e emaranhamento trazem novos aspectos quando comparados com a Teoria dos Jogos clássicos [26].

A Teoria de Jogos [27, 28] é uma área da matemática que fornece poderosas regras para tomada de decisões em situações de conflito em diversas áreas do conhecimento, por exemplo, entre pessoas, animais, indústrias, economia, administração, entre outros. Em geral, o jogo é composto por dois ou mais jogadores, um conjunto de regras e uma tabela *payoff*¹. Meyer [29] e Eisert, Wilkens e Lewenstein [30] contribuíram para o cenário da

¹ Nota: É comum utilizarmos o termo tabela ou função *payoff* na teoria dos jogos. Ele pode significar, por exemplo, benefícios ou penalidades no dilema do prisioneiro ou uma tabela de pontuação dos jogadores em um jogo.

Teoria dos Jogos introduzindo conceitos da mecânica quântica, utilizando sistemas de dois níveis para modelar o estado dos jogadores. A Teoria dos Jogos quânticos acontece quando o conflito que desejamos estudar ocorre no domínio das escalas atômicas ou subatômicas, ou seja, em uma nova "arena", o espaço de Hilbert, em que jogadores têm seus estados representados por um vetor de estado $|\psi\rangle$. Na base da computação quântica, os q-bits podem estar num estado puro ($|0\rangle$ ou $|1\rangle$) ou em uma superposição destes estados, conseqüentemente, as situações de conflito ou cooperação são diferentes das que ocorrem no regime clássico.

Vários jogos têm sido estudados no cenário quântico [26], o mais conhecido é o dilema do prisioneiro [30]. No entanto, outros jogos importantes foram quantizados. Vamos apresentar alguns: o duelo quântico entre dois ou três jogadores, proposto por Abbott e Flitney [31] e revisitado por Schimidt e Paiva [32]; o jogo da minoria (do inglês *Minority game*) [33], onde um número ímpar de jogadores tem duas estratégias e ganham os jogadores que escolhem a estratégia da minoria; o jogo da moeda permutada (do inglês *Penny flip*) [34], onde dois jogadores A e B escolhem secretamente cara ou coroa para sua moeda, e havendo coincidência o jogador A ganha, caso contrário ganha B . Todos eles apresentam comportamento diferente do que ocorre no mundo clássico, por terem sido quantizados. Experimentalmente, alguns jogos foram realizados, como é o caso do dilema do prisioneiro, realizado com ressonância magnética nuclear [35], pares de fótons emaranhados [36, 37], graus de liberdade de um feixe laser [38], polarização e modos transversos. Como neste último caso, outro jogo realizado experimentalmente utilizando os graus de liberdade de um feixe laser é o duelo quântico [39], apresentado nesta tese.

Neste cenário, onde estudamos jogos quânticos ou portas lógicas quânticas utilizando um feixe laser, surge a seguinte questão: como investigar efeitos quânticos utilizando um feixe laser clássico? Propostas e realizações experimentais explorando a descrição de estados quânticos em termos dos graus de liberdade clássicos da luz têm sido amplamente realizados na literatura [21, 38, 40, 41, 42, 43]. Também na óptica clássica existem configurações de campo que não podem ser descritas como um produto tensorial dos modos definidos por cada um dos graus de liberdade do sistema [44]. Mesmo nos casos em que o emaranhamento é uma regra importante, estados clássicos de um feixe laser, também conhecidos como modos não-separáveis, são utilizados para emular sistemas quânticos, ou seja, um análogo clássico do emaranhamento quântico [43, 45, 46, 47]. Os modos

não-separáveis são caracterizados por violarem uma desigualdade tipo-Bell [48, 49, 50]. Essa abordagem tem atraído um interesse crescente devido aos aspectos fundamentais envolvidos e pelo potencial de aplicações em processos de informação com óptica clássica [51, 52, 53, 54, 55, 56, 57]. Uma abordagem genuinamente quântica para estes experimentos seria feita utilizando fontes de fóton único e fotodetetores. Isto pode ser realizado atenuando o feixe laser com objetivo de estabelecermos um regime de fotocontagem.

Nesta tese, os graus de liberdade de um feixe laser, a saber, polarização, modos transversos e caminho têm um caráter central. Eles serão utilizados para implementar operações condicionais de portas quânticas e realizar jogos quânticos. Em nível fundamental, vamos demonstrar experimentalmente que estados não-separáveis tripartidos são caracterizados por violar a desigualdade de Mermin. Podemos dividir esta tese em duas partes. A primeira consiste numa revisão bibliográfica, fundamental para a compreensão dos trabalhos experimentais e teóricos apresentados nessa tese - Capítulos 1 a 3. Na segunda parte, Capítulos 4 a 7, discutimos cada um dos trabalhos realizados ao longo desta tese.

Iniciamos a parte de revisão com o Capítulo 1, onde apresentamos os graus de liberdade de um feixe laser que serão utilizados ao longo dessa tese, a saber, modos transversos, polarização e caminho. O Capítulo 2 traz uma breve introdução de informação e computação quântica definindo q-bits e algumas portas quânticas mais relevantes para o nosso trabalho. A partir daí, codificamos os graus de liberdade do feixe laser como q-bits fotônicos. Por fim, realizamos uma descrição quântica dos nossos modos não-separáveis. Essa abordagem é importante para discutirmos a diferença entre os modos não-separáveis e estados quânticos emaranhados e para mostrar que podemos levar o feixe laser a um regime quântico simplesmente atenuando o feixe laser a um regime de fotocontagem. No Capítulo 3 apresentamos um panorama da Teoria dos Jogos, especialmente dos jogos quânticos. Discutiremos o dilema do prisioneiro, pois se trata de um paradigma para jogos de cooperação e o duelo quântico sequencial, um jogo de conflito, onde os jogadores atiram um no outro em sequência. Este último tem um papel de destaque nessa tese.

No Capítulo 4 apresentamos o duelo quântico simultâneo [58]. Neste jogo, ambos os jogadores atiram um no outro simultaneamente, diferente do duelo quântico sequencial discutido no Capítulo 3, Seção 3.3. Para esta tarefa, construímos um operador unitário simultâneo, em outras palavras, temos um único operador unitário que considera os

parâmetros ou habilidades tiro dos duelistas, que chamamos Alice e Bob. Assim, o número de tiros simultâneos depende do número de *rounds* e isso equivale ao número de vezes que o operador atua em um dado estado inicial dos jogadores. Apresentamos também os resultados teóricos do duelo para diferentes número de *rounds* e com os jogadores iniciando o jogo em diferentes estados.

No Capítulo 5 apresentamos a discussão sobre a implementação de dois jogos quânticos utilizando óptica linear. Primeiramente, discutimos a implementação experimental do duelo quântico sequencial [32] com óptica linear [39]. Nesse cenário, o estado de cada jogador, Alice e bob, é codificado em modos transversos Hermite-Gauss e polarização, respectivamente. Durante o duelo simulamos alguns estados de entrada e discutimos os resultados experimentais, comparando-os com os teóricos. Em seguida, apresentamos a proposta experimental para o duelo quântico simultâneo, discutido no Capítulo 4. Para essa implementação experimental utilizamos um par de fótons emaranhados produzidos por conversão paramétrica descendente (*SPDC*) da luz [58].

No Capítulo 6 apresentaremos um experimento onde geramos um estado tipo-*GHZ* utilizando os seguintes graus de liberdade de um feixe laser, modos transversos, polarização e caminho. A partir daí, mostramos experimentalmente que esse estado tripartido viola uma desigualdade tipo-Mermin. Os cálculos detalhados desse estudo são apresentados no Apêndice A. As medidas foram realizadas utilizando um interferômetro de Mach-Zehnder com um espelho adicional *MZIM* [59].

No Capítulo 7 discutiremos a realização de operações condicionais em graus de liberdade de um feixe laser que podem ser utilizadas para implementação de portas lógicas quânticas. Nesse contexto, apresentaremos dois circuitos experimentais correspondentes a portas lógicas quânticas de dois e três q-bits. A primeira é uma porta de fase π [60], onde os q-bits são codificados com os modos transversos Hermite-Gauss e polarização de um feixe laser. A segunda é uma porta de três q-bits, conhecida como porta Toffoli, onde os q-bits foram codificados com os modos transversos Hermite-Gauss, polarização e caminho de um feixe laser.

O Capítulo 8 organiza as principais conclusões dessa tese e discute algumas perspectivas. Os artigos publicados e submetidos, desenvolvidos ao longo da tese, são apresentados na lista de publicações (Anexo A).

1 Graus de liberdade de um feixe laser

A dinâmica do campo eletromagnético é descrita pelas equações de Maxwell, que para o vácuo, são escritas como segue,

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0, \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0, \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (1.4)$$

onde μ_0 e ϵ_0 são as constantes de permeabilidade magnética e permissividade elétrica do vácuo, respectivamente. Essas quatro equações constituem um conjunto de equações diferenciais acopladas de primeira ordem, que podem ser desacopladas aplicando o rotacional nas Eqs.1.3 e 1.4. Dessa forma, obtemos as Eqs.1.5 e 1.6,

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}, \quad (1.5)$$

$$\nabla^2 \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}, \quad (1.6)$$

onde fizemos $\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}$. Agora as equações desacopladas são de segunda ordem. Além disso, elas têm a mesma forma da equação da onda, que em três dimensões admitem algumas classes de soluções. A mais simples, que vamos tratar aqui, é a solução em ondas planas, onde um feixe luz monocromático se propaga na direção z , por exemplo. Nesse caso, os campos $\vec{E}(\vec{r}, t)$ e $\vec{B}(\vec{r}, t)$ têm a seguinte forma,

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}, \quad (1.7)$$

$$\vec{B}(z, t) = \vec{B}_0 e^{i(kz - \omega t)}, \quad (1.8)$$

onde $k = \omega/c$, z é a direção de propagação dos campos \vec{E}_0 e \vec{B}_0 são vetores reais. Sabemos que efeitos de difração e da própria propagação de um feixe laser provocam variações no perfil transversal do feixe xy . Entretanto, vamos considerar que ondas planas podem ser utilizadas como uma aproximação para um feixe laser colimado, em regiões próximas ao

centro do feixe. As ondas planas serão utilizadas para a discussão sobre polarização da luz neste capítulo.

Através das Eqs.1.5 e 1.6 e suas respectivas soluções, 1.7 e 1.8, vemos que os campos elétrico e magnético são ondas que se propagam no espaço, oscilando em uma dada direção. Através das equações de Maxwell, 1.3 e 1.4, sabemos que o campo elétrico sempre oscila perpendicularmente ao campo magnético, de forma que $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$, como ilustra a Fig. 1.

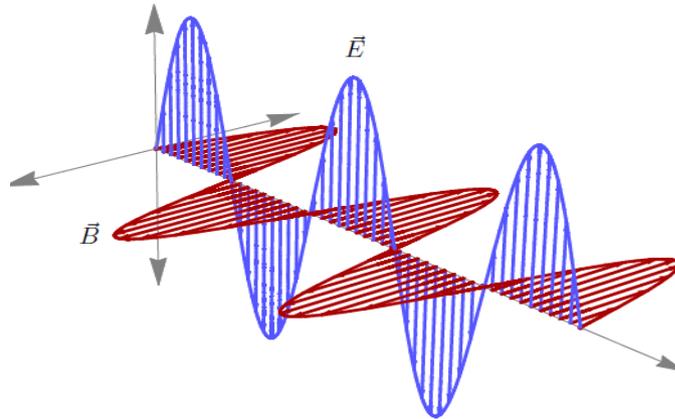


Figura 1: Representação da onda eletromagnética gerada no *MATHEMATICA*[®]. Os campos elétricos, \vec{E} e \vec{B} são ondas senoidais que oscilam em direções perpendiculares, x e y , respectivamente. \vec{E} e \vec{B} são perpendiculares à direção de propagação da onda – eixo z

De forma geral, do formalismo das ondas mecânicas, sabemos que elas podem ser geradas a partir de vibrações que ocorrem longitudinalmente ou perpendicularmente à direção de propagação, sendo denominadas, respectivamente, ondas longitudinais e transversais. Para as ondas transversais, uma informação importante é que essas ondas podem ser polarizadas. No caso das ondas eletromagnéticas, onde o campo eletromagnético oscila perpendicularmente à direção de propagação, elas são ditas transversais e podem ser polarizadas. Na próxima seção vamos discutir a polarização da luz.

1.1 Polarização da Luz

Agora vamos discutir a polarização da luz, com base nas Ref. [61, 62, 63]. A definição de polarização será feita com respeito ao campo elétrico \vec{E} . A razão é que o campo elétrico tem um papel mais importante que o campo magnético na interação com a matéria. Para a onda plana, apesar do campo oscilar na posição e no tempo, em cada

ponto de cada uma das frentes de onda, definidas por um plano, a intensidade do campo elétrico é constante. Se pensarmos no campo \vec{E} com um vetor, o mesmo deve estar contido nesse plano, de forma que podemos escrever qualquer vetor em termos da base que define o plano, dada pela direção dos vetores unitários \hat{x} e \hat{y} . Dessa forma, a polarização é definida pelo comportamento do vetor \vec{E} , cujo módulo, direção e sentido podem variar com o tempo. A forma mais geral para uma onda plana monocromática que se propaga na direção \hat{z} é dada por,

$$\vec{E}(z, t) = (E_{0,x}\hat{x} + e^{i\delta}E_{0,y}\hat{y}) e^{i(kz-\omega t)}, \quad (1.9)$$

onde $E_{0,x}$ e $E_{0,y}$ são amplitudes reais constantes das componentes transversais \hat{x} e \hat{y} , e δ é a diferença de fase entre as duas componentes ($\delta = \delta_y - \delta_x$). A partir da Eq.1.9, podemos verificar três casos particulares. O caso mais simples de polarização ocorre quando a direção do campo elétrico \vec{E} se mantém constante e $\delta = n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Nesse caso, a luz é chamada linearmente polarizada. A Eq.1.9 tem a seguinte forma,

$$\vec{E}(z, t) = (E_{0,x}\hat{x} \pm E_{0,y}\hat{y}) e^{i(kz-\omega t)}, \quad (1.10)$$

onde o sinal $+$ ($-$) corresponde a n par (ímpar). Podemos notar ainda que a luz tem polarização vertical quando $E_{0,x} = 0$ e polarização horizontal quando $E_{0,y} = 0$.

No caso em que as condições $E_{0,x} = E_{0,y} = E_0$ e que $\delta = n\pi + \frac{\pi}{2}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) são satisfeitas, temos a luz circularmente polarizada. Isso faz com que a Eq.1.9 ganhe a seguinte forma,

$$\vec{E}(z, t) = E_0 (\hat{x} \pm i\hat{y}) e^{i(kz-\omega t)}, \quad (1.11)$$

onde o sinal $+$ ($-$) corresponde a n par (ímpar). Para n par a luz é circularmente polarizada à esquerda e para n ímpar a luz é circularmente polarizada à direita.

No caso em que $E_{0,x} \neq E_{0,y}$ e $\delta = n\pi + \frac{\pi}{2}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) a luz é elipticamente polarizada. A Eq.1.9 tem a seguinte forma,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = (E_{0,x}\hat{x} \pm iE_{0,y}\hat{y}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{z}-\omega t)}, \quad (1.12)$$

onde o sinal $+$ ($-$) corresponde a n par (ímpar). Para n par a luz é elipticamente polarizada à esquerda e para n ímpar a luz é elipticamente polarizada à direita.

O fato da luz ser polarizada tem importantes consequências na forma como a luz interage com a matéria. Neste trabalho, nos interessa discutir um tipo especial de material birrefringente amplamente conhecido, as placas de onda, cuja função é manipular a

polarização. Basicamente, uma placa de onda é um material onde a componente horizontal e vertical do campo eletromagnético propagam-se com velocidades diferentes, devido à birrefringência, ou seja, a diferença entre os índices de refração dos eixos vertical-y (eixo lento) e horizontal-x (eixo rápido) da placa, que possui espessura física d , como mostra a Fig.2.

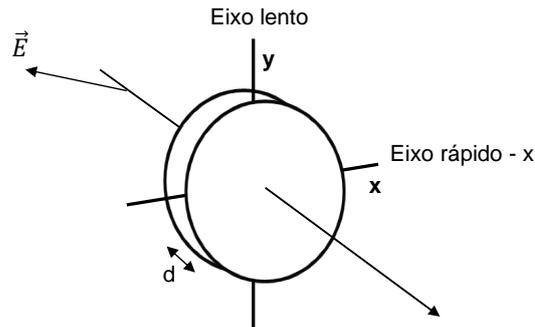


Figura 2: Placa birrefringente de espessura d . O campo elétrico \vec{E} incide na placa. O eixo $x(y)$ é chamado eixo rápido (lento)

A diferença de caminho óptico introduzida pela birrefringência é de $N\lambda$ entre as duas componentes do campo elétrico, onde N é um número real. De forma geral, podemos escrever,

$$N\lambda = d(n_l - n_r), \quad (1.13)$$

onde n_l e n_r são os índices de refração dos eixos lento e rápido, respectivamente, e λ é o comprimento de onda da luz incidente.

Em nosso caso, o interesse é em diferenças de caminho fixas entre as componentes vertical e horizontal. Especialmente, para o caso em que $N = \frac{1}{2}$ teremos uma defasagem de caminho de $\frac{\lambda}{2}$, que corresponde a uma placa de meia onda (HWP). Outro caso interessante é quando $N = \frac{1}{4}$, nesse caso a defasagem é de $\frac{\lambda}{4}$, que corresponde a uma placa de quarto de onda (QWP). No caso da HWP, isso equivale a uma diferença de fase $\delta = \pi$ entre as componentes do campo, como descrito pela Eq.1.9. Para a QWP, isso equivale a uma diferença de fase $\delta = \frac{\pi}{2}$ entre as componentes do campo, como descrito pela Eq.1.9.

Uma notação conveniente para escrever o campo elétrico e seu par de amplitudes complexas, descrito pela Eq.1.9, é a notação matricial conhecida como vetor de Jones.

Nesse caso, o campo polarizado pode ser escrito como,

$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{0,x} \\ e^{i\delta} E_{0,y} \end{bmatrix} e^{i(kz - \omega t)}. \quad (1.14)$$

Podemos exemplificar a utilidade de escrever os campos na forma matricial, utilizando os casos de polarização linear e circular da luz.

- Linearmente polarizado a $\pm 45^\circ$ em relação ao eixo x :

$$\vec{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{bmatrix}. \quad (1.15)$$

- Circularmente polarizado à esquerda (+) ou à direita (-):

$$\vec{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \pm i \end{bmatrix}. \quad (1.16)$$

A notação matricial, além de facilitar os cálculos, também é útil para estudar circuitos ópticos, onde dispositivos que compõem o circuito podem ser representados por matrizes 2×2 , conhecidas como matrizes de Jones. A seguir vamos apresentar as matrizes de Jones para a HWP e QWP.

- Placa de meia onda (HWP):

$$[HWP] = \begin{bmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{bmatrix}. \quad (1.17)$$

- Placa de quarto de onda (QWP):

$$[QWP] = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) + i \sin^2(\theta) & \cos(\theta) \sin(\theta)(1 - i) \\ \cos(\theta) \sin(\theta)(1 - i) & i \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) \end{bmatrix}. \quad (1.18)$$

Para ambos os casos, θ é o ângulo entre o eixo rápido e o eixo x . Para ilustrar como as matrizes de Jones são utilizadas, vamos imaginar um feixe de luz linearmente polarizado a 45° incidindo sobre uma HWP com um ângulo $\theta = 0$ (eixo rápido) com o

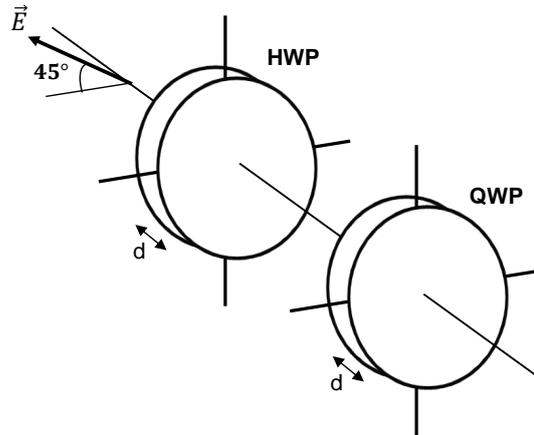


Figura 3: \vec{E} significa vetor campo elétrico. *HWP* significa placa de meia onda. *QWP* significa placa de quarto de onda.

eixo x . Em seguida o feixe emergente, incide em uma *QWP*, que também faz um ângulo de $\theta = 0$ (eixo rápido) com o eixo x . A Fig.3 ilustra o que foi descrito.

Nesse caso, podemos utilizar as matrizes de Jones para o campo e para as placas, descritos nas Eqs.1.15, 1.17 e 1.18, para obter a polarização do feixe após a passagem pelo par de placas. Elas devem estar dispostas conforme abaixo.

$$\begin{bmatrix} QWP \\ 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} HWP \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{E}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} LP \\ 1 \\ \pm 1 \end{bmatrix} = \frac{E}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} CP \\ 1 \\ \pm i \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

É importante notar que a ordem das matrizes é fundamental para entendermos o resultado final sobre o feixe polarizado. O lado esquerdo da equação acima mostra que a *HWP* é a primeira a atuar no campo, por isso temos, primeiramente, o produto da matriz da *HWP* pela matriz correspondente ao campo \vec{E} - onde utilizamos LP para linearmente polarizado. O resultado dessa operação é o campo que passa pela *QWP*, por isso a matriz da *QWP* aparece à esquerda, pois é o último dispositivo óptico por onde o feixe vai passar. Após a passagem pelo conjunto de placas, temos o resultado do campo dado pelo lado direito da Eq.1.19. Vemos que o feixe resultante é circularmente polarizado, conforme descrito na Eq.1.16. Toda a discussão acerca da polarização é fundamental para este trabalho, pois este é um dos graus de liberdade do campo eletromagnético que utilizaremos, como veremos adiante.

1.2 Caminho

Com as equações de Maxwell também podemos mostrar que a luz possui direção de propagação, carrega energia, momento e momento angular, bem como são aplicáveis as leis de conservação dessas grandezas. A direção de propagação de um feixe laser e a taxa de fluxo da energia eletromagnética é definida pelo vetor de Poynting (\vec{S}),

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E} \times \vec{B}). \quad (1.20)$$

Neste momento estamos interessados na direção de propagação em que a onda plana se propaga. Como podemos ver, o produto vetorial $\vec{E} \times \vec{B}$ nos dá essa direção de propagação z , que é perpendicular ao plano de oscilação vetores campo elétrico \vec{E} e magnético \vec{B} , como podemos observar na Fig.1. O caminho será um dos graus de liberdade do campo eletromagnético que utilizaremos neste trabalho. Ele pode ser manipulado, por exemplo, com divisores de feixe (BS) ou divisores de feixe polarizados (PBS) que definem novas direções de propagação para o feixe.

1.3 Modos Transversos

Nessa seção vamos encontrar com base na Ref. [64] a equação da Helmholtz fazendo a aproximação paraxial para um feixe laser gaussiano. Posteriormente, vamos demonstrar que a solução dessa equação em coordenadas cartesianas é descrita em termos dos polinômios de Hermite. Como vimos anteriormente, a dinâmica do campo elétrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ em um meio homogêneo é descrito pela Eq.1.5, cuja solução é dada pela pelo campo elétrico na forma da Eq.1.7, que representa uma onda plana. É conveniente representar a função da onda como segue,

$$u(\vec{r}, t) = \tilde{E}(\vec{r})e^{-ikz}e^{i\omega t}, \quad (1.21)$$

onde $\tilde{E}(\vec{r})$ é a amplitude complexa da onda e específica a estrutura transversa do feixe, o termo e^{-ikz} é a dependência espacial rápida do feixe, com período espacial de um comprimento de onda na direção z . Se substituirmos a Eq. 1.21 na Eq.1.5, obtemos a equação diferencial conhecida como Equação de Helmholtz,

$$[\nabla^2 + k^2]u(\vec{r}) = 0, \quad (1.22)$$

onde $u(\vec{r}) = \tilde{E}(\vec{r})e^{ikz}$. Para um feixe laser, suficientemente colimado, a estrutura transversa $\tilde{E}(\vec{r})$ varia muito pouco se comparada com o termo e^{ikz} . Substituindo $u(\vec{r}) = \tilde{E}(\vec{r})e^{-ikz}$ na

Eq.1.22, o termo e^{-ikz} pode ser cancelado e a equação pode ser reescrita como

$$\nabla^2 \tilde{E}(x, y, z) - 2ik\hat{z} \cdot \nabla \tilde{E}(x, y, z) = 0. \quad (1.23)$$

Agora temos uma equação que não depende do termo e^{-ikz} , mas há uma dependência em z para a amplitude $\tilde{E}(x, y, z)$. No entanto, essa dependência em z corresponde a uma variação lenta se comparada às variações da estrutura transversa do feixe em x e y . Podemos expressar matematicamente essa variação lenta por meio da aproximação paraxial, que pode ser escrita como

$$\left| \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial z^2} \right| \ll \left| \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial x^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial y^2} \right| \quad e \quad 2k \left| \frac{\partial \tilde{E}}{\partial z} \right|. \quad (1.24)$$

De forma geral, a equação paraxial de Helmholtz em coordenadas retangulares pode ser reescrita como

$$\nabla_t^2 \tilde{E}(x, y, z) - 2ik \frac{\partial \tilde{E}(x, y, z)}{\partial z} = 0, \quad (1.25)$$

onde $\nabla_t^2 = (\partial_x \hat{x} + \partial_y \hat{y})$ é o laplaciano transversa. A solução mais simples da Eq.1.25 é o feixe gaussiano ou modo fundamental, cuja solução é dada por

$$\tilde{E}(x, y, z) = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}} w(z)} \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} \right] \exp \left[-i \frac{k(x^2 + y^2)}{2R(z)} + i\psi(z) \right], \quad (1.26)$$

onde,

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2}, \quad (1.27)$$

é a largura do feixe em uma posição z e w_0 é a cintura do feixe, definida em $z = 0$. O raio de curvatura do feixe é dado por

$$R(z) = z + \frac{z_R^2}{z}. \quad (1.28)$$

A fase de Gouy é dada por

$$\psi(z) = \tan^{-1} \left(\frac{z}{z_R} \right). \quad (1.29)$$

O comprimento de Rayleigh é definido por

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}. \quad (1.30)$$

A Fig.4 abaixo ilustra cada um dos parâmetros descritos acima. Além disso, mostramos uma simulação do perfil de intensidade ¹ do feixe gaussiano.

¹ Todos os perfis de intensidade deste capítulo foram gerados no *MATHEMATICA*[®]

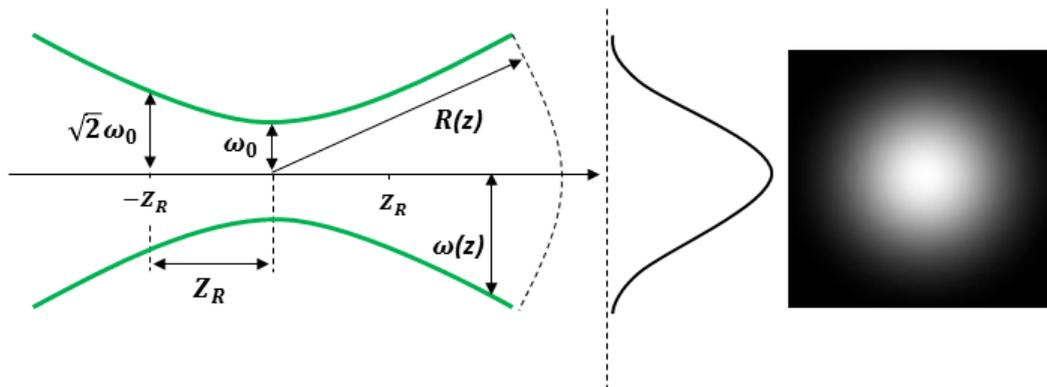


Figura 4: Propriedades de um feixe Gaussiano. Perfil de intensidade transversal de um feixe gaussiano.

É importante salientar que a Eq.1.26 só é válida para o intervalo $(-z_R, z_R)$. Fora desse intervalo o feixe se comporta como uma onda esférica com origem na cintura do feixe.

Além da solução fundamental – modo gaussiano, podemos estudar soluções em ordens mais altas da Eq.1.25. Cada uma dessas soluções corresponde a um modo transversal do feixe laser. Num primeiro momento, vamos estudar os modos Hermite-Gauss e, em seguida, vamos estudar os modos Laguerre-Gauss. Isso será feito resolvendo a equação de Helmholtz em coordenadas cartesianas e cilíndricas.

1.3.1 Modos Hermite e Laguerre Gauss

A solução mais geral da equação paraxial (Eq.1.25) em coordenadas cartesianas, que produz os modos HG, é dada por

$$H_{m,n} = \tilde{E}_{m,n}(x, y, z) = \frac{C_{nm}}{w(z)} H_n \left[\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right] H_m \left[\frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right] \times \\ \times \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} \right] \exp \left[-i \frac{k(x^2 + y^2)}{2R(z)} \right] \exp [-i(n + m + 1)\psi(z)], \quad (1.31)$$

onde H_n e H_m são os polinômios de Hermite e a ordem dos modos é dada por n, m . Além disso, os modos HG formam uma base ortonormal de soluções da equação paraxial. A Fig.5 mostra o perfil de intensidade de alguns dos modos HG, $H_{m,n}$.

Vemos que o modo HG_{00} ou modo fundamental tem a distribuição de um feixe com perfil gaussiano, como discutido anteriormente. À medida que a ordem do modo aumenta o perfil de intensidade muda. Notamos que para $n = 1$ o perfil de intensidade é dividido horizontalmente em duas *regiões*, se $n = 2$ a divisão ocorre em três regiões horizontais

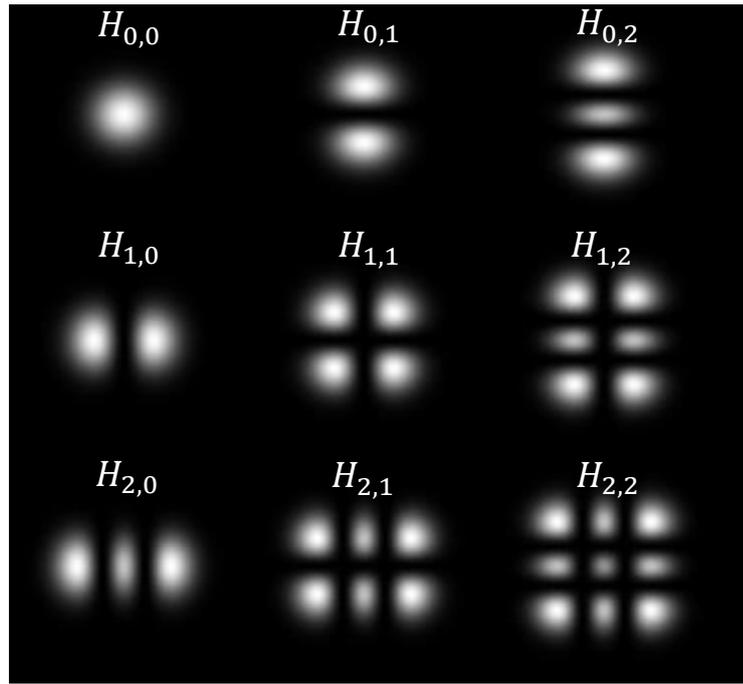


Figura 5: Perfil de intensidade dos modos Hermite-Gauss, $H_{m,n}$.

e assim sucessivamente. Para $m = 1$ o perfil de intensidade é dividido verticalmente em duas regiões, $m = 2$ a divisão ocorre em três regiões verticais e assim sucessivamente. Quando $m = 2$ e $n = 2$ vemos o perfil de intensidade dividido em três regiões verticais e três horizontais. Neste trabalho, teremos uma atenção especial para os modos HG de primeira ordem.

Outros modos transversos importantes são os modos Laguerre-Gauss (*LG*). Esses modos são conhecidos por serem portadores de momento angular orbital (*MAO*). Isso significa que a frente de onda do feixe é helicoidal, com o vetor de onda \vec{S} espiralando em torno da direção de propagação [65], como ilustra a Fig.6 (b). No caso de uma frente de onda plana o MAO será nulo, como ilustra a Fig.6 (a). Isto é o que ocorre no caso dos feixes *HG*, que não possuem MAO.

Os modos *LG* são encontrados quando resolvemos a equação paraxial de Helmholtz, Eq.1.25, em coordenadas cilíndricas,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \tilde{E}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial \phi^2} + 2ik \frac{\partial \tilde{E}}{\partial z} = 0, \quad (1.32)$$

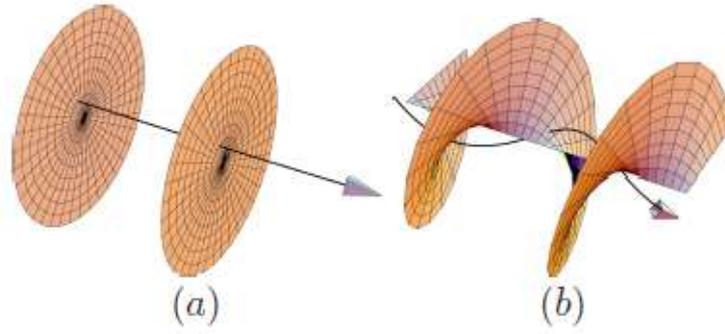


Figura 6: (a) Feixe com frente de onda plana e vetor de onda na direção de propagação do feixe. (b) Feixe Laguerre-Gauss com frente de onda helicoidal, o vetor de onda espirala em relação a direção de propagação.

que tem como solução os modos LG, como segue,

$$L_p^l = \tilde{E}_p^l(r, z, \phi) = \sqrt{\frac{2p!}{\pi w^2(z)(p + |l|)!}} \left[\frac{\sqrt{2}r}{w(z)} \right]^{|l|} \exp \left[-\frac{r^2}{w^2(z)} \right] \times L_p^l \left(\frac{2r^2}{w^2(z)} \right) \exp \left\{ i \left[kz - (2p + |l| + 1)\psi(z) + \frac{kr^2}{2R(z)} + l\phi \right] \right\}. \quad (1.33)$$

Aqui $w(z)$, w_0 , $\psi(z)$ e R_z são os mesmos parâmetros discutidos anteriormente. As soluções são dadas em termos dos polinômios associados de Laguerre, L_p^l . O inteiro $p \geq 0$ é o índice radial, associado ao número de anéis que aparecem na distribuição de intensidade. O inteiro l é o índice azimutal do modo. É importante mencionar que o termo ϕ , onde $\phi = \arctg \left(\frac{x}{y} \right)$, não é bem definido na origem do plano, sendo responsável por uma singularidade de fase nos modos Laguerre, que dará origem ao momento angular orbital do feixe. Dessa forma, quando $l \neq 0$ o feixe não apresenta luz na origem. Quando $l = 0$ e $p = 0$ o feixe apresenta o perfil gaussiano, conforme Eq.1.26. Na figura abaixo apresentamos alguns modos LG.

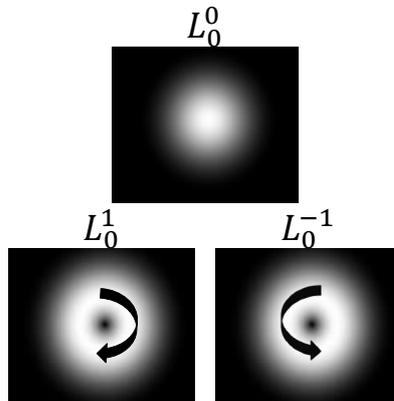


Figura 7: Perfil de intensidade dos modos Laguerre-Gauss.

O modo fundamental L_0^0 corresponde ao perfil gaussiano do feixe. Os modos Laguerre L_0^1 e L_0^{-1} são os modos de primeira ordem, com a frente de onda espiralando à direita ou à esquerda (representados por círculos com setas), respectivamente.

Há uma importante relação entre os modos LG e HG de primeira ordem, que consiste no fato dos modos poderem ser escritos como combinação linear um do outro [66]. Assim, podemos escrever,

$$L_0^{\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (HG_{1,0} \pm iHG_{0,1}). \quad (1.34)$$

Na figura abaixo, representamos a combinação linear descrita na Eq.1.34, utilizando o perfil dos modos de primeira ordem.

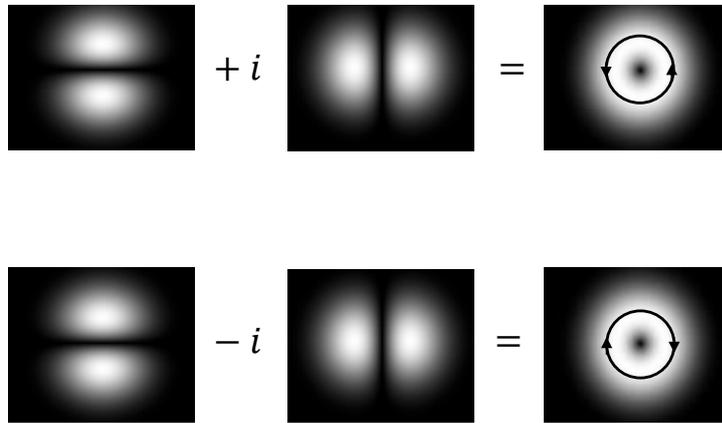


Figura 8: Relação entre os modos transversos HG e LG de primeira ordem.

Os modos LG e HG de primeira ordem são os mais utilizados experimentalmente, o que acontece também nesse trabalho, essencialmente, por dois motivos: são fáceis de serem manipulados experimentalmente e representam sistemas de dois níveis. Podemos também, escrever os modos HG como uma soma entre os modos horizontal e vertical sem o complexo i . Isso é análogo a uma soma de vetores, nesse caso, teremos um modo que é rodado em um dado ângulo θ , como segue,

$$HG_{0,1}^\theta = \cos \theta HG_{0,1} + \sin \theta HG_{1,0}. \quad (1.35)$$

Para o caso em que $\theta = 45^\circ$ e 135° , podemos escrever

$$HG_{0,1}^{45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} (HG_{0,1} + HG_{1,0}), \quad (1.36)$$

$$HG_{0,1}^{135^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} (HG_{0,1} - HG_{1,0}). \quad (1.37)$$

A Fig.9 ilustra as Eqs.1.36 e 1.37.

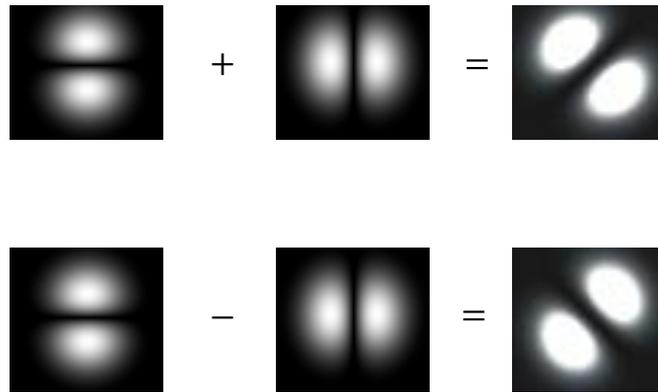


Figura 9: Combinação linear entre os modos Hermite-Gauss, $HG_{0,1}$ e $HG_{1,0}$.

O modo transverso HG na horizontal, somado ou subtraído do modo HG na vertical, nós dá um modo transverso rodado em 45° ou -45° . Vamos verificar na próxima seção, com base no discutido acima, que existe uma analogia entre os modos transversos e a polarização da luz.

1.4 Analogia entre polarização, modos transversos e caminho

Uma forma elegante de representar os estados de polarização da luz é através da conhecida esfera de Poincaré [67]. Nesta esfera, representada na Fig.10, qualquer estado de um feixe laser totalmente polarizado está localizado na superfície da esfera de raio unitário.

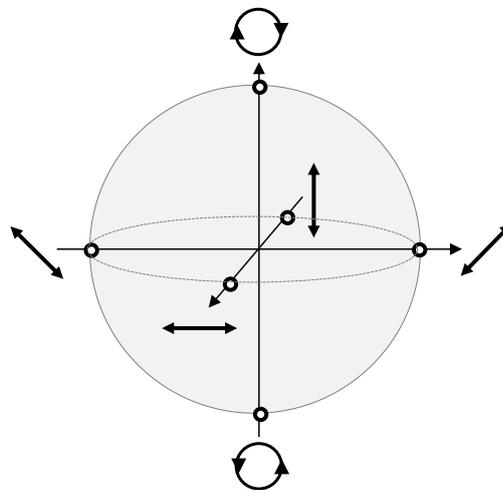


Figura 10: (a) Estados de polarização representados na esfera de Poincaré

Como podemos ver, estados de polarização linear correspondem ao equador da esfera. Estados circularmente polarizados correspondem aos polos da esfera. Estados elípticamente polarizados estão entre o equador e os polos.

Um ponto importante é que existe uma analogia entre a esfera de Poincaré para estados polarizados e os modos Hermite e Laguerre-Gauss de primeira ordem, conforme Ref. [68]. Essa analogia pode ser verificada pela equação

$$L_0^{\pm 1} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) HG_{1,0} + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) HG_{0,1}, \quad (1.38)$$

que representa um estado possível para o modo transversal do feixe em qualquer ponto na superfície da esfera mostrada na Fig.11. Os modos Hermite-Gauss em primeira ordem correspondem ao equador da esfera, em analogia com a polarização linear. Os polos da esfera correspondem aos modos Laguerre-Gauss, em analogia à polarização circular. Os modos entre o equador e os polos são os modos elípticos, quando as amplitudes dos modos $HG_{0,1}$ e $HG_{1,0}$ são desbalanceadas.

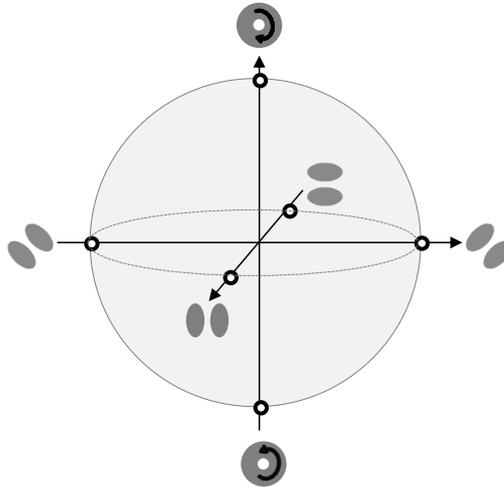


Figura 11: Modos transversos de primeira ordem na esfera de Poincaré.

Neste trabalho, propomos também uma analogia entre polarização/modos transversos para o caminho do feixe laser. Isso se deve ao fato de o caminho ser um dos graus de liberdade do feixe laser utilizados nessa tese, o que nos ensejou a buscar tal analogia. A Fig.12 mostra a esfera de Poincaré para o caminho.

Na esfera, cada um dos círculos, que chamamos A e B , correspondem a um dos caminhos possíveis. No equador da esfera temos o feixe pelo caminho A representado por

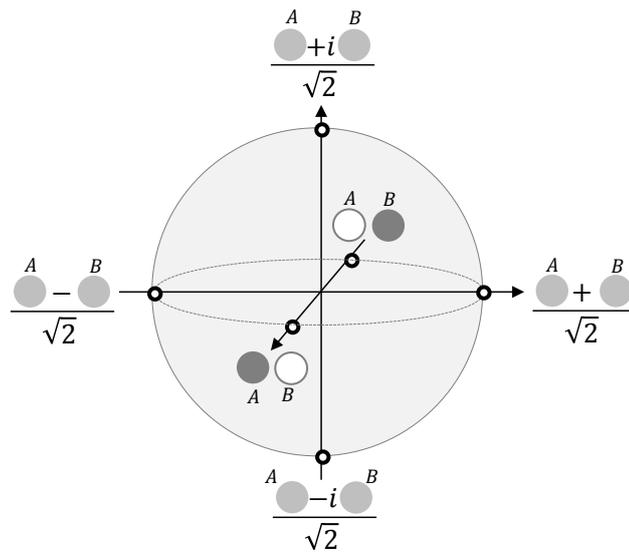


Figura 12: Modos do caminho representados na esfera de Poincaré.

um círculo completamente preenchido (cinza escuro). A ausência do feixe no caminho B é representado por um círculo vazio (branco). Nas extremidades do equador temos os feixes balanceados nos caminhos A e B – o feixe balanceado é representado por um círculo cinza claro. Notamos que entre os feixes há uma diferença de fase. Nos polos da esfera ocorre o mesmo, temos feixes balanceados que apresentam uma diferença de fase. Assim, o polo norte da esfera tem um fator i e o polo sul tem um fator $-i$. Vemos que polarização, modos transversos e caminho têm uma representação semelhante e este é um ponto fundamental para este trabalho.

2 Informação e computação quântica com graus de liberdade de um feixe laser

Neste capítulo, vamos discutir conceitos fundamentais da computação e informação quântica. Apresentaremos a definição de um q-bit e de algumas portas lógicas quânticas, tendo por base a Ref.[14]. Em seguida, discutiremos a codificação de q-bits no contexto da óptica linear, através da manipulação dos graus de liberdade de um feixe laser. Por fim, apresentaremos uma descrição quântica desses graus de liberdade. Essa discussão será feita com base nas Refs. [48] e [47].

2.1 Q-bits

A computação e informação clássica é construída sobre o conceito do bit ¹, que é implementado utilizando dois estados físicos, representados pelos valores 0 ou 1. Analogamente, a Computação e Informação quântica são construídas sobre o conceito de q-bit ou bit quântico. Neste cenário, o estado quântico que representa um q-bit é um sistema de dois níveis, dado pelos estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$, ou por uma superposição entre ambos, que é descrita por,

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle. \quad (2.1)$$

A equação acima descreve uma característica quântica, diferente do que acontece com o bit clássico, que equivale somente a dois estados possíveis, como os dois lados de uma moeda. Na mecânica quântica, o q-bit pode estar em uma superposição de $|0\rangle$ e $|1\rangle$. Uma representação interessante de um q-bit é a geométrica, onde um q-bit pode ser representado como pontos na superfície de uma esfera, conhecida como esfera de Bloch², conforme Fig.13.

Nessa representação, o raio deve ser unitário, $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, com α e β coeficientes complexos. Os ângulos θ e δ definem a posição na superfície da esfera. Dessa forma, podemos representar o estado de um q-bit como segue,

¹ Significa dígito binário, do inglês Binary digit

² De fato, a esfera de Bloch e Poincaré são equivalentes. A esfera de Poincaré é usada no contexto da polarização e a de Bloch no spin.

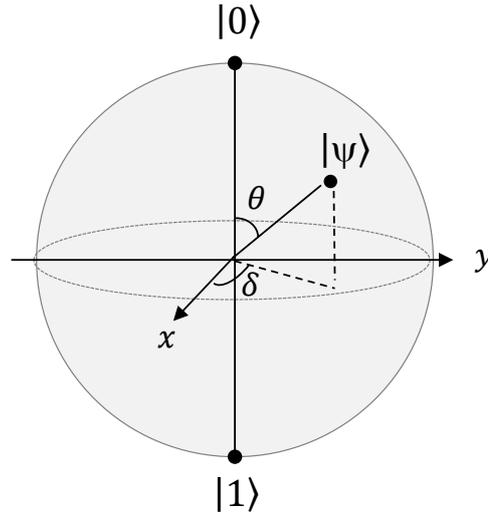


Figura 13: Esfera de Bloch para um q-bit.

$$|\psi\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|0\rangle + e^{i\delta}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)|1\rangle, \quad (2.2)$$

os ângulos θ e δ são números reais. Além da representação da esfera de Bloch ser útil para visualizar o estado de um q-bit, ela colabora para analogias entre o q-bit e estados de dois níveis. O estado descrito nas Eqs.2.1 e 2.2 será utilizado nas previsões teóricas e experimentais de nosso trabalho, uma vez que matematicamente tem o mesmo formato de um sistema de dois níveis. No caso do nosso trabalho, o estado de um q-bit será codificado utilizando os graus de liberdade de um feixe laser. Isso significa utilizar, por exemplo, os estados de polarização horizontal e vertical, $|H\rangle$ e $|V\rangle$, para codificar os estados de q-bits $|0\rangle$ e $|1\rangle$, respectivamente. Seguindo o mesmo raciocínio, utilizaremos os modos transversos e caminho de um feixe laser para codificar q-bits.

2.2 Portas lógicas quânticas

No contexto da computação quântica ou do computador quântico, um dos princípios básicos é a montagem de circuitos quânticos, que envolvem necessariamente portas lógicas quânticas, sendo estas fundamentais para estabelecer uma computação universal. Portas lógicas são necessárias pela capacidade de manipular a informação ou estados quânticos realizando operações sobre o estado/sistema, possibilitando a implementação de protocolos de comunicação e algoritmos quânticos. Neste cenário, vamos apresentar algumas portas

quânticas de um, dois e três q-bits que desempenham importante papel na computação quântica.

Primeiramente, vamos discutir as portas de um q-bit. Basicamente, a única condição para caracterizar uma porta de um q-bit é que ela seja representada por uma matriz unitária $U_{2 \times 2}$, ou seja, $U^\dagger U = I$, onde I é a matriz identidade. Dessa forma, qualquer matriz unitária pode ser uma porta quântica possível, que é uma característica de um sistema quântico quando comparada com a ação de portas clássicas operando sobre um bit. Por opção, vamos mostrar três portas de um q-bit especialmente importantes, a porta *Não*, a porta *Hadamard* e a *porta de Fase*.

Classicamente, a operação da porta *Não* em um bit é descrita por trocar os estados de $0 \rightarrow 1$ e $1 \rightarrow 0$. Isso corresponde a levar o estado descrito na Eq.2.1 em

$$|\psi\rangle = \alpha |1\rangle + \beta |0\rangle. \quad (2.3)$$

Convenientemente, podemos mostrar a ação de uma porta *Não* sobre um estado como o da Eq.2.3 através de uma matriz,

$$X \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

de forma que,

$$X \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ \alpha \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

A primeira linha do vetor correspondente ao estado $|0\rangle$ e a segunda linha correspondendo ao estado $|1\rangle$.

A porta *Hadamard* tem a função de levar o estado $|0\rangle$ em $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ e $|1\rangle$ em $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$. Isto significa levar o q-bit a uma superposição balanceada, tal que, ao realizarmos uma medida temos 50% de chance de estar em $|0\rangle$ e 50% de estar em $|1\rangle$. Em termos da esfera de Bloch, isso equivale a estar no meio do caminho entre $|0\rangle$ e $|1\rangle$. Na notação matricial a porta H é descrita como segue,

$$H \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

Para ilustrar, podemos pensar na ação de uma porta Hadamard sobre um estado inicial descrito na Eq.2.3, de forma que,

$$H \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha - \beta \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Outra ilustração interessante é pensar no caso em que a porta Hadamard atua em um estado de entrada $|\psi\rangle = |0\rangle$. Nesse caso, teremos:

$$H \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Isso significa que a porta Hadamard foi responsável por transformar $|0\rangle$ em uma superposição $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$. Nossa última porta quântica de um q-bit a ser discutida é a porta de fase S , que faz a operação descrita pela matriz

$$S \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

A porta S é responsável por adicionar uma fase relativa entre os coeficientes. Por exemplo,

$$S \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \alpha \\ e^{i\phi}\beta \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

No cenário dos sistemas com dois q-bits, vamos apresentar a porta Não-controlada ($CNOT$) e a porta de fase controlada. A porta Não-controlada ($CNOT$) tem dois q-bits de entrada, o primeiro q-bit é chamado de *controle* e o segundo *alvo*. Ela está representada na Fig.14.

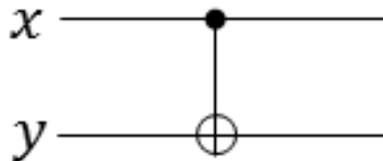


Figura 14: Circuito que representa a porta $CNOT$.

Em termos da base computacional a ação da porta $CNOT$ é dada pela soma binária módulo 2 entre o primeiro e o segundo q-bit, $|x\rangle|y\rangle \rightarrow |x\rangle|x \oplus y\rangle$. Essa soma é dada sa

seguinte forma: $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 0 = 1$ e $1 + 1 = 0$. A ação da porta equivale a mudar o q-bit *alvo* se o q-bit *controle* for igual a $|1\rangle$ e não fazer nada quando o q-bit *controle* for igual a $|0\rangle$. Podemos sumarizar a ação da porta *CNOT* sobre os estados de entrada e suas respectivas saídas da seguinte forma: $|00\rangle \rightarrow |00\rangle$; $|01\rangle \rightarrow |01\rangle$; $|11\rangle \rightarrow |10\rangle$ e $|10\rangle \rightarrow |11\rangle$.

Outra porta importante para computação universal é a porta de fase controlada de dois q-bits que adiciona uma diferença de fase ϕ no estado $|11\rangle$. A Fig. 15 mostra o circuito que representa a porta de fase.

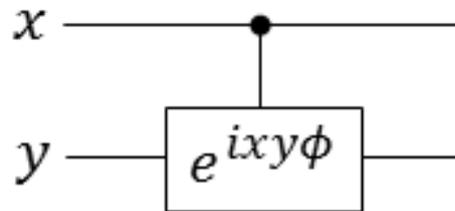


Figura 15: Circuito que representa a porta de fase.

A ação da porta sobre os estados de entrada e suas respectivas saídas podem ser sumarizadas da seguinte forma: $|00\rangle \rightarrow |00\rangle$; $|01\rangle \rightarrow |01\rangle$; $|10\rangle \rightarrow |10\rangle$ e $|11\rangle \rightarrow e^{i\pi}|11\rangle$. Esta porta tem um papel de destaque nesta tese, pois no Capítulo 5 apresentaremos um experimento para a porta de fase controlada, utilizando graus de liberdade de um feixe laser para codificar q-bits.

No cenário das portas quânticas de três q-bits, a porta Toffoli tem um papel de destaque, por se tratar de uma porta universal para computação clássica reversível. Isso garante que computadores quânticos são capazes de realizar qualquer operação que possa ser feita por um circuito clássico [14]. É claro que além de simular os computadores clássicos, os computadores quânticos são capazes de realizar simulações mais poderosas, por exemplo, com melhor desempenho, muito mais velocidade e algoritmos mais eficientes.

A porta Toffoli tem três q-bits de entrada e três de saída, dois q-bits são chamados de *controle* e o último q-bit é o *alvo*. A ação da porta Toffoli não altera o estado dos dois primeiros q-bits, ela só permuta o terceiro quando os dois primeiros são iguais a $|1\rangle$. Em forma de circuito isso é representado na Fig.16.

A atuação da porta Toffoli do circuito acima pode ser descrita na seguinte operação

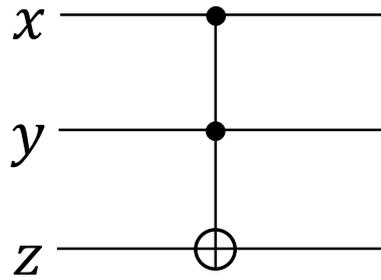


Figura 16: Circuito que representa a porta Toffoli.

$(x, y, z) \rightarrow (x, y, z \oplus xy)$. Isso significa que os dois primeiros q-bits não mudam. O terceiro q-bit muda conforme uma soma binária módulo 2 entre o terceiro q-bit z e o produto dos dois primeiros xy . Isso nos permite verificar com facilidade a Tabela verdade da porta Toffoli, mostrada na Tabela 1, onde estados de entrada e saída são avaliados mediante ação da porta.

Tabela 1: Tabela verdade da porta Toffoli.

Entrada	Saída
$ 000\rangle$	$ 000\rangle$
$ 001\rangle$	$ 001\rangle$
$ 010\rangle$	$ 010\rangle$
$ 011\rangle$	$ 011\rangle$
$ 100\rangle$	$ 100\rangle$
$ 101\rangle$	$ 101\rangle$
$ 110\rangle$	$ 111\rangle$
$ 111\rangle$	$ 110\rangle$

Podemos verificar que só nos dois últimos estados de entrada e saída têm o último q-bit permutado. Isso acontece pela soma binária módulo 2, pois para o penúltimo estado de entrada $|110\rangle$, o terceiro q-bit é permutado pela regra $0 \oplus 1 \cdot 1 = 1$. Assim o estado de saída é $|111\rangle$. O mesmo acontece para o último estado de entrada $|111\rangle$, onde a operação $1 \oplus 1 \cdot 1 = 0$. Dessa forma, o estado de saída é $|110\rangle$. Para os outros seis primeiros estados de entrada, nada acontece, ou seja, estados de entrada e saída são iguais. Isto pode ser visto seguindo as mesmas regras discutidas anteriormente.

O estudo das portas lógicas quânticas é fundamental para computação quântica. Em função disso, vários sistemas físicos diferentes têm sido estudados para implementá-las. Na próxima seção, discutiremos como portas quânticas associadas para sistemas de dois q-bits podem gerar estados de Bell. Também apresentaremos o estado GHZ, um análogo

ao estado de Bell para três q-bits.

2.3 Estados de Bell e GHZ

Uma característica importante de algumas portas lógicas quânticas é o fato delas atuarem ou produzirem estados em superposição. Para um sistema bipartido, essas portas são capazes de produzir estados emaranhados ou estados de Bell. Um sistema quântico composto é dito emaranhado quando o estado de cada um dos componentes do sistema não pode ser descrito independentemente [8]. Além de indicar uma característica exclusivamente quântica, estados emaranhados são uma fonte para vários protocolos de informação quântica [14]. Uma porta *Hadamard* seguida de uma *C – NOT* pode ser utilizada para gerar os estados de Bell, conforme ilustra a Fig.17.

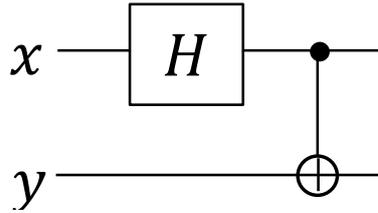


Figura 17: Circuito de portas quânticas capazes de gerar os estados de Bell.

Nessa figura, x representa o primeiro q-bit e y representa o segundo q-bit. Por exemplo, se o estado de entrada é $|01\rangle$, a transformação *Hadamard* leva o primeiro q-bit para $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ e o estado de dois q-bits será $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes |1\rangle$. A ação da CNOT leva o estado para $\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$. Dessa forma, considerando as entradas $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ e $|11\rangle$, teremos, respectivamente, os seguintes estados de Bell,

$$|\psi_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \quad (2.11)$$

$$|\psi_{01}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle), \quad (2.12)$$

$$|\psi_{10}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle), \quad (2.13)$$

$$|\psi_{11}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle). \quad (2.14)$$

Os estados de Bell são conhecidos por serem maximamente emaranhados. Uma característica importante desses estados é que eles não podem ser fatorados, como o produto tensorial dos estados de 1 q-bit.

Da mesma forma que estudamos os estados emaranhados ou estados de Bell para dois q-bits, podemos estudar sistemas emaranhados de três q-bits. Para estes sistemas tripartidos, conhecidos como estados GHZ (Greenberger, Horne e Zeilinger), um estado emaranhado possível, [69] é dado por,

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle). \quad (2.15)$$

A interpretação desse estado é análoga a dos estados de Bell, a única diferença é o fato de termos três q-bits, codificados em diferentes estados de dois níveis. Mermin [70] mostra que qualquer teoria de variável oculta local para sistemas tripartidos deve satisfazer a desigualdade,

$$M = \langle ZZZ \rangle - \langle ZXX \rangle - \langle XZX \rangle - \langle XXZ \rangle \leq 2, \quad (2.16)$$

onde X, Y, Z representam os operadores de Pauli.

De forma adicional, podemos ainda reescrever o estado $|GHZ\rangle$ em um estado equivalente, que chamaremos de GHZ_2 , i.e., com operações locais unitárias que levam a:

$$|GHZ_2\rangle = \frac{1}{2}(|000\rangle - |011\rangle - |101\rangle - |110\rangle). \quad (2.17)$$

Os estados descritos na Eq. 2.17 viola a desigualdade de Mermin, descrita na Eq.2.16. Para isto $\langle ZZZ \rangle = +1$ e $\langle ZXX \rangle = \langle XZX \rangle = \langle XXZ \rangle = -1$, resultam em $M = 4$, o valor algébrico máximo para violação da desigualdade de Mermin (2.16).

Análogo ao que acontece na desigualdade de Bell, um sistema tripartido emaranhado pode ser caracterizado por violar a desigualdade de Mermin. Nesta tese mostraremos a violação da desigualdade de Mermin para estados não-separáveis tripartes. Isso será feito codificando q-bits em graus de liberdade de um feixe laser. Na próxima seção discutiremos a codificação de q-bits nestes graus de liberdade.

2.4 Q-bits fotônicos

Nesta seção vamos codificar os q-bits em graus de liberdade de um feixe laser, a saber, polarização, modo transversal e caminho de um feixe laser. Esta abordagem é

bem conhecida e tem sido utilizada em diferentes experimentos para implementar tarefas quânticas [21, 41, 42, 43, 48, 49, 71]. Vamos utilizar como referência o estado descrito na Eq.2.1. Sendo assim, temos que escolher os graus de liberdade de um feixe laser que possam ser descritos como um sistema de dois níveis. Com a polarização isto é muito natural, pois temos polarizações ortogonais, H e V , e podemos codificar $|H\rangle \rightarrow |0\rangle$ e $|V\rangle \rightarrow |1\rangle$. Considerando a analogia entre a polarização e os modos transversos de primeira ordem, descritos no Capítulo 1, a codificação dos modos HG também é direta $|HG_{01}\rangle \equiv |h\rangle \rightarrow |0\rangle$ e $|HG_{10}\rangle \equiv |v\rangle \rightarrow |1\rangle$. Para o caminho, temos que dicotomizar as direções de propagação do feixe, escolhendo duas possíveis, por exemplo, podemos escolher o caminho de cima $|cima\rangle \rightarrow |0\rangle$ e o de baixo $|baixo\rangle \rightarrow |1\rangle$, em um dado circuito. Uma representação útil para estados de dois níveis foi discutida e pode ser vista na esfera de Poincaré, descrita na Seção 1.4.

2.5 Descrição quântica dos modos não-separáveis

Seguindo as Ref. [47, 48], vamos discutir as diferenças entre os modos não-separáveis e estados quânticos emaranhados. Para iniciar, vamos utilizar dois graus de liberdade do campo eletromagnético que são sistemas de dois níveis. Primeiramente, vamos considerar a polarização linear horizontal (H) e vertical (V), cujos vetores de base são definidos como \hat{e}_H e \hat{e}_V , respectivamente. Com relação aos modos transversos Hermite–Gauss em primeira ordem HG_{10} e HG_{01} , vamos considerar os vetores de base como $\psi_h(\vec{r})$ e $\psi_v(\vec{r})$, respectivamente. Dessa forma, podemos definir um modo spin-órbita arbitrário, combinando esses dois graus de liberdade de um feixe laser, como

$$\vec{E}(\vec{r}) = A_{H,h}\psi_h(\vec{r})\hat{e}_H + A_{H,v}\psi_v(\vec{r})\hat{e}_H + A_{V,h}\psi_h(\vec{r})\hat{e}_V + A_{V,v}\psi_v(\vec{r})\hat{e}_V, \quad (2.18)$$

onde $A_{i,j}$ são as amplitudes, $i = H, V$ e $j = h, v$ são os índices dos modos transversos e polarização. Podemos definir dois tipos de modos spin-órbita, os separáveis e os não-separáveis. Um modo separável arbitrário de polarização e modos transversos é definido como segue,

$$\vec{E}(\vec{r}) = [(A_v\psi_v(\vec{r}) + A_h\psi_h(\vec{r})) (A_V\hat{e}_V + A_H\hat{e}_H)], \quad (2.19)$$

onde $\sum_{i,j} |A_i A_j|^2 = 1$. Os índices i e j são os mesmos apresentados anteriormente. Podemos notar que o modo separável mais geral é fatorável, que também é uma característica de

sistemas quânticos não emaranhados. Já os sistemas quânticos emaranhados são caracterizados por não poderem ser fatorados. A seguir vamos verificar a mesma característica em nossos modos não-separáveis. Para isso vamos utilizar a eq. 2.18 e a definição de concorrência para estados puros para caracterizar separabilidade e não-separabilidade,

$$C = 2\|A_{V,v}A_{H,h} - A_{V,h}A_{H,v}\|, \quad (2.20)$$

quando $C = 0$ temos um modo separável (pode ser fatorado) e quando $0 < C \leq 1$ temos um modo não-separável (que não pode ser fatorado). Dessa forma, modos maximamente não-separáveis terão $C = 1$ e podem ser escritos como,

$$\Psi_{\pm}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_h(\vec{r})\hat{e}_H \pm \psi_v(\vec{r})\hat{e}_V] \quad (2.21)$$

$$\Phi_{\pm}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_h(\vec{r})\hat{e}_V \pm \psi_v(\vec{r})\hat{e}_H], \quad (2.22)$$

onde os modos (Ψ_{\pm}) e (Φ_{\pm}) correspondem a modos transversos com polarização radial e azimutal, respectivamente. Avaliando as Eqs.2.21 e 2.22, vemos que os modos não separáveis (clássicos) são análogos ao estados de Bell. Além de nos chamar a atenção, esta é uma propriedade que tem sido explorada na literatura e que também será explorada nessa tese. Naturalmente, surge uma importante questão: como podemos utilizar experimentalmente modos clássicos de um feixe laser para estudar regimes quânticos? A resposta está na quantização do campo. Nesse caso, utilizaremos a segunda quantização, onde a abordagem nos permite manter o controle sobre estados de muitas partículas, reexaminando a maneira como definimos um vetor de estado. No espaço de Hilbert o vetor de estado $|\psi\rangle_N$ descreve sempre o estado de N partículas. Para tratar operadores que conectam estados com número diferente de partículas, utilizamos o espaço de Fock. Isto será fundamental pois descrever um experimento clássico com analogia em um cenário completamente quântico, envolve descrever a evolução do operador de campo dentro dos aparatos experimentais, considerando todas as entradas e saídas possíveis.

Para descrever um feixe clássico em um cenário quântico, consideraremos o operador de campo eletromagnético descrito no quadro de Heisenberg. Na base $\{\psi_i(\vec{r})\hat{e}_j\}$ podemos

escrever o operador de campo como segue,

$$\mathbf{A}^{(+)}(\vec{r}, t) = e^{i(kz - \omega t)} \sum_{ij} a_{ij} \psi_i(\vec{r}) \hat{e}_j, \quad (2.23)$$

onde a_{ij} é o operador aniquilação do fóton no modo $\psi_i(\vec{r}) \hat{e}_j$. Podemos também definir novos operadores aniquilação se utilizarmos diferentes bases para decompor o operador de campo. Isto pode ser feito, se utilizarmos as Eqs.2.21 e 2.22 para definir os seguintes operadores aniquilação,

$$a_{\Psi_{\pm}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{Hh} \pm a_{Vv}) \quad (2.24)$$

$$a_{\Phi_{\pm}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{Hv} \pm a_{Vh}). \quad (2.25)$$

Os conjugados desses operadores são os operadores de criação do campo \vec{A} . Portanto o operador de campo elétrico pode ser escrito como,

$$\mathbf{A}^{(+)}(\vec{r}, t) = e^{i(kz - \omega t)} \sum_{\pm} a_{\Psi_{\pm}} \Psi_{\pm} + a_{\Phi_{\pm}} \Phi_{\pm}. \quad (2.26)$$

Com o campo quantizado, podemos estudar transformações entre estados com número diferentes de fótons. Nesse sentido, precisamos definir os estados de Fock - ou estados número, que podem ser criados a partir do vácuo de um dado estado com a atuação do operador criação do respectivo estado. Por exemplo, o estado de Fock do modo Ψ_+ , pode ser obtido da seguinte forma:

$$|N\rangle_{\Psi_+} = \frac{(a_{\Psi_+}^\dagger)^N}{\sqrt{N!}} |0\rangle_{\Psi_+}. \quad (2.27)$$

É importante notar que apesar de mostramos um único exemplo, o estado é multimodo. Isso significa que poderíamos escrever outras equações para os modos Ψ_{\pm} e Φ_{\pm} . Se considerarmos somente a entrada de um único fóton, ($N = 1$) na Eq.2.27, em um aparato experimental capaz de gerar o estado Ψ_+ , teremos o seguinte estado de Fock,

$$|1\rangle_{\Psi_+} = a_{\Psi_+}^\dagger |0\rangle_{\Psi_+} \quad (2.28)$$

ou utilizando o hermitiano na Eq.2.24, podemos escrever,

$$|1\rangle_{\Psi_+} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{Hv}^\dagger \pm a_{Vh}^\dagger) |0\rangle_{\Psi_+}. \quad (2.29)$$

Este é um ponto importante, pois devemos notar que apesar de utilizarmos como graus de liberdade de um feixe laser intenso os modos transversos e a polarização, podemos levá-lo a um regime quântico, simplesmente atenuando o feixe laser a um regime de fotocontagem. Apesar de não conseguirmos um regime de fóton único, podemos reduzir a intensidade contagem de centenas de fótons, o que pode ser descrito como um estado coerente. Como destacado na ref.[48], a coerência dos feixes clássicos tem um papel fundamental nesta analogia clássico-quântica. A superposição coerente desses feixes, que geram graus de liberdade não-separáveis, quando quantizadas produzem estados emaranhados em graus de liberdade, onde o emaranhamento se dá em um único fóton.

2.5.1 Não-separabilidade de um sistema Tripartite

Seguindo as ideias discutidas, a quantização do campo eletromagnético pode também ser realizada em um sistema com três graus de liberdade. Se adicionarmos o grau de liberdade *caminho*, os modos maximamente não-separáveis podem ser escritos, seguindo a mesma forma da Eq.2.21. Um exemplo de um modo não-separável utilizando três graus de liberdade do campo eletromagnético pode ser visto abaixo,

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_h(\vec{r})\hat{e}_H\hat{c}_0 + \psi_v(\vec{r})\hat{e}_V\hat{c}_1]. \quad (2.30)$$

Sendo $\psi_{v,h}$ e $\hat{e}_{H,V}$ os mesmo discutidos anteriormente e $\hat{c}_{0,1}$ são os caminhos possíveis para o feixe laser. Seguindo o mesmo raciocínio do campo eletromagnético quantizado será dado por,

$$\mathbf{A}^{(+)}(\vec{r}, t) = e^{i(kz-\omega t)} \sum_{ijk} a_{ijk} \psi_i(\vec{r}) \hat{e}_j \hat{c}_k, \quad (2.31)$$

onde \vec{k} é o índice para os dois caminhos possíveis para o feixe laser, 0 ou 1; i e j são os mesmos discutidos anteriormente. Os operadores de aniquilação são descritos por,

$$a_{\Psi} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{Hh0} + a_{Vv1}), \quad (2.32)$$

e considerando a entrada de um único fóton em um aparato experimental, podemos utilizar novamente a Eq.2.27 para ($N = 1$), para gerar o estado Ψ , teremos o seguinte estado de Fock,

$$|1\rangle_{\Psi} = a_{\Psi}^{\dagger} |0\rangle_{\Psi}. \quad (2.33)$$

Finalizando, vemos que da mesma forma discutida para um sistema bipartido, podemos levar um sistema tripartido, caracterizado pelos três graus de liberdade do

campo eletromagnético - polarização, modos transversos e caminho, a um regime quântico, simplesmente atenuando o feixe laser a um regime de fotocontagem. Nesse caso, temos um estado emaranhado em três graus de liberdade em um único fóton.

3 Teoria dos Jogos quânticos

A Teoria dos Jogos quânticos permite que novos algoritmos sejam estabelecidos através de novas formas de cooperação ou conflito entre jogadores. Para simular uma situação de conflito precisamos definir um conjunto de N jogadores, ações que eles devem realizar, regras e uma tabela de penalidades e benefícios - do inglês *payoff*. Os estados iniciais dos jogadores podem, por exemplo, ser representados em um sistema físico de dois níveis, quando estamos tratando de um q-bit. Nesse caso, os jogadores podem iniciar o jogo em um estado puro, em superposição ou pode haver emaranhamento entre os estados dos jogadores. A ação de um jogador sobre o outro é realizada por um operador unitário U_n (onde n é número de vezes que o operador atua), capaz de mudar o estado do seu adversário. Os jogadores devem ainda, obedecer às regras do jogo, por exemplo, seguindo uma regra para atuação de operadores que não comutam. Depois disso, a tabela *payoff*, geralmente associada a probabilidade de medir estados de saídas, é determinada. No caso de uma situação de conflito, um dos jogadores deseja sempre maximizar sua tabela *payoff* e minimizar a de seus adversários. Para um jogo cooperativo, o objetivo dos jogadores é sempre otimizar a tabela *payoff* de todos os jogadores. No que concerne a jogos cooperativos o dilema do prisioneiro é um paradigma de cooperação.

Neste capítulo, discutiremos a Teoria dos Jogos quânticos através de dois jogos que já foram implementados experimentalmente. O primeiro que apresentaremos é o dilema do prisioneiro, por seu pioneirismo na área. As discussões serão feitas a partir da Ref. [26] e [38]. Em seguida, finalizaremos o capítulo apresentando o duelo quântico, seguindo a Ref. [32]. Este merece nossa atenção especial, pois é um dos trabalhos experimentais realizados nessa tese. O experimento realizado será apresentado no Capítulo 5.

3.1 Dilema do prisioneiro

Neste jogo, dois jogadores, Alice e Bob são acusados de um crime. Há duas opções para cada um dos jogadores, cooperação (C) ou delação (D) de um com relação ao outro. Note que, classicamente isso corresponde a 1 bit de informação, C e D . Dependendo da escolha dos acusados eles podem reduzir o aumentar sua pena. É claro que isso depende

das quatro possíveis combinações entre as escolhas dos jogadores; Alice e Bob cooperam, Alice coopera e Bob delata e vice-versa e ambos delatam. Isto é sumarizado na Tabela 2, que é a tabela de redução de pena ou *payoff*, onde os índices A e B se referem as escolhas de Alice e Bob.

	C_B	D_B
C_A	(3, 3)	(0, 5)
D_A	(5, 0)	(1, 1)

Tabela 2: Tabela de redução de pena para o dilema do prisioneiro.

Nesta tabela, para um jogo cooperativo ambos os jogadores buscam maximizar o *payoff*, C_A, C_B . Isso significa encontrar a estratégia ótima de Pareto. Podemos exemplificar essa situação supondo que Bob mude de C_B para D_B . Nesse caso, Bob sai do ótimo de Pareto, isso implicará numa redução do *payoff* de Alice, conseqüentemente, num aumento do seu *payoff* (C_A, D_B). No entanto, numa situação de conflito cada um deseja melhorar o seu *payoff*. Nesse caso, ambos procuram o equilíbrio de Nash, D_A, D_B [32, 38]. Se qualquer jogador mudar unilateralmente sua jogada, por exemplo, se Bob muda de D_B para C_B , seu *payoff* será reduzido e o de Alice aumentará (D_A, C_B). O dilema acontece porque os dois estão separados e incomunicáveis.

Podemos considerar a quantização do dilema do prisioneiro [72]. Neste caso, cada jogador é descrito por um estado, onde cooperar C é representado pelo $|1\rangle$ e a delação é representada pelo $|0\rangle$. Assim, as escolhas possíveis para ambos os jogadores são $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle$ e $|11\rangle$. A grande diferença do jogo clássico é, por exemplo, o fato de jogadores poderem iniciar o jogo emaranhados, o que nos leva a resultados que só ocorrem nas previsões da mecânica quântica.

Na próxima seção, vamos estudar o duelo quântico sequencial. Este jogo tem características diferentes do dilema do prisioneiro, pois não há possibilidade de cooperação entre os jogadores. Os dois jogadores Alice e Bob duelam entre si, sempre com o mesmo objetivo, maximizar seu *payoff*.

3.2 Duelo quântico sequencial

Abbott e Flitney [73] introduziram um jogo quântico que pode ser modelado como uma luta de tiros entre dois jogadores, conhecido como duelo quântico. Para o duelo, o estado de cada jogador é representado por uma partícula quântica com spin meio e sua componente z representa o estado vivo ou morto, $|1\rangle$ e $|0\rangle$, respectivamente. O estado quântico do sistema é escrito como $|\Psi\rangle = |Alice\rangle \otimes |Bob\rangle$. Ambos jogadores só podem atuar sobre o estado de seu oponente - um caso oposto a esse é o jogo da roleta russa proposto em [74, 75] - com objetivo de inverter o spin do adversário para o estado morto. O operador mais geral para o duelo quântico, que representa a ação de um jogador sobre o estado do seu oponente é

$$A_B(\theta_1, \alpha_1, \beta_1) = \left[e^{-i\alpha_1} \cos(\theta_1/2) |11\rangle + ie^{i\beta_1} \sin(\theta_1/2) |10\rangle \right] \langle 11| \quad (3.1) \\ + \left[e^{i\alpha_1} \cos(\theta_1/2) |10\rangle + ie^{-i\beta_1} \sin(\theta_1/2) |11\rangle \right] \langle 10| + |0\rangle\langle 0| \otimes \mathbb{1},$$

que é o operador de Alice, que atua no estado de Bob, e

$$B_A(\theta_2, \alpha_2, \beta_2) = \left[e^{-i\alpha_2} \cos(\theta_2/2) |11\rangle + ie^{i\beta_2} \sin(\theta_2/2) |01\rangle \right] \langle 11| \quad (3.2) \\ + \left[e^{i\alpha_2} \cos(\theta_2/2) |01\rangle + ie^{-i\beta_2} \sin(\theta_2/2) |11\rangle \right] \langle 01| + \mathbb{1} \otimes |0\rangle\langle 0|,$$

que é o operador de Bob, que atua no estado de Alice. O operador identidade é $\mathbb{1}$ e os parâmetros θ_1 e θ_2 estão relacionados a habilidade de tiro - estes parâmetros podem ser ajustados como mostraremos em nossa realização experimental - de Alice e Bob, respectivamente, com $\theta_i \in [0, \pi]$ e $i = 1, 2$. Também vemos que esses operadores possuem dois parâmetros extras α_i e β_i , onde $i = 1$ está associado a Alice e $i = 2$ está associado a Bob; ambos estão contidos no intervalo $[-\pi, \pi]$. Os primeiros (α_1 e α_2), se cuidadosamente controlados, podem determinar a vitória de um jogador com habilidade de tiro baixa, como foi mostrado por Schmidt e Paiva [32]. Podemos notar que nos operadores existem termos para reviver Bob ($|11\rangle\langle 10|$) em A_B , bem como para reviver Alice ($|11\rangle\langle 01|$) em B_A . Ambos termos são obrigatórios para que as operações sejam unitárias. O último termo de cada operador mostra que o jogador morto não pode atirar em seu oponente.

As regras do duelo quântico são as seguintes: um juiz determina o número de vezes que cada jogador irá atirar, então jogadores atiram um no outro sequencialmente, até o *round* final. Por este motivo chamamos de duelo quântico sequencial. Quando o duelo

termina o juiz calcula as funções *payoff* e o ganhador é o jogador que tem o maior *payoff*. O estado quântico do sistema depois de n rounds é dado por,

$$|\Psi_n\rangle = (B_A A_B)^n |\psi_0\rangle, \quad (3.3)$$

onde $|\psi_0\rangle$ é o estado inicial do sistema. A escolha mais natural para $|\psi_0\rangle$ é o análogo clássico de dois jogadores vivos, i.e., $|\psi_0\rangle = |11\rangle$. Entretanto, existem também investigações de combate entre Alice e Bob, com o estado inicial de Bob, Alice ou de ambos, numa superposição de vivo ou morto.

Outro ponto importante é a construção da função *payoff* $\langle \$_A \rangle$, cujo objetivo é avaliar o estado de saída de cada jogador após o duelo e calcular o resultado de cada um, que sempre varia entre 0 e 1. A equação abaixo mostra a função *payoff* de Alice,

$$\langle \$_A \rangle = u_1 |\langle 10 | \Psi_n \rangle|^2 + u_2 |\langle 11 | \Psi_n \rangle|^2 + u_3 |\langle 01 | \Psi_n \rangle|^2, \quad (3.4)$$

onde u_1, u_2 e u_3 são os chamados parâmetros de utilidades, com $u_1 > u_2 > u_3$. O objetivo de cada jogador é maximizar sua função *payoff*. No caso em que o jogador é Alice, o *payoff* máximo deverá ser encontrado quando ele alcança seu principal objetivo: eliminar seu oponente e ficar viva (utilidade u_1). Também temos os casos onde ele não elimina seu oponente, mas permanece viva (utilidade u_2) e quando ela não elimina seu oponente e é eliminada (utilidade u_3). O caso em que Bob mata Alice não interessa para a função *payoff* de Alice. Uma escolha possível para os parâmetros é $u_1 = 1$, $u_2 = 1/2$, e $u_3 = 0$. Neste caso, Alice sempre quer se manter viva. Então, quando $\langle \$_A \rangle > 1/2$ é mais provável que Alice esteja viva e Bob morto. É importante mencionar que toda a discussão feita para Alice vale para função *payoff* de Bob.

Considerando cada um dos possíveis estados de Alice após um dado número n de rounds, $|\Psi_n\rangle$. Podemos calcular com facilidade as amplitudes de probabilidade de cada jogador estar vivo ou morto depois do duelo. Considerando o estado inicial $|\psi_0\rangle = |11\rangle$, depois do primeiro round teremos,

$$\begin{aligned} |\Psi_1\rangle = & e^{-i(\alpha_1 + \alpha_2)} \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) |11\rangle + ie^{i(\beta_2 - \alpha_1)} \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right) |01\rangle \\ & + ie^{i\beta_1} \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) |10\rangle. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Se o jogo prossegue com um segundo tiro de Alice, teremos o seguinte estado

$$\begin{aligned}
A_B |\Psi_1\rangle = & \left[e^{-i(2\alpha_1+\alpha_2)} \cos^2\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) - \text{sen}^2\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \right] |11\rangle \\
& + i e^{i\beta_1} \left[e^{-i(\alpha_1+\alpha_2)} \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) + e^{i\alpha_1} \right] \text{sen}\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) |10\rangle \\
& + i e^{i(\beta_2-\alpha_1)} \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{\theta_2}{2}\right) |01\rangle. \tag{3.6}
\end{aligned}$$

A probabilidade de cada um dos jogadores estar vivo ou morto pode ser facilmente calculada das Eqs.3.5 e 3.6 como uma função de seis parâmetros independentes θ_i, α_i e β_i para Alice e Bob. Como nós veremos na Capítulo 5, quando apresentaremos a realização experimental do duelo quântico sequencial, cada um destes parâmetros será controlado por um conjunto independente de componentes ópticos. Podemos verificar na Eq.3.6 que para o segundo tiro de Alice a fase β_i não é relevante para o cálculo das probabilidades. Com isso, para exemplificar o cálculo das probabilidades, vamos utilizar a situação mais simples, no que concerne aos referidos parâmetros, que corresponde a fixar as fases em zero, $\alpha_i = \beta_i = 0$. Para este caso, as probabilidades teóricas têm três resultados possíveis: vivo/vivo (P_{AA}), vivo/morto (P_{AD}) e morto/vivo (P_{DA}). No final do primeiro *round* as probabilidades são dadas por

$$|\langle 11 | \Psi_1 \rangle|^2 = P_{AA} = \cos^2(\theta_1/2) \cos^2(\theta_2/2), \tag{3.7a}$$

$$|\langle 10 | \Psi_1 \rangle|^2 = P_{AD} = \text{sen}^2(\theta_1/2), \tag{3.7b}$$

$$|\langle 01 | \Psi_1 \rangle|^2 = P_{DA} = \cos^2(\theta_1/2) \text{sen}^2(\theta_2/2), \tag{3.7c}$$

Se Alice faz um segundo tiro as probabilidades são dadas por

$$P_{AA}^1 = |\langle 11 | A_B | \Psi_1 \rangle|^2 = [\cos^2(\theta_1/2) \cos(\theta_2/2) - \text{sen}^2(\theta_1/2)]^2, \tag{3.8a}$$

$$P_{AD}^1 = |\langle 10 | A_B | \Psi_1 \rangle|^2 = 4 \cos^2(\theta_1/2) \cos^4(\theta_2/4) \text{sen}^2(\theta_1/2), \tag{3.8b}$$

$$P_{DA}^1 = |\langle 01 | A_B | \Psi_1 \rangle|^2 = \cos^2(\theta_1/2) \text{sen}^2(\theta_2/2). \tag{3.8c}$$

Sendo P_{AA}^1, P_{AD}^1 e P_{DA}^1 as probabilidades após o segundo tiro de Alice. Os índices A e D significam vivo e morto ¹. Outro caso interessante ocorre quando os estados de entrada de Alice e Bob são construídos como uma superposição dos estados vivo e morto, definidos por:

$$|\psi_0\rangle = (\cos(\omega_1) |0\rangle + \text{sen}(\omega_1) |1\rangle) \otimes (\cos(\omega_2) |0\rangle + \text{sen}(\omega_2) |1\rangle). \tag{3.9}$$

¹ Utilizamos o índice A do inglês *Alive* e D do inglês *Dead*. A opção da manutenção dos índices em inglês foi feita para manter a notação original do artigo publicado.

Sendo ω_1 e $\omega_2 \in [0, 2\pi]$. O jogo segue as mesmas regras e a função *payoff* é calculada usando Eq.3.4. Para $\omega_1 = \pi/2$ e $\omega_2 = \pi/4$ Alice inicia o duelo viva e Bob inicia o duelo numa superposição de vivo e morto. Portanto, o estado inicial é dado por $|\psi_0\rangle = |1\rangle \otimes (|1\rangle + |0\rangle)/\sqrt{2}$ e as probabilidades são dadas por

$$|\langle 11|\Psi_1\rangle|^2 = P_{AA}^s = \frac{1}{2} \cos^2(\theta_2). \quad (3.10a)$$

$$|\langle 10|\Psi_1\rangle|^2 = P_{AD}^s = \frac{1}{2} \quad (3.10b)$$

$$|\langle 01|\Psi_1\rangle|^2 = P_{DA}^s = \frac{1}{2} \sin^2(\theta_2) \quad (3.10c)$$

Isto significa que o resultado do duelo depende só da habilidade de tiro de Bob, uma vez que as probabilidades não dependem do parâmetro θ_1 . Usando as probabilidades acima apresentadas, a função *payoff* pode ser facilmente calculada para cada caso. Por esta razão a realização experimental do duelo com óptica linear, que será apresentada na Seção 5.1, terá enfoque nas probabilidades, que estão diretamente relacionadas com as medidas experimentais. É importante mencionar que a realização do duelo quântico seguirá as condições estabelecidas nesta seção, ou seja, faremos $\alpha_i = \beta_i = 0$ para a Eq.3.6.

4 Duelo quântico simultâneo

Neste capítulo vamos apresentar o duelo quântico simultâneo [58]. Este jogo é uma nova proposta inspirada no duelo quântico apresentado na Seção 3.3, onde os jogadores, Alice e Bob, atiram um no outro sequencialmente, seguindo as regras do jogo. No jogo que apresentaremos aqui, as regras são diferentes, os jogadores duelam atirando um no outro ao mesmo tempo. Isso requer um único operador de tiro simultâneo para ambos os jogadores. Além da construção do operador simultâneo, vamos discutir o resultado do duelo entre Alice e Bob para diferentes estados de entrada, por exemplo, em que ambos iniciam o duelo vivos ou numa superposição de vivo ou morto.

4.1 Jogadores e regras do jogo

O duelo quântico sequencial é um problema conhecido da Teoria dos Jogos formulado usando um sistema de dois níveis para representar o estado de cada jogador, Alice e Bob, que duelam um contra o outro. O estado de cada jogador é representado por um q-bit. Se o estado que representa o jogador for $|0\rangle$, dizemos que ele está morto. Se for $|1\rangle$, dizemos que está vivo. O estado que representa os jogadores pode ser descrito como,

$$|\psi\rangle = |Alice\rangle \otimes |Bob\rangle, \quad (4.1)$$

onde o primeiro q-bit é o estado de Alice e o segundo q-bit é o estado de Bob. Neste espaço de Hilbert quadridimensional, temos a seguinte base $\{|11\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |00\rangle\}$. Conforme discutido na Seção 3.3, em um duelo sequencial, os jogadores alternam suas jogadas, atirando um de cada vez, conforme requer o juiz. Apresentaremos agora, uma extensão do problema, o duelo simultâneo, que acontece quando Alice e Bob atiram um no outro simultaneamente. Neste sentido, o estado do sistema depois de n -rounds é dado por

$$|\psi_n\rangle = U_S^n |\psi_0\rangle, \quad (4.2)$$

onde o operador de tiro é representado por U_S (S significa simultâneo). O estado inicial, representado por $|\psi_0\rangle$, pode ser, por exemplo, o caso clássico onde dois jogadores iniciam o jogo vivos ($|11\rangle$) ou mesmo um caso onde ambos iniciem o jogo num estado de Bell, por exemplo, $|\Phi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle)$.

Para avaliar o duelo, vamos discutir a função *payoff* de Alice, que está associada às probabilidades dos jogadores estarem em um estado particular. Neste caso, teremos uma resposta com relação à melhor ou pior situação no duelo para Alice. A função *payoff* é construída como a soma dos produtos das probabilidades pelas utilidades. As utilidades são definidas da seguinte forma, u_1 , é a mais alta utilidade, pois corresponde ao melhor resultado para Alice, $|10\rangle$, onde ela está viva e Bob está morto. A segunda melhor utilidade, u_2 , ocorre quando ela ainda está viva, mas não consegue acertar Bob, $|11\rangle$. Neste caso, $u_2 < u_1$. A terceira melhor utilidade, u_3 , ocorre quando Alice mata Bob durante o duelo, mas Bob também a acerta, $|00\rangle$. Para este caso associamos $u_3 < u_2$. Naturalmente, o pior resultado para Alice ocorre quando ela morre e Bob permanece vivo. Neste caso, a utilidade u_4 é zero e não contribui para a função *payoff*. Dessa forma, podemos definir a função *payoff* da Alice, chamada de $\langle \$_A \rangle$, como segue,

$$\langle \$_A \rangle = u_1 |\langle 10 | \psi_n \rangle|^2 + u_2 |\langle 11 | \psi_n \rangle|^2 + u_3 |\langle 00 | \psi_n \rangle|^2, \quad (4.3)$$

onde definimos as utilidades $u_1 = 1$, $u_2 = 1/2$ e $u_3 = 1/3$. O *payoff* de Bob é análogo ao da Alice, $\langle \$_B \rangle = u_1 |\langle 01 | \psi_n \rangle|^2 + u_2 |\langle 11 | \psi_n \rangle|^2 + u_3 |\langle 00 | \psi_n \rangle|^2$. Avaliar as melhores jogadas na função *payoff* de Alice significa identificar os máximos da função e as melhores jogadas para Bob significa identificar os mínimos na função *payoff* de Alice. Durante o jogo, os duelistas procuram ajustar seus operadores ao máximos do seu *payoff*. Veremos também que alguns pontos de sela da superfície correspondem ao *equilíbrio de Nash*. Nesse caso, cada jogador deve se manter nesse ponto para não piorar seu *payoff*. Com objetivo de criar uma referência para as funções *payoff* e para as consequências do duelo, de forma que facilite nosso entendimento, vamos nomear os estados dos jogadores depois de um dado *round*. Se Alice está viva e Bob está morto, $|10\rangle$, ela é a vencedora do duelo em um dado *round*, nesse caso usaremos o índice (W)¹. Se ambos os jogadores estão vivos ou mortos, $|11\rangle$ or $|00\rangle$, diremos que os jogadores são cuidadosos/prevenidos (C)² ou obcecados/alucinados (S)³, respectivamente. O pior resultado para Alice ocorre quando ela perde o duelo e Bob permanece vivo, $|01\rangle$, para esse caso utilizaremos o índice (L)⁴. Os mesmos índices serão aplicados para Bob, por exemplo, se Bob é o vencedor (W)

¹ O índice W significa vencedor, do inglês *winner*. Fizemos a opção de manter todos os índices em inglês, pois são os índices que utilizamos no artigo publicado. Isso será feito para todos em todos os outros casos

² O índice C significa cauteloso, do inglês *cautious*

³ O índice S significa obcecado, do inglês *stubborn*

⁴ O índice L significa perdedor, do inglês *loser*

quando ele está vivo e Alice está morta, $|01\rangle$.

4.2 Construindo o operador simultâneo

No duelo quântico o objetivo de Alice é matar Bob e vice-versa. Fisicamente, isto corresponde a um jogador inverter o q-bit do seu rival. Neste sentido, nós precisamos considerar todas as estratégias possíveis para operador dos jogadores que só atua no q-bit de seu oponente. Aqui, nós estudaremos o operador da Alice A_B , que só atua o segundo q-bit ou no q-bit de Bob. O operador de Alice é descrito por,

$$A_B = (a_0 |00\rangle + a_1 |01\rangle) \langle 00| + (a_2 |00\rangle + a_3 |01\rangle) \langle 01| + \quad (4.4)$$

$$(a_4 |10\rangle + a_5 |11\rangle) \langle 10| + (a_6 |10\rangle + a_7 |11\rangle) \langle 11|,$$

onde o coeficientes complexos a_i são tais que A_B é unitário. O operador de Bob B_A é construído da mesma forma, e as mesmas regras são aplicadas para ele. As diferenças são os coeficientes b_i e o fato que as projeções do operador do Bob só alteram o primeiro q-bit ou o q-bit da Alice.

Nosso propósito é implementar um duelo quântico simultâneo, quando Alice e Bob atiram um no outro simultaneamente, diferentemente do que ocorre no duelo quântico sequencial onde os jogadores atiram alternadamente. Seguindo [76], qualquer jogo quântico simultâneo, em nosso caso o duelo, envolve operações unitárias descritas como,

$$U_S = \begin{pmatrix} e^{i\phi_{11}} \sqrt{p_S^A p_S^B} & e^{i\phi_{12}} \sqrt{p_S^A \bar{p}_S^B} & e^{i\phi_{13}} \sqrt{\bar{p}_S^A p_S^B} & e^{i\phi_{14}} \sqrt{\bar{p}_S^A \bar{p}_S^B} \\ e^{i\phi_{21}} \sqrt{p_W^A p_L^B} & e^{i\phi_{22}} \sqrt{p_W^A \bar{p}_L^B} & e^{i\phi_{23}} \sqrt{\bar{p}_W^A p_L^B} & e^{i\phi_{24}} \sqrt{\bar{p}_W^A \bar{p}_L^B} \\ e^{i\phi_{31}} \sqrt{p_L^A p_W^B} & e^{i\phi_{32}} \sqrt{p_L^A \bar{p}_W^B} & e^{i\phi_{33}} \sqrt{\bar{p}_L^A p_W^B} & e^{i\phi_{34}} \sqrt{\bar{p}_L^A \bar{p}_W^B} \\ e^{i\phi_{41}} \sqrt{p_C^A p_C^B} & e^{i\phi_{42}} \sqrt{p_C^A \bar{p}_C^B} & e^{i\phi_{43}} \sqrt{\bar{p}_C^A p_C^B} & e^{i\phi_{44}} \sqrt{\bar{p}_C^A \bar{p}_C^B} \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

onde $e^{i\phi_{kl}}$ são fatores de fase, $\bar{p}_i^{A,B} = 1 - p_i^{A,B}$ (sendo \bar{p} a probabilidade complementar) e a ordenação da base no operador é $\{|11\rangle, |10\rangle, |01\rangle, |00\rangle\}$. Os rótulos A e B correspondem as probabilidades de Alice e Bob. Os índices W , C , S e L correspondem as quatro possibilidades de saída do jogo ou os respectivos estados finais.

Com objetivo de construir o operador simultâneo do duelo quântico, nós precisamos determinar as probabilidades descritas acima. Isto pode ser feito confrontando as estratégias

do duelo quântico simultâneo com o bem conhecido duelo quântico sequencial estudado no capítulo anterior. Neste jogo, o operador de Alice, em sua forma matricial, é escrito como

$$A_B(\theta_1, \alpha_1, \beta_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\alpha_1} \cos(\theta_1/2) & ie^{i\beta_1} \sin(\theta_1/2) \\ 0 & 0 & ie^{-i\beta_1} \sin(\theta_1/2) & e^{-i\alpha_1} \cos(\theta_1/2) \end{pmatrix}, \quad (4.6)$$

onde θ_1, α_1 e β_1 são parâmetros independentes. Aqui, θ_1 está relacionado a habilidade de tiro de Alice, $\theta_1 \in [0, \pi]$. Este parâmetro está diretamente relacionado a probabilidade de matar seu oponente ou inverter seu q-bit. Neste operador existem também dois parâmetros extras para o duelista, α_1 e β_1 , ambos no intervalo $[-\pi, \pi]$. De forma similar o operador de Bob é definido por

$$B_A(\theta_2, \alpha_2, \beta_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\alpha_2} \cos(\theta_2/2) & 0 & ie^{i\beta_2} \sin(\theta_2/2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & ie^{-i\beta_2} \sin(\theta_2/2) & 0 & e^{-i\alpha_2} \cos(\theta_2/2) \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

onde θ_2, α_2 e β_2 tem o mesmo significado descrito para Alice. É importante mencionar que no duelo quântico sequencial o operador de Alice e Bob não comutam, $[A_B, B_A] \neq 0$. Isto é consequência do duelo sequencial, onde Alice tem a vantagem de sempre atirar primeiro. As fases α_i e β_i permitem que os jogadores realizem diferentes estratégias. É importante mencionar que faremos uma proposta experimental para o duelo quântico simultâneo, que será discutida na Seção 5.2. Para implementar esse experimento, precisamos fixar α_i e β_i . Fizemos a opção de tratar experimentalmente o caso mais simples, $\alpha_i = \beta_i = 0$. As equações que serão apresentadas na sequência deste capítulo seguem esta convenção.

Nosso próximo passo é comparar a Eq.4.4, 4.6 e 4.7. Dessa forma, podemos definir os coeficientes (a_i e b_i) dos operadores da Alice e do Bob para duelo quântico sequencial. Os elementos de matriz de Alice e Bob são dados por,

$$a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = \cos(\theta_1/2),$$

$$a_5 = i \operatorname{sen}(\theta_1/2), a_6 = i \operatorname{sen}(\theta_1/2), a_7 = \cos(\theta_1/2),$$

e

$$b_0 = 1, b_1 = 0, b_2 = \cos(\theta_2/2), b_3 = i \operatorname{sen}(\theta_2/2), b_4 = 0,$$

$$b_5 = 1, b_6 = i \operatorname{sen}(\theta_2/2), b_7 = \cos(\theta_2/2),$$

respectivamente.

As probabilidades de um dado resultado do duelo sequencial podem ser determinados diretamente destes coeficientes. É importante notar que alguns destes coeficientes são iguais a 1 ou 0. Os elementos iguais a 0 correspondem a projeções que não ocorrem e os elementos iguais a 1 correspondem as projeções no subespaço onde Alice está morta, $|0\rangle$, e não pode atirar. Isso significa que neste último caso ela não pode alterar o q-bit de Bob.

A ideia é explorar estes coeficientes para confrontá-los com os apresentados na Eq.4.5. O objetivo é determinar as probabilidades e obter o operador simultâneo para o duelo quântico. Entretanto, para que o operador simultâneo seja unitário, as condições abaixo devem ser observadas [76].

$$\begin{aligned} (p_C^A - \bar{p}_L^A)(p_C^B - \bar{p}_W^B) &= (p_C^A - \bar{p}_W^A)(p_C^B - \bar{p}_L^B) \\ (p_C^A - \bar{p}_S^A)(p_C^B - \bar{p}_S^B) &= (p_L^A - \bar{p}_W^A)(p_L^B - \bar{p}_W^B) \\ (p_L^A - \bar{p}_S^A)(p_W^B - \bar{p}_S^B) &= (p_W^A - \bar{p}_S^A)(p_L^B - \bar{p}_S^B), \end{aligned} \tag{4.8}$$

Este é um ponto fundamental na construção do operador simultâneo, pois se utilizarmos os coeficientes a_i e b_i do duelo sequencial para construir o operador simultâneo, verificamos que as condições de unitariedade impostas pela Eq.4.8, especialmente a segunda equação, não é satisfeita. Com base nessas condições e utilizando as probabilidades associadas a_i e b_i , nós mudamos os coeficientes do duelo quântico sequencial que são 0 ou 1 para $\operatorname{sen}(\theta_{1,2}/2)$ e $\cos(\theta_{1,2}/2)$, respectivamente, a fim de estar em acordo com as condições de unitariedade descritas na Eq.4.8. Com estas mudanças os condições de unitariedade são satisfeitas.

Notamos ainda que com estas mudanças as probabilidades $P_W^{A,B}$ e $P_L^{A,B}$, $P_C^{A,B}$ e $P_S^{A,B}$ são complementares. Isto é exatamente o que esperávamos acontecer, ou seja, a

probabilidade de Alice e Bob estarem vivos são complementares a de ambos estarem mortos. Similarmente, a probabilidade de encontrar Alice viva e Bob morto são complementares a probabilidade de Alice estar morta e Bob vivo. Então, as probabilidades para os jogadores em um jogo quântico simultâneo são dadas por,

$$P_W^A = P_S^A = \cos^2(\theta_1/2), \quad P_L^A = P_C^A = \sin^2(\theta_1/2), \quad (4.9)$$

$$P_W^B = P_S^B = \cos^2(\theta_2/2), \quad P_L^B = P_C^B = \sin^2(\theta_2/2), \quad (4.10)$$

onde os índices A e B correspondem as probabilidades de Alice e Bob, respectivamente. Utilizando as Eqs.4.5, 4.9 e 4.10, nós podemos determinar o operador simultâneo, mostrado na Eq.4.11. Como esperado, as probabilidades descritas na Eq.4.9 e 4.10 fazem nosso operador simultâneo ser unitário,

$$U_S(\theta_1, \theta_2) = \begin{pmatrix} c_1 c_2 & i c_1 s_2 & i s_1 c_2 & -s_1 s_2 \\ i c_1 s_2 & c_1 c_2 & -s_1 s_2 & i s_1 c_2 \\ i s_1 c_2 & -s_1 s_2 & c_1 c_2 & i c_1 s_2 \\ -s_1 s_2 & i s_1 c_2 & i c_1 s_2 & c_1 c_2 \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

onde $c_1 = \cos(\frac{\theta_1}{2})$, $s_1 = \sin(\frac{\theta_1}{2})$, $c_2 = \cos(\frac{\theta_2}{2})$ e $s_2 = \sin(\frac{\theta_2}{2})$. Novamente, os parâmetros θ_1 e θ_2 são as habilidades de tiro de Alice e Bob, os mesmos definidos para o jogo quântico sequencial, responsáveis por inverter o q-bit de seu rival. A diferença é que agora atuam um no outro simultaneamente. Outro ponto importante são os fatores de fase. Neste trabalho nos escolhemos os fatores de fase $e^{i\phi_{k,l}}$, como sendo ± 1 or $\pm i$, mantendo nosso operador unitário. Uma metodologia similar é adotada na Ref.[76]. Entretanto, nós podemos justificar esta escolha estudando novamente os operadores do duelo quântico sequencial, especialmente, a parte em que Alice e Bob, Eq.4.6 e 4.7, mudam o q-bit do seu rival, que nós nomeamos A'_B e B'_A . Neste caso, o operador simultâneo pode ser encontrado fazendo $A'_B \otimes B'_A$,

$$U_S(\theta_1, \theta_2) = A'_B \otimes B'_A = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta_1}{2}) & i \sin(\frac{\theta_1}{2}) \\ i \sin(\frac{\theta_1}{2}) & \cos(\frac{\theta_1}{2}) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \cos(\frac{\theta_2}{2}) & i \sin(\frac{\theta_2}{2}) \\ i \sin(\frac{\theta_2}{2}) & \cos(\frac{\theta_2}{2}) \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Um ponto relevante é que cada elemento de matriz tem contribuições das habilidades de tiro de Alice e Bob, θ_1 e θ_2 , como nós esperávamos. Isto garante que Alice e Bob atirem simultaneamente um no outro. Para ilustrar a ação do operador simultâneo nós podemos

analisar um caso particular do limite clássico, onde Alice tem um tiro perfeito, $\theta_1 = \pi$, e Bob tem seu pior tiro, $\theta_2 = 0$. Neste caso, o operador simultâneo descrito na Eq.4.11 se reduz a

$$U_S = i (|00\rangle \langle 01| + |10\rangle \langle 11| + |01\rangle \langle 00| + |11\rangle \langle 10|). \quad (4.13)$$

Se ambos os jogadores começam o jogo vivos, $|11\rangle$, o resultado do duelo depois do primeiro *round* é $|10\rangle$, i.e. Alice permanece viva e Bob está morto depois do primeiro *round*. Nós podemos apontar efeitos quânticos se um segundo *round* é realizado. Neste caso, Alice revive Bob - ou inverte seu q-bit - com um tiro quando ele está morto, lembrando que estamos considerando um tiro perfeito de Alice. Estudaremos este caso na próxima seção.

Outro caso interessante que analisaremos na próxima seção é quando ambos os jogadores estão em uma superposição de vivo e morto, uma analogia ao paradoxo do gato de Schrödinger. Neste sentido, nós não supomos que este é um verdadeiro duelo clássico, uma vez que os jogadores estão utilizando recursos quânticos. Portanto, matar ou reviver um oponente é uma característica quântica do duelo. A questão a ser estudada na próxima seção é a seguinte: dado um número de *rounds* e um estado de entrada (condição em que os duelistas iniciam o duelo), qual é a melhor jogada para Alice (Bob) maximizar sua função *payoff*?

4.3 Resultados teóricos

Nesta seção apresentaremos a função *payoff* da Alice, como descrito na Eq.4.3, obtida teoricamente para alguns casos especiais. Com o operador da Eq.4.11 estudaremos dois casos. O primeiro é o análogo clássico, quando os dois jogadores iniciam o duelo vivos. Em seguida, o caso em que ambos iniciam o duelo em um estado emaranhado, sem contrapartida clássica. Escolhemos mostrar a função *payoff*⁵ da Alice porque é o suficiente para explorar os principais resultados do jogo. Os resultados para Bob são análogos aos de Alice e podem ser obtidos de forma direta.

4.3.1 Alice e Bob iniciam o duelo vivos

Vamos iniciar com o caso onde Alice e Bob estão vivos no início do duelo, $|\psi_0\rangle = |11\rangle$. A simetria do operador simultâneo nos permite escrever uma função *payoff* da Alice, obtida

⁵ Todos o gráficos da função *payoff* foram gerados no *MATHEMATICA*[®].

como segue,

$$\begin{aligned} \langle \$_A \rangle_n &= u_1 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{n\theta_1}{2} \right) \cos^2 \left(\frac{n\theta_2}{2} \right) + \\ &+ u_2 \cos^2 \left(\frac{n\theta_1}{2} \right) \cos^2 \left(\frac{n\theta_2}{2} \right) + u_3 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{n\theta_1}{2} \right) \operatorname{sen}^2 \left(\frac{n\theta_2}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.14)$$

sendo u_1 , u_2 e u_3 as utilidades, θ_1 e θ_2 são os parâmetros de tiro. A Fig.18(a)-(d) mostram os gráficos da função *payoff* para os quatro primeiros *rounds*, considerando que os estado de entrada corresponde a $|11\rangle$. A primeira superfície apresentada na Fig.18(a) mostra o

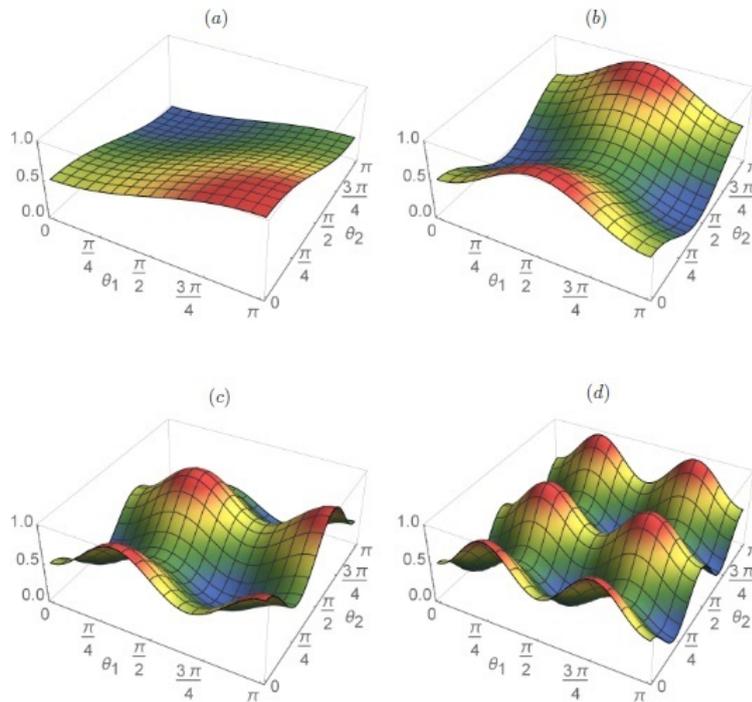


Figura 18: Gráfico da função *payoff* de Alice, $\langle \$_A \rangle = \langle \$_A \rangle (\theta_1, \theta_2)$, para os quatro primeiros *rounds*. O estado de entrada corresponde a $|11\rangle$.

resultado para o primeiro *round* como uma função de θ_1 e θ_2 . Os resultados podem ser facilmente interpretados. Alice permanece viva para $\theta_1 = \pi$ e $\theta_2 = 0$, ela é a vencedora. As maiores probabilidades de Alice permanecer viva são obtidas quando sua habilidade é alta o suficiente ($\theta_1 > \pi/2$) e Bob não tem um bom tiro ($\theta_2 < \pi/2$) - regiões de cor vermelha e laranja. A situação oposta, quando Alice tem um tiro ruim e Bob tem habilidade suficiente, a superfície também mostra que a probabilidade de ficar Bob vivo depois do duelo é maior ($\theta_1 < \pi/2$ e $\theta_2 > \pi/2$ - região azul). Na Fig.18 (b), que apresenta os resultados após o segundo *round* ($n = 2$), o efeito quântico aparece, desde que a alta habilidade de tiro mate seu oponente no primeiro *round* e reviva-o no segundo. Por isso o *payoff* de Alice

não é máximo para $\theta_1 \approx \pi$ e $\theta_2 \approx 0$. Neste caso, um atirador intermediário, ou seja, um que tenha habilidade de tiro $\theta_1 \approx \pi/2$ pode ter o melhor *payoff*, principalmente quando o adversário tem uma habilidade de tiro excelente $\theta_1 \approx \pi$ ou péssima $\theta_1 \approx 0$.

Também podemos verificar um ponto de sela que corresponde ao equilíbrio de Nash. Nesse caso, se um jogador escolher um parâmetro de tiro $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, a melhor jogada para o outro é $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$. Observamos que se Alice (Bob) muda unilateralmente sua habilidade de tiro θ_1 (θ_2) então Bob (Alice) aumentará seu *payoff*, portanto nenhum jogador pode melhorar seu *payoff* mudando sua estratégia unilateralmente. Este é o significado de alguns dos pontos de sela das Fig.18 (a)-(d) que representam o equilíbrio de Nash. Também vemos na Fig.18 que os máximos da função *payoff* de Alice ocorrem com mais frequência quando o número de rounds aumenta. O mesmo comportamento é observado para os mínimos da função *payoff*. A Teoria dos Jogos pode guiar o duelo desde que Alice conheça o número de *rounds* e a habilidade de tiro de seu oponente para escolher o melhor θ_1 para maximizar seu *payoff*. Avaliando os gráficos percebemos que Alice tentará obter o máximo (regiões vermelhas), enquanto a melhor estratégia de Bob será obter o mínimo (regiões em azul).

4.3.2 Alice e Bob iniciam o duelo em um estado de Bell

Um caso interessante a ser explorado ocorre quando Alice e Bob iniciam o duelo em um estado de Bell. Estes estados trazem uma importante questão: qual é o significado dos jogadores iniciarem o duelo em um estado emaranhado, onde ambos estão em uma superposição de vivo e morto? Isto só é possível no cenário da mecânica quântica. Dois estados emaranhados serão apresentados e explorados,

$$|\Phi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle + |10\rangle) \quad (4.15)$$

e

$$|\Psi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle), \quad (4.16)$$

onde a Eq.4.15 representa o estado onde os jogadores estão em uma superposição com anticorrelação e a Eq.4.16 representa o estado com Alice e Bob iniciando o duelo ambos mortos ou vivos, i.e., em uma superposição com correlação. A Fig.19(a)-(d) mostra o gráfico das funções *payoff* de Alice $\langle \$_A \rangle = \langle \$_A \rangle (\theta_1, \theta_2)$ para os quatro primeiros rounds, considerando que os jogadores iniciam o jogo num estado de Bell $|\Phi_+\rangle$, Eq.4.16.

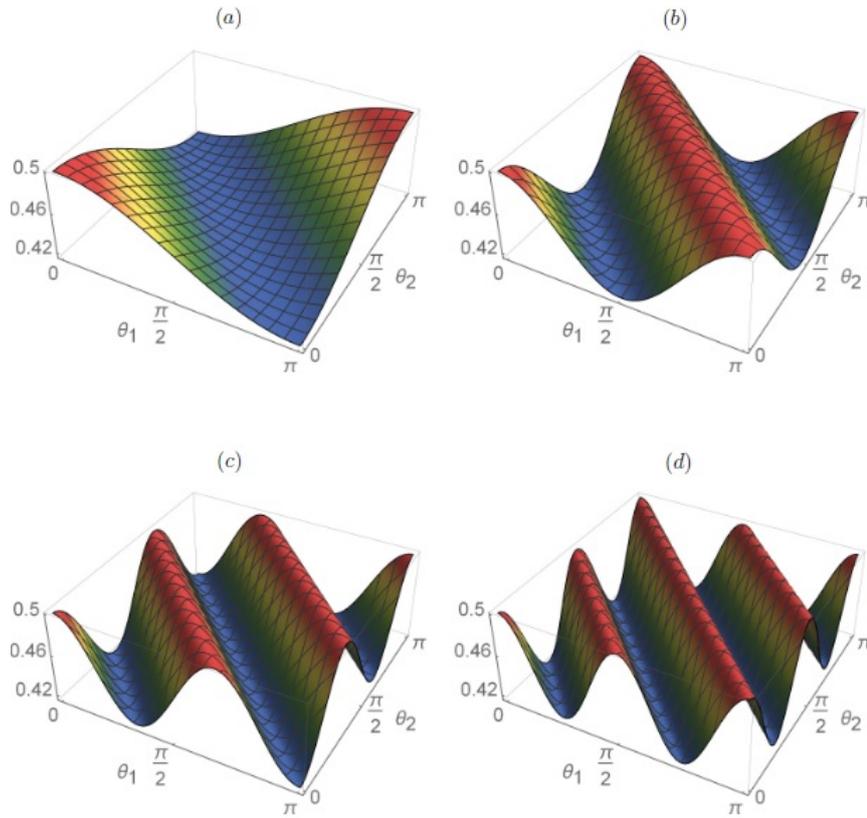


Figura 19: Gráficos das funções *payoff* de Alice, $\langle \$_A \rangle = \langle \$_A \rangle(\theta_1, \theta_2)$, para os quatro primeiros *rounds*. O estado de entrada corresponde ao estado de Bell $|\Phi_+\rangle$, Eq.4.16.

A primeira superfície, Fig.19(a), que representa o *payoff* de Alice depois do primeiro *round*, é maximizada para o caso no qual ambos jogadores tem um tiro ruim ($\theta_1 \approx \theta_2 \approx 0$) ou excelente ($\theta_1 \approx \theta_2 \approx \pi$), representada pela região vermelha. Notamos que essa condição maximiza o *payoff* de Alice para qualquer *round*. Por outro lado, nas regiões onde $\theta_1 + \theta_2 \approx \pi$ (região azul), o *payoff* de Alice é o pior. Isto pode ser observado para qualquer *round* ímpar (Fig.19(a) e Fig.19(c)). Entretanto, para qualquer *round* par (Fig.19(b) e Fig.19(d)), esta região corresponde ao máximo da função *payoff* de Alice. É importante mencionar que esta função é limitada a 0,5, e o valor mais baixo é de 0,42. Este valor é devido às utilidades que nós escolhemos. De fato, as ações de Alice e Bob são locais e não afetam o emaranhamento do sistema. Os estados finais depois de um dado *round* oscilaram entre os quatro estados de Bell. Notamos que para um estado final igual a $|\Phi_+\rangle$ (anticorrelações) a função *payoff* é sempre 0.5. Se o estado final tem correlação, $|\Psi_+\rangle$, a função *payoff* tem seu menor valor dependendo das utilidades, descritas na Eq.4.3. Por exemplo, se Alice deseja ficar viva e a utilidade u_3 na Eq.4.3 for igual a zero, o valor mais baixo do *payoff*

da Alice será 0.25. Observamos que não há pontos de sela (equilíbrio de Nash), esse é um reflexo dos iniciarem o duelo em um estado emaranhado.

Os resultados para o caso onde Alice e Bob iniciam o duelo no estado $|\Psi_+\rangle$, descrito pela Eq.4.15 são apresentados nas Fig.20(a)-(d) para os quatro primeiros *rounds*.

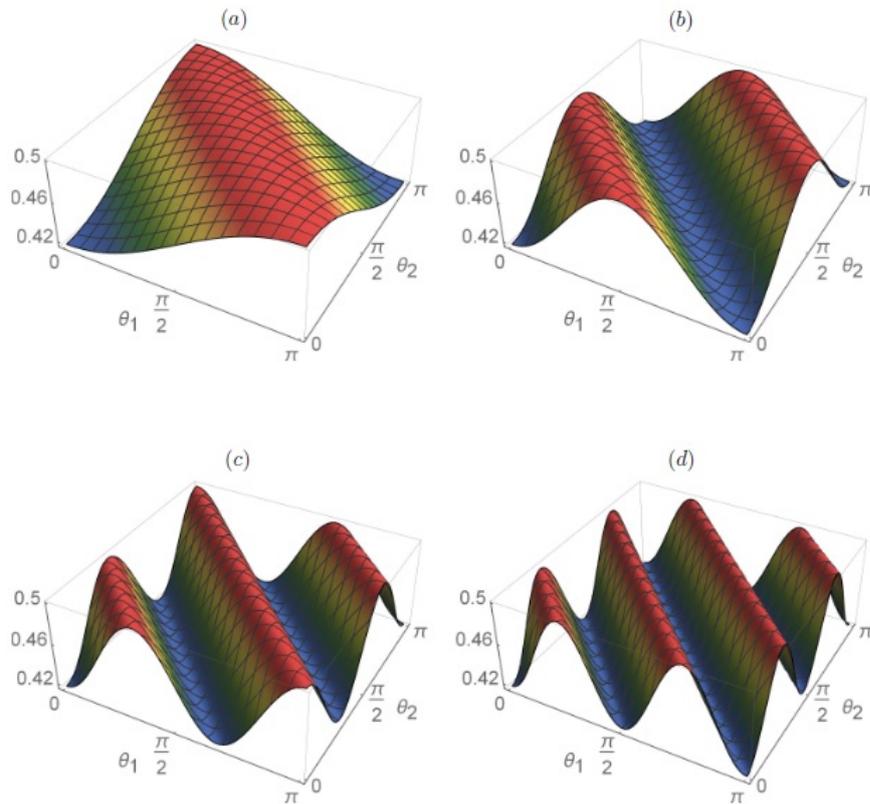


Figura 20: Gráfico da função *payoff* de Alice, $\langle \$_A \rangle = \langle \$_A \rangle(\theta_1, \theta_2)$, para os primeiros quatro *rounds*, (a)-(d), respectivamente.

Este resultado são complementares aos resultados apresentados nas Figs.19(a)-(d), de acordo com as discussões para os estados iniciais dados pela Eq.4.16. Observamos que em ambos os casos não há equilíbrio de Nash, uma vez que não existem pontos de sela nas superfícies, Figs. 19 e 20.

4.3.3 Um jogador aumenta/diminui sua habilidade de tiro

Uma característica mais realística de um duelo, que pode ser modelado em nosso jogo quântico, acontece quando um dos envolvidos no duelo não consegue manter sua habilidade de tiro constante com o passar dos *rounds*, o que pode ocorrer devido as condições que envolvem o conflito, como a forte emoção, visão turva, cansaço, entre outras. Para estudar esse problema vamos considerar um dos jogadores (Bob) sendo um

jogador "frio", ou mesmo um robô (neste caso vivo/morto deveria ser adequadamente trocado por ligado/desligado), de tal forma que sua habilidade de tiro é sempre constante e independente do número de *rounds*. Reciprocamente, Alice inicia o duelo com uma dada habilidade de tiro θ_1 no primeiro *round* e nos próximos sua habilidade se altera de $\Delta\theta_1$. Agora o estado final depois de n *rounds* é dado por,

$$|\psi_n\rangle = U_S(\theta_1 + (n-1)\Delta\theta_1, \theta_2) \dots U_S(\theta_1 + \Delta\theta_1, \theta_2) U_S(\theta_1, \theta_2) |\psi_0\rangle, \quad (4.17)$$

onde $\Delta\theta < 0$. Para estudar tal confronto vamos considerar ambos Alice e Bob têm inicialmente a mesma habilidade de tiro, i.e., $\theta_2 = \theta_1$. A função *payoff* pode ser calculada usando a mesma metodologia aplicada nas subseções anteriores, no entanto, agora ela dependerá de θ_1 e $\Delta\theta_1$, ou seja, $\langle \$_A \rangle = \langle \$_A \rangle (\theta_1, \Delta\theta)$.

Os resultados são apresentados na Fig.21, onde consideramos que a habilidade de tiro de Alice se altera por um $\Delta\theta$, por exemplo, se ela era uma atiradora excelente sua habilidade de tiro decresceria de 10%. Aqui, escolhemos $\Delta\theta = \pi/10$, conseqüentemente Alice não pode ter uma habilidade de tiro inicial menor que $(n-1)\Delta\theta$, onde $n = 2, 3, 4$. O gráfico do lado esquerdo mostra o *payoff* de Alice para quando o jogo termina depois do segundo *round*. A curva azul mostra o *payoff* para a constante θ_1 e a curva amarela para o decréscimo deste. Se ela é uma atiradora ruim, $\theta_1 < \pi/2$, então o melhor para ela é não perder ainda mais, isto é o que esperaríamos em um duelo clássico. Entretanto, a curva amarela supera a curva azul para $\theta_1 > \pi/2$, i.e., em um duelo de dois *rounds* um bom atirador mata seu oponente no primeiro *round* e o ressuscitaria no segundo. Se ele pudesse falhar no segundo tiro então Bob terminaria o jogo morto - o mesmo ocorre para Bob: ele acerta Alice e então a revive, produzindo $\langle \$_A \rangle = 1/2$, i.e., ambos jogadores vivos no final do duelo. Procedendo desta forma Alice poderia melhorar seu *payoff* em aproximadamente 10%, caso sua habilidade decresça.

No gráfico do meio para 3 rounds temos pequenos valores de *payoff* quando o atirador é bom ou ruim, mas em torno de $\theta_1 \approx \pi/2$ o *payoff* tem um excelente resultado, $\langle \$_A \rangle \approx 0.7$. Para um atirador ruim, teríamos três tiros errando seu alvo ou um resultado menor que 0.3; o mesmo aplicado para um bom atirador - a curva azul nos dá um melhor resultado, pois $0.3 \leq \langle \$_A \rangle \leq 0.5$. Efeitos quânticos mostram que para um bom atirador $\pi/2 \leq \theta_1 \leq 3\pi/4$, desde que Alice pudesse bater seu oponente no primeiro tiro e errar seu segundo e terceiro tiro, se seu θ_1 não fosse tão alto. Subtraindo $\Delta\theta$ e $2\Delta\theta$ sua habilidade

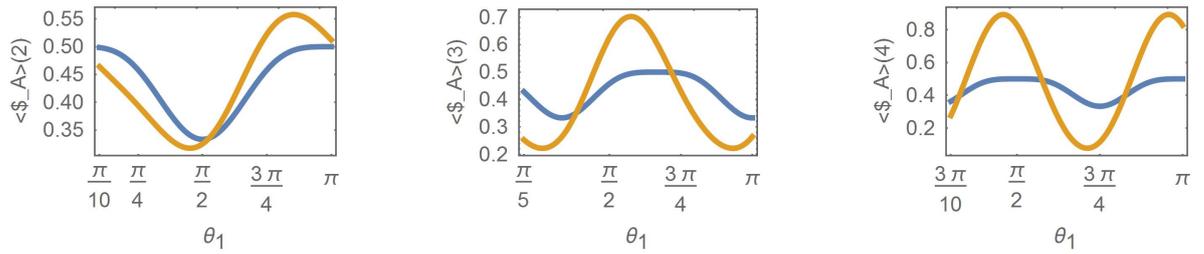


Figura 21: Gráficos da função *payoff* de Alice $\langle \$_A \rangle$ contra a habilidade de tiro θ_1 quando a habilidade de tiro de Alice decresce por $\Delta\theta$ em cada *round*. Curvas azuis são os *payoffs* da habilidade de tiro constante e curvas amarelas representam o *payoff* com habilidade de tiro decrescendo.

de tiro poderia se tornar ruim. Bob, por um outro lado, com uma habilidade constante poderia matar e reviver Alice.

Finalmente, no gráfico do lado direito apresentamos a função *payoff* de Alice depois do quarto *round*. Vemos que a curva azul tem pequenas variações, já a curva amarela tem grandes amplitudes. Se Alice inicia o jogo com um parâmetro de tiro ruim, o resultado clássico é que ambos jogadores terminam vivos. Não é isso que acontece no duelo quântico simultâneo. Se observarmos a curva amarela, um atirador intermediário, $\theta_1 \approx \pi/2$, teríamos 50% – 50% de chance do acertar/errar seu oponente, e então para reviver ou eliminar ele no segundo tiro e assim por diante. Para uma alta habilidade de tiro o *payoff* final é similar daquele do segundo *round*: ela acerta seu primeiro tiro e então ela tem um acréscimo de chance de perder os próximos. A única região onde a curva azul ultrapassa a amarela quando $\pi/2 \lesssim \theta_1 \lesssim 3\pi/4$, onde a interação entre número de *rounds* e decréscimo de habilidades aparecem.

Assim, apresentamos um modelo quântico para o duelo simultâneo. Um novo algoritmo, que permite um duelo onde os jogadores atiram simultaneamente. Analisamos alguns casos importantes: Alice e Bob iniciam o duelo vivo; numa superposição de vivo ou morto e quando um dos jogadores vai perdendo habilidade durante o duelo.

5 Implementação de jogos quânticos com óptica linear

Neste capítulo vamos apresentar dois trabalhos que visam mostrar o uso de óptica linear na realização de jogos quânticos. O primeiro é uma realização experimental do duelo quântico sequencial, discutido na Seção 3.2, onde o estado dos jogadores foi codificado utilizando graus de liberdade de um feixe laser, polarização e modos transversos [39]. O segundo é uma proposta experimental para a realização do duelo quântico simultâneo, discutido no Capítulo 4. Neste último, a proposta foi feita utilizando um par de fótons gêmeos correlacionados em polarização [58].

5.1 Implementação óptica do duelo quântico sequencial

A fim de implementar o duelo quântico sequencial discutido na Seção 3.2, utilizaremos uma abordagem óptica, utilizando dois graus de liberdade diferentes de um feixe laser, os modos transversos e a polarização, para codificar o estado de cada jogador. O estado de Alice e Bob são codificados, respectivamente, nos modos Hermite-Gauss de primeira ordem e na polarização. Nós consideramos que Alice está viva quando o modo transverso é o $HG_{1,0}$, que nos referimos como modo horizontal ψ_h , e morta quando o modo transverso é o $HG_{0,1}$, que nos referimos como modo vertical ψ_v . Bob está vivo quando a polarização é horizontal (\hat{e}_H) e morto quando a polarização é vertical (\hat{e}_V). A fim de mostrar a analogia quântica, nós utilizaremos a notação de Dirac para descrever os estados dos modos eletromagnéticos, onde ψ_v e ψ_h são representados por $|v\rangle$ e $|h\rangle$, respectivamente, enquanto \hat{e}_V e \hat{e}_H são representados por $|V\rangle$ e $|H\rangle$, respectivamente. A codificação na base computacional é resumida como segue

$$\begin{aligned}
 |vV\rangle &= |00\rangle, \\
 |vH\rangle &= |01\rangle, \\
 |hV\rangle &= |10\rangle, \\
 |hH\rangle &= |11\rangle.
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

Vamos iniciar com a construção do operador de Alice. Para implementar seu tiro

Alice precisa mudar o estado de Bob, i.e., ela deve atuar na polarização. Então, nós podemos construir o operador de Alice descrito por Eq.3.1 usando dispositivos ópticos que atuam na polarização. As projeções podem ser realizadas utilizando divisores de feixe polarizados (*PBS*) para a polarização e um interferômetro Mach-Zehnder com um espelho adicional em um dos braços (*MZIM*) [77] para os modos transversos. As ações sobre a polarização podem ser realizadas utilizando placas de quarto de onda ($QWP_{2\theta}$), placas de meia onda ($HWP_{2\theta}$), onde θ é o ângulo entre a polarização e o eixo rápido, e retardadores lineares de fase (LPR_{γ}^{ϕ}), onde ϕ é o ângulo entre polarização e o eixo rápido e γ é o atraso.

Em relação a Eq.3.1, o tiro mais geral é controlado por três parâmetros independentes α_1 , β_1 e θ_1 , onde θ_1 é associado a habilidade de tiro da Alice. O parâmetro α_1 pode ser controlado por um par de retardadores $LPR_{+\alpha_1}^{0^\circ}$ e $LPR_{-\alpha_1}^{0^\circ}$. O parâmetro α indica o atraso de um eixo em relação ao outro e o ângulo 0° indica que o retardador é orientado ao longo do eixo rápido (eixo x). O parâmetro β_1 pode ser controlado utilizando um outro par de retardadores lineares de fase $LPR_{+\beta_1}^{90^\circ}$ e $LPR_{-\beta_1}^{90^\circ}$ com o segundo rotacionado em 90° . O parâmetro β_1 indica o atraso de um eixo em relação ao outro e o ângulo 90° indica que o retardador é orientado perpendicularmente ao eixo rápido (eixo x). A rotação de uma LPR em relação a outra é necessária para obtermos as matrizes na sequência descrita pela Eq.5.2. A parte referente a rotação da polarização é implementada utilizando uma sequência de $QWP(0^\circ)HWP(2\theta)QWP(0^\circ)$. Desta forma, a ação sobre o estado de Bob pode ser realizado pela sequência de componentes ópticos como a ação de uma matriz 2×2 - $A_B^{2 \times 2}(\theta, \alpha_1, \beta_1)$, correspondendo ao subespaço onde Alice está viva, dada por,

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} LPR_{\beta_1}^{90^\circ} & LPR_{-\alpha_1}^{0^\circ} & QWP_{0^\circ} & HWP_{2\theta} & QWP_{0^\circ} & LPR_{-\alpha_1}^{0^\circ} & LPR_{-\beta_1}^{0^\circ} \\ \left(\begin{matrix} e^{i\beta_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha_1} \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} \cos(2\theta) & \text{sen}(2\theta) \\ \text{sen}(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\alpha_1} \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\beta_1} \end{matrix} \right) \end{pmatrix} = \\
& \begin{matrix} \text{Alice's shot} \\ = \left(\begin{matrix} e^{i\alpha_1} \cos(2\theta) & ie^{i\beta_1} \text{sen}(2\theta) \\ ie^{-i\beta_1} \text{sen}(2\theta) & e^{-i\alpha_1} \cos(2\theta) \end{matrix} \right) = A_B^{2 \times 2}(\theta, \alpha_1, \beta_1) \end{matrix} \\
& \tag{5.2}
\end{aligned}$$

Nós podemos escrever o ângulo θ como uma função do parâmetro de tiro da Alice, $\theta_1 \in [0, \pi]$. Isto é equivalente a girar a HWP_{θ} em um intervalo $[0, \pi/4]$. Então, existe uma relação entre o ângulo θ da HWP e a habilidade de tiro θ da HWP , dado por $\theta_1 = 4\theta$.

Para completar o operador de Alice, nós precisamos realizar projeções sobre os estados correspondentes à Alice morta, resultando na seguinte matriz,

$$A_B(\theta_1, \alpha_1, \beta_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\alpha_1} \cos(\theta_1/2) & ie^{i\beta_1} \sin(\theta_1/2) \\ 0 & 0 & ie^{-i\beta_1} \sin(\theta_1/2) & e^{-i\alpha_1} \cos(\theta_1/2) \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

de acordo com a Eq.3.1. O circuito óptico geral que implementa o operador da Alice é apresentado na Fig.22. A parte do circuito óptico correspondente a $A_B^{2 \times 2}(\theta_1, \alpha_1, \beta_1)$ é destacada na Fig.22. O outra parte do operador representa o operador identidade. Para um estado de entrada do campo eletromagnético, como o descrito na Eq.3.9, que descreve um feixe laser, a luz passa através do *MZIM*, onde a seleção de paridade dos modos transversos ocorre.

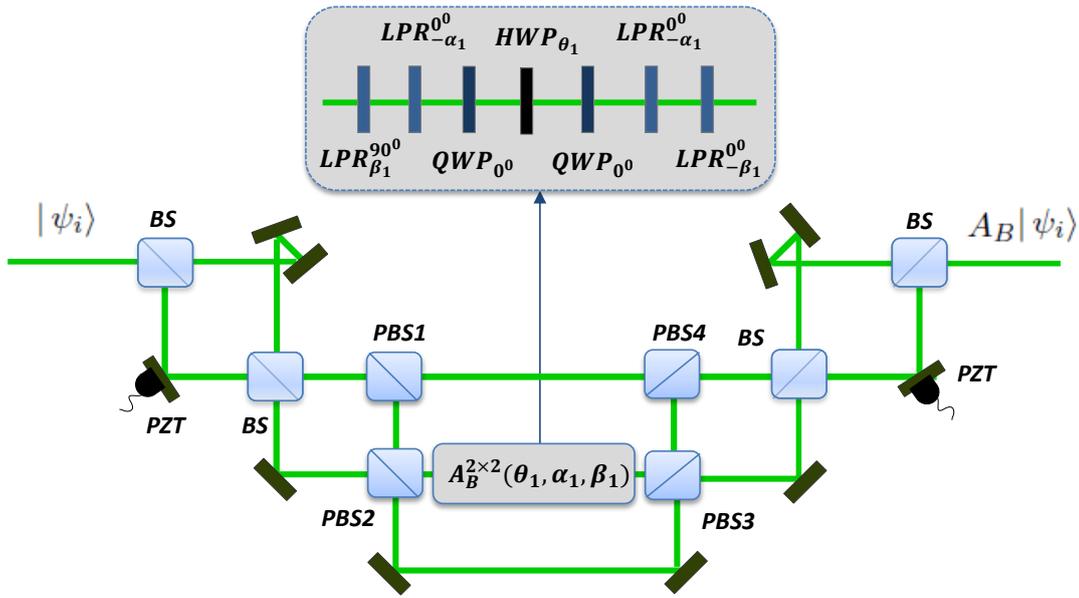


Figura 22: Configuração do operador geral de Alice. *BS* significa divisor de feixe, *HWP* significa placa de meia onda, *QWP* significa placa de quarto de onda, *LPR* significa retardador de fase linear e *PBS* significa divisor de feixe polarizado.

Os estados $|01\rangle$ e $|10\rangle$ deixam a porta de saída do *MZIM* em direção ao *PBS1* e os estados $|11\rangle$ e $|00\rangle$ deixam o *MZIM* em direção ao *PBS2*. O estado $|01\rangle$ é transmitido pelo *PBS1* e o estado $|00\rangle$ é refletido no *PBS2*. Ambos estados correspondem a Alice morta, portanto, ela não atira. Por esta razão, o estado $|01\rangle$ vai para o *PBS4* e o estado $|00\rangle$ é refletido em *PBS2*. Este esquema corresponde a última parte da Eq. 3.1, $|0\rangle\langle 0| \otimes \mathbf{1}$ e bloco correspondente à identidade da Eq.5.3.

Os estados $|11\rangle$ e $|10\rangle$, correspondentes a Alice viva são, respectivamente, transmitidos no $PBS2$ e refletidos no $PBS1$ e $PBS2$, a fim de que Alice realize seu tiro. O tiro é realizado utilizando a sequência de retardadores lineares e placas de onda, com seus eixos rápidos orientados horizontalmente. O parâmetro de tiro de Alice (θ_1) é realizado pela rotação da HWP_{θ_1} . Utilizando as matrizes de Jones para o conjunto de placas de onda a parte final do operador geral é obtida e a operação de Alice está completada neste estágio. A última parte do circuito é uma operação de identidade, mas importante para agrupar as saídas.

Como discutido na seção anterior, para os *rounds* iniciais a fase β não é relevante para o cálculo das probabilidades. Considerando que nós realizamos o duelo até o segundo tiro da Alice, por uma questão de simplicidade, mas sem perda de generalidade, nós implementamos experimentalmente um caso particular do duelo escolhendo o cenário experimental mais simples: as fases α_i e β_i são fixas e iguais a zero, como no exemplo dado na Seção 4.3. Dessa forma, precisamos construir experimentalmente o operador descrito pela matriz,

$$A_B(\theta_1, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta_1/2) & i \sin(\theta_1/2) \\ 0 & 0 & i \sin(\theta_1/2) & \cos(\theta_1/2) \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Para este caso particular, isto corresponde experimentalmente a remover todas LPR 's, mantendo somente a $QWP_{0^\circ}, HWP_{\theta_1}$ e QWP_{0° , porque fixar $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ corresponde a trocar as LPR 's por matrizes identidade. O operador mais geral pode ser realizado mantendo as LPR 's.

Analogamente, precisamos construir um operador de tiro de Bob, com α_2 e β_2 iguais a zero. Ele deve atuar no modos transversos, onde codificamos os estados de Alice. Portanto, o que desejamos construir é a matriz dada por,

$$B_A(\theta_2, 0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_2/2) & 0 & i \sin(\theta_2/2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & i \sin(\theta_2/2) & 0 & \cos(\theta_2/2) \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Isto será realizado de forma similar, explorando a analogia entre polarização e os

modos transversos de primeira ordem [67, 68]. Neste caso, Bob atua modo HG . A ação das placas de onda e fases são implementadas utilizando um prisma de Dove e conversores de modo. Para o caso particular estudado neste trabalho fixamos $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ na Eq. 3.2, obtendo a Eq.5.5. O circuito óptico correspondente é mostrado na Fig.23. O PBS_1 projeta o estado de entrada nos subespaços correspondentes a Bob vivo ($|01\rangle$ e $|11\rangle$) e morto ($|00\rangle$ e $|10\rangle$). No caminho associado ao estado correspondente a Bob vivo são colocadas duas lentes cilíndricas (CL_{0^0}), formando um conversor de modo π orientado verticalmente e um prisma de Dove rodado DP_{θ_2} para implementar o tiro do Bob. No outro caminho óptico, temos uma operação de identidade implementada para os estados $|00\rangle$ e $|10\rangle$, como descrito pela Eq.5.5. O PBS_2 agrupa os estados de saída e a operação de Bob está completa.

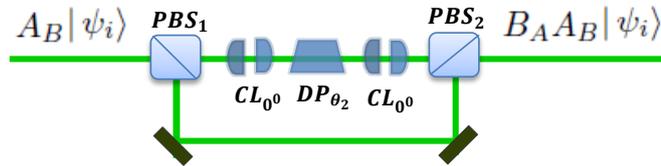


Figura 23: Configuração do operador geral de Bob. PBS significa divisor de feixe polarizado, CL significa lentes cilíndricas e DP significa prisma de Dove.

A preparação do modo de entrada é feita utilizando um feixe linearmente polarizado que incide sobre uma máscara holográfica para obter os modos HG de primeira ordem. Usando um DP e uma HWP nós podemos variar os parâmetros ω_1 e ω_2 a fim de obter o estado de entrada descrito pela Eq.3.9. O estado final do primeiro *round* dado pela Eq.3.5, por exemplo, é obtido pela passagem do estado inicial na sequência de operadores de Alice e Bob apresentado nas Figs. 22 e 23, respectivamente.

Neste esquema, a verificação da ação de Alice e Bob ao longo do duelo será feita avaliando as probabilidades apresentadas na seção anterior. As medidas das probabilidades, para um dado θ_1 e θ_2 , são encontradas com projeções do estado final sobre os possíveis estados resultantes (de saída) do jogo, como mostrado nas Eqs. 3.7. As probabilidades experimentalmente calculadas de um dado resultado são obtidas pela razão entre a intensidade de um dado estado de saída pela soma da intensidade de todos os estados de saída. Podemos escrever as probabilidades experimentais como

$$P_{exp} = P_{kl} = \frac{I_{kl}}{I_{total}}, \quad (5.6)$$

onde $I_{kl} = I_{AA}, I_{AD}$, e I_{DA} , correspondem as intensidades dos estados de saída $|11\rangle$, $|10\rangle$ e $|01\rangle$, respectivamente. $I_{total} = I_{AA} + I_{AD} + I_{DA}$. Aqui, A ¹ representa vivo e D ² representa morto, como apresentado nas Eqs.3.7. Na próxima seção nós apresentaremos a realização experimental do duelo.

5.1.1 Experimento e resultados

Para a realização experimental utilizamos os estados de entrada apresentados na Ref. [32]. Seguindo a Eq.3.9, o primeiro estado de entrada é o caso mais simples: Alice e Bob iniciam o duelo vivos, $\omega_1 = \omega_2 = \pi/2$. Em seguida, vamos explorar o efeito da superposição, nós escolhemos começar com Alice viva $\omega_1 = \pi/2$ e Bob em uma superposição balanceada ($\omega_2 = \pi/4$) de vivo e morto. Os resultados do jogo serão mostrados através de gráficos da função das probabilidades³.

5.1.2 Alice e Bob iniciam o duelo vivos

No caso em que Alice e Bob estão vivos, o circuito experimental para o *round* 1 é apresentado na Fig.24. Um feixe laser de comprimento de onda $532nm$, polarizado horizontalmente, com potência em torno de $1mW$ é usado para iluminar uma máscara holográfica a fim de produzir o modo Hermite-Gauss, onde o estado de Alice é codificado primeiro pelo ajuste da máscara para produzir o modo $|h\rangle$. A polarização é controlada pela *HWP1* que codifica o estado do Bob para produzir o estado de polarização $|H\rangle$. Assim, o estado de entrada $|11\rangle$ é obtido. A qualidade do estado de preparação foi verificado utilizando um *PBS* adicional para checar a polarização horizontal (a *HWP1* foi ajustada para minimizar a reflexão no *PBS* adicional) e pela verificação da distribuição de intensidade do modo $|h\rangle$ (a posição da máscara foi ajustada para balancear a intensidade em ambos os nodos do modo HG_{01}).

O circuito óptico da Fig.22 pode ser simplificado, de forma que somente o caminho possuindo uma sequência de placas de onda será considerado para o tiro da Alice. O circuito correspondente ao operador de Bob é montado seguindo a Fig.23. O estado de

¹ o índice A significa vivo, do inglês *alive*. Fizemos a opção de manter todos os índices em inglês, pois são os índices que utilizamos no artigo publicado [39]. O mesmo será feito para o índice D .

² O índice D significa morto, do inglês *dead*.

³ Todos os gráficos das probabilidades em função dos parâmetros de tiro θ_1 e θ_2 foram gerados no *MATLAB*[®].

saída $|\Psi_1\rangle$, dado pela Eq.3.5, é obtido depois do PBS_2 . A medida é realizada por um $MZIM$ e por um divisor de feixe polarizado PBS_3 . Neste sentido, nós temos três resultados possíveis para o *round* 1 em três portas independentes. A imagem de cada porta é gravada em uma câmera CCD para calcular as probabilidades mostradas nas Eqs.3.7. O parâmetro

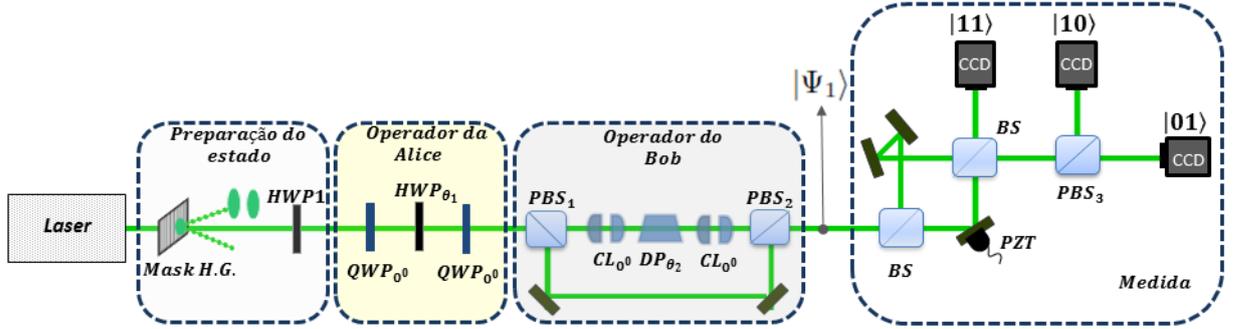


Figura 24: Configuração experimental para o estado de entrada vivo – vivo.

de tiro da Alice θ_1 é variado girando a HWP_{θ_1} e o parâmetro de tiro do Bob θ_2 é variado pela rotação do DP_{θ_2} . As QWP_{0^0} 's e CL_{0^0} 's são mantidos fixos durante o experimento.

A Fig.25 sumariza alguns de nossos resultados para o *round* 1. Nesta figura, apresentamos nove conjuntos de três imagens (Fig.25a-i), cada conjunto corresponde a um caso particular de θ_1 e θ_2 . Para cada um dos conjuntos, a imagem da esquerda, do centro e da direita correspondem aos estados de saída $|11\rangle$, $|10\rangle$ e $|01\rangle$, respectivamente. Também apresentamos para cada conjunto de imagens as probabilidades correspondentes (calculadas teoricamente e experimentalmente) associadas a cada estado de saída. As probabilidades teóricas (P_{the}) são calculadas usando as Eqs.3.7. As probabilidades experimentais (P_{exp}) são obtidas aplicando a Eq.5.6. A medida da intensidade de cada imagem é feita usando a câmera CCD como um detetor. Cada imagem é convertida em um mapa $m \times n$ de intensidade em escala de cinza. Dessa forma, definimos a intensidade média de cada imagem I_{kl} como

$$I_{kl} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \xi_{ij}}{m \times n}, \quad (5.7)$$

onde ξ_{ij} é a intensidade da posição (i, j) do mapa. Este procedimento equivale a usar fotodetetores para registrar a intensidade média do feixe de luz.

Vamos discutir quatro casos particulares do duelo. O primeiro é o caso onde $\theta_1 = \theta_2 = 0$, que corresponde a Alice e Bob errarem seus tiros. Os resultados para este

	$ 11\rangle$	$ 10\rangle$	$ 01\rangle$	$ 11\rangle$	$ 10\rangle$	$ 01\rangle$	$ 11\rangle$	$ 10\rangle$	$ 01\rangle$
	a) $\theta_1 = 0, \theta_2 = 0$			b) $\theta_1 = \pi/2, \theta_2 = 0$			c) $\theta_1 = \pi, \theta_2 = 0$		
<i>Im</i>									
P_{exp}	0.927	0.011	0.062	0.472	0.501	0.027	0.007	0.983	0.010
P_{the}	1.000	0.000	0.000	0.500	0.500	0.000	0.000	1.000	0.000
	d) $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi/2$			e) $\theta_1 = \pi/2, \theta_2 = \pi/2$			f) $\theta_2 = \pi, \theta_2 = \pi/2$		
<i>Im</i>									
P_{exp}	0.521	0.030	0.449	0.241	0.534	0.225	0.002	0.984	0.013
P_{the}	0.500	0.000	0.500	0.250	0.500	0.250	0.000	1.000	0.000
	g) $\theta_1 = 0, \theta_2 = \pi$			h) $\theta_1 = \pi/2, \theta_2 = \pi$			i) $\theta_1 = \pi, \theta_2 = \pi$		
<i>Im</i>									
P_{exp}	0.016	0.140	0.844	0.084	0.515	0.401	0.005	0.982	0.013
P_{the}	0.000	0.000	1.000	0.000	0.500	0.500	0.000	1.000	0.000

Figura 25: Resultados para o primeiro *round* do duelo para o caso em que Alice e Bob vivem. Os parâmetros de tiro de Alice e Bob são mostrados no topo de cada conjunto de imagens, que correspondem as distribuições de intensidade gravadas em cada porta de saída ($|11\rangle$, $|10\rangle$ e $|01\rangle$).

caso são apresentados na Fig.25a). Neste caso, a probabilidade de cada um estar morto é zero. Portanto, é esperado que só imagens associadas ao estado $|11\rangle$ sejam registradas na saída. Este resultado é confirmado pelas imagens mostradas na Fig.25a). Além disso, as probabilidades experimentalmente calculadas estão em excelente acordo com os valores previstos teoricamente. O segundo caso é quando Alice dá seu melhor tiro $\theta_1 = \pi$ e Bob se mantém como um atirador ruim $\theta_2 = 0$. Neste caso, Alice mata Bob. Este resultado é confirmado pelas imagens mostradas na Fig.25c). Novamente, as probabilidades calculadas experimentalmente estão em excelente acordo com os valores previstos teoricamente. O terceiro caso ocorre quando Alice tem seu pior tiro ($\theta_1 = 0$) e Bob aumenta sua habilidade de tiro para $\theta_2 = \pi$. Neste caso, Alice erra seu tiro e Bob mata Alice. Este resultado é confirmado pelas imagens formadas na Fig.25g). Como nos casos anteriores, as probabilidades calculadas experimentalmente estão em excelente acordo com os valores previstos teoricamente, conforme observado. O último caso ocorre quando Alice e Bob têm habilidades intermediárias, por exemplo, $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$, mostrado na Fig.25e). Nesta situação, no final do *round*, a probabilidade de encontrar Alice e Bob vivos é 0.250, a

probabilidade de Alice estar viva é 0.500 e a probabilidade de encontrar Alice morta e Bob vivo é de 0.250. Como as probabilidades não são iguais a zero, isto significa que as imagens serão registradas nas três portas. Novamente as probabilidades experimentais estão em excelente acordo com os valores preditos anteriormente. As demais imagens da Fig.25 mostram algumas das probabilidades experimentais calculadas, todas elas em boa concordância com os valores teóricos que também são mostrados nessa tabela. As pequenas diferenças estão relacionadas ao fator de extinção dos divisores de feixe, precisão das *HWP* e *DP*, limitações do *MZIM* e ruído da câmera *CCD*.

Diante deste cenário, vamos discutir as probabilidades de saída do duelo quântico. A Fig.26 apresenta as probabilidades de Alice e Bob permanecerem vivos (P_{AA}) no final do duelo como função dos seus respectivos parâmetros de tiro θ_1 e θ_2 .

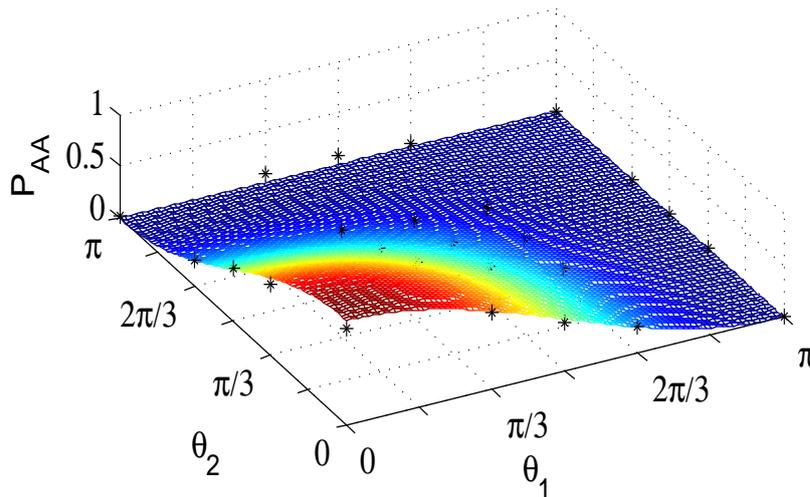


Figura 26: Resultados para a probabilidade de encontrar Alice e Bob vivos no final do primeiro *round* do duelo como uma função de seus respectivos parâmetros de tiro (θ_1 e θ_2). O estado de entrada corresponde a Alice e Bob vivos.

A superfície corresponde aos valores teóricos para o intervalo $[0, \pi]$ de θ_1 e θ_2 e foi obtida a partir da Eq. 3.7a. Os pontos correspondem aos valores das probabilidades calculados experimentalmente. Como podemos ver, para o caso onde Alice e Bob têm seus piores parâmetros de tiro ($\theta_1 = \theta_2 = 0$) a probabilidade de estarem vivos é igual 1. Os valores experimentais estão em excelente concordância com o valores teóricos. Se aumentarmos θ_1 , mantendo fixo θ_2 , nós podemos observar que as probabilidades de ambos estarem vivos vai para zero, uma vez que Alice melhora seu tiro quando θ_1 aumenta. Para $\theta_1 = \pi$ Alice tem seu melhor tiro, neste caso a probabilidade de ambos estarem vivos é

nula, isso deveria acontecer uma vez que Alice mata Bob. Como verificamos na Fig.25 os valores obtidos experimentalmente estão em excelente acordo com os experimentais.

Vamos analisar agora o caso em Alice termina o duelo viva e Bob morto. A Fig.27 apresenta um gráfico com as probabilidade disso ocorrer (P_{AD}).

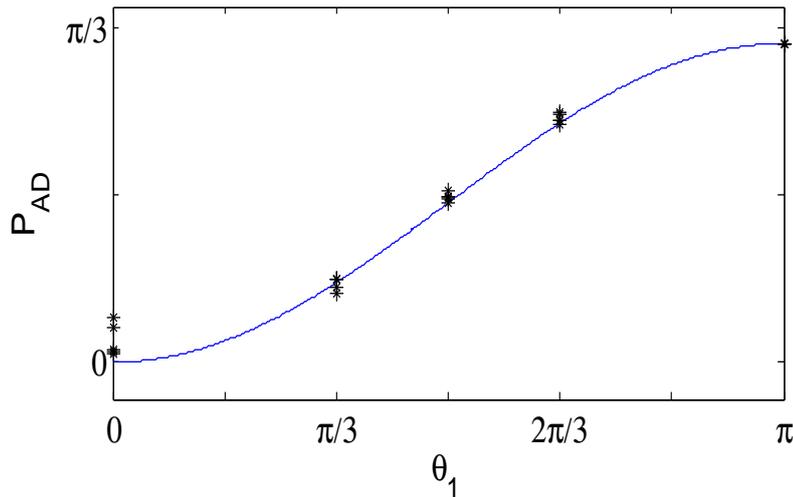


Figura 27: Resultados para a probabilidade de encontrar Alice viva e Bob morto no final do primeiro *round* do duelo como uma função de seus respectivos parâmetros de tiro (θ_1 and θ_2). O estado de entrada corresponde a Alice e Bob vivos.

Vemos que nesse caso a probabilidade depende unicamente de θ_1 . Isto ocorre porque se Alice mata Bob em seu tiro no primeiro *round*, Bob não atira e a probabilidade independe de θ_2 . Para $\theta_1 = 0$, Alice falha em seu tiro. Dessa forma, a probabilidade correspondente ao estado $|10\rangle$ é zero. As probabilidades experimentalmente calculadas são mostradas através de pontos, em boa concordância com os resultados previstos teoricamente (curva cheia). Notamos que na Fig.25, para $\theta_1 = 0$, nenhuma imagem é registrada na porta correspondente ao estado $|10\rangle$. Por outro lado para $\theta_1 = \pi$ (tiro perfeito de Alice) está probabilidade é igual a 1. Para este caso, as imagens são registradas só na porta correspondente a Bob morto. Para casos intermediários (por exemplo, $\theta_1 = \pi/2$ e $\theta_2 = \pi/2$) imagens são registradas em todas as portas com as intensidades distribuídas de acordo com as probabilidades de seus respectivos estados de saída. Entretanto, a probabilidade de encontrar Bob morto não depende de θ_2 , como podemos ver em todas as colunas correspondentes ao estado $|10\rangle$, onde a probabilidade de cada coluna não varia.

Finalmente, a probabilidade de encontrar Alice morta e Bob vivo (estado de saída $|01\rangle$) é mostrada na Fig.28.

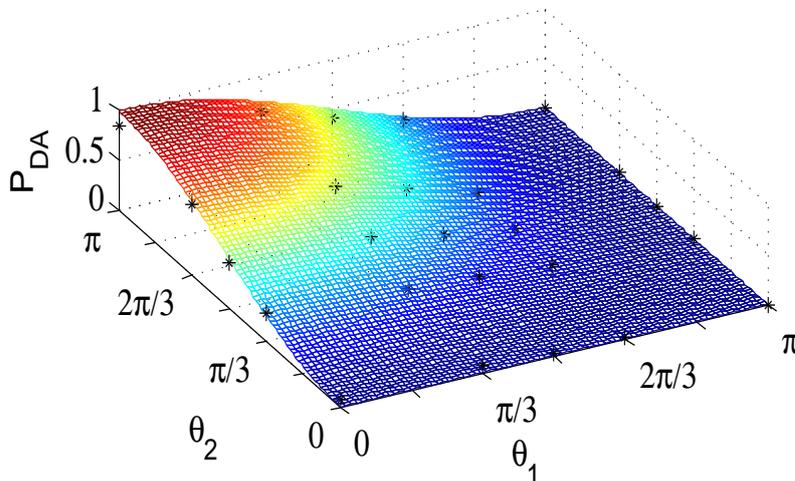


Figura 28: Resultados para a probabilidade de encontrar Alice morta e Bob vivos no final do primeiro *round* do duelo como uma função de seus respectivos parâmetros de tiro (θ_1 e θ_2). O estado de entrada corresponde a Alice e Bob vivos.

Para $\theta_2 = \pi$ e $\theta_1 = 0$ a probabilidade é igual a 1. Aumentando θ_1 , a probabilidade de encontrarmos Alice morta diminui e essa vai zero para $\theta_1 = \pi$, independente do tiro de Bob. Novamente, os resultados estão em excelente acordo com as imagens da Fig.25. As probabilidades calculadas experimentalmente são bem distribuídas ao longo da superfície teórica correspondente à Eq.3.7c.

Para o caso onde Alice realiza um tiro depois do primeiro *round*, Eq.3.6, nós implementamos o circuito experimental usando o operador da Alice descrito na Fig.22. É importante mencionar que o estado $|00\rangle$ não é considerado em nosso aparato experimental, pois ele não aparece na Eq.3.6. Portanto, o circuito usado para estudar o segundo tiro de Alice é apresentado na Fig.29.

Como podemos ver, o estado inicial para o circuito é o estado após o primeiro round, que chamamos $|\psi_1\rangle$. As saídas não são recombinadas porque as medidas são realizadas diretamente. A partir das saídas temos o necessário para calcular as respectivas probabilidades.

Se Bob realiza um tiro adicional a recombinação dos estados de saída é necessária. Com estas simplificações, as medidas podem ser realizadas pela projeção das polarizações

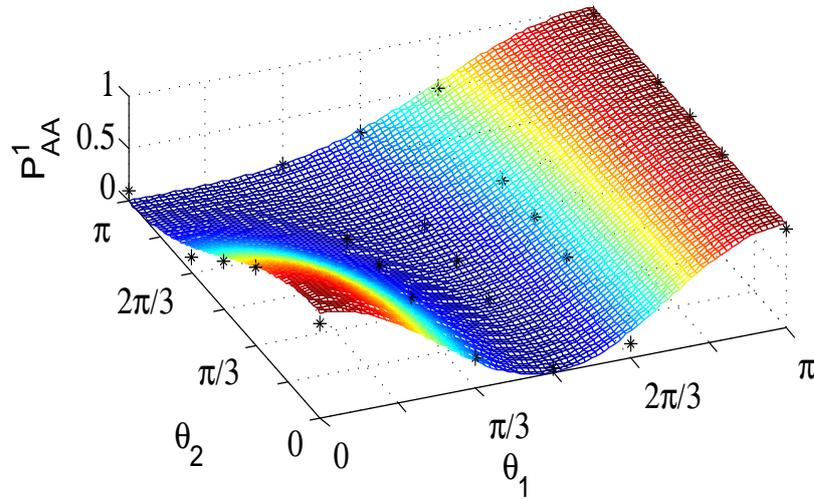


Figura 30: Resultados para a probabilidade de encontrar Alice e Bob vivos depois do segundo tiro de Alice como uma função de seus respectivos parâmetros de tiro (θ_1 and θ_2). O estado de entrada corresponde a Alice e Bob vivos.

de 50% de sucesso. Neste caso, a probabilidade de encontrar Bob morto é igual 1 quando $\theta_2 = 0$ (Bob erra seu tiro). Esta probabilidade diminui quando Bob aumenta θ_2 . Como pode ser visto, existe uma boa concordância entre os valores teóricos e experimentais para as probabilidades.

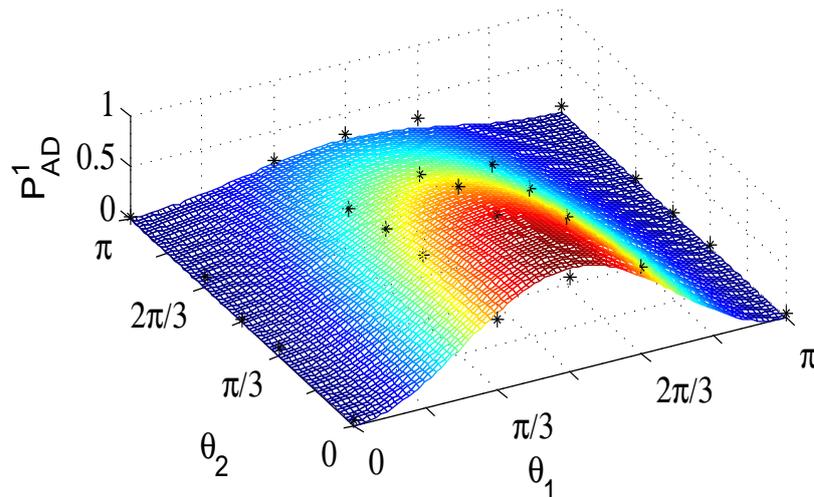


Figura 31: Resultados para a probabilidade de encontrar Alice viva e Bob morto depois do segundo tiro de Alice como uma função de seus respectivos parâmetros de tiro (θ_1 and θ_2). O estado de entrada corresponde a Alice e Bob vivos.

Finalmente, vamos discutir a probabilidade de encontrarmos Alice morta e Bob

vivo (P_{DA}) depois do segundo tiro de Alice. Os resultados são mostrados na Fig.32. Está claro que para o melhor tiro de Alice a probabilidade de encontrarmos Alice morta é nula, isto significa que Bob não atira. Entretanto, se Alice tem um tiro ruim e Bob um tiro bom, a probabilidade de encontrarmos Alice morta aumenta. Esta probabilidade será igual a 1 para $\theta_1 = 0$ (Alice falha em seu tiro) e $\theta_2 = \pi$ (Bob tem um tiro perfeito). Novamente, o acordo entre as probabilidades calculadas experimentalmente e teoricamente é excelente.

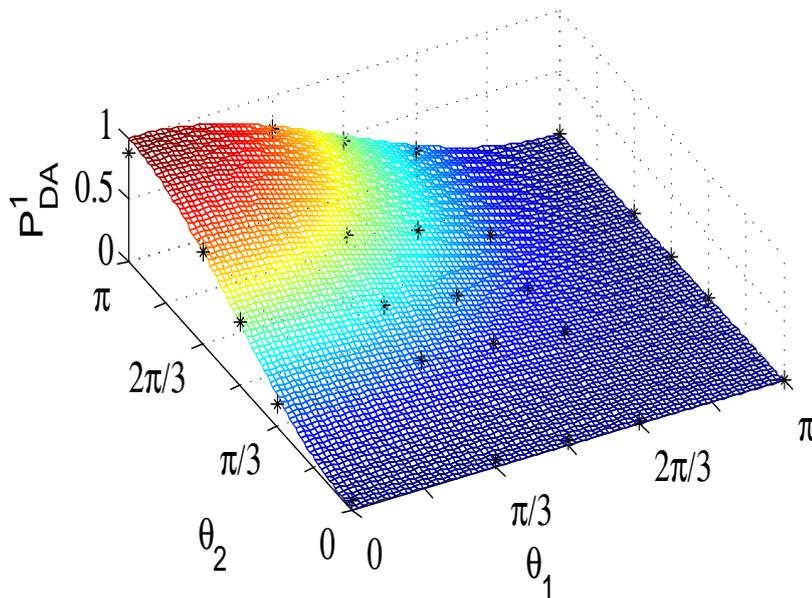


Figura 32: Resultados para a probabilidade de encontrar Alice morta e Bob vivo depois do segundo tiro de Alice como uma função de seus respectivos parâmetros de tiro (θ_1 and θ_2). O estado de entrada corresponde a Alice e Bob vivos.

Nós observamos que os resultados obtidos pelos circuitos ópticos estão em excelente acordo com os valores obtidos pela teoria do jogo quântico. Outros *rounds* do duelo podem ser realizados adicionando mais operadores de Alice e Bob no circuito.

5.1.3 Bob inicia o duelo em uma superposição de vivo e morto

O efeito da superposição pode ser explorado em nosso experimento. Vamos considerar o estado de entrada de Bob em uma superposição balanceada de morto e vivo, i.e., $\frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |0\rangle)$. Em nosso cenário, esta superposição pode ser experimentalmente emulada ajustando a HWP_1 (veja Fig.24) em 22.5° , produzindo luz polarizada a 45° . Portanto, o estado de entrada global é $|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle + |10\rangle)$. É claro que as regras do duelo são as mesmas discutidas nas seções anteriores.

A Fig.33 apresenta a probabilidade P_{AA} de encontrar Alice e Bob vivos, depois do *round* 1, como um função dos parâmetros de tiro. A superfície corresponde as probabilidades calculadas teoricamente, Eq.3.10a. Os pontos correspondem as probabilidades calculadas experimentalmente. Novamente vemos um excelente acordo entre as valores das probabilidades preditos pela teoria e os calculados experimentalmente. Note que as probabilidades encontradas vão para zero quando $\theta_2 = \pi$, que significa que com um tiro perfeito, Bob mata Alice. Um resultado bem interessante é que a probabilidade de encontrar Bob vivo tem um valor máximo igual a 0.5, independente do parâmetro de tiro da Alice, como previsto pela Eq.3.10a.

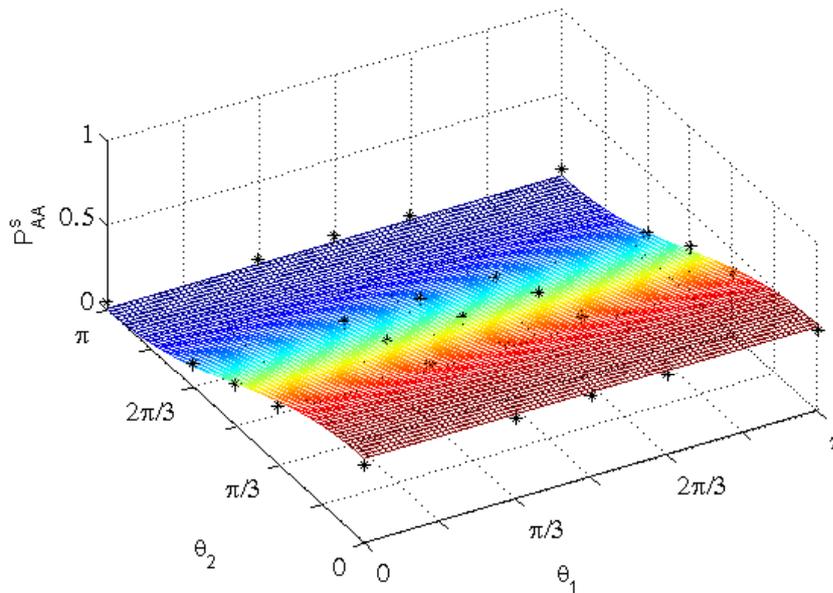


Figura 33: Resultados para a probabilidade de Alice e Bob estarem vivos no final do primeiro *round* do duelo com uma função de seus respectivos parâmetros de tiro (θ_1 and θ_2). O estado de entrada corresponde a Alice viva e Bob numa superposição balanceada de vivo e morto.

Analisando o circuito óptico, a polarização de 45° (estado inicial de Bob) torna-se circularmente polarizada depois de passar através da primeira *QWP* (veja a Fig.24). A *HWP*₂ que define o parâmetro de tiro da Alice θ_1 , atua mudando a polarização de circular à direita para circular à esquerda ou vice-versa, sem afetar a magnitude das componentes *H* e *V* da polarização. A segunda *QWP* retorna o estado de polarização do estado de entrada (linear de 45°). Como consequência, o estado final de Bob é a superposição de vivo e morto da mesma forma que o estado de entrada. Neste caso, o parâmetro de tiro da

Alice não muda o estado final de Bob, o duelo é análogo ao PQ game onde um jogador, em nosso caso Bob, controla o resultado final do jogo [78].

A probabilidade P_{DA} de encontrar Bob morto e Alice viva é mostrada na Fig.34.

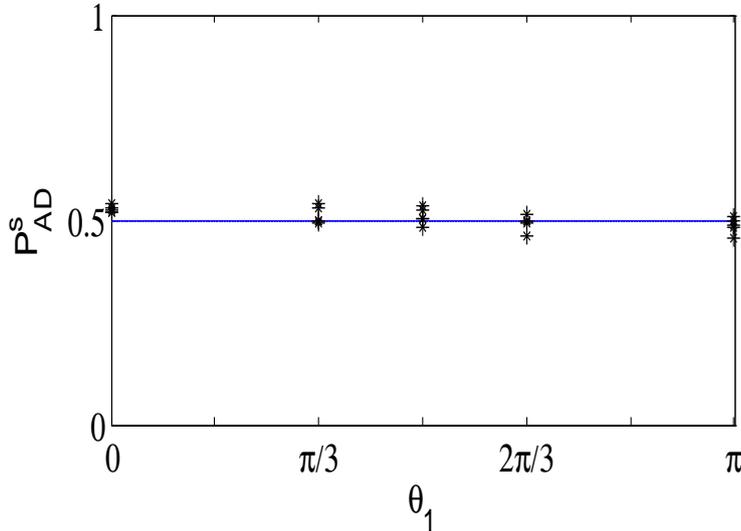


Figura 34: Resultados para a probabilidade de Alice e Bob estarem mortos no final do primeiro *round* do duelo como uma função de θ_1 . O estado de entrada corresponde a Alice viva e Bob numa superposição balanceada de vivo e morto. Note que não existe dependência em θ_2 .

Como podemos ver, esta probabilidade permanece igual a 0.5, como previsto pela Eq.3.10b. Este resultado pode ser entendido pelo fato de o tiro de Alice não afetar o estado inicial de Bob. A probabilidade de encontrar Bob vivo e Alice morta é mostrada na Fig.35. Para cada valor de θ_2 , as probabilidades não dependem de θ_1 e ela é máxima para o melhor parâmetro de tiro de Bob ($\theta_2 = \pi$). Para todas as situações, os resultados experimentais das probabilidades estão em excelente acordo com as previsões teóricas.

Na realização experimental do duelo quântico sequencial, o jogo foi implementado no cenário da Computação com Óptica Linear (LOC). A vantagem é que nós podemos realizar operações gerais usando elementos ópticos simples. A desvantagem inerente da LOC, a escabilidade. Para muitos *rounds*, o circuito óptico correspondente demandará um grande número de componentes ópticos.

Vale a pena mencionar que o experimento foi realizado em um regime clássico. Neste sentido, o feixe laser é descrito como um campo de luz clássico. Exploramos aqui a analogia entre estados quânticos e graus de liberdade de um feixe laser [21, 38, 60], muito discutida atualmente. Uma realização totalmente quântica no cenário da computação com

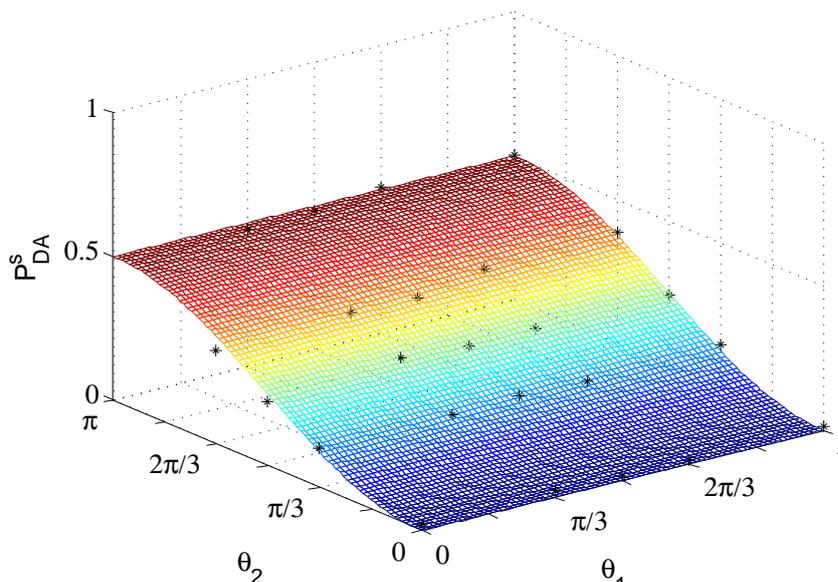


Figura 35: Resultados para a probabilidade de Alice estar morta no final do primeiro *round* do duelo como uma função dos seus respectivos parâmetros de tiro (θ_1 and θ_2). O estado de entrada corresponde a Alice viva e Bob numa superposição balanceada de vivo ou morto.

óptica linear pode ser implementada pela atenuação do feixe laser, considerando um regime de fotodetecção.

5.2 Proposta de implementação óptica do duelo quântico simultâneo

Vamos apresentar nesta seção, uma proposta de realização experimental do duelo quântico simultâneo. Um sistema físico que nos permite realizar uma operação simultânea é o estado de dois fótons produzidos pela conversão paramétrica descendente espontânea (*SPDC*) da luz [79, 80]. Este sistema tem sido usado para um grande número de aplicações no cenário da informação quântica [81, 82, 83, 84].

5.2.1 Proposta experimental

Neste processo experimental, cujo esboço está na Fig.36, um laser com frequência ω_p bombeia um cristal com susceptibilidade não linear (χ^2). Um fóton do feixe laser de bombeamento é absorvido e dois fótons, chamados de sinal e complementar⁴, são

⁴ Utilizamos os índices p , s e i , para indicar bombeio (do inglês *pump*), sinal (do inglês *signal*) e complementar (do inglês *idler*), respectivamente. Eles foram mantidos para seguir o artigo publicado.

gerados simultaneamente pelo processo de conversão paramétrica descendente (SPDC). As frequências dos feixes convertidos, ω_s e ω_i , obedecem a relação $\omega_p = \omega_s + \omega_i$, como consequência da conservação da energia e o vetor de onda do fóton \vec{k} tem que satisfazer a condição de casamento de fase $\vec{k}_p = \vec{k}_s + \vec{k}_i$ como consequência da conservação do momento linear. O resultado é o estado de dois fótons produzidos pela SPDC na aproximação de cristal fino é dada por

$$|\psi(t)\rangle = \alpha'|vac\rangle + \beta' \int d\vec{q}_s d\vec{q}_i v(\vec{q}_s + \vec{q}_i) |1, \vec{q}_s\rangle |1, \vec{q}_i\rangle, \quad (5.8)$$

onde \vec{q}_s e \vec{q}_i são componentes transversas do vetor de onda \vec{k} do sinal e complementar, respectivamente, e $v(q_p = q_s + q_i)$ é o espectro angular do feixe bombeado transferido para o estado de dois fótons. Os coeficientes α' e β' estão associados as amplitudes de probabilidade dos fótons gêmeos serem ou não gerados, respectivamente, com $|\alpha'|^2 \gg |\beta'|^2$. Este estado apresenta correlação de segunda ordem. Por esta razão, nós comparamos o número de fótons sinal e complementar chegando em dois contadores de fótons em uma curta janela de tempo com o número total de fótons, onde contaremos a taxa de coincidências, que corresponde a medidas das correlações de segunda ordem.

Temos dois tipos de condição de casamento de fase. A do tipo I, onde a polarização de sinal e complementar são idênticas e ortogonais em relação a polarização do feixe de bombeamento. Na do tipo II, a polarização do sinal e complementar são ortogonais com um deles tendo a mesma polarização do feixe de bombeamento. Neste caso, por exemplo, se o feixe de bombeamento tem polarização horizontal (H), o feixe sinal terá polarização horizontal (H) e o complementar terá polarização (V). Nós podemos representar o estado de dois fótons produzido pela SPDC, através de um vetor de estado $|P_s P_i\rangle$, onde P_s representa a polarização do sinal e P_i a polarização do complementar. A SPDC tipo II produz o estado $|HV\rangle$.

Para a realização experimental do duelo quântico simultâneo, nós propomos o uso da SPDC tipo II e medidas de coincidência. A proposta experimental é mostrada na Fig.36.

Um feixe laser verticalmente polarizado, com comprimento de onda 350 nm, bombeia um cristal não linear tipo II, produzindo o estado $|HV\rangle$. Vamos iniciar a discussão removendo todos os componentes ópticos mostrados no caminho de sinal e complementar. Para realizar as contagens individuais e as medidas de coincidência, dois divisores de feixe polarizados (PBS_1 e PBS_2) podem ser colocados no caminho dos fótons gêmeos a fim de

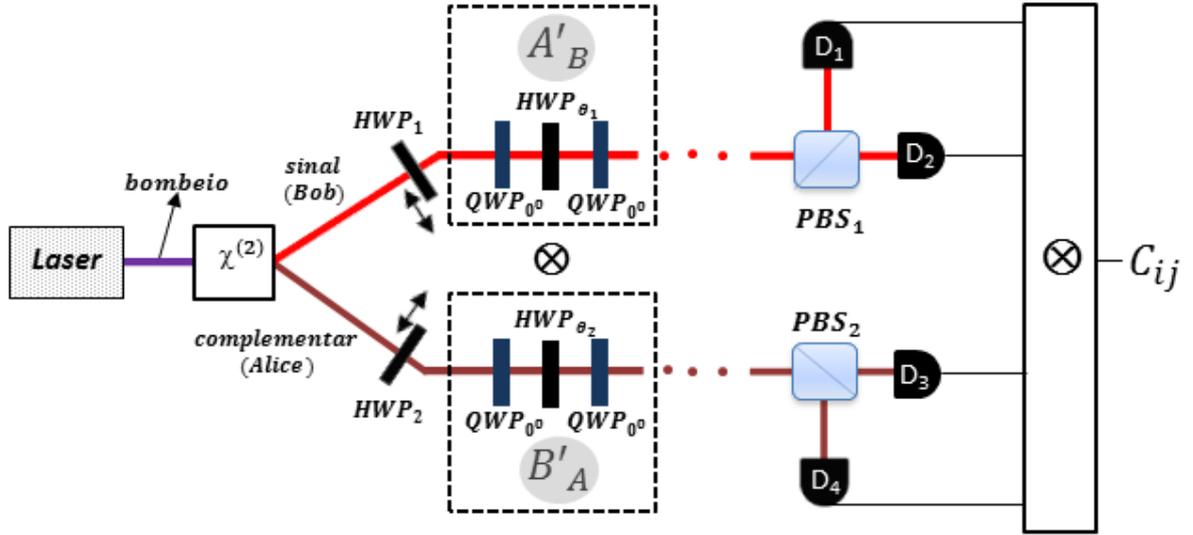


Figura 36: Configuração experimental. χ^2 é o cristal não-linear. HWP_1 e HWP_2 são as HWP 's usada para ajustar a polarização inicial dos feixes sinal e complementar, respectivamente. O conjunto $QWP_{0^0} - HWP_{\theta_i} - QWP_{0^0}$ é o operador A'_B (B'_A) para $i = 1$ ($i = 2$). PBS significa divisor de feixe polarizado. Os contadores de fótons D_j estão conectados em um sistema eletrônico com objetivo de realizar o cálculo das taxas de coincidência C_{ij} .

realizar a projeção das polarização de sinal e complementar. Quatro contadores de fótons D_j são colocados em cada uma das portas de saída (D_1, D_2 para PBS_1 e D_3, D_4 para PBS_2). Todos os contadores de fótons estão conectados a um aparato eletrônico que pode realizar a contagem de coincidências C_{jl} , entre o detetor D_j e D_l , onde $j = 1, 2$ e $l = 3, 4$.

Considerando o estado $|HV\rangle$ produzido pela SPDC tipo II, o fóton sinal será transmitido pelo PBS_1 e fóton complementar será refletido pelo PBS_2 . Então, a coincidência entre D_2 e D_4 será registrada. Em um experimento típico, temos na verdade alguns milhares de fótons e observaremos a taxa $C_{1,4}$, bem maior que as possíveis coincidências acidentais medidas entre outras combinações ($C_{1,3}$, $C_{2,3}$ e $C_{2,4}$).

Se uma placa de meia onda HWP_2 for inserida no caminho do complementar a 45° com a horizontal, a polarização do complementar será girada em 90° , levando o estado dos dois fótons para $|HH\rangle$. O complementar é agora transmitido pelo PBS_2 e será detectado por D_3 . Para este caso, registraremos a taxa de coincidência $C_{1,3}$.

Se a polarização do complementar é submetida a uma rotação de 45° , quando a HWP_2 faz um ângulo de $22,5^\circ$ com a horizontal, metade das vezes o fóton complementar

será refletido e na outra metade das vezes será transmitido pelo PBS_2 . Então, como resultado, teremos as coincidências distribuídas entre $C_{1,3}$ e $C_{1,4}$. A HWP_1 pode ser usada para mudar a polarização do sinal e podemos produzir qualquer estado $|P_s P_i\rangle$.

Este esquema é apropriado para a implementação do duelo quântico simultâneo. Vamos codificar os estados de Alice e Bob nas polarizações de complementar e sinal, respectivamente. Podemos associar o estado $|H\rangle$ com o estado vivo $|1\rangle$ e o estado $|V\rangle$ com o estado morto $|0\rangle$. Então, podemos produzir o estado inicial $|11\rangle$ (correspondendo a Alice e Bob vivos) utilizando a HWP_2 , como discutido acima.

Para o tiro de Alice, ela precisa atuar na polarização de Bob. Então, ela precisa usar uma sequência de elementos ópticos de polarização no caminho do complementar para implementar seu operador. Na prática, nós podemos combinar placas de meia onda e quarto de onda, HWP_θ e QWP_θ , respectivamente, onde θ é o ângulo entre o eixo rápido e a polarização linear.

O operador da Eq.4.12 pode ser construído por uma sequência de QWP 's e HWP 's, como mostrado na Fig.36. A matriz de Jones resultante desta sequência de elementos ópticos é idêntica a $A'_B(\theta_1)$ parte da Eq.4.12, onde θ_1 é o parâmetro de tiro da Alice. Para o tiro de Bob, com objetivo de manter a simetria entre o operador de Alice e Bob, nós precisamos usar a mesma sequência de elementos ópticos com seu parâmetro de tiro θ_2 com objetivo de obter a segunda parte da Eq.4.12, $B'_A(\theta_2)$. O produto tensorial resulta na matriz do operador simultâneo, dado pela Eq.4.11.

Vamos discutir o resultado esperado do primeiro *round* do duelo. Depois do tiro de Alice e Bob, as polarizações de sinal e complementar serão mudadas e a taxa de coincidência $C_{j,l}$ será afetada pela ação dos operadores de Alice e Bob. Se Alice e Bob falham, o estado inicial $|11\rangle$ não será modificado e isso contribui para a taxa de coincidência $C_{1,3}$. Se Alice mata Bob e ele falha em seu tiro, a polarização do sinal será girada em 90° e o estado se tornará $|01\rangle$ e a taxa de coincidência $C_{2,3}$ aumentará. Finalmente, se ambos os duelistas baterem seus oponentes, o estado final será $|00\rangle$ e a taxa de coincidência $C_{2,4}$ aumentará.

As probabilidades de Alice e Bob estarem vivos ou mortos podem ser calculadas a partir das taxas de coincidência. Por exemplo, a taxa de coincidência correspondente a Alice e Bob vivos é $C_{1,4}$ (estado final igual a $|11\rangle$). A probabilidade pode ser calculada

pela razão entre $C_{1,4}$ e a contagem total de coincidências $TCC = \sum_{j=1,2;l=3,4} C_{j,l}$. Então,

$$P_{AA} = \frac{C_{1,3}}{TCC}. \quad (5.9)$$

A probabilidade de Alice estar viva e Bob estar morto (P_{AD}) é obtida trocando a taxa de coincidência $C_{1,4}$ por $C_{2,4}$ na Eq.5.9. P_{DA} é obtida usando $C_{1,3}$ e P_{DD} utilizando $C_{2,3}$. Estas probabilidades podem ser utilizadas para calcular as funções *payoff*. Por exemplo, para a função *payoff* de Alice dada pela Eq.4.3, P_{AD} corresponde ao termo $|\langle 10 | \psi_n \rangle|^2$, P_{AA} corresponde ao termo $|\langle 11 | \psi_n \rangle|^2$ e P_{DD} corresponde ao termo $|\langle 00 | \psi_n \rangle|^2$. Em nosso exemplo $n = 1$, ou seja, corresponde ao primeiro *round*.

Um segundo *round* pode ser realizado adicionando um segundo conjunto de elementos ópticos de polarização. Se colocarmos N conjuntos teremos N tiros. As linhas pontilhadas na Fig.36 representam o espaço que pode ser usado para se inserir N conjuntos de placas de onda para implementar N *rounds*.

A realização do duelo quântico simultâneo com a entrada no estado de Bell discutido na Seção 4.3 também pode ser experimentalmente realizada, uma vez que a SPDC tipo II é uma fonte natural de emaranhamento de dois q-bits [86]. Desta forma, podemos obter o estado dado pela Eq.4.16. Os operadores são os mesmos e as probabilidades e a função *payoff* são obtidas da mesma forma que mostramos anteriormente. O estado de Bell da Eq.4.15 pode ser também obtido experimentalmente utilizando dois cristais tipo I girados de 90° [87] um em relação ao outro.

As principais vantagens deste sistema são em primeiro lugar, o fato do operador de tiro ser construído apenas por ações sobre os estados de polarização da luz. Em segundo lugar, as probabilidades podem ser obtidas de forma muito simples utilizando taxas de contagem de coincidência. A desvantagem deste sistema é em relação ao uso da óptica linear para tarefas de computação é a escalabilidade. De fato, para um grande número de *rounds* N , o número de elementos ópticos cresce rapidamente.

6 Estados tripartidos não-separáveis e violação da desigualdade de Mermin

Neste trabalho relatamos a preparação e caracterização experimental de um estado tripartido não-separável em óptica clássica. Isso será feito pela manipulação de três graus de liberdade de um feixe laser, a saber, caminho, polarização e modos transversos, como os quais preparamos uma estrutura tripartido não-separável clássica análoga ao estado GHZ_2 da Eq.2.17.

Mostramos a implementação de circuito ópticos que nos permitem realizar as medidas desejadas para calcular os valores esperados na desigualdade de Mermin e mostrar que ela é violada. Nossos resultados abrem novas possibilidades para os estudo do emaranhamento no domínio da óptica clássica, bem como para novas aplicações inspiradas em protocolos de informação quântica multipartidos.

6.1 Preparação do estado

Nosso experimento explora três graus de liberdade de um feixe laser: sua direção de propagação (p)¹, sua polarização (P) e os modos transversos (M). Para destacar a analogia com estados quânticos, utilizaremos, baseados nas Refs. [49, 48, 47], a notação de Dirac para descrever estes graus de liberdade, como discutido na Seção 2.6. Com relação ao caminho, o feixe laser pode ser dividido, com pesos arbitrários em dois caminhos diferentes, que denotaremos por $|0\rangle_p$ e $|1\rangle_p$. As polarizações dos feixes utilizados para codificação dos q-bits são horizontal e vertical, $|0\rangle_P$ e $|1\rangle_P$, respectivamente. Finalmente, descrevemos o espaço bidimensional dos modos transversos Hermite-Gauss de primeira ordem como $|0\rangle_M \equiv |HG_{01}\rangle$ e $|1\rangle_M \equiv |HG_{10}\rangle$ para codificar o terceiro q-bit. É claro que qualquer estado puro separável de um sistema tripartido corresponde ao produto tensor de estados bem definidos. Nesta analogia, o estado para estes três graus de liberdade é escrito como: $|p\rangle \otimes |P\rangle \otimes |M\rangle = |pPM\rangle$.

Na Fig.37 mostramos o circuito óptico utilizado para preparar o estado de um feixe

¹ p significa caminho, do inglês path. Optamos por manter a notação utilizada no artigo original

laser análogo ao estado GHZ da Eq.2.17. Um feixe laser verticalmente polarizado passa

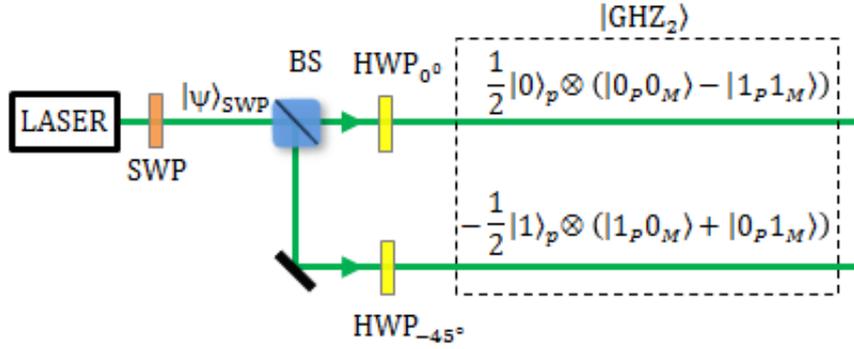


Figura 37: Preparação experimental do análogo clássico do estado GHZ . SWP significa placa de onda s, BS significa divisor de feixe, HWP significa placa de meia onda.

através da placa de onda S (SWP) que é capaz de gerar um feixe de luz radialmente polarizado, descrito pelo estado não-separável (polarização/modos transversos) dado por,

$$|\psi_{swp}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_P 0_M\rangle + |1_P 1_M\rangle). \quad (6.1)$$

O feixe é, então, dividido ao passar através de um BS (50/50), que introduz o grau de liberdade do caminho, uma vez que são dois os caminhos possíveis para o feixe laser. A partir de agora as operações ocorrem sobre as duas componentes do caminho. O estado $|0\rangle_p \otimes |\psi_{swp}\rangle$ passa através da placa de meia onda posicionada com um ângulo de 0° com respeito a horizontal ($|HWP_{0^\circ}\rangle$), resultando em um estado $\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle_p \otimes (|0_P 0_M\rangle - |1_P 1_M\rangle)$. A outra componente do caminho $|1\rangle_p \otimes |\psi_{swp}\rangle$ passa através da placa de meia onda posicionada a um ângulo de -45° com respeito a horizontal ($|HWP_{45^\circ}\rangle$), resultando no estado $-\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle_p \otimes (|0_P 1_M\rangle + |1_P 0_M\rangle)$. Então, o estado geral do feixe compreendendo os dois caminhos corresponde ao análogo óptico do estado $|GHZ_2\rangle$ da Eq.2.17. Considerando a paridade, note que o estado $|PM\rangle$ no caminho $|0\rangle_p$ é par, enquanto o outro estado, no caminho $|1\rangle_p$ é ímpar.

6.2 Demonstração experimental da violação da desigualdade de Mermin

A figura chave em nosso experimento é o interferômetro de Mach-Zehnder com um espelho adicional ($MZIM$), representado na Fig.38, com uma diferença de fase ϕ entre os

dois braços que podem ser sintonizados com uma cerâmica piezoelétrica (*PZT*).

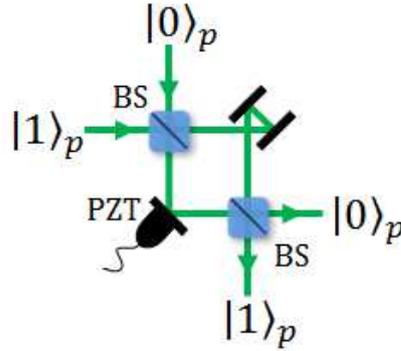


Figura 38: O interferômetro de Mach-Zehnder com um espelho adicional (*MZIM*). As portas de entrada e saída são representadas pelos estados do caminho $|0\rangle_p$ e $|1\rangle_p$ como na figura. *PZT* significa cerâmica piezoelétrica.

Para entender como o *MZIM* funciona, vamos mostrar o circuito cuja ação sobre três q-bits corresponde a ação do *MZIM* sobre nossos três graus de liberdade. O primeiro divisor de feixe, na entrada do *MZIM*, implementa uma porta Hadamard sobre o estado do caminho $|p\rangle$. Então, temos uma diferença entre os dois braços do interferômetro controlado pelo *PZT*, modelado em nosso circuito por uma porta de fase $P_\phi = \text{diag}(1, e^{i\phi})$. Isto é seguido por uma reflexão no braço $|1\rangle_p$, que introduz um fator de fase -1 na polarização H e no modo transversal h ; isto é modelado por duas portas $CZ = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$, controladas pelo caminho $|p\rangle$ e atuando sobre $|P\rangle$ e $|M\rangle$. Finalmente, um segundo divisor de feixe implementa uma segunda porta Hadamard sobre o caminho p . Vemos então que a ação do *MZIM* pode ser diretamente mapeada para o circuito quântico da Fig.39 a).

Agora vamos usar dois circuitos identidade $H^2 = 1$ e a relação $H_i CZ_{i,j} H_i = CNOT_{j \rightarrow i}$ no circuito da Fig.39 a) para obter o circuito equivalente mais simples, apresentado na Fig.39 b). A sequência inicial da porta $HP_\phi H$ sobre $|p\rangle$ representa a ação de um interferômetro de Mach-Zehnder, em que a diferença de fase ϕ pode ser ajustada para dar qualquer escolha na razão da divisão dos feixes nos modos de saída. O par de espelhos do braço $|0\rangle$ do *MZIM* é modelado por uma porta *CNOT*, trocando as intensidades de saída dos caminhos $\{|0\rangle_p, |1\rangle_p\}$ se o modo $|PM\rangle$ é ímpar.

Nós iniciamos pela calibração do *MZIM* com diferença de fase $\phi = 0$. Como descrito na Fig.37, nosso estado tipo-GHZ convenientemente consiste em duas partes com autoestados $|PM\rangle$ bem definidos. Para calibrar o *MZIM* em $\phi = 0$, nós simplesmente bloqueamos o caminho $|1\rangle_p$, ajustando o *PZT* de forma que todos os modos pares do feixe

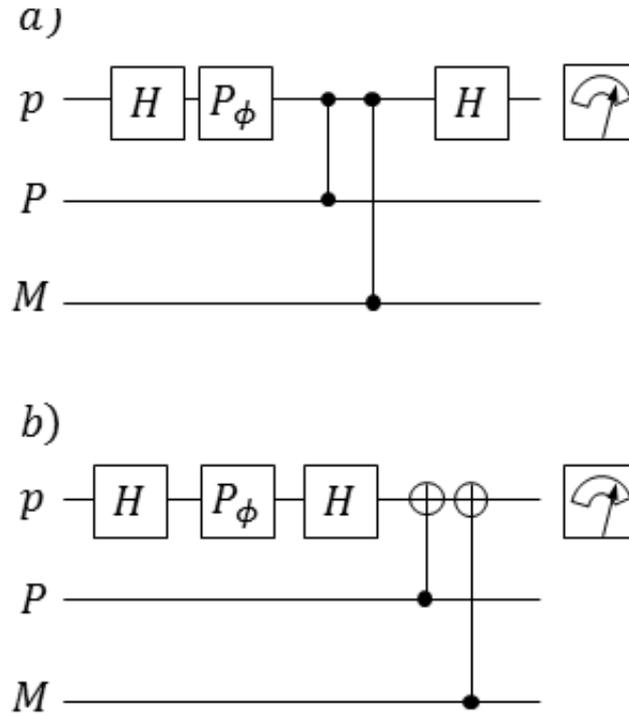


Figura 39: Circuito de três q-bits que correspondem a ação do *MZIM* sobre os três graus de liberdade de um feixe laser. a) Interpretação direta da ação do *MZIM* sobre os três graus de liberdade; b) Para simplificar, circuito equivalente obtido com o circuito identidade descrito no texto principal.

$|PM\rangle$ na entrada $|0\rangle_p$ fossem direcionados para saída da porta $|0\rangle_p$.

A calibração do *MZIM* com $\phi = 0$ nos permite medir o valor esperado $\langle ZZZ \rangle$ da desigualdade de Mermin. Note que estados pares (ímpares) $|PM\rangle$ entrando via caminho $|0\rangle_p$ ($|1\rangle_p$) saem via $|0\rangle_p$ ($|1\rangle_p$). Similarmente, estados ímpares (pares) $|PM\rangle$ entrando via caminho $|1\rangle_p$ ($|0\rangle_p$) saem via $|0\rangle_p$ ($|1\rangle_p$). Sumarizando, nós observamos que a ação do *MZIM* quando $\phi = 0$ é direcionar as componentes do modo par $|pPM\rangle$ (para qual $\langle ZZZ \rangle = +1$) para a saída $|0\rangle_p$ e as componentes de modo ímpar (para o qual $\langle ZZZ \rangle = -1$) para a saída $|1\rangle_p$. Na Fig.40 a) representamos a medida direta de $\langle ZZZ \rangle$ usando o *MZIM*. Se I_0 (I_1) é a intensidade de saída no caminho $|0\rangle_p$ ($|1\rangle_p$), então o valor esperado $\langle ZZZ \rangle$ pode ser encontrado da seguinte forma,

$$\langle ZZZ \rangle = \frac{I_0 - I_1}{I_0 + I_1}. \quad (6.2)$$

Nós obtivemos as imagens de saída das duas portas de saída do *MZIM* em um mesmo quadro com uma câmera *CCD*. Utilizamos as imagens para obter as intensidades relativas das saídas $I_0/(I_0 + I_1)$ e $I_1/(I_0 + I_1)$, da mesma forma que fizemos para o duelo

sequencial discutido na Seção 5.2. A intensidade de fundo de cada imagem foi subtraído em cada medida. O mesmo procedimento será feito para o cálculo dos valores esperados $\langle ZXX \rangle$, $\langle XZX \rangle$ e $\langle XXZ \rangle$.

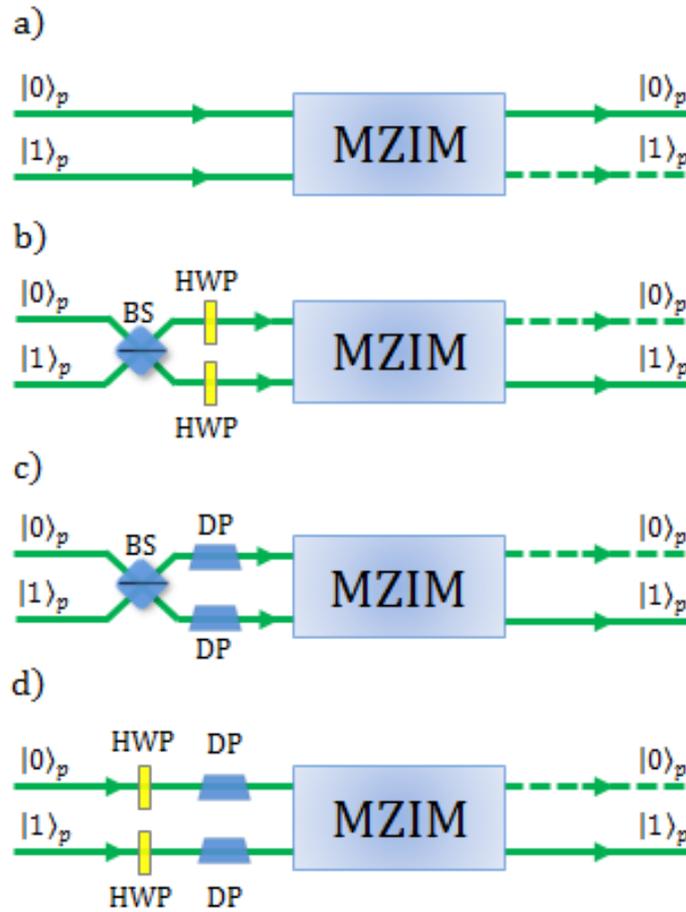


Figura 40: Configuração experimental para medir os valores esperados $\langle ZZZ \rangle$, $\langle XXZ \rangle$, $\langle XZX \rangle$, e $\langle ZXX \rangle$, a)-d), respectivamente. Linhas pontilhadas representam a saída onde a intensidade zero é esperada.

A fim de medir os outros operadores exigidos na desigualdade de Mermin, Eq.2.16, nós primeiro notamos que a porta *Hadamard* H mapeia os operadores de Pauli X em operadores de Pauli Z : $H^{-1}XH = Z$. Por isso, a porta *Hadamard* seguida de uma medida física de Z corresponde a uma medida de Pauli X . A *Hadamard* é implementada sobre o grau de liberdade do caminho por um divisor de feixe (BS) balanceado 50/50; sobre a polarização por uma HWP orientada em $22,5^\circ$ com respeito a horizontal; e sobre o modo transversal por um prisma de Dove (DP) orientado em 22.5° com relação a horizontal. As medidas de $\langle XXZ \rangle$, $\langle XZX \rangle$ and $\langle ZXX \rangle$ são realizadas pelo circuitos esboçado nas Figs. 40 b), 40 c) e 40 d), respectivamente, cada um envolvendo a aplicação de portas

Hadamard para dois graus de liberdade. Os valores esperados são calculados a partir das intensidades de saída do caminho como discutido no caso $\langle ZZZ \rangle$.

É fácil mostrar que portas Hadamard sobre dois graus de liberdade transformam o estado GHZ , de modo que caminho de entrada $|0\rangle_p$ do $MZIM$, agora tem um estado $|PM\rangle$ ímpar e o caminho $|1\rangle_p$ tem um estado $|PM\rangle$ par. Por esta razão, medidas de $\langle XXZ \rangle$, $\langle XZX \rangle$ e $\langle ZXX \rangle$ são agora esperadas saindo do $MZIM$ pelo caminho $|1\rangle_p$, correspondendo ao valor esperado de -1 para estes observáveis, como discutido na Eq.2.16. A calibração é novamente feita bloqueando caminho de entrada $|1\rangle_p$ do $MZIM$. Assim, o estado $|PM\rangle$ ímpar entra pelo caminho $|0\rangle_p$ e sai pelo caminho $|1\rangle_p$ do $MZIM$, quando ajustamos o PZT para obter a máxima intensidade nesta saída. Devido a mudança de paridade nos caminhos da entrada do $MZIM$ (com respeito a medida ZZZ), a diferença de fase obtida na calibração é $\phi = 0$, como foi no caso para a medida $\langle ZZZ \rangle$.

No apêndice A apresentamos uma discussão detalhada do esquema experimental para o cálculo dos valores esperados, considerando a ação de cada componente óptico, bem como o papel da fase relativa entre os braços do $MZIM$.

Como discutido acima, em cada medida o esperado é que todas as intensidades do feixe saíam por uma única saída. A forma anelar das imagens é devida ao feixe polarizado radialmente, produzido pela SWP . Em todos os casos nós observamos experimentalmente alguma intensidade residual saindo na porta que idealmente deveria estar "escura". Esta imperfeição experimental é nas três medidas que exigem portas *Hadamard*, para medir X ao invés de Z , pois exigem um grande número de elementos ópticos quando comparados com a medida direta de ZZZ . A Fig.41a) mostra os resultados obtidos para os caminhos de saídas $|0\rangle_p$ e $|1\rangle_p$ para cada um dos valores esperados $\langle ZZZ \rangle$, $\langle ZXX \rangle$, $\langle XZX \rangle$ e $\langle XXZ \rangle$. A Fig.41b) mostra os resultados obtidos por simulação para as mesmas saídas.

Como podemos ver, todos os resultados estão em boa concordância com o valor esperado encontrado teoricamente. Das intensidades observadas na duas portas de saída calculamos o valor esperado de todos os quatro operadores que aparecem na desigualdade de Mermin (Eq.2.16). Estes resultados são mostradas na tabela 3, junto com o valor de Mermin M .

As barras de erro representam a variância estatística correspondente as imagens obtidas experimentalmente (entre 7 e 9 imagens, dependendo do experimento). Como pode

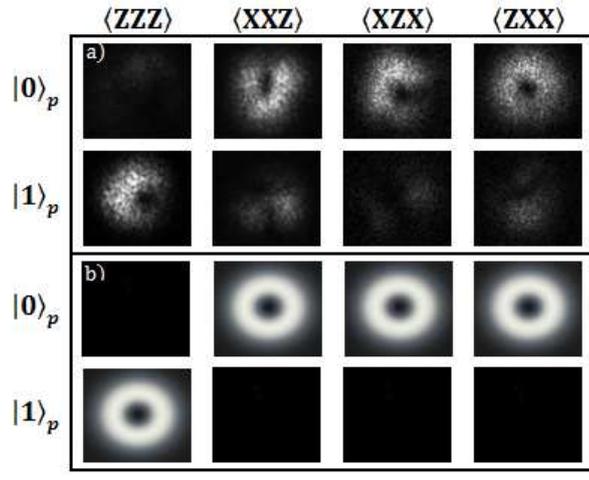


Figura 41: Imagens nos caminhos de saída do *MZIM*, para todas as quatro medidas. a) Imagens obtidas experimentalmente, da qual as intensidades relativas foram utilizadas para o cálculo dos valores esperados. b) Simulação das saídas experimentais ideais.

$\langle ZZZ \rangle$	$\langle XXZ \rangle$	$\langle XZX \rangle$	$\langle ZXX \rangle$	M
+0.87	-0.53	-0.63	-0.59	2.62
± 0.03	± 0.02	± 0.02	± 0.02	± 0.05

Tabela 3: Valores obtidos experimentalmente para as quatro medidas envolvidas na desigualdade de Mermin e o valor da quantidade de Mermin M . Os erros estatísticos são estimados da análise do número de imagens obtidas em experimentos independentemente.

ser visto, a desigualdade de Mermin é claramente violada ($M > 2$). A não violação máxima pode ser explicada pelas imperfeições de componentes ópticos, e.g. *BS* desbalanceado, precisão limitada na orientação da *SWP*, *HWP* e *DP*, bem como sensibilidade limitada da câmera *CCD* (98% em 532 nm). Além disso, pequenos desalinhamentos no circuito óptico, especialmente no *MZIM*, contribuem para que a violação não seja perfeita. Note, entretanto que estas imperfeições só podem contribuir para diminuir a quantidade da violação, uma vez que no experimento idealizado poderíamos alcançar a violação algébrica máxima de $M = 4$.

O regime quântico pode ser alcançado atenuando o feixe laser para o regime de fotocontagem. Neste caso, como discutido na Refs. [48, 47], os estados preparados serão genuinamente estados tripartidos emaranhados, onde o emaranhamento é observado entre os três graus de liberdade de um único fóton.

7 Operações condicionais em graus de liberdade de um feixe laser para realização de portas lógicas quânticas

Portas lógicas quânticas são importantes elementos para implementar protocolos de comunicação e algoritmos quânticos de informação[14]. Em um sistema de dois q-bits, as portas são usadas para realizar operações condicionais, onde um q-bit controla o estado do outro. Neste capítulo vamos discutir a implementação de duas portas lógicas quânticas, a porta de fase π e a porta Toffoli. As portas serão implementadas manipulando graus de liberdade de um feixe laser para codificar os q-bits, em particular, a polarização, os modos Hermite-Gauss e o caminho. É importante mencionar que muitas propostas e realizações experimentais têm utilizado sistemas clássicos para descrever superposição de estados quânticos [48, 49, 60, 38]. Para estas tarefas a coerência óptica é um ponto fundamental para reproduzir características quânticas em sistemas clássicos. Além disso, as operações unitárias realizadas sobre o sistema são as mesmas, seja ele clássico ou quântico. Dessa forma, a atenuação do feixe laser para um regime de fotocontagem nos levará a um regime genuinamente quântico. Primeiramente, apresentaremos a porta de fase π , de dois q-bits, que foi implementada manipulando a polarização e modos transversos do feixe laser. Em seguida, apresentaremos a porta Toffoli, de três q-bits, onde adicionamos outro grau de liberdade além dos citados anteriormente, o caminho do feixe laser.

7.1 Porta de fase π

O núcleo de nossa proposta é o controle de fase condicional. Nesse sentido, a fase de Gouy adquirida por um modo Hermite-Gaussiano quando este passa por conversor de modo astigmático, dependendo do estado de polarização, é o ponto chave para o funcionamento da nossa porta de fase [60]. A fase de Gouy [88] pode ser observada quando um feixe laser converge para o foco. Um feixe Hermite-Gaussiano isotropicamente focalizado

$HG_{m,n}(x, y, z)$, se propaga ao longo do eixo z tem fase de Gouy dada por,

$$\Phi_{m,n} = (m + n + 1) \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right), \quad (7.1)$$

onde z_R é o comprimento de Rayleigh. Para um feixe astigmático, o comprimento de Rayleigh é diferente para direções ortogonais transversas ($z_{R_x} \neq z_{R_y}$) que nos leva a seguinte fase de Gouy,

$$\Phi_{m,n} = \left(m + \frac{1}{2}\right)\phi_x + \left(n + \frac{1}{2}\right)\phi_y, \quad (7.2)$$

com $\phi_\alpha = \arctan(z/z_\alpha)$ e $\alpha = x, y$. Lentes cilíndricas naturalmente produzem um tipo de astigmatismo e isto é explorado para construir um conversor de modo astigmático, muito utilizado para converter modos Hermite-Gauss de primeira ordem em modos LG de primeira ordem e vice-versa [89].

A Fig.42 mostra um esquema básico do conversor de modo. Duas lentes cilíndricas com distância focal f são posicionados a uma distância d uma da outra. A direção ao longo da parte mais longa das lentes cilíndricas define a orientação do conversor. Esta direção pode ser rodada por um ângulo θ em relação a horizontal (direção x). Note que o feixe é astigmático só na região entre as lentes.

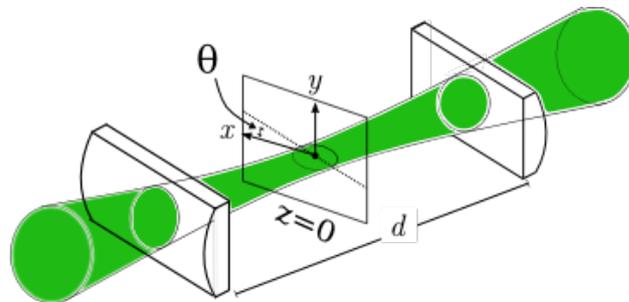


Figura 42: Configuração do conversor de modo astigmático.

Podemos entender, observando a Eq.7.2, as diferentes fases de Gouy adquiridas por diferentes ordens dos feixes Hermite-Gauss em um conversor de modo astigmático devido a diferença entre ϕ_x e ϕ_y . Além disso, a fase adquirida Φ depende da distância entre as lentes e este é um parâmetro que pode variar continuamente. Para descrever a ação do conversor astigmático sobre os modos HG , vamos utilizar o conhecido formalismo matricial. A matriz para um conversor ϕ orientado em $\theta = 0$ em relação a horizontal, $C(0, \phi)$, apresentado na Ref.[68], pode ser generalizado usando a matriz de rotação $R(\theta)$,

$$C(\theta, \phi) = R(\theta)C(0, \phi)R(-\theta), \quad (7.3)$$

que nos leva a

$$C(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} \cos^2(\theta) + e^{i\phi} \sin^2(\theta) & (e^{i\phi} - 1) \sin(\theta) \cos(\theta) \\ (e^{i\phi} - 1) \sin(\theta) \cos(\theta) & \sin^2(\theta) + e^{i\phi} \cos^2(\theta) \end{bmatrix},$$

onde θ é a orientação do conversor e ϕ é a fase de Gouy impressa pelo conversor de modo. Os conversores de modo mais comuns são os do tipo $\pi/2$ e π , [89]. O tipo $\pi/2$ é obtido posicionando as lentes a uma distância $d = \sqrt{2}f$. Este conversor introduz uma diferença de fase de $\pi/2$ entre os modos $HG_{0,1}$ e $HG_{1,0}$. Ele é utilizado para converter modos HG em modos LG . O conversor tipo π introduz uma diferença de fase π entre $HG_{0,1}$ e $HG_{1,0}$. Este conversor é obtido quando $d = 2f$ e pode ser utilizado para converter feixes Laguerre-Gauss LG_0^{+1} e LG_0^{-1} . Para o caso em que $HG_{0,1}$ e $HG_{1,0}$ passam através de $C(0, \phi)$, nós podemos escrever:

$$C(0, \pi)HG_{1,0} = HG_{1,0}, C(0, \pi)HG_{0,1} = e^{i\pi}HG_{0,1}.$$

Com a adição dos graus de liberdade da polarização na base $\{H, V\}$ para 7.4, podemos realizar a mudança de fase condicional no feixe Hermite-Gauss de primeira ordem.

Vamos descrever como a mudança de fase condicional pode ser feita experimentalmente. O circuito experimental é apresentado na Fig.43. Um feixe laser polarizado horizontalmente com comprimento de onda de $532nm$, $10mW$ de potência, passa em um divisor de feixe polarizado, PBS_1 , com objetivo de rejeitar componentes espúrias da polarização vertical e preparar o feixe com polarização horizontal (H). O feixe passa por uma máscara holográfica com objetivo de gerar o modo $HG_{1,0}$, que chamamos modo h . Este modo passa por um filtro espacial produzindo um modo HG com diâmetro de $2,0$ mm. Uma placa de meia onda HWP é utilizada para definir a polarização. Com eixo rápido em 0^0 com relação a horizontal, o feixe laser tem polarização H e modo h , que chamamos modo Hh . Girando a HWP em 45^0 convertemos a polarização H em V , produzindo o modo Vh . Para obter os estados associados ao modo $HG_{0,1}$, que chamaremos de v , rodamos a máscara em um ângulo de 90^0 . Com a HWP a 0^0 e 45^0 , produzimos os modos Hv e Vv , respectivamente. O controle da fase condicional dos modos espaciais é realizada pelo circuito óptico G . Os modos Hh e Hv são transmitidos pelo PBS_2 e não passam através de um conversor de modo π . Os modos Vh e Vv são refletidos pelo PBS_2 e passam através do conversor de modo π . O conversor é composto de duas lentes

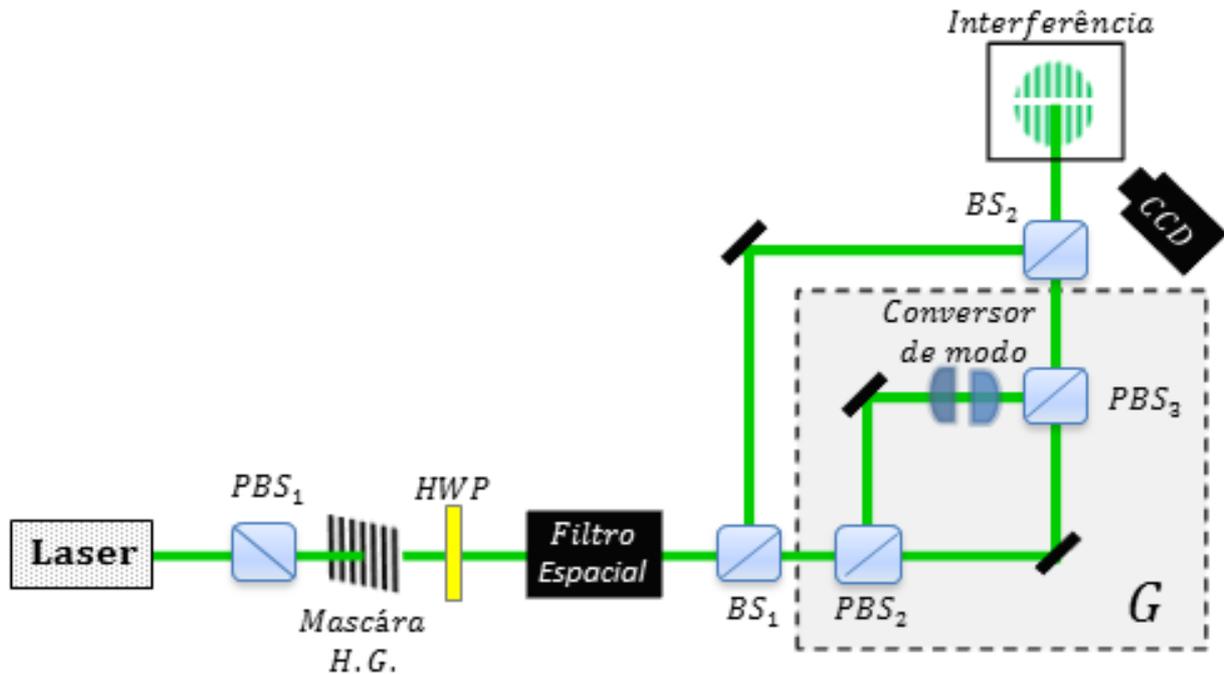


Figura 43: Circuito experimental. *PBS* significa divisor de feixe polarizado. *BS* significa divisor de feixe. Máscara *H.G.* é onde o modo Hermite-Gauss de primeira ordem é gerado. *CCD* significa dispositivo de carga acoplada – dispositivo utilizado em câmeras digitais.

cilíndricas com dimensões $12,7 \times 25,4 \text{ mm}$, possuindo uma distância focal $f = 12,5 \text{ mm}$. Pela Eq.7.4 só o modo Vv adquire uma fase π . O *PBS*₃ recombina os dois braços.

Para comparar a diferença de fase do feixe passando através do conversor de modo π e o feixe se propagando livremente, utilizamos um feixe de referência. Um divisor de feixe balanceado, *BS*₁ (50/50), é colocado depois da preparação do modo com objetivo de separar o feixe de referência e o feixe enviado para o circuito óptico.

A saída do circuito *G* irá interferir com o feixe de referência em um segundo divisor de feixe balanceado (*BS*₂), o padrão de interferência é projetado em um plano e as imagens das franjas de interferência são gravadas por uma câmera *CCD*, com as quais podemos observar as fases relativas adquiridas pelos feixes ao passar pelo circuito.

7.1.1 Resultados e discussões

Inicialmente, verificamos a mudança de fase condicional para os modos *Hh* e *Hv*, correspondendo ao primeiro conjunto de dados, os resultados são mostrados na Fig.44. Os

perfis de intensidade são mostrados nas Fig.44 a) e b), correspondendo aos modos Hh e Vh , respectivamente. Os padrões de interferência são mostrados nas Fig.44 c) e d), onde a linha pontilhada é um guia para os olhos. Podemos ver que os padrões de interferência apresentam uma franja clara em seu centro. Isto indica que nenhuma fase de Gouy relativa foi adquirida pela passagem do modo Vh pelo conversor π . A distribuição de intensidade dos padrões de intensidade poder ser simulada aplicando o formalismo matricial ao circuito óptico apresentado na Fig.43. Para este caso, os resultados são mostrados nas Fig.44 e) e f). Como podemos ver, esta simulação e os resultados experimentais estão em bom acordo com respeito as distribuições de intensidade.

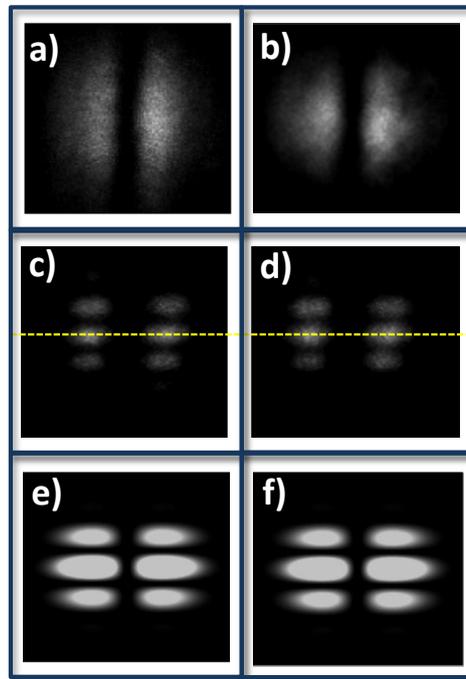


Figura 44: Distribuição de intensidade dos modos Hh a) e Vh b). Padrões de interferência dos modos Hh c) e Vh d) com o feixe de referência. Simulação dos padrões de interferência dos modos Hh e) e Vh f). As linhas pontilhadas são guias para nossos olhos.

Para quantificar a fase relativa, uma linha transversa de cada padrão de interferência foi desenhada. A Fig.45 a mostra o resultado correspondente para o modo Hh , enquanto que Fig.45b corresponde ao modo Vh . As linhas sólidas são ajustes não lineares, mostrando que a diferença de fase entre estes estados é praticamente zero, concordando com o esperado. O ajuste não-linear é baseado no padrão de interferência entre dois feixes gaussianos,

modelados pela equação

$$y(x) = A_0[1 - \mu \cos(kx - \delta) \exp^{-(x-x_0)^2/w_0}], \quad (7.4)$$

onde A_0 , x_0 , w_0 , μ , k e δ são parâmetros livres do ajuste dos dados experimentais. Aplicando este ajuste em nossos dados experimentais, nós obtemos a frequência espacial k para medir o diferença de fase em termos de $k\Delta x$, onde Δx é o deslocamento espacial relativo dos padrões de interferência.

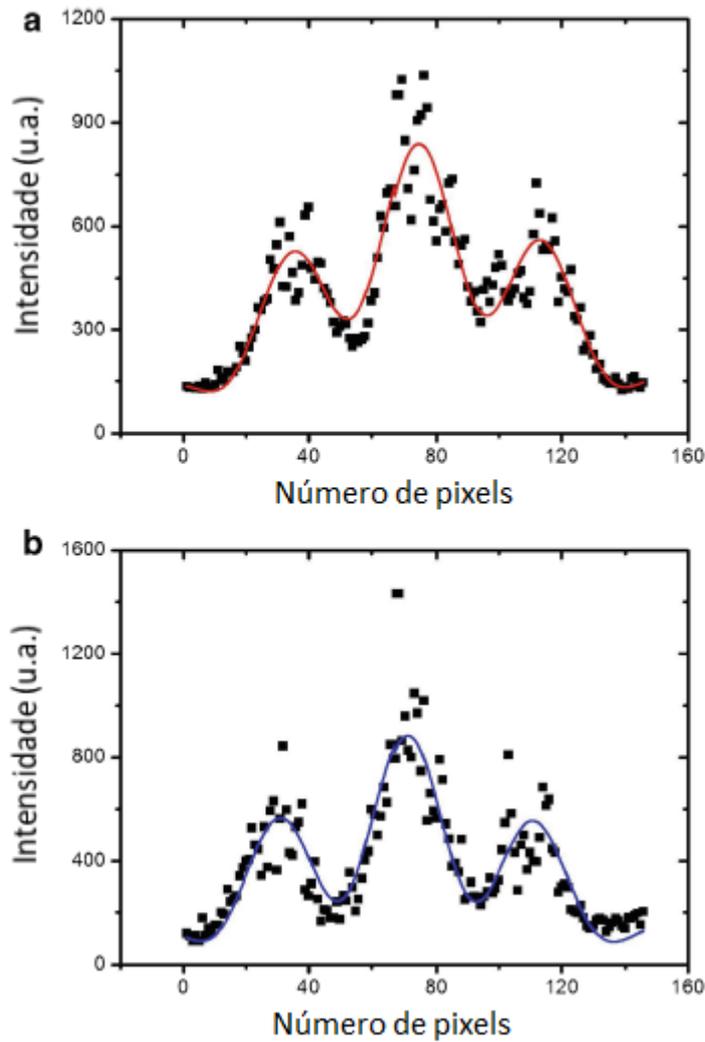


Figura 45: Gráfico do ajuste não-linear dos padrões de interferência correspondente aos modos Hh **a**) e Vh **b**). As linhas sólidas são ajustes não-lineares.

O segundo conjunto de dados correspondem aos perfis de intensidade para os modos Hv e Vv , mostrados na Fig.46a) e b), respectivamente. O padrões de interferência correspondentes são mostrados na Fig.46c) e d), onde, novamente, utilizamos uma linha pontilhada para guiar os olhos. Nesse caso, observamos que existe uma fase relativa de

Gouy devido a passagem através do conversor- π . Notamos que a franja escura é o centro da Fig.46c), enquanto uma franja clara aparece no centro da Fig.46d), indicando a diferença de fase π entre os modos. Os resultados para a simulação são mostrados na Fig.46e) e f), mostrando a presença da mesma fase relativa, em boa concordância com os resultados experimentais.

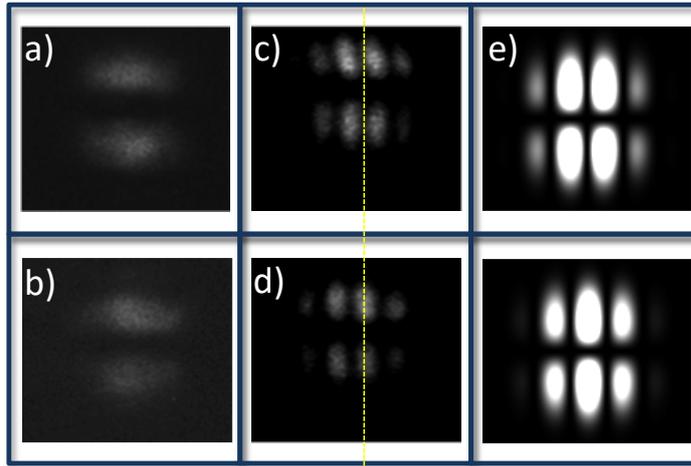


Figura 46: Distribuição de intensidade dos modos Hv **a)** e Vv **b)**. Padrões de interferência dos modos Hh **c)** e Vh **d)** com o feixe de referência. Simulação dos padrões de interferência dos modos Hv **e)** e Vv **f)**. As linhas pontilhadas são guias para nossos olhos.

Para quantificar a fase relativa entre os modos, uma linha transversa de cada padrão de interferência foi desenhada. A Fig.47a mostra o resultado correspondente para o modo Hv , enquanto que Fig.45b corresponde ao modo Vv . Realizando o mesmo ajuste não-linear, encontramos a diferença de fase de $3.19rad$, em boa concordância com a diferença de fase, πrad , esperado teoricamente. Com base nesses resultados, verificamos diferença de fase na primeira ordem do feixe Hermite-Gauss. Os modos de entrada foram controlados pela rotação da HWP , mantendo alinhado o feixe de referência para cada conjunto de dados. A solidez de nossa proposta é baseada no fato de que a fase de Gouy é impressa exclusivamente no modo transversal apropriado.

Nossos resultados mostram que podemos dar uma fase ϕ de forma controlada a um feixe laser. O controle é feito através da polarização e dos modos Hermite-gauss de primeira ordem, que são graus de liberdade utilizados para a codificação de q-bits. Como consequência, nosso experimento é um bom candidato para implementar uma porta quântica de fase para q-bits fotônicos no contexto da computação quântica com óptica

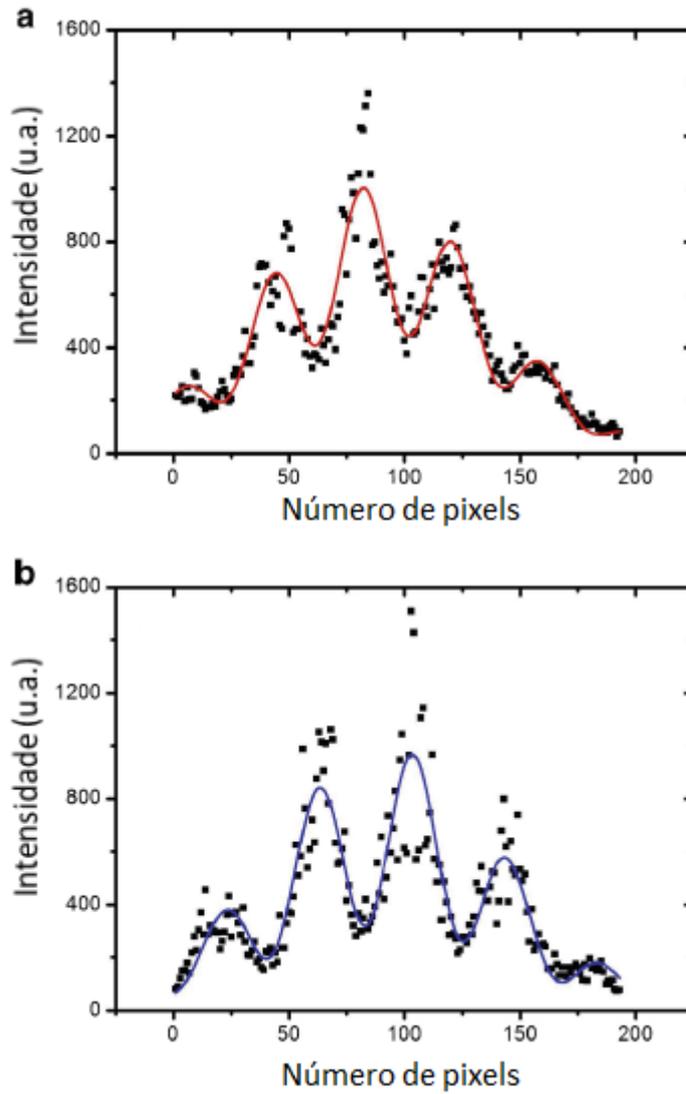


Figura 47: Gráfico do ajuste não-linear dos padrões de interferência correspondente aos modos Hv **a**) e Vv **b**). As linhas sólidas são ajustes não-lineares.

linear (LOQC). Na próxima seção apresentaremos uma proposta para a implementação de uma porta de fase quântica, levando em conta as mudanças necessárias para essa tarefa.

7.1.2 Porta de fase quântica

Neste trabalho, estamos considerando um sistema de dois q-bits não escalável (LOQC) para apresentar como nosso circuito óptico pode ser aplicado para implementar uma porta de fase quântica. A porta de fase de dois q-bits [14] pode ser definida como

$$G(\phi) |m, n\rangle = e^{i\phi mn} |m, n\rangle \quad (7.5)$$

onde $G(\phi)$ é operação da porta, $m, n = 0, 1$. Note que a fase ϕ é adquirida por um estado só quando $m = n = 1$. Para implementar a porta de fase quântica, nós precisamos de um sistema capaz de produzir a diferença de fase condicional em um estado de dois q-bits.

Como discutido na Seção 7.1, nosso circuito é composto por componentes passivos. Portanto, o comportamento quântico só pode ser observado se o estado de entrada é preparado com o estado de fóton único. Diferentes graus de liberdade de um fóton único podem ser usados para preparar um sistema de dois q-bits.

Em nossa proposta, o estado de entrada com um único fóton é preparado possuindo polarização linear e modo transversal HG de primeira ordem. Os q-bits são codificados em polarização e modos transversos. Seguindo nossa notação, polarização H e V são associados com os estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$, respectivamente. Para o modo Hermite-Gauss de primeira ordem, $HG_{1,0}$ e $HG_{0,1}$, que nos referimos como $|0\rangle$ (h) e $|1\rangle$ (v), respectivamente. Em relação as regras da porta de fase, só o estado $|11\rangle = |Vv\rangle$ adquire fase π quando passa pelo conversor de modo. Portanto, o controle da diferença de fase apresentado na seção 7.1, com o estado de entrada correspondente a um estado preparado de dois q-bits como mencionado acima, trabalha exatamente como uma porta de fase quântica, como mostrado na Tabela verdade 4 abaixo.

Input	Output
$ Hh\rangle = 00\rangle$	$ 00\rangle$
$ Hv\rangle = 01\rangle$	$ 01\rangle$
$ Vh\rangle = 10\rangle$	$ 10\rangle$
$ Hh\rangle = 11\rangle$	$e^{i\phi} 11\rangle$

Tabela 4: Tabela verdade da porta de fase quântica para $\phi = \pi$.

É importante mencionar que nosso esquema permite implementar uma porta de fase quântica geral controlando a distância entre as lentes cilíndricas.

Atenuando um feixe laser polarizado para o regime de fotocontagem, nós podemos realizar medidas onde os efeitos quânticos do campo eletromagnético com dois graus de liberdade podem ser observados. Todos os estados de entrada podem ser obtidos pela rotação da HWP e da máscara. Com um escaneamento linear de detetores de fotocontagem, é possível medir o padrão de interferência. O mesmo ajuste não linear pode ser empregado para quantificar a diferença de fase.

7.2 Porta Toffoli

Nessa seção vamos apresentar a manipulação dos graus de liberdade de um feixe laser para implementação da porta Toffoli - discutida na Seção 3, onde os q-bits são codificados nos graus de liberdade do campo eletromagnético, discutidos na seção, a saber, *Caminho (C)*, *polarização (P)* e *modos transversos (M)*.

Antes de mostrar o experimento, vamos reescrever a tabela verdade da porta Toffoli, descrita na Tabela 1 para a base computacional utilizando a codificação dos graus de liberdade do campo eletromagnético.

Entrada	Saída
$ bHh\rangle \equiv 000\rangle$	$ 000\rangle$
$ bHv\rangle \equiv 001\rangle$	$ 001\rangle$
$ bVh\rangle \equiv 010\rangle$	$ 010\rangle$
$ bVv\rangle \equiv 011\rangle$	$ 011\rangle$
$ cHh\rangle \equiv 100\rangle$	$ 100\rangle$
$ cHv\rangle \equiv 101\rangle$	$ 101\rangle$
$ cVh\rangle \equiv 110\rangle$	$ cVv\rangle \equiv 111\rangle$
$ cVv\rangle \equiv 111\rangle$	$ cVh\rangle \equiv 110\rangle$

Tabela 5: Tabela verdade da porta Toffoli. Os q-bits foram codificados utilizando os graus de liberdade de um feixe laser. A polarização é codificada em H e V. O modo Hermite em primeira ordem é codificado em h e v. O caminho é codificado em cima (c) e baixo (b).

Isso é importante para fazer uma correspondência direta com estados quânticos tripartidos e os graus de liberdade de um feixe laser. É importante notar que vamos utilizar a notação de Dirac para descrever estados de um feixe laser clássico, como discutido na introdução desse capítulo. O primeiro q-bit é o caminho. Dessa forma teremos dois caminhos possíveis para propagação do feixe laser, por exemplo, podemos definir o caminho de cima $|c\rangle$ e o de baixo $|b\rangle$, que são codificados como $|1\rangle$ e $|0\rangle$, respectivamente. O segundo q-bit é a polarização linear, que na base $H - V$ tem possibilidade de ser horizontal $|H\rangle$ e vertical da $|V\rangle$, que são codificados como $|0\rangle$ e $|1\rangle$, respectivamente. O terceiro q-bit são os modos transversos, tendo como possíveis resultados, $|HG_{01}\rangle \equiv |h\rangle$ e $|HG_{10}\rangle \equiv |v\rangle$, que são codificados como $|0\rangle$ e $|1\rangle$, respectivamente. Então, o estado produto na base é definido como $|C\rangle \otimes |P\rangle \otimes |M\rangle = |CPM\rangle$. A Tabela verdade da porta Toffoli com a codificação nas bases definidas pelos graus de liberdade do campo eletromagnético é mostrada na Tabela 5.

7.2.1 Experimento

Para implementar as operações da porta Toffoli e a tabela verdade utilizando os graus de liberdade do campo eletromagnético, propomos e realizamos o experimento apresentado na Fig.48. Para tal, utilizamos um laser com $1mW$ de potência e verticalmente polarizado. Primeiramente, o feixe incide sobre uma placa de onda S (SWP), que funciona da seguinte forma: o feixe verticalmente polarizado incide de forma que a polarização faz um ângulo de 0° com o eixo principal da SWP (dado pelo fabricante), fazendo a polarização vertical ser convertida em radial. Dessa forma, teremos o estado definido pela Eq.7.6. Se refizermos o procedimento ajustando o eixo da SWP com um ângulo de 90° em relação a polarização incidente, a polarização vertical será convertida em azimutal. Isso nos levará a Eq.7.7.

$$|\Psi\rangle = \frac{|Hh\rangle + |Vv\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (7.6)$$

$$|\Phi\rangle = \frac{|Vh\rangle - |Hv\rangle}{\sqrt{2}}. \quad (7.7)$$

Podemos ver na Eq.7.6 que temos dois modos Hermite-Gauss com polarizações ortogonais, o que nos dará uma feixe com polarização radial. Na Eq.7.7 o mesmo ocorre, mas com um fator de fase -1 , que nos dará uma polarização azimutal [47].

Em nosso experimento, os modos gerados pela SWP e descritos nas Eqs.7.6 e 7.7 tem um único objetivo: criar de forma experimentalmente simples os modos Hermite-Gauss h e v com polarização definida. Isto pode ser visto quando avaliamos a ação da SWP com o divisor de feixe polarizado (PBS_1). Com base nas Eqs.7.6 e 7.7, vemos que somente os modos $|Hh\rangle$ e $|Hv\rangle$ são transmitidos. Conseqüentemente, são os únicos modos que passam pela HWP_1 . Os outros estados $|Vh\rangle$ e $|Vv\rangle$, refletidos pelo PBS_1 são descartados. Essa é a primeira parte da preparação do estado, destacado na Fig.48.

É importante notar que na etapa definida como preparação do estado, precisamos gerar os oito estados definidos no lado esquerdo da Tabela5, que são os estados de entrada. Até agora temos os estados transmitidos pelo PBS_1 , que são $|Hh\rangle$ e $|Hv\rangle$. Porém, notamos que a atuação da HWP_1 sobre os modos, quando ela está a 45° com respeito a horizontal, nos permite obter os estados $|Vh\rangle$ e $|Vv\rangle$. É claro que se a HWP_1 tem um ângulo de 0° com a polarização do feixe incidente, mantemos os modos $|Hh\rangle$ e $|Hv\rangle$. Sumarizando, após a passagem pela HWP_1 podemos ter, dependendo do ajuste, os modos $|Hh\rangle$, $|Hv\rangle$, $|Vh\rangle$

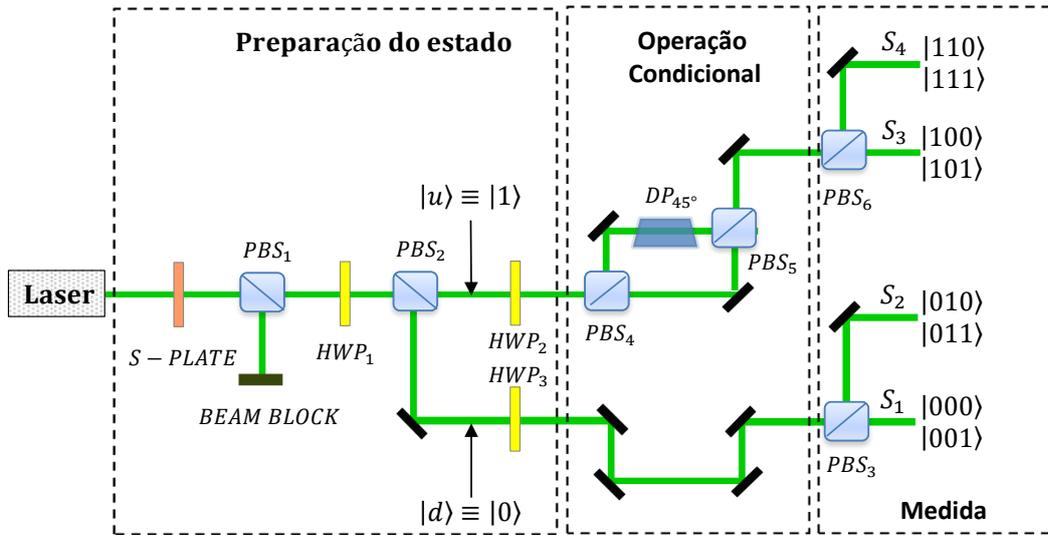


Figura 48: Esquema experimental da porta Toffoli.

e $|Vv\rangle$.

Seguindo a discussão da preparação do estado, vemos que o PBS_2 transmite os modos $|Hh\rangle$ e $|Hv\rangle$, que seguem pelo caminho de cima, $|c\rangle$. Enquanto os modos $|Vh\rangle$ e $|Vv\rangle$ são refletidos, seguindo pelo caminho de baixo, $|b\rangle$. Com isso contabilizamos a possibilidade de prepararmos os seguintes modos $|cHh\rangle$, $|cHv\rangle$, $|bVh\rangle$ e $|bVv\rangle$. Finalmente, se girarmos as HWP_2 e HWP_3 de forma que tenhamos um ângulo de 0° e 45° com respeito a horizontal no caminho $|0\rangle$ e a vertical no caminho $|1\rangle$, como feito anteriormente, obteremos os estados de entrada da porta Toffoli: $|cHh\rangle$, $|cVh\rangle$, $|cHv\rangle$, $|cVv\rangle$, $|bHh\rangle$, $|bVh\rangle$, $|bHv\rangle$ e $|bVv\rangle$. Estes estados de entrada na base computacional 0 e 1 estão descritos no lado direito da Tabela 5. Assim, concluímos a etapa de preparação desses modos, que são análogos aos estados quânticos de entrada da porta Toffoli.

Vamos verificar agora a atuação da porta Toffoli, destacada na Fig.48, sobre cada um dos estados preparados. Inicialmente, vamos avaliar os estados que seguem pelo caminho de baixo $|b\rangle \equiv |0\rangle$. Nesse caso, eles se mantêm inalterados após passarem pela porta Toffoli, isto pode ser visto nas saídas S_1 e S_2 da Fig. 48, onde o PBS_3 faz parte da medida. Nosso próximo passo é verificar a atuação da porta Toffoli sobre os estados que seguem o caminho de cima. Os modos $|cHh\rangle$ e $|cHv\rangle$ são transmitidos pelos PBS_4 e PBS_5 sem que o dispositivo faça qualquer alteração nos estados de entrada. Dessa forma, estes modos

seguem pela saída S_3 , após serem transmitidos pelo PBS_6 , cuja única função realizar a medida dos modos de saída. Para $|cVh\rangle$ e $|cVv\rangle$ a situação é diferente, pois ambos são refletidos pelo PBS_4 e passam pelo prisma de Dove DP , orientado a 45° em relação a horizontal. Nesse caso, ambos modos, que seguem pela saída S_4 , tem o modo transverso permutado pela ação da porta Toffoli, $|cVh\rangle \rightarrow |cVv\rangle$ e $|cVv\rangle \rightarrow |cVh\rangle$. Todos esses resultados podem ser vistos na tabela da Fig.5 também na base computacional. Vemos que o circuito experimental descreve com sucesso a tabela verdade da porta Toffoli, onde o terceiro q-bit é permutado quando os dois q-bits são idênticos e iguais a 1.

As imagens de cada uma das saídas foram capturadas por uma câmera CCD , como pode ser visto na Fig. 49.

Entrada		Saída	S_1	S_2	S_3	S_4
$ 000\rangle$		$ 000\rangle$				
$ 001\rangle$		$ 001\rangle$				
$ 010\rangle$		$ 010\rangle$				
$ 011\rangle$		$ 011\rangle$				
$ 100\rangle$		$ 100\rangle$				
$ 101\rangle$		$ 101\rangle$				
$ 110\rangle$		$ 111\rangle$				
$ 111\rangle$		$ 110\rangle$				

Figura 49: Imagens de cada uma das entradas e saídas da porta Toffoli. As imagens reproduzem a tabela verdade da porta Toffoli.

Notamos que as quatro saídas são suficientes para identificar os oito estados, uma vez que em cada saída temos modos Hermite-Gauss (h ou v) diferentes, tornando visível a diferença dos pares de estados em cada saída. É importante citar que para cada um dos

oito estados preparados foram tiradas fotos simultâneas de cada saída. Como podemos ver nas imagens, somente os modos onde os dois q-bits de controle são iguais a $|cP\rangle \equiv |11\rangle$ o q-bit alvo ($|M\rangle$) é permutado. Isso pode ser visto nas duas últimas imagens onde o último q-bit modo $h \equiv 0$ se transforma em $v \equiv 1$ e $v \equiv 1$ se transforma em $h \equiv 0$. Para as outras seis entradas nada acontece quando o estado passa pela porta Toffoli, ou seja, os estados de entrada e saída são iguais. Concluimos, assim o procedimento experimental da porta Toffoli utilizando os graus de liberdade de um feixe laser.

Em se tratando de uma porta quântica, uma questão importante é verificar se nossa porta é capaz de gerar um estado emaranhado de três q-bits ou, em nosso caso, estados não-separáveis com três graus de liberdade de um feixe laser quando este é atenuado. Nesse cenário, estamos interessados em gerar "estados" tipo GHZ , descritos na Eq.2.15. É importante mencionar novamente que trabalhamos com um feixe clássico, assim os estados gerados não são genuinamente GHZ . Apesar disso vamos nos referir aos estados simplesmente como GHZ , baseados na discussão feita na Seção 2.3. Para ilustrar o entendimento da geração dos estados GHZ pela porta Toffoli utilizamos a Fig.50.

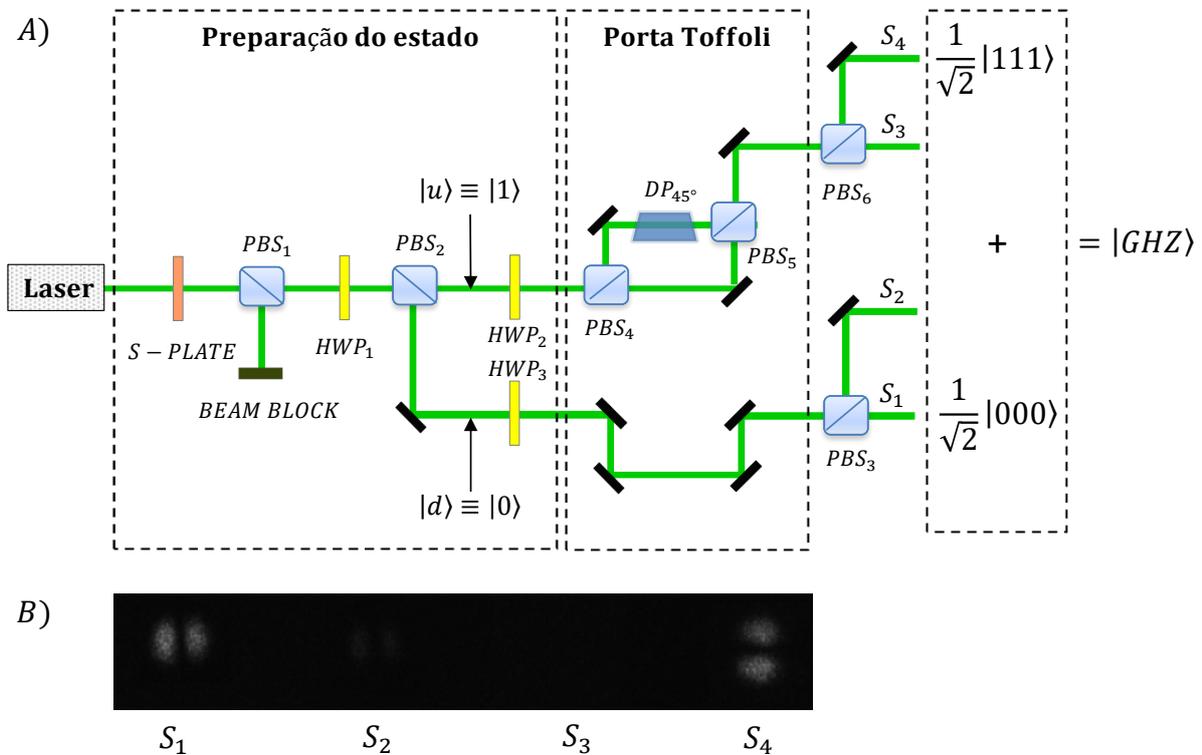


Figura 50: A) Porta Toffoli gera um estado tipo-GHZ. B) Imagem simultânea das saídas 1 a 4.

Iniciando nossa análise com a preparação do modo mostrado na Fig. 50 A) e

utilizando a discussão feita anteriormente, sabemos que o conjunto formado por SWP e o PBS_1 geram os modos $|Hh\rangle$ e $|Hv\rangle$. Preparando o modo Hh (poderíamos ter escolhido Hv sem perda de generalidade) que passa através da HWP_1 , desta vez posicionada com um ângulo de $22,5^\circ$ com a horizontal, obtemos o modo $\frac{1}{\sqrt{2}}(|Hh\rangle + |Vh\rangle)$. Ao passar pelo PBS_2 , o feixe com polarização H (V) segue pelo caminho $|c\rangle$ ($|b\rangle$). Dessa forma, temos pelo caminho $|c\rangle$ o modo $\frac{1}{\sqrt{2}}|cHh\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}|100\rangle$ e pelo caminho $|b\rangle$ o modo $\frac{1}{\sqrt{2}}|bVh\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}|010\rangle$. Fixando a HWP_2 em um ângulo de 45° em relação a polarização do feixe incidente, vemos que o feixe que passa pelo caminho 1 tem o estado $\frac{1}{\sqrt{2}}|1Vh\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}|110\rangle$. Fazendo o mesmo para o feixe que passa pela HWP_3 , ajustada em um ângulo de 45° com o feixe incidente, temos o estado $\frac{1}{\sqrt{2}}|bHh\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle$. Dessa forma, concluímos a preparação do estado que entra na porta Toffoli, dado por $\frac{1}{\sqrt{2}}|110\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle$. Como visto anteriormente, o estado que passa pelo caminho de baixo $\frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle$ não sofre alterações. Quanto ao estado que passa pelo caminho de cima $\frac{1}{\sqrt{2}}|110\rangle$, ao passar pelo PBS_4 , o feixe é refletido e passa através do DP , que girado em 45° em relação a horizontal e permuta o modo de h para v . Finalmente, temos na saída da porta Toffoli o modo $|GHZ\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|111\rangle + |100\rangle$, descrito na Eq.2.15.

A 50 B) mostra a imagem capturada simultaneamente de cada da porta Toffoli. O feixe laser é distribuído nas portas S_1 , S_2 , S_3 e S_4 com 46%, 3%, 5% e 45%, respectivamente. As saídas S_2 e S_3 apresentam intensidades espúrias produzidas por imperfeições na óptica de polarização. Por outro lado, as saídas S_1 e S_4 têm intensidade balanceadas, como esperávamos para produzir um estado tipo GHZ. Trocando o laser por uma fonte de fóton único, teremos um genuíno estado emaranhado (GHZ) entre os três graus liberdade do fóton.

8 Conclusões e Perspectivas

Vamos finalizar com as conclusões de cada um dos trabalhos apresentados nesta tese. Primeiramente, vamos tratar o trabalho que consideramos de caráter mais fundamental, a demonstração da violação da desigualdade tipo-Mermin utilizando três graus de liberdade de um feixe laser – polarização, modos transversos e caminho. Para isso, montamos um circuito experimental para gerar um análogo clássico do estado *GHZ*. As medidas combinaram um *MZIM* junto com elementos ópticos adicionais para realizar as desejadas transformações ópticas. Mostramos que esse estado viola uma desigualdade tipo-Mermin. Isso é uma evidência da não-separabilidade desses modos tripartidos, evidenciando a estrutura de um estado *GHZ*. Todos os resultados encontrados nas medidas experimentais para os valores esperados, $\langle zzz \rangle$, $\langle zxx \rangle$, $\langle xzx \rangle$ e $\langle zxx \rangle$, mostram que o modo tripartido produzido viola a desigualdade tipo-Mermin. Entendemos que o experimento nos permitiu observar um estado não-separável clássico tripartido, o que reforça mais ainda o análogo óptico do emaranhamento quântico, abrindo o caminho para que novos protocolos ópticos sejam inspirados para aplicações em informação quântica multipartite.

Considerando os trabalhos relacionados a jogos quânticos, apresentamos um novo jogo, um modelo quântico para o duelo clássico onde dois jogadores podem atirar um no outro simultaneamente. Este é um trabalho teórico onde apresentamos um operador simultâneo, bem como a forma como ele foi construído. Analisamos três casos representativos: jogadores iniciando o duelo vivos [11]; jogadores iniciando em um estado de Bell $|\Psi_+\rangle$ e $|\Phi_+\rangle$; e um terceiro onde um dos jogadores vai perdendo habilidade de tiro quando o duelo se desenvolve. Adicionalmente, propomos uma configuração experimental que pode reproduzir, via métodos ópticos, o duelo quântico simultâneo. A proposta de realização experimental utiliza fótons gêmeos e tem como desvantagem a escalabilidade.

Em outro trabalho, ainda na área dos jogos quânticos, propomos e demonstramos experimentalmente uma realização óptica do duelo quântico sequencial. O duelo foi realizado utilizando dois graus de liberdade do feixe laser, polarização e modos transversos, para codificar o estado dos jogadores Alice e Bob. Os operadores foram implementados utilizando dispositivos ópticos, tais como, divisores de feixe-*BS*, divisor de feixe polarizado-*PBS*, placa de meia onda-*HWP*, placa de quarto de onda-*QWP*, prisma de Dove-*DP*

e lentes cilíndricas- CL . Na realização experimental do duelo quântico, três casos foram investigados. Inicialmente, nós consideramos o primeiro *round*, onde Alice e Bob podem dar um único tiro, com ambos os jogadores iniciando o duelo vivos. Nossos resultados recuperam as previsões clássicas para o jogo. No segundo caso, o estado de entrada do Bob foi mudado para uma superposição de vivo e morto, enquanto o estado inicial de Alice foi mantido em vivo. Com estes estados de entrada nós observamos características quânticas do jogo, em particular, vimos que o estado final de Bob não depende do parâmetro de tiro da Alice. Finalmente, investigamos o caso em que Alice pode realizar mais um tiro, após o primeiro *round*. Considerando o estado de entrada em que Alice e Bob estão ambos vivos, obtivemos experimentalmente um resultado para estado final com características quânticas, uma vez que Alice revive Bob com uma sequência de dois tiros perfeitos. Em todos os casos estudados, os resultados experimentais obtidos estão em excelente acordo com os previstos teoricamente.

Com relação às portas lógicas, propomos e demonstramos experimentalmente um dispositivo para implementar uma mudança de fase condicional π aplicada nos feixes Hermite-Gauss. Nosso esquema é baseado em um circuito óptico onde a fase de Gouy é impressa dependendo dos estados de polarização e de modos transversos espaciais. Os resultados experimentais mostram boa concordância com a simulação do circuito óptico. Vale a pena mencionar que a mudança de fase ϕ pode também ser implementada pela variação da distância de separação entre as lentes cilíndricas do conversor de modo. Como uma aplicação, uma porta de fase quântica de dois q-bits pode ser implementada. Por esta razão, nossa proposta soma uma nova contribuição no cenário da implementação óptica das portas quânticas, onde diferentes graus de liberdade de um feixe laser são codificados para implementar q-bits.

Também propomos e realizamos experimentalmente uma operação condicional usando três graus de liberdade de um feixe laser, polarização, caminho e modos transversos. Comparando com portas de dois q-bits, este trabalho estende a operação condicional a três q-bits. Nesse sentido, definimos caminho e polarização como q-bits controle e o modo transversal como q-bit alvo para conseguir nosso objetivo: inverter o modo transversal de $|h\rangle = |0\rangle$ para $|v\rangle = |1\rangle$ ou vice-versa, quando o par de q-bits controle é igual a $|11\rangle$. Mostramos que uma das aplicações dessa operação condicional é a porta Toffoli. O circuito experimental mostrou através das medidas realizadas que a ação da porta equivale a tabela

verdade da porta Toffoli. Além disso, mostramos que a porta é capaz de gerar um estado *GHZ*.

Os trabalhos discutidos ao longo dessa tese constituem os primeiros na área de óptica clássica/quântica e informação quântica realizados no Laboratório de Óptica do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal Fluminense (ICEX – UFF), campus Volta Redonda. Esperamos continuar a pesquisa, investigando outras propriedades quânticas através dos modos não-separáveis. Além disso, esperamos ampliar o horizonte com novos estudos nessa área, em colaboração com o laboratório do ICEX em Volta Redonda e, futuramente, num projeto de pós-doutorado.

APÊNDICE A – Violação da desigualdade tipo-Mermin com modos de um feixe laser

Nesse apêndice, vamos verificar o que acontece com o estado $|GHZ\rangle$ quando passa por cada um dos componentes ópticos que compõe o *MZIM*, ou seja, nas medidas dos valores esperados $\langle zzz \rangle$, $\langle zxx \rangle$, $\langle xzx \rangle$ e $\langle xxz \rangle$. Faremos isso para os dois primeiros valores esperados, pois os dois últimos ($\langle xzx \rangle$ e $\langle xxz \rangle$) seguem os mesmos passos para o caso da medida de $\langle zxx \rangle$. Iniciaremos mostrando a Fig.51, onde está representado o circuito experimental para geração do estado *GHZ* e para a medida do valor esperado $\langle zzz \rangle$, que é feita pelo *MZIM*.

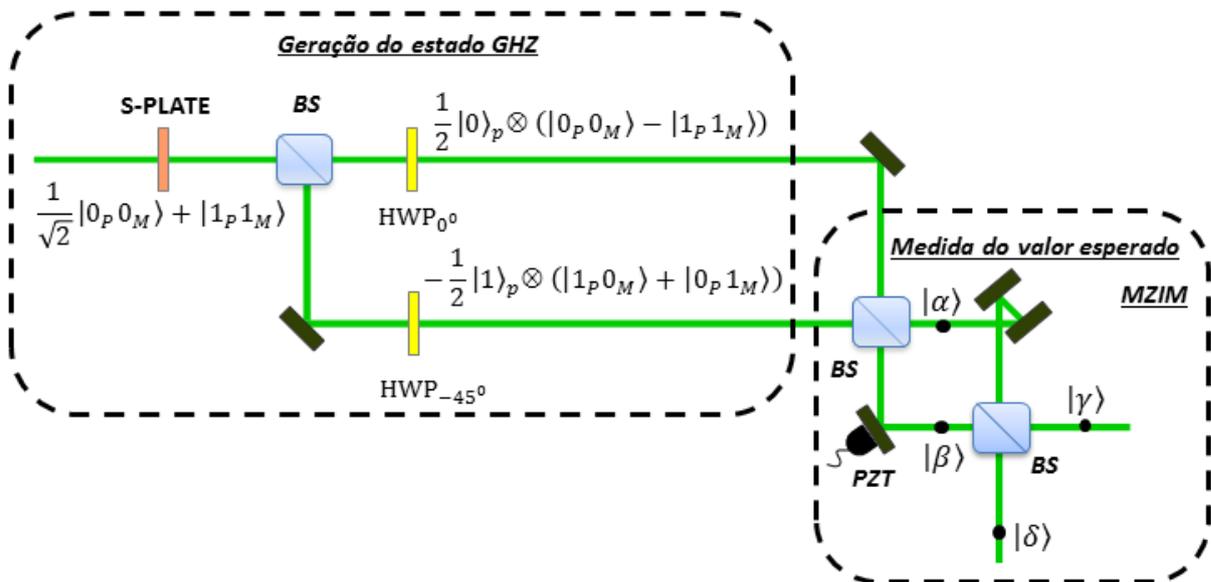


Figura 51: Circuito experimental da medida do valor esperado $\langle zzz \rangle$. *SWP* significa placa de onda *s*. *HWP* $_{0^\circ}$ (*HWP* $_{45^\circ}$) significa placa de meia onda com o eixo rápido fazendo um ângulo 0° (45°) com a horizontal. *BS* significa divisor de feixe. Os índices *p*, *P* e *M* correspondem a caminho, polarização e modos transversos, respectivamente.

As partes destacadas pelas linhas pontilhadas correspondem a geração do estado $|GHZ\rangle$ e a medida do valor esperado realizada pelo *MZIM*. Podemos notar que esse circuito corresponde à associação dos circuitos representados nas Figs. 37 e 40a). Ele está

sendo apresentado novamente por motivos didáticos, para facilitar nossa compreensão sobre o comportamento do estado em cada componente óptico do circuito. Na primeira parte destacada do circuito temos a geração do estado $|GHZ\rangle$, detalhada no Capítulo 6, dado por

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle_p \otimes (|0_P0_M\rangle - |1_P1_M\rangle) - \frac{1}{2}|1\rangle_p \otimes (|0_P1_M\rangle + |1_P0_M\rangle). \quad (\text{A.1})$$

Esse estado, formado pelo produto tensorial dos graus de liberdade de um feixe laser, segue em direção ao primeiro BS do $MZIM$. É importante notar que ele chega ao BS em portas diferentes. A ação do BS sobre o modo transverso e polarização é representada pela matriz,

$$M_{BS} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Considerando a Eq.A.1, vamos fazer $a = \frac{1}{2}|0_P0_M\rangle - |1_P1_M\rangle$ e $b = -\frac{1}{2}|1_P0_M\rangle - |0_P1_M\rangle$ para aplicar a matriz do BS . Dessa forma, teremos,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} a + b \\ a - b \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

A ação do BS nos dá o estado $|\alpha\rangle$ pelo caminho $|0\rangle_p$ e o estado $|\beta\rangle$ pelo caminho $|1\rangle_p$, conforme representado na Fig. 51. Seguindo o resultado dado pela Eq. A.3, os estados $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$ são dados por,

$$|\alpha\rangle = a + b = \frac{1}{2\sqrt{2}} (|0_P0_M\rangle - |1_P1_M\rangle - |1_P0_M\rangle - |0_P1_M\rangle). \quad (\text{A.4})$$

e

$$|\beta\rangle = a - b = \frac{1}{2\sqrt{2}} (|0_P0_M\rangle - |1_P1_M\rangle + |1_P0_M\rangle + |0_P1_M\rangle). \quad (\text{A.5})$$

Como podemos ver na Fig. 51, o estado $|\alpha\rangle$ sofre uma dupla reflexão e o estado $|\beta\rangle$ sofre uma única reflexão. A polarização horizontal ($|0_P\rangle$) ganha fase π ao sofrer uma reflexão, já a polarização vertical ($|1_P\rangle$) não ganha fase. O mesmo acontece com os modos Hermite-Gauss. O modo horizontal ($|0_M\rangle$) ganha fase π e o modo vertical ($|0_M\rangle$) não ganha fase. Dessa forma, todos os modos que sofrem uma reflexão são multiplicados por

um fator -1 . Como o estado $|\alpha\rangle$ sofre dupla reflexão ele se mantém sem alterações. No entanto, os modos ímpares do estado $|\beta\rangle$ ganham um fator -1 , enquanto os pares se mantêm inalterados. Além disso, o estado $|\beta\rangle$ ganha uma fase ϕ devido a ação do PZT . Dessa forma, o estado $|\beta\rangle$, descrito na Eq. A.5, é reescrito como

$$|\beta\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} (|0_P0_M\rangle - |1_P1_M\rangle - |1_P0_M\rangle - |0_P1_M\rangle) e^{i\phi}. \quad (\text{A.6})$$

Resta-nos a ação do BS na saída do $MZIM$ sobre estados $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$. Novamente, aplicamos a matriz do BS , descrita na Eq. A.2, nos estados $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$. Com isso, obteremos os estados $|\gamma\rangle$ (pelo caminho $|0_p\rangle$) e $|\delta\rangle$ (pelo caminho $|1_p\rangle$), que são os estados de saída do $MZIM$, conforme Fig. 51.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha - \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix}. \quad (\text{A.7})$$

Com isso, podemos escrever os estados de saída $|\gamma\rangle$ e $|\delta\rangle$, como segue,

$$|\gamma\rangle = |\alpha\rangle + |\beta\rangle = \frac{1}{4} (|0_P0_M\rangle - |1_P1_M\rangle - |1_P0_M\rangle - |0_P1_M\rangle) + \frac{1}{4} (|0_P0_M\rangle - |1_P1_M\rangle - |1_P0_M\rangle - |0_P1_M\rangle) e^{i\phi}. \quad (\text{A.8})$$

Conforme discutido no Capítulo 6, o $MZIM$ foi calibrado para fase $\phi = 0$. Assim, teremos estado

$$|\gamma\rangle = \frac{1}{2} (|0_P0_M\rangle - |1_P1_M\rangle - |1_P0_M\rangle - |0_P1_M\rangle),$$

que sai pela porta rotulada como caminho $|0_p\rangle$. Com relação ao estado $|\delta\rangle$, considerando novamente $\phi = 0$, temos,

$$|\gamma\rangle = |\alpha\rangle - |\beta\rangle = \frac{1}{4} (|0_P0_M\rangle - |1_P1_M\rangle - |1_P0_M\rangle - |0_P1_M\rangle) + \frac{1}{4} (-|0_P0_M\rangle + |1_P1_M\rangle + |1_P0_M\rangle + |0_P1_M\rangle). \quad (\text{A.9})$$

Podemos ver que, nesse caso, os termos se cancelam. Isso significa que $|\delta\rangle = 0$. Concluimos que não há nenhum feixe pela saída $|1_p\rangle$ do $MZIM$. Em outras palavras, na

medida do valor esperado $\langle zzz \rangle$ do estado GHZ , realizada pelo $MZIM$, o feixe laser sai por uma única porta, cujo caminho rotulamos como $|0_p\rangle$. Nesse caso, o valor esperado de $\langle zzz \rangle$ é igual a $+1$, conforme discutido na Seção 2.3.

Agora vamos discutir a medida do valor esperado $\langle zxx \rangle$. Para isso, vamos seguir o circuito experimental mostrado na Fig. 52.

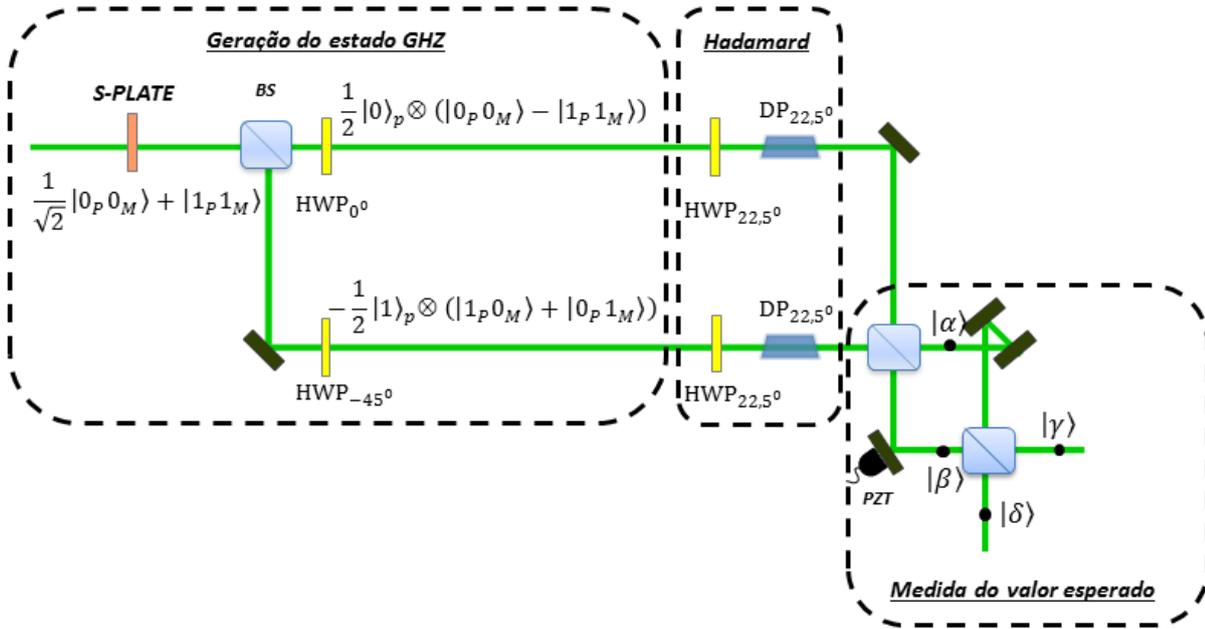


Figura 52: Circuito experimental da medição do valor esperado $\langle zxx \rangle$. *SWP* significa placa de onda *s*. HWP_{0° (HWP_{45°) significa placa de meia onda com o eixo rápido fazendo um ângulo 0° (45°) com a horizontal. $DP_{22,5^\circ}$ significa prisma de Dove a $22,5^\circ$. *BS* significa divisor de feixe. Os índices *p*, *P* e *M* correspondem a caminho, polarização e modos transversos, respectivamente.

O circuito acima é semelhante ao da Fig. 51, a diferença fica por conta da parte destacada por linhas pontilhadas que corresponde a uma porta *Hadamard*. Ela é implementada sobre o grau de liberdade da polarização com uma placa de meia onda orientada em $22,5^\circ$ ($HWP_{22,5^\circ}$) e sobre o grau de liberdade do modo Hermite-Gauss com um prisma de Dove a $22,5^\circ$ ($DP_{22,5^\circ}$), ambos orientados em relação a horizontal. Isso é análogo ao que acontece no experimento de Stern-Gerlach, o estado de polarização inicialmente em horizontal (*H*) ou vertical (*V*) em base $\{xy\}$ é rodado para uma nova base $\{x'y'\}$, de forma que o novo vetor de estado pode ser descrito como uma combinação linear de *H* e *V* [90]. Com base nessas considerações, o grau de liberdade da polarização, $|0_P\rangle$ e $|1_P\rangle$

após a passagem pela $HWP_{22,5^\circ}$ é dado, respectivamente, por

$$|0'_P\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_P\rangle + |1_P\rangle) \quad (\text{A.10})$$

e

$$|1'_P\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (-|0_P\rangle + |1_P\rangle). \quad (\text{A.11})$$

O grau de liberdade da polarização, $|0_M\rangle$ e $|1_M\rangle$, após a passagem pelo $DP_{22,5^\circ}$ é dado, respectivamente, por

$$|0'_M\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0_M\rangle + |1_M\rangle) \quad (\text{A.12})$$

e

$$|1'_M\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (-|0_M\rangle + |1_M\rangle). \quad (\text{A.13})$$

Com essas transformações, o estado $|GHZ\rangle$, descrito na Eq. A.1, pode ser escrito como

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle_P \otimes (|0'_P0'_M\rangle - |1'_P1'_M\rangle) - \frac{1}{2}|1\rangle_P \otimes (|0'_P1'_M\rangle + |1'_P0'_M\rangle). \quad (\text{A.14})$$

Substituindo as Eqs. A.10, A.11, A.12 e A.13 na Eq. A.14. Podemos escrever,

$$\begin{aligned} |GHZ\rangle = & \frac{1}{4}|0\rangle_P \otimes (|0_P0_M\rangle + |0_P1_M\rangle + |1_P0_M\rangle + |1_P1_M\rangle \\ & - |0_P0_M\rangle + |0_P1_M\rangle + |1_P0_M\rangle - |1_P1_M\rangle) \\ & - \frac{1}{4}|1\rangle_P \otimes (-|0_P0_M\rangle + |0_P1_M\rangle - |1_P0_M\rangle + |1_P1_M\rangle \\ & - |0_P0_M\rangle - |0_P1_M\rangle + |1_P0_M\rangle + |1_P1_M\rangle). \end{aligned}$$

Podemos ver que alguns termos se cancelam, enquanto outros se somam, de forma que

$$|GHZ\rangle = \frac{1}{2}|0\rangle_p \otimes (|0_P1_M\rangle + |1_P0_M\rangle) + \frac{1}{2}|1\rangle_p \otimes (|0_P0_M\rangle - |1_P1_M\rangle).$$

Este é um ponto importante, pois vemos na Eq. A.15 que os estados de polarização e modos transversos que seguem pelo caminho $|0_p\rangle$ são ímpares e pelo caminho $|1_p\rangle$ são pares. Se compararmos com a Eq. A.1, vemos que há uma inversão na paridade dos estados de polarização e modos transversos por cada um dos caminhos. Esta inversão de paridade nas portas de entrada do *MZIM* fará com que o estado saia pela porta cujo caminho é rotulado como 1_p , ou seja, há uma inversão na porta de saída do *MZIM* em relação ao caso anterior ($\langle zzz \rangle$). Dessa forma, a medida do valor esperado $\langle zxx \rangle$ é -1 . Para verificar a inversão da porta de saída, precisamos avaliar a ação de cada componente óptico do *MZIM* sobre o estado. Iniciaremos, novamente, pela ação do primeiro *BS* sobre o estado da Eq. A.15. Seguindo os mesmos procedimentos que utilizamos anteriormente, vamos fazer $e = \frac{1}{2}(|0_P1_M\rangle + |1_P0_M\rangle)$ e $f = \frac{1}{2}(|0_P0_M\rangle - |1_P1_M\rangle)$ para obter

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} e + f \\ e - f \end{bmatrix}. \quad (\text{A.15})$$

A ação do *BS* nos dá o estado $|\alpha\rangle = e + f$ pelo caminho $|0_p\rangle$ e o estado $|\beta\rangle = e - f$ pelo caminho $|1_p\rangle$, conforme representado na Fig. 52. Assim, para o caso da medida $\langle zxx \rangle$, os estados $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$ são dados por,

$$|\alpha\rangle = e + f = \frac{1}{2\sqrt{2}}(|0_P1_M\rangle + |1_P0_M\rangle + |0_P0_M\rangle - |1_P1_M\rangle). \quad (\text{A.16})$$

e

$$|\beta\rangle = e - f = \frac{1}{2\sqrt{2}}(|0_P1_M\rangle + |1_P0_M\rangle - |0_P0_M\rangle + |1_P1_M\rangle). \quad (\text{A.17})$$

Como discutido anteriormente, vemos na Fig. 51 que o estado $|\alpha\rangle$ sofre uma dupla reflexão e o estado $|\beta\rangle$ sofre uma única reflexão. O estado $|\alpha\rangle$ sofre dupla reflexão e se mantém sem alterações. No entanto, os modos ímpares do estado $|\beta\rangle$ ganham um fator -1 , enquanto os pares se mantêm inalterados. Além disso, o estado $|\beta\rangle$ ganha uma fase ϕ devido a ação do *PZT*. Dessa forma, o estado $|\beta\rangle$, descrito na Eq. A.5, é reescrito como

$$|\beta\rangle = e - f = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-|0_P1_M\rangle - |1_P0_M\rangle - |0_P0_M\rangle + |1_P1_M\rangle)e^{i\phi}. \quad (\text{A.18})$$

Resta-nos a ação do BS na saída do $MZIM$ sobre estados $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$. Novamente, aplicamos a matriz do BS , descrita na Eq. A.2, nos estados $|\alpha\rangle$ e $|\beta\rangle$. Com isso, obteremos os estados $|\gamma\rangle$ (pelo caminho $|0_p\rangle$) e $|\delta\rangle$ (pelo caminho $|1_p\rangle$), que são os estados de saída do $MZIM$, conforme Fig. 51.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \alpha + \beta \\ \alpha - \beta \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \gamma \\ \delta \end{bmatrix}. \quad (\text{A.19})$$

Com isso, podemos escrever os estados de saída $|\gamma\rangle$, como segue,

$$\begin{aligned} |\gamma\rangle = |\alpha\rangle + |\beta\rangle &= \frac{1}{4} (|0_P1_M\rangle + |1_P0_M\rangle + |0_P0_M\rangle - |1_P1_M\rangle) + \\ &+ \frac{1}{4} (-|0_P1_M\rangle - |1_P0_M\rangle - |0_P0_M\rangle + |1_P1_M\rangle) e^{i\phi}. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Conforme discutido no Capítulo 6, o $MZIM$ foi calibrado para fase $\phi = 0$. Como os termos se cancelam, teremos estado

$$|\gamma\rangle = 0,$$

ou seja, o estado não sai pela rotulada como caminho $|0_p\rangle$. Com relação ao estado $|\delta\rangle$, considerando novamente $\phi = 0$, temos,

$$|\delta\rangle = |\alpha\rangle - |\beta\rangle = \frac{1}{4} (|0_P1_M\rangle + |1_P0_M\rangle + |0_P0_M\rangle - |1_P1_M\rangle) + \quad (\text{A.21})$$

$$+ \frac{1}{4} (|0_P1_M\rangle + |1_P0_M\rangle + |0_P0_M\rangle - |1_P1_M\rangle). \quad (\text{A.22})$$

Nesse caso, os termos se somam e teremos,

$$|\delta\rangle = |\alpha\rangle - |\beta\rangle = \frac{1}{2} (|0_P1_M\rangle + |1_P0_M\rangle + |0_P0_M\rangle - |1_P1_M\rangle). \quad (\text{A.23})$$

Concluimos que na medida do valor esperado $\langle zxx \rangle$ do estado GHZ , realizada pelo $MZIM$, o estado $(|\delta\rangle)$ sai por uma única porta, cujo caminho rotulamos como $|1_p\rangle$. Pela outra porta de saída ($|0_p\rangle$) não há nenhum feixe, pois $|\gamma\rangle = 0$. Assim, as portas de saída do $MZIM$ são diferentes quando medimos os valores esperados $\langle zzz \rangle$ e $\langle zxx \rangle$. Para esta última, o valor esperado $\langle zxx \rangle$ é igual a -1 , conforme discutido na Seção 2.3.

Para os casos em que medimos os valores esperados $\langle xzx \rangle$ e $\langle xxz \rangle$, o procedimento é o mesmo. A diferença, em relação a medida $\langle zxx \rangle$, é que para a medida do $\langle xzx \rangle$ trocamos as *HWP's*, na parte destacada como *Hadamard*, por um *BS*. Para medida do $\langle xxz \rangle$ trocamos os *DP's* por um *BS*. A ação do *BS*, da *HWP* e do *DP* sobre um estado é representada pela mesma matriz. Assim, apesar dos dispositivos atuarem em graus de liberdade diferentes, matematicamente a ação sobre o estado *GHZ* é a mesma. Dessa forma, os valores esperados $\langle zxx \rangle$, $\langle xzx \rangle$ e $\langle xxz \rangle$ são idênticos e iguais a -1 . Concluimos, utilizando a Eq. 2.16, que $M = 1 - (-1) - (-1) - (-1) = 4$, ou seja, o estado *GHZ* viola a desigualdade de Mermin.

ANEXO A – Lista de publicações

- Balthazar, W. F.; Caetano, D. P.; Souza, C. E. R.; Huguenin, J. A. O. **Using Polarization to Control the Phase of Spatial Modes for Application in Quantum Information**. Brazilian Journal Physics, 44, 658, 2014.
- Balthazar, W. F.; Passos, M. H. M.; Schmidt, A. G. M.; Caetano, D. P.; Huguenin, J. A. O. **Experimental realization of a the quantum duel game using linear optical circuits**. Journal of Physics B: At. Mol. Opt. Phys. 48, 165505, 2015.

Este trabalho foi escolhido para capa do Journal of Physics B e destacado no *JPhys+ – News and views from the Journal Physics Series*, com o título *Image of the week: Alice and Bob – dead or alive?* Disponível em: <<http://jphysplus.iop.org/2015/09/21/image-of-the-week-alice-and-bob-dead-or-alive/>>

- Balthazar, W. F.; Huguenin, J. A. O.; Schmidt, A. G. M. **Simultaneous Quantum Duel**. Journal of Physical Society of Japan, 84, 124002, 2015.
- Balthazar, W. F.; Souza, C. E. R.; Caetano, D. P.; Galvão, E. F., Huguenin, J. A. O.; Khoury, A. Z. **Tripartite non separability in classical optics**. arXiv:1511.02265v1, 2015. Submetido para Physical Review Letters.
- Balthazar, W. F.; Huguenin, J. A. O. **Conditional operation using three degrees of freedom of a laser beam for application in quantum information**. Submetido para Journal of the Optical Society of America B.

Referências

- [1] Maxwell, J. C. **A treatise on Electricity and Magnetism**. Oxford, v.2, 1873. Citado na página 21.
- [2] Lorentz, H. A. **Electromagnetic Phenomena in a System Moving with any velocity Less than that of Light**. Proceedings of the Royal Netherlands Academy of Arts and Sciences, 6: 809-831, 1904. Citado na página 21.
- [3] Planck, M. **On the theory of Energy Distribution Law of the Normal Spectrum**. Verh. Deutsch Phys. Ges. 2, 202, 1900. Citado na página 21.
- [4] Planck, M. **On the Law of the Energy Distribution in the Normal Spectrum**. Ann. d. Phys, 4, 553, 1901. Citado na página 21.
- [5] Einstein, A. **O ano miraculoso de Einstein: cinco artigos que mudaram a face da física**. Tradução de Alexandre Carlos Tort. Rio de Janeiro. Editora UFRJ, 2001. Citado na página 21.
- [6] Bohr, N. **Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?** Physical Review, 48, 1935. Citado na página 21.
- [7] Heisenberg, W. **The physical principles of the quantum theory**. New York, Dover, 1930. Citado na página 21.
- [8] Schrödinger E. **Discussion of probabilities relations between separated systems**. Mathematical Proceeding of the Cambridge Philosophical Society, 31, 555, 1935. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 49.
- [9] Einstein, A.; Podolsky, B.; Rosen, N. **Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?** Physical Review, 47, 1935. Citado na página 22.
- [10] Bell, J. **On the Einstein Podolsky Rosen Paradox**, Physics 1, p. 195-200, 1964. Citado na página 22.

- [11] Aspect, A.; Grangier, P.; Roger, G. **Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell's Inequalities**, Phys. Rev. Lett. 49 (2), 1982. Citado na página 22.
- [12] Aspect, A.; Grangier, P.; Roger, G. **Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell's Theorem**, Phys. Rev. Lett. 47 (7), 1981. Citado na página 22.
- [13] Aspect, A.; Dalibard, J.; Roger, G. **Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers**. Phys. Rev. Lett. 49 (25), 1982. Citado na página 22.
- [14] Nielsen, L.; Chuang, I.L. **Quantum computation and quantum information**. Cambridge University Press. Cambridge, 2000. Citado 6 vezes nas páginas 22, 43, 47, 49, 107 e 114.
- [15] Bennett, C.H.; Bessette, F.; Brassard, G.; Salvail, L.; e Smolin, L. **Experimental quantum cryptography**. Journal of Cryptology, 5, 3-28, 1992. Citado na página 22.
- [16] Ekert, A. **Quantum cryptography based on Bell's theorem**. Physical Review Letters, 67, 661-663, 1991. Citado na página 22.
- [17] Gisin, N.; Ribordy, G.; Tittel, W.; Zbinden, H. **Quantum cryptography**. Review of Modern Physics, 74, 145-195, 2002. Citado na página 22.
- [18] Poppe A. et al, **Practical Quantum Key Distribution with Polarization-Entangled Photons**. Optics Express, 12, 2004. Citado na página 22.
- [19] Deng, L-P.; Wang, H.; Wang, K. **Quantum CNOT gates with orbital angular momentum and polarization of single-photon quantum logic**. J. Opt. Soc. Am. B, 24, 2517, 2007. Citado na página 22.
- [20] Roychowdhury, S.; Jaiswal, V. K.; Singh, R. P. **Implementing controlled NOT gate with optical vortice**. Opt. Commun. 236, 419-424, 2004. Citado na página 22.
- [21] Souza, C. E. R.; Khoury, A. Z. **A Michelson controlled-not gate with a single-lens astigmatic mode converter**. Optics Express, v.18, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 22, 23, 51 e 92.

- [22] Dholakia, K.; Simpson, N. B.; Padgett, M.J.; Allen, L. **Second-harmonic generation and the orbital angular momentum of light** Phys. Rev. A 54, R3742-R3745, 1996. Citado na página 22.
- [23] Caetano, D. P.; Almeida, M. P.; Souto Ribeiro, P. H.; Huguenin, J. A. O.; Santos, B. C.; Khoury, A. Z. **Conservation of angular momentum in stimulated down-conversion**. Phys. Rev. A 66, 041801, 2002. Citado na página 22.
- [24] Walborn, S. P.; Oliveira, A. N.; Pádua, S.; Monken, C. H. Phys. **Multimode Hong-Ou-Mandel Interference**. Phys. Rev. Lett. 90, 14360, 2003. Citado na página 22.
- [25] Dada, A. C.; Leach, J.; Buller, G. S.; Padgett, M. J.; Andersson, E. **Experimental high-dimensional two-photon entanglement and violations of generalized Bell inequalities**. Nature Physics, 7, 677-680, 2011. Citado na página 22.
- [26] Guo, H.; Zhang, J.; Koehler, G. J. **A survey of quantum games**. Decision Support Systems **46** (2008) 318. Citado 3 vezes nas páginas 22, 23 e 57.
- [27] von Neumann, J.; Morgenstern, O. **Theory of Games and Economic Behavior**. Princeton University Press, p. 776, 2007. Citado na página 22.
- [28] von Neumann, J. **Zur Theorie der Gesellschaftsspiele**. Math. Ann., 100, 295, 1928. Citado na página 22.
- [29] Meyer, D. A. **Quantum Strategies**. Phys. Rev. Lett., 82 1052, 1999. Citado na página 22.
- [30] Eisert, J.; Wilkens, M.; Lewenstein, M. Quantum Games and quantum strategies. **Quantum games and Quantum Strategies**. Phys. Rev Lett., 83, 3077, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.
- [31] Flitney, A. P.; Abbott, D. *Quantum two and three person duels*. J. Opt. B, 6, 860, 2004. Citado na página 23.
- [32] Schmidt, A. G. M.; Paiva, M. M. **Quantum duel revisited**. J. Phys. A, 45, 125304, 2012. Citado 6 vezes nas páginas 23, 25, 57, 58, 59 e 82.

- [33] Challet, D.; Zhang, Y-C. **Emergence of cooperation and organization in an evolutionary game**. *Physica A*, 246, 407, 1997. Citado na página 23.
- [34] Iqbal, A. **Playing games with EPR-type experiments**. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 38, 43, 2005. Citado na página 23.
- [35] Du, J.; Li, H.; Xu, X.; Shi, M.; Wu, J.; Zhou, X.; Han, R. **Experimental realization of quantum games on a quantum computer**. *Phys. Rev. Lett.* 88, 137902, 2002. Citado na página 23.
- [36] Schmid, C.; Flitney, A. P.; Wieczorek, W.; Kiesel, N.; Weinfurter, H.; Hollenberg, L. C. L. **Experimental implementation of a fourplayer quantum game**. *New Journal of Physics*, 12, 063031, 2010. Citado na página 23.
- [37] Prevedel, R.; Stefanov, A.; Walther, P.; Zeilinger, A. **Experimental realization of a quantum game on a one-way quantum computer**. *New Journal of Physics*, 9, 1, 2007. Citado na página 23.
- [38] Pinheiro, A. R. C.; Souza C. E. R.; Caetano, D. P.; Huguenin, J. A. O.; Schmidt, A. G. M.; Khoury, A. Z. **Vector vortex implementation of a quantum game**. *J. Opt. Soc. Am. B*, 30, 3210, 2013. Citado 5 vezes nas páginas 23, 57, 58, 92 e 107.
- [39] Balthazar, W. F.; Passos, M. H. M.; Schmidt, A. G. M.; Caetano, D. P.; Huguenin, J. A. O. **Experimental realization of a the quantum duel game using linear optical circuits**. *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* 48, 165505, 2015. Citado 4 vezes nas páginas 23, 25, 77 e 82.
- [40] Luis, A. **Coherence, polarization, and entanglement for classical light fields**. *Opt. Commun.*, 282, 3665, 2009. Citado na página 23.
- [41] Franciso, M. A.; Ledesma, A. **Simulating Bell inequality violations with classical optics encoded q-bits**. *J. Opt. Soc. Am. B*, 27, 779, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 51.
- [42] Qian, X-F.; Eberly, J. H. **Entanglement and classical polarization states** *Opt. Lett.* 36, 4110, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 51.

- [43] Töppel, F.; Aiello, A.; Marquardt, C.; Giacobino, E.; Leuchs, G. **Classical Entanglement in polarization metrology**. *New J. Phys.*, 16, 073019, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 51.
- [44] Spreew, R. J. C. **A classical analogy of entanglement** *Found. Phys.*, 28, 361, 1998. Citado na página 23.
- [45] Simon, B. N.; Simon, S.; Gori, F.; Santarsiero, M.; Borghi, R.; Mukunda, N.; Simon, R. **Nonquantum Entanglement a basic Issue in Polarization Optics**. *Phys. Rev. Lett.*, 104, 023901, 2010. Citado na página 23.
- [46] Ghose, P.; Mukherjee, A. **Entanglement in classical optics** *Rev. Theor. Sci* **2**, 1 (2014). Citado na página 23.
- [47] Pereira, L. J.; Khoury, A. Z.; Dechoum, K. **Quantum and classical separability of spin-orbit laser modes**. *Phys. Rev. A*, 90, 053842, 2014. Citado 6 vezes nas páginas 23, 43, 51, 99, 105 e 117.
- [48] Borges, C. V. S.; Hor-Meyll, M. Huguenin, J. A. O.; Khoury, A. Z. **Bell-like inequality for the spin-orbit separability of a laser beam**. *Phys. Rev. A*, 82, 033833, 2010. Citado 7 vezes nas páginas 23, 43, 51, 54, 99, 105 e 107.
- [49] Kagalwala, K. H.; Giuseppe, G. D.; Abouraddy, A. F.; Saleh, B. E. A. **Bell's measure in classical optics coherence**. *Nature Photonics*, 7, 72, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 23, 51, 99 e 107.
- [50] Qian, X. F.; Little, B.; Howell, J. C.; Eberly, J. H. **Shifting the quantum classical boundary: theory and experiment for stastically classical optical fields**. *Optica*, 2, 611 (2015). Citado na página 23.
- [51] Cardano, F.; Karimi, E.; Slussarenko, S.; Marrucci, L.; Lisio, C.; Santamato, E. **Polarization pattern of vector vortex beams generated by q-plates with different topological charges**. *Appl. Opt.* 51, C1-C6, 2012. Citado na página 24.
- [52] Milione, G.; Dudley, A.; Nguyen, T. A.; Chakraborty, K.; Karimi, E.; Forbes, A.; Alfano, R. R. **Measuring the self-healing of the spatially inhomogeneous states of polarization of vector Bessel beams**. *J. Opt.*, 17, 035617, 2015. Citado na página 24.

- [53] Milione, G.; Nguyen, T. A.; Leach, J.; Nolan, D. A.; Alfano, R. R. **Using vector modes to encode information for optical communication**. *Opt. Lett.*, 40, 21, 2015. Citado na página 24.
- [54] McLaren, M.; Konrad, T.; Forbes, A. **Measuring the nonseparability of vector vortex beams**. *Phys. Rev. A*, 92, 023833, 2015.
- [55] Goyal, S. K.; Roux, F. S.; Forbes, A.; Konrad, T. **Implementing quantum walks using orbital angular momentum of classical light**. *Phys. Rev. Lett.* 110, 263602, 2013. Citado na página 24.
- [56] Rafsanjani, S. M. H.; Mirhosseini, M.; Magaña-Loaiza, O. S.; Boyd, R. W. **State transfer based on classical nonseparability**. *Phys. Rev. A*, 92, 023827, 2015. Citado na página 24.
- [57] Guzman-Silva, D.; Brüning, R.; Zimmermann, F.; Vetter, C.; Gräfe, M.; Heinrich, M.; Nolte, S.; Duparré, M.; Aiello, A.; Ornigotti, M.; Szameit, A. **Demonstration of local teleportation using classical entanglement**. arxiv.org/abs/1509.06217, 2015. Citado na página 24.
- [58] Balthazar, W. F.; Huguenin, J. A. O.; Schmidt, A. G. M. **Simultaneous Quantum Duel**. *Physical Society of Japan*, 84, 124002, 2015. Citado na página 24.
- [59] Balthazar, W. F.; Souza, C. E. R.; Caetano, D. P.; Galvão, E. F., Huguenin, J. A. O.; Khoury, A. Z. **Tripartite non separability in classical optics**. [arXiv:1511.02265v1](https://arxiv.org/abs/1511.02265v1), 2015. Citado 4 vezes nas páginas 24, 25, 63 e 77.
- [60] Balthazar, W. F.; Caetano, D. P.; Souza, C. E. R.; Huguenin, J. A. O. **Using Polarization to Control the Phase of Spatial Modes for Application in Quantum Information**. *Brazilian Journal Physics*, 44, 658, 2014. Citado na página 25.
Citado 3 vezes nas páginas 25, 92 e 107.
- [61] Fowles, G.R. **Introduction to modern optics, Dover publications**. New York, 1975. Citado na página 28.
- [62] Gerrard, A.; Burch, J.M. **Introduction to matrix methods in optics**. Dover publications, New York, 1975. Citado na página 28.

- [63] Nussenveig, H. M. **Curso de Física Básica 4: óptica, relatividade e física quântica**. São Paulo: Editora Blucher, 1998. Citado na página 28.
- [64] Siegman, A. E. **Lasers**. Univ. Sci. Books, Mill Valley, 1986. Citado na página 33.
- [65] Allen, L. et al. **Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes**. Phys. Rev. A 45, 8185, 1992. Citado na página 36.
- [66] Abramochkin, E.; Volostnikov, V. **Beam transformations and nontransformed beams**. Optics Communications, 83, 123, 1991. Citado na página 38.
- [67] Padgett, M. J.; Courtial, J. **Poincaré-sphere equivalent for light beams containing orbital angular momentum?** Opt. Lett., 24, 430, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 81.
- [68] Allen, L.; Courtial, J.; Padgett, M. **Matrix formulation for the propagation of light beams with orbital and spin angular momenta**. Phys. Rev. E, 60, 7497, 1999. Citado 3 vezes nas páginas 40, 81 e 108.
- [69] Greenberger, D. M.; Horne, M. A.; Zeilinger, A. **Bell's Theorem**. In: Quantum Theory, and Conceptions of the Universe, edited by M. Kafatos (Kluwer, Dordrecht, 1989), p. 69, 1989. Citado na página 50.
- [70] Mermin, N. D. **Extreme quantum entanglement in a superposition of macroscopically distinct states**. Phys. Rev. Lett., 65, 1838, 1990. Citado na página 50.
- [71] Luis, A. **Coherence, polarization, and entanglement for classical light fields**. Opt. Commun., 282, 3665, 2009. Citado na página 51.
- [72] Eisert, J.; Wilkens, M.; Lewenstein, M. **Quantum games and Quantum Strategies**. Phys. Rev. Lett. 83, 3077, 1999. Citado na página 58.
- [73] Flitney, A. P.; Abbott, D. **Quantum two and three person duels**. J. Opt., B6, S860, 2004. Citado na página 59.
- [74] Schmidt, A. G. M.; Silva, L. **Quantum Russian Roulette**. Physica A, 392, 400, 2013. Citado na página 59.

- [75] Frąckiewicz, P.; Schmidt, A. G. M. **N-Person Quantum Russian Roulette**. *Physica A*, 401, 8, 2014. Citado na página 59.
- [76] G. Abal, R. Donangelo, H. Fort, **Conditional strategies in iterated quantum games**. *Physica A* **387** 5326. 2008. Citado 3 vezes nas páginas 65, 67 e 68.
- [77] Sasada, H.; Okamoto, M. **Transverse-mode beam splitter of a light beam and its application to quantum cryptography**. *Phys. Rev. A* 68, 012323, 2003. Citado na página 78.
- [78] Meyer, D. A. **Quantum Strategies**. *Phys. Rev. Lett.*, 82, 1052, 1999. Citado na página 92.
- [79] Klyshko, D.N. **Scattering of light in a Medium with Nonlinear Polarizability**. *Soviet Physics JETP*, 28, 522, 1969. Citado na página 93.
- [80] Burnham, D.C.; Weinberg, D.L. **Observation of Simultaneity in a Parametric Production of Optical Photon Pairs**. *Phys. Rev. Lett.*, 25, 84, 1970. Citado na página 93.
- [81] Tittel, W.; Weihs, G. **Photonic Entanglement for Fundamental Tests and Quantum Communication**. *Quantum Information e Computation*, 1, 3, 2001. Citado na página 93.
- [82] Pittman, T.B.; Franson, J.D. **Cyclical quantum memory for photonic qubits**. *Phys. Rev. A*, 66, 062302, 2002. Citado na página 93.
- [83] Walborn, S. P.; Almeida, M.P.; Ribeiro, P.H.S. **Experimental investigation of quantum key distribution with position and momentum of photon pairs**. *Phys. Rev. A* **72** (2005) 22313. Citado na página 93.
- [84] D'Ambrosio, V.; Nagali, E.; Walborn, S.P.; Aolita, L.; Slussarenko, S.; Marrucci, L.; Sciarrino, F. **Complete experimental toolbox for alignment-free quantum communication**. *Nature Communications*, 3, 961, 2012. Citado na página 93.
- [85] Monken, C.H.; Ribeiro, P.H.S.; Pádua, S. **Transfer of angular spectrum and image formation in spontaneous parametric down-conversion**. *Phys. Rev. A*, 57, 3123, 1998. Nenhuma citação no texto.

- [86] Kwiat, P.G.; Mattle, K.; Weinfurter, H.; Zeilinger, A.; Sergienko, A. V.; Shih., Y.; **New High-Intensity Source of Polarization-Entangled Photon Pairs.** Phys. Rev. Lett., 75, 4337, 1995. Citado na página 97.
- [87] Nambu, Y. ; Usami, K.; Tsuda, Y.; Matsumoto, K.; Nakamura, K. **Generation of polarization-entangled photon pairs in a cascade of two type-I crystals pumped by femtosecond pulses**Phys. Rev. A, 66, 033816, 2002. Citado na página 97.
- [88] Gouy, C. R. **Sur une propriete nouvelle des ondes lumineuses.** Acad. Sci. Paris, 110, 1251, 1890. Citado na página 107.
- [89] Beijersbergen, M. W. L.; Allen, H. E. L.; van der Veen, O.; Woerdman, J. P. **Asigmatic laser mode converters and transfer of orbital angular momentum.** Opt. Commun., 96, 123, 1993. Citado 2 vezes nas páginas 108 e 109.
- [90] Sakurai, J. J.; Napolitano, J. **Mecânica Quântica Moderna.** Ed. Bookman. Porto Alegre, 2 ed., 2013. Citado na página 130.