



INSTITUTO DE FÍSICA

Universidade Federal Fluminense

Viviane Angélico Pereira Alfradique

Modelos de Estrelas Relativísticas com
Campo Magnético Dipolar

Niterói
Março 2016

Viviane Angélico Pereira Alfradique

Modelos de Estrelas Relativísticas com Campo Magnético Dipolar

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Física da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Física.

Orientador: Rodrigo Picanço Nogueiros

Niterói
Março 2016

A391 Alfradique, Viviane Angélico Pereira.

Modelos de estrelas relativísticas com campo magnético
dipolar / Viviane Angélico Pereira Alfradique ; orientador:
Rodrigo Picanço Negreiros -- Niterói, 2016.
110 p. : il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Fluminense,
Instituto de Física, Niterói, 2016.
Bibliografia: p. 104-110.

1.RELATIVIDADE GERAL (FÍSICA). 2.MAGNETARES. 3.GEODÉSICA.
I.Negreiros, Rodrigo Picanço, Orientador. II.Universidade
Federal Fluminense. Instituto de Física, Instituição
responsável. III.Título.

CDD 530.11

*Nada na vida deve ser temido, somente compreendido. Agora é hora de compreender mais
para temer menos.*

Marie Curie

Agradecimentos

Aos meus amados pais por serem os melhores pais do mundo e que me ajudaram a construir o caminho até aqui;

À minha família pelo imenso apoio, atenção e carinho durante todos esses anos;

Ao meu orientador Rodrigo Negreiros pela dedicação, confiança, apoio, incentivo e ajuda a mim dispensadas e que foram essenciais para a conclusão deste trabalho;

Aos professores da pós-graduação do IF-UFE, que foram importantes para a minha formação acadêmica;

Aos meus queridos amigos por serem os melhores amigos do universo. Agradeço pelas risadas, conversas, conselhos e por terem animado todos os meus dias. Faço aqui um agradecimento especial aos meus melhores amigos: Maria Vitória Aguiar, Kenion Assunção, Paola Obando, João Gambaro e Wagner Buono;

A FAPERJ e ao CNPq pela concessão da bolsa de mestrado.

Resumo

Estrelas de nêutrons se manifestam como diferentes tipos de classes de fontes astrofísicas, que estão associadas a distintas fenomenologias. Aqui focaremos nossas atenções aos magnetares (ou estrelas de nêutrons altamente magnetizadas) que estão associados aos Soft Gamma Repeaters e os Anomalous X-ray pulsars. O campo magnético na superfície desses objetos atingem valores maiores que $10^{15}G$. No âmbito de campos magnéticos tão intensos, efeitos relativísticos começam a serem determinantes para a definição da estrutura desses objetos e somos tentados a nos questionarmos de que forma esses campos magnéticos tão intensos modificam a estrutura e a evolução dessas estrelas. Neste trabalho realizaremos um estudo a respeito de duas soluções das equações de Einstein-Maxwell (a solução de Bonnor que é uma solução analítica e a solução completa das equações de Einstein-Maxwell encontrada por métodos numéricos) e que descrevem o espaço-tempo exterior a um objeto compacto massivo e com campo magnético dipolar. Para isto revisaremos estas duas soluções e em seguida descreveremos as equações das geodésicas geradas por tais soluções. Nossos estudos mostram que, apesar da solução de Bonnor não satisfazer as equações de Maxwell, as órbitas geradas por esta solução são as mesmas descritas pela solução numérica. Também mostraremos que a inserção de campos magnéticos que assumem valores de até $10^{17}G$ no centro da estrela não modificam tanto as órbitas das partículas massivas e dos fótons descritas ao redor dessa estrela, e assim a utilização da solução de Schwarzschild para a descrição das órbitas ao redor desse objeto é uma aproximação razoável.

Palavras-chave: relatividade geral, magnetares, geodésicas

Abstract

Neutron stars manifest themselves as different classes of astrophysical sources that are associated to distinct phenomenology. Here we focus our attention on magnetars (or strongly magnetized neutron stars) that are associated to Soft Gamma Repeaters and Anomalous X-ray Pulsars. The magnetic field on surface these objects, reaches values greater than 10^{15} . Under intense magnetic fields, relativistic effects begin to be decisive for the definition of the structure and evolution of these objects and are tempted to question ourselves how these strengths fields affect the structure of these stars. In this work we will conduct a study to respect the two solutions of Einstein-Maxwell's equations (the Bonnor solution which is an analytical solution and a complete solution of the Einstein -Maxwell equations found by numerical methods) that have been found in the literature which describe the spacetime exterior a massive compact object wich possess a magnetic field that a character dipole. For this we revised this two solutions, and then describe the geodesic equations generated by such solutions. Our studies show that, despite the Bonnor solution does not satisfy Maxwell's equations, the orbits generated by this solution are the same as described by numerical solution. Also show that the inclusion of magnetic fields that assumes values of up to $10^{17}G$ in the center of the star does not modify the orbits of the massive particles and the photons which are described around this star, and so the use of Schwarzschild solution for the description of the orbits around this object is a reasonable approximation.

Keywords: general relativity, magnetars, geodesics

Sumário

Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	xii
1 Introdução	1
2 Equações de campo de Einstein: aspectos básicos da teoria da relatividade geral	8
2.1 O princípio da equivalência e a construção da teoria da relatividade geral	8
2.2 Equações de campo de Einstein	11
3 Campo gravitacional de um objeto compacto com um campo magnético dipolar	15
3.1 As equações de Maxwell em um espaço-tempo curvo	15
3.2 Solução aproximada até a 2º ordem da constante gravitacional (κ^2)	17
3.3 Solução de Bonnor que descreve um objeto de massa m com dipolo magnético μ e carga elétrica e	25
4 Aspectos astrofísicos, geodésicas e constantes de movimento	34
4.1 Equações de movimento	34
4.1.1 Equações das geodésicas no plano equatorial para a solução de Bonnor sem carga elétrica ($e = 0$)	38
4.1.2 Órbitas dos fótons ($\alpha = 0$) para a solução de Bonnor	48
4.1.3 Equações da geodésicas no plano equatorial para uma solução geral que descreve um objeto massivo e com campo magnético dipolar	52
4.2 <i>Redshifts</i> gravitacionais	62
4.2.1 Previsão teórica do redshift gravitacional	64
4.2.2 Redshift gravitacional da solução de Bonnor na ausência de carga elétrica	66

5	Método numérico	69
5.1	Método espectral	69
5.1.1	Método pseudo espectral	71
5.2	O código LORENE	71
5.2.1	Breve introdução ao formalismo 3 + 1	72
5.2.2	Métrica e equações que Einstein-Maxwell para todo espaço-tempo	73
5.2.3	Procedimento numérico	79
6	Conclusão	82
	Referências Bibliográficas	104

Lista de Figuras

1.1	Primeiras medidas do pulsar PSR 1919+21 feitas por Bell.	2
1.2	Diagrama $P-\dot{P}$ para 1704 objetos, onde 1674 são RPPs, 9 AXP, 5 SGRs, 3 CCOs, 6 INs, e 7 são RRATs. Os círculos que estão abertos são identificados como sistema binário. As linhas pontilhadas no gráfico representam a intensidade do campo magnético de cada objeto, já as linhas mais pontilhadas representam a idade estimada de cada objeto. A linha sólida é o modelo de linha da morte. A seta em verde representa o processo de 'freamento' da rotação dos objetos, e a seta laranja representa o possível processo de formação dos pulsares de milissegundos. Esses dados foram retirados do ATNF Pulsar catalog (www.atnf.csiro.au/research/pulsar/psrcat), the McGill SGR/AXP Online Catalog (www.physics.mcgill.ca/pulsar/magnetar/main.html) ([22],[23]) e foram plotados por [24].	4
2.1	Experimento do elevador que exemplifica o princípio da equivalência: (a) observador dentro de um elevador que está subindo; (b) observador a bordo de um foguete acelerado, com módulo igual a g ; (c) observador a bordo de um foguete em repouso e sem a ação de qualquer campo gravitacional; (d) observador e elevador em queda livre no campo gravitacional \vec{g} . Fonte: http://www.astro.iag.usp.br/~ronaldo/introcosm/Glossario/PrincEquiv.html	11
4.1	Diferentes órbitas da Lua.	36
4.2	Comportamento do potencial efetivo da solução de Bonnor.	42
4.3	Órbitas de uma partícula teste ao redor de um objeto massivo descrito pela solução de Bonnor. Os valores dos parâmetros utilizados são: $\ell_{eq} = 8,557$, $\mu = 2,078 km^2$ e $m = 1,99M_{\odot}$	45
4.4	Órbitas de uma partícula teste ao redor de um objeto massivo descrito pela solução de Bonnor. Os valores dos parâmetros utilizados são: $\ell_{eq} = 6,81$, $\mu = 2,22 km^2$ e $m = 1,58M_{\odot}$	46

4.5	Órbitas de uma partícula teste ao redor de um objeto massivo descrito pela solução de Bonnor. Os valores dos parâmetros utilizados são: $\ell_{eq} = 7,48$, $\mu = 2,22km^2$ e $m = 1,74M_{\odot}$	47
4.6	Órbitas de uma partícula teste ao redor de um objeto massivo descrito pela solução de Bonnor. Os valores dos parâmetros utilizados são: $\ell_{eq} = 8,16$, $\mu = 2,15km^2$ e $m = 1,899M_{\odot}$	48
4.7	Potencial efetivo dos fótons ao redor de uma estrela de nêutrons que possui os seguintes parâmetros: $m = 1,58M_{\odot}$, $\ell_{eq} = 6,81$, $\epsilon = 0,0002$ e $\mu = 2,22$	50
4.8	Potencial efetivo dos fótons ao redor de uma estrela de nêutrons que possui os seguintes parâmetros: $m = 1,99M_{\odot}$, $\ell_{eq} = 8,557$, $\epsilon = 0,337$ e $\mu = 2,078$	51
4.9	Órbita de espalhamento de um fóton ao redor de um objeto massivo e campo magnético dipolar descrito pela solução de Bonnor. Os parâmetros que caracterizam este objeto massivo são: $m = 1,99M_{\odot}$, $\mu = 2,078km^2$ e $\epsilon = 0,337$	52
4.10	Perfil do potencial efetivo para a solução de Bonnor (curva em vermelho), para a solução de Schwarzschild (curva em amarelo) e para a solução do LORENE (curva em azul). Os valores dos parâmetros utilizados são: $\ell_{eq} = 8,557$, $E_{eq} = 0,02145$, $\mu = 2,078km^2$ e $m = 1,99M_{\odot}$. O campo magnético central gerado por este valor de μ é de $14,40606357 \times 10^{16}G$	55
4.11	Influência notória do valor de ℓ_{eq} no formato do poço do potencial efetivo da solução numérica do LORENE.	55
4.12	Mesmo que a figura (4.10) exceto com $\ell_{eq} = 6,81$, $E_{eq} = 0,02145$, $\mu = 2,22km^2$ e $m = 1,58M_{\odot}$. O campo magnético central gerado por este valor de μ é de $10,69322493 \times 10^{16}G$	56
4.13	Influência notória do valor de ℓ_{eq} no formato do poço do potencial efetivo da solução numérica do LORENE.	56
4.14	Mesmo que a figura (4.10) exceto com $\ell_{eq} = 7,48$, $E_{eq} = 0,02145$, $\mu = 2,22km^2$ e $m = 1,74M_{\odot}$. O campo magnético central gerado por este valor de μ é de $12,353 \times 10^{16}G$	57
4.15	Influência notória do valor de ℓ_{eq} no formato do poço do potencial efetivo da solução numérica do LORENE.	57

4.16 Mesmo que a figura (4.10) exceto com $\ell_{eq} = 8,16$, $E_{eq} = 0,02145$, $\mu = 2,15 km^2$ e $m = 1,899M_{\odot}$. O campo magnético central gerado por este valor de μ é de $14,40606357 \times 10^{16}G$	58
4.17 Influência notória do valor de ℓ_{eq} no formato do poço do potencial efetivo da solução numérica do LORENE.	58
4.18 Órbita fechada de uma partícula teste em um espaço-tempo descrito pela solução encontrada utilizando o código LORENE para dois modelos distintos de estrelas de nêutrons.	59
4.19 Mesmo que a figura acima.	60
4.20 Órbita de espalhamento de uma partícula teste em um espaço-tempo descrito pela solução encontrada utilizando o código LORENE para quatro modelos distintos de estrelas de nêutrons.	61
4.21 Órbita do planeta Mercúrio em torno do Sol.	63
4.22 Ilustração da emissão de um fóton ocorrida no ponto A e da recepção do mesmo realizada no ponto B. Fonte: [75]	65
4.23 Variação da razão da frequência do receptor e do emissor em função do ângulo polar θ_A para os quatros distintos modelos de estrela de nêutrons.	68
5.1 Linhas de um campo magnético de caráter dipolar.	78

Lista de Tabelas

1	Propriedades do modelo um da estrela de nêutrons.	101
2	Propriedades do modelo dois da estrela de nêutrons.	102
3	Propriedades do modelo três da estrela de nêutrons.	102
4	Propriedades do modelo dois da estrela de nêutrons.	103

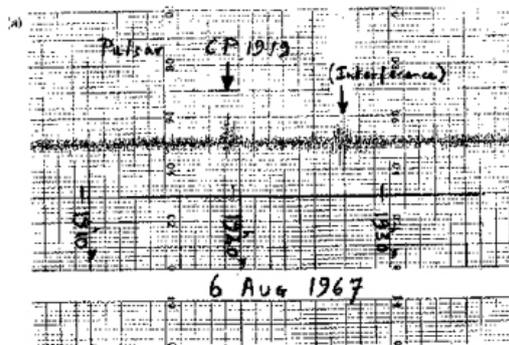
1 Introdução

Observações do espectro eletromagnético na faixa do raio-X até os raios gama revelam campos magnéticos em todas as escalas do Universo, de pequenos planetas a grandes aglomerados de galáxias. No âmbito astrofísico de altas energias, os campos magnéticos são estudados em anãs brancas, estrelas de nêutrons, pulsares e em buracos negros. A intensidade do campo magnético varia de acordo com o objeto astrofísico em estudo. Em alguns planetas esse campo magnético é tão fraco como por exemplo Netuno (que possui no equador um campo magnético com intensidade de 13×10^{-5} G), que a introdução desses campos na descrição da estrutura desse objeto se torna irrelevante. Entretanto, existem sistemas astrofísicos que essa negligência gera uma descrição errônea de sua estrutura. Um desses sistemas é a presença de campos magnéticos no núcleo de galáxias ativas ([1],[2],[3],[4]), estes núcleos produzem mais radiação do que o restante da galáxia e o seu entendimento torna-se fundamental para o estudo da evolução e da estrutura da galáxia. Outro exemplo é o de produção de jatos relativísticos colimados localizados nas regiões internas dos discos de acreção, que podem ser explicados a partir do mecanismo magneto-centrífugo proposto por Blandford e Payne [5].

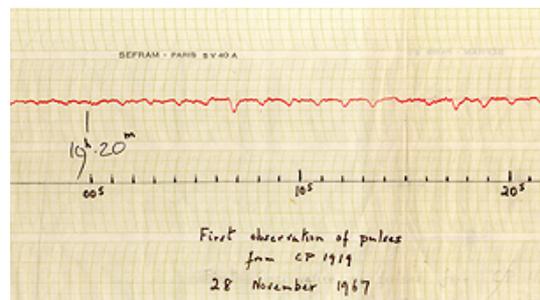
Nos estudos sobre objetos compactos os campos magnéticos são importantes na descrição da estrutura dos *magnetares*, que são objetos compactos com um campo magnético extremamente intenso da ordem de $10^{14} - 10^{15}$ G ([6],[7],[8]) e também para o entendimento da interação entre os processos magnéticos e térmicos em estrelas de nêutrons ([9],[10]). Estes objetos constituem uma classe do objeto astrofísico chamado de *pulsares*. Os pulsares são estrelas de nêutrons magnetizadas em rotação que produzem emissões de pulsos eletromagnéticos.

Os primeiros pulsares foram descobertos por Hewish e Bell [11] na Universidade de Cambridge em 1967. O grupo de pesquisa liderado por Hewish estava realizando diversas pesquisas observacionais de fontes de rádio extragalácticas, em agosto de 1967 Bell, aluna de Hewish, detectou um sinal que flutuava periodicamente com período igual a 1,337s (ver figura (1.1)). Esta fonte é conhecida como PSR 1919+21 e todo sinal com essa característica periódica foi denominado de pulsar (ou PSR - pulsating source of radio). Logo em seguida foi

encontrado mais dois novos pulsares, o pulsar de caranguejo - *Crab*, com massa igual a $1.4 M_{\odot}$ ¹, raio de aproximadamente 10km e período igual a 33ms [12], e o pulsar de Vela com período igual a 89ms [13]. O fato desses dois pulsares possuírem um período tão inferior quando comparados com o do primeiro pulsar encontrado por Bell ($1,337\text{s}$) leva a teoria de que esses pulsares sejam objetos mais densos do que as anãs brancas; já que para equilibrar esse aumento da intensidade da força centrífuga devida o aumento da rotação, a estrela tem que possuir uma força gravitacional maior do que a gerada pela anã branca. Este objeto foi identificado como sendo uma estrela de nêutron (objecto compacto já proposto em 1934 por Walter Baade e Fritz Zwicky como sendo o resultado final da supernova de uma estrela na sequência principal ([14], [15])).



(a) Medidas do pulsar PSR 1919+21 feita por Bell em 6 de agosto de 1967.



(b) Medida do mesmo pulsar feita por Bell em 28 de novembro de 1967, note o carácter periódico do mesmo.

Figura 1.1: Primeiras medidas do pulsar PSR 1919+21 feitas por Bell.

Em 1974 Hewish ganhou o prêmio Nobel pelo seu trabalho pioneiro sobre astrofísica em rádio e pelo seu papel junto com a sua aluna de doutorado, na época, Bell na descoberta do primeiro pulsar. No mesmo ano, Hulse e Taylor descobriram o primeiro pulsar em um sistema binário (PSR 1913+16) composto por duas estrelas de nêutrons [16], neste sistema o pulsar estava em órbita com uma estrela de nêutron em torno de um centro de massa comum a ambos. Utilizando uma antena Arecibo de 305m , eles mediram o período do pulsar e obtiveram o valor de 59ms . Devido ao elevado grau de precisão que foi utilizado por Taylor e seus colaboradores em suas medidas, este sistema foi utilizado como teste para a teoria da Relatividade Geral em um campo gravitacional intenso ([17], [18] e [19]).

O pulsar mais rápido conhecido até os dias atuais é o PSR 1937+21, com período

¹Ao longo desta dissertação utilizaremos o símbolo M_{\odot} para representar a massa do Sol.

de $1,56\text{ms}$. Este pulsar foi observado por Backer, Kulkarni, Heiles, Davis, e Goss em 1982 [20], e ficou conhecido por ser o primeiro pulsar milissegundo observado até aquele ano. A descoberta do segundo milissegundo pulsar só foi ocorrer em 1983, o grupo liderado por Boriakoff [21] encontrou o pulsar PSR 1953+29 cujo período de rotação é de 6.1ms . A pulsares cujo período de rotação estão entre 1-10 milissegundos chamamos de *pulsar de milissegundo*.

Os pulsares nascem com um período de rotação significativo, isto porque a maior parte da energia presente no colapso, que gera o pulsar, é transformada em energia de rotação para este pulsar que está nascendo. Ao longo de sua vida o pulsar tende a girar mais lentamente, já que a sua energia de rotação é convertida em radiação que é observada por nós na Terra e assim enquanto esta energia é irradiada ao longo do tempo, os pulsares tendem a girar mais lentamente. No gráfico conhecido como 'Pdot x P' este mecanismo de 'freamento' dos períodos dos pulsares é indicado pela seta verde na figura (1.2). Para explicar a existência dos pulsares de milissegundo que são pulsares velhos e com um valor alto para o período de rotação, fazemos uso de um modelo teórico conhecido como um cenário de reciclagem. Neste modelo acredita-se que se um pulsar compõem um sistema binário e a matéria de sua companheira é acrescida por um disco de acreção, então este processo de acreção pode gerar momento angular ao pulsar que já estava 'morto' (já tinha atravessado a linha da morte que é caracterizada por delimitar os pulsares velhos com rotação lenta (\dot{P} assume valores pequenos, enquanto P possui valores altos) que não são capazes de produzir a saída de partículas carregadas de sua superfície não suportando as atividades na região da magnetosfera e assim passam a operar como pulsares de radio) e assim cada vez que mais matéria é acrescida ao pulsar, menor é seu período e desta forma é possível explicar os períodos tão curtos encontrados nos pulsares de milissegundos. Este processo de 're-nascimento' dos pulsares de milissegundos é identificado pela seta laranja no diagrama abaixo (figura (1.2)).

Outra classe de pulsares são os magnetares, estes são objetos compactos providos de um intenso campo magnético que é a sua principal fonte de energia. Os magnetares são caracterizados por possuírem um campo magnético na ordem de $10^{14} - 10^{15}\text{G}$ e é esperado que este campo seja ainda mais intenso no seu núcleo. A presença de campos magnéticos tão intensos é necessária para se conseguir explicar os valores medidos do período de rotação dessas fontes. Os candidatos a formarem essa classe de pulsares são os anamalous X-ray pulsars (AXPs) e soft-gamma repeaters (SGR).

Soft-gamma repeaters são estrelas de raio-X que emitem flashes repetidos de

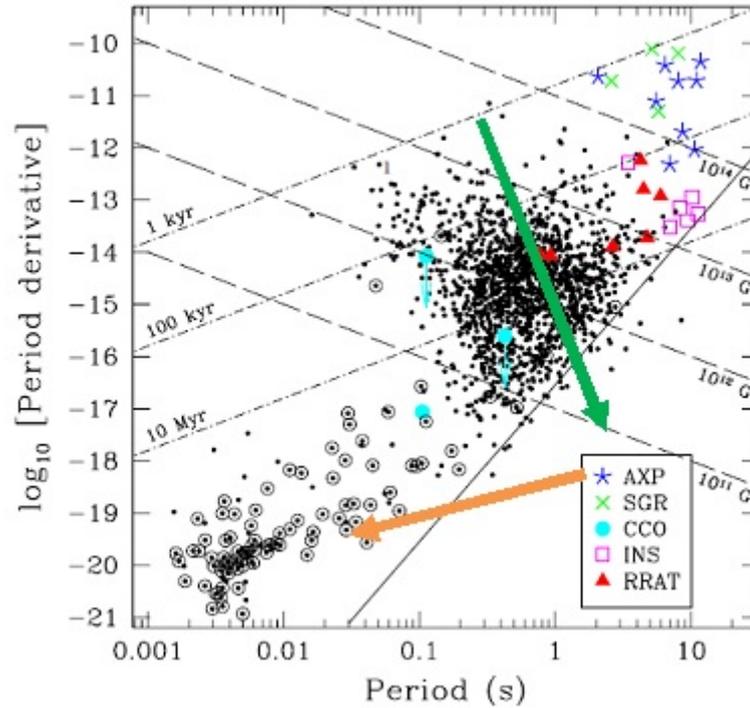


Figura 1.2: Diagrama $P - \dot{P}$ para 1704 objetos, onde 1674 são RPPs, 9 AXPs, 5 SGRs, 3 CCOs, 6 INs, e 7 são RRATs. Os círculos que estão abertos são identificados como sistema binário. As linhas pontilhadas no gráfico representam a intensidade do campo magnético de cada objeto, já as linhas mais pontilhadas representam a idade estimada de cada objeto. A linha sólida é o modelo de linha da morte. A seta em verde representa o processo de 'freamento' da rotação dos objetos, e a seta laranja representa o possível processo de formação dos pulsares de milissegundos. Esses dados foram retirados do ATNF Pulsar catalog (www.atnf.csiro.au/research/pulsar/psrcat), the McGill SGR/AXP Online Catalog (www.physics.mcgill.ca/pulsar/magnetar/main.html) ([22],[23]) e foram plotados por [24].

raios gammas a baixa energia, além de explosões de raios-X. O período dos pulsos estão agrupados no intervalo de 6 a 12 segundos e a taxa de aumento desse período cresce rapidamente. O primeiro SGR foi observado em 07 de janeiro de 1979, nesta ocasião uma explosão de curta duração e com um suave espectro (abaixo de 100 keV) foi observada na direção do centro galáctico [25]. Naquele momento já era conhecido os cosmic gamma-ray bursts (GRBs), mas o espectro de energia encontrado naquela explosão não coincidia com o espectro dos GRBs, este com espectro de energia da ordem de keV. No dia 05 de março do mesmo ano foi observado uma intensa explosão de raios-gamma com longa duração, esta explosão possuía uma cauda pulsante e foi localizada como a remanescente da grande nuvem de Magalhães ([26],[27]). Semanas após a observação deste evento foi observado, por três dias, mais três explosões com espectro suave. O próximo evento só foi observado em

1987, esta explosão era a mesma que aquela já detectada no dia 7 de janeiro de 1979. A esta fonte foi chamada de SGR1806-20, onde SGR representa soft-gamma repeaters e também se remete ao fato desta fonte estar localizada na constelação de Sagitário. Uns dos trabalhos pioneiros para o embasamento teórico dos SGRs são os artigos de Duncan e Thompson [28] e do Paczynski [29] ambos publicados em 1992. No dia 27 de agosto de 1998 foi detectado o segundo SGR (SGR 1900+14), e o terceiro SGR 1806-20 foi observado no dia 27 de dezembro do mesmo ano. Atualmente já foram detectados 5 SGR e com telescópios que medem o espectro de raio-X até raios gammas, como exemplo o XMM-Newton da ESA [30], o Fermi Gamma-ray Space telescope da NASA [31], o CHANDRA x-ray observatory da NASA [32] e etc, é esperado que este número cresça ainda mais.

O primeiro *anomalous X-ray* (AXPs) descoberto foi o 1E 2259+586 ([33], [34]) em 1980, se localizava no centro da remanescente da supernova, com período de 6,98s e com luminosidade de raio-X no intervalo de 2-4 keV. A primeira interpretação para estes objetos foi a de que estes eram na verdade um sistema binário de fonte de raio-X, isto porque o espectro de energia observado estava num intervalo muito inferior ao esperado para pulsares acretores, além de nenhuma contraparte óptica ter sido observada. A derivada do período deste objeto, supostamente, deveria ser 5×10^{-13} [35]. A energia de rotação perdida não poderia ser a única fonte da intensa luminosidade observada, desta forma este objeto não poderia ser interpretado como um sistema binário e deveria haver algum mecanismo adicional que fosse capaz de prover uma luminosidade na ordem daquela que foi observada. Posteriormente outras fontes de anomalous X-ray foram detectadas (1E1048.1-5937, 4U 0142+61, 1RXS J170849.0-400910, 1E 1841-045 e XTE J1810-197). As características mais importantes destes objetos são o curto intervalo do período de 5-9 s, a quase constante luminosidade da fonte de raio-X ($\approx 10^{35} - 10^{36}$ ergs/s), espectros de raios-X relativamente suave e spin down constante. Thompson e Duncan ([36], [38]) associaram a propriedade anômala dos AXPs ao mecanismo que sustenta a sua emissão de raio-X. Estes autores identificaram a fonte 1E 2259+586, e depois toda a população dos AXP como um magnetar isolado que é sustentado pelo decréscimo da intensidade do campo magnético da ordem de 10^{15} G. O principal modelo que explica os AXPs afirma que estes objetos são estrelas de nêutrons que possuem ao seu redor discos fósseis que foram adquiridos durante o colapso da supernova ou durante um envelope-comum de interação ([39], [40], [41]). Um ponto fundamental observado foi que a perda da energia de rotação do sistema formado por uma anã branca massiva isolada e que possui um campo magnético, é muito maior do que quando comparado a um sistema

formado por uma estrela de nêutrons com o mesmo período de rotação, este fato poderia fornecer a saída para a explicação dos raios-X observados ([42]). No entanto, a jovialidade aparente dos AXPs, e o fato de que estes estão localizados numa supernova remanescente (SNR), faz com que a sua interpretação se mantenha um enigma.

Neste ambiente astrofísico formado por objetos massivos e com intenso campo magnético, o uso da teoria da relatividade geral torna-se essencial para a descrição de sua estrutura. Na literatura existem algumas soluções das equações de Einstein-Maxwell que são capazes de descrever o espaço-tempo externo a um objeto massivo e com campo magnético gerado por um dipolo magnético na sua origem ([43],[44]). Entretanto devido a dificuldade de se encontrar soluções analíticas para o conjunto de equações de Einstein-Maxwell acopladas que sejam escritas em funções de parâmetros físicos (massa, momento de dipolo magnético e etc.), essas soluções não se tornam a melhor via para a descrição de um objeto compacto com campo magnético. Em 1968 os autores Martin e Pritchett tentando entender como seria o espaço-tempo exterior a um elétron, que é um objeto pontual carregado e com um momento de dipolo com massa, encontraram uma solução em termos da expansão em série de potência da constante gravitacional em função da massa m , da carga desse objeto e e do momento de dipolo μ [45]. Com base nesta solução de Martin e Pritchett, Bonnor em 1991 publicou um artigo [46] que descrevia a solução de um dipolo magnético massivo, carregado e estático; neste artigo Bonnor estava preocupado em analisar o efeito de Lease-Thirring (ou arraste de referenciais inerciais) comuns a objetos em rotação, porém este mesmo efeito estava presente não devido ao objeto estar em rotação, mas sim devido ao fato do vetor de Poynting ser não-nulo no plano equatorial do objeto.

Neste trabalho iremos apresentar e discutir as equações das geodésicas que descrevem o movimento das partículas ao redor de um objeto compacto com um campo magnético dipolar em duas abordagens distintas, a primeira uma abordagem analítica construída a partir da solução descrita por Bonnor, porém retirando a descrição do campo elétrico no objeto compacto; e a segunda uma abordagem numérica desenvolvida a partir do código *LORENE*, conhecido na literatura ([47],[48]), que faz uso da técnica numérica pseudo-espectral. Esta dissertação está organizada em 4 capítulos, no primeiro iniciaremos apresentando as fundamentações teóricas da relatividade geral, que é a teoria que governa as partículas teste no âmbito astrofísico utilizado neste trabalho, destacando as equações de campo de Einstein e as equações das geodésicas. No capítulo 3, começaremos definindo as equações de Maxwell que, juntamente com as equações de Einstein definem por completo a

estrutura do espaço-tempo ao redor de um objeto massivo com campo eletromagnético, posteriormente apresentaremos as soluções analíticas das equações de Einstein-Maxwell discutidas na literatura e tratadas nesta dissertação. No capítulo seguinte vamos determinar as equações das geodésicas para a solução analítica de Bonnor e para a solução numérica encontrada através do código LORENE. Já no capítulo 5 iremos apresentar e discutir de forma sucinta o método espectral e o formalismo 3+1 que foram utilizados para o desenvolvimento da solução em toda a extensão do espaço-tempo das equações de Einstein-Maxwell.

2 Equações de campo de Einstein: aspectos básicos da teoria da relatividade geral

Neste capítulo será discutida a teoria da relatividade geral. Inicialmente, discutiremos os princípios físicos e filosóficos em que Einstein se baseou para a construção desta teoria. Em seguida, apresentaremos as equações de campo de Einstein, destacando a relação entre a geometria do espaço-tempo e a fonte de curvatura que provoca tal geometria; além disso enfatizaremos de que maneira as simetrias estão presentes nesta teoria, discutindo as equações de conservação na mesma.

2.1 O princípio da equivalência e a construção da teoria da relatividade geral

A teoria da relatividade geral foi publicada em 1915 ([49], [50], [51], [52], [53], [54]) e seu sucesso até os dias atuais é derivado, principalmente, da sua coerência filosófica interna. A estrutura filosófica contida nas equações de campo da relatividade geral foi construída na tentativa de compatibilizar os conceitos da então recente teoria da relatividade restrita com a gravitação newtoniana, além de refletir o conceito de inércia. O conceito de inércia¹ foi definido por Newton em seu livro *Philosophiae naturalis principia mathematica* [58], Newton definiu inércia como sendo a capacidade do corpo permanecer no seu estado de repouso, ou de movimento retilíneo uniforme, e foi além dizendo que a forma de medir a inércia de um corpo é medindo a sua massa inercial. Nessa filosofia de Newton, inércia estaria associado a matéria, ou seja, um corpo mais massivo tenderia a ter mais inércia do que um menos massivo, nos remetendo a teoria antecessora do impetus². A lei da gravitação universal de

¹Nos trabalhos sobre história da ciência é muito discutido sobre quem foi o primeiro a discutir sobre o conceito de inércia ([55],[56]), o nome mais sugestivo é o de Galileu Galilei quando em sua obra "Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo" [57] ele conclui que ao liberar um corpo em um plano ilimitado e que fosse polido o suficiente para que pudéssemos desprezar qualquer tipo de atrito, este corpo tenderia a manter o seu movimento uniforme o quanto o seu material durasse.

²A teoria do impetus ([56],[59]) foi desenvolvida, principalmente por Jean Buridan no século XIV na tentativa de explicar o movimento dos projéteis, a base desta teoria era (a) quanto maior é a velocidade com a qual

Newton diz que uma partícula teste com massa gravitacional m_G numa posição qualquer fica sujeita a uma força gravitacional \vec{F} dada por

$$\vec{F} = m_G \vec{g} = -m_G \vec{\nabla} \Phi, \quad (2.1)$$

onde \vec{g} é o campo gravitacional que é derivado do potencial gravitacional Φ determinado naquela posição. O potencial gravitacional Φ é determinado a partir da equação de Poisson

$$\vec{\nabla}^2 \Phi = 4\pi\kappa\rho, \quad (2.2)$$

onde ρ é a densidade volumétrica de matéria gravitacional e κ é a constante gravitacional. A equação de Poisson é a equação de campo da gravitação de Newton.

A equação de campo de Newton (equação (2.2)) é válida para as transformações de Galileu e claramente não satisfaz os princípios da relatividade restrita, já que não temos nenhuma dependência explícita do tempo t nessas equações, o que faz com que o potencial Φ tenha uma resposta instantânea de algum distúrbio da densidade de matéria ρ ; o que viola um dos princípios da relatividade restrita que diz que a velocidade da luz é a velocidade limite. Aplicando a segunda lei de Newton para a partícula teste, podemos igualar a equação (2.1) a

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\frac{m_G}{m_i} \vec{\nabla} \Phi, \quad (2.3)$$

onde m_i é a massa inercial da partícula teste. Em 1687 Newton utilizou um pêndulo para medir a razão $\frac{m_G}{m_i}$ e encontrou um valor igual a um com precisão na ordem de 10^{-3} . Atualmente diversos experimentos já foram desenvolvidos para se medir a razão $\frac{m_G}{m_i}$ e o valor mais sensível foi de 10^{-13} encontrado em 2012 por dois grupos distintos a partir de dois esquemas experimentais diferentes: um grupo fez uso de uma balança de torção [60] e o outro fez uso de laser e placas refletoras na superfície da Terra ([61], [62]) e confirmou que a Terra e a Lua aceleram em direção ao Sol com a mesma taxa com essa precisão de 10^{-13} . Existem vários grupos experimentais que estão em busca de um valor ainda mais sensível ([63], [64]), um exemplo disso é a missão *MICROSCOPE* [65] desenvolvida pela CNES (Centre National d'études spatiales) com início em 2016 e duração de 2 anos e espera-se encontrar um valor com precisão de 10^{-15} . Essa medidas levam a acreditarmos que a trajetória da partícula sob ação de um campo gravitacional é independente da natureza da partícula teste, ou seja, a

o motor move o corpo maior será o impetus imprimido ao corpo em movimento; (b) quanto maior é a matéria do corpo movido mais intenso será o impetus recebido por ele; e (c) o impetus é qualquer coisa cuja natureza é permanente (res naturae permanentis) e não é corrompido pela resistência que lhe oferece o meio.

aceleração na queda livre é a mesma para todos os corpos. Escolhendo o sistema de unidades ideal, podemos encontrar que essa razão é igual a um, o que significa que a massa gravitacional é igual a massa inercial ($m_G = m_i$). Este é o princípio da equivalência na mecânica Newtoniana.

O princípio da equivalência não ficou tão óbvio para Einstein, que fez uso do experimento mental do elevador na tentativa de entender este princípio. Este experimento consiste de um observador em queda livre em um elevador (após o cabo do elevador ser cortado - situação (d) da figura (2.1)), ao soltar um objeto a partir do repouso em relação ao elevador o observador verificará que ambos vão estar flutuando no elevador. Isto resulta do fato da aceleração de qualquer partícula ser zero em relação ao elevador, tanto o observador quanto o elevador estão sob ação do campo gravitacional da Terra (ambos são acelerados com a mesma intensidade). Este resultado é equivalente ao caso de um observador dentro de um foguete em repouso na ausência da ação de um campo gravitacional (situação (c) da figura (2.1)). Outro sistemas que são equivalentes é o caso de um observador em repouso dentro de um elevador que está subindo ou descendo, e o caso de um observador em repouso dentro de um foguete que está acelerando com módulo igual a g e que não está sobre a ação de qualquer campo gravitacional externo. A partir desse experimento mental, o princípio da equivalência definido anteriormente (princípio da equivalência forte) é estendido a fim de incluir estes resultados (princípio da equivalência fraco) na seguinte maneira:

Princípio da equivalência: a) Fraco : equivalência entre um observador em queda livre em um campo gravitacional e um observador em um movimento uniforme em um espaço na ausência de campos gravitacionais. b) Forte : o movimento de uma partícula teste em um campo gravitacional independe de sua massa e composição.

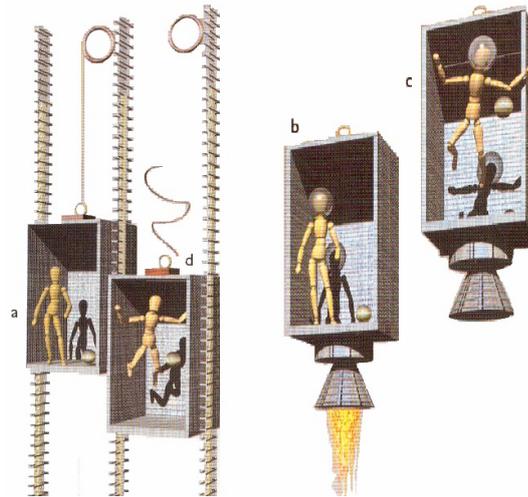


Figura 2.1: Experimento do elevador que exemplifica o princípio da equivalência: (a) observador dentro de um elevador que está subindo; (b) observador a bordo de um foguete acelerado, com módulo igual a g ; (c) observador a bordo de um foguete em repouso e sem a ação de qualquer campo gravitacional; (d) observador e elevador em queda livre no campo gravitacional \vec{g} . Fonte: <http://www.astro.iag.usp.br/~ronaldo/intrcosm/Glossario/PrincEquiv.html>

A partir da necessidade de incluir a validade do princípio da equivalência forte e fraco nas equações que descrevem o campo gravitacional, Einstein propõem que a interação gravitacional não seja tratada como uma força, ou seja, como uma ação a distância, e sim como uma manifestação da curvatura do espaço-tempo, seja essa induzida pela presença de matéria. Seguindo a mesma linha de raciocínio já imposta na teoria da relatividade restrita, a teoria da relatividade geral deveria ser capaz de expressar a não existência de um sistema de coordenadas preferencial para um observador. Desta forma esta nova teoria deveria incluir a validade do princípio da covariância, que garante a independência do sistema de coordenadas para a descrição das leis da natureza. Com base nesses dois princípios, a teoria da relatividade geral foi construída.

2.2 Equações de campo de Einstein

No âmbito da teoria da relatividade geral, o conceito de matéria está relacionado a qualquer fonte de curvatura do espaço-tempo, ou seja, energia e massa. A definição da geometria do espaço-tempo fica caracterizado pelo tensor de Einstein ($G_{\mu\nu}$),

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2}R, \quad (2.4)$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, R é o escalar de Ricci (ou escalar de curvatura) e $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico (ou métrica).

O tensor de Ricci é definido a partir da contração do tensor de Riemann-Christoffel ($R^{\alpha}_{\mu\nu\beta}$) da seguinte maneira

$$R_{\mu\nu} = R^{\alpha}_{\mu\alpha\nu} = g^{\alpha\beta}R_{\beta\mu\alpha\nu} = \partial_{\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} - \partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha} + \Gamma^{\beta}_{\mu\nu}\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha} - \Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}, \quad (2.5)$$

onde

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\alpha} = \frac{1}{2}g^{\mu\beta}(\partial_{\nu}g_{\beta\alpha} + \partial_{\alpha}g_{\beta\nu} - \partial_{\beta}g_{\nu\alpha}) \quad (2.6)$$

representa o símbolo de Christoffel.

Já o escalar de Ricci é definido a partir da contração do tensor de Ricci

$$R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \quad (2.7)$$

As equações de campo de Einstein deixam evidente a associação entre geometria do espaço-tempo e fonte de curvatura, estas são definidas em unidades geométricas ($\kappa = c = 1$) como:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein que define a geometria do espaço-tempo (equação (2.4)) e $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momento que define as fontes de curvaturas presentes no sistema que queremos descrever. Assim para resolver as equações de Einstein, precisamos definir tanto o tensor de Einstein (como o espaço-tempo está sendo curvado), quanto a fonte de curvatura (qual é a fonte que leva ao espaço-tempo se curvar daquela forma - determinado pelo tensor de Einstein).

As fontes de curvatura representam qualquer tipo de fonte (energia/massa) que seja capaz de curvar o espaço-tempo, por exemplo: densidade de energia, pressão, campo magnético, campo elétrico e etc. Já que a teoria da relatividade geral foi construída de tal modo a conservar a energia e o momento localmente, obviamente essas fontes de curvatura satisfazem equações de conservação. Diferentemente da mecânica clássica, na relatividade geral essas equações de conservação precisam levar em conta a geometria do espaço-tempo,

já que as fontes curvam o espaço-tempo onde estão definidas. Tendo isso em mente, as equações que descrevem a conservação das fontes de curvatura são dadas por:

$$\nabla_{\mu} T^{\mu\nu} = 0, \quad (2.9)$$

onde ∇_{μ} é a derivada covariante, que é definida para um tensor misto geral da seguinte maneira $\nabla_{\mu} X^{\nu\dots} = \partial_{\mu} X^{\nu\dots} + \Gamma_{\alpha\mu}^{\nu} X^{\alpha\dots} + \dots - \Gamma_{\beta\mu}^{\alpha} X^{\nu\dots}_{\alpha}$ e é nesta derivada que contém a informação da geometria do espaço-tempo.

Definimos acima como as equações de conservação ficam descritas em espaços-tempos curvos, agora vamos descrever as equações que definem a trajetória de uma partícula teste em um espaço-tempo curvo. Em relatividade geral o conceito de trajetória está estritamente associado ao conceito de geodésicas, que é definida como sendo a curva o qual o vetor tangente a esta curva é propagado paralelamente ao longo dela própria. As equações satisfeitas por uma geodésica parametrizada por um parâmetro afim (parâmetros que garantem que os comprimentos dos vetores ao longo da geodésica parametrizadas por eles se mantenham sempre constante) λ são dadas por

$$\frac{d^2 x^{\mu}}{d\lambda^2} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\mu} \frac{dx^{\alpha}}{d\lambda} \frac{dx^{\beta}}{d\lambda} = 0. \quad (2.10)$$

Partículas que estão em queda livre percorrem geodésicas do *tipo-tempo*, que são geodésicas que estão parametrizadas pelo tempo próprio τ e todo vetor tangente a esta geodésica é do tipo-tempo ($x^{\mu}x_{\mu} > 0$ - quando adotamos a assinatura da métrica como sendo -2); já as geodésicas do *tipo-nulas* representam caminhos das partículas com massa nula, já que os vetores tangentes a estas geodésicas são do tipo-nulos ($x^{\mu}x_{\mu} = 0$).

No âmbito astrofísico as equações de Einstein se tornam fundamentais para a descrição de espaços-tempos internos e externos a objetos compactos, tais como: estrelas de nêutrons, anãs brancas e buracos negros. Para a descrição de objetos astrofísicos menos densos, o uso da teoria da relatividade geral na descrição da estrutura desses objetos se torna irrelevante, já que estes não são massivos o suficiente para que efeitos de curvatura do espaço-tempo se tornem visíveis; nestes casos o uso da teoria da gravitação universal de Newton se torna mais adequada e é suficiente para a descrição de sua estrutura. Na descrição da estrutura de objetos com rotação e/ou campo magnético intenso, é necessário tratar esta descrição com o formalismo da reatividade geral, já que nestes sistemas vamos ter efeitos de curvatura do espaço-tempo o que leva a descrição de efeitos relativísticos como por exemplo o efeito de arraste de referenciais inerciais [66].

Ao utilizar as equações de campo de Einstein para descrever as equações de estruturas dos objetos compactos, precisamos inserir condições nas funções métricas para que as simetrias que esses objetos possuem estejam presentes. Simetria é um conceito muito utilizado em Física, desde a definição do teorema de Noether ("A toda transformação infinitesimal no tempo t e nas coordenadas $q_i(t)$ sob a qual a variação da ação S , sem o uso das equações de movimento, é nula ou no máximo uma integral de uma derivada total, corresponderá uma carga conservada.") na dinâmica Lagrangeana que os físicos correlacionam simetrias a quantidades conservadas no sistema. Em relatividade geral, este teorema também está presente e a equação que define a isometria da métrica ($g'_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu}(x) \forall x$) é dada pela *equação de Killing*:

$$\nabla_{\mu} X_{\nu} - \nabla_{\nu} X_{\mu} = 0, \quad (2.11)$$

onde X_{μ} é o vetor de Killing da métrica $g_{\mu\nu}$. O vetor de Killing é o gerador infinitesimal de isometria no espaço-tempo, e a propriedade mais poderosa do vetor de Killing é dada pela proposição abaixo:

Proposição 2.2.1. *Seja X^{μ} ser o vetor de Killing e seja γ a geodésica com vetor tangente u^{μ} . Então $X_{\mu}u^{\mu}$ é constante ao longo de γ .*

A proposição acima pode ser interpretada dizendo que cada família de curvas de um parâmetro de simetria fornece uma quantidade conservada para partículas. Vamos ver explicitamente no capítulo 4 desta dissertação que quando as funções métricas são independentes do tempo (caso estacionário) e da coordenada do ângulo axial ϕ , as equações das geodésicas (2.10) levam a conservação da energia e do momento angular respectivamente. Estas quantidades conservadas nos permitem determinar o *redshift* (desvio para o vermelho) gravitacional em espaços-tempos estacionários e são extremamente úteis para a integração das equações da geodésica (como exemplificação ver capítulo 4 desta dissertação).

3 Campo gravitacional de um objeto compacto com um campo magnético dipolar

A intensidade do campo eletromagnético, na superfície de um pulsar, pode variar de 10^8 – 10^{15} G dependendo da idade do pulsar e de sua composição. Um campo magnético tão intenso não pode ser descrito apenas pela teoria microscópica, pois certamente este campo vai modificar o espaço-tempo ao seu redor. Desta maneira torna-se necessário realizar a descrição macroscópica deste campo, para isto o uso da relatividade geral torna-se indispensável. Iniciaremos este capítulo definindo as equações de Maxwell em um espaço-tempo curvo e posteriormente vamos apresentar e discutir as soluções das equações de Einstein-Maxwell já existentes na literatura que descrevem o espaço-tempo exterior a um objeto massivo com campo magnético formado por um dipolo magnético, tais soluções investigam a necessidade de descrever o campo magnético macroscopicamente.

3.1 As equações de Maxwell em um espaço-tempo curvo

A teoria eletromagnética desenvolvida por Maxwell não foi construída com o princípio de ser definida em um espaço-tempo curvo, isso por que a teoria eletromagnética foi desenvolvida no final do século XIX, anterior a publicação da relatividade geral. A principal questão debatida no século XIX era o comportamento ondulatório da luz, esse debate se iniciou após a publicação dos trabalhos de Young e Fresnel a respeito dos fenômenos de interferência e difração; neste século ainda acreditava-se na ideia do espaço absoluto de Newton e que este era preenchido por uma substância imaterial denominada *éter luminífero* que era responsável por realizar o transporte das ondas luminosas nesse espaço absoluto euclidiano, plano e infinito, a ideia de um espaço-tempo curvo era impensável naquele momento. Após a publicação da teoria da relatividade geral, a teoria de Maxwell ficou propícia a sofrer modificação de forma a considerar a inclusão da descrição de um espaço-tempo curvo. Essa modificação está relacionada ao fato das quantidades eletromagnéticas terem que ser definidas como tensores no espaço-tempo quadridimensional, que é o espaço-tempo definido pela teoria da relatividade geral. Desta forma, os campos elétrico e magnético são definidos

juntamente em um único tensor chamado de *tensor do campo eletromagnético*:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (3.1)$$

onde A_μ é o quadri-potencial. O tensor do campo eletromagnético é um tensor antissimétrico, assim ele satisfaz a propriedade $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$. Igualmente ao que ocorre na relatividade restrita, podemos definir as componentes deste tensor como função das componentes dos campos elétrico e magnético da seguinte maneira:

$$\begin{cases} F_{0j} = E_j, \\ F_{jk} = -\epsilon_{jki} B_i, \end{cases} \rightarrow F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

onde foi utilizado o fato de que $i, j, k = 1, 2, 3$, estamos adotando a assinatura da métrica igual a -2 e ϵ representa o símbolo de Levi-Civita.

As equações da eletrodinâmica na presença da gravidade são definidas através das seguintes equações

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\mu, \quad (3.3)$$

$$\nabla_\gamma F_{\mu\nu} + \nabla_\mu F_{\nu\gamma} + \nabla_\nu F_{\gamma\mu} = 0, \quad (3.4)$$

$$ma^\mu = F^{\mu\nu} q u_\nu, \quad (3.5)$$

onde $J^\mu = (\rho, J^1, J^2, J^3)$ é a 4-densidade de corrente, ρ é a densidade de carga, $J^i = (J^1, J^2, J^3)$ é a 3-densidade de corrente relativística, m é a massa da partícula, q é a carga, u_μ é quadri-velocidade e a^μ é a quadri-aceleração. As duas primeiras equações (3.3-3.4) são as equações de Maxwell e a equação (3.5) representa a força de Lorentz, todas definidas em um espaço-tempo riemanniano. A equação (3.3) é a unificação da equação da eletrodinâmica ($\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = -4\pi \vec{J}$), e eletrostática ($\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi \rho$), ambas definidas no espaço euclidiano, em uma única lei geométrica. Já a equação (3.4) é a unificação das equações que definem o campo magnético no espaço euclidiano: a equação da magnetostática ($\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$) e a da magnetodinâmica ($\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$).

O tensor energia-momento que define a fonte eletromagnética capaz de curvar o espaço-tempo é dado por

$$T_{\mu\nu}^{EM} = \frac{1}{4\pi} \left(F_{\mu\alpha} F_\nu^\alpha - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right), \quad (3.6)$$

este tensor é chamado de *tensor eletromagnético* e é claro que este satisfaz a equação de conservação (equação (2.9)).

Assim a fonte eletromagnética em um espaço-tempo curvo fica definida a partir das equações de Maxwell (3.3-3.4), entretanto precisamos definir as equações de Einstein utilizando a definição dessa fonte para assim conseguir definir como essa fonte eletromagnética curva o espaço-tempo ao seu redor. Então precisamos resolver as equações de Maxwell juntamente com as equações de Einstein utilizando o tensor eletromagnético definido acima, assim as equações que definem a fonte eletromagnética em um espaço-tempo curvo e a estrutura do espaço-tempo gerado por essa fonte é o seguinte conjunto de equações

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}^{EM}, \quad (3.7)$$

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\mu, \quad (3.8)$$

$$\nabla_\gamma F_{\mu\nu} + \nabla_\mu F_{\nu\gamma} + \nabla_\nu F_{\gamma\mu} = 0, \quad (3.9)$$

que são chamados de *equações de Einstein-Maxwell*.

3.2 Solução aproximada até a 2º ordem da constante gravitacional (κ^2)

Em 1960 Bonnor publicou um trabalho [67] com o objetivo de avaliar o quanto a energia eletromagnética contribuía, principalmente a contribuição devida a fonte magnética já que trabalhos anteriores a este já haviam estudado a contribuição do campo eletrostático, para a massa gravitacional total de uma esfera massiva e com campo eletromagnético. Para investigar essa problemática Bonnor teve que, primeiramente, descrever o espaço-tempo exterior a um objeto massivo, esfericamente simétrico, carregado e com um campo magnético; e diante dessa necessidade o autor encontrou uma solução aproximada que descreve o campo magnético, de caráter dipolar, produzido por um loop de corrente. Em 1966 o mesmo autor publica outro artigo [43] a respeito da descrição macroscópica do campo magnético gerado por um dipolo magnético, neste ele encontrou uma solução analítica das equações de campo de Einstein que descreve o espaço-tempo exterior de um dipolo magnético de massa M localizado na origem do sistema de coordenadas. A solução encontrada por ele é dada por:

$$ds^2 = \frac{Y^2 P^2}{Q^3 Z} (dr^2 + Z d\theta^2) - Z \left(\frac{Y}{P}\right)^2 \sin^2 \theta d\phi^2 + \left(\frac{P}{Y}\right)^2 dt^2, \quad (3.10)$$

onde $Q = (r - m)^2 - (b^2 + m^2) \cos^2 \theta$, $Y = r^2 - b^2 \cos^2 \theta$, $P = Y - 2mr$ e $Z = r^2 - 2mr - b^2$. O parâmetro m está relacionado a massa do objeto massivo ($M = 2m$) descrito pela solução acima, já o parâmetro b está relacionado ao momento de dipolo magnético ($\mu = 2mb$).

O único problema encontrado nesta solução é que esta não recai na solução de Schwarzschild quando $b = 0$, desta maneira a solução de Bonnor não descreve a solução de uma fonte pontual de massa m e sim um campo de monopolo de massa $2m$ junto com multipolo de massa maior o qual depende do parâmetro m . Com esse problema, a solução de Bonnor não descrevia o sistema físico esperado. Na tentativa de suprir esta problemática, somente em 1987 foi proposto uma nova solução para a descrição de um dipolo magnético de massa m [44] e com momento de dipolo magnético μ . Para isto, os autores Gutsunaev e Manko partiram de uma solução estática, estacionária e com simetria azimutal:

$$ds^2 = -f(\rho, z) dt^2 + \frac{1}{f(\rho, z)} \left[e^{2\gamma(\rho, z)} (d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2 \right], \quad (3.11)$$

esta solução está escrita em coordenadas de Weyl cilíndrica $x^\mu = (t, \rho, z, \phi)$. Neste sistema de coordenadas, para descrever o campo magnético dipolar que é gerado por um dipolo centrado na origem, supõe que o quadri-potencial só possua a componente angular A_ϕ , ou seja, $A_\mu = [0, 0, 0, A_\phi(\rho, z)]$. Assim as equações de Einstein-Maxwell, que descreve esta fonte de curvatura que gera a geometria dada pelo elemento de linha (equação (3.11)), são dadas por:

$$\nabla (f^{-1} \nabla f - 2\rho^{-2} f A_\phi \nabla A_\phi) = 0, \quad (3.12)$$

$$\nabla (\rho^{-2} f \nabla A_\phi) = 0, \quad (3.13)$$

$$4 \gamma_{,\rho} = \rho f^{-2} (f_{,\rho}^2 - f_{,\rho}^2) + 4\rho^{-1} f (A_{\phi,\rho}^2 - A_{\phi,z}^2), \quad (3.14)$$

$$2 \gamma_{,z} = \rho f^{-2} f_{,\rho} f_{,z} + 4\rho^{-1} f A_{\phi,\rho} A_{\phi,z}, \quad (3.15)$$

onde $\nabla = \rho_0 \partial_\rho + z_0 \partial_z$ (ρ_0 e z_0 são vetores unitários) e a vírgula denota uma diferenciação

parcial. A solução para f , γ e A_ϕ para o conjunto de equações acima é ¹

$$f = \left(1 - \frac{2m(1+\alpha^2)}{(1-3\alpha^2)r - 4m\alpha^2}\right) \frac{M^2}{N^2}, \quad (3.16)$$

$$A_\phi = 4m^2\alpha^3(1-3\alpha^2)^{-1}PM^{-1}\sin^2\theta, \quad (3.17)$$

$$\exp(2\gamma) = \frac{\left[(1-3\alpha^2)^2(r-m)^2 - m^2(1+\alpha^2)^2\right]M^4}{\left[(1-3\alpha^2)^2(r-m)^2 - m^2(1+\alpha^2)^2\cos^2\theta\right]^9}, \quad (3.18)$$

$$M = \left[(1-3\alpha^2)^2(r-m)^2 - m^2(1+\alpha^2)(\alpha^2 + \cos^2\theta)\right]^2 + 4m^2\alpha^2(1-3\alpha^2)^2 \\ \times (r-m)^2\sin^2\theta, \quad (3.19)$$

$$N = \left\{\left[(1-3\alpha^2)(r-m) - m\alpha^2\right]^2 + m^2\left[\alpha^2 - (1+\alpha^2)\cos^2\theta\right]^2 - 4m^2\alpha^2\left[- m^2(1+\alpha^2)^2 + (1-3\alpha^2)^2(r-m)^2\right]\cos^2\theta\right\}, \quad (3.20)$$

$$P = (1-3\alpha^2)^3(2r-m)(r-m)^2 + m^3(1+\alpha^2)^2(\alpha^2 + \cos^2\theta), \quad (3.21)$$

que é escrita em coordenadas tipo Schwarzschild ($x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$). Os parâmetros α e m que aparecem na solução são devidos a transformação de coordenadas, elas são associadas, respectivamente, ao momento do dipolo magnético ($\mu = 8m^2\alpha^3(1-3\alpha^2)^{-2}$) e a massa total do objeto. Assim a solução encontrada por Gutsunaev e Manko é escrita em coordenadas tipo Schwarzschild como:

$$ds^2 = f^{-1}\{\exp(2\gamma)\left[(r-m)^2 - m^2(1+\alpha^2)^2(1-3\alpha^2)^{-2}\cos^2\theta\right]\left\{\left[(r-m)^2 - m^2(1+\alpha^2)^2\right]^{-1} \times (1-3\alpha^2)^{-2}\right\}^{-1} dr^2 + d\theta^2\} + \left[(r-m)^2 - m^2(1+\alpha^2)^2(1-3\alpha^2)^{-2}\right]\sin^2\theta d\phi^2\} \\ - f dt^2. \quad (3.22)$$

Vale a pena atentar às seguintes informações que estão, sutilmente, contidas no elemento de linha escrito acima. A primeira coisa a ser notada é que as funções métricas dependem de r e θ , esta suposição advém do fato do campo eletromagnético quebrar a simetria esférica, a quebra de simetria esférica também está presente na descrição de uma estrela de nêutrons girando com uma velocidade angular ω . A segunda é que as funções métricas são independentes de t o que caracteriza a descrição de um objeto estacionário, já o fato desta métrica não possuir termos cruzados em dt caracteriza a estaticidade de tal métrica. A terceira é a, também, ausência dos termos cruzados em $d\phi$ o que garante a invariância por reflexão azimutal, ou seja, $\phi \rightarrow -\phi$ e também o fato das funções métricas não serem funções de ϕ reflete o fato desta solução possuir invariância sob translação ao longo

¹Para maiores detalhes sobre como essa solução foi encontrada recomenda-se a leitura do artigo original [44] e a dissertação [68].

do eixo azimutal (possui simetria azimutal). Essas simetrias estarão contidas nas próximas soluções já que todas elas descrevem o mesmo sistema físico.

Podemos notar que na ausência do dipolo magnético ($\mu = 0$) a solução de Gutsunaev e Manko (equação (3.22)) recai na solução de Schwarzschild como já era esperado, corrigindo assim o problema encontrado na solução de Bonnor de 1966 [43]. Entretanto apesar dessa correção a solução de Gutsunaev e Manko não é escrita em função do parâmetro que representa o dipolo magnético (parâmetro μ), o que dificulta a interpretação do papel do campo magnético nessa solução, fazendo com que esta não seja muito empregada pela comunidade científica. Uma solução anterior a esta foi apresentada em 1967 pelos autores Martin e Pritchett, nesta a solução é aproximada até a 2º ordem e é escrita em função dos parâmetros fundamentais para a descrição de um objeto massivo carregado e com um dipolo magnético localizado na origem do sistema de coordenadas: massa, momento de dipolo magnético e carga elétrica.

A solução da equação de Einstein que descreve o exterior de um objeto pontual carregado é chamada de *solução de Reissner-Nordstrom* ([69], [70]). Na tentativa de descrever o espaço-tempo exterior ao elétron, ou seja, um objeto massivo pontual carregado e com um dipolo magnético, Martin e Pritchett publicaram um artigo [45] com a intenção de tentar descrever o espaço-tempo de um elétron e investigar os efeitos relativísticos nos níveis de energia do átomo de hidrogênio ou em um pósitron. A motivação para este estudo surgiu já que até aquele ano não tinham sido investigados a inclusão do spin do elétron e do momento de dipolo magnético na descrição do espaço-tempo.

Os autores partiram de uma solução geral que descreve um espaço-tempo com simetria azimutal, estático e estacionário. Em coordenadas cilíndricas ($x^\mu = (ct, r, z, \theta)$), esta solução é escrita na seguinte forma:

$$ds^2 = e^\rho c^2 dt^2 - e^\lambda dr^2 - e^\lambda dz^2 - r^2 e^{-\nu} d\theta^2 + 2\omega cd\theta dt, \quad (3.23)$$

onde ρ , λ , ν e ω são funções de r e θ . Além disto a justificativa para que a métrica que descreve esta solução apresente elementos fora da diagonal é que os autores estão considerando que ao somar o momento de dipolo magnético a uma carga pontual o vetor de Poynting é não nulo, o que resulta na aparição desses elementos fora da diagonal. Fazendo

$s = r^2 e^{\rho-\nu} + \omega^2$, as componentes contravariantes da métrica são:

$$g^{\mu\nu} = s^{-1} \begin{pmatrix} r^2 e^{-\nu} & 0 & 0 & \omega \\ 0 & -s e^{-\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s e^{-\lambda} & 0 \\ \omega & 0 & 0 & -e^\rho \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Para descrever a parte eletromagnética do problema, precisamos definir o quadri-potencial eletromagnético A^μ . O quadri-potencial para esta solução é composto por um potencial elétrico escalar ($A^0 = \Phi$) e o potencial referente a fonte do dipolo magnético ($A^3 = -\psi$) que também são funções de r e z . Esses potenciais respeitam a condição de fronteira de que no infinito, ou seja, no espaço-tempo plano esses potenciais recaiam em $\Phi = q(r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ e $\psi = \mu r^2 (r^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$. Tendo definido os potenciais eletromagnéticos, o tensor eletromagnético $F_{\mu\nu}$ é facilmente determinado:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \Phi_{,r} & -\Phi_{,z} & 0 \\ \Phi_{,r} & 0 & 0 & -\psi_{,r} \\ \Phi_{,z} & 0 & 0 & -\psi_{,z} \\ 0 & \psi_{,r} & \psi_{,z} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

onde, novamente, o subíndice , denota derivada ordinária em respeito a variável escrita logo em seguida.

Este tensor eletromagnético deve satisfazer as equações de Maxwell (3.3-3.4), já citadas na seção anterior deste capítulo, assim as equações de Maxwell referentes a este tensor eletromagnético são:

$$\square^2 \Phi + \frac{2}{r} \Phi_{,r} - (\nu, \Phi) - (s, \Phi) / 2s = \frac{e^\nu}{r^2} [\omega \square^2 \psi + (\omega, \psi) - \omega (s, \psi) / 2s], \quad (3.26)$$

$$\square^2 \psi + (\rho, \psi) - (s, \psi) / 2s = -e^{-\rho} [\omega \square^2 \Phi + (\omega, \Phi) - \omega (s, \Phi) / 2s], \quad (3.27)$$

onde foi utilizado o fato de que a quadri-corrente J^μ é nula já que estamos descrevendo o espaço-tempo externo a fonte que está localizado na origem ($r = z = 0$) e também foi definido os seguintes operadores

$$\square^2 a = a_{,rr} + a_{,zz} = \frac{\partial^2 a}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial z^2}, \quad (3.28)$$

$$(a, b) = a_{,r} b_{,r} + a_{,z} b_{,z}, \quad (3.29)$$

$$[a, b] = a_{,r} b_{,r} - a_{,z} b_{,z}, \quad (3.30)$$

$$\{a, b\} = a_{,r} b_{,z} + a_{,z} b_{,r}. \quad (3.31)$$

Tendo já escrito as equações de Maxwell, que descrevem a parte eletromagnética do problema, o próximo passo é escrever as equações de Einstein e para isto precisamos escrever o termo de fonte de curvatura (tensor energia-momento). Como neste sistema os autores só estão preocupados em escrever a solução externa a fonte, o tensor energia-momento só será composto pelo tensor energia-momento eletromagnético (equação (3.6)), cuja as componentes covariantes são

$$T_{00} = \frac{e^{\rho-\lambda}}{8\pi s} [2s(\Phi, \Phi) e^{-\rho} - r^2(\Phi, \Phi) e^{-\nu} + 2\omega(\Phi, \psi) + (\psi, \psi) e^{\rho}], \quad (3.32)$$

$$T_{11} = -T_{22} = -\frac{1}{8\pi s} [r^2(\Phi, \Phi) e^{-\nu} - 2\omega(\Phi, \psi) - (\psi, \psi) e^{\rho}], \quad (3.33)$$

$$T_{33} = \frac{r^2 e^{-\lambda-\nu}}{8\pi s} \left[r^2(\Phi, \Phi) e^{-\nu} - 2\omega(\Phi, \psi) + \frac{2se^{\nu}}{r^2}(\psi, \psi) - (\psi, \psi) e^{\rho} \right], \quad (3.34)$$

$$T_{12} = T_{21} = -\frac{1}{4\pi s} [r^2\Phi_{,r}\Phi_{,z} e^{-\nu} - \omega\{\Phi, \psi\} - \psi_{,r}\psi_{,z} e^{\rho}], \quad (3.35)$$

$$T_{03} = T_{30} = -\frac{e^{\lambda}}{8\pi s} [r^2\omega(\Phi, \Phi) e^{-\nu} + 2(s - \omega^2)(\Phi, \psi) - \omega(\psi, \psi) e^{\rho}], \quad (3.36)$$

onde foi verificado que o traço do tensor energia-momento eletromagnético para este sistema é nulo, ou seja, $T_{\mu}^{\mu} = 0$. As componentes covariantes do tensor de Ricci para a métrica da pela equação (3.24) são

$$R_{00} = \frac{e^{\rho-\lambda}}{2s} \left[s\Box^2\rho + \frac{1}{2}(\rho, s) + \omega^2(\rho, \rho) - 2\omega(\rho, \omega) + (\omega, \omega) \right], \quad (3.37)$$

$$R_{11} = -\frac{1}{2s} \left[s\Box^2\lambda - \frac{1}{2}[\lambda, s] + (s - \omega^2)\rho_{,r}(\nu_{,r} - 2r^{-1}) + s_{,rr} - \omega_{,r}^2 - \frac{s_{,r}^2}{2s} \right] \quad (3.38)$$

$$R_{22} = -\frac{1}{2s} \left[s\Box^2\lambda + \frac{1}{2}[\lambda, s] + (s - \rho^2)\rho_{,z}\nu_{,z} + s_{,zz} - \omega_{,z}^2 - s_{,z}^2/2s \right], \quad (3.39)$$

$$R_{33} = \frac{r^2 e^{-\lambda-\nu}}{2s} \left[s\Box^2\nu + 2sr^{-2} + \frac{1}{2}(\nu, s) - \omega^2(\nu, \nu) - 2\omega(\nu, \omega) - (\omega, \omega) - r^{-1}s_{,r} + 4\omega^2 r^{-1}(\nu_{,r} - r^{-1}) + 4\omega r^{-1}\omega_{,r} \right], \quad (3.40)$$

$$R_{12} = R_{21} = -\frac{1}{2s} \left[-\frac{1}{2}\{\lambda, s\} + \frac{1}{2}(s - \omega^2)\{\rho_{,r}\nu_{,z} + \rho_{,z}(\nu_{,r} - 2r^{-1})\} + s_{,rz} - \omega_{,r}\omega_{,z} - s_{,r}s_{,z}/2s \right] \quad (3.41)$$

$$R_{03} = R_{30} = \frac{e^{-\lambda}}{2s} \left[s\Box^2\omega + \omega(\omega, \omega) - \frac{1}{2}(\omega, s) - \omega(s - \omega^2)(\rho, \nu) + 2\omega r^{-1}(s - \omega^2)\rho_{,r} \right] \quad (3.42)$$

O fato do traço do tensor energia-momento eletromagnético ser nulo leva ao escalar de curvatura também ser nulo e assim as equações de Einstein passam a ser escritas

como $R_{\mu\nu} = (8\pi\kappa/c^4)T_{\mu\nu}$ ². Desta maneira, as equações de campo de Einstein ficam sendo

$$s\Box^2\rho + \frac{1}{2}(\rho,s) + \omega^2(\rho,\rho) - 2\omega(\rho,\omega) + (\omega,\omega) = \frac{2\kappa}{c^4} [(s + \omega^2)(\Phi,\Phi)e^{-\rho} + 2\omega(\Phi,\psi) + (\psi,\psi)e^\rho], \quad (3.43)$$

$$s\Box^2\nu + \frac{2s}{r^2} + \frac{1}{2}(\nu,s) - \omega^2(\nu,\nu) - 2\omega(\nu,\omega) - (\omega,\omega) - r^{-1}[s_{,r} - 4\omega^2(\nu,r - r^{-1}) - 4\omega\omega_{,r}] = \frac{2\kappa}{c^4} [r^2(\Phi,\Phi)e^{-\nu} - 2\omega(\Phi,\psi) + r^{-2}(s + \omega^2)(\psi,\psi)e^\nu], \quad (3.44)$$

$$s\Box^2\omega + \omega(\omega,\omega) - \frac{1}{2}(\omega,s) - \omega(s - \omega^2)(\rho,\nu) + 2r^{-1}\omega(s - \omega^2)\rho_{,r} = -\frac{2\kappa}{c^4} [\omega(\psi,\psi)e^\rho + r^2\omega(\Phi,\Phi)e^{-\nu} + 2(s - \omega^2)(\Phi,\psi)] \quad (3.45)$$

$$s\Box^2\lambda - \frac{1}{2}[\lambda,s] + (s - \omega^2)\rho_{,r}(\nu,r - 2r^{-1}) + s_{,rr} - \omega_{,r}^2 - \frac{s_{,r}^2}{2s} = \frac{2\kappa}{c^4} [r^2[\Phi,\Phi]e^{-\nu} - 2\omega[\Phi,\psi] - [\psi,\psi]e^\rho], \quad (3.46)$$

$$s\Box^2\lambda + \frac{1}{2}[\lambda,s] + (s - \omega^2)\rho_{,z}\nu_{,z} + s_{,zz} - \omega_{,z}^2 - \frac{s_{,z}^2}{2s} = -\frac{2\kappa}{c^4} [r^2[\Phi,\Phi]e^{-\nu} - 2\omega[\Phi,\psi] - [\psi,\psi]e^\rho], \quad (3.47)$$

$$\frac{1}{2}(s - \omega^2)\{\rho,\nu\} - \frac{1}{2}\{\lambda,s\} - r^{-1}(s - \omega^2)\rho_{,z} + s_{,rz} - \omega_{,r}\omega_{,z} - s_{,r}s_{,z}/2s = \frac{4\kappa}{c^4} [r^2\Phi_{,r}\Phi_{,z}e^{-\nu} - \omega\{\Phi,\psi\} - \psi_{,r}\psi_{,z}e^\rho]. \quad (3.48)$$

Então para determinar este sistema temos que resolver 5 equações diferenciais acopladas, que é derivado das equações de Einstein, e mais 2 equações diferenciais acopladas que são derivadas das equações de Maxwell. É fácil notar que as equações de campo de Einstein (3.42-3.45) mais as equações de Maxwell (3.26-3.27) levam a equações diferenciais para as funções métricas a serem determinadas ρ , ν , ω , Φ e ψ e todas essas equações são independentes da função métrica λ . Apenas as 3 últimas equações de campo de Einstein (3.46-3.48) determinam a função métrica λ em função das demais funções métricas.

Vale a pena enfatizar que esta solução proposta por Martin e Pritchett, no limite em que retiramos o momento de dipolo magnético e a carga elétrica ($\Phi = \psi = 0$), recai em

$$\rho(r,z) = -\frac{2\kappa m}{c^2(r^2 + z^2)^2}, \quad (3.49)$$

$$\lambda(r,z) = \frac{2\kappa m}{c^2\sqrt{r^2 + z^2}} - \frac{\kappa^2 m^2 r^2}{c^4(r^2 + z^2)^2}, \quad (3.50)$$

onde foi utilizado o fato de que se um dos potenciais é nulo ($\Phi = 0$ ou $\psi = 0$), então $\omega = 0$ já que o vetor de Poynting será nulo e assim as equações de campo serem satisfeitas para $\nu = \rho$

²Chamamos a atenção ao fato de que nesta subseção não vamos adotar as unidades geométricas $c = \kappa = 1$, isto é feito já que a solução do Martin e Pritchett é encontrada a partir de séries de potências da constante gravitacional (κ).

e desta forma o problema será solucionado se encontrarmos as soluções para, neste caso, apenas 2 funções métrica.

De forma a simplificar o processo de encontrar as solução das equações de Einstein-Maxwell, os autores Martin e Pritchett se perguntaram se era possível encontrar uma relação entre as funções métricas e^v e e^ρ para o caso em que ω não fosse nulo. Olhando para a forma das componentes covariantes e contravariantes da métrica, eles perceberam que essas seriam mais similares no caso em que $s = r^2$ o que levou a seguinte relação

$$v = \rho - \ln\left(1 - \frac{\omega^2}{r^2}\right). \quad (3.51)$$

Agora que todas as equações de Einstein-Maxwell já foram determinadas, o próximo passo é encontrar as soluções destas equações e assim encontrar a expressão para as 4 funções métricas e os 2 potenciais eletromagnéticos. Fisicamente estas expressões nos dirão de que forma a interação de Coulumb é expressada através dos potenciais Φ e ψ mais a interação gravitacional representada pela massa gravitacional m do objeto interage com o espaço-tempo de forma a curvá-lo. No âmbito da relatividade geral sabemos que não é apenas massa que é capaz de curvar o espaço-tempo e sim qualquer tipo de energia, já que desde do estabelecimento do princípio da equivalência da Relatividade Restrita de 1905 sabemos que massa e energia são equivalentes. O método utilizado pelos autores foi encontrar as soluções das funções métricas e dos potenciais através de séries de potencias. A escolha desse método é justificada pelo fato dos autores estarem preocupados em apenas descrever uma primeira abordagem para o problema, já que até aquele momento não havia muitos trabalhos publicados que investigasse o papel do campo elétrico adicionado com um campo magnético no âmbito da relatividade geral. Já adiantamos que esta solução em séries de potência deve ser utilizada com extrema cautela devido ao simples fato de ser uma solução aproximada, investigaremos e discutiremos nos próximos capítulos desta dissertação que pelo fato desta solução ser aproximada esta não descreve algumas propriedades do espaço-tempo com uma certa precisão até no limite assintótico.

O método de série de potências consiste em expandir as funções métricas e os potenciais em séries de potências em função da constante gravitacional κ e inserir tais expansões nas equações de Einstein-Maxwell já encontradas anteriormente. Ao se garantir as condições de contorno do problema, as soluções são encontradas. Fazendo todos esses passos, as funções métricas e os potenciais são escritos da seguinte forma em função de κ em

25 3.3. Solução de Bonnor que descreve um objeto de massa m com dipolo magnético μ e carga elétrica e até a 2º ordem:

$$\Phi(r,z) = \frac{e}{\sqrt{x}} \left[1 - \frac{\kappa m}{c^2 \sqrt{x}} + \frac{\kappa e^2}{3c^4 x} - \frac{\kappa \mu^2 (4r^2 - z^2)}{35c^4 x^3} + \frac{2\kappa^2 m^2}{3c^4 x} - \frac{2\kappa^2 m e^2}{3c^6 x^{\frac{3}{2}}} + \frac{\kappa^2 m \mu^2 (5r^2 - 3z^2)}{35c^6 x^{\frac{7}{2}}} \right. \\ \left. + \frac{2\kappa^2 e^4}{15c^8 x^2} - \frac{4\kappa^2 e^2 \mu^2 (7r^2 + z^2)}{315c^8 x^4} + \frac{2\kappa^2 \mu^4 (40r^4 - 502r^2 z^2 - 487z^4)}{15015c^8 x^6} \right] \quad (3.52)$$

$$\psi(r,z) = \frac{\mu r^2}{x^{\frac{3}{2}}} \left[1 + \frac{\kappa m}{2c^2 \sqrt{x}} + \frac{\kappa e^2}{5c^4 x} + \frac{\kappa^2 m^2}{5c^4 x} - \frac{4\kappa^2 m e^2}{15c^6 x^{\frac{3}{2}}} + \frac{11\kappa^2 e^4}{105c^8 x^2} - \frac{\kappa^2 m \mu^2 (r^2 + 11z^2)}{210c^6 x^{\frac{7}{2}}} \right. \\ \left. - \frac{\kappa^2 e^2 \mu^2 (72r^2 - 13z^2)}{1155c^8 x^4} \right], \quad (3.53)$$

$$\rho(r,z) = -\frac{2\kappa m}{c^2 \sqrt{x}} + \frac{\kappa e^2}{c^4 x} + \frac{\kappa \mu^2 z^2}{c^4 x^3} - \frac{2\kappa^2 m e^2}{3c^6 x^{\frac{3}{2}}} + \frac{\kappa^2 e^4}{6c^8 x^2} + \frac{2\kappa^2 m \mu^2 (r^2 - 9z^2)}{35c^8 x^4}, \quad (3.54)$$

$$\omega(r,z) = -\frac{\kappa e \mu r^2}{c^4 x^2} \left[1 - \frac{4\kappa m}{5c^2 \sqrt{x}} + \frac{7\kappa e^2}{15c^4 x} - \frac{\kappa \mu^2 (4r^2 - 61z^2)}{105c^4 x^3} \right], \quad (3.55)$$

$$\lambda(r,z) = \frac{2\kappa m}{c^2 \sqrt{x}} - \frac{\kappa e^2 z^2}{c^4 x^2} - \frac{\kappa \mu^2 (r^4 - 6r^2 z^2 + 2z^4)}{2c^4 x^4} - \frac{\kappa^2 m^2 r^2}{c^4 x^2} + \frac{2\kappa^2 m e^2}{3c^6 x^{\frac{3}{2}}} - \frac{\kappa^2 e^4}{6c^8 x^2} - \frac{\kappa^2 \mu^4 z^4}{6c^8 x^6} \\ - \frac{2\kappa^2 m \mu^2 (r^2 - 9z^2)}{35c^6 x^{\frac{7}{2}}} + \frac{\kappa^2 e^2 \mu^2 (4r^2 - 9z^2)}{35c^8 x^4}, \quad (3.56)$$

onde $x = r^2 + z^2$.

3.3 Solução de Bonnor que descreve um objeto de massa m com dipolo magnético μ e carga elétrica e

Com a finalidade de investigar o efeito de arraste dos referenciais inerciais (*dragging of inertial frames*), efeito comum em um objeto girantes, em objetos massivo carregado e com um campo magnético gerado por um dipolo na ausência de rotação; em 1991 Bonnor publicou um artigo [46] onde ele partiu da solução, feita por Martin e Pritchett, que descreve um objeto estático, estacionário, sem rotação, e com simetria axial e supôs que o termo responsável pelo arraste é devido ao fato do vetor de Poynting ser não-nulo. Neste artigo Bonnor faz uso da solução expandida em série de potências encontrada por Martin e Pritchett [45], porém Bonnor só utilizou os termos de primeira e segunda ordem em m , μ e e nas funções métricas ($e^\rho = e^\nu$, e^λ e ω) e termos de até primeira ordem em m , μ e e para os potenciais eletromagnéticos Φ e ψ . Considerando estas aproximações, Bonnor foi capaz de escrever a solução que descreve um objeto de massa m com dipolo magnético μ e carga elétrica e na seguinte forma:

$$ds^2 = -e^\lambda (dr^2 + dz^2) - r^{2e^{-\nu}} d\alpha^2 + e^\rho dt^2 + 2\omega d\alpha dt, \quad (3.57)$$

onde foi utilizado as seguintes aproximações

$$\begin{aligned}
 e^\lambda &= \exp \left[\left(\frac{2m}{c^2\sqrt{x}} - \frac{e^2 z^2}{c^4 x^2} - \frac{\mu^2 (r^4 - 6r^2 z^2 + 2z^4)}{2c^4 x^4} \right) \kappa + \left(-\frac{m^2 r^2}{c^4 x^2} + \frac{2me^2}{3c^6 x^{\frac{3}{2}}} - \frac{e^4}{6c^8 x^2} \right. \right. \\
 &- \left. \left. \frac{2m\mu^2 (r^2 - 9z^2)}{35c^6 x^{\frac{7}{2}}} - \frac{\mu^4 z^4}{6c^8 x^6} + \frac{e^2 \mu^2 (4r^2 - 9z^2)}{35c^8 x^4} \right) \kappa^2 + O(\kappa^3) \right] = 1 + \frac{2m}{X} - \frac{e^2 z^2}{X} \\
 &- \frac{\mu^2 (r^4 - 6r^2 z^2 + 2z^4)}{2X^8} - \frac{m^2 r^2}{X^4} + \frac{2me^2}{3X^3} - \frac{e^4}{6X^4} - \frac{2m\mu^2 (r^2 - 9z^2)}{35X^7} - \frac{\mu^4 z^4}{6X^{12}} \\
 &+ \frac{e^2 \mu^2 (4r^2 - 9z^2)}{35X^8} + \frac{1}{2} \left(\frac{4m^2}{X^2} + \frac{e^4 z^4}{X^8} + \frac{\mu^4 (r^4 - 6r^2 z^2 + 2z^4)^2}{4X^8} - \frac{4me^2 z^2}{X^5} \right. \\
 &- \left. \frac{4m\mu^2 (r^4 - 6r^2 z^2 + 2z^4)}{2X^9} + \frac{e^2 z^2 \mu^2 (r^4 - 6r^2 z^2 + 2z^4)}{X^6} \right) + O(\kappa^3) = 1 - \frac{2m}{X} \\
 &- \frac{(m^2 r^2 + e^2 z^2)}{X^4} + \frac{2m^2}{X^2} - \frac{\mu^2 (r^4 - 6r^2 z^2 + 2z^4)}{2X^8}, \tag{3.58}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e^\rho &= \exp \left[\left(-\frac{2m}{c^2 x^{\frac{1}{2}}} + \frac{e^2}{c^4 x} + \frac{\mu^2 z^2}{c^4 x^3} \right) \kappa + \left(-\frac{2me^2}{3c^6 x^{\frac{3}{2}}} + \frac{e^4}{6c^8 x^2} + \frac{2m\mu^2 (r^2 - 9z^2)}{35c^6 x^{\frac{7}{2}}} + \frac{\mu^4 z^4}{6c^8 x^8} \right. \right. \\
 &- \left. \left. \frac{e^2 \mu^2 (8r^2 - 9z^2)}{35c^8 x^4} \right) \kappa^2 + O(\kappa^3) \right] = 1 - \frac{2m}{X} + \frac{e^2}{X^2} + \frac{\mu^2 z^2}{X^6} - \frac{2me^2}{3X^3} + \frac{e^4}{6X^4} + \frac{\mu^4 z^4}{6X^{16}} \\
 &+ \frac{2m\mu^2 (r^2 - 9z^2)}{35X^7} - \frac{e^2 \mu^2 (8r^2 - 9z^2)}{35X^8} + \frac{2m^2}{X^2} + \frac{e^4}{2X^4} + \frac{\mu^4 z^4}{2X^{12}} - \frac{2me^2}{X^3} - \frac{m\mu^2 z^2}{X^7} \\
 &+ \frac{e^2 \mu^2 z^2}{X^8} + O(\kappa^3) = 1 - \frac{2m}{X} + \frac{(2m^2 + e^2)}{X^2} + \frac{\mu^2 z^2}{X^6}, \tag{3.59}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e^{-\nu} &= \exp \left[-\rho - \frac{\kappa^2 e^2 \mu^2 r^2}{c^8 x^4} \right] = \exp \left[\left(\frac{2m}{c^2\sqrt{x}} - \frac{e^2}{c^4 x} - \frac{\mu^2 z^2}{c^4 x^3} \right) \kappa + \left(\frac{2me^2}{3c^6 x^{\frac{3}{2}}} - \frac{e^4}{6c^8 x^2} \right. \right. \\
 &- \left. \left. \frac{2m\mu^2 (r^2 - 9z^2)}{35c^6 x^{\frac{7}{2}}} - \frac{\mu^4 z^4}{6c^8 x^6} + \frac{e^2 \mu^2 (8r^2 - 9z^2)}{35c^8 x^4} \right) \kappa^2 - \frac{\kappa^2 e^2 \mu^2 r^2}{c^8 x^4} \right] + O(\kappa^3) = 1 \\
 &+ \frac{2m}{X} - \frac{e^2}{X^2} - \frac{\mu^2 z^2}{X^6} + \frac{2me^2}{3X^3} - \frac{e^4}{6X^4} - \frac{2m\mu^2 (r^2 - 9z^2)}{35X^7} - \frac{\mu^4 z^4}{6X^{12}} + \frac{e^2 \mu^2 (8r^2 - 9z^2)}{35X^8} \\
 &- \frac{e^2 \mu^2 r^2}{X^8} - \frac{e^2 \mu^2 r^2}{X^8} + \frac{2m^2}{X^2} + \frac{e^4}{2X^4} + \frac{\mu^4 z^4}{2X^{12}} - \frac{me^2}{X^3} - \frac{m\mu^2 z^2}{X^7} - \frac{\mu^2 e^2 z^2}{X^8} + O(\kappa^3) \\
 &= 1 + \frac{2m}{X} + \frac{(2m^2 - e^2)}{X^2} - \frac{\mu^2 z^2}{X^6}, \tag{3.60}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \omega &= -\frac{\kappa e \mu r^2}{c^4 x^2} + \kappa^2 \left(\frac{4me\mu r^2}{5c^6 x^{\frac{5}{2}}} - \frac{7e^3 \mu r^2}{15c^8 x^3} + \frac{e\mu^3 r^2 (4r^2 - 61z^2)}{105c^8 x^5} \right) + O(\kappa^3) = -\frac{e\mu r^2}{X^4} \\
 &+ \frac{4me\mu r^2}{5X^5} - \frac{7e^3 \mu r^2}{15X^6} + \frac{e\mu^3 r^2 (4r^2 - 61z^2)}{105X^{10}}, \tag{3.61}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi &= \frac{e}{x^{\frac{1}{2}}} \left[1 + \left(-\frac{m}{c^2\sqrt{x}} + \frac{e^2}{3c^4 x} - \frac{\mu^2 (4r^2 - z^2)}{35c^4 x^3} \right) \kappa + \left(\frac{2m^2}{3c^4 x} - \frac{2me^2}{3c^6 x^{\frac{3}{2}}} + \frac{2e^4}{15c^8 x^2} \right. \right. \\
 &+ \left. \left. \frac{m\mu^2 (5r^2 - 3z^2)}{35c^6 x^{\frac{7}{2}}} - \frac{4e^2 \mu^2 (7r^2 + z^2)}{315c^8 x^4} + \frac{2\mu^4 (40r^4 - 502r^2 z^2 - 487z^4)}{15015c^8 x^6} \right) \kappa^2 \right] + O(\kappa^3) \\
 &= \frac{e}{X} - \frac{em}{X^2} + \frac{e^3}{3X^3} - \frac{e\mu^2 (4r^2 - z^2)}{35X^5} + \frac{2em^2}{3X^3} - \frac{2me^3}{3X^4} + \frac{2e^5}{15X^5} + \frac{me\mu^2 (5r^2 - 3z^2)}{35X^8}
 \end{aligned}$$

3.3. Solução de Bonnor que descreve um objeto de massa m com dipolo magnético μ e carga elétrica e

$$\begin{aligned}
& - \frac{4e^3\mu^2(7r^2+z^2)}{315X^9} + \frac{2e\mu^4(40r^4-502r^2z^2-487z^4)}{15015X^{13}} + O(\kappa^3) = \frac{e}{X} + O(\kappa^3) + O(me) \\
& + O(m\mu) + O(\mu e) + O(m^2) + O(\mu^2) + O(e^2), \tag{3.62} \\
\psi & = \frac{\mu r^2}{x^{\frac{3}{2}}} \left[1 + \frac{\kappa m}{2c^2 x^{\frac{1}{2}}} + \frac{\kappa e^2}{5c^4 x} + \frac{\kappa^2 m^2}{5c^4 x} - \frac{4\kappa^2 m e^2}{15c^6 x^{\frac{3}{2}}} + \frac{11\kappa^2 e^4}{105c^8 x^2} - \frac{\kappa^2 m \mu^2 (r^2 + 11z^2)}{210c^6 x^{\frac{7}{2}}} \right. \\
& \left. - \frac{\kappa^2 e^2 \mu^2 (72r^2 - 13z^2)}{1155c^8 x^4} \right] + O(\kappa^3) = \frac{\mu r^2}{X^3} + \frac{\mu r^2 m}{2X^4} + \frac{\mu e^2 r^2}{5X^5} + \frac{m^2 \mu r^2}{5X^5} - \frac{4me^2 \mu r^2}{15X^6} \\
& + \frac{11e^4 \mu r^2}{105X^7} - \frac{m\mu^3 r^2 (r^2 + 11z^2)}{210X^{10}} - \frac{e^2 \mu^3 r^2 (72r^2 - 13z^2)}{1155X^{11}} + O(\kappa^3) = \frac{\mu r^2}{X^3} \\
& + O(\kappa^3) + O(me) + O(m\mu) + O(\mu e) + O(m^2) + O(\mu^2) + O(e^2), \tag{3.63}
\end{aligned}$$

com $x = X^2 = r^2 + z^2$ e utilizamos unidades geométricas $\kappa = c = 1$.

Para estudar o efeito de arraste dos referenciais inerciais é conveniente descrever a solução em coordenadas esféricas (t, R, θ, ϕ) , e para isto Bonnor fez uso das seguintes transformações:

$$\begin{cases} r = \left[R - m + \frac{(e^2 - m^2)}{2R} \right] \sin \theta, \\ z = (R - m) \cos \theta, \\ \alpha = \alpha, \\ t = t. \end{cases} \tag{3.64}$$

Essas transformações levam a

$$\begin{cases} dr = \cos \theta \left(R - m + \frac{(e^2 - m^2)}{2R} \right) d\theta + \sin \theta \left(1 - \frac{(e^2 - m^2)}{2R^2} \right) dR, \\ dz = -\sin \theta (R - m) d\theta + \cos \theta dR, \\ d\alpha = d\alpha, \\ dt = dt. \end{cases} \tag{3.65}$$

Podemos agora substituir as equações acima no elemento de linha dado pela equação (3.57) e assim rescrever tal elemento em coordenadas esféricas como

$$ds^2 = g_{00} dt^2 + g_{11} dR^2 + g_{22} d\theta^2 + g_{33} d\alpha + 2g_{03} dt d\alpha, \tag{3.66}$$

onde

$$g_{00} = - \frac{2m}{\sqrt{\left(R - m + \frac{e^2 - m^2}{2R} \right)^2 \sin^2 \theta + (R - m)^2 \cos^2 \theta}} + \frac{2m^2 + e^2}{\left(R - m + \frac{e^2 - m^2}{2R} \right)^2 \sin^2 \theta + (R - m)^2 \cos^2 \theta}$$

$$+ \frac{\mu^2 (R-m)^2 \cos^2 \theta}{\left(\left(R-m + \frac{e^2-m^2}{2R} \right)^2 \sin^2 \theta + (R-m)^2 \cos^2 \theta \right)^3} + 1, \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned} g_{11} = & \left[-\frac{2m}{\sqrt{\left(R-m + \frac{e^2-m^2}{R} \right)^2 \sin^2 \theta + (R-m)^2 \cos^2 \theta}} - \frac{2m^2}{\left(R-m + \frac{e^2-m^2}{R} \right)^2 \sin^2 \theta + (R-m)^2 \cos^2 \theta} \right. \\ & + \frac{m^2 \left(R-m + \frac{e^2-m^2}{2R} \right)^2 \sin^2 \theta + e^2 (R-m)^2 \cos^2 \theta}{\left[\left(R-m + \frac{e^2-m^2}{R} \right)^2 \sin^2 \theta + (R-m)^2 \cos^2 \theta \right]^2} - 1 \\ & \left. + \frac{\mu^2 \left[\left(R-m + \frac{e^2-m^2}{2R} \right)^4 \sin^4 \theta - 6 \left(R-m + \frac{e^2-m^2}{2R} \right)^2 \sin^2 \theta (R-m)^2 \cos^2 \theta + 2 (R-m)^4 \cos^4 \theta \right]}{2 \left[\left(R-m + \frac{e^2-m^2}{R} \right)^2 \sin^2 \theta + (R-m)^2 \cos^2 \theta \right]^4} \right] \\ & \times \left[1 - \frac{(e^2 - m^2) \sin^2 \theta}{2R R} \right], \quad (3.68) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{22} = & \left[-\frac{2m}{\sqrt{\left(R-m + \frac{e^2-m^2}{R} \right)^2 \sin^2 \theta + (R-m)^2 \cos^2 \theta}} - \frac{2m^2}{\left(R-m + \frac{e^2-m^2}{R} \right)^2 \sin^2 \theta + (R-m)^2 \cos^2 \theta} \right. \\ & + \frac{m^2 \left(R-m + \frac{e^2-m^2}{2R} \right)^2 \sin^2 \theta + e^2 (R-m)^2 \cos^2 \theta}{\left[\left(R-m + \frac{e^2-m^2}{R} \right)^2 \sin^2 \theta + (R-m)^2 \cos^2 \theta \right]^2} - 1 \\ & \left. + \frac{\mu^2 \left[\left(R-m + \frac{e^2-m^2}{2R} \right)^4 \sin^4 \theta - 6 \left(R-m + \frac{e^2-m^2}{2R} \right)^2 \sin^2 \theta (R-m)^2 \cos^2 \theta + 2 (R-m)^4 \cos^4 \theta \right]}{2 \left[\left(R-m + \frac{e^2-m^2}{R} \right)^2 \sin^2 \theta + (R-m)^2 \cos^2 \theta \right]^4} \right] \\ & \times \left[(R^2 + m^2 - 2mR) + (e^2 - m^2) \cos^2 \theta \right] \quad (3.69) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{12} = & \left[\frac{2m}{\sqrt{\left(R-m + \frac{e^2-m^2}{R} \right)^2 \sin^2 \theta + (R-m)^2 \cos^2 \theta}} + \frac{2m^2}{\left(R-m + \frac{e^2-m^2}{R} \right)^2 \sin^2 \theta + (R-m)^2 \cos^2 \theta} \right. \\ & \left. + \frac{\mu^2 \left[\left(R-m + \frac{e^2-m^2}{2R} \right)^4 \sin^4 \theta - 6 \left(R-m + \frac{e^2-m^2}{2R} \right)^2 \sin^2 \theta (R-m)^2 \cos^2 \theta + 2 (R-m)^4 \cos^4 \theta \right]}{2 \left[\left(R-m + \frac{e^2-m^2}{R} \right)^2 \sin^2 \theta + (R-m)^2 \cos^2 \theta \right]^4} \right. \\ & \left. + \frac{m^2 \left(R-m + \frac{e^2-m^2}{2R} \right)^2 \sin^2 \theta + e^2 (R-m)^2 \cos^2 \theta}{\left[\left(R-m + \frac{e^2-m^2}{R} \right)^2 \sin^2 \theta + (R-m)^2 \cos^2 \theta \right]^2} + 1 \right] \left(\frac{e^2 - m^2}{R} \right) \cos \theta \sin \theta = g_{21} \quad (3.70) \end{aligned}$$

$$(3.71)$$

$$g_{33} = - \left(R - m + \frac{e^2 - m^2}{2R} \right)^2 \sin^2 \theta \left[1 + \frac{2m}{\sqrt{\left(R - m + \frac{e^2 - m^2}{R} \right)^2 \sin^2 \theta + (R - m)^2 \cos^2 \theta}} \right. \\ \left. + \frac{2m^2 - e^2}{\left(R - m + \frac{e^2 - m^2}{R} \right)^2 \sin^2 \theta + (R - m)^2 \cos^2 \theta} - \frac{\mu^2 (R - m)^2 \cos^2 \theta}{\left[\left(R - m + \frac{e^2 - m^2}{R} \right)^2 \sin^2 \theta + (R - m)^2 \cos^2 \theta \right]^3} \right] \quad (3.72)$$

$$g_{03} = g_{30} = \omega = - \frac{e\mu \left(R - m + \frac{e^2 - m^2}{R} \right)^2}{\left[\left(R - m + \frac{e^2 - m^2}{R} \right)^2 \sin^2 \theta + (R - m)^2 \cos^2 \theta \right]^2}, \quad (3.73)$$

destacamos que as expressões acima ainda não estão reduzidas a apenas aos termos de primeira e segunda ordem em m , μ e e .

Além de utilizar a solução de Martin e Pritchett, que é uma já é uma solução aproximada (só contém termos de até 2º ordem na constante gravitacional κ^2), e reduzir tal solução a apenas termos de 2º em m , μ e e , Bonnor foi além e admitiu que

$$\frac{1}{X} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \frac{1}{\sqrt{\left(R - m + \frac{e^2 - m^2}{2R} \right)^2 \sin^2 \theta + (R - m)^2 \cos^2 \theta}} \approx \frac{1}{R}. \quad (3.74)$$

Utilizando esta aproximação, podemos rescrever as funções métricas na seguinte forma:

$$g_{00} = 1 - \frac{2m}{R} + \frac{2m^2 + e^2}{R^2} + \frac{\mu^2 (R - m)^2 \cos^2 \theta}{R^6} = 1 - \frac{2m}{R} + \frac{2m^2}{R^2} + \frac{e^2}{R^2} + \frac{\mu^2 m^2 \cos^2 \theta}{R^6} \\ - \frac{2\mu^2 m \cos^2 \theta}{R^5} \approx 1 - \frac{2m}{R} + \frac{2m^2}{R^2} + \frac{e^2}{R^2} + \frac{\mu^2 \cos^2 \theta}{R^4}, \quad (3.75)$$

$$g_{03} = g_{30} = - \frac{e\mu \left(R - m + \frac{e^2 - m^2}{R} \right)^2 \sin^2 \theta}{R^4} = - \frac{e\mu \sin^2 \theta}{R^4} \left(R^2 + m^2 + \frac{(e^2 - m^2)^2}{4R^2} + (e^2 - m^2) \right. \\ \left. - 2Rm - \frac{m(e^2 - m^2)}{R} \right) = - \frac{e\mu \sin^2 \theta}{R^2} - \frac{e^3 \mu \sin^2 \theta}{R^4} + \frac{2e\mu m \sin^2 \theta}{R^3} \approx - \frac{e\mu \sin^2 \theta}{R^2}, \quad (3.76)$$

$$g_{33} = - \left(R - m + \frac{e^2 - m^2}{2R} \right)^2 \sin^2 \theta \left[1 + \frac{2m}{R} + \frac{2m^2 - e^2}{R^2} - \frac{\mu^2 (R - m)^2 \cos^2 \theta}{R^6} \right] = -R^2 \sin^2 \theta \\ \times \left[1 + \frac{2m}{R} + \frac{2m^2}{R^2} - \frac{e^2}{R^2} - \frac{\mu^2 \cos^2 \theta}{R^4} \right] \left[1 - \frac{2m}{R} + \frac{e^2}{R^2} \right] \approx R^2 \sin^2 \theta \left[-1 + \frac{2m^2}{R^2} \right. \\ \left. + \frac{\mu^2 \cos^2 \theta}{R^4} \right], \quad (3.77)$$

$$+ \frac{\mu^2 \cos^2 \theta}{R^4} \Big], \quad (3.78)$$

$$\begin{aligned}
 g_{11} &= \left(1 - \frac{e^2 - m^2}{R^2} \sin^2 \theta\right) \left[-1 - \frac{2m}{R} - \frac{2m^2}{R^2} + \frac{m^2 \left(R - m + \frac{e^2 - m^2}{2R}\right)^2 \sin^2 \theta + e^2 (R - m)^2 \cos^2 \theta}{R^4} \right. \\
 &+ \frac{\mu^2 \left[\left(R - m + \frac{e^2 - m^2}{2R}\right)^4 \sin^4 \theta - 6 \left(R - m + \frac{e^2 - m^2}{2R}\right)^2 \sin^2 \theta (R - m)^2 \cos^2 \theta + 2 (R - m)^4 \cos^4 \theta \right]}{2R^8} \\
 &+ \left. \frac{e^2 (R - m)^2 \cos^2 \theta}{R^4} \right] \approx \left(1 - \frac{(e^2 - m^2) \sin^2 \theta}{R^2} \left[-1 - \frac{2m}{R} - \frac{2m^2}{R^2} + \frac{\sin^2 \theta (R^2 m^2 - 2Rm^3 + m^2 e^2)}{R^4} \right. \right. \\
 &+ \left. \left. \frac{(\sin^2 \theta (R^4 + 6R^2 m^2 - 4R^3 m + 2R^2 e^2 - 2R^2 m^2) - 6\theta \cos^2 \theta (R^4 + 6R^2 m^2 - 4R^3 m + e^2 R^2))}{2R^8} + \frac{2\mu^2 \cos^4 \theta (R^4 + 6R^2 m^2 - 4R^3 m)}{2R^8} + \frac{\cos^2 \theta (e^2 R^2 + e^2 m^2 - 2me^2 R)}{R^4} \right] \right) = -1 \\
 &- \frac{2m}{R} + \frac{m^2 (\sin^2 \theta - \sin^2 \theta) + e^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}{R^2} + \frac{\mu^2 (\sin^4 \theta - 6 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 2 \cos^4 \theta)}{2R^4} \\
 &- \frac{2m^2}{R^2} = -1 - \frac{2m}{R} - \frac{2m^2}{R^2} + \frac{e^2}{R^2} + \frac{\mu^2 f(\theta)}{R^4} = - \left(1 - \frac{2m}{R} - \frac{2m^2}{R^2} + \frac{e^2}{R^2} + \frac{\mu^2 f(\theta)}{R^4}\right)^{-1}, \quad (3.79)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_{22} &= (R^2 + m^2 - 2mR + (e^2 - m^2) \cos^2 \theta) \left[-1 - \frac{2m}{R} - \frac{2m^2}{R^2} \right. \\
 &+ \frac{m^2 \left(R - m + \frac{e^2 - m^2}{2R}\right)^2 \sin^2 \theta + e^2 (R - m)^2 \cos^2 \theta}{R^4} \\
 &+ \left. \frac{\mu^2 \left[\left(R - m + \frac{e^2 - m^2}{2R}\right)^4 \sin^4 \theta - 6 \left(R - m + \frac{e^2 - m^2}{2R}\right)^2 \sin^2 \theta (R - m)^2 \cos^2 \theta + 2 (R - m)^4 \cos^4 \theta \right]}{2R^8} \right] \\
 &\approx (R^2 - 2mR + e^2 \cos^2 \theta + m^2 (1 - \cos^2 \theta)) \left[-1 - \frac{2m}{R} - \frac{2m^2}{R^2} + \frac{\sin^2 \theta (R^2 m^2 - 2Rm^3 + m^2 e^2)}{R^4} \right. \\
 &+ \left. \frac{\mu^2 \left[\left(R - m + \frac{e^2 - m^2}{2R}\right)^4 \sin^4 \theta - 6 \left(R - m + \frac{e^2 - m^2}{2R}\right)^2 \sin^2 \theta (R - m)^2 \cos^2 \theta + 2 (R - m)^4 \cos^4 \theta \right]}{2R^8} \right. \\
 &+ \left. \frac{\cos^2 \theta (e^2 R^2 + e^2 m^2 - 2me^2 R)}{R^4} \right] = ((R - m)^2 + (e^2 - m^2) \cos^2 \theta) \left[-1 - \frac{2m}{R} + \frac{m^2 \sin^2 \theta}{R^2} \right. \\
 &+ \left. \frac{e^2 \cos^2 \theta}{R^2} + \frac{\mu^2 (\sin^4 \theta - 6 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 2 \cos^4 \theta)}{2R^4} \right] = \left[-1 - \frac{2m}{R} + \frac{m^2 \sin^2 \theta}{R^2} + \frac{e^2 \cos^2 \theta}{R^2} \right. \\
 &+ \left. \frac{\mu^2 f(\theta)}{2R^4} \right] \times (R^2 - 2mR + e^2 \cos^2 \theta + m^2 (1 - \cos^2 \theta)) = -R^2 + m^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 4 - 1) \\
 &+ \frac{\mu^2 f(\theta)}{R^2} = -R^2 \left(1 - \frac{4m^2}{R^2} - \frac{\mu^2 f(\theta)}{R^4}\right), \quad (3.80)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_{12} &= g_{21} = \left(\frac{e^2 - m^2}{R}\right) \cos \theta \sin \theta \left[1 + \frac{2m}{R} + \frac{2m^2}{R^2} - \frac{m^2 \left(R - m + \frac{e^2 - m^2}{2R}\right) \sin^2 \theta}{R^4} - \frac{e^2 (R - m)^2 \cos^2 \theta}{R^4} \right. \\
 &+ \left. \frac{\mu^2 \left[\left(R - m + \frac{e^2 - m^2}{2R}\right)^4 \sin^4 \theta - 6 \left(R - m + \frac{e^2 - m^2}{2R}\right)^2 \sin^2 \theta (R - m)^2 \cos^2 \theta + 2 (R - m)^4 \cos^4 \theta \right]}{2R^8} \right]
 \end{aligned}$$

3.3. Solução de Bonnor que descreve um objeto de massa m com dipolo magnético μ e carga elétrica e

$$\begin{aligned} &\approx \left(\frac{e^2 - m^2}{R} \cos\theta \sin\theta \left[1 + \frac{2m}{R} + \frac{2m^2}{R^2} + \frac{\sin^2\theta m^2}{R^2} + \frac{\mu^2 (\sin^4\theta - 6\sin^2\theta \cos^2\theta + 2\cos^4\theta)}{2R^4} \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{e^2 \cos^2\theta}{R^2} \right] \right) = \left(\frac{e^2 - m^2}{R} \right) \cos\theta \sin\theta = 0, \end{aligned} \quad (3.81)$$

onde $f(\theta) = \frac{\sin^4\theta - 6\sin^2\theta \cos^2\theta + 2\cos^4\theta}{2}$ e na expressão da função métrica g_{12} foi utilizado o fato de que ($R > m \therefore \frac{e^2 - m^2}{R} \approx 0$).

Nesta aproximação (3.74) os potenciais eletromagnéticos podem ser reescritos na seguinte forma:

$$\Phi = \frac{e}{X} \approx \frac{e}{R} \quad (3.82)$$

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{\mu \left(R - m + \frac{e^2 - m^2}{2R} \right)^2 \sin^2\theta}{X^3} \approx \frac{\mu \sin^2\theta (R^2 - 2Rm + e^2)}{R^3} = \frac{\mu \sin^2\theta (R^2 - 2Rm)}{R^3} \\ &\approx \frac{2\sin^2\theta}{R}. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Sabemos que as componentes do quadri-potencial são: $A_\mu = (A_t, A_R, A_\theta, A_\phi) = (\Phi, 0, 0, -\psi)$; assim as componentes covariantes do tensor eletromagnético $F_{\mu\nu}$, que define as fontes eletromagnéticas da solução de Bonnor, são dadas por:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{e}{R^2} & 0 & 0 \\ -\frac{e}{R^2} & 0 & 0 & \frac{\mu \sin^2\theta}{R^2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\mu \sin(2\theta)}{R} \\ 0 & -\frac{\mu \sin^2\theta}{R^2} & \frac{\mu \sin(2\theta)}{R} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.84)$$

Já as componentes contravariantes deste tensor eletromagnético são definidas utilizando a propriedade de levantamento de índice da métrica, ou seja

$$F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} F_{\alpha\beta} \rightarrow \quad (3.85)$$

$$\begin{aligned} F^{01} &= -F^{10} = g^{0\alpha} g^{1\beta} F_{\alpha\beta} = g^{00} g^{11} F_{01} + g^{03} g^{11} F_{31} \\ &= \frac{e \sin^2(\theta) \left(1 - \frac{\mu^2 \cos^2(\theta)}{R^4} \right) \left(-1 + \frac{2m}{R} - \frac{e^2}{R^2} - \frac{\mu^2 \left(\frac{\sin^4\theta}{2} - 3\sin^2\theta \cos^2\theta + \cos^4\theta \right)}{R^4} \right)}{- \left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{e^2}{R^2} + \frac{\mu^2 \cos^2\theta}{R^4} \right) R^2 \sin^2\theta \left(1 - \frac{\mu^2 \cos^2\theta}{R^4} \right) - \frac{e^2 \mu^2 \sin^4\theta}{R^4}} \\ &\quad - \frac{e \mu^2 \sin^4\theta \left(-1 + \frac{2m}{R} - \frac{e^2}{R^2} - \frac{\mu^2 \left(\frac{\sin^4\theta}{2} - 3\sin^2\theta \cos^2\theta + \cos^4\theta \right)}{R^4} \right)}{R^4 \left(- \left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{e^2}{R^2} + \frac{\mu^2 \cos^2\theta}{R^4} \right) R^2 \sin^2\theta \left(1 - \frac{\mu^2 \cos^2\theta}{R^4} \right) - \frac{e^2 \mu^2 \sin^4\theta}{R^4} \right)}, \end{aligned} \quad (3.86)$$

3.3. Solução de Bonnor que descreve um objeto de massa m com dipolo magnético μ e carga elétrica e

$$\begin{aligned}
 F^{02} &= -F^{20} = g^{0\alpha} g^{2\beta} F_{\alpha\beta} = g^{03} g^{22} F_{32} \\
 &= -\frac{e\mu^2 \sin^2 \theta \sin(2\theta)}{R^5 \left(-\left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{e^2}{R^2} + \frac{\mu^2 \cos^2 \theta}{R^4}\right) R^2 \sin^2 \theta \left(1 - \frac{\mu^2 \cos^2 \theta}{R^4}\right) - \frac{e^2 \mu^2 \sin^4 \theta}{R^4} \right) \left(1 - \frac{\mu^2 \left(\frac{\sin^4 \theta}{2} - 3 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^4 \theta\right)}{R^4}\right)}, \quad (3.87)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F^{13} &= -F^{31} = g^{1\alpha} g^{3\beta} F_{\alpha\beta} = g^{11} g^{30} F_{10} + g^{11} g^{33} F_{13} \\
 &= \frac{\left(-1 + \frac{2m}{R} - \frac{e^2}{R^2} - \frac{\mu^2 \left(\frac{\sin^4 \theta}{2} - 3 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^4 \theta\right)}{R^4}\right) e^2 \mu \sin^2 \theta}{R^4 \left(-\left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{e^2}{R^2} + \frac{\mu^2 \cos^2 \theta}{R^4}\right) R^2 \sin^2 \theta \left(1 - \frac{\mu^2 \cos^2 \theta}{R^4}\right) - \frac{e^2 \mu^2 \sin^4 \theta}{R^4} \right)} \\
 &+ \frac{\left(-1 + \frac{2m}{R} - \frac{e^2}{R^2} - \frac{\mu^2 \left(\frac{\sin^4 \theta}{2} - 3 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^4 \theta\right)}{R^4}\right) \left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{e^2}{R^2} + \frac{\mu^2 \cos^2 \theta}{R^4}\right) \mu \sin^2 \theta}{\left(-\left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{e^2}{R^2} + \frac{\mu^2 \cos^2 \theta}{R^4}\right) R^2 \sin^2 \theta \left(1 - \frac{\mu^2 \cos^2 \theta}{R^4}\right) - \frac{e^2 \mu^2 \sin^4 \theta}{R^4}\right) R^2} \quad (3.88)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F^{23} &= -F^{32} = g^{2\alpha} g^{3\beta} F_{\alpha\beta} = g^{22} g^{2\beta} F_{2\beta} = g^{22} g^{33} F_{23} \\
 &= -\frac{\left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{e^2}{R^2} + \frac{\mu^2 \cos^2 \theta}{R^4}\right) \mu \sin(2\theta)}{\left(-\left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{e^2}{R^2} + \frac{\mu^2 \cos^2 \theta}{R^4}\right) R^2 \sin^2 \theta \left(1 - \frac{\mu^2 \cos^2 \theta}{R^4}\right) - \frac{e^2 \mu^2 \sin^4 \theta}{R^4}\right) R^3 \left(1 - \frac{\mu^2 \left(\frac{\sin^4 \theta}{2} - 3 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^4 \theta\right)}{R^4}\right)}, \quad (3.89)
 \end{aligned}$$

Assim o elemento de linha para a solução de Martin e Pritchett utilizando a aproximação de Bonnor é descrito como

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= \left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{2m^2 + e^2}{R^2} + \frac{\mu^2 \cos^2 \theta}{R^4}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{R} - \frac{2m^2}{R^2} + \frac{e^2}{R^2} + \frac{\mu^2 f(\theta)}{R^4}\right)^{-1} dR^2 \\
 &- R^2 \left(1 - \frac{4m^2}{R^2} - \frac{\mu^2 f(\theta)}{R^4}\right) d\theta^2 - R^2 \sin^2 \theta \left(1 - \frac{2m^2}{R^2} - \frac{\mu^2 \cos^2 \theta}{R^4}\right) d\alpha^2 \\
 &- \frac{2e\mu \sin^2 \theta}{R^2} d\alpha dt. \quad (3.90)
 \end{aligned}$$

A solução acima descreve a solução externa a um objeto massivo com simetria axial, carregado e que possui um dipolo magnético localizado na origem do sistema de coordenadas, esta é uma solução aproximada e no próximo capítulo vamos utilizá-la para encontrar as geodésicas que esta solução gera e assim estudá-la com mais detalhe para que possamos avaliar o quão aproximada esta solução é e o limite de sua validade.

Análise qualitativa da solução de Bonnor

Vamos agora discutir e avaliar se a solução de Bonnor descreve e satisfaz as equações descritas através da teoria da relatividade geral. Primeiramente vamos avaliar se as equações de Maxwell (equações (3.3-3.4)) são satisfeitas no espaço-tempo definido pela solução de Bonnor, as equações (3.3) são definidas neste espaço-tempo por:

$$F_{;\beta}^{\alpha\beta} = \partial_\beta F^{\alpha\beta} + \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha F^{\gamma\beta} + \Gamma_{\gamma\beta}^\beta F^{\alpha\gamma} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\sqrt{-g} F^{\alpha\beta} \right)_{,\beta} = 4\pi J^\alpha = 0, \quad (3.91)$$

onde usamos a propriedade $F_{;\beta}^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}} (\sqrt{-g} F^{\alpha\beta})$ e o fato da solução de Bonnor descrever o espaço-tempo exterior a fonte logo $J^\alpha = (0,0,0,0)$. Substituindo

$$g = \det g_{\mu\nu} = - \frac{R^2 \left(1 - \frac{\mu^2 f(\theta)}{R^4}\right)}{\left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{\mu^2 f(\theta)}{R^4} + \frac{e^2}{R^2}\right)} \left[\left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{e^2}{R^2} + \frac{\mu^2 \cos^2 \theta}{R^4}\right) R^2 \sin^2 \theta \left(1 - \frac{\mu^2 \cos^2 \theta}{R^4}\right) + \frac{e^2 \mu^2 \sin^4 \theta}{R^4} \right] \quad (3.92)$$

e as componentes covariantes do tensor eletromagnético chegamos a

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \left[(\sqrt{-g} F^{tR})_{,R} + (\sqrt{-g} F^{t\theta})_{,\theta} \right] = 4\pi J^t \rightarrow J^t = e\mu^2 (36 e^4 \mu^4 m R^{11} + \dots), \quad (3.93)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \left[(\sqrt{-g} F^{R\phi})_{,\phi} \right] = 4\pi J^R \rightarrow J^R = 0, \quad (3.94)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \left[(\sqrt{-g} F^{\theta\phi})_{,\phi} + (\sqrt{-g} F^{\theta t})_{,t} \right] = 4\pi J^\theta \rightarrow J^\theta = 0, \quad (3.95)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \left[(\sqrt{-g} F^{\phi t})_{,R} + (\sqrt{-g} F^{\phi\theta})_{,\theta} \right] = 4\pi J^\phi \rightarrow J^\phi = \frac{1}{2} \left(\left(-1 + \frac{2m}{R} - \frac{e^2}{R^2} - \frac{\mu^2 \left(\frac{1}{2} (\sin(\theta))^4 - 3 (\sin(\theta))^2 (\cos(\theta))^2 + (\cos(\theta))^4 \right)}{R^4} \right) \dots \right), \quad (3.96)$$

onde podemos constatar que as equações de Maxwell não são satisfeitas já que encontramos que a quadri-corrente possui valores não-nulos³ como a suposição inicial. A outra equação de Maxwell (equação (3.4)) é escrita da seguinte maneira para o caso em que não temos a presença de carga elétrica ($e = 0$):

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (A_{\phi,R}) = \frac{\partial}{\partial R} (A_{\phi,\theta}) \rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{2 \sin^2 \theta}{R} \right) \right) = \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{2 \sin^2 \theta}{R} \right) \right), \quad (3.97)$$

que é claramente satisfeita.

³A expressão completa das expressões para J^t e J^ϕ podem ser encontradas no apêndice (7.1) desta dissertação.

4 Aspectos astrofísicos, geodésicas e constantes de movimento

Neste capítulo faremos uma breve discussão da equação de movimento para o caso Newtoniano e posteriormente daremos ênfase ao estudo das equações da geodésicas; seguiremos apresentado as equações das geodésicas para a solução de Bonnor, entretanto obtidas numericamente e com as aproximações discutidas no capítulo anterior e por fim comparar com as já encontradas pela solução de Schwarzschild.

4.1 Equações de movimento

Objetos astrofísicos são, em geral, caracterizados por uma distribuição simétrica de massa. Em muitos casos, como planetas e satélites, é possível negligenciar os desvios da simetria esférica e tratar estes objetos como esfericamente simétrico e no limite de campo fraco (limite Newtoniano). Entretanto esta consideração torna-se inválida quando queremos estudar estrelas de nêutrons, objetos extremamente densos, cujo efeitos da relatividade geral se tornam essenciais para a sua descrição. Uma das causas do efeito de campos gravitacionais é a mudança na trajetória de uma partícula que viaja próximo a um objeto massivo que gera este intenso campo gravitacional, a trajetória percorrida por uma partícula teste vai variar de acordo com o quão massivo o corpo é. No caso de campos gravitacionais fracos, as equações de movimento que descrevem a trajetória da partícula teste são encontradas a partir da 2ª lei de Newton. Já no caso em que efeitos relativísticos tornam se relevantes, as equações de movimentos passam a ser governadas pelas equações da geodésicas.

Equações de movimento para uma força central

A descrição da interação gravitacional na mecânica Newtoniana é descrita por uma força central, denominada de força gravitacional

$$\vec{F}_g = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}, \quad (4.1)$$

onde r é a distância entre um corpo de massa M e um segundo de massa m que está sob ação da força gravitacional de carácter atrativo. Da segunda lei de Newton, obtemos as seguintes equações de movimento:

$$\hat{e}_r : m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) = F_g, \quad (4.2)$$

$$\hat{e}_\phi : m(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}) = 0, \quad (4.3)$$

onde (r, ϕ) são coordenadas polares. A equação (4.3) leva a conservação do momento angular: $\frac{d(r\dot{\phi}^2)}{dt} = 0 \rightarrow l = \frac{L}{m} = r\dot{\phi}^2 = \text{constante}$. Substituindo $r\dot{\phi}^2$ por l na equação (4.2) e fazendo a transformação $r = 1/u \rightarrow -\frac{1}{u^2} \frac{du(\phi)}{dt} = -\frac{\dot{\phi}}{u^2} \frac{du}{d\phi} = -l \frac{du}{d\phi}$ e $\ddot{r} = -l\dot{\phi} \frac{d^2u}{d\phi^2}$ podemos reescrever esta equação na seguinte forma:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = -\frac{1}{ml^2u^2} F_g(u^{-1}) \rightarrow \frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{GM}{l^2}, \quad (4.4)$$

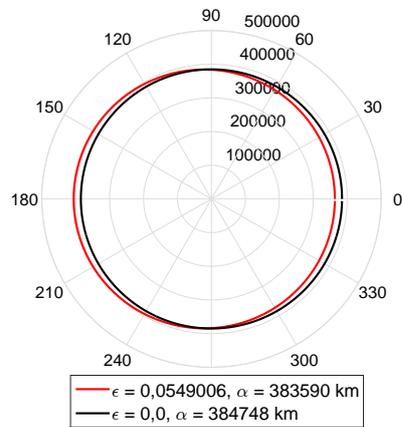
que é chamada de equação da órbita. A solução desta equação diferencial é dada por:

$$r(\phi) = \frac{l^2/GM}{1 + Al^2 \cos(\phi + \phi_0)/GM}, \quad (4.5)$$

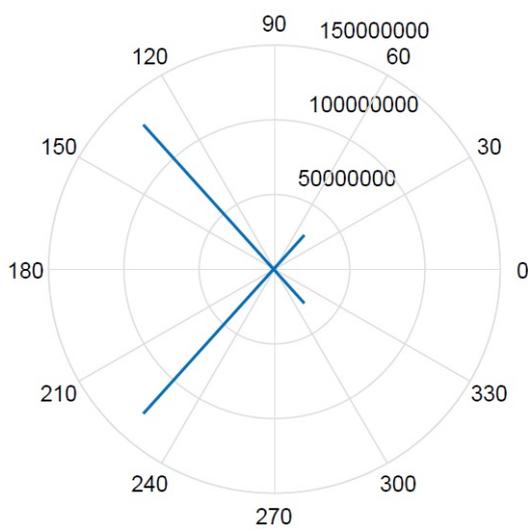
onde A e ϕ_0 são constantes de integração, que são determinadas através das condições iniciais ($r(\phi = 0)$ e $\dot{r}(\phi = 0)$). Esta solução pode ser rescrita em uma forma mais compacta:

$$r(\phi) = \frac{\alpha}{1 + \epsilon \cos \phi}, \quad (4.6)$$

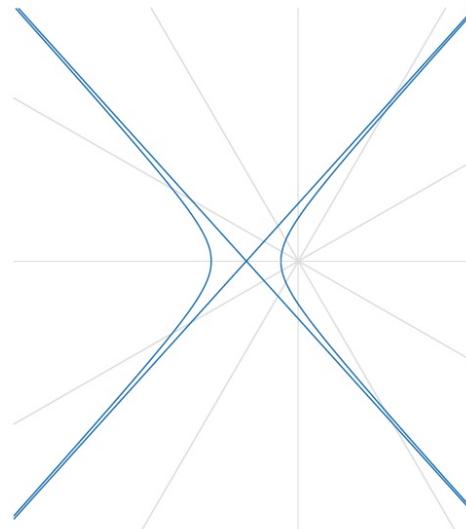
onde $\alpha = L^2/GMm^2$ e $\epsilon = AL^2/GMm^2$. A constante ϵ é denominada de excentricidade, e facilmente podemos rescrevê-la como $\epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{m^3M^2G^2}}$. A excentricidade é um parâmetro muito importante na definição de uma órbita, ela determina se tal órbita é hiperbólica ($\epsilon > 1$, ver figuras (4.1(b)-4.1(c))), se é parabólica ($\epsilon = 1$), se é elíptica ($0 < \epsilon < 1$ - ver figura (4.1(a))) ou se é circular ($\epsilon = 0$ - ver figura (4.1(a))). O parâmetro α e a excentricidade podem ser escritos em função do semi-eixo maior (a) e do semi-eixo menor (b) da seguinte maneira: $\alpha = a(1 - \epsilon^2) = b^2/a$ e $\epsilon = 1 - (\alpha/b)^2 = 1 - (b/a)^2$.



(a) Diferença entre a real órbita da Lua e a hipotética órbita circular da Lua em torno da Terra, onde foi utilizado o valor do semi-eixo maior da Lua igual a $384748,0 \text{ km}$.



(b) Hipotética órbita hiperbólica da Lua em torno da Terra - $\epsilon = 1.5$ e $\alpha = -480935 \text{ km}$.



(c) Zoon feito na figura ao lado, órbita hiperbólica.

Figura 4.1: Diferentes órbitas da Lua.

Equações da geodésica

Na relatividade geral, o conceito de massa e energia está totalmente relacionado a curvatura do espaço-tempo. A interação gravitacional deixa de ser associada a uma força fundamental da natureza e passa a ser tratada como o quão o corpo massivo interage com o espaço-tempo de forma a curvá-lo, ou seja, na relatividade geral a interação gravitacional passa a ser 'medida' através do quão curvo o espaço-tempo é. Obviamente se um objeto não é massivo o suficiente, de forma que o espaço-tempo pode ser considerado plano, as equações da órbita de uma partícula teste vão recair na equação da trajetória desenvolvida através da lei da gravitação desenvolvida por Newton (ver seção 4.1.1 desta dissertação). Este limite costuma ser utilizado nos estudos de órbitas de partículas estes em torno de planetas ou estrelas de pouca densidade. Entretanto no estudos de órbitas de partículas testes em torno de objetos astrofísicos compactos e muito densos, como por exemplo estrelas de nêutrons e buracos negros, efeitos de curvatura no espaço-tempo tornam se essenciais na definição dessas órbitas. Nesta seção iremos apresentar e discutir a determinação das órbitas em espaços-tempos curvos, e ao final vamos enfatizar o estudo das órbitas no espaço-tempo determinado pela solução de Bonnor, já comentada na seção 3.2 desta dissertação, que define o espaço-tempo externo a um dipolo magnético μ de massa m .

As equações da geodésicas são derivadas de um dos princípios mais importantes na física: *princípio variacional*. O princípio variacional para uma partícula teste livre é definido como : "a linha mundo de uma partícula teste livre entre dois pontos separados tipo-tempo é extremizada pelo tempo próprio"; tal princípio leva as equações de Euler-Lagrange. As equações de Euler-Lagrange para um espaço-tempo curvo são dadas por:

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0, \quad (4.7)$$

onde \dot{x}^α é $\frac{dx^\alpha}{d\lambda}$, λ é um parâmetro afim definido ao longo da curva do tipo-tempo e L é a Lagrangeana, que é definida entre dois pontos fixos A e B a partir do tempo próprio (τ) da seguinte forma

$$\int_A^B d\tau = \int_A^B ds = \int_A^B \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda = \int_A^B L(x^\alpha, \dot{x}^\alpha) d\lambda, \quad (4.8)$$

onde nota-se que $L = \frac{d\tau}{d\lambda}$. Enfatizamos que o sinal de menos é abolido na definição da Lagrangeana devido a escolha da convenção da assinatura da métrica ser $(+, -, -, -)$, caso

escolhêssemos a outra convenção da assinatura $(-, +, +, +)$ então deveríamos incluir este sinal na definição da Lagrangeana $(L = \sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}})$.

Neste momento iremos demonstrar que as equações de Euler-Lagrange recaem nas equações da geodésica (2.10), para isto vamos substituir a definição da Lagrangeana nas equações de Euler-Lagrange (4.7) e os termos desta equação terão a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \left[\frac{dx^\alpha}{d\lambda} \right]} &= \frac{\partial}{\partial \left[\frac{dx^\alpha}{d\lambda} \right]} \left(\sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} \right) = -\frac{1}{2L} \left(\overbrace{\frac{\partial}{\partial \left[\frac{dx^\alpha}{d\lambda} \right]} \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda} \right)}^{=\delta_\alpha^\mu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} + \frac{dx^\mu}{d\lambda} \overbrace{\frac{\partial}{\partial \left[\frac{dx^\alpha}{d\lambda} \right]} \left(\frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)}^{=\delta_\alpha^\nu} \right) \\ &\times g_{\mu\nu} = -\frac{1}{2L} \left(g_{\alpha\nu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} + g_{\mu\alpha} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \right) = -\frac{1}{2L} \left(g_{\alpha\nu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} + g_{\alpha\mu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \right) = -\frac{1}{L} g_{\alpha\nu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \quad (4.9) \\ \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} &= \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\sqrt{-g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} \right) = -\frac{1}{2L} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} + g_{\mu\nu} \left(\underbrace{\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda} \right)}_{=0} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right. \right. \\ &\left. \left. + \underbrace{\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{dx^\nu}{d\lambda} \right)}_{=0} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \right) \right) = -\frac{1}{2L} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}. \quad (4.10) \end{aligned}$$

Assim as equações de Euler-Lagrange são reescrita como:

$$\frac{d}{d\lambda} \left(-\frac{g_{\alpha\nu}}{L} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right) + \frac{1}{2L} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0. \quad (4.11)$$

Multiplicando a equação acima por $\left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^2$, chegamos a

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(-g_{\alpha\nu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} &= g_{\alpha\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\lambda^2} + \left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \\ &= g_{\alpha\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\lambda^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\mu}}{\partial x^\alpha} \right) \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0. \quad (4.12) \end{aligned}$$

Multiplicando a equação acima por $g^{\beta\alpha}$ e utilizando a propriedade da métrica $g^{\beta\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta_\nu^\beta$, temos que

$$\frac{d^2 x^\beta}{d\lambda^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\beta \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0, \quad (4.13)$$

que é a equação da geodésica (ver equação (2.10)).

4.1.1 Equações das geodésicas no plano equatorial para a solução de Bonnor sem carga elétrica ($e = 0$)

Com o intuito de analisar as geodésicas no espaço-tempo gerado por um objeto compacto de massa m e com campo magnético gerado por um dipolo magnético μ localizado na ori-

gem desse objeto, precisamos fazer uso das soluções já descritas no capítulo anterior. Apesar da solução descrita por Bonnor descrever um objeto massivo e carregado com campo magnético, neste momento não estamos nos preocupando em descrever um objeto com carga e assim vamos simplificar esta solução fazendo $e = 0$. Desta forma, a solução de Bonnor 'perde' o efeito de arraste de referenciais inerciais (ausência do termo cruzado no elemento de linha) e torna-se:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{\mu^2 \cos^2 \theta}{R^4}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{\mu^2 f(\theta)}{R^4}\right)^{-1} dR^2 + R^2 \left(1 - \frac{\mu^2 f(\theta)}{R^4}\right) d\theta^2 + R^2 \sin^2 \theta \left(1 - \frac{\mu^2 \cos^2 \theta}{R^4}\right) d\alpha^2, \quad (4.14)$$

onde estamos escolhemos a convenção da assinatura da métrica +2 $(-, +, +, +)$, distinta da convencional na seção anterior, assinatura -2 $(+, -, -, -)$. Agora que já encontramos as equações da geodésicas, vamos encontrar as geodésicas no plano equatorial para a solução de Bonnor sem carga elétrica. Por simplificação vamos fazer uso das equações de Euler-Lagrange para encontrar tais geodésicas, a Lagrangeana para a solução de Bonnor é dada por:

$$L = \sqrt{g_{tt} \frac{dx^t}{d\lambda} \frac{dx^t}{d\lambda} + g_{RR} \frac{dx^R}{d\lambda} \frac{dx^R}{d\lambda} + g_{\theta\theta} \frac{dx^\theta}{d\lambda} \frac{dx^\theta}{d\lambda} + g_{\phi\phi} \frac{dx^\phi}{d\lambda} \frac{dx^\phi}{d\lambda}} = \left[\left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{\mu^2 f(\theta)}{R^4}\right)^{-1} \left(\frac{dx^R}{d\lambda}\right)^2 - \left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{\mu^2 \cos^2 \theta}{R^4}\right) \left(\frac{dx^t}{d\lambda}\right)^2 + R^2 \left(1 - \frac{\mu^2 f(\theta)}{R^4}\right) \left(\frac{dx^\theta}{d\lambda}\right)^2 + R^2 \sin^2 \theta \left(1 - \frac{\mu^2 \cos^2 \theta}{R^4}\right) \left(\frac{dx^\phi}{d\lambda}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (4.15)$$

onde $x^\mu = (t, R, \theta, \phi)$ são as coordenadas utilizadas na solução de Bonnor. A partir da Lagrangeana acima, podemos encontrar as equações de Euler-Lagrange que são equivalentes as equações da geodésica:

$$\alpha = 0 : \frac{d}{d\tau} \left(- \left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{\mu^2 \cos^2 \theta}{R^4}\right) \dot{x}^t \right) = \frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad (4.16)$$

$$\alpha = 1 : \frac{d}{d\tau} \left(\left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{\mu^2 f(\theta)}{R^4}\right)^{-1} \dot{x}^R \right) = \frac{\partial L}{\partial R} = \frac{1}{2} \left[- \left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{\mu^2 \cos^2 \theta}{R^4}\right)_{,R} (\dot{x}^t)^2 + \left(R^2 \left(1 - \frac{\mu^2 f(\theta)}{R^4}\right) \right)_{,R} (\dot{x}^\theta)^2 + \left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{\mu^2 f(\theta)}{R^4}\right)_{,R}^{-1} (\dot{x}^R)^2 + \sin^2 \theta \left(R^2 \left(1 - \frac{\mu^2 \cos^2 \theta}{R^4}\right) \right)_{,R} (\dot{x}^\phi)^2 \right] \quad (4.17)$$

$$\alpha = 2 : \frac{d}{d\tau} \left(R^2 \left(1 - \frac{\mu^2 f(\theta)}{R^4} \right) \dot{x}^\theta \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{1}{2} \left[- \left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{\mu^2 \cos^2 \theta}{R^4} \right)_{,\theta} (\dot{x}^t)^2 + R^2 \left(- \frac{\mu^2 f(\theta)}{R^4} \right)_{,\theta} (\dot{x}^\theta)^2 + \left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{\mu^2 f(\theta)}{R^4} \right)_{,\theta}^{-1} (\dot{x}^R)^2 + R^2 \left(\sin^2 \theta \left(1 - \frac{\mu^2 \cos^2 \theta}{R^4} \right) \right)_{,\theta} (\dot{x}^\phi)^2 \right] \quad (4.18)$$

$$\alpha = 3 : \frac{d}{d\tau} \left(R^2 \sin^2 \theta \left(1 - \frac{\mu^2 \cos^2 \theta}{R^4} \right) \dot{x}^\phi \right) = \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0, \quad (4.19)$$

onde $\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$ é a quadri-velocidade, $\frac{d}{d\tau}$ representa uma derivada ordinária em relação a uma das coordenadas e as equações (4.16) e (4.19) representam, respectivamente, a conservação da energia e a conservação do momento, onde definimos a energia da partícula por unidade de massa como sendo $E = -g_{t\mu} \dot{x}^\mu = -g_{tt} \dot{x}^t$ e o momento angular específico da partícula por unidade de massa como $\ell = g_{\phi\mu} \dot{x}^\mu = g_{\phi\phi} \dot{x}^\phi$. Para escrevermos as equações da geodésicas em função do tempo próprio, utilizamos o fato de que $L = \frac{d\tau}{d\lambda}$ e posteriormente multiplicamos, ambos os lados de cada uma das equações, por $\frac{d\lambda}{d\tau}$.

No plano equatorial ($\theta = \pi/2$ e $\dot{x}^\theta = 0$) as equações de Euler-Lagrange se reduzem

a:

$$\alpha = 0 : \frac{d}{d\tau} \left(- \left(1 - \frac{2m}{R} \right) \dot{x}^t \right) = - \frac{dE_{eq}}{d\tau} = 0, \quad (4.20)$$

$$\alpha = 1 : \frac{d}{d\tau} \left(\left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{\mu^2}{2R^4} \right)^{-1} \dot{x}^R \right) = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{\mu^2}{2R^4} \right)^{-1}_{,R} (\dot{x}^R)^2 - \left(1 - \frac{2m}{R} \right)_{,R} (\dot{x}^t)^2 + 2R (\dot{x}^\phi)^2 \right], \quad (4.21)$$

$$\alpha = 2 : \frac{d}{d\tau} (0) = \left[\left(\frac{2\mu^2 \cos \theta \sin \theta}{R^4} \right) \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} (\dot{x}^t)^2 + \left(\frac{\mu^2 (-20 \cos^3 \theta \sin \theta + 16 \cos \theta \sin^3 \theta)}{2R^4 \left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{\mu^2 f(\theta)}{2R^4} \right)^2} \right) \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} (\dot{x}^R)^2 + \left(-2R^2 \cos \theta \sin \theta \left(1 - \frac{\mu^2 \cos^2 \theta}{R^4} \right) - \frac{2\mu^2 \cos \theta \sin^3 \theta}{R^2} \right) \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} (\dot{x}^\phi)^2 \right] \frac{1}{2} = 0 \quad (4.22)$$

$$\alpha = 3 : \frac{d}{d\tau} (R^2 \dot{x}^\phi) = \frac{d\ell_{eq}}{d\tau} = 0, \quad (4.23)$$

onde E_{eq} é a energia e ℓ_{eq} é o momento angular, ambos definidos no plano equatorial ($\theta = \frac{\pi}{2}$). A partir dessas definições, podemos encontrar uma expressão para \dot{x}^t e \dot{x}^ϕ em função dessas constantes de movimento (E_{eq} e ℓ_{eq}):

$$\begin{cases} E_{eq} = \left(1 - \frac{2m}{R} \right) \dot{x}^t, \\ \ell_{eq} = R^2 \dot{x}^\phi, \end{cases} \rightarrow \dot{x}^t = \frac{E_{eq}}{1 - \frac{2m}{R}}, \dot{x}^\phi = \frac{\ell_{eq}}{R^2}. \quad (4.24)$$

É fácil notar que a equação (4.22) é satisfeita, o que significa que a solução de Bonnor possui geodésicas no plano equatorial. Uma relação importante e que precisa ser considerada nesse estudo, é a seguinte relação para a quadri-velocidade:

$$\left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2 = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \alpha, \quad (4.25)$$

onde $\alpha = -1$ para geodésicas do tipo-tempo, $\alpha = 1$ para geodésicas do tipo-espaço e $\alpha = 0$ para geodésicas do tipo-nula. Como estamos preocupados em descrever partículas massivas e com velocidade abaixo da velocidade da luz (limite de causalidade), vamos fazer com que as geodésicas que estamos procurando sejam do tipo-tempo. Assim a relação (4.25), para a solução de Bonnor e no plano equatorial, pode ser escrita da seguinte maneira:

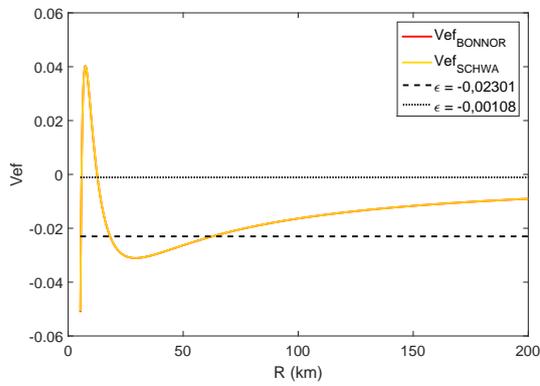
$$g_{tt}(\dot{x}^t)^2 + g_{RR}(\dot{x}^R)^2 + g_{\phi\phi}(\dot{x}^\phi)^2 = -1 \rightarrow \dot{x}^R = \pm \sqrt{\left(-1 - \frac{\ell_{eq}^2}{R^2} + \frac{E_{eq}^2}{1 - \frac{2m}{R}}\right) \left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{\mu^2}{2R^4}\right)}, \quad (4.26)$$

onde substituímos as expressões para \dot{x}^t e \dot{x}^ϕ encontradas anteriormente (equação (4.24)) em função de E_{eq} e ℓ_{eq} .

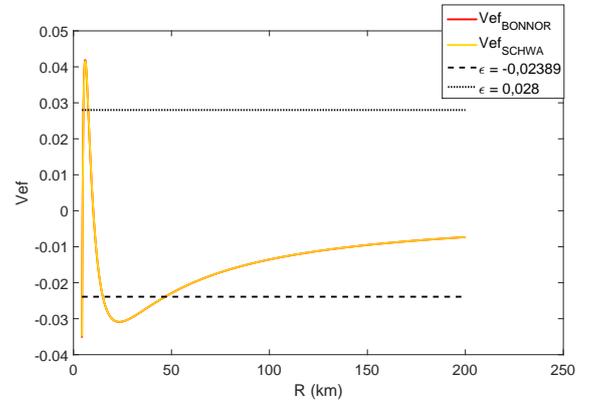
Podemos ir mais adiante e encontrar o potencial efetivo responsável por 'gerar' esta órbita, para isto vamos rearrumar a equação (4.26) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \frac{-1 + E_{eq}^2}{2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{2} \left[-\frac{2m}{R} + \frac{\ell_{eq}^2}{R^2} \left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{\mu^2}{2R^4}\right) + \frac{\mu^2}{2R^4} \left(1 - \frac{E_{eq}^2}{1 - \frac{2m}{R}}\right) \right] = \\ &\frac{1}{2} \left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 + V_{ef}(R) = \epsilon, \end{aligned} \quad (4.27)$$

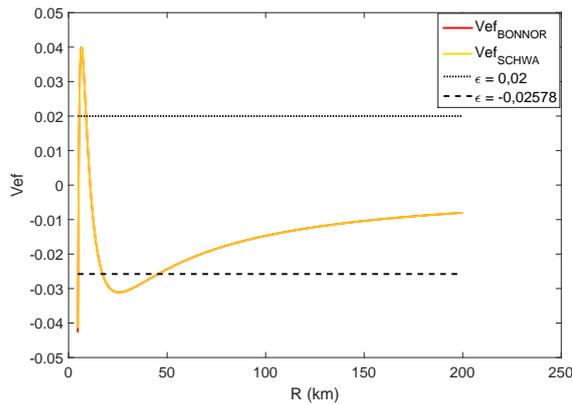
onde $V_{ef} = \frac{1}{2} \left[-\frac{2m}{R} + \frac{\ell_{eq}^2}{R^2} \left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{\mu^2}{2R^4}\right) + \frac{\mu^2}{2R^4} \left(1 - \frac{E_{eq}^2}{1 - \frac{2m}{R}}\right) \right]$ é chamado de potencial efetivo e $\epsilon = \frac{-1 + E_{eq}^2}{2}$ é constante ao longo dessa geodésica no plano equatorial e representa a energia total da partícula por unidade de massa. O comportamento desse potencial efetivo pode ser analisado a partir da figura (4.2), podemos observar que o seu comportamento não é tão distinto do potencial efetivo da solução de Schwarzschild (este potencial efetivo é caracterizado por uma barreira centrífuga finita, sua expressão é encontrada fazendo $\mu = 0$ na expressão do potencial efetivo da solução do Bonnor - $V_{ef}^{SCH} = \frac{1}{2} \left[-\frac{2m}{R} + \frac{\ell_{eq}^2}{R^2} \left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{\mu^2}{2R^4}\right) \right]$) e que este não se altera tanto com a mudança dos parâmetros que definem a estrela (massa, momento de dipolo e etc). Isso ocorre já que os valores de μ utilizados aqui e que descrevem campos magnéticos na ordem de 10^{17} G na superfície da estrela de nêutrons são baixos para serem relevantes na descrição do potencial efetivo.



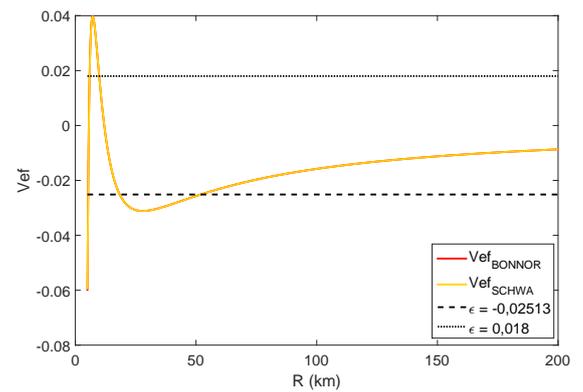
(a) O modelo dessa estrela de nêutrons é definido pelos seguintes parâmetros: $m = 1,99M_{\odot}$, $\ell_{eq} = 8,557$ e $\mu = 2,078km^2$ (ver tabela (1)).



(b) O modelo dessa estrela de nêutrons é definido pelos seguintes parâmetros: $m = 1,58M_{\odot}$, $\ell_{eq} = 6,81$ e $\mu = 2,22km^2$ (ver tabela (2)).



(c) O modelo dessa estrela de nêutrons é definido pelos seguintes parâmetros: $m = 1,74M_{\odot}$, $\ell_{eq} = 7,48$ e $\mu = 2,22km^2$ (ver tabela (3)).



(d) O modelo dessa estrela de nêutrons é definido pelos seguintes parâmetros: $m = 1,899M_{\odot}$, $\ell_{eq} = 8,165$ e $\mu = 2,155km^2$ (ver tabela (4)).

Figura 4.2: Comportamento do potencial efetivo da solução de Bonnor.

A partir das expressões de \dot{x}^R e \dot{x}^ϕ , também podemos encontrar a equação da órbita para uma partícula teste no plano equatorial $\left(\frac{dR}{d\phi}\right)$:

$$\frac{dR}{d\phi} = \frac{dR}{d\tau} \frac{d\tau}{d\phi} = \frac{\dot{x}^R}{\dot{x}^\phi} = \pm \frac{R^2}{\ell_{eq}} \sqrt{\left(-1 - \frac{\ell_{eq}^2}{R^2} + \frac{E_{eq}^2}{1 - \frac{2m}{R}}\right) \left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{\mu^2}{2R^4}\right)}. \quad (4.28)$$

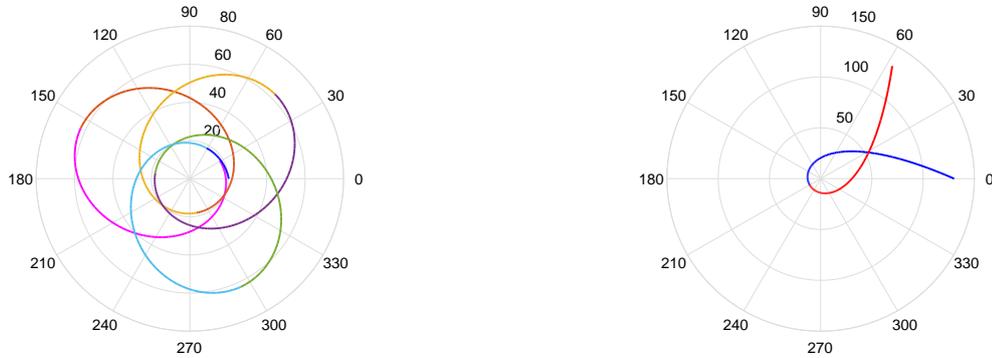
De acordo com as nossas análises, a equação diferencial acima não possui solução analítica. Dessa forma se fez necessário o uso de métodos numéricos para a resolução da mesma. O método numérico mais utilizado e preciso para resolver equações diferenciais de 1º ordem é o método de Runge-Kutta de 4º ordem, levando isto em consideração este foi escolhido para resolver a nossa problemática. A solução numérica encontrada possuía alguns pontos em que assumia valores complexos. Para a descrição das órbitas estes valores tiveram que ser excluídos fazendo com que ficássemos apenas com uma solução real. O processo para encontrar as soluções que descrevem as órbitas foi o seguinte:

1. Informamos os valores de m , μ , ℓ_{eq} e E_{eq} (o valor de E_{eq} é escolhido a partir da análise do comportamento do potencial efetivo);
2. Analisamos o gráfico de $V_{eff}(R)$ e escolhemos o intervalo de R em que vamos procurar as soluções;
3. Resolvemos a equação diferencial (4.28) a partir do método de Runge-Kutta para o intervalo escolhido no item anterior:
 - (a) Após escolher um valor arbitrário para ϕ , o método de Runge-Kutta procura soluções em que os raios diminuam com o aumento de ϕ e para até encontrar soluções complexas, neste momento a solução chegou ao raio mínimo da órbita;
 - (b) Após a solução encontrar o raio mínimo, filtramos apenas as soluções reais e iniciamos a solução em outro intervalo $[\phi_f, \phi_f + 2\pi]$, onde ϕ_f é o ângulo que corresponde ao raio mínimo encontrado na primeira volta, porém agora procuro soluções em que o raio cresce com o aumento de ϕ até atingirmos o raio máximo (último ponto em que a solução ainda é real, posterior a ele a solução se torna complexa);
 - (c) O processo descrito no item 3a) se repete, só que agora no intervalo entre $[\phi_f, \phi_f + 2\pi]$, onde agora ϕ_f é o ângulo que corresponde ao raio máximo;

- (d) O processo vai se intercalando entre procurar soluções em que o raio diminui com o aumento de ϕ $\left(\frac{dR}{d\phi} = -\frac{R^2}{\ell_{eq}} \sqrt{\left(-1 - \frac{\ell_{eq}^2}{R^2} + \frac{E_{eq}^2}{1 - \frac{2m}{R}} \right) \left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{\mu^2}{2R^4} \right)} \right)$ e soluções em que o raio aumenta com o aumento de ϕ $\left(\frac{dR}{d\phi} = +\frac{R^2}{\ell_{eq}} \sqrt{\left(-1 - \frac{\ell_{eq}^2}{R^2} + \frac{E_{eq}^2}{1 - \frac{2m}{R}} \right) \left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{\mu^2}{2R^4} \right)} \right)$, a rotina para até completar oito voltas.

4. Após encontrar as soluções reais para as oitos voltas, o último passo é juntar estas soluções encontradas para cada volta.

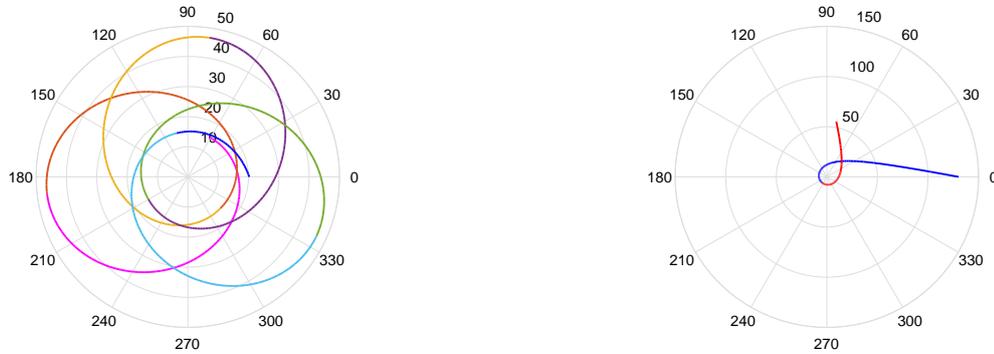
Utilizando a rotina descrita no parágrafo acima, encontramos as órbitas para cada um dos quatro distintos modelos de estrelas de nêutrons (ver figura (4.3 - 4.6)). Podemos ver que assim como na teoria da gravitação de Newton o valor de ϵ determina o tipo de órbita (órbitas fechadas (ver figura (4.3(a), 4.4(a), 4.5(a), 4.6(a))) e órbitas de espalhamento (ver figura (4.3(b), 4.4(b), 4.5(b), 4.6(b)))) realizada pela partícula teste.



(a) Órbita elíptica de uma partícula teste em um espaço-tempo descrito pela solução de Bonnor, onde as propriedades deste modelo de estrelas de nêutrons são as mesmas descritas na figura (4.2(a)) com $\epsilon = -0,02301$.

(b) Órbita de espalhamento de uma partícula teste em um espaço-tempo descrito pela solução de Bonnor, onde as propriedades deste modelo de estrelas de nêutrons são as mesmas descritas na figura (4.2(a)) com $\epsilon = -0,00108$.

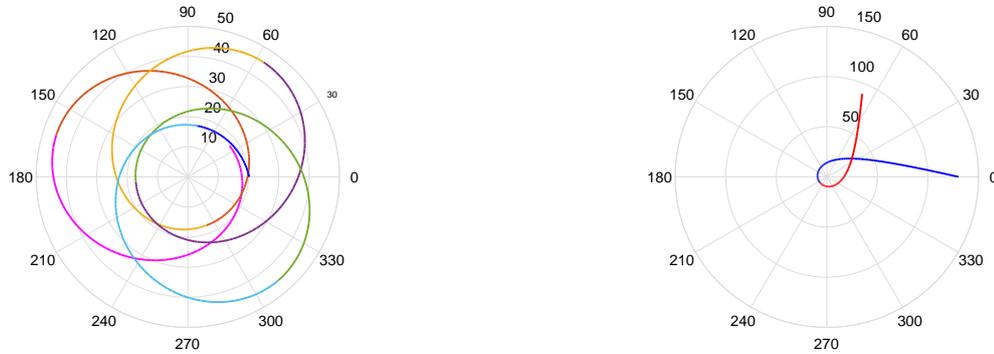
Figura 4.3: Órbitas de uma partícula teste ao redor de um objeto massivo descrito pela solução de Bonnor. Os valores dos parâmetros utilizados são: $\ell_{eq} = 8,557$, $\mu = 2,078 km^2$ e $m = 1,99M_{\odot}$.



(a) Órbita elíptica de uma partícula teste em um espaço-tempo descrito pela solução de Bonnor, onde as propriedades deste modelo de estrelas de nêutrons são as mesmas descritas na figura (4.2(b)) com $\epsilon = -0,02389$.

(b) Órbita de espalhamento de uma partícula teste em um espaço-tempo descrito pela solução de Bonnor, onde as propriedades deste modelo de estrelas de nêutrons são as mesmas descritas na figura (4.2(b)) com $\epsilon = 0,028$.

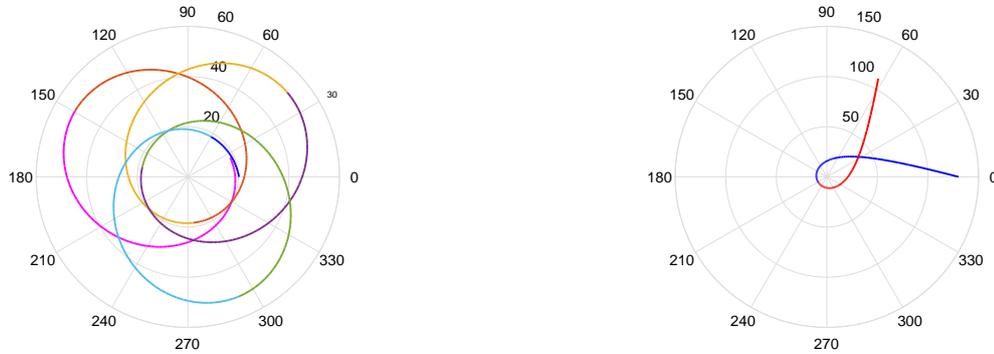
Figura 4.4: Órbitas de uma partícula teste ao redor de um objeto massivo descrito pela solução de Bonnor. Os valores dos parâmetros utilizados são: $\ell_{eq} = 6,81$, $\mu = 2,22 km^2$ e $m = 1,58M_{\odot}$.



(a) Órbita elíptica de uma partícula teste em um espaço-tempo descrito pela solução de Bonnor, onde as propriedades deste modelo de estrelas de nêutrons são as mesmas descritas na figura (4.2(c)) com $\epsilon = -0,02578$.

(b) Órbita de espalhamento de uma partícula teste em um espaço-tempo descrito pela solução de Bonnor, onde as propriedades deste modelo de estrelas de nêutrons são as mesmas descritas na figura (4.2(c)) com $\epsilon = 0,02$.

Figura 4.5: Órbitas de uma partícula teste ao redor de um objeto massivo descrito pela solução de Bonnor. Os valores dos parâmetros utilizados são: $\ell_{eq} = 7,48$, $\mu = 2,22 km^2$ e $m = 1,74 M_{\odot}$.



(a) Órbita elíptica de uma partícula teste em um espaço-tempo descrito pela solução de Bonnor, onde as propriedades deste modelo de estrelas de nêutrons são as mesmas descritas na figura (4.2(d)) com $\epsilon = -0,02513$.

(b) Órbita de espalhamento de uma partícula teste em um espaço-tempo descrito pela solução de Bonnor, onde as propriedades deste modelo de estrelas de nêutrons são as mesmas descritas na figura (4.2(d)) com $\epsilon = 0,016$.

Figura 4.6: Órbitas de uma partícula teste ao redor de um objeto massivo descrito pela solução de Bonnor. Os valores dos parâmetros utilizados são: $\ell_{eq} = 8,16$, $\mu = 2,15 km^2$ e $m = 1,899M_{\odot}$.

4.1.2 Órbitas dos fótons ($\alpha = 0$) para a solução de Bonnor

Até este instante nos preocupamos em descrever apenas as geodésicas do tipo-tempo, que são percorridas por partículas massivas, ou seja, partículas que viajam com velocidade abaixo da velocidade da luz e conseqüentemente percorrem geodésicas que estão dentro do cone de luz do observador (para uma discussão mais detalhada a respeito do assunto, recomenda-se ler o capítulo um desta dissertação). Neste momento passaremos a discutir as geodésicas tipo-nula (que são percorridas por fótons), nesta subseção apresentaremos e interpretaremos tais geodésicas e posteriormente realizaremos a distinção entre os dois tipos de movimento com a finalidade de comparar e interpretar as diferenças e as possíveis semelhanças entre eles.

Como já foi comentado anteriormente, os fótons percorrem geodésicas do tipo-nula ($\alpha = 0$), ou seja, partículas que viajam com velocidade igual a velocidade da luz e consequentemente percorrem geodésicas que estão tangente ao cone de luz do observador. Fazendo $\alpha = 0$ na condição de normalização da quadri-velocidade (equação (4.25)), chegamos a seguinte expressão para \dot{x}^R :

$$g_{tt}(\dot{x}^t)^2 + g_{RR}(\dot{x}^R)^2 + g_{\phi\phi}(\dot{x}^\phi)^2 = 0 \rightarrow \dot{x}_f^R = \pm \sqrt{\left(-\frac{\ell_{eq}^2}{R^2} + \frac{E_{eq}^2}{1 - \frac{2m}{R}}\right) \left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{\mu^2}{2R^4}\right)}, \quad (4.29)$$

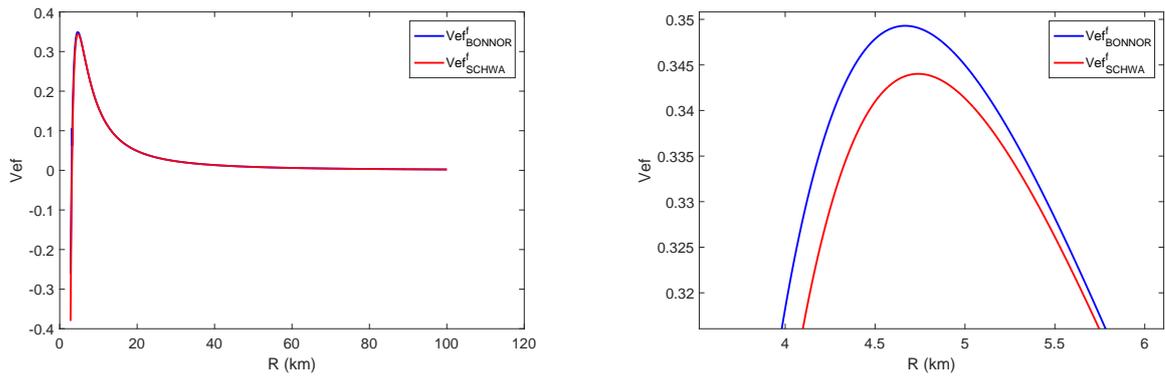
onde, novamente, substituímos as expressões para \dot{x}^t e \dot{x}^ϕ (equação (4.24)) e o subíndice f foi inserido com o intuito de diferenciar a quadri-velocidade do fóton da quadri-velocidade de partículas massivas. O potencial efetivo para os fótons é determinado após rearmarmos a expressão para \dot{x}_f^R (equação (4.29)) da seguinte maneira

$$\frac{E_{eq}^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{\ell_{eq}^2}{R^2} \left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{\mu^2}{2R^4}\right) - \frac{\mu^2 E_{eq}^2}{2R^4 \left(1 - \frac{2m}{R}\right)} \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 + V_{ef}^f = \epsilon, \quad (4.30)$$

onde $V_{ef}^f = \frac{1}{2} \left[\frac{\ell_{eq}^2}{R^2} \left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{\mu^2}{2R^4}\right) - \frac{\mu^2 E_{eq}^2}{2R^4 \left(1 - \frac{2m}{R}\right)} \right]$ é chamado de potencial efetivo para os fótons e $\epsilon = \frac{E_{eq}^2}{2}$ é constante ao longo da geodésica no plano equatorial.

As figuras abaixo ilustram o comportamento desse potencial em função da coordenada radial R para quatro modelos de estrelas de nêutrons distintos, analisando essas figuras percebemos que, assim como o que ocorre no potencial efetivo das partículas massivas, a inserção do momento de dipolo magnético não altera drasticamente o potencial efetivo para os fótons, quando comparado ao potencial efetivo gerado pela solução de Schwarzschild. Vale a pena destacar que neste trabalho nos limitamos a essas escolhas para os valores de μ para que esses gerassem campos magnéticos condizentes com o que é esperado para as estrelas de nêutrons. Caso escolhêssemos valores maiores para μ a diferença entre os potenciais efetivos gerados pelas solução de Bonnor e de Schwarzschild ficaria mais notória, porém estaríamos modelando estrelas de nêutrons com campos magnéticos acima do esperado teoricamente e verificado observacionalmente. Também percebemos que diferentemente do potencial das partículas massivas, o potencial efetivo dos fótons não possuem pontos de mínimo, apenas um ponto de máximo que define a altura da barreira centrífuga. Dessa maneira, os fótons são vão possuir uma órbita circular que será instável. Além da órbita circular instável, dependendo do valor de ϵ o fóton poderá descrever uma órbita uma órbita de espalhamento (ver figura (4.9)). É importante esclarecer que a divergência do potencial efetivo não é visível nas figuras abaixo, pois foi utilizado para R o intervalo entre

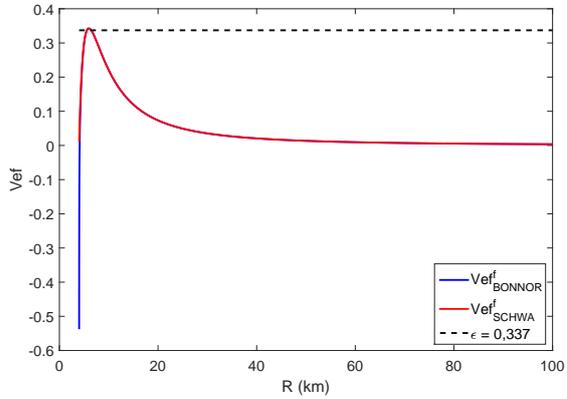
4,0 e 200 que exclui a divergência que ocorre em $R = 2m$ ($= 2 \times 1,99 = 3,98$ - modelo 1 de estrela de nêutrons (figura (4.7)); $= 2 \times 1,58 = 3,16$ - modelo 2 de estrela de nêutrons (figura (4.8))).



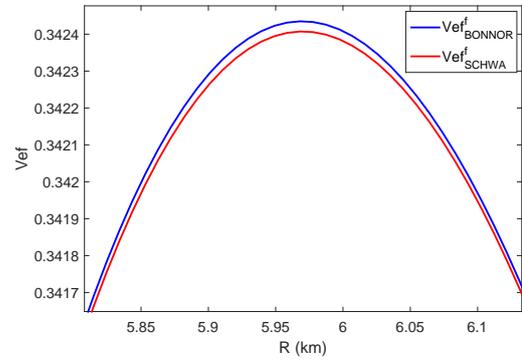
(a) Comparação entre o comportamento do potencial efetivo dos fótons gerado pelas soluções de Bonnor e a de Schwarzschild.

(b) Zoon do pico presente na figura ao lado.

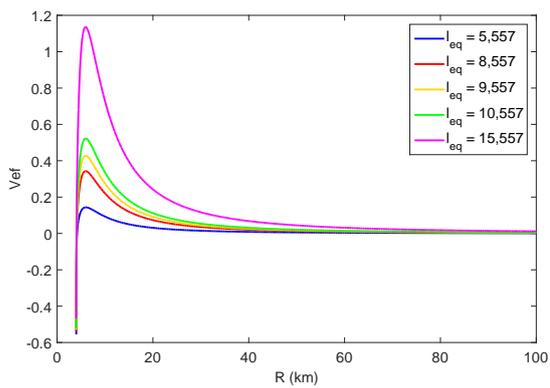
Figura 4.7: Potencial efetivo dos fótons ao redor de uma estrela de nêutrons que possui os seguintes parâmetros: $m = 1,58M_{\odot}$, $\ell_{eq} = 6,81$, $\epsilon = 0,0002$ e $\mu = 2,22$.



(a) Comparação entre o comportamento do potencial efetivo dos fótons gerado pelas soluções de Bonnor e a de Schwarzschild, onde utilizamos $\ell_{eq} = 8,557$.



(b) Zoon do pico presente na figura ao lado.



(c) Influência do valor de ℓ_{eq} no comportamento do potencial efetivo dos fótons gerado pela solução de Bonnor.

Figura 4.8: Potencial efetivo dos fótons ao redor de uma estrela de nêutrons que possui os seguintes parâmetros: $m = 1,99M_{\odot}$, $\ell_{eq} = 8,557$, $\epsilon = 0,337$ e $\mu = 2,078$.

Já a expressão que define a órbita para os fótons fica definida da seguinte maneira:

$$\frac{dR}{d\phi} = \frac{dR}{d\tau} \frac{d\tau}{d\phi} = \frac{\dot{x}_f^R}{\dot{x}_f^\phi} = \pm \frac{R^2}{\ell_{eq}} \sqrt{\left(-\frac{\ell_{eq}^2}{R^2} + \frac{E_{eq}^2}{1 - \frac{2m}{R}}\right) \left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{\mu^2}{2R^4}\right)}. \quad (4.31)$$

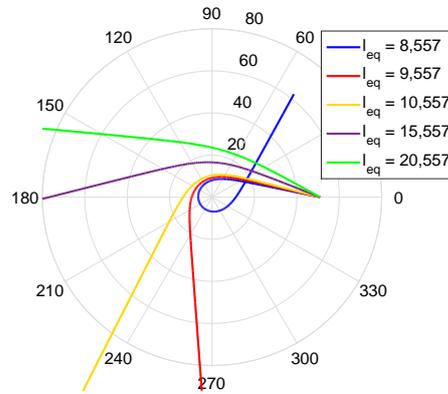


Figura 4.9: Órbita de espalhamento de um fóton ao redor de um objeto massivo e campo magnético dipolar descrito pela solução de Bonnor. Os parâmetros que caracterizam este objeto massivo são: $m = 1,99M_\odot$, $\mu = 2.078km^2$ e $\epsilon = 0,337$.

4.1.3 Equações da geodésicas no plano equatorial para uma solução geral que descreve um objeto massivo e com campo magnético dipolar

O elemento de linha mais simples que representa um espaço-tempo estacionário e com simetria axial escrito em coordenadas esféricas ($x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$) é dado por [71]:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + A^2 (dR^2 + R^2 d\theta^2) + B^2 R^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (4.32)$$

onde B , A e N são funções de r e θ . As equações da geodésicas descritas na subseção anterior podem ser escritas para esta solução, para isto ser feito primeiramente vamos escrever a

Lagrangiana neste espaço-tempo:

$$L = \sqrt{g_{tt} \frac{dx^t}{d\lambda} \frac{dx^t}{d\lambda} + g_{RR} \frac{dx^R}{d\lambda} \frac{dx^R}{d\lambda} + g_{\theta\theta} \frac{dx^\theta}{d\lambda} \frac{dx^\theta}{d\lambda} + g_{\phi\phi} \frac{dx^\phi}{d\lambda} \frac{dx^\phi}{d\lambda}} = \left[-N^2 \left(\frac{dx^t}{d\lambda} \right)^2 + A^2 \left(\frac{dx^R}{d\lambda} \right)^2 + A^2 R^2 \left(\frac{dx^\theta}{d\lambda} \right)^2 + R^2 B^2 \sin^2 \theta \left(\frac{dx^\phi}{d\lambda} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.33)$$

Assim as equações das geodésicas para esta solução são escritas como

$$\alpha = 0 : \quad \frac{d}{d\tau} (-N^2 \dot{x}^t) = \frac{\partial L}{\partial t} = 0, \quad (4.34)$$

$$\alpha = 1 : \quad \frac{d}{d\tau} (A^2 \dot{x}^R) = \frac{\partial L}{\partial R} = \frac{1}{2} \left[-(N^2)_{,R} (\dot{x}^t)^2 + (A^2)_{,R} (\dot{x}^R)^2 + (R^2 A^2)_{,R} (\dot{x}^\theta)^2 + \sin^2 \theta (B^2 R^2)_{,R} (\dot{x}^\phi)^2 \right], \quad (4.35)$$

$$\alpha = 2 : \quad \frac{d}{d\tau} (A^2 R^2 \dot{x}^\theta) = \frac{1}{2} \left[-(N^2)_{,\theta} (\dot{x}^t)^2 + (A^2)_{,\theta} (\dot{x}^R)^2 + R^2 (A^2)_{,\theta} (\dot{x}^\theta)^2 + R^2 (B^2 \sin^2 \theta)_{,\theta} (\dot{x}^\phi)^2 \right], \quad (4.36)$$

$$\alpha = 3 : \quad \frac{d}{d\tau} (R^2 B^2 \sin^2 \theta \dot{x}^\phi) = \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0, \quad (4.37)$$

onde, novamente, as equações (4.34) e (4.37) representam, respectivamente, a conservação da energia e a conservação do momento, onde definimos a energia como sendo $E = -g_{t\mu} \dot{x}^\mu = -g_{tt} \dot{x}^t$ e o momento angular como $\ell = g_{\phi\mu} \dot{x}^\mu = g_{\phi\phi} \dot{x}^\phi$.

Para encontrarmos as equações da geodésicas no plano equatorial, fazemos $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\dot{x}^\theta = 0$ nas equações o que resulta em

$$\alpha = 0 : \quad \frac{d}{d\tau} \left(-N^2 \left(R, \frac{\pi}{2} \right) \dot{x}^t \right) = -\frac{dE_{eq}}{d\tau} = 0, \quad (4.38)$$

$$\alpha = 1 : \quad \frac{d}{d\tau} \left(A^2 \left(R, \frac{\pi}{2} \right) \dot{x}^R \right) = \frac{\partial L}{\partial R} = \frac{1}{2} \left[-\left(N^2 \left(R, \frac{\pi}{2} \right) \right)_{,R} (\dot{x}^t)^2 + \left(A^2 \left(R, \frac{\pi}{2} \right) \right)_{,R} (\dot{x}^R)^2 + \left(R^2 A^2 \left(R, \frac{\pi}{2} \right) \right)_{,R} (0)^2 + \left(B^2 \left(R, \frac{\pi}{2} \right) R^2 \right)_{,R} (\dot{x}^\phi)^2 \right], \quad (4.39)$$

$$\alpha = 2 : \quad \frac{d}{d\tau} (0) = 0 = \frac{1}{2} \left[-\left(\frac{\partial N^2 (R, \theta)}{\partial \theta} \right) \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} (\dot{x}^t)^2 + \left(\frac{\partial A^2 (R, \theta)}{\partial \theta} \right) \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} (\dot{x}^R)^2 + \left(\frac{\partial (\sin^2 \theta B^2 (R, \theta))}{\partial \theta} \right) \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} R^2 (\dot{x}^\phi)^2 \right], \quad (4.40)$$

$$\alpha = 3 : \quad \frac{d}{d\tau} \left(R^2 B^2 \left(R, \frac{\pi}{2} \right) \dot{x}^\phi \right) = \frac{d\ell_{eq}}{d\tau} = 0, \quad (4.41)$$

onde E_{eq} é a energia no plano equatorial e ℓ_{eq} é o momento angular no plano equatorial. As componentes $\mu = 0$ e $\mu = 3$ da quadri-velocidade neste plano equatorial são escritas em funções dessas constantes de movimento da seguinte maneira

$$\begin{cases} E_{eq} = N^2 \left(R, \frac{\pi}{2} \right) \dot{x}^t, \\ \ell_{eq} = R^2 B^2 \left(R, \frac{\pi}{2} \right) \dot{x}^\phi, \end{cases} \rightarrow \dot{x}^t = \frac{E_{eq}}{N^2 \left(R, \frac{\pi}{2} \right)}, \dot{x}^\phi = \frac{\ell_{eq}}{R^2 B^2 \left(R, \frac{\pi}{2} \right)}. \quad (4.42)$$

Substituindo as expressões para \dot{x}^t e \dot{x}^ϕ , encontradas acima, na condição de normalização da quadri-velocidade encontramos

$$-1 = g_{tt}\left(R, \frac{\pi}{2}\right)(\dot{x}^t)^2 + g_{RR}\left(R, \frac{\pi}{2}\right)(\dot{x}^R)^2 + g_{\phi\phi}\left(R, \frac{\pi}{2}\right)(\dot{x}^\phi)^2 \quad (4.43)$$

$$\rightarrow \dot{x}^R = \pm \sqrt{\frac{1}{A^2\left(R, \frac{\pi}{2}\right)} \left(-1 + \frac{E_{eq}^2}{N^2\left(R, \frac{\pi}{2}\right)} - \frac{\ell_{eq}^2}{R^2 B^2\left(R, \frac{\pi}{2}\right)} \right)}. \quad (4.44)$$

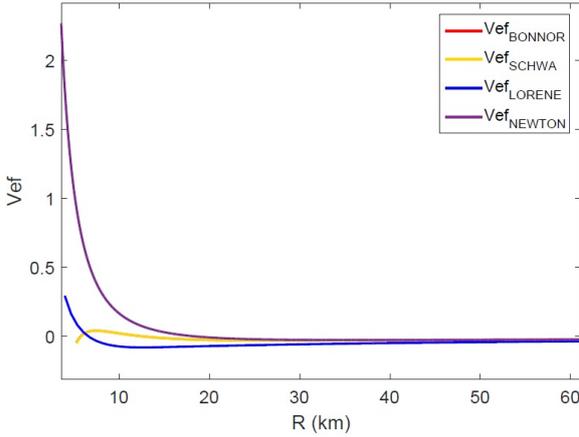
O potencial efetivo desta órbita é encontrado a partir de:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dR}{d\tau} \right)^2 + V_{eq}(R, E_{eq}, \ell_{eq}) = const., \quad (4.45)$$

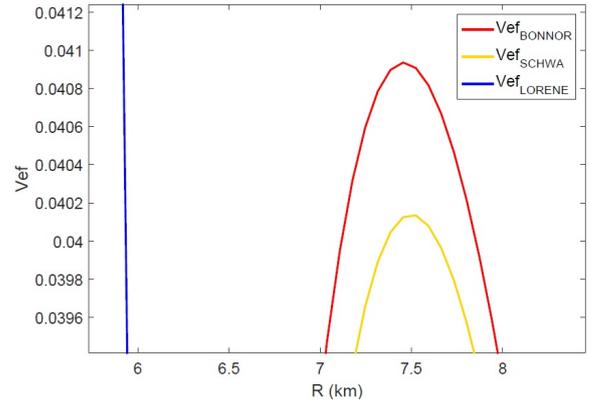
sabemos que essa quantidade deve ser constante ao longo da geodésica. O valor dessa constante pode ser escolhido de forma arbitrária, já que este valor apenas define o quão deslocado do eixo o plot de V_{eq} vai estar e sempre podemos somar ou subtrair uma constante a fim de normalizar esse deslocamento. Assim de forma a simplificar os cálculos escolhe-se essa constante igual a zero e somente na expressão final somamos essa constante de normalização, fazendo uso da expressão para \dot{x}^R (equação 4.44) o potencial efetivo fica definido como

$$V_{eq}(R, E_{eq}, \ell_{eq}) = -\frac{1}{2} \left(\frac{dR}{d\tau} \right)^2 = -\frac{1}{2A^2\left(R, \frac{\pi}{2}\right)} \left(-1 + \frac{E_{eq}^2}{N^2\left(R, \frac{\pi}{2}\right)} - \frac{\ell_{eq}^2}{R^2 B^2\left(R, \frac{\pi}{2}\right)} \right). \quad (4.46)$$

As figuras abaixo (4.10-4.16) representam o comportamento do potencial efetivo para a solução de Bonnor que foi encontrado a partir da equação (4.27), para a solução de Schwarzschild com ($\mu = 0$) e para a solução descrita acima e resolvida através do código LORENE que será discutido no próximo capítulo. Podemos perceber que o poço do ponto de mínimo para a solução encontrada no LORENE e muito maior que nos potenciais efetivos das soluções de Bonnor e a de Schwarzschild. A barreira centrífuga também tem um altura infinita diferentemente do potencial efetivo das soluções de Bonnor e de Schwarzschild em que tal altura possui valor finito, isto ocorre já que diferentemente das soluções de Bonnor e de Schwarzschild que são soluções externas de um objeto massivo, a solução numérica é encontrada para o espaço todo e para distâncias pequenas já estamos considerando a solução interna a estrela onde não existe um potencial efetivo já que a partícula não atravessa a estrela. As figuras (4.11, 4.13, 4.15 e 4.17) mostram a dependência do valor de ℓ_{eq} com a definição do comportamento do potencial efetivo, percebemos que quanto menor é o valor de ℓ_{eq} o comportamento do potencial efetivo se torna cada vez mais próximo do potencial efetivo para o caso Newtoniano.



(a) Comportamento dos potenciais efetivos. A linha em vermelho está sobreposta a linha em amarelo, isso mostra o quão a potencial efetivo de Bonnor e de Schwarzschild são semelhantes.



(b) Ampliação no ponto de máximo da figura 4.10(a). A presença do campo magnético faz com que o ponto de máximo do potencial efetivo aumente seu valor, tal diferença é mínima.

Figura 4.10: Perfil do potencial efetivo para a solução de Bonnor (curva em vermelho), para a solução de Schwarzschild (curva em amarelo) e para a solução do LORENE (curva em azul). Os valores dos parâmetros utilizados são: $\ell_{eq} = 8,557$, $E_{eq} = 0,02145$, $\mu = 2,078 km^2$ e $m = 1,99M_{\odot}$. O campo magnético central gerado por este valor de μ é de $14,40606357 \times 10^{16} G$.

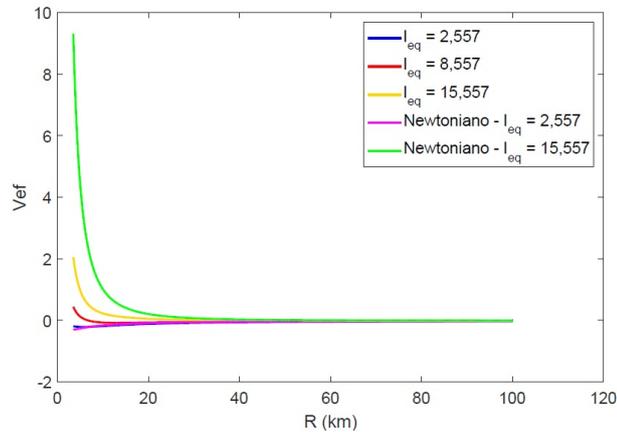
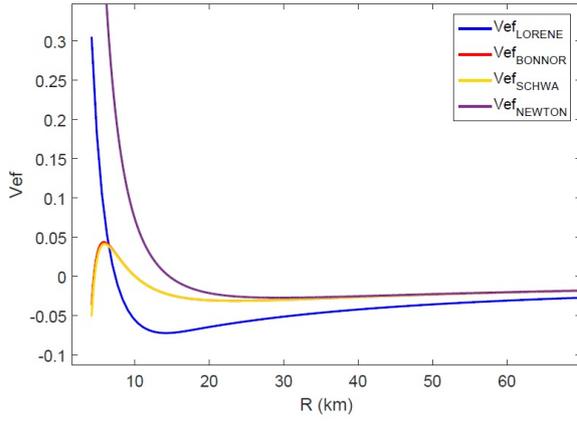
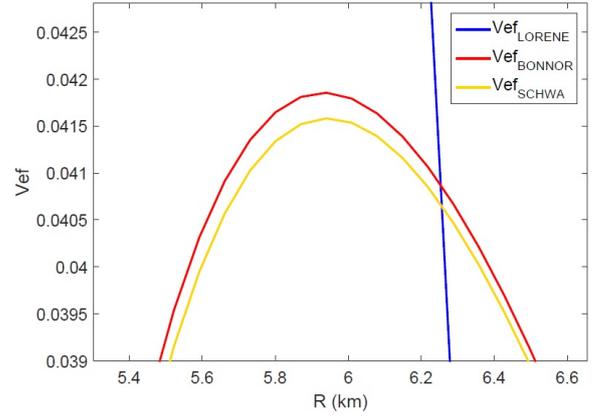


Figura 4.11: Influência notória do valor de ℓ_{eq} no formato do poço do potencial efetivo da solução numérica do LORENE.



(a) Comportamento dos potenciais efetivos. A linha em vermelho está sobreposta a linha em amarelo, isso mostra o quão a potencial efetivo de Bonnor e de Schwarzschild são semelhantes.



(b) Ampliação no ponto de máximo da figura 4.12(a). A presença do campo magnético faz com que o ponto de máximo do potencial efetivo aumente seu valor, tal diferença é mínima.

Figura 4.12: Mesmo que a figura (4.10) exceto com $\ell_{eq} = 6,81$, $E_{eq} = 0,02145$, $\mu = 2,22 km^2$ e $m = 1,58M_{\odot}$. O campo magnético central gerado por este valor de μ é de $10,69322493 \times 10^{16}G$.

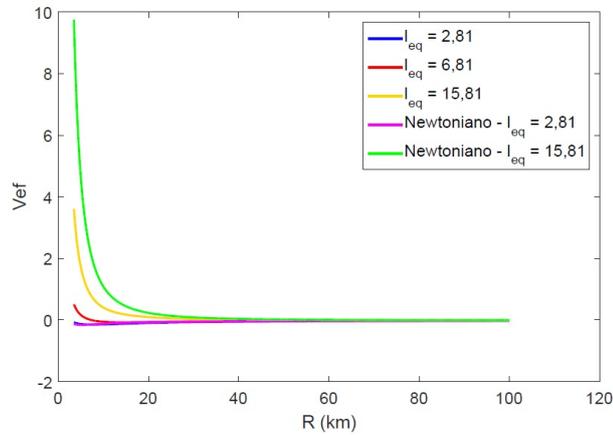
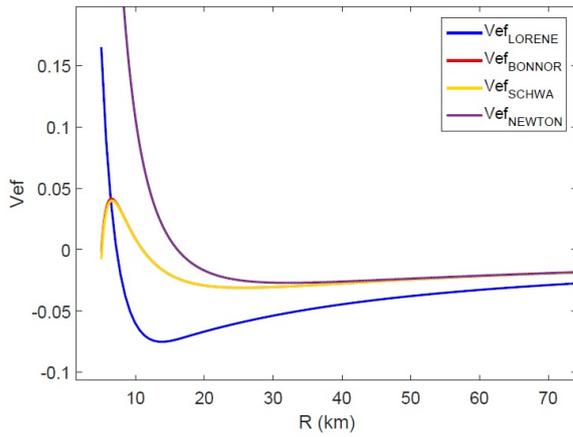
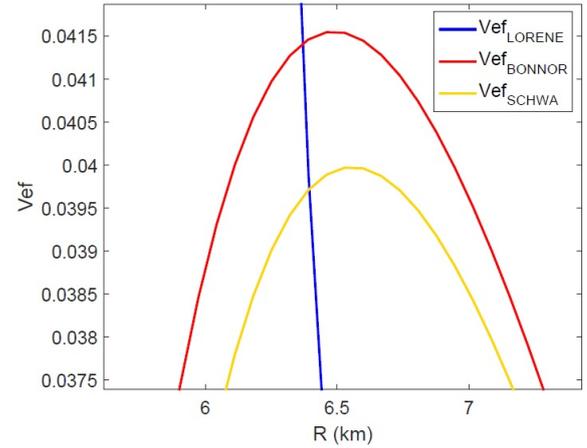


Figura 4.13: Influência notória do valor de ℓ_{eq} no formato do poço do potencial efetivo da solução numérica do LORENE.



(a) Comportamento dos potenciais efetivos. A linha em vermelho está sobreposta a linha em amarelo, isso mostra o quão a potencial efetivo de Bonnor e de Schwarzschild são semelhantes.



(b) Ampliação no ponto de máximo da figura 4.14(a). A presença de campo magnético faz com que o ponto de máximo do potencial efetivo aumente seu valor, tal diferença é mínima.

Figura 4.14: Mesmo que a figura (4.10) exceto com $\ell_{eq} = 7,48$, $E_{eq} = 0,02145$, $\mu = 2,22 km^2$ e $m = 1,74 M_{\odot}$. O campo magnético central gerado por este valor de μ é de $12,353 \times 10^{16} G$.

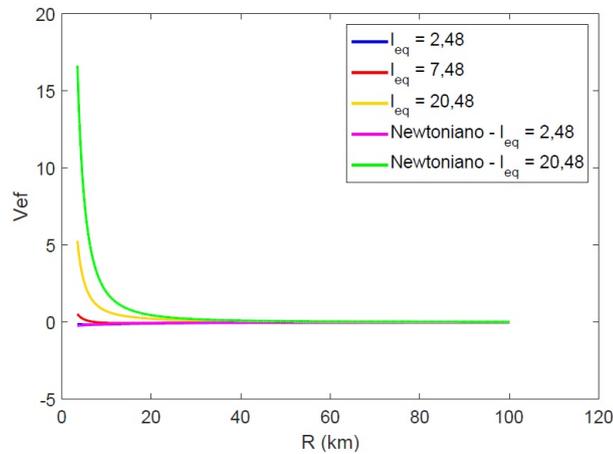
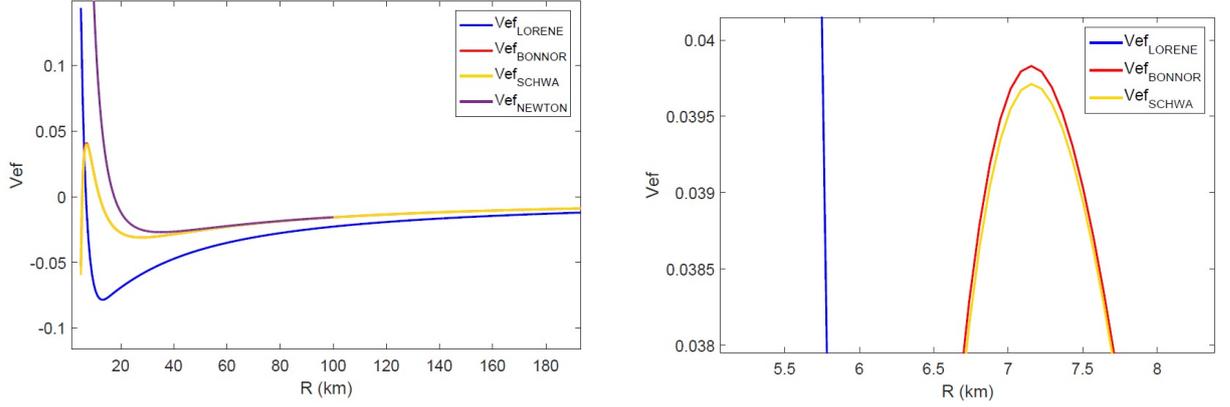


Figura 4.15: Influência notória do valor de ℓ_{eq} no formato do poço do potencial efetivo da solução numérica do LORENE.



(a) Comportamento dos potenciais efetivos. A linha em vermelho está sobreposta a linha em amarelo, isso mostra o quão a potencial efetivo de Bonnor e de Schwarzschild são semelhantes.

(b) Ampliação no ponto de máximo da figura 4.16(a). A presença de campo magnético faz com que o ponto de máximo do potencial efetivo aumente seu valor, tal diferença é mínima.

Figura 4.16: Mesmo que a figura (4.10) exceto com $\ell_{eq} = 8,16$, $E_{eq} = 0,02145$, $\mu = 2,15 km^2$ e $m = 1,899 M_{\odot}$. O campo magnético central gerado por este valor de μ é de $14,40606357 \times 10^{16} G$.

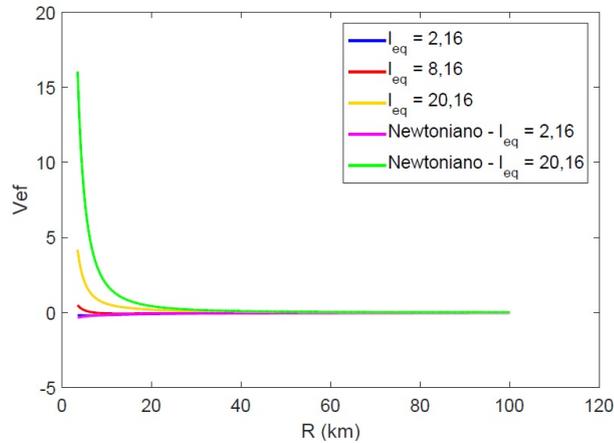


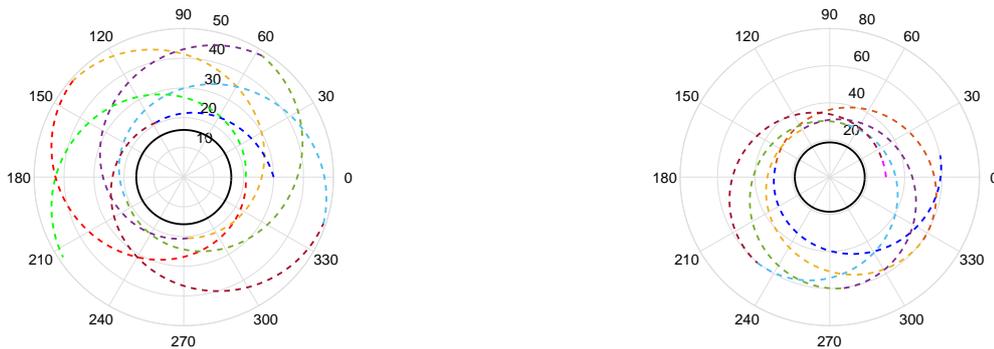
Figura 4.17: Influência notória do valor de ℓ_{eq} no formato do poço do potencial efetivo da solução numérica do LORENE.

A equação da órbita no plano equatorial é dada pela seguinte expressão

$$\frac{dR}{d\phi} = \frac{dR}{d\tau} \frac{d\tau}{d\phi} = \frac{\dot{x}^R}{\dot{x}^\phi} = \pm \frac{R^2 B^2(R, \frac{\pi}{2})}{\ell_{eq}} \sqrt{\frac{1}{A^2(R, \frac{\pi}{2})} \left(-1 + \frac{E_{eq}^2}{N^2(R, \frac{\pi}{2})} - \frac{\ell_{eq}^2}{R^2 B^2(R, \frac{\pi}{2})} \right)}. \quad (4.47)$$

Para encontrarmos as soluções da equação diferencial acima fizemos uso do mesmo procedimento numérico já descrito na subseção (4.1.1) desta dissertação. Assim encontramos as órbitas ilustradas nas figuras abaixo. Percebemos que a solução numérica também

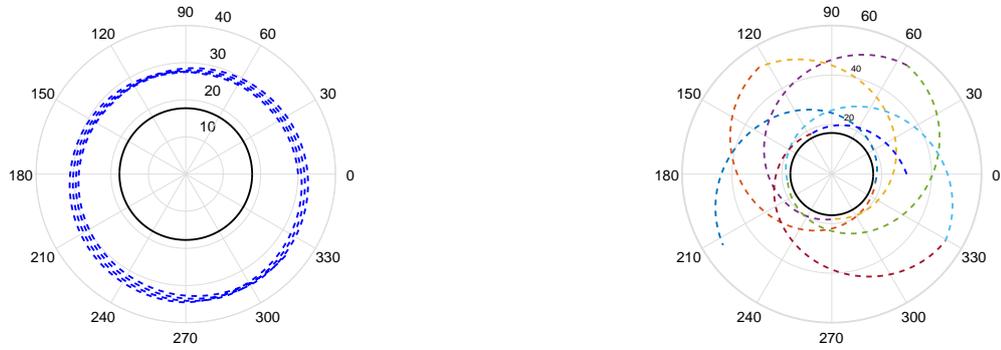
gera as mesmas órbitas para as partículas massivas, nas figuras (4.18(a)-4.19(b)) podemos observar as órbitas fechadas enquanto nas figuras (4.20(a) - 4.20(b)) se encontram as órbitas de espalhamento realizada por uma partícula massiva. Notamos que a dependência notória do valor do ℓ_{eq} no formato da órbita, isso porque como vimos anteriormente o valor do ℓ_{eq} modifica o tamanho do poço do potencial, quanto maior for esse valor maior e a profundidade do poço, enquanto quando este vai assumindo valores cada vez menores o poço vai se tornando cada vez mais raso (ver figuras (4.11 4.13, 4.15 e 4.17)). Chamamos a atenção ao fato do código LORENE ter feito uso de uma equação de estado do tipo politrópica para encontrar os raios das estrelas em análise, atualmente já existem diversos artigos que implementam equações de estados mais realísticas no código LORENE ([72], [73]).



(a) Os valores dos parâmetros deste modelo de estrela de nêutrons são: $m = 1,99M_{\odot}$, $E_{eq} = -0,965$ e $\ell_{eq} = 11,557$. A linha em preto representa o raio da estrela que é igual a $15,87km$.

(b) Os valores dos parâmetros deste modelo de estrela de nêutrons são: $m = 1,58M_{\odot}$, $E_{eq} = -0,9765$ e $\ell_{eq} = 10,947$. A linha em preto representa o raio da estrela que é igual a $18,68km$.

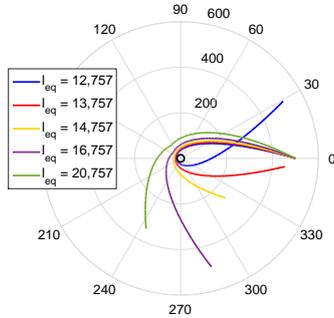
Figura 4.18: Órbita fechada de uma partícula teste em um espaço-tempo descrito pela solução encontrada utilizando o código LORENE para dois modelos distintos de estrelas de nêutrons.



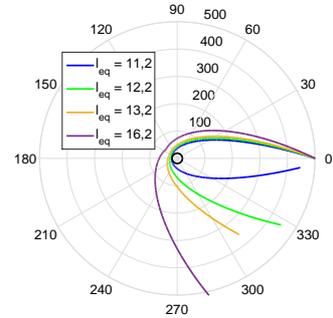
(a) Os valores dos parâmetros deste modelo de estrela de nêutrons são: $m = 1,74M_{\odot}$, $\ell_{eq} = 10,557$ e $E_{eq} = -0,965$. A linha em preto representa o raio da estrela que é igual a $17,73\text{km}$.

(b) Os valores dos parâmetros deste modelo de estrela de nêutrons são: $m = 1,899M_{\odot}$, $\ell_{eq} = 11,0$ e $E_{eq} = -0,967$. A linha em preto representa o raio da estrela que é igual a $16,61\text{km}$.

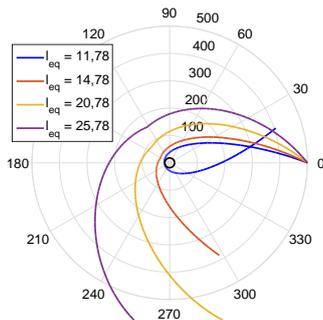
Figura 4.19: Mesmo que a figura acima.



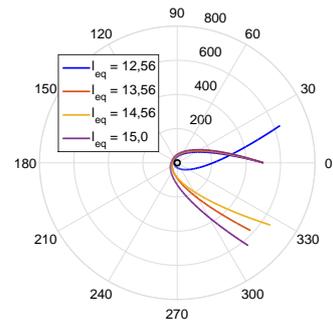
(a) Os valores dos parâmetros deste modelo de estrela de nêutrons são: $m = 1,99M_{\odot}$ e $E_{eq} = -0,99819$. A linha em preto representa o raio da estrela que é igual a $15,87km$.



(b) Os valores dos parâmetros deste modelo de estrela de nêutrons são: $m = 1,58M_{\odot}$ e $E_{eq} = 0,998$. A linha em preto representa o raio da estrela que é igual a $18,68km$.



(c) Os valores dos parâmetros deste modelo de estrela de nêutrons são: $m = 1,74M_{\odot}$ e $E_{eq} = 0,997$. A linha em preto representa o raio da estrela que é igual a $17,73km$.



(d) Os valores dos parâmetros deste modelo de estrela de nêutrons são: $m = 1,899M_{\odot}$ e $E_{eq} = 0,999$. A linha em preto representa o raio da estrela que é igual a $16,61km$.

Figura 4.20: Órbita de espalhamento de uma partícula teste em um espaço-tempo descrito pela solução encontrada utilizando o código LORENE para quatro modelos distintos de estrelas de nêutrons.

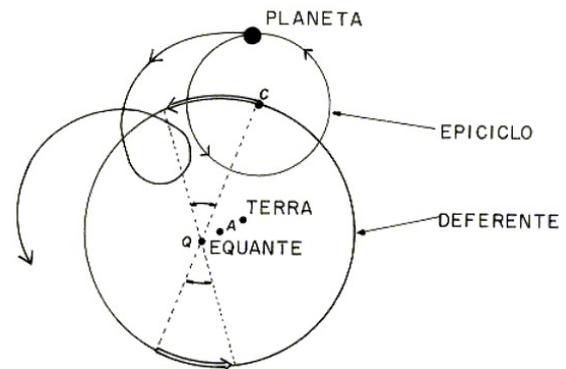
4.2 *Redshifts* gravitacionais

O efeito de *redshift gravitational* (desvio para o vermelho gravitacional) foi previsto pela teoria da relatividade geral após a sua publicação feita em 1916. A teoria da relatividade geral conduziu as seguintes conclusões: a primeira dizia respeito sobre a deflexão da luz ao passar próximo a um intenso campo gravitacional, um exemplo seria a deflexão sofrida por um fóton ao passar próximo ao Sol; a segunda predição era sobre a precessão do periélio das órbitas dos planetas, este efeito é mais intenso na órbita de Mercúrio e foi a partir da análise de dados da órbita deste planeta que tal efeito relativístico foi verificado e comprovado experimentalmente; o terceiro é a o efeito do atraso da luz causado por um intenso campo gravitacional, este efeito foi medido pela primeira vez por Shapiro em 1977 [74]; por último encontra-se o efeito do desvio para o vermelho gravitacional que será discutido com maior ênfase nesta seção e trata do efeito sofrido pelo fóton que ao deixar um campo gravitacional forte, sofre uma perda de energia, e portanto o seu comprimento de onda se desvia para o vermelho, este efeito está totalmente relacionado ao fato do atraso sofrido pelo fóton ao passar próximo a um campo gravitacional mais intenso. Essas quatro predições são comumente chamadas de teste da teoria da relatividade geral, assim que a teoria da relatividade geral foi proposta a comunidade científica se preocupou em verificar e comprovar experimentalmente a veracidade dessas quatro predições, caso isso fosse comprovado a teoria da relatividade geral ganharia o seu merecido respeito e seria a teoria utilizada para descrever a interação gravitacional.

O primeiro efeito a ser verificado foi o da precessão das órbitas dos planetas. O formato particular da órbita de Mercúrio (esta descrita por laços - ver figura (4.21)), causado pelo avanço do periélio de sua órbita, foi por um longínquo tempo algo muito discutido pela comunidade científica. Na teoria de Ptolomeu, os movimentos dos planetas eram descritos por uma combinação de círculos: o planeta se move ao longo de um pequeno círculo chamado epiciclo, cujo centro se move em um círculo maior chamado deferente. O problema da teoria dos epiciclos de Ptolomeu é que esta era descrita considerando o modelo geocêntrico, apesar disto Ptolomeu foi capaz de elaborar tabelas do movimento lunar que foram utilizadas até o tempo de Copérnico.



(a) Movimento retrógrado descrito pelo planeta Mercúrio, ao fundo podemos observar o movimento de Urano. Fonte: http://www.ghhc.usp.br/server/Sites-http://brasilecola.uol.com.br/upload/conteudo/imagesHF/Geraldo/ptolomaico_arquivos.



(b) Ilustração das órbitas descritas pelos planetas segundo Ptolomeu. Fonte: http://www.ghhc.usp.br/server/Sites-http://brasilecola.uol.com.br/upload/conteudo/imagesHF/Geraldo/ptolomaico_arquivos.

Figura 4.21: Órbita do planeta Mercúrio em torno do Sol.

A mecânica Newtoniana explicava essa característica particular de Mercúrio afirmando que devido ao fato de Mercúrio ser o planeta mais próximo ao Sol, este sofreria uma interação gravitacional mais intensa o que, além da interação gravitacional sofrida com os corpos ao seu redor, provocaria um efeito perturbativo em sua órbita provocando o avanço do periélio. Ainda que a mecânica Newtoniana fornece uma justificativa satisfatória, a discrepância entre as previsões teóricas e o desvio observacional era de 43 segundos de arco por século. Apesar do valor ser pequeno, na escala astrofísica esta diferença representa cerca de cem vezes o erro observacional provável. Para tentar justificar essa discrepância, os astrônomos sugeriram a existência de um novo planeta chamado de *Vulcan*, cuja órbita estava dentro da órbita de Mercúrio. Após inúmeras tentativas sem sucesso de observar Vulcan, a explicação pra a discrepância de 43" continuava a ser um mistério para a comunidade. Este mistério só veio a ser solucionado com a formulação da teoria da relatividade geral, que previa um avanço de 42,98". O perfeito encaixe entre as previsões teóricas e os dados observacionais, trouxe grande visibilidade para a teoria de Einstein. Após a comprovação da precessão do periélio das órbitas dos planetas, os grupos observacionais se focaram em tentar verificar os outros três efeitos (desvio para o vermelho gravitacional, deflexão da luz e o atraso da luz).

O efeito de deflexão da luz foi comprovado experimentalmente em 1919 através dos dados da eclipse solar total a partir de duas expedições distintas: a primeira liderada pelo Sir Arthur Eddington na Ilha do Príncipe e a segunda liderada por Andrew Cromme-

lin em Sobral no Brasil. Neste experimento foi verificado o desvio da luz provido das estrelas distantes ao passar próximo ao campo gravitacional do Sol, este evento só foi possível devido ao fato do eclipse solar ser total, já que apenas. Em 1925, Adams foi o primeiro a medir o desvio para o vermelho gravitacional a partir da linha espectral da estrela Sirius B, porém seus resultados astronômicos foram criticados e ditos como inconclusivos. Apenas em 1959 com o experimento chamado de *Pound-Rebka* foi capaz de verificar o fenômeno do desvio para o vermelho gravitacional. Neste experimento foi medido o desvio relativo de duas fontes localizadas, uma no topo e uma no chão, na torre do laboratório Jefferson da Universidade de Harvard, para esta medição foi utilizado o efeito Mössbauer. A teoria da Relatividade Geral é uma das teorias mais respeitadas atualmente e neste ano foi verificado experimentalmente a existência das ondas gravitacionais, que era o único teste que faltava a ser comprovado para que todas as previsões teóricas da relatividade geral fossem verificadas experimentalmente.

4.2.1 Previsão teórica do redshift gravitacional

Vamos agora fazer uso da teoria da relatividade geral para demonstrar teoricamente o efeito do desvio para o vermelho gravitacional sofrido pelos fótons. Considere um espaço-tempo geral descrito pela métrica $g_{\mu\nu}$ em um sistema de coordenadas x^μ , onde a coordenada x^0 é a coordenada tipo-tempo e $x^i = (x^1, x^2, x^3)$ define a coordenada tipo-espaço. Suponha que o observador emissor do fóton está na posição ϵ e percorre a linha mundo $x_E^\mu(\tau_E)$, já o observador receptor está na posição \mathcal{R} e percorre a linha mundo $x_R^\mu(\tau_R)$, onde τ_E e τ_R são, respectivamente, o tempo próprio do emissor e o tempo próprio do receptor. Na figura (4.22) está ilustrado a seguinte situação: no evento localizado em A o observador emissor ϵ com 4-velocidade $\dot{x}_E(A)$ emite um fóton, este fóton chega até o ponto B onde o observador receptor possui 4-velocidade $\dot{x}_R(B)$.

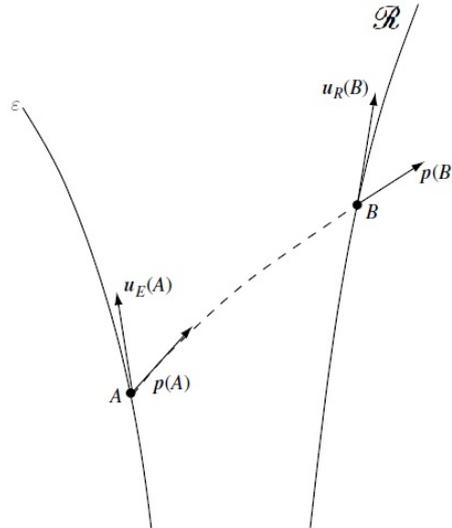


Figura 4.22: Ilustração da emissão de um fóton ocorrida no ponto A e da recepção do mesmo realizada no ponto B. Fonte: [75]

As energias do fóton medidas pelos observadores emissor em A e pelo receptor em B são dadas por

$$E_E(A) = p_\mu(A) \dot{x}_E^\mu(A), \quad (4.48)$$

$$E_R(B) = p_\mu(B) \dot{x}_R^\mu(B). \quad (4.49)$$

Como estamos descrevendo fótons, da relação de de Broglie podemos relacionar energia do fóton com a sua frequência da seguinte maneira $E = h\nu$, assim podemos escrever a razão entre a frequência recebida e a frequências emitida da seguinte maneira:

$$\frac{\nu_R}{\nu_E} = \frac{p_\mu(B) \dot{x}_R^\mu(B)}{p_\mu(A) \dot{x}_E^\mu(A)}. \quad (4.50)$$

Vamos supor que os dois observadores, tanto o receptor quanto o emissor, possuam suas coordenadas espaciais fixas; desta forma as componentes espaciais das suas respectivas 4-velocidade são nulas, ou seja,

$$\dot{x}_E^i = \frac{dx_E^i}{d\tau_E} = 0 \quad (4.51)$$

e

$$\dot{x}_R^i = \frac{dx_R^i}{d\tau_R} = 0. \quad (4.52)$$

Usando o fato de que $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = c^2 d\tau^2 \rightarrow g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = c^2$, onde que para o nosso caso particular em que $\dot{x}^i = 0$ essa propriedade leva a:

$$g_{00} (\dot{x}^0)^2 = c^2 \rightarrow \dot{x}^0 = \frac{c}{\sqrt{g_{00}}}. \quad (4.53)$$

A partir da expressão acima podemos reescrever a expressão (4.50) como

$$\frac{\nu_R}{\nu_E} = \frac{p_0(B)}{p_0(A)} \sqrt{\frac{g_{00}(A)}{g_{00}(B)}}. \quad (4.54)$$

A segunda suposição que vamos assumir é a de que a métrica é estacionária, ou seja, que esta não depende de x^0 satisfazendo $\partial_0 g_{\mu\nu}$. Essa suposição leva ao fato de que a componente covariante zero da vetor tangente é constante ao longo da geodésica parametrizada pelo parâmetro afim. Sabemos que o 4-momento do fóton é proporcional a esse vetor tangente, o que significa que este também é constante ao longo da geodésica do fóton, assim a expressão (4.54) passa a ser

$$\frac{\nu_R}{\nu_E} = \sqrt{\frac{g_{00}(A)}{g_{00}(B)}}, \quad (4.55)$$

que é a famosa equação do desvio para o vermelho gravitacional.

4.2.2 Redshift gravitacional da solução de Bonnor na ausência de carga elétrica

Podemos encontrar a expressão do desvio para o vermelho gravitacional para a solução de Bonnor na ausência de carga elétrica, substituindo a componente -00 da métrica desta solução ($g_{00} = -\left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{\mu^2 \cos^2 \theta}{R^4}\right)$) na expressão do desvio para o vermelho gravitacional encontrada nessa seção (equação (4.55)). Fazendo isso encontramos

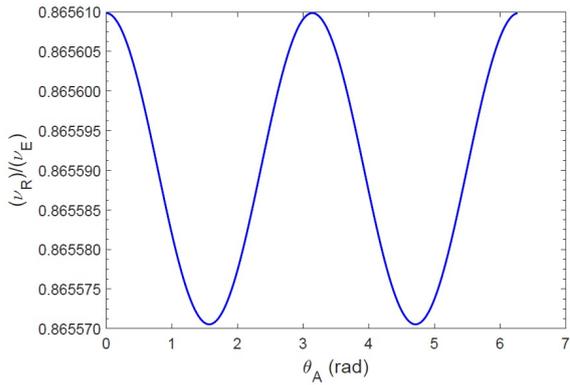
$$\frac{\nu_R}{\nu_E} = \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{2m}{R_A} + \frac{\mu^2 \cos^2 \theta_A}{R_A^4}\right)}{\left(1 - \frac{2m}{R_B} + \frac{\mu^2 \cos^2 \theta_B}{R_B^4}\right)}}, \quad (4.56)$$

onde R_A é a distância radial até o ponto A, θ_A é o ângulo polar até o ponto A, R_B é a distância até o ponto B e θ_B é o ângulo polar até o ponto B.

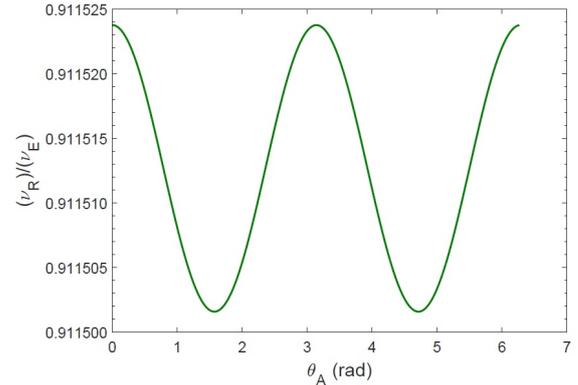
Quando o receptor estiver a uma distância infinita do emissor, isto é $R_B = \infty$ e $R_A = R$, onde R é uma distância finita externa ao objeto que causa o campo gravitacional dada pela solução de Bonnor, a frequência do fóton medida pelo receptor é menor do que a frequência do fóton emitida pelo observador emissor,

$$\nu_R = \nu_E \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{\mu^2 \cos^2 \theta_A}{R^4}\right)}{\left(1 - \frac{\overbrace{2m}^{=0}}{\infty} + \frac{\overbrace{\mu^2 \cos^2 \theta_B}^{=0}}{\infty}\right)}} = \nu_E \sqrt{\left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{\mu^2 \cos^2 \theta_A}{R^4}\right)} < \nu_E. \quad (4.57)$$

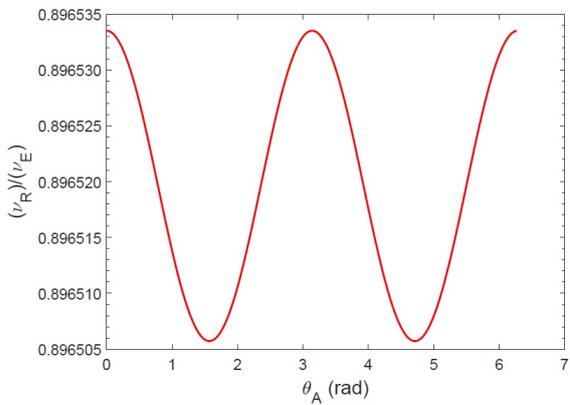
O resultado acima mostra que a frequência do fóton diminui ao passar por um campo gravitacional, pensando em termos de comprimento de onda ($\lambda = c/\nu$) podemos ver que o comprimento de onda do fóton aumenta (sofre um desvio para o vermelho). As figuras abaixo ilustram a variação da razão ν_R/ν_E em função de θ_A . Analisando essas figuras percebemos que a variação de θ_A só altera a quinta casa decimal, que é uma variação muito pequena. Assim podemos considerar razoável a utilização da solução de Schwarzschild para a descrição do efeito do redshift gravitacional provocado por um objeto massivo e com campo magnético dipolar. De modo a comparar os resultados, os valores da razão ν_R/ν_E calculados a partir da solução de Schwarzschild para os modelos de estrelas de nêutrons descritos nas figuras abaixo são os seguintes: $\nu_R/\nu_E = \sqrt{1 - \frac{2 \cdot (1,99)}{15,87}} = 0,865571$; $\nu_R/\nu_E = \sqrt{1 - \frac{2 \cdot (1,58)}{18,68}} = 0,911502$; $\nu_R/\nu_E = \sqrt{1 - \frac{2 \cdot (1,74)}{17,73}} = 0,896507$ e $\nu_R/\nu_E = \sqrt{1 - \frac{2 \cdot (1,899)}{16,61}} = 0,878261$.



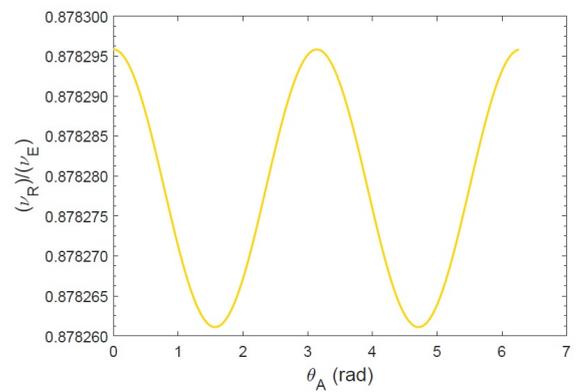
(a) As propriedades do modelo dessa estrela de nêutrons são: $m = 1,99M_{\odot}$, $R = 15,87km$ e $\mu = 2,078km^2$.



(b) As propriedades do modelo dessa estrela de nêutrons são: $m = 1,58M_{\odot}$, $R = 18,68km$ e $\mu = 2,22km^2$.



(c) As propriedades do modelo dessa estrela de nêutrons são: $m = 1,74M_{\odot}$, $R = 17,73km$ e $\mu = 2,22km^2$.



(d) As propriedades do modelo dessa estrela de nêutrons são: $m = 1,899M_{\odot}$, $R = 16,61km$ e $\mu = 2,155km^2$.

Figura 4.23: Variação da razão da frequência do receptor e do emissor em função do ângulo polar θ_A para os quatro distintos modelos de estrela de nêutrons.

5 Método numérico

O fato das equações de campo de Einstein serem não lineares fazem com que a resolução de tais equações se torne uma tarefa extremamente difícil. Dependendo do grau de idealização do seu sistema, podemos encontrar soluções analíticas para as equações de Einstein (como por exemplo, a descrição do espaço-tempo na ausência de matéria (vácuo) exterior a um objeto com simetria esférica, ou seja, a famosa solução de Schwarzschild). Entretanto basta tentar descrever um objeto apenas com simetria axial (um objeto com campo magnético, uma estrela girando, um objeto massivo com campo elétrico e magnético e etc) que o simples ato de encontrar soluções analíticas para estas equações se torna uma tarefa árdua. Já que estas equações não possuem uma solução analítica, a saída encontrada é tentar encontrar uma solução a partir de técnicas numéricas. Neste capítulo vamos fazer uma descrição sucinta do método espectral que é muito utilizado na resolução de equações diferenciais não-lineares e posteriormente vamos descrever o código *LORENE*, que está disponível na rede (<http://www.lorene.obspm.fr/>), que faz uso desta técnica para descrever o espaço-tempo de objetos massivos, com rotação e campo magnético; por fim mostraremos como fizemos uso deste código para descrever o caso de um objeto com campo magnético dipolar.

5.1 Método espectral

Um dos métodos utilizados para resolução de equações diferenciais não-lineares e acopladas (EDP - equação diferencial parcial) é o método numérico conhecido como *método espectral*. Este método consiste em aproximar a solução de uma EDP através de polinômios globais, ou seja, aproximar a solução ϕ como sendo $\phi = \sum_{n=0}^N a_n \Phi_n$, onde N é a truncagem, a_n são os coeficientes modais e Φ_n são as funções de base. Quando aplicadas aos métodos espectrais, estas funções de base são as funções especiais, já conhecidas e utilizadas na Física, Legendre, Chebyshev e etc.

Dado uma equação diferencial e condições de fronteira

$$Lu(x) = s(x), \quad (5.1)$$

$$Bu(y) = 0, \quad (5.2)$$

onde $x \in U \subset \mathbb{R}^d$, $y \in \partial U$ e L e U são operadores diferenciais lineares. A solução numérica da equação (5.1-5.2) é uma função \bar{u} que satisfaz a equação (5.2) e faz com que o resíduo $R := L\bar{u} - s$ seja pequeno. A ideia é aproximar a solução \bar{u} por uma combinação linear de um conjunto de funções ortonormais escolhido ($\phi(x)$)

$$\bar{u}(x) \approx u^N(x, t) = \sum_{j=1}^N \tilde{u} \phi_n(x). \quad (5.3)$$

Quando a escolha dessa função ortogonal, que define a base do espaço de Hilbert, for uma função suave e global (como por exemplo a série de Fourier, polinômios de Chebyshev e etc.), então o método numérico é chamado de método espectral. A escolha dessa base é totalmente despreendida de uma regra, mas existe algumas restrições já conhecidas (ver seção 20.7.2 de [76]): se a solução é periódica utilize a série de Fourier;

Substituindo a solução (5.3) na equação (5.1) encontramos o resíduo R :

$$R = L\bar{u}(x) - \bar{s}(x) \quad (5.4)$$

Seguindo, utiliza-se o procedimento do Método dos Resíduos Ponderados - MWR ([77]) que é um procedimento utilizado para calcular \tilde{u} , de modo a minimizar o resíduo de alguma forma média. No MWR uma condição é imposta de forma a garantir que o resíduo seja sujeito a uma minimização

$$\int_U \overbrace{(\bar{u}(x) - \bar{s}(x))}^{=R} \chi_n dx = 0, \quad (5.5)$$

onde se utiliza as funções testes χ_n ¹ para isto.

Para encontrar a solução dessa PDE, temos que encontrar os coeficientes dessa expansão (\bar{u}). Os coeficientes podem ser encontrados através de 3 métodos distintos: o método de *Tau*, o método de *Galerkin* e o método *pseudo espectral*. O método de Galerkin faz com que as funções teste sejam iguais as funções triais \bar{u} . Assim elas são funções infinitamente suaves que satisfazem individualmente algumas ou todas as condições de fronteira. A suposição de que a função teste é igual a função trial, impõem que a integral do

¹As funções testes formam um conjunto de famílias de funções (χ_0, \dots, χ_N) para definir a insignificância do resíduo R , por meio do produto escalar espaço de Hilbert.

resíduo vezes a função teste seja zero ($(\chi_n, R) = \int_U \chi_n (L\bar{u} - \bar{s}) dx = 0$). O método de Tau é similar ao método de Galerkin, neste a equação diferencial também tem que satisfazer $(\chi_n, R) = \int_U \chi_n (L\bar{u} - \bar{s}) dx = 0$, porém ela se diferencia a não exigir que as condições de fronteiras sejam satisfeitas. Já no método pseudo espectral as funções testes são substituídas por funções delta de Dirac, $\chi_n = \delta(x - x_n)$, centradas no chamados pontos de colocação. Essa abordagem exige que a equação diferencial seja satisfeita exatamente nos pontos de colocação. Na subseção seguinte vamos enfatizar os aspectos a respeito do método pseudo espectral já que este foi o utilizado no código LORENE, porém indicamos as seguintes referências ([76],[78], [79]) para um estudo mais aprofundado a cerca dos três métodos espectrais comentados aqui.

5.1.1 Método pseudo espectral

O método pseudo espectral é baseado na ideia de aproximar funções através de um polinômio interpolador em um intervalo $[a, b]$, envolvendo um conjunto de pontos relacionado a uma família de polinômios ortogonais, a estes pontos chamamos de pontos de colocação. Como já foi informado acima neste método as funções testes são deltas de Dirac, centrada nos pontos de colocação. Uma das exigências deste método é que a equação residual nos pontos de colocação é zero, ou seja,

$$Res(x_k) = 0. \quad (5.6)$$

Essa particularidade faz com que a solução aproximada encontrada a partir deste método coincide com a solução exata nesses pontos de colocação. A ideia aqui é quanto maior é o número de pontos de colocação no intervalo $[a, b]$, mais preciso será a solução numérica encontrada.

5.2 O código LORENE

O código LORENE foi desenvolvido por um grupo do laboratório do observatório de Paris do departamento de Astrofísica Relativística e Cosmologia. Este código está escrito em C++ e faz uso da técnica numérica pseudo espectral para calcular soluções do conjunto de equações acopladas que descreve, utilizando a teoria da relatividade geral, modelos de estrelas com rotação rápida, com campo eletromagnético, estacionária e que possua simetria axial. O primeiro trabalho a respeito deste código foi publicado em 1993, neste trabalho o código

LORENE foi utilizado para modelar fontes de ondas gravitacionais como estrelas de nêutrons e buracos negros para que os dados derivados dos detectores destas fontes como LIGO ou VIRGO fossem analisados a partir de um modelo teórico desta fontes. A partir deste trabalho, o grupo começou a investigar o papel do campo magnético na estrutura da estrelas massivas.

Devido a grande ferramenta que o LORENE demonstrou ser, decidimos utilizá-lo com a intenção de encontrar as quantidades que descrevem a estrutura do espaço-tempo externo a um objeto massivo e com um campo magnético dipolar, para posteriormente comparar com o resultado obtido a partir da solução analítica do Bonnor. Primeiramente vamos descrever as coordenadas e as equações que definem as fontes de curvatura utilizadas no pacote LORENE, para em seguida descrevermos o procedimento numérico.

5.2.1 Breve introdução ao formalismo 3 + 1

Os autores Bonazzola et al. [47] utilizaram o formalismo 3 + 1 para construir modelos estacionários para ser utilizado como condição inicial nos problemas que descrevem o colapso sem simetria axial. O formalismo 3 + 1 também é comumente utilizado para a descrição de estrelas relativísticas em rotação ([71], [80], [81]), a ideia geral desse formalismo consiste em foliar o espaço-tempo \mathbb{M} em uma família de hipersuperfícies do tipo-espaço $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$, assim

$$\mathbb{M} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \Sigma_t. \quad (5.7)$$

Devido ao fato das hipersuperfícies serem tipo-espaço isso implica na existência de um vetor normal tipo-tempo que é orientado para o futuro em cada ponto da hipersuperfície, ou seja, $\vec{n} \cdot \vec{n} = -1$. O parâmetro real t que rotula as hipersuperfícies está associado a coordenada temporal, o gradiente deste parâmetro é necessariamente colinear ao vetor normal \vec{n} já que ambos são ortogonais as hipersuperfícies

$$\vec{n} = -N \vec{\nabla} t, \quad (5.8)$$

onde N é chamado de função lapso e o sinal de menos foi escolhido de tal forma a fazer com que $N > 0$ se o campo escalar t é aumenta em direção do futuro. Nesse formalismo as equações de Einstein (2.8) são projetadas (i) duas vezes em Σ_t , (ii) duas vezes ao longo de \vec{n} , (iii) uma vez em Σ_t e uma vez ao longo de \vec{n} , assim obtém-se o seguinte conjunto de

equações

$$\frac{\partial K_{ij}}{\partial t} - \mathcal{L}_{\vec{\beta}} = -D_i D_j N + N\{R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ik} K_j^k + 4\pi[(S - E)\gamma_{ij} - 2S_{ij}]\}, \quad (5.9)$$

$$R + K^2 - K_{ij} K^{ij} = 16\pi E, \quad (5.10)$$

$$D_j K_i^j - D_i K = 8\pi p_i, \quad (5.11)$$

onde o elemento de linha passa a ser escrito no formalismo 3 + 1 como $ds^2 = -N^2 dt^2 + \gamma_{ij}(dx^i + \beta^i dt)(dx^j + \beta^j dt)$; S_{ij} , p_i e E estão associados a matéria que é a fonte de curvatura do sistema em estudo. O escalar S é escrito como $S = \gamma^{ij} S_{ij}$. D_i são derivadas covariantes e podem ser escritas em função dos símbolos de Christoffel

$$D_i D_j N = \frac{\partial^2 N}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial N}{\partial x^k}, \quad (5.12)$$

$$D_j K_i^j = \frac{\partial K_i^j}{\partial x^j} + \Gamma_{jk}^j K_i^k - \Gamma_{ji}^k K_k^j, \quad (5.13)$$

$$D_i K = \frac{\partial K}{\partial x^i}. \quad (5.14)$$

Já $\mathcal{L}_{\vec{\beta}}$ é a derivada de Lie do tensor de curvatura extrínseca,

$$\mathcal{L}_{\vec{\beta}} = \beta^k \frac{\partial K_{ij}}{\partial x^k} + K_{kj} \frac{\partial \beta^k}{\partial x^i} + K_{ik} \frac{\partial \beta^k}{\partial x^j}, \quad (5.15)$$

onde $K_{ij} = \frac{1}{2N} \left(-\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} + \beta^k \frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial x^k} + \gamma_{kj} \frac{\partial \beta^k}{\partial x^i} + \gamma_{ik} \frac{\partial \beta^k}{\partial x^j} \right)$ e β_i são as componentes do campo vetorial $\vec{\beta}$. Vale enfatizar que estamos utilizando índices latinos representam apenas as componentes espaciais $x^i = (x^1, x^2, x^3)$. A fonte de curvatura no formalismo 3 + 1 é definida decompondo o tensor energia-momento ortogonalmente em relação ao observador *Euleriano*² é escrito como

$$\mathbf{T} = \mathbf{S} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{J} + \mathbf{J} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{E} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad (5.16)$$

com $E = T_{\mu\nu} n^\mu n^\nu$, $J_\alpha = -h_\alpha^\mu T_{\mu\nu} n^\nu$, $S_{\alpha\beta} = h_\alpha^\mu h_\beta^\nu T_{\mu\nu}$. E representa a densidade de energia, \mathbf{J} o 3-vetor da densidade de momento e \mathbf{S} o 3-tensor stress.

5.2.2 Métrica e equações que Einstein-Maxwell para todo espaço-tempo

Um espaço-tempo estacionário, com simetria axial e que seja assintoticamente plano é descrito pelo seguinte elemento de linha:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + g_{\phi\phi} (d\phi - \omega dt)^2 + g_{11} (dx^1)^2 + 2g_{12} dx^1 dx^2 + g_{22} (dx^2)^2, \quad (5.17)$$

²É o observador cujo a 4-velocidade é o 4-vetor tipo-tempo \mathbf{n} que no formalismo 3 + 1 é normal a hipersuperfície Σ_t e possui a direção do aumento do tempo t ($n = -N\nabla t$) [82].

onde N , N^ϕ , $g_{\phi\phi}$, g_{11} , g_{12} e g_{22} são funções de x^1 e x^2 . Os valores das funções N , N^ϕ , $g_{\phi\phi}$ são independentes da escolha de coordenadas (x^1 , x^2), já que eles são escritos como produtos escalares dos dois vetores de Killing:

$$g_{\phi\phi} = e_3 \cdot e_3; \quad (5.18)$$

$$\omega = -\frac{e_0 \cdot e_3}{e_3 \cdot e_3}; \quad (5.19)$$

$$N^2 = -e_0 \cdot e_0 + \frac{(e_0 \cdot e_3)^2}{e_3 \cdot e_3}. \quad (5.20)$$

Para definir por completo o elemento de linha do espaço-tempo, precisamos escolher as coordenadas x^1 e x^2 . Dois tipos de escolhas são usualmente escolhidas para descrever espaço-tempos com essas características: (1) calibre *quasi-isotropic* (QI) ([83], [84]) e o (2) calibre radial (RG), o qual generaliza as coordenadas de Schwarzschild para espaço-tempos sem simetria esférica ([85], [86]). No código LORENE foi escolhido o calibre *quasi-isotropic*³. Com essa escolha de coordenadas (t , r , θ , ϕ) o elemento de linha é reescrito como:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + B^2 r^2 \sin^2 \theta (d\phi - \omega dt)^2 + A^2 (dr^2 + r^2 d\theta^2), \quad (5.21)$$

onde N , ω , A e B são funções de (r , θ). Em particular, para a descrição de uma estrela sem rotação temos que $\omega = 0$ e dessa forma estamos descrevendo um espaço-tempo estático já que o campo vetorial de Killing $\vec{\xi}$ é colinear a \vec{n} e este é ortogonal a família de hipersuperfícies Σ_t ($\vec{\xi} = N\vec{n} - \overbrace{\omega}^{=0} \vec{\chi}$). A partir deste momento vamos descrever apenas este caso particular ($\omega = 0$), já que nesta dissertação estamos apenas preocupado em descrever um objeto massivo com um campo magnético dipolar e sem rotação. A ideia utilizada pelos autores no artigo [47] foi fazer uso do formalismo 3 + 1 para reduzir as equações que determinam o campo gravitacional a um sistema de quatro equações diferenciais parciais elípticas acopladas (comumente chamadas de EDP - equação diferencial parcial) com a seguinte forma:

$$\Delta_f u = \sigma_u^{campos} + \sigma_u^{quad}, \quad (5.22)$$

onde Δ_f é um operador elíptico no espaço plano, u é o potencial métrico formado a partir dos coeficientes métricos, σ_u^{campos} é o termo da fonte que envolve todos os campos presentes, exceto o gravitacional, que contribui com o tensor energia-momento total (tal como a matéria, campos eletromagnéticos, etc.) e σ_u^{quad} é uma expressão contendo apenas termos quadráticos não lineares nos potenciais métricos. No formalismo 3 + 1, as equações de Einstein não-nulas para o elemento de linha (5.21) podem ser escritas no formato da equação

³Para maiores detalhes a respeito dessa escolha ver a referência principal [47].

(5.22) da seguinte maneira

$$\Delta_3 v = 4\pi A^2 (E + S) - \partial v \partial (v + \ln B), \quad (5.23)$$

$$\Delta_2 \tilde{G} = 8\pi N A^2 B r \sin \theta (S_r^r + S_\theta^\theta), \quad (5.24)$$

$$\Delta_2 \zeta = 8\pi A^2 S_\phi^\phi - \partial v \partial v, \quad (5.25)$$

$$p_r = p_\theta = p_\phi = 0, \quad (5.26)$$

onde

$$v = \ln N, \quad (5.27)$$

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad (5.28)$$

$$\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \tan \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (5.29)$$

$$\partial u \partial v = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad (5.30)$$

e p_i são as componentes do momento do observador Euleriano. De forma a simplificar, as seguintes transformações foram feitas:

$$\alpha(r, \theta) = \frac{\ln[A(r, \theta) B(r, \theta)]}{4}, \quad (5.31)$$

$$\beta(r, \theta) = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{B(r, \theta)}{A(r, \theta)} \right], \quad (5.32)$$

$$\tilde{G}(r, \theta) = r N(r, \theta) B(r, \theta) \sin \theta, \quad (5.33)$$

$$\zeta(r, \theta) = v(r, \theta) + 2\alpha(r, \theta) - \beta(r, \theta). \quad (5.34)$$

Para escrever de forma completa as equações de Einstein, precisamos descrever a fonte de curvatura nesse formalismo. No nosso caso particular a fonte de curvatura na região interna é o acoplamento entre o fluido perfeito e o fluido eletromagnético, enquanto na região externa a fonte de curvatura é descrita apenas pelo fluido eletromagnético. Para a descrição de um fluido perfeito as quantidades descritas na equação (5.16) se tornam:

$$E^{[FP]} = \epsilon, \quad (5.35)$$

$$S_r^{[FP]r} = S_\theta^{[FP]\theta} = S_\phi^{[FP]\phi} = p, \quad (5.36)$$

onde ϵ é a densidade de energia e p é a pressão isotrópica do fluido. Já as componentes do

tensor eletromagnético ficam determinadas da seguinte maneira:

$$E^{[EM]} = \frac{1}{8\pi} (B_i B^i) = \frac{1}{8\pi r^2 A^2 B^2 \sin^2 \theta} \partial A_\phi \partial A_\phi, \quad (5.37)$$

$$S_r^{[EM]r} = \frac{1}{8\pi} (B_\theta B^\theta - B_r B^r) = \frac{1}{8\pi r^2 A^2 B^2 \sin^2 \theta} \left[\left(\frac{\partial A_\phi}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} \right)^2 \right], \quad (5.38)$$

$$S_\theta^{[EM]\theta} = \frac{1}{8\pi} (B_r B^r - B_\theta B^\theta) = \frac{1}{8\pi r^2 A^2 B^2 \sin^2 \theta} \left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} \right)^2 - \left(\frac{\partial A_\phi}{\partial r} \right)^2 \right], \quad (5.39)$$

$$S_\phi^{[EM]\phi} = \frac{1}{8\pi} (B_i B^i) = \frac{1}{8\pi r^2 A^2 B^2 \sin^2 \theta} \partial A_\phi \partial A_\phi, \quad (5.40)$$

onde $B^i B_i = B^r B_r + B^\theta B_\theta + B^\phi B_\phi$ e $B_\alpha = \left(0, \frac{1}{r^2 \exp(2\alpha) \exp(\beta) \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \theta}, -\frac{1}{\exp(2\alpha) \exp(\beta) \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial r}, 0 \right)$ é o campo magnético de carácter dipolar medido pelo observador Euleriano e A_ϕ é a componente ϕ do 4-potencial.

Vale a pena enfatizar que a matéria no interior da estrela é composta por um fluido perfeito (este caracterizado por possuir uma pressão isotrópica (p) e uma densidade de energia (ϵ) acoplada ao fluido eletromagnético, assim o tensor energia-momento que descreve a fonte no interior da estrela é dado por

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{FP} + T_{\mu\nu}^{EM} = \mathbf{S} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{J} + \mathbf{J} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{E} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}, \quad (5.41)$$

com $E = E^{[FP]} + E^{[EM]}$, $S_i^i = S_i^{[FP]i} + S_i^{[EM]i}$, $J_\phi = J_\phi^{[FP]} + J_\phi^{[EM]}$, enquanto na região externa a estrela só há a presença do fluido eletromagnético, já que considera-se que a estrela esteja no vácuo, ou seja, na ausência de matéria; assim nessa região $T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{EM}$ e as funções que determinam esse tensor são $E = E^{[EM]}$, $S_i^i = S_i^{[EM]i}$ e $J_\phi = J_\phi^{[EM]}$. Assim sendo as equações de Einstein para a região interna são

$$\begin{aligned} \Delta_3 v &= 4\pi A^2 \left(\epsilon + \frac{1}{8\pi r^2 A^2 B^2 \sin^2 \theta} \partial A_\phi \partial A_\phi + A^2 \left(p + \frac{1}{8\pi r^2 A^2 B^2 \sin^2 \theta} \left[\left(\frac{\partial A_\phi}{\partial r} \right)^2 \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} \right)^2 \right] + r^2 p + \frac{r^2}{8\pi r^2 A^2 B^2 \sin^2 \theta} \left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} \right)^2 - \left(\frac{\partial A_\phi}{\partial r} \right)^2 \right] \right) \\ &\quad + B^2 r^2 \sin^2 \theta \left(p + \frac{1}{8\pi r^2 A^2 B^2 \sin^2 \theta} \partial A_\phi \partial A_\phi \right) - \partial v \partial (v + \ln B), \end{aligned} \quad (5.42)$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 \tilde{G} &= 8\pi N A^2 B r \sin \theta \left(2p + \frac{1}{8\pi r^2 A^2 B^2 \sin^2 \theta} \left[\left(\frac{\partial A_\phi}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} \right)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{8\pi r^2 A^2 B^2 \sin^2 \theta} \left[\frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial A_\phi}{\partial \theta} \right)^2 - \left(\frac{\partial A_\phi}{\partial r} \right)^2 \right] \right), \end{aligned} \quad (5.43)$$

$$\Delta_2 \zeta = \frac{1}{r^2 B^2 \sin^2 \theta} \partial A_\phi \partial A_\phi - \partial v \partial v. \quad (5.44)$$

Já as equações de Einstein para a região externa são similares as equações acima (5.42-5.44), porém $\epsilon = p = 0$ já que não há presença do fluido perfeito nesta região.

Além das equações de Einstein, também temos que escrever as equações de Maxwell que são responsáveis por determinar as fontes eletromagnética desse problema. O campo dipolar é descrito pelo 4-potencial só conter a componente ϕ ($A_\mu = (0,0,0,A_\phi)$). A equações de Maxwell (3.4) para uma fonte deste tipo leva a $\frac{\partial}{\partial\theta} \left(\frac{\partial A_\phi}{\partial r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial A_\phi}{\partial\theta} \right)$, que é satisfeita independente do formato de A_ϕ . Já a componente não-nula das equações de Maxwell (3.3) para essa fonte é dada por:

$$\tilde{\Delta}_3 \left(\frac{A_\phi}{r \sin\theta} \right) = -4\pi \exp(8\alpha) j^\phi r \sin\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \partial A_\phi \partial (2\alpha + \beta - \nu), \quad (5.45)$$

onde $\tilde{\Delta}_3 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r^2 \tan\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}$ e $\partial\alpha\partial\beta = \frac{\partial\alpha}{\partial r} \frac{\partial\beta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial\alpha}{\partial\theta} \frac{\partial\beta}{\partial\theta}$. A equação (5.45) representa a equação de Ampère.

A última equação para finalizar a descrição da estrutura desse espaço-tempo, é a equação de conservação do tensor energia-momento (equação (2.9)). Voltando ao formalismo 3 + 1 utilizado no código LORENE, a equação (2.9) é projetado ortogonalmente sobre a hipersuperfície Σ_t e desta maneira chega-se a equação para a densidade de momento da matéria **J**

$$\frac{N}{\sqrt{h}} \frac{\partial}{\partial x^j} \left(\sqrt{h} S_i^j \right) - \frac{N}{2} \frac{\partial h_{jk}}{\partial x^i} S^{jk} + S_i^j \frac{\partial N}{\partial x^j} + E \frac{\partial N}{\partial x^i} = 0, \quad (5.46)$$

onde $\sqrt{h} = A^2 B r^2 \sin\theta$, $i = 1, 2$, $x^1 = r$ e $x^2 = \theta$. Para a descrição do acoplamento do fluido perfeito com o fluido eletromagnético essa equação se reduz a:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} (H + \nu) - \frac{j^\phi}{\epsilon + p} \frac{\partial A_\phi}{\partial x^i} = 0, \quad (5.47)$$

onde $H = \int_0^n \frac{1}{\epsilon(n') + p(n')} \frac{dp(n')}{dn'} dn'$ é a função calor que foi definida a partir da suposição de que a equação de estado da matéria é parametrizada pela densidade bariônica própria n , ou seja, $\epsilon = \epsilon(n)$ e $p = p(n)$. O teorema de Schwarz leva a condição de integrabilidade que diz existe uma função $M(r, \theta)$ tal que

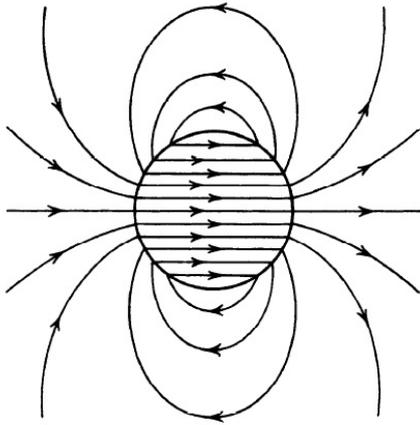
$$-\frac{j^\phi}{\epsilon + p} \frac{\partial A_\phi}{\partial x^j} = \frac{\partial M}{\partial x^j}. \quad (5.48)$$

Essa equação leva a duas suposições excludentes entre si, a primeira é a de que $\frac{j^\phi}{\epsilon + p}$ é uma função de A_ϕ , ou a de que A_ϕ é constante. Para a descrição de um sistema com campo magnético, a segunda suposição é ignorada já que levaria a descrição de um objeto sem campo magnético, dessa maneira a primeira suposição leva a existência de uma função $f: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ tal que $j^\phi = (\epsilon + p) f(A_\phi)$. A integral de movimento pode ser escrita em função de $f(A_\phi)$ como

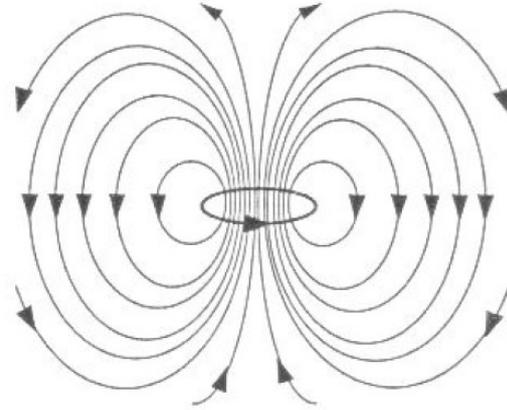
$$H(r, \theta) + \nu(r, \theta) + M(r, \theta) = \text{cons.}, \quad (5.49)$$

com $M(r,\theta) = M(A_\phi(r,\theta)) = \int_0^{A_\phi(r,\theta)} f(x) dx$ e $f(x)$ é uma função regular e está relacionada ao perfil da distribuição do campo magnético.

De forma a testar os resultados numéricos encontrados pelo código LORENE, os autores realizaram diversos testes numéricos e um deles foi comparar as soluções numéricas a soluções exatas para a distribuições de correntes. Existe duas soluções exatas que descrevem os dois sistemas físicos que podem dar origem a um campo magnético de caráter: (i) uma esfera condutora com uma corrente superficial (ver figura (5.1(a))) e (ii) uma esfera condutora com um loop de corrente elétrica infinitesimal localizado na origem (ver figura (5.1(b))).



(a) Linhas do campo magnético gerado por uma distribuição de corrente superficial. Fonte: [87].



(b) Linhas do campo magnético gerado por um loop de corrente. Fonte: [88].

Figura 5.1: Linhas de um campo magnético de caráter dipolar.

Para a descrição do caso (i) a distribuição da corrente é modelada por

$$j^\phi(r,\theta) = j_0 r \sin\theta \exp\left(-\frac{(r-R)^2}{\delta^2}\right), \quad (5.50)$$

onde j_0 é constante, R é o raio da esfera condutora e δ é a largura da distribuição, o qual não assume o valor igual a zero de modo a obtermos apenas funções suaves. O campo magnético gerado por essa distribuição é uniforme e paralelo ao eixo magnético no interior da esfera e dipolar fora. Já para o caso (ii), a distribuição de corrente é modelada por:

$$j^\phi(r,\theta) = j_0 r \sin\theta \exp\left(-\frac{r^2}{\delta^2}\right), \quad (5.51)$$

onde a solução que corresponde a um momento de dipolo magnético pontual é dada por $\delta = 0$. Essa distribuição de corrente gera um campo dipolar em todo o espaço. Assim a escolha

da função $f(x)$ deve ser tal que as soluções numéricas geradas por ela seja compatível as duas soluções exatas descritas acima (5.50-5.51).

Dessa forma o caráter dipolar do campo magnético pode ser descrito por esses dois perfis de distribuição de corrente j^ϕ (equação (5.50-5.51)), escolhendo entre esses dois perfis a função $f(A^\phi)$ é automaticamente definida por $f(A^\phi) = \frac{j^\phi}{(\epsilon+p)}$.

5.2.3 Procedimento numérico

Até este instante apresentamos nesta seção, de forma sucinta, o método numérico para resoluções de PDEs chamado pseudo espectral e também definimos, no formalismo 3 + 1, as equações de Einstein-Maxweel que descrevem a estrutura do espaço-tempo para uma fonte de fluido perfeito acoplada ao fluido magnético em toda sua extensão, desde a região interior da estrela até a uma região a uma distância infinita da mesma. Nesta subseção vamos descrever o procedimento numérico realizado pelo código LORENE que consegue encontrar soluções para essas equações de Einstein-Maxweel.

As equações diferenciais parciais encontradas na seção anterior que descrevem a estrutura dos espaço-tempo em toda sua extensão, desde a região interior da estrela até a uma região a uma distância infinita da mesma, são resolvidas através do código LORENE que faz uso do método pseudo espectral.

As equações de Einstein-Maxweel foram divididas em dois grupos: o primeiro formado pelas funções métricas e pelo potencial magnético; já o segundo é formado pelas equações de movimento (equação (5.49)). As equações do primeiro grupo podem ser escritas como equações tipo equações de Poisson:

$$\Delta_3 v = \sigma_v, \quad (5.52)$$

$$\Delta_2 \tilde{G} = \sigma_G \quad (5.53)$$

$$\Delta_2 \zeta = \sigma_\zeta, \quad (5.54)$$

$$\tilde{\Delta}_3 \left(\frac{A_\phi}{r \sin \theta} \right) = \sigma_{A_\phi}. \quad (5.55)$$

Já a equações que descrevem o movimento do fluido podem ser reduzidas a equações algébricas como é o caso do acoplamento entre o fluido perfeito e o campo magnético (equação (5.49)).

As regiões internas e externas a estrela utilizam diferentes escolhas de coorde-

nada para o grid, isso para que quando $r \rightarrow \infty$ as soluções não possam divergir. Para a região interna foi definido as coordenadas polares (r, θ, ϕ) , e para região externa foi definido uma nova coordenada radial $u = \frac{1}{r}$. Dessa maneira a região interna fica delimitada por $0 \leq r \leq R$, onde R é o raio da estrela e a região externa está delimitada por $0 \leq r \leq \frac{1}{R}$.

O procedimento para obter a solução em todo o espaço, sendo que a solução interior tenha como fonte de curvatura o acoplamento entre o fluido perfeito e o campo magnético e a solução externa tendo a presença apenas do campo magnético, faz uso do processo de interação. O processo de interação inicia-se fazendo com que as funções métricas assumam seus valores no espaço-tempo plano, ou seja, $\nu = \alpha = \beta = \zeta = 0$ e $G = \tilde{G}/(r \sin \theta) = 1$; o raio da estrela não é conhecido com antecedência, o que impede a realização do limite da solução interna e externa já que sabemos que o raio da grade numérica interior tem que coincidir com o raio equatorial da estrela. Dessa forma o raio da estrela assume um valor arbitrário $R = R_*$, e em cada passo da interação o valor correto do raio da estrela é determinado exigindo que o valor da constante gravitacional $4\pi G$ na unidade de R_* seja tal que a pressão desapareça no equador ($r = R_*$). Notando que $4\pi G$ aparece apenas em um fator nos termos da fonte de curvatura e não nos termos não lineares das funções métricas, podemos então integrar a equação (5.42) para ν em duas etapas: primeiro resolve $\Delta_3 \nu^{quad}$ e em seguida se resolve $\Delta_3 \nu^{campos} = \sigma^{campos} / (4\pi G)$, desta forma a solução para ν será dada por $\nu = 4\pi G \nu^{campos} + \nu^{quad}$. O valor de $4\pi G$ é então determinado pela integral de movimento (equação (5.49)) e impondo que p e, conseqüentemente, H desapareçam na superfície da estrela:

$$4\pi G = \frac{H(0,0) + \nu^{quad}(0,0) - \nu^{quad}(R_*, \pi/2)}{\nu^{campos}(R_*, \pi/2) - \nu^{campos}(0,0)}, \quad (5.56)$$

onde $H(0,0)$ é o valor fixo da função calor no centro da estrela. O procedimento para a obtenção de uma solução com um interior fluido perfeito e um campo magnético é a seguinte:

1. Primeiramente escolhe-se uma equação de estado do tipo: $\epsilon = \epsilon(n)$ e $p = p(n)$; assumindo que $H = 0$ corresponde a $p = 0$ e que caracteriza a superfície da estrela. Também escolhe o valor da função calor central H_c
2. Escolhe-se a função $f(x)$ o qual dá a distribuição de corrente no interior da estrela, uma escolha adequada de f pode modelar a distribuição de corrente de forma a ser compatível com o caso (i) (equação (5.50)) descrito na subseção anterior ou com o caso (ii) (equação (5.51)) também descrito na subseção anterior;

3. A densidade de corrente j^ϕ é determinada a partir da escolha para $f(x)$ pela equação $j^\phi = (\epsilon + p) f(A^\phi)$.
4. O próximo passo consiste em determinar a distribuição de matéria que concorda com o campo eletromagnético e com campo gravitacional obtido fazendo uso da equação (5.49) dando a função calor H ;
5. Computa-se as quantidades do tensor energia-momento eletromagnético (equação (5.37)-(5.40)), posteriormente se adiciona as componentes do fluido perfeito;
6. Fazendo uso do método pseudo espectral resolve-se as equações tipo Poisson (equações ((5.42)-(5.44) e (5.45)). Então inicia-se a uma nova interação.

6 Conclusão

O objetivo deste trabalho foi realizar um estudo das propriedades do espaço-tempo gerado por um objeto massivo e com campo magnético dipolar. A nossa motivação para isto foi a de investigar e entender melhor o efeito que o uso da teoria da relatividade geral causa na descrição da estrutura de objetos compactos como os *magnetares*, já que estudos que modelam a configuração de equilíbrio desse objetos fazem uso de duas abordagens distintas: a primeira delas é uma abordagem numérica que faz uso de diferentes técnicas numéricas utilizadas para resolver as equações de Einstein-Maxwell ([80], [81] e [90]); já a segunda abordagem diz respeito ao um método perturbativo que resolve as equações de Einstein-Maxwell linearizando na já conhecida solução que descreve um espaço-tempo estático e com simetria esférica e posteriormente introduz o campo magnético como termos perturbativos em tensores harmônicos nesta solução ([91], [92], [93]). Para isto ser feito inicialmente fizemos um estudo preliminar na literatura em busca de soluções que descrevessem um objeto massivo e com um magnético dipolar, assim encontramos duas soluções analíticas que descreviam este objeto: a solução de Manko-Gutsunaev [44] e a solução de Bonnor [46]. Em seguida realizamos um estudo sobre estas soluções a fim de verificar se estas eram condizentes com o propósito deste trabalho, tal estudo nos levou a utilizar a solução de Bonnor e excluir a solução de Manko-Gutsunaev já que o fato da mesma não ser descrita em termos de quantidades físicas dificultaria a realização da modelagem das estrelas de nêutrons com campo magnético que é o objetivo principal deste trabalho.

A solução de Bonnor é uma primeira aproximação da solução que descreve o espaço-tempo exterior a um objeto massivo, pontual, carregado e com um momento de dipolo em sua origem, esta solução exclui termos na métrica de segundo grau nos parâmetros (m , e e μ) e também exclui termos de grau maior que um nos potenciais eletromagnéticos. Após a realização de um estudo mais aprofundado, notamos que a solução de Bonnor também exclui termos de segundo grau no parâmetro m ($\frac{2m^2}{R^2}$ e $4m^2$) e que está não satisfaz as equações de Maxwell (ver capítulo 3 dessa dissertação). Após essa verificação nos questionamos sobre o limite da validação da solução de Bonnor: Quais sistemas físicos são descritos por essa solução? Será que essa solução é capaz de descrever o espaço-tempo exterior de objetos com campos magnéticos intensos (exemplo magnetares)? Quais são os efeitos na

estrutura causados pela inserção do campo magnético esta solução descreve? Esses questionamentos fez com que estudássemos mais a fundo sobre essa solução, de forma a confrontarmos as geodésicas de partículas massivas e fótons ao redor do objeto descrito pela solução de Bonnor com as geodésicas geradas por outra solução que fosse mais exata e que fornecesse resultados confiáveis e já testados pela comunidade científica. Assim buscamos na literatura soluções analíticas que descrevessem o mesmo sistema físico daquele descrito pela solução de Bonnor, porém nossa pesquisa foi falha uma vez que não encontramos nenhuma outra solução analítica que poderíamos utilizar para confrontar com a solução de Bonnor. Diante deste empecilho, fomos levados a ampliar nossos estudos pra a inserção de uma frente numérica.

A solução numérica encontrada na literatura foi descrita no formalismo $3 + 1$ e que descreve o espaço-tempo em toda sua extensão gerado por um objeto com campo magnético e elétrico ([80], [81]), onde se considera que a matéria estelar seja descrita por um fluido perfeito. O conjunto de equações de Einstein-Maxwell foi resolvido numericamente através de um código disponível online e que faz uso do método numérico pseudo-espectral que é muito utilizado na resolução de equações não-lineares e acopladas. Já que a princípio este código foi escrito para descrever um caso mais amplo que o adotado neste trabalho incluindo efeitos do campo elétrico, tivemos que alterar o código de forma a retirar a inclusão do campo elétrico nas equações de Einstein-Maxwell resultando na descrição de um objeto massivo e apenas com campo magnético dipolar, este sendo gerado por uma densidade de corrente superficial. Após ter encontrado a solução das funções métricas, encontramos as equações das geodésicas geradas por essa solução e o potencial efetivo. Os resultados gerados através dessa solução numérica nos revelam que o efeito do campo magnético faz com que o poço do potencial efetivo se torne mais profundo, ou seja, o intervalo de energia necessário para as partículas descreverem órbitas fechadas se tornar maior do que aquele gerado pela solução de Bonnor e de Schwarzschild. Outro fator importante é que assim como a solução de Schwarzschild o comportamento do potencial efetivo muda drasticamente com o valor do momento angular por unidade de massa da partícula (ℓ_{eq}), se este valor é muito pequeno a solução recai no potencial efetivo Newtoniano e se aumentamos muito este valor o potencial efetivo recai no potencial efetivo dos fótons (ver figura (??, ??, ??, ??, 4.8(a) e 4.7(a))), onde não há presença de um poço. Em relação as órbitas, percebemos que elas geram as mesmas órbitas (fechadas e de espalhamento) das geradas pela solução de Bonnor (ver figuras (4.3(a) - 4.6(b) e 4.18(a) - 4.20(d))).

Já para a solução de Bonnor, o comportamento do potencial efetivo gerados através desta solução não se distinguem tanto daqueles gerados pela solução de Schwarzschild (ver figuras (4.2(a) - 4.2(d), 4.8(a) e 4.7(a))), a única variação provocada pela presença do campo magnético é o aumento da altura da barreira centrífuga tanto para a descrição das órbitas das partículas massivas quanto para os fótons (ver figuras (4.10(b), 4.12(b), 4.14(b), 4.16(b), 4.8(b) e 4.7(b))). Este fato nos leva a acreditar que, segundo a solução de Bonnor a inserção do campo magnético nas equações de estrutura faz com que as partículas massivas necessitem de uma energia cada vez maior para conseguir vencer a barreira centrífuga e assim realizem ou órbitas fechadas (elípticas ou circulares) ou órbitas de espalhamento. As órbitas geradas por estas soluções também não se distinguem daquelas geradas pela solução de Schwarzschild, estas continuam sendo órbitas fechadas (circulares ou elípticas) ou órbitas de espalhamento (ver figura (4.3(a) - 4.6(b))) para as partículas massivas e órbitas de espalhamento ou circulares para os fótons (ver figura (4.9)). Outro fato observado é a influência notória dos valores de ℓ_{eq} na determinação do comportamento das órbitas de espalhamentos dos fótons (veja figura (4.9)); se ℓ_{eq} passa a assumir valores muito pequenos a órbita de espalhamento se cruza, enquanto ao amentarmos os valores de ℓ_{eq} a órbita se torna cada vez mais aberta.

Diante de todos esses resultados podemos concluir que para campos magnéticos centrais da ordem de $10^{17} G$ (que foram tratados nesta dissertação) a solução de Bonnor descreve, de forma qualitativa, corretamente as órbitas de partículas massivas ao redor do objeto descrito por ela, e os efeitos da inserção do campo magnético são desprezíveis na descrição da estrutura da estrela de nêutron fazendo com que a utilização da solução de Schwarzschild para a descrição da mesma seja satisfatória. As perspectivas futuras para este trabalho são: realizar um estudo aprofundado sobre as estrelas magnetizadas, com o intuito de entender melhor o campo magnético no interior das estrelas de nêutrons; pretendemos realizar um código que seja capaz de modelar diferentes configurações para as linhas do campo magnético no interior da estrelas de nêutrons, levando em consideração os aspectos macroscópicos e microscópicos para assim realizar um estudo mais amplo sobre os efeitos da inserção do campo magnético na estrutura e na evolução da estrela de nêutrons.

Apêndice

Expressões de J^t e J^ϕ para a solução de Bonnor

Neste apêndice iremos apresentar a expressão completa para as componentes t e ϕ da quadri-corrente da solução de Bonnor, mostraremos que tanto o caso da descrição de um objeto carregado com carga e e com um momento de dipolo magnético μ , quanto o caso sem carga e apenas momento de dipolo magnético não satisfazem as equações de Maxwell, que para a descrição proposta por Bonnor todas as componentes da quadri-corrente deveriam ser nulas já que esta solução descreve a solução exterior a fonte eletromagnética que esta localizada na origem de coordenadas.

Primeiramente vamos apresentar as expressões de J^t e J^ϕ para o caso da solução de Bonnor que descreve um objeto carregado com carga e e com um momento de dipolo magnético μ , a métrica que descreve este caso é dada por:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{e^2}{R^2} + \frac{\mu^2 \cos^2 \theta}{R^4}\right) & 0 & 0 & \frac{e\mu \sin^2 \theta}{R^2} \\ 0 & -\left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{e^2}{R^2} + \frac{\mu^2 f(\theta)}{R^4}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R^2 \left(1 - \frac{\mu^2 f(\theta)}{R^4}\right) & 0 \\ \frac{e\mu \sin^2 \theta}{R^2} & 0 & 0 & -R^2 \sin^2 \theta \left(1 - \frac{\mu^2 \cos^2 \theta}{R^4}\right) \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\det g_{\mu\nu} = -\frac{R^2 \left(1 - \frac{\mu^2 f(\theta)}{R^4}\right)}{\left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{\mu^2 f(\theta)}{R^4} + \frac{e^2}{R^2}\right)} \left[\left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{e^2}{R^2} + \frac{\mu^2 \cos^2 \theta}{R^4}\right) R^2 \sin^2 \theta \left(1 - \frac{\mu^2 \cos^2 \theta}{R^4}\right) + \frac{e^2 \mu^2 \sin^4 \theta}{R^4} \right]. \quad (1)$$

As fontes eletromagnéticas que descrevem esse objeto são definidas a partir do tensor eletromagnético, cuja as componentes não-nulas são dadas por

$$F^{01} = -F^{10} = \frac{e \sin^2(\theta) \left(1 - \frac{\mu^2 \cos^2(\theta)}{R^4}\right) \left(-1 + \frac{2m}{R} - \frac{e^2}{R^2} - \frac{\mu^2 \left(\frac{\sin^4 \theta}{2} - 3 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^4 \theta\right)}{R^4}\right)}{-\left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{e^2}{R^2} + \frac{\mu^2 \cos^2 \theta}{R^4}\right) R^2 \sin^2 \theta \left(1 - \frac{\mu^2 \cos^2 \theta}{R^4}\right) - \frac{e^2 \mu^2 \sin^4 \theta}{R^4}} - \frac{e \mu^2 \sin^4 \theta \left(-1 + \frac{2m}{R} - \frac{e^2}{R^2} - \frac{\mu^2 \left(\frac{\sin^4 \theta}{2} - 3 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^4 \theta\right)}{R^4}\right)}{R^4 \left(-\left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{e^2}{R^2} + \frac{\mu^2 \cos^2 \theta}{R^4}\right) R^2 \sin^2 \theta \left(1 - \frac{\mu^2 \cos^2 \theta}{R^4}\right) - \frac{e^2 \mu^2 \sin^4 \theta}{R^4}\right)}, \quad (2)$$

$$F^{13} = -F^{31} = -\frac{\left(-1 + \frac{2m}{R} - \frac{e^2}{R^2} - \frac{\mu^2\left(\frac{\sin^4\theta}{2} - 3\sin^2\theta\cos^2\theta + \cos^4\theta\right)}{R^4}\right)e^2\mu\sin^2\theta}{R^4\left(-\left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{e^2}{R^2} + \frac{\mu^2\cos^2\theta}{R^4}\right)R^2\sin^2\theta\left(1 - \frac{\mu^2\cos^2\theta}{R^4}\right) - \frac{e^2\mu^2\sin^4\theta}{R^4}\right)} + \frac{\left(-1 + \frac{2m}{R} - \frac{e^2}{R^2} - \frac{\mu^2\left(\frac{\sin^4\theta}{2} - 3\sin^2\theta\cos^2\theta + \cos^4\theta\right)}{R^4}\right)\left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{e^2}{R^2} + \frac{\mu^2\cos^2\theta}{R^4}\right)\mu\sin^2\theta}{\left(-\left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{e^2}{R^2} + \frac{\mu^2\cos^2\theta}{R^4}\right)R^2\sin^2\theta\left(1 - \frac{\mu^2\cos^2\theta}{R^4}\right) - \frac{e^2\mu^2\sin^4\theta}{R^4}\right)R^2}, \quad (3)$$

$$F^{32} = -F^{23} = -\frac{\left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{e^2}{R^2} + \frac{\mu^2\cos^2\theta}{R^4}\right)\mu\sin(2\theta)}{\left(-\left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{e^2}{R^2} + \frac{\mu^2\cos^2\theta}{R^4}\right)R^2\sin^2\theta\left(1 - \frac{\mu^2\cos^2\theta}{R^4}\right) - \frac{e^2\mu^2\sin^4\theta}{R^4}\right)R^3\left(1 - \frac{\mu^2\left(\frac{\sin^4\theta}{2} - 3\sin^2\theta\cos^2\theta + \cos^4\theta\right)}{R^4}\right)}, \quad (4)$$

$$F^{02} = -F^{20} = -\frac{e\mu^2\sin^2\theta\sin(2\theta)}{R^5\left(-\left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{e^2}{R^2} + \frac{\mu^2\cos^2\theta}{R^4}\right)R^2\sin^2\theta\left(1 - \frac{\mu^2\cos^2\theta}{R^4}\right) - \frac{e^2\mu^2\sin^4\theta}{R^4}\right)\left(1 - \frac{\mu^2\left(\frac{\sin^4\theta}{2} - 3\sin^2\theta\cos^2\theta + \cos^4\theta\right)}{R^4}\right)}. \quad (5)$$

Assim podemos encontrar as equações de Maxwell $F_{;\beta}^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}}(\sqrt{-g}F^{\alpha\beta})_{,\beta} = 4\pi J^\alpha$,

que são

$$\alpha = 0 : \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\left(\sqrt{-g} \overbrace{F^{00}}^{=0} \right)_{,0} + (\sqrt{-g}F^{01})_{,1} + (\sqrt{-g}F^{02})_{,2} + \left(\sqrt{-g} \overbrace{F^{03}}^{=0} \right)_{,3} \right] = 4\pi J^0 \rightarrow$$

$$J^0 = [e\mu^2(36e^4\mu^4mR^{11} + 240e^4\mu^2R^{15}m + 58e^2\mu^4R^{13}m + 120e^2\mu^4m^2R^{12} - 672e^2\mu^2m^2R^{16} + 536e^2\mu^2mR^{17} + 18e^4\mu^8R^4 - 56e^2\mu^6R^9m - 272(\cos(\theta))^2\mu^8R^8 + 8\mu^8R^8 - 3888(\cos(\theta))^{10}R^{10}e^6\mu^4 - 620244(\cos(\theta))^{10}R^{10}m^2\mu^6 + 47232(\cos(\theta))^{10}R^9m^3\mu^6 + 13554(\cos(\theta))^8R^{12}e^4\mu^4 + 14624(\cos(\theta))^6R^{14}e^2\mu^4 - 816(\cos(\theta))^4R^{14}e^6\mu^2 - 144342(\cos(\theta))^{20}R^3m\mu^{10} + 427194(\cos(\theta))^{16}R^6e^2\mu^8 + 120528(\cos(\theta))^{12}R^8e^4\mu^6 - 279688(\cos(\theta))^8R^{11}m\mu^6 + 7128(\cos(\theta))^8R^{10}e^6\mu^4 + 395508(\cos(\theta))^8R^{10}m^2\mu^6 - 39424(\cos(\theta))^8R^9m^3\mu^6 - 2560(\cos(\theta))^6R^{12}e^4\mu^4 - 6998(\cos(\theta))^4R^{14}e^2\mu^4 + 384(\cos(\theta))^2R^{14}e^6\mu^2 + 131220(\cos(\theta))^{20}R^2e^2\mu^{10} + 547479(\cos(\theta))^{18}R^3m\mu^{10} + 3894(\cos(\theta))^4R^6e^2\mu^8 - 320(\cos(\theta))^2R^6e^6\mu^6 + 120372(\cos(\theta))^8R^2e^2\mu^{10} + 4648(\cos(\theta))^6R^3m\mu^{10} + 5730(\cos(\theta))^4R^4e^4\mu^8 - 272(\cos(\theta))^2R^6e^2\mu^8 + 56e^2\mu^6R^8m^2 - 1106(\cos(\theta))^4R^{12}e^4\mu^4 + 16e^6\mu^6R^6 - 104976(\cos(\theta))^{18}R^6e^2\mu^8 - 872613(\cos(\theta))^{16}R^7m\mu^8 + 110808(\cos(\theta))^{16}R^6m^2\mu^8 - 40824(\cos(\theta))^{14}R^8e^4\mu^6 + 229230(\cos(\theta))^{12}R^{10}e^2\mu^6 + 2448(\cos(\theta))^6R^{16}e^4\mu^2 - 63936(\cos(\theta))^8R^{13}m^3\mu^4 + 493668(\cos(\theta))^{10}R^{11}m\mu^6 + 648(\cos(\theta))^8R^{14}e^6\mu^2 - 2496(\cos(\theta))^2R^{19}m\mu^2 + 6320(\cos(\theta))^2R^{18}m^2\mu^2 - 4992(\cos(\theta))^2R^{17}m^3\mu^2 + 216513(\cos(\theta))^{18}R^7m\mu^8 - 113724(\cos(\theta))^{14}R^{10}e^2\mu^6 - 491994(\cos(\theta))^{12}R^{11}m\mu^6$$

$$\begin{aligned}
& - 399812 (\cos(\theta))^{10} R^2 e^2 \mu^{10} - 34330 (\cos(\theta))^8 R^3 m \mu^{10} - 34272 (\cos(\theta))^6 R^4 e^4 \mu^8 \\
& - 280964 \mu^8 (\cos(\theta))^{10} R^6 m^2 + 432576 \mu^8 (\cos(\theta))^{12} R^6 m^2 + 31104 (\cos(\theta))^{10} R^{13} m^3 \mu^4 \\
& + 5472 (\cos(\theta))^6 R^{18} e^2 \mu^2 + 8688 (\cos(\theta))^4 R^{19} m \mu^2 - 16208 R^{18} (\cos(\theta))^4 m^2 \mu^2 \\
& + 9216 (\cos(\theta))^4 R^{17} m^3 \mu^2 - 336 (\cos(\theta))^2 R^{19} e^4 m + 19683 (\cos(\theta))^{16} R^{10} e^2 \mu^6 \\
& + 247860 (\cos(\theta))^{14} R^{11} m \mu^6 - 166212 (\cos(\theta))^{14} R^{10} m^2 \mu^6 + 7290 (\cos(\theta))^{12} R^{12} e^4 \mu^4 \\
& - 12960 (\cos(\theta))^{10} R^{14} e^2 \mu^4 + 870114 (\cos(\theta))^{12} R^2 e^2 \mu^{10} + 154566 (\cos(\theta))^{10} R^3 m \mu^{10} \\
& + 117846 (\cos(\theta))^8 R^4 e^4 \mu^8 - 30424 (\cos(\theta))^6 R^6 e^2 \mu^8 + 2400 (\cos(\theta))^4 R^6 e^6 \mu^6 \\
& - 420 (\cos(\theta))^2 e^2 \mu^6 R^{10} + 5074 (\cos(\theta))^4 e^2 \mu^6 R^{10} - 224316 e^2 \mu^6 R^{10} (\cos(\theta))^{10} \\
& + 117804 e^2 \mu^6 R^{10} (\cos(\theta))^8 - 33604 e^2 \mu^6 R^{10} (\cos(\theta))^6 + 1312 (\cos(\theta))^2 R^{18} e^2 \mu^2 \\
& - 4336 R^{18} (\cos(\theta))^4 e^2 \mu^2 + 1490076 \mu^8 (\cos(\theta))^{14} R^7 m - 344412 \mu^8 (\cos(\theta))^{14} R^6 m^2 \\
& + 144 (\cos(\theta))^2 R^{10} e^6 \mu^4 - 2700 (\cos(\theta))^2 R^{10} m^2 \mu^6 + 128 (\cos(\theta))^2 R^9 m^3 \mu^6 \\
& - 1238796 (\cos(\theta))^{14} R^2 e^2 \mu^{10} - 440822 (\cos(\theta))^{12} R^3 m \mu^{10} - 241176 (\cos(\theta))^{10} R^4 e^4 \mu^8 \\
& + 141262 (\cos(\theta))^8 R^6 e^2 \mu^8 - 8576 (\cos(\theta))^6 R^6 e^6 \mu^6 - 180 (\cos(\theta))^2 R^2 e^2 \mu^{10} \\
& - 14400 (\cos(\theta))^{10} R^6 e^6 \mu^6 - 17238 (\cos(\theta))^4 R^{11} m \mu^6 + 576 (\cos(\theta))^4 R^{10} e^6 \mu^4 \\
& + 27084 (\cos(\theta))^4 R^{10} m^2 \mu^6 - 2304 (\cos(\theta))^4 R^9 m^3 \mu^6 + 408 (\cos(\theta))^2 R^{12} e^4 \mu^4 \\
& + 1115127 (\cos(\theta))^{16} R^2 e^2 \mu^{10} + 797760 (\cos(\theta))^{14} R^3 m \mu^{10} + 290574 (\cos(\theta))^{12} R^4 e^4 \mu^8 \\
& - 401616 (\cos(\theta))^{10} R^6 e^2 \mu^8 + 15760 (\cos(\theta))^8 R^6 e^6 \mu^6 + 1676 (\cos(\theta))^2 R^{11} m \mu^6 \\
& - 34 e^2 \mu^8 R^5 m - 348 (\cos(\theta))^4 R^3 m \mu^{10} - 504 (\cos(\theta))^2 R^4 e^4 \mu^8 + 2746 (\cos(\theta))^4 R^2 e^2 \mu^{10} \\
& + 11 (\cos(\theta))^2 R^3 m \mu^{10} - 30552 (\cos(\theta))^6 \mu^8 R^8 - 16 \mu^2 R^{20} + 56 e^2 R^{22} + 16 e^6 R^{18} \\
& - 256 (\cos(\theta))^2 R^{21} m^3 + 10206 (\cos(\theta))^{12} R^{14} e^2 \mu^4 + 19440 (\cos(\theta))^{10} R^{15} m \mu^4 \\
& - 73224 (\cos(\theta))^{10} R^{14} m^2 \mu^4 + 288 (\cos(\theta))^2 R^{22} m^2 - 16 (\cos(\theta))^2 R^{23} m \\
& + 1152 (\cos(\theta))^2 R^{14} e^2 \mu^4 - 577368 (\cos(\theta))^{18} R^2 e^2 \mu^{10} - 885006 (\cos(\theta))^{16} R^3 m \mu^{10} \\
& - 190512 (\cos(\theta))^{14} R^4 e^4 \mu^8 + 702810 (\cos(\theta))^{12} R^6 e^2 \mu^8 + 4860 (\cos(\theta))^8 R^{19} m \mu^2 \\
& - 1296 (\cos(\theta))^8 R^{18} m^2 \mu^2 - 5184 (\cos(\theta))^8 R^{17} m^3 \mu^2 + 1368 (\cos(\theta))^4 R^{21} e^2 m \\
& - 1728 (\cos(\theta))^4 R^{20} e^2 m^2 - 18954 (\cos(\theta))^{12} R^{15} m \mu^4 + 32076 (\cos(\theta))^{12} R^{14} m^2 \mu^4 \\
& - 2268 (\cos(\theta))^8 R^{18} e^2 \mu^2 - 11376 (\cos(\theta))^6 R^{19} m \mu^2 + 12816 (\cos(\theta))^6 R^{18} m^2 \mu^2 \\
& - 1152 (\cos(\theta))^6 R^{17} m^3 \mu^2 + 864 (\cos(\theta))^4 R^{19} e^4 m - 544 (\cos(\theta))^2 R^{21} e^2 m \\
& - 45927 (\cos(\theta))^{16} R^{11} m \mu^6 + 16578 (\cos(\theta))^4 R^{15} \mu^4 m + 3072 (\cos(\theta))^2 R^{13} m^3 \mu^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 544 (\cos(\theta))^2 R^{20} e^2 m^2 - 1296 (\cos(\theta))^8 R^{20} \mu^2 + 425736 (\cos(\theta))^{16} R^8 \mu^8 \\
& - 2704 (\cos(\theta))^2 \mu^4 R^{15} m + 552 (\cos(\theta))^2 \mu^4 R^{14} m^2 + 21654 R^{15} (\cos(\theta))^8 m \mu^4 \\
& + 53748 (\cos(\theta))^8 R^{14} m^2 \mu^4 - 11168 (\cos(\theta))^6 R^{14} \mu^4 m^2 + 504468 (\cos(\theta))^{12} R^{10} m^2 \mu^6 \\
& - 20736 (\cos(\theta))^{12} R^9 m^3 \mu^6 - 17496 (\cos(\theta))^{10} R^{12} e^4 \mu^4 - 5706 (\cos(\theta))^8 R^{14} e^2 \mu^4 \\
& + 5184 (\cos(\theta))^{12} R^6 e^6 \mu^6 + 92220 (\cos(\theta))^6 R^{11} m \mu^6 - 4128 (\cos(\theta))^6 R^{10} e^6 \mu^4 \\
& - 139548 (\cos(\theta))^6 R^{10} m^2 \mu^6 + 14592 (\cos(\theta))^6 R^9 m^3 \mu^6 + 52488 (\cos(\theta))^{16} R^4 e^4 \mu^8 \\
& - 738072 (\cos(\theta))^{14} R^6 e^2 \mu^8 - 23236 (\cos(\theta))^6 R^2 e^2 \mu^{10} + 1936 \mu^8 (\cos(\theta))^4 R^6 m^2 \\
& - 7398 \mu^8 (\cos(\theta))^4 R^7 m + 513 (\cos(\theta))^2 \mu^8 R^7 m + 100472 (\cos(\theta))^8 \mu^8 R^6 m^2 \\
& + 3312 (\cos(\theta))^4 e^4 \mu^6 R^8 - 24072 (\cos(\theta))^6 e^4 \mu^6 R^8 - 273924 (\cos(\theta))^8 \mu^8 R^7 m \\
& + 58332 (\cos(\theta))^6 \mu^8 R^7 m - 1400274 \mu^8 (\cos(\theta))^{12} R^7 m + 1296 (\cos(\theta))^2 R^{16} e^4 \mu^2 \\
& + 789174 \mu^8 (\cos(\theta))^{10} R^7 m + 49536 (\cos(\theta))^6 R^{13} \mu^4 m^3 - 36672 (\cos(\theta))^6 R^{15} \mu^4 m \\
& - 1692 (\cos(\theta))^4 R^{14} \mu^4 m^2 - 3376 R^{16} (\cos(\theta))^4 e^4 \mu^2 - 18048 (\cos(\theta))^4 R^{13} \mu^4 m^3 \\
& + 26244 (\cos(\theta))^{16} R^{12} \mu^6 + 96 (\cos(\theta))^2 R^{22} e^2 - 360 (\cos(\theta))^4 R^{20} e^4 + 2304 (\cos(\theta))^6 R^{20} \mu^2 \\
& + 44664 \mu^6 (\cos(\theta))^8 R^{12} + 134784 \mu^6 R^{12} (\cos(\theta))^{12} - 216 (\cos(\theta))^4 R^{22} e^2 - 40 \mu^4 R^{16} \\
& + 1152 (\cos(\theta))^4 R^{21} m^3 - 1296 (\cos(\theta))^4 R^{22} m^2 + 360 (\cos(\theta))^4 R^{23} m + 4 \mu^6 R^{12} \\
& - 104976 (\cos(\theta))^{18} R^8 \mu^8 + 64 (\cos(\theta))^2 R^{18} e^6 - 93312 (\cos(\theta))^{14} R^{12} \mu^6 \\
& + 192 (\cos(\theta))^2 R^{20} e^4 + 840 (\cos(\theta))^2 \mu^4 R^{16} - 15 \mu^8 R^7 m + 576 \mu^2 m^3 R^{17} - 24 e^6 R^{10} \mu^4 \\
& - 144 (\cos(\theta))^4 R^{18} e^6 - 102528 \mu^6 (\cos(\theta))^{10} R^{12} + 8424 (\cos(\theta))^{10} R^{16} \mu^4 \\
& + 16400 (\cos(\theta))^6 R^{16} \mu^4 - 5904 (\cos(\theta))^4 R^{16} \mu^4 - 19656 R^{16} (\cos(\theta))^8 \mu^4 + 32 R^{24} \\
& - 403760 (\cos(\theta))^{10} \mu^8 R^8 + 36264 (\cos(\theta))^6 R^7 e^4 m \mu^6 - 20208 (\cos(\theta))^4 R^9 e^2 m \mu^6 \\
& + 10848 (\cos(\theta))^4 R^8 e^2 m^2 \mu^6 - 275446 (\cos(\theta))^8 R^5 e^2 m \mu^8 - 9648 (\cos(\theta))^4 R^7 e^4 m \mu^6 \\
& - 65 \mu^6 R^{11} m + 8 e^2 \mu^8 R^6 + 5 e^2 \mu^{10} R^2 - 112 e^4 \mu^2 R^{16} - 26 e^4 R^{12} \mu^4 - 144 e^4 R^{19} m \\
& + 196 \mu^2 R^{19} m - 608 \mu^2 R^{18} m^2 - 62 e^2 \mu^4 R^{14} - 116 e^2 \mu^2 R^{18} + 416 e^2 m^2 R^{20} - 312 e^2 m R^{21} \\
& - 24 e^6 R^{14} \mu^2 - 36 \mu^4 R^{14} m^2 + 146 \mu^4 R^{15} m + 108 \mu^6 R^{10} m^2 - 192 \mu^4 R^{13} m^3 \\
& + 17 e^2 \mu^6 R^{10} + 702936 (\cos(\theta))^{12} \mu^8 R^8 - 76 \mu^8 (\cos(\theta))^2 R^6 m^2 - 168 (\cos(\theta))^2 e^4 \mu^6 R^8 \\
& + 256 (\cos(\theta))^2 R^{20} \mu^2 - 19572 (\cos(\theta))^6 \mu^8 R^6 m^2 - 140760 e^4 \mu^6 (\cos(\theta))^{10} R^8 \\
& + 81600 e^4 \mu^6 (\cos(\theta))^8 R^8 + 603344 (\cos(\theta))^{10} R^5 e^2 m \mu^8 + 300 (\cos(\theta))^2 R^{11} e^4 m \mu^4 \\
& - 45520 (\cos(\theta))^6 R^8 e^2 m^2 \mu^6 + 117280 (\cos(\theta))^6 R^9 e^2 m \mu^6 - 70188 (\cos(\theta))^8 R^7 e^4 m \mu^6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 735480 \mu^8 (\cos(\theta))^{14} R^8 + 52488 (\cos(\theta))^{22} \mu^{12} + 15008 (\cos(\theta))^{10} \mu^{12} \\
& - 776430 (\cos(\theta))^{12} R^5 e^2 m \mu^8 - 2712 (\cos(\theta))^2 R^{12} e^2 m^2 \mu^4 - 936 (\cos(\theta))^2 R^{13} e^2 m \mu^4 \\
& - 6984 (\cos(\theta))^4 R^{11} e^4 m \mu^4 + 97048 (\cos(\theta))^8 R^8 e^2 m^2 \mu^6 - 357832 (\cos(\theta))^8 R^9 e^2 m \mu^6 \\
& + 67284 (\cos(\theta))^{10} R^7 e^4 m \mu^6 + 541080 (\cos(\theta))^{14} R^5 e^2 m \mu^8 + 20688 (\cos(\theta))^4 R^{12} e^2 m^2 \mu^4 \\
& + 2386 (\cos(\theta))^4 R^{13} e^2 m \mu^4 + 28680 (\cos(\theta))^6 R^{11} e^4 m \mu^4 - 100584 (\cos(\theta))^{10} R^8 e^2 m^2 \mu^6 \\
& + 585936 (\cos(\theta))^{10} R^9 e^2 m \mu^6 - 25272 (\cos(\theta))^{12} R^7 e^4 m \mu^6 - 157464 (\cos(\theta))^{16} R^5 e^2 m \mu^8 \\
& - 1248 R^{20} (\cos(\theta))^4 \mu^2 - 2688 (\cos(\theta))^2 R^{15} e^4 m \mu^2 - 5728 (\cos(\theta))^2 R^{17} e^2 m \mu^2 \\
& + 5328 (\cos(\theta))^4 R^{15} e^4 m \mu^2 + 91224 (\cos(\theta))^8 R^{12} e^2 m^2 \mu^4 + 1664 (\cos(\theta))^4 \mu^6 R^{12} \\
& - 65616 (\cos(\theta))^6 R^{12} e^2 m^2 \mu^4 + 11952 (\cos(\theta))^6 R^{13} e^2 m \mu^4 - 43884 (\cos(\theta))^8 R^{11} e^4 m \mu^4 \\
& + 40176 (\cos(\theta))^{12} R^8 e^2 m^2 \mu^6 - 488592 (\cos(\theta))^{12} R^9 e^2 m \mu^6 + 6336 (\cos(\theta))^2 R^{16} e^2 m^2 \mu^2 \\
& - 128 \mu^6 (\cos(\theta))^2 R^{12} - 55026 (\cos(\theta))^8 R^{13} e^2 m \mu^4 + 23004 (\cos(\theta))^{10} R^{11} e^4 m \mu^4 \\
& + 163296 (\cos(\theta))^{14} R^9 e^2 m \mu^6 - 12000 (\cos(\theta))^4 R^{16} e^2 m^2 \mu^2 + 14752 (\cos(\theta))^4 R^{17} e^2 m \mu^2 \\
& - 144 (\cos(\theta))^6 R^{15} e^4 m \mu^2 - 46008 (\cos(\theta))^{10} R^{12} e^2 m^2 \mu^4 + 71928 (\cos(\theta))^{10} R^{13} e^2 m \mu^4 \\
& + 864 (\cos(\theta))^6 R^{16} e^2 m^2 \mu^2 - 11232 (\cos(\theta))^6 R^{17} e^2 m \mu^2 - 3888 (\cos(\theta))^8 R^{15} e^4 m \mu^2 \\
& + 142336 (\cos(\theta))^8 \mu^8 R^8 - 30618 (\cos(\theta))^{12} R^{13} e^2 m \mu^4 + 3896 (\cos(\theta))^4 \mu^8 R^8 \\
& + 7776 (\cos(\theta))^8 R^{16} e^2 m^2 \mu^2 + 648 (\cos(\theta))^8 R^{17} e^2 m \mu^2 + 992 (\cos(\theta))^2 R^5 e^2 m \mu^8 \\
& - 11392 (\cos(\theta))^6 \mu^6 R^{12} - 11842 (\cos(\theta))^4 R^5 e^2 m \mu^8 - 32 (\cos(\theta))^2 R^{24} \\
& - 212868 (\cos(\theta))^{20} \mu^{12} + 365472 (\cos(\theta))^{18} \mu^{12} + 196784 (\cos(\theta))^{14} \mu^{12} \\
& + 136 (\cos(\theta))^6 \mu^{12} - 4 (\cos(\theta))^4 \mu^{12} - 345744 \mu^{12} (\cos(\theta))^{16} - 1936 \mu^{12} (\cos(\theta))^8 \\
& - 69272 \mu^{12} (\cos(\theta))^{12} + 40 e^4 R^{20} - 216 m R^{23} + 496 m^2 R^{22} - 384 m^3 R^{21} \\
& + 75032 (\cos(\theta))^6 R^5 e^2 m \mu^8 + 1236 (\cos(\theta))^2 R^7 e^4 m \mu^6 - 1256 (\cos(\theta))^2 R^8 e^2 m^2 \mu^6 \\
& - 60 e^4 \mu^6 R^7 m + 1712 (\cos(\theta))^2 R^9 e^2 m \mu^6 \Big] \times [8\pi R^3 (9\mu^6 (\cos(\theta))^8 - 8\mu^6 (\cos(\theta))^6 \\
& + 18\mu^4 (\cos(\theta))^6 e^2 R^2 - 18\mu^4 (\cos(\theta))^6 m R^3 - 9\mu^2 (\cos(\theta))^4 R^8 + \mu^6 (\cos(\theta))^4 \\
& - 9\mu^2 (\cos(\theta))^4 e^2 R^6 - 2R^4 \mu^4 (\cos(\theta))^4 + \mu^2 e^2 R^6 + \mu^2 e^2 R^6 - 72 (\cos(\theta))^4 R^{10} m^2 \mu^2 \\
& + 16\mu^4 (\cos(\theta))^4 m R^3 + 18\mu^2 (\cos(\theta))^4 m R^7 - 12R^7 m \mu^2 (\cos(\theta))^2 + 4R^6 e^2 \mu^2 (\cos(\theta))^2 \\
& + 8\mu^2 (\cos(\theta))^2 R^8 - 2\mu^4 m R^3 (\cos(\theta))^2 + 10\mu^4 e^2 R^2 (\cos(\theta))^2 - \mu^4 e^2 R^2 + 2R^7 m \mu^2 \\
& - 4R^{11} m + 2R^{10} e^2 - \mu^2 R^8 + 2R^{12}) (2\mu^2 R^8 e^4 + 16R^8 \mu^4 (\cos(\theta))^2 + 144\mu^4 (\cos(\theta))^6 R^8 \\
& + 8\mu^2 (\cos(\theta))^2 R^8 - 2\mu^4 m R^3 (\cos(\theta))^2 + 10\mu^4 e^2 R^2 (\cos(\theta))^2 - \mu^4 e^2 R^2 + 2R^7 m \mu^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 81 (\cos(\theta))^8 R^8 \mu^4 - \mu^4 R^6 e^2 - 2 \mu^4 R^4 e^4 + 36 (\cos(\theta))^4 R^{11} m \mu^2 - 16 R^{13} e^2 m \\
& + 144 \mu^4 (\cos(\theta))^6 R^8 + 144 (\cos(\theta))^6 R^6 \mu^4 e^2 + 162 (\cos(\theta))^{10} R^2 \mu^6 e^2 \\
& - 4 R^{11} m + 2 R^{10} e^2 - \mu^2 R^8 + 2 R^{12} (2 \mu^2 R^8 e^4 + 16 R^8 \mu^4 (\cos(\theta))^2 - R^8 \mu^4 \\
& - 24 (\cos(\theta))^2 R^{11} m \mu^2 + 48 (\cos(\theta))^2 R^{10} m^2 \mu^2 + 8 (\cos(\theta))^2 R^{10} \mu^2 e^2 \\
& - 86 (\cos(\theta))^4 R^6 \mu^4 e^2 - 18 (\cos(\theta))^4 R^{10} \mu^2 e^2 - 81 (\cos(\theta))^8 R^6 \mu^4 e^2 \\
& + 8 \mu^2 (\cos(\theta))^2 R^8 e^4 - 86 \mu^4 (\cos(\theta))^4 R^8 + 20 (\cos(\theta))^2 R^4 \mu^4 e^4 + 4 R^{16} \\
& - 18 \mu^2 (\cos(\theta))^4 R^8 e^4 + 36 (\cos(\theta))^6 R^4 \mu^4 e^4 + 292 (\cos(\theta))^6 R^2 \mu^6 e^2 \\
& - 112 (\cos(\theta))^4 R^2 \mu^6 e^2 - 351 (\cos(\theta))^8 R^2 \mu^6 e^2 + 18 (\cos(\theta))^2 R^2 \mu^6 e^2 \\
& + 162 (\cos(\theta))^8 R^7 \mu^4 m - 132 (\cos(\theta))^6 R^3 \mu^6 m + 4 e^4 R^{12} + 72 (\cos(\theta))^4 R^9 \mu^2 e^2 m \\
& - 64 (\cos(\theta))^4 R^6 \mu^4 m^2 + 172 (\cos(\theta))^4 R^7 \mu^4 m + 252 (\cos(\theta))^8 R^3 \mu^6 m \\
& - 32 (\cos(\theta))^2 R^7 \mu^4 m + 28 (\cos(\theta))^4 R^3 \mu^6 m - 162 (\cos(\theta))^{10} R^3 \mu^6 m \\
& + 16 (\cos(\theta))^2 R^6 \mu^4 e^2 - 50 R^4 \mu^4 (\cos(\theta))^4 e^4 - 288 (\cos(\theta))^6 R^7 \mu^4 m \\
& + 72 (\cos(\theta))^6 R^6 \mu^4 m^2 + 8 (\cos(\theta))^2 R^6 m^2 \mu^4 - 2 (\cos(\theta))^2 R^3 \mu^6 m + 4 \mu^4 R^5 e^2 m \\
& - 16 R^{15} m + 16 R^{14} m^2 - 40 (\cos(\theta))^2 R^9 \mu^2 e^2 m - \mu^6 e^2 R^2 - 8 \mu^2 R^{10} m^2 \\
& + 4 \mu^2 R^{11} m + 2 \mu^4 R^7 m + 2 \mu^2 R^{10} e^2 + \mu^8 (\cos(\theta))^4 + 82 (\cos(\theta))^8 \mu^8 - 16 (\cos(\theta))^6 \mu^8 \\
& - 144 \mu^8 (\cos(\theta))^{10} + 81 \mu^8 (\cos(\theta))^{12} - 44 (\cos(\theta))^2 R^5 \mu^4 e^2 m + 8 R^{14} e^2 \\
& + 132 (\cos(\theta))^4 R^5 \mu^4 e^2 m - 108 (\cos(\theta))^6 R^5 \mu^4 e^2 m - 25 \mu^4 (\cos(\theta))^4 e^2 R^2 \Big]^{-1} \quad (6)
\end{aligned}$$

$$\alpha = 1 : \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\overbrace{(\sqrt{-g} F^{10})}_0 + \left(\overbrace{\sqrt{-g} F^{11}}^0 \right)_1 + \left(\overbrace{\sqrt{-g} F^{12}}^0 \right)_2 + \overbrace{(\sqrt{-g} F^{13})}_3 \right] = 4\pi J^1$$

$$\rightarrow J^1 = 0, \quad (7)$$

$$\alpha = 2 : \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\overbrace{(\sqrt{-g} F^{20})}_0 + \left(\overbrace{\sqrt{-g} F^{21}}^0 \right)_1 + \left(\overbrace{\sqrt{-g} F^{22}}^0 \right)_2 + \overbrace{(\sqrt{-g} F^{23})}_3 \right] = 4\pi J^2$$

$$\rightarrow J^2 = 0, \quad (8)$$

$$\alpha = 3 : \frac{1}{\sqrt{-g}} \left[\left(\overbrace{\sqrt{-g} F^{30}}^0 \right)_0 + (\sqrt{-g} F^{31})_1 + (\sqrt{-g} F^{32})_2 + \left(\overbrace{\sqrt{-g} F^{33}}^0 \right)_3 \right] = 4\pi J^3 \rightarrow$$

$$\begin{aligned}
J^3 & = [-\mu(-1312 \mu^2 R^{21} m^3 + 152 \mu^2 R^{20} e^4 + 544 \mu^2 R^{22} m^2 + 1024 \mu^2 R^{20} m^4 - 72 \mu^2 R^{23} m \\
& + 328 \mu^4 R^{18} m^2 - 172 \mu^4 R^{19} m + 44 \mu^4 R^{18} e^2 - 22 \mu^6 R^{14} e^2 - 14 \mu^6 R^{12} e^4 - 8 \mu^6 R^{10} e^6 \\
& - 10 \mu^8 R^8 e^4 - 136 \mu^4 R^{17} m e^2 - 32 \mu^4 R^{16} m^2 e^2 + 288 \mu^4 R^{15} m^3 e^2 + 90 \mu^6 R^{13} m e^2 \\
& - 132 \mu^6 R^{12} m^2 e^2 - 88 \mu^6 R^{10} e^4 m^2 + 24 \mu^6 R^9 e^6 m + 32 \mu^6 R^{11} e^4 m + 28 \mu^8 R^7 e^4 m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 1152 R^{23} m^3 e^2 + 288 R^{25} m e^2 - 1152 R^{24} m^2 e^2 + 288 R^{23} e^4 m - 576 R^{22} e^4 m^2 \\
& - 6 \mu^8 R^{12} + 24 \mu^4 R^{20} - 16 \mu^4 e^6 R^{14} - 8 \mu^4 R^{16} e^4 + 64 \mu^2 R^{18} e^6 + 88 \mu^2 R^{22} e^2 + 30 \mu^8 R^9 m e^2 \\
& + 8 \mu^{10} R^5 m e^2 + 80 \mu^6 R^{11} m^3 e^2 - 52 \mu^8 R^8 m^2 e^2 - 26 \mu^8 R^{10} m^2 + 25 \mu^8 R^{11} m \\
& - 320 \mu^4 R^{16} m^4 + 88938 (\cos(\theta))^{14} R^{10} e^2 \mu^8 - 118422 (\cos(\theta))^{14} R^4 e^4 \mu^{10} \\
& + 42 \mu^6 R^{15} m + 184 \mu^6 R^{13} m^3 - 176 \mu^6 R^{14} m^2 - 5 \mu^8 R^{10} e^2 - 3 \mu^{10} R^6 e^2 + 96 R^{21} e^6 m \\
& - 54808 (\cos(\theta))^6 R^{15} m \mu^6 + 161904 (\cos(\theta))^6 R^{14} m^2 \mu^6 - 149152 (\cos(\theta))^6 R^{13} m^3 \mu^6 \\
& + 424 (\cos(\theta))^4 R^{16} e^4 \mu^4 - 840 (\cos(\theta))^2 R^{18} e^2 \mu^4 - 287226 (\cos(\theta))^{16} R^7 m \mu^{10} \\
& - 314928 (\cos(\theta))^{16} R^6 m^2 \mu^{10} - 10206 (\cos(\theta))^{14} R^8 e^4 \mu^8 - 108864 (\cos(\theta))^{12} R^{10} e^2 \mu^8 \\
& - 1296 (\cos(\theta))^{10} R^{10} e^6 \mu^6 + 12086 (\cos(\theta))^4 R^{15} m \mu^6 - 1280 (\cos(\theta))^4 R^{14} e^6 \mu^4 \\
& - 37872 (\cos(\theta))^4 R^{14} m^2 \mu^6 - 7812 (\cos(\theta))^8 R^3 m \mu^{12} - 6922 (\cos(\theta))^6 R^4 e^4 \mu^{10} \\
& - 1158 (\cos(\theta))^4 R^6 e^2 \mu^{10} - 24 (\cos(\theta))^2 R^6 e^6 \mu^8 + 25736 (\cos(\theta))^8 R^2 e^2 \mu^{12} \\
& + 630 (\cos(\theta))^6 R^3 m \mu^{12} + 676 (\cos(\theta))^4 R^4 e^4 \mu^{10} - 3366 (\cos(\theta))^6 R^2 e^2 \mu^{12} \\
& + 6930 (\cos(\theta))^{10} R^8 e^4 \mu^8 - 35766 (\cos(\theta))^8 R^{10} e^2 \mu^8 + 1840 (\cos(\theta))^6 R^{10} e^6 \mu^6 \\
& - 356481 (\cos(\theta))^{18} R^2 e^2 \mu^{12} - 632772 (\cos(\theta))^{16} R^3 m \mu^{12} - 26 (\cos(\theta))^2 R^4 e^4 \mu^{10} \\
& - 6426 (\cos(\theta))^{12} R^6 e^2 \mu^{10} + 152944 (\cos(\theta))^{10} R^7 m \mu^{10} - 8856 (\cos(\theta))^{10} R^6 e^6 \mu^8 \\
& + 76860 (\cos(\theta))^{10} R^6 m^2 \mu^{10} - 19206 (\cos(\theta))^8 R^8 e^4 \mu^8 + 10166 (\cos(\theta))^6 R^{10} e^2 \mu^8 \\
& - 1200 (\cos(\theta))^4 R^{10} e^6 \mu^6 + 596808 (\cos(\theta))^{16} R^2 e^2 \mu^{12} + 467586 (\cos(\theta))^{14} R^3 m \mu^{12} \\
& + 150156 (\cos(\theta))^{12} R^4 e^4 \mu^{10} + 35526 (\cos(\theta))^{10} R^6 e^2 \mu^{10} - 38222 (\cos(\theta))^8 R^7 m \mu^{10} \\
& + 7392 (\cos(\theta))^8 R^6 e^6 \mu^8 + 484 \mu^6 R^{14} (\cos(\theta))^2 e^2 - 4730 \mu^6 R^{14} (\cos(\theta))^4 e^2 \\
& + 46980 \mu^6 (\cos(\theta))^{10} R^{14} e^2 - 49770 \mu^6 (\cos(\theta))^8 R^{14} e^2 - 529254 \mu^8 (\cos(\theta))^{14} R^{11} m \\
& - 87480 \mu^8 (\cos(\theta))^{14} R^9 m^3 + 536544 \mu^8 (\cos(\theta))^{14} m^2 R^{10} - 120 \mu^8 R^9 (\cos(\theta))^2 m^3 \\
& - 198288 (\cos(\theta))^{12} R^6 m^2 \mu^{10} + 736 \mu^8 R^{10} (\cos(\theta))^2 m^2 - 726 \mu^8 R^{11} (\cos(\theta))^2 m \\
& - 1224 (\cos(\theta))^4 R^{23} m \mu^2 + 7200 (\cos(\theta))^4 R^{22} m^2 \mu^2 + 648 (\cos(\theta))^4 R^{22} e^2 \mu^2 \\
& - 14112 (\cos(\theta))^4 R^{21} m^3 \mu^2 - 24300 (\cos(\theta))^8 R^{19} m \mu^4 + 36936 (\cos(\theta))^8 R^{18} m^2 \mu^4 \\
& - 6144 (\cos(\theta))^2 R^{22} m^2 \mu^2 + 1040 (\cos(\theta))^2 R^{23} m \mu^2 + 8748 (\cos(\theta))^8 R^{18} e^2 \mu^4 \\
& + 12096 (\cos(\theta))^2 R^{21} m^3 \mu^2 + 30618 (\cos(\theta))^{12} R^{15} m \mu^6 - 128304 (\cos(\theta))^{12} R^{14} m^2 \mu^6 \\
& + 36792 (\cos(\theta))^6 R^{19} m \mu^4 - 55008 (\cos(\theta))^6 R^{18} m^2 \mu^4 - 2592 (\cos(\theta))^6 R^{17} m^3 \mu^4 \\
& + 1224 (\cos(\theta))^4 R^{20} e^4 \mu^2 - 576 (\cos(\theta))^2 R^{22} e^2 \mu^2 - 16038 (\cos(\theta))^{12} R^{14} e^2 \mu^6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 96228 (\cos(\theta))^{10} R^{15} m \mu^6 + 329832 (\cos(\theta))^{10} R^{14} m^2 \mu^6 - 327888 (\cos(\theta))^{10} R^{13} m^3 \mu^6 \\
& + 2592 (\cos(\theta))^8 R^{16} e^4 \mu^4 - 12312 (\cos(\theta))^6 R^{18} e^2 \mu^4 - 17976 (\cos(\theta))^4 R^{19} m \mu^4 \\
& + 576 (\cos(\theta))^4 R^{18} e^6 \mu^2 + 26928 (\cos(\theta))^4 R^{18} m^2 \mu^4 + 2880 (\cos(\theta))^4 R^{17} m^3 \mu^4 \\
& - 1056 (\cos(\theta))^2 R^{20} e^4 \mu^2 - 22032 (\cos(\theta))^8 R^6 m^2 \mu^{10} + 11262 (\cos(\theta))^6 R^8 e^4 \mu^8 \\
& - 1632 (\cos(\theta))^4 R^{10} e^2 \mu^8 + 192 (\cos(\theta))^2 R^{10} e^6 \mu^6 - 561690 (\cos(\theta))^{14} R^2 e^2 \mu^{12} \\
& - 201726 (\cos(\theta))^{12} R^3 m \mu^{12} - 98694 (\cos(\theta))^{10} R^4 e^4 \mu^{10} - 23856 (\cos(\theta))^8 R^6 e^2 \mu^{10} \\
& + 5348 (\cos(\theta))^6 R^7 m \mu^{10} - 2736 (\cos(\theta))^6 R^6 e^6 \mu^8 + 4176 (\cos(\theta))^6 R^6 m^2 \mu^{10} \\
& - 2642 (\cos(\theta))^4 R^8 e^4 \mu^8 + 138 (\cos(\theta))^2 R^{10} e^2 \mu^8 + 323604 (\cos(\theta))^{12} R^2 e^2 \mu^{12} \\
& + 51954 (\cos(\theta))^{10} R^3 m \mu^{12} + 35612 (\cos(\theta))^8 R^4 e^4 \mu^{10} + 7296 (\cos(\theta))^6 R^6 e^2 \mu^{10} \\
& - 394 (\cos(\theta))^4 R^7 m \mu^{10} + 432 (\cos(\theta))^4 R^6 e^6 \mu^8 - 432 (\cos(\theta))^4 R^6 m^2 \mu^{10} \\
& + 270 (\cos(\theta))^2 R^8 e^4 \mu^8 + 23128 \mu^6 (\cos(\theta))^6 R^{14} e^2 - 21 (\cos(\theta))^4 R^3 m \mu^{12} \\
& - 116408 (\cos(\theta))^{10} R^2 e^2 \mu^{12} - 2232 (\cos(\theta))^6 R^{16} e^4 \mu^4 - 5088 (\cos(\theta))^2 R^{18} m^2 \mu^4 \\
& + 5512 (\cos(\theta))^4 R^{18} e^2 \mu^4 + 3128 (\cos(\theta))^2 R^{19} m \mu^4 - 480 (\cos(\theta))^2 R^{18} e^6 \mu^2 \\
& - 544 (\cos(\theta))^2 R^{17} m^3 \mu^4 - 224140 \mu^8 (\cos(\theta))^8 R^{10} m^2 + 229454 \mu^8 (\cos(\theta))^8 R^{11} m \\
& + 12040 \mu^6 (\cos(\theta))^6 R^{12} e^4 + 2640 \mu^8 R^9 (\cos(\theta))^4 m^3 - 8832 \mu^8 R^{10} (\cos(\theta))^4 m^2 \\
& + 8816 \mu^8 R^{11} (\cos(\theta))^4 m - 2462 \mu^6 R^{12} (\cos(\theta))^4 e^4 + 264 \mu^6 R^{12} (\cos(\theta))^2 e^4 \\
& - 22144 (\cos(\theta))^4 R^{16} m^4 \mu^4 - 1296 (\cos(\theta))^8 R^{14} e^6 \mu^4 - 333936 (\cos(\theta))^8 R^{14} m^2 \mu^6 \\
& - 32805 (\cos(\theta))^{16} R^{10} e^2 \mu^8 - 13122 (\cos(\theta))^{12} R^{12} e^4 \mu^6 + 109350 (\cos(\theta))^8 R^{15} m \mu^6 \\
& + 12 (\cos(\theta))^2 R^7 m \mu^{10} + 18 (\cos(\theta))^2 R^6 m^2 \mu^{10} + 93 (\cos(\theta))^2 R^6 e^2 \mu^{10} \\
& - 7 (\cos(\theta))^2 R^2 e^2 \mu^{12} + 192 (\cos(\theta))^2 R^{12} m^4 \mu^6 + 316008 (\cos(\theta))^8 R^{13} m^3 \mu^6 \\
& + 91854 (\cos(\theta))^{20} R^2 e^2 \mu^{12} - 27648 (\cos(\theta))^8 R^{12} m^4 \mu^6 + 4608 (\cos(\theta))^2 R^{16} m^4 \mu^4 \\
& + 78732 (\cos(\theta))^{18} R^7 m \mu^{10} + 118098 (\cos(\theta))^{18} R^6 m^2 \mu^{10} + 2448 (\cos(\theta))^6 R^{14} e^6 \mu^4 \\
& + 15744 (\cos(\theta))^6 R^{12} m^4 \mu^6 + 9216 (\cos(\theta))^4 R^{20} m^4 \mu^2 - 25920 (\cos(\theta))^8 R^{16} m^4 \mu^4 \\
& - 19683 (\cos(\theta))^{18} R^6 e^2 \mu^{10} - 3072 (\cos(\theta))^4 R^{12} m^4 \mu^6 - 137781 (\cos(\theta))^{20} R^3 m \mu^{12} \\
& + 134136 (\cos(\theta))^{12} R^{13} m^3 \mu^6 + 41472 (\cos(\theta))^6 R^{16} m^4 \mu^4 + 164025 (\cos(\theta))^{16} R^{11} m \mu^8 \\
& - 170586 (\cos(\theta))^{16} R^{10} m^2 \mu^8 + 15552 (\cos(\theta))^{10} R^{12} m^4 \mu^6 + 35112 (\cos(\theta))^4 R^{13} m^3 \mu^6 \\
& - 40 (\cos(\theta))^2 R^{16} e^4 \mu^4 - 7936 (\cos(\theta))^2 R^{20} m^4 \mu^2 + 13122 (\cos(\theta))^{12} R^8 e^4 \mu^8 \\
& + 54675 (\cos(\theta))^{16} R^6 e^2 \mu^{10} + 433188 (\cos(\theta))^{14} R^7 m \mu^{10} + 338256 (\cos(\theta))^{14} R^6 m^2 \mu^{10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 78390 (\cos(\theta))^{10} R^{10} e^2 \mu^8 + 216 (\cos(\theta))^8 R^{10} e^6 \mu^6 - 4048 (\cos(\theta))^2 R^{13} m^3 \mu^6 \\
& - 1188 (\cos(\theta))^2 R^{15} m \mu^6 + 144 (\cos(\theta))^2 R^{14} e^6 \mu^4 + 4200 (\cos(\theta))^2 R^{14} m^2 \mu^6 \\
& + 459270 (\cos(\theta))^{18} R^3 m \mu^{12} + 37908 (\cos(\theta))^{16} R^4 e^4 \mu^{10} + 724464 \mu^8 (\cos(\theta))^{12} m R^{11} \\
& - 46656 (\cos(\theta))^{14} R^6 e^2 \mu^{10} - 343998 (\cos(\theta))^{12} R^7 m \mu^{10} + 3888 (\cos(\theta))^{12} R^6 e^6 \mu^8 \\
& - 715392 \mu^8 (\cos(\theta))^{12} m^2 R^{10} + 213840 \mu^8 (\cos(\theta))^{12} R^9 m^3 - 201960 \mu^8 (\cos(\theta))^{10} R^9 m^3 \\
& - 27378 \mu^6 (\cos(\theta))^8 R^{12} e^4 + 93600 \mu^8 (\cos(\theta))^8 R^9 m^3 + 29808 \mu^6 (\cos(\theta))^{10} R^{12} e^4 \\
& + 521280 \mu^8 (\cos(\theta))^{10} R^{10} m^2 - 535194 \mu^8 (\cos(\theta))^{10} R^{11} m + 57920 \mu^8 (\cos(\theta))^6 R^{10} m^2 \\
& - 22440 \mu^8 (\cos(\theta))^6 R^9 m^3 - 58506 \mu^8 (\cos(\theta))^6 R^{11} m - 31068 (\cos(\theta))^4 R^{12} e^2 m^2 \mu^6 \\
& - 358506 (\cos(\theta))^{14} R^5 e^2 m \mu^{10} - 121068 (\cos(\theta))^{10} R^7 e^4 m \mu^8 + 132582 (\cos(\theta))^8 R^9 e^2 m \mu^8 \\
& - 212988 (\cos(\theta))^8 R^8 e^2 m^2 \mu^8 - 2200 (\cos(\theta))^2 R^{13} e^2 m \mu^6 + 3336 (\cos(\theta))^2 R^{12} e^2 m^2 \mu^6 \\
& + 258336 (\cos(\theta))^{12} R^5 e^2 m \mu^{10} + 74140 (\cos(\theta))^8 R^7 e^4 m \mu^8 - 45918 (\cos(\theta))^6 R^9 e^2 m \mu^8 \\
& + 71752 (\cos(\theta))^6 R^8 e^2 m^2 \mu^8 - 135106 (\cos(\theta))^{10} R^5 e^2 m \mu^{10} - 27120 (\cos(\theta))^6 R^7 e^4 m \mu^8 \\
& + 8730 (\cos(\theta))^4 R^9 e^2 m \mu^8 - 13580 (\cos(\theta))^4 R^8 e^2 m^2 \mu^8 + 54016 (\cos(\theta))^8 R^5 e^2 m \mu^{10} \\
& + 5752 (\cos(\theta))^4 R^7 e^4 m \mu^8 - 822 (\cos(\theta))^2 R^9 e^2 m \mu^8 + 1328 (\cos(\theta))^2 R^8 e^2 m^2 \mu^8 \\
& - 14918 (\cos(\theta))^6 R^5 e^2 m \mu^{10} - 636 (\cos(\theta))^2 R^7 e^4 m \mu^8 + 2496 (\cos(\theta))^4 R^5 e^2 m \mu^{10} \\
& - 222 (\cos(\theta))^2 R^5 e^2 m \mu^{10} - 6120 (\cos(\theta))^4 R^{21} e^2 m \mu^2 + 16560 (\cos(\theta))^4 R^{20} e^2 m^2 \mu^2 \\
& - 69660 \mu^6 (\cos(\theta))^{10} R^{11} e^4 m + 64872 \mu^6 (\cos(\theta))^8 R^{11} e^4 m - 33000 \mu^6 (\cos(\theta))^6 R^{11} e^4 m \\
& + 8764 \mu^6 R^{11} (\cos(\theta))^4 e^4 m - 972 \mu^6 R^{11} (\cos(\theta))^2 e^4 m - 223074 (\cos(\theta))^{14} R^9 e^2 m \mu^8 \\
& - 3888 (\cos(\theta))^{10} R^9 e^6 m \mu^6 - 40536 (\cos(\theta))^8 R^{10} e^4 m^2 \mu^6 - 41696 (\cos(\theta))^6 R^{11} e^2 m^3 \mu^6 \\
& + 1680 (\cos(\theta))^4 R^{13} e^6 m \mu^4 + 12448 (\cos(\theta))^4 R^{11} e^2 m^3 \mu^6 - 7392 (\cos(\theta))^6 R^9 e^6 m \mu^6 \\
& + 1440 (\cos(\theta))^2 R^{14} e^4 m^2 \mu^4 + 8856 (\cos(\theta))^8 R^9 e^6 m \mu^6 + 31696 (\cos(\theta))^6 R^{10} e^4 m^2 \mu^6 \\
& - 1648 (\cos(\theta))^2 R^{11} e^2 m^3 \mu^6 + 2736 (\cos(\theta))^4 R^9 e^6 m \mu^6 + 1640 (\cos(\theta))^2 R^{10} e^4 m^2 \mu^6 \\
& - 10928 (\cos(\theta))^4 R^{10} e^4 m^2 \mu^6 - 432 (\cos(\theta))^2 R^9 e^6 m \mu^6 + 38880 (\cos(\theta))^8 R^{15} e^2 m^3 \mu^4 \\
& + 6912 (\cos(\theta))^4 R^{18} e^4 m^2 \mu^2 - 60480 (\cos(\theta))^6 R^{15} e^2 m^3 \mu^4 - 1152 (\cos(\theta))^4 R^{17} e^6 m \mu^2 \\
& + 11840 (\cos(\theta))^2 R^{19} e^2 m^3 \mu^2 - 131220 (\cos(\theta))^{12} R^{12} e^2 m^2 \mu^6 \\
& + 78732 (\cos(\theta))^{16} R^9 e^2 m \mu^8 + 32076 (\cos(\theta))^{12} R^{11} e^4 m \mu^6 - 29808 (\cos(\theta))^{10} R^{11} e^2 m^3 \mu^6 \\
& + 3240 (\cos(\theta))^8 R^{13} e^6 m \mu^4 + 29088 (\cos(\theta))^6 R^{14} e^4 m^2 \mu^4 + 29952 (\cos(\theta))^4 R^{15} e^2 m^3 \mu^4 \\
& - 5856 (\cos(\theta))^2 R^{18} e^4 m^2 \mu^2 - 290412 (\cos(\theta))^8 R^{12} e^2 m^2 \mu^6 + 6016 (\cos(\theta))^4 R^{15} e^4 m \mu^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2472 (\cos(\theta))^2 R^{17} e^2 m \mu^4 - 101176 (\cos(\theta))^6 R^{13} e^2 m \mu^6 + 135024 (\cos(\theta))^6 R^{12} e^2 m^2 \mu^6 \\
& - 576 (\cos(\theta))^2 R^{15} e^4 m \mu^4 + 297432 (\cos(\theta))^{16} R^5 e^2 m \mu^{10} + 21618 (\cos(\theta))^4 R^{13} e^2 m \mu^6 \\
& + 960 (\cos(\theta))^2 R^{17} e^6 m \mu^2 + 122472 (\cos(\theta))^{14} R^8 e^2 m^2 \mu^8 + 220518 (\cos(\theta))^8 R^{13} e^2 m \mu^6 \\
& + 992 (\cos(\theta))^2 R^{16} e^2 m^2 \mu^4 + 292086 (\cos(\theta))^{12} R^9 e^2 m \mu^8 - 329508 (\cos(\theta))^{12} R^8 e^2 m^2 \mu^8 \\
& + 108864 (\cos(\theta))^{12} R^7 e^4 m \mu^8 - 240138 (\cos(\theta))^{10} R^9 e^2 m \mu^8 + 362880 (\cos(\theta))^{10} R^8 e^2 m^2 \mu^8 \\
& - 13824 (\cos(\theta))^4 R^{19} e^2 m^3 \mu^2 + 18792 (\cos(\theta))^{10} R^{10} e^4 m^2 \mu^6 - 5184 (\cos(\theta))^2 R^{15} e^2 m^3 \mu^4 \\
& + 59472 (\cos(\theta))^8 R^{11} e^2 m^3 \mu^6 - 4608 (\cos(\theta))^6 R^{13} e^6 m \mu^4 - 12800 (\cos(\theta))^4 R^{14} e^4 m^2 \mu^4 \\
& - 104976 (\cos(\theta))^{18} R^5 e^2 m \mu^{10} - 40824 (\cos(\theta))^{14} R^7 e^4 m \mu^8 + 5280 (\cos(\theta))^2 R^{21} e^2 m \mu^2 \\
& - 23328 (\cos(\theta))^8 R^{17} e^2 m \mu^4 - 6480 (\cos(\theta))^8 R^{16} e^2 m^2 \mu^4 - 5904 (\cos(\theta))^4 R^{19} e^4 m \mu^2 \\
& - 14176 (\cos(\theta))^2 R^{20} e^2 m^2 \mu^2 + 91854 (\cos(\theta))^{12} R^{13} e^2 m \mu^6 + 29632 (\cos(\theta))^8 R^8 \mu^{10} \\
& + 5832 (\cos(\theta))^8 R^{15} e^4 m \mu^4 + 31320 (\cos(\theta))^6 R^{17} e^2 m \mu^4 + 14400 (\cos(\theta))^6 R^{16} e^2 m^2 \mu^4 \\
& + 5008 (\cos(\theta))^2 R^{19} e^4 m \mu^2 - 226800 (\cos(\theta))^{10} R^{13} e^2 m \mu^6 - 6912 \mu^4 (\cos(\theta))^6 R^{20} \\
& - 11376 (\cos(\theta))^6 R^{15} e^4 m \mu^4 - 13848 (\cos(\theta))^4 R^{17} e^2 m \mu^4 - 8624 (\cos(\theta))^4 R^{16} e^2 m^2 \mu^4 \\
& - 768 \mu^6 R^{16} (\cos(\theta))^4 + 4592 \mu^6 (\cos(\theta))^6 R^{16} - 9216 \mu^6 (\cos(\theta))^8 R^{16} \\
& + 5832 \mu^6 (\cos(\theta))^{10} R^{16} + 139968 \mu^8 (\cos(\theta))^{14} R^{12} + 192 \mu^8 R^{12} (\cos(\theta))^2 \\
& - 207360 \mu^8 (\cos(\theta))^{12} R^{12} + 22988 (\cos(\theta))^{12} R^4 \mu^{12} - 2528 \mu^8 R^{12} (\cos(\theta))^4 \\
& + 161856 \mu^8 (\cos(\theta))^{10} R^{12} - 70932 \mu^8 (\cos(\theta))^8 R^{12} + 17728 \mu^8 (\cos(\theta))^6 R^{12} \\
& + 68040 (\cos(\theta))^{16} R^4 \mu^{12} - 118220 (\cos(\theta))^{10} R^8 \mu^{10} - 52416 (\cos(\theta))^{14} R^4 \mu^{12} \\
& - 39366 (\cos(\theta))^{16} R^{12} \mu^8 - 65610 (\cos(\theta))^{18} R^8 \mu^{10} + 13122 (\cos(\theta))^{20} R^4 \mu^{12} \\
& - 4224 (\cos(\theta))^6 R^8 \mu^{10} - 19440 (\cos(\theta))^8 R^{14} e^4 m^2 \mu^4 + 309096 (\cos(\theta))^{10} R^{12} e^2 m^2 \mu^6 \\
& - 46656 (\cos(\theta))^{18} R^4 \mu^{12} - 10 (\cos(\theta))^2 R^8 \mu^{10} - 64 (\cos(\theta))^6 R^4 \mu^{12} + 4536 \mu^4 (\cos(\theta))^8 R^{20} \\
& + 2 (\cos(\theta))^4 R^4 \mu^{12} - 5824 (\cos(\theta))^{10} R^4 \mu^{12} + 320 (\cos(\theta))^4 R^8 \mu^{10} + 840 (\cos(\theta))^8 R^4 \mu^{12} \\
& + 233280 (\cos(\theta))^{16} R^8 \mu^{10} - 344736 (\cos(\theta))^{14} R^8 \mu^{10} + 40 \mu^6 R^{16} (\cos(\theta))^2 \\
& + 268992 (\cos(\theta))^{12} R^8 \mu^{10} - 512 \mu^4 R^{20} (\cos(\theta))^2 + 3280 \mu^4 R^{20} (\cos(\theta))^4 \\
& + 39366 (\cos(\theta))^{22} \mu^{14} + 6 (\cos(\theta))^6 \mu^{14} - 139968 (\cos(\theta))^{20} \mu^{14} + 204120 (\cos(\theta))^{18} \mu^{14} \\
& - 157248 (\cos(\theta))^{16} \mu^{14} + 68964 (\cos(\theta))^{14} \mu^{14} + 1584 \mu^2 R^{20} m^2 e^2 - 1472 \mu^2 R^{19} m^3 e^2 \\
& - 17472 (\cos(\theta))^{12} \mu^{14} + 2520 (\cos(\theta))^{10} \mu^{14} - 192 (\cos(\theta))^8 \mu^{14} + 40 \mu^4 m R^{15} e^4 \\
& - 600 \mu^2 R^{21} m e^2 - 96 \mu^2 R^{17} e^6 m - 576 \mu^2 R^{19} e^4 m + 672 \mu^2 R^{18} e^4 m^2 - 16 \mu^4 R^{14} e^4 m^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 576 R^{26} m^2 + 1152 R^{25} m^3 + 96 R^{27} m - 24 \mu^4 R^{13} e^6 m - 768 R^{24} m^4) \times [8\pi (64 \mu^2 R^{21} m^3 \\
& + 12 \mu^2 R^{20} e^4 - 80 \mu^2 R^{22} m^2 + 32 \mu^2 R^{23} m - 16 \mu^4 R^{17} m^3 - 28 (\cos(\theta))^2 R^4 e^4 \mu^{10} \\
& + 8 \mu^4 R^{18} m^2 + 4 \mu^4 R^{19} m - 10 \mu^4 R^{18} e^2 - 2 \mu^6 R^{14} e^2 - 3 \mu^6 R^{12} e^4 - 4 \mu^6 R^{10} e^6 \\
& + 40 \mu^4 R^{17} m e^2 - 40 \mu^4 R^{16} m^2 e^2 - 4 \mu^6 R^{13} m e^2 + 16 \mu^6 R^{12} m^2 e^2 - 4 \mu^8 R^7 e^4 m - 96 R^{25} m e^2 \\
& + 96 R^{24} m^2 e^2 - 48 R^{23} e^4 m + \mu^6 R^{16} - 4 \mu^2 R^{24} - 2 \mu^4 R^{20} - 6 \mu^4 e^6 R^{14} \\
& + 2916 (\cos(\theta))^{18} R^2 e^2 \mu^{12} + 3472 (\cos(\theta))^6 R^{15} m \mu^6 + 2916 (\cos(\theta))^{16} R^7 m \mu^{10} \\
& - 14 \mu^4 R^{16} e^4 + 8 \mu^2 R^{18} e^6 + 8 R^{28} - 4 \mu^8 R^9 m e^2 - 4 \mu^6 R^{15} m + 4 \mu^6 R^{14} m^2 + 2 \mu^8 R^{10} e^2 \\
& + 2 \mu^8 R^6 e^6 + \mu^{10} R^4 e^4 - 1296 (\cos(\theta))^8 R^{17} m^3 \mu^4 - 2916 (\cos(\theta))^{14} R^{10} e^2 \mu^8 \\
& - 4096 (\cos(\theta))^6 R^{14} m^2 \mu^6 - 2916 (\cos(\theta))^{14} R^8 e^4 \mu^8 + 2916 (\cos(\theta))^{16} R^6 m^2 \mu^{10} \\
& + 2112 (\cos(\theta))^6 R^{13} m^3 \mu^6 - 420 (\cos(\theta))^4 R^{16} e^4 \mu^4 + 112 (\cos(\theta))^2 R^{18} e^2 \mu^4 \\
& - 204 (\cos(\theta))^4 R^{14} e^6 \mu^4 - 688 (\cos(\theta))^6 R^{10} e^6 \mu^6 - 40 (\cos(\theta))^2 R^6 e^6 \mu^8 \\
& + 9234 (\cos(\theta))^{12} R^{10} e^2 \mu^8 - 648 (\cos(\theta))^{10} R^{10} e^6 \mu^6 - 796 (\cos(\theta))^4 R^{15} m \mu^6 \\
& + 924 (\cos(\theta))^4 R^{14} m^2 \mu^6 - 532 (\cos(\theta))^8 R^2 e^2 \mu^{12} - 2 (\cos(\theta))^4 R^2 e^2 \mu^{12} \\
& + 92 (\cos(\theta))^8 R^3 m \mu^{12} - 1844 (\cos(\theta))^6 R^4 e^4 \mu^{10} + 2 (\cos(\theta))^4 R^6 e^2 \mu^{10} \\
& - 4 (\cos(\theta))^6 R^3 m \mu^{12} + 315 (\cos(\theta))^4 R^4 e^4 \mu^{10} + 52 (\cos(\theta))^6 R^2 e^2 \mu^{12} \\
& + 5580 (\cos(\theta))^{12} R^6 m^2 \mu^{10} - 9684 (\cos(\theta))^{10} R^8 e^4 \mu^8 + 7926 (\cos(\theta))^8 R^{10} e^2 \mu^8 \\
& + 7452 (\cos(\theta))^{16} R^3 m \mu^{12} - 10044 (\cos(\theta))^{14} R^4 e^4 \mu^{10} - 2538 (\cos(\theta))^{12} R^6 e^2 \mu^{10} \\
& - 3248 (\cos(\theta))^{10} R^7 m \mu^{10} - 1800 (\cos(\theta))^{10} R^6 e^6 \mu^8 - 9072 (\cos(\theta))^{16} R^2 e^2 \mu^{12} \\
& - 2464 (\cos(\theta))^{10} R^6 m^2 \mu^{10} + 5820 (\cos(\theta))^8 R^8 e^4 \mu^8 - 2844 (\cos(\theta))^6 R^{10} e^2 \mu^8 \\
& + 96 (\cos(\theta))^4 R^{10} e^6 \mu^6 + 2916 \mu^8 (\cos(\theta))^{14} R^{11} m - 3240 \mu^6 (\cos(\theta))^{10} R^{14} e^2 \\
& - 7308 (\cos(\theta))^{14} R^3 m \mu^{12} + 14913 (\cos(\theta))^{12} R^4 e^4 \mu^{10} + 720 (\cos(\theta))^{10} R^6 e^2 \mu^{10} \\
& + 764 (\cos(\theta))^8 R^7 m \mu^{10} + 1970 (\cos(\theta))^8 R^6 e^6 \mu^8 + 2682 \mu^6 (\cos(\theta))^8 R^{14} e^2 \\
& + 24 \mu^6 R^{14} (\cos(\theta))^2 e^2 - 10 \mu^6 R^{14} (\cos(\theta))^4 e^2 - 816 \mu^6 (\cos(\theta))^6 R^{14} e^2 \\
& + 288 (\cos(\theta))^4 R^{23} m \mu^2 - 162 (\cos(\theta))^8 R^{18} e^2 \mu^4 - 144 (\cos(\theta))^4 R^{22} e^2 \mu^2 \\
& - 5832 \mu^8 (\cos(\theta))^{14} m^2 R^{10} - 8 \mu^8 R^{10} (\cos(\theta))^2 m^2 + 4 \mu^8 R^{11} (\cos(\theta))^2 m \\
& - 720 (\cos(\theta))^4 R^{22} m^2 \mu^2 - 224 (\cos(\theta))^2 R^{23} m \mu^2 + 2916 (\cos(\theta))^{12} R^{14} m^2 \mu^6 \\
& + 576 (\cos(\theta))^4 R^{21} m^3 \mu^2 + 324 (\cos(\theta))^8 R^{19} m \mu^4 + 648 (\cos(\theta))^8 R^{18} m^2 \mu^4 \\
& + 24 (\cos(\theta))^2 R^{10} e^6 \mu^6 - 180 (\cos(\theta))^4 R^{20} e^4 \mu^2 - 352 (\cos(\theta))^4 R^{17} m^3 \mu^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 512 (\cos(\theta))^2 R^{22} m^2 \mu^2 - 384 (\cos(\theta))^2 R^{21} m^3 \mu^2 - 2916 (\cos(\theta))^{12} R^{15} m \mu^6 \\
& - 720 (\cos(\theta))^6 R^{19} m \mu^4 - 288 (\cos(\theta))^6 R^{18} m^2 \mu^4 + 1152 (\cos(\theta))^6 R^{17} m^3 \mu^4 \\
& + 96 (\cos(\theta))^2 R^{22} e^2 \mu^2 + 2592 (\cos(\theta))^{10} R^{13} m^3 \mu^6 + 162 (\cos(\theta))^8 R^{16} e^4 \mu^4 \\
& + 1458 (\cos(\theta))^{12} R^{14} e^2 \mu^6 + 7128 (\cos(\theta))^{10} R^{15} m \mu^6 - 7776 (\cos(\theta))^{10} R^{14} m^2 \mu^6 \\
& + 432 (\cos(\theta))^6 R^{18} e^2 \mu^4 + 520 (\cos(\theta))^4 R^{19} m \mu^4 - 72 (\cos(\theta))^4 R^{18} e^6 \mu^2 \\
& + 96 (\cos(\theta))^2 R^{20} e^4 \mu^2 + 620 (\cos(\theta))^8 R^6 m^2 \mu^{10} - 1788 (\cos(\theta))^6 R^8 e^4 \mu^8 \\
& - 144 (\cos(\theta))^4 R^{18} m^2 \mu^4 + 542 (\cos(\theta))^4 R^{10} e^2 \mu^8 + 300 (\cos(\theta))^4 R^6 e^6 \mu^8 \\
& + 11484 (\cos(\theta))^{14} R^2 e^2 \mu^{12} + 3448 (\cos(\theta))^{12} R^3 m \mu^{12} - 12372 (\cos(\theta))^{10} R^4 e^4 \mu^{10} \\
& + 10 (\cos(\theta))^8 R^6 e^2 \mu^{10} - 88 (\cos(\theta))^6 R^7 m \mu^{10} - 7554 (\cos(\theta))^{12} R^2 e^2 \mu^{12} \\
& - 52 (\cos(\theta))^2 R^{10} e^2 \mu^8 + 4 (\cos(\theta))^4 R^7 m \mu^{10} + 144 (\cos(\theta))^6 R^{16} e^4 \mu^4 \\
& - 1072 (\cos(\theta))^6 R^6 e^6 \mu^8 - 80 (\cos(\theta))^6 R^6 m^2 \mu^{10} + 246 (\cos(\theta))^4 R^8 e^4 \mu^8 \\
& - 812 (\cos(\theta))^{10} R^3 m \mu^{12} + 6167 (\cos(\theta))^8 R^4 e^4 \mu^{10} - 24 (\cos(\theta))^6 R^6 e^2 \mu^{10} \\
& + 4 (\cos(\theta))^4 R^6 m^2 \mu^{10} - 12 (\cos(\theta))^2 R^8 e^4 \mu^8 + 2732 (\cos(\theta))^{10} R^2 e^2 \mu^{12} \\
& + 162 (\cos(\theta))^8 R^{14} e^6 \mu^4 + 128 (\cos(\theta))^2 R^{17} m^3 \mu^4 + 168 \mu^8 R^{10} (\cos(\theta))^4 m^2 \\
& - 396 (\cos(\theta))^4 R^{18} e^2 \mu^4 + 6096 \mu^8 (\cos(\theta))^8 R^{10} m^2 - 96 \mu^8 R^{11} (\cos(\theta))^4 m \\
& - 80 (\cos(\theta))^2 R^{19} m \mu^4 + 32 (\cos(\theta))^2 R^{18} e^6 \mu^2 - 32 (\cos(\theta))^2 R^{18} m^2 \mu^4 \\
& - 3920 \mu^8 (\cos(\theta))^8 R^{11} m - 768 \mu^6 (\cos(\theta))^6 R^{12} e^4 - 16 \mu^8 R^9 (\cos(\theta))^4 m^3 \\
& + 39 \mu^6 R^{12} (\cos(\theta))^4 e^4 + 24 \mu^6 R^{12} (\cos(\theta))^2 e^4 + 729 (\cos(\theta))^{12} R^{12} e^4 \mu^6 \\
& - 7164 (\cos(\theta))^8 R^{15} m \mu^6 + 32 (\cos(\theta))^2 R^{13} m^3 \mu^6 + 4 (\cos(\theta))^2 R^5 e^2 m \mu^{10} \\
& + 8316 (\cos(\theta))^8 R^{14} m^2 \mu^6 - 4032 (\cos(\theta))^8 R^{13} m^3 \mu^6 - 448 (\cos(\theta))^4 R^{13} m^3 \mu^6 \\
& + 176 (\cos(\theta))^2 R^{16} e^4 \mu^4 - 1458 (\cos(\theta))^{16} R^6 e^2 \mu^{10} - 11916 (\cos(\theta))^{10} R^{10} e^2 \mu^8 \\
& - 7128 (\cos(\theta))^{14} R^7 m \mu^{10} - 6480 (\cos(\theta))^{14} R^6 m^2 \mu^{10} + 8262 (\cos(\theta))^{12} R^8 e^4 \mu^8 \\
& + 1188 (\cos(\theta))^8 R^{10} e^6 \mu^6 - 2916 (\cos(\theta))^{18} R^3 m \mu^{12} + 648 (\cos(\theta))^{12} R^6 e^6 \mu^8 \\
& + 88 (\cos(\theta))^2 R^{15} m \mu^6 + 96 (\cos(\theta))^2 R^{14} e^6 \mu^4 - 96 (\cos(\theta))^2 R^{14} m^2 \mu^6 \\
& + 2916 (\cos(\theta))^{16} R^4 e^4 \mu^{10} + 3240 (\cos(\theta))^{14} R^6 e^2 \mu^{10} + 6876 (\cos(\theta))^{12} R^7 m \mu^{10} \\
& + 13608 \mu^8 (\cos(\theta))^{12} m^2 R^{10} - 1296 \mu^8 (\cos(\theta))^{12} R^9 m^3 + 1971 \mu^6 (\cos(\theta))^8 R^{12} e^4 \\
& - 7776 \mu^8 (\cos(\theta))^{12} m R^{11} - 1312 \mu^8 (\cos(\theta))^8 R^9 m^3 - 1944 \mu^6 (\cos(\theta))^{10} R^{12} e^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2304\mu^8 (\cos(\theta))^{10} R^9 m^3 - 12888\mu^8 (\cos(\theta))^{10} R^{10} m^2 + 8028\mu^8 (\cos(\theta))^{10} R^{11} m \\
& + 256\mu^8 (\cos(\theta))^6 R^9 m^3 - 1432\mu^8 (\cos(\theta))^6 R^{10} m^2 + 6552 (\cos(\theta))^{10} R^7 e^4 m\mu^8 \\
& + 892\mu^8 (\cos(\theta))^6 R^{11} m + 1664 (\cos(\theta))^4 R^{12} e^2 m^2 \mu^6 + 16524 (\cos(\theta))^{14} R^5 e^2 m\mu^{10} \\
& - 16492 (\cos(\theta))^8 R^9 e^2 m\mu^8 - 19440 (\cos(\theta))^{12} R^5 e^2 m\mu^{10} - 6404 (\cos(\theta))^8 R^7 e^4 m\mu^8 \\
& + 5584 (\cos(\theta))^8 R^8 e^2 m^2 \mu^8 + 80 (\cos(\theta))^2 R^{13} e^2 m\mu^6 - 256 (\cos(\theta))^2 R^{12} e^2 m^2 \mu^6 \\
& + 5588 (\cos(\theta))^6 R^9 e^2 m\mu^8 - 1952 (\cos(\theta))^6 R^8 e^2 m^2 \mu^8 + 12316 (\cos(\theta))^{10} R^5 e^2 m\mu^{10} \\
& + 3056 (\cos(\theta))^6 R^7 e^4 m\mu^8 - 1036 (\cos(\theta))^4 R^9 e^2 m\mu^8 + 100 (\cos(\theta))^2 R^9 e^2 m\mu^8 \\
& - 16 (\cos(\theta))^2 R^8 e^2 m^2 \mu^8 + 720 (\cos(\theta))^4 R^{21} e^2 m\mu^2 + 3696\mu^6 (\cos(\theta))^6 R^{11} e^4 m \\
& - 912\mu^6 R^{11} (\cos(\theta))^4 e^4 m + 9072 (\cos(\theta))^8 R^{12} e^2 m^2 \mu^6 + 744 (\cos(\theta))^4 R^{15} e^4 m\mu^4 \\
& + 296 (\cos(\theta))^4 R^8 e^2 m^2 \mu^8 - 4488 (\cos(\theta))^8 R^5 e^2 m\mu^{10} - 744 (\cos(\theta))^4 R^7 e^4 m\mu^8 \\
& + 916 (\cos(\theta))^6 R^5 e^2 m\mu^{10} + 88 (\cos(\theta))^2 R^7 e^4 m\mu^8 - 96 (\cos(\theta))^4 R^5 e^2 m\mu^{10} \\
& - 864 (\cos(\theta))^4 R^{20} e^2 m^2 \mu^2 + 3240\mu^6 (\cos(\theta))^{10} R^{11} e^4 m - 5904\mu^6 (\cos(\theta))^8 R^{11} e^4 m \\
& + 72\mu^6 R^{11} (\cos(\theta))^2 e^4 m + 8748 (\cos(\theta))^{14} R^9 e^2 m\mu^8 - 8172 (\cos(\theta))^8 R^{13} e^2 m\mu^6 \\
& - 368 (\cos(\theta))^2 R^{17} e^2 m\mu^4 + 320 (\cos(\theta))^2 R^{16} e^2 m^2 \mu^4 - 23652 (\cos(\theta))^{12} R^9 e^2 m\mu^8 \\
& + 3240 (\cos(\theta))^{12} R^8 e^2 m^2 \mu^8 + 3792 (\cos(\theta))^6 R^{13} e^2 m\mu^6 - 2592 (\cos(\theta))^{12} R^7 e^4 m\mu^8 \\
& + 27036 (\cos(\theta))^{10} R^9 e^2 m\mu^8 + 1944 (\cos(\theta))^8 R^{16} e^2 m^2 \mu^4 + 432 (\cos(\theta))^4 R^{19} e^4 m\mu^2 \\
& - 5696 (\cos(\theta))^6 R^{12} e^2 m^2 \mu^6 - 384 (\cos(\theta))^2 R^{15} e^4 m\mu^4 - 5832 (\cos(\theta))^{16} R^5 e^2 m\mu^{10} \\
& - 7056 (\cos(\theta))^{10} R^8 e^2 m^2 \mu^8 - 748 (\cos(\theta))^4 R^{13} e^2 m\mu^6 - 648 (\cos(\theta))^8 R^{17} e^2 m\mu^4 \\
& - 448 (\cos(\theta))^2 R^{21} e^2 m\mu^2 + 512 (\cos(\theta))^2 R^{20} e^2 m^2 \mu^2 - 2916 (\cos(\theta))^{12} R^{13} e^2 m\mu^6 \\
& - 972 (\cos(\theta))^8 R^{15} e^4 m\mu^4 - 144 (\cos(\theta))^6 R^{17} e^2 m\mu^4 - 5184 (\cos(\theta))^{10} R^{12} e^2 m^2 \mu^6 \\
& - 1152 (\cos(\theta))^6 R^{16} e^2 m^2 \mu^4 - 224 (\cos(\theta))^2 R^{19} e^4 m\mu^2 + 7776 (\cos(\theta))^{10} R^{13} e^2 m\mu^6 \\
& - 442 (\cos(\theta))^8 R^8 \mu^{10} - 1008\mu^6 (\cos(\theta))^6 R^{16} + 336\mu^8 (\cos(\theta))^8 R^{12} \\
& + 288 (\cos(\theta))^6 R^{15} e^4 m\mu^4 + 2043\mu^6 (\cos(\theta))^8 R^{16} - 64\mu^8 (\cos(\theta))^6 R^{12} \\
& + 928 (\cos(\theta))^4 R^{17} e^2 m\mu^4 - 496 (\cos(\theta))^4 R^{16} e^2 m^2 \mu^4 + 227\mu^6 R^{16} (\cos(\theta))^4 \\
& - 1944\mu^6 (\cos(\theta))^{10} R^{16} + 324\mu^8 (\cos(\theta))^{12} R^{12} - 576\mu^8 (\cos(\theta))^{10} R^{12} \\
& + 4\mu^8 R^{12} (\cos(\theta))^4 - 162 (\cos(\theta))^{16} R^4 \mu^{12} + 1920 (\cos(\theta))^{10} R^8 \mu^{10} + 288 (\cos(\theta))^{14} R^4 \mu^{12} \\
& - 164 (\cos(\theta))^{12} R^4 \mu^{12} + 48 (\cos(\theta))^6 R^8 \mu^{10} + 32 (\cos(\theta))^{10} R^4 \mu^{12} - 2 (\cos(\theta))^4 R^8 \mu^{10} \\
& - 2 (\cos(\theta))^8 R^4 \mu^{12} - 180\mu^4 R^{20} (\cos(\theta))^4 + 32 (\cos(\theta))^2 R^{24} \mu^2 - 944 (\cos(\theta))^{14} \mu^{14} \\
& - 1458 (\cos(\theta))^{16} R^8 \mu^{10} + 3888 (\cos(\theta))^{14} R^8 \mu^{10} - 3978 (\cos(\theta))^{12} R^8 \mu^{10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 288\mu^4 (\cos(\theta))^6 R^{20} - 162\mu^4 (\cos(\theta))^8 R^{20} - 24\mu^6 R^{16} (\cos(\theta))^2 - 36 (\cos(\theta))^4 R^{24} \mu^2 \\
& + 729\mu^6 (\cos(\theta))^{12} R^{16} + 729 (\cos(\theta))^{20} \mu^{14} - 1944 (\cos(\theta))^{18} \mu^{14} + 1971 (\cos(\theta))^{16} \mu^{14} \\
& + 219 (\cos(\theta))^{12} \mu^{14} - 24 (\cos(\theta))^{10} \mu^{14} + (\cos(\theta))^8 \mu^{14} + 36\mu^4 m R^{15} e^4 - 32\mu^2 R^{20} m^2 e^2 \\
& + 16\mu^2 R^{21} m e^2 - 16\mu^2 R^{19} e^4 m + 96 R^{26} m^2 - 64 R^{25} m^3 - 48 R^{27} m \\
& + 8 R^{22} e^6 + 32\mu^4 R^{20} (\cos(\theta))^2 + 24 R^{24} e^4 + 24 R^{26} e^2 R^5 \Big]^{-1}, \tag{9}
\end{aligned}$$

Para o caso particular da ausência de carga ($e = 0$), as componentes da densidade de quadri-corrente tornam-se :

$$\begin{aligned}
J^3 = & \mu(25165824mR^{23} - 100663296m^2R^{22} + 100663296m^3R^{21} - 15466496m\mu^2R^{19} \\
& + 64487424m^2\mu^2R^{18} - 67108864m^3\mu^2R^{17} + 20529152\mu^4R^{16} + 17694720\mu^4\cos(6\theta)R^{16} \\
& + 9289728\mu^4\cos(8\theta)R^{16} - 72065024m\mu^4R^{15} - 51314688m\mu^4\cos(6\theta)R^{15} \\
& - 31186944m\mu^4\cos(8\theta)R^{15} + 2326528m^2\mu^4R^{14} + 12976128m^2\mu^4\cos(6\theta)R^{14} \\
& + 13271040m^2\mu^4\cos(8\theta)R^{14} + 58654720m^3\mu^4R^{13} + 42467328m^3\mu^4\cos(6\theta)R^{13} \\
& + 26542080m^3\mu^4\cos(8\theta)R^{13} + 2867200\mu^6R^{12} + 2859008\mu^6\cos(6\theta)R^{12} \\
& + 1916928\mu^6\cos(8\theta)R^{12} + 663552\mu^6\cos(10\theta)R^{12} + 63415808m\mu^6R^{11} \\
& + 49175552m\mu^6\cos(6\theta)R^{11} - 5218560\mu^8\cos(10\theta)R^8 + 26970424m\mu^8R^7 \\
& + 22178304m\mu^6\cos(8\theta)R^{11} + 6884352m\mu^6\cos(10\theta)R^{11} + 3919104m\mu^6\cos(12\theta)R^{11} \\
& - 73884672m^2\mu^6R^{10} - 72972288m^2\mu^6\cos(6\theta)R^{10} - 44596224m^2\mu^6\cos(8\theta)R^{10} \\
& - 17750016m^2\mu^6\cos(10\theta)R^{10} - 8584704m^2\mu^6\cos(12\theta)R^{10} - 17203200m^3\mu^6R^9 \\
& - 17154048m^3\mu^6\cos(6\theta)R^9 - 11501568m^3\mu^6\cos(8\theta)R^9 - 3981312m^3\mu^6\cos(10\theta)R^9 \\
& - 21123216\mu^8R^8 - 21977856\mu^8\cos(6\theta)R^8 - 13004096\mu^8\cos(8\theta)R^8 \\
& - 1793664\mu^8\cos(12\theta)R^8 - 559872\mu^8\cos(14\theta)R^8 - 314928\mu^8\cos(16\theta)R^8 \\
& + 31628928m\mu^8\cos(6\theta)R^7 + 22341472m\mu^8\cos(8\theta)R^7 + 11998080m\mu^8\cos(10\theta)R^7 \\
& + 5821632m\mu^8\cos(12\theta)R^7 + 1959552m\mu^8\cos(14\theta)R^7 + 682344m\mu^8\cos(16\theta)R^7 \\
& + 28122624m^2\mu^8R^6 + 33505152m^2\mu^8\cos(6\theta)R^6 + 21877248m^2\mu^8\cos(8\theta)R^6 \\
& + 12410496m^2\mu^8\cos(10\theta)R^6 + 5412096m^2\mu^8\cos(12\theta)R^6 + 1399680m^2\mu^8\cos(14\theta)R^6 \\
& - 15757884m\mu^{10}R^3 - 20840904m\mu^{10}\cos(6\theta)R^3 - 14614320m\mu^{10}\cos(8\theta)R^3 \\
& - 9319080m\mu^{10}\cos(10\theta)R^3 - 5202144m\mu^{10}\cos(12\theta)R^3 - 2299266m\mu^{10}\cos(14\theta)R^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 1358240\mu^{10} \cos(10\theta)R^4 - 52488\mu^{10} \cos(18\theta)R^4 - 118098m\mu^{10} \cos(18\theta)R^3 \\
& - 2003376\mu^{10}R^4 - 2746912\mu^{10} \cos(6\theta)R^4 - 2075584\mu^{10} \cos(8\theta)R^4 \\
& - 796032\mu^{10} \cos(12\theta)R^4 - 441288\mu^{10} \cos(14\theta)R^4 - 198288\mu^{10} \cos(16\theta)R^4 \\
& - 691092m\mu^{10} \cos(16\theta)R^3 + 2923662\mu^{12} + 4\mu^2 (-8192m^3 (2560R^8 + 891\mu^4 \\
& - 2672\mu^2R^4) R^9 + 32m^2 (901120R^{12} - 52224\mu^2R^8 - 1032032\mu^4R^4 + 416781\mu^6) R^6 \\
& + 2\mu^2 (4210688R^{16} + 608256\mu^2R^{12} - 4820768\mu^4R^8 - 473710\mu^6R^4 + 698505\mu^8) \\
& + m(-9175040R^{19} - 27148288\mu^2R^{15} + 28648960\mu^4R^{11} + 12294624\mu^6R^7 \\
& - 7584303\mu^8R^3)) \cos(2\theta) + 2\mu^2 (-65536m^3 \times (1152R^8 - 662\mu^2R^4 + 165\mu^4) R^9 \\
& + 128m^2 (608256R^{12} + 45568\mu^2R^8 - 468258\mu^4R^4 + 176763\mu^6) R^6 - 16m (1253376R^{16} \\
& + 2786304\mu^2R^{12} - 2879768\mu^4R^8 - 1323658\mu^6R^4 + 832785\mu^8) R^3 + \mu^2 (13926400R^{16} \\
& + 1802240\mu^2R^{12} - 15829696\mu^4R^8 - 1657664\mu^6R^4 + 2468859\mu^8)) \cos(4\theta) \\
& + 4081776\mu^{12} \cos(6\theta) + 3096120\mu^{12} \cos(8\theta) + 2095536\mu^{12} \cos(10\theta) \\
& + 1271847\mu^{12} \cos(12\theta) + 703836\mu^{12} \cos(14\theta) + 333882\mu^{12} \cos(16\theta) \\
& + 113724\mu^{12} \cos(18\theta) + 19683\mu^{12} \cos(20\theta)) \times \left[4096\pi R^5 (R^4 - \mu^2 \cos^2(\theta))^2 \right. \\
& \times ((R - 2m)R^3 + \mu^2 \cos^2(\theta)) (-16R^4 + 3\mu^2 + 4\mu^2 \cos(2\theta) + 9\mu^2 \cos(4\theta))^2 (16R^4 \\
& \left. - 32mR^3 + 3\mu^2 + 4\mu^2 \cos(2\theta) + 9\mu^2 \cos(4\theta)) \right]^{-1} \tag{10}
\end{aligned}$$

$$J^t = 0. \tag{11}$$

Unidades

Neste apêndice realizaremos uma descrição detalhada a respeito das unidades utilizadas para as quantidades físicas (massa, momento de dipolo magnético e o campo magnético) que definem o objeto em estudo nesta dissertação.

O elemento de linha que descreve a solução externa a um objeto massivo de massa m com carga e e com um dipolo magnético μ em seu centro é dado por:

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{e^2}{R^2} + \frac{\mu^2 \cos^2 \theta}{R^4} \right) dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{R} + \frac{e^2}{R^2} + \frac{\mu^2 f(\theta)}{R^4} \right) dR^2 - R^2 \left(1 - \frac{\mu^2 f(\theta)}{R^4} \right) d\theta^2 \\
&- R^2 \sin^2 \theta \left(1 - \frac{\mu^2}{R^4} \right) d\alpha^2 - \frac{2e\mu \sin^2 \theta}{R^2} d\alpha dt, \tag{12}
\end{aligned}$$

onde $f(\theta) = \frac{1}{2} (\sin^4 \theta - 6 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + 2 \cos^4 \theta)$. Para a descrição da solução externa a um

objeto massivo apenas com um campo magnético dipolar, tomamos $e = 0$. Em unidades gravitacional ($G = c = 1$), temos que a masa tem a mesma unidade de comprimento:

$$[m] = [R] = km. \quad (13)$$

Analisando o elemento de linha dado pela equação (12) notamos que:

$$\left[\frac{\mu^2}{R^4} \right] = 1 \rightarrow [\mu^2] = km^4 \quad (14)$$

$$[\mu] = km^2. \quad (15)$$

Na unidade do sistema internacional de unidades (SI), temos que:

$$[\mu] = Am^2 = \frac{Nm}{T} = \frac{J}{T}. \quad (16)$$

Precisamos agora escrever $Am^2 = \frac{Cm^2}{s}$ na unidade gravitacional, para isto utilizamos a constante de estrutura fina (α) que é escrita como

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137,03599911}. \quad (17)$$

Assim a carga elétrica em função dessas constantes fundamentais ($\hbar = 1,0545716283 \times 10^{-34} Js$ e $c = 2,9979 \times 10^8 m$) é dada por:

$$\begin{aligned} e^2 &= \frac{\hbar c}{137,03599911} = \frac{1,0545716283 \times 10^{-34} \times 2,9979 \times 10^8 \text{ mJs}}{137,03599911} \frac{1}{s} \\ &= 0,023075822 \times 10^{-26} mJ. \end{aligned} \quad (18)$$

Utilizando a conversão entre joule e Elétron-volt ($1J = 6,241506363094 \times 10^{18} eV$) na expressão acima encontramos

$$\begin{aligned} e^2 &= 1,439951856 \times 10^{-9} \overbrace{m}^{=10^{15} fm} eV = 1,439951856 \times \overbrace{10^6 eV}^{=MeV} fm \\ e &= \sqrt{1,439951856 (Mev fm)}^{\frac{1}{2}} = 1,602176487 \times 10^{-19} C \rightarrow \\ 1C &= 7,489686370 \times 10^{18} (Mev fm)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (19)$$

onde foi utilizado a conversão entre metro (m) e fentómetro (fm). Sabemos também que

$$1MeV = 1,3234 \times 10^{-55} cm = 1,3234 \times 10^{-57} m. \quad (20)$$

Assim podemos encontrar a equivalência entre Coulomb e metro

$$\begin{aligned} 1C &= 7,49 \times 10^{18} (1,3234 \times 10^{-57} \times 10^{-15})^{\frac{1}{2}} = 8,61 \times 10^{18} \times 10^{-36} m \\ 1C &= 8,61 \times 10^{-18} m. \end{aligned} \quad (21)$$

Utilizando o fato de que $c = 2,9979 \times 10^8 m/s = 1 \rightarrow 1s = 2,9979 \times 10^{10} cm = 2,9979 \times 10^8 m$ encontramos a relação entre Am^2 e m :

$$[\mu] = Am^2 = \frac{Cm^2}{s} = \frac{8,61 \times 10^{-18} m^3}{2,9979 \times 10^8 m} = 2,872 \times 10^{-26} m^2 = 2,872 \times 10^{-32} km^2. \quad (22)$$

Parâmetros gerais dos quatros perfis de estrelas

Neste apêndice apresentaremos os parâmetros dos quatro distintos modelos de estrelas de nêutrons utilizados nesta dissertação. Estes valores foram coletados do arquivo de saída gerado pelo código LORENE.

As tabelas abaixo contém todas as informações a respeito dos modelos de estrelas de nêutrons.

Massa gravitacional (M_g)	1,990266166 M_\odot
Massa bariônica	2,148742432 M_\odot
Raio equatorial (R_{eq})	15,87447875 km
Raio polar (R_{polar})	15,52127132 km
Raio equatorial circunferencial (R_{circ})	18,9569273 km
Achatamento (R_{polar}/R_{eq})	0,9777499826
Parâmetro de compactação (M_g/R_{circ})	0,1550245904
Momento de dipolo magnético	$0,7235102741 \times 10^{32} Am^2$
Valor do campo magnético central	15844,40903 GT
Valor do campo magnético equatorial tangente	1555,10946 GT
Valor do campo magnético polar radial	2891,020208 GT
Redshift no equador (pra frente)	0,2046028396
Redshift no equador (pra trás)	0,2046028396
Redshift no polo	0.2078623273

Tabela 1: Propriedades do modelo um da estrela de nêutrons.

Massa gravitacional (M_g)	1,584846856 M_\odot
Massa bariônica	1,676069219 M_\odot
Raio equatorial (R_{eq})	18,68508158 km
Raio polar (R_{polar})	18,11432736 km
Raio equatorial circunferencial (R_{circ})	21,10781181 km
Achatamento (R_{polar}/R_{eq})	0,9694540152
Parâmetro de compactação (M_g/R_{circ})	0,1108667881
Momento de dipolo magnético	$0,7725985802 \times 10^{32} Am^2$
Valor do campo magnético central	10693,22493 GT
Valor do campo magnético tangente equatorial	1082,348211 GT
Valor do campo magnético radial polar	2079,004488 GT
Redshift no equador (pra frente)	0,1341736981
Redshift no equador (pra trás)	0,1341736981
Redshift no polo	0,1368820987

Tabela 2: Propriedades do modelo dois da estrela de nêutrons.

Massa gravitacional (M_g)	1,739739055 M_\odot
Massa bariônica	1,853389767 M_\odot
Raio equatorial (R_{eq})	17,73271056 km
Raio polar (R_{polar})	17,24254982 km
Raio equatorial circunferencial (R_{circ})	20,40356651 km
Achatamento (R_{polar}/R_{eq})	0,9723583859
Parâmetro de compactação (M_g/R_{circ})	0,1259028039
Momento de dipolo magnético	$0,7729457998 \times 10^{32} Am^2$
Valor do campo magnético central	12353,00044 GT
Valor do campo magnético equatorial tangente	1241,025293 GT
Valor do campo magnético polar radial	2358,245434 GT
Redshift no equador (pra frente)	0,1567656861
Redshift no equador (pra trás)	0,1567656861
Redshift no polo	0,1597039177

Tabela 3: Propriedades do modelo três da estrela de nêutrons.

Massa gravitacional (M_g)	1,899058682 M_\odot
Massa bariônica	2,039803988 M_\odot
Raio equatorial (R_{eq})	16,61565622 km
Raio polar (R_{polar})	16,21097043 km
Raio equatorial circunferencial (R_{circ})	19,54633023 km
Achatamento (R_{polar}/R_{eq})	0,97564430
Parâmetro de compactação (M_g/R_{circ})	0,1434599021
Momento de dipolo magnético	$0,7504402642 \times 10^{32} Am^2$
Valor do campo magnético central	14406,06357 GT
Valor do campo magnético tangente equatorial	1429,494971 GT
Valor do campo magnético radial polar	2681,198712 GT
Redshift no equador (pra frente)	0,1849126455
Redshift no equador (pra trás)	0,1849126455
Redshift no polo	0,1880657572

Tabela 4: Propriedades do modelo dois da estrela de nêutrons.

Referências Bibliográficas

- [1] LOBANOV, A. P. Ultracompact jets in active galactic nuclei. *A&A*, 330, 79 (1998).
- [2] AHARONIAN, F. A. Proton-synchrotron radiation of large-scale jets in active galactic nuclei. *MNRAS*, 332, 215 (2002).
- [3] ZAKHAROV et al. Magnetic fields in active galactic nuclei and microquasars. *MNRAS*, 342, 1325 (2003).
- [4] GREAVES et al. Magnetic field surrounding the starburst nucleus of the galaxy M82 from polarized dust emission. *Nature*, 404, 732 (2000).
- [5] BLANDFORD, R. D. & PAYNE, D. G. Hydromagnetic flows from accretion discs and the production of radio jets. *MNRAS*, 199, 883-903 (1982).
- [6] LI, X. D. & van den Heuvel, ApJ, 513, L45 (1999).
- [7] PAVLOV, G. G. & BEZCHASTNOV, V. G. Once-ionized helium in superstrong magnetic fields, ApJ, 635, L61 (2005).
- [8] MALLICK, R. & SCHRAMM, S. Deformation of a magnetized neutron star, *Phys. Rev. C* 89, 045805 (2014).
- [9] HENNEBELLE, P. & FROMANG, S. Magnetic processes in a collapsing dense core, *A&A*, 477, 9 (2008).
- [10] MEDIN, Z. & LAI, D. Condensed surfaces of magnetic neutron stars, thermal surface emission, and particle acceleration above pulsar polar caps, *MNRAS*, 382, 1933 (2007).
- [11] HEWISH, A., BELL, S. J., SCOTT, P. F., COLLINS, R. A., *Nature* 217, 709 (1968).
- [12] STAELIN, D. H., REIFENSTEIN, C., *Science* 162, 1481 (1968).
- [13] LARGE, M. I., VAUGHAN, A. E., MILLS, B. Y., *Nature* 220, 340 (1968).
- [14] BAADE, W., ZWICKY, F. On Super-Novae, *Proceedings of the National Academy of Science* 20 (5): 254–259 (1934).

- [15] BAADE, W., ZWICKY, F. Cosmic Rays from Super-novae, Proceedings of the National Academy of Science 20 (5): 259–263 (1934).
- [16] HULSE, R. A., TAYLOR, H., Astrophys. J. (Letters) 191 (1974) L 59; op. cit., 195 (1975) L 51; 201 (1975) L 55.
- [17] TAYLOR, J. H., WOLSZCZAN, A., DAMOUR, T., WEISBERG, J. M., Nature 355, 132 (1992).
- [18] TAYLOR, J. H., WEISBERG, J. M., Astrophys. J. 345, 434 (1989).
- [19] WEISBERG, J. M., TAYLOR, J. H., Phys. Rev. Lett. 52, 1348 (1984).
- [20] BACKER, D. C., KULKARNO, C., HEILES, C., DAVIS, M.M., GOSS, W. M., Nature 300, 615 (1982).
- [21] BORIAKOFF, V., BUCCHERI, R., FAUCI, E., Nature 304, 417 (1983).
- [22] KAPLAN, D. L., VAN KERKWIJK, M. H., Astrophys. J. 705, 798-808 (2009).
- [23] HALPERN, J. P., GOTTHELF, E. V., Astrophys. J. 709, 436-446 (2010).
- [24] KASPE, V. M., *Grand Unification of Neutron Stars*, Submitted to Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America.
- [25] LAROS, J., FENIMORE, E., FIKANI, M., et al., Nature 322, 152 (1986).
- [26] CLINE, T., DESAI, U., PIZZICHINI, G., et al., ApJ. 237, L1 (1980).
- [27] KLEBESADEL, R. W., LAROS, J. G., et al., ApJ. 237, L7 (1980).
- [28] DUNCAN, R., THOMPSON, C., Ap. J. Lett. 392, L9 (1992).
- [29] PACYNSKI, B., Acta. Astronomica 42, 145 (1992).
- [30] XMM-Newton: Sonda da agência espacial europeia. Disponível em: <<http://www.cosmos.esa.int/web/xmm-newton>> . Acesso em: 10 de dezembro de 2015.
- [31] The Fermi Gamma-ray Space Telescope. Disponível em: <<http://fermi.gsfc.nasa.gov/>>. Acesso em: 10 de dezembro de 2015.
- [32] Chandra X-ray Observatory NASA. Disponível em: <https://www.nasa.gov/mission_pages/chandra/main/>. Acesso em: 10 de dezembro de 2015.

- [33] GREGORY, P. C., FAHLMAN, G. G. An extraordinary new celestial X-ray source, *Nature*, 287, 805 (1980).
- [34] FAHLMAN, G. G, GREGORY, P. C. An X-ray pulsar in SNR G109.1-1.0, *Nature*, 293, 202 (1981).
- [35] KOYAMA, K., HOSHI, R., NAGASE, F. X-ray observations of the extraordinary pulsar 1E 2259 + 586, *PASJ*, 39, 801 (1987).
- [36] THOMPSON, C., DUNCAN, R. Neutron star dynamos and the origins of pulsar magnetism, *ApJ*, 408, 194 (1993).
- [37] THOMPSON, C., DUNCAN, R. The Soft Gamma Repeaters as Very Strongly Magnetized Neutron Stars. II. Quiescent Neutrino, X-Ray, and Alfvén Wave Emission, *ApJ*, 473, 322 (1996).
- [38] THOMPSON, C., DUNCAN, R. The Soft Gamma Repeaters as Very Strongly Magnetized Neutron Stars. II. Quiescent Neutrino, X-Ray, and Alfvén Wave Emission, *ApJ*, 473, 322 (1996).
- [39] VAN PARADIJS, J., TAAM, R.E., VAN DEN HEUVEL, E.P.J., *Astron. Astrophys. Lett.* 299, L41. (1995).
- [40] CHATTERJEE, P, HERNQUIST, L., *Astrophys. J.* 543, 368 (2000).
- [41] CHATTERJEE, P, HERNQUIST, L., NARAYAN, R., *Astrophys. J.* 534, 37 (2000).
- [42] PACZYNSKI, B., *ApJL*, 365, L9 (1990).
- [43] BONNOR, W. B. An exact solution of the Einstein-Maxwell equations referring to a magnetic dipole, *Zeitschrift für Physik* 190, 444-445 (1966).
- [44] GUTSUNAEV, Ts. I. & MANKO, V. S. On the gravitational field of a mass possessing a magnetic dipole moment, *Phys. Lett. A* 123, 215-216 (1987).
- [45] MARTIN, A. W. & PRITCHETT, P. L. Asymptotic gravitational field of the "electron", *J. Math. Phys.* vol. 9, n. 4, 593-597 (1968).
- [46] BONNOR, W. B. Dragging of inertial frames by a charged magnetic dipole, *Phys. Lett. A* 158, 23-26 (1991).

- [47] BONAZZOLA, S., GOURGOULHON, E., SALGADO, M., MARCK, J. A. Axisymmetric rotating relativistic bodies: a new numerical approach for "exact" solutions. *Astron. Astrophys.*, 278,p. 421-443 (1993).
- [48] BOCQUET, M., BONAZZOLA, S., GOURGOULHON, E., NOVAK, J. Rotating neutron star models with magnetic field. *Astron. Astrophys.*, 278,p. 421-443 (2011).
- [49] EINSTEIN, A. Die Feldgleichungen der Gravitation. Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte,p. 844–847 (1915).
- [50] EINSTEIN, A. Die grundlage der allgemeinem relativitatstheorie. *Ann. Phys. (BERLIN)*, v. 49, n. 7, p. 769-822, (1916).
- [51] EINSTEIN, A. Über Fr. Kottlers Abhandlung: Einsteins Äquivalenzhypothese und die Gravitation. *Ann. der Phys. (BERLIN)*, v. 51,p. 639–642 (1916).
- [52] EINSTEIN, A. Hamiltonsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie. Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte, p. 1111–1116 (1916).
- [53] EINSTEIN, Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation. Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte, p. 688–696 (1916).
- [54] EINSTEIN, Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie. Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte, p. 142–152 (1917).
- [55] BAPTISTA, J. P.; FERRACIOLI, L. A construção do princípio de inércia e do conceito de inércia material. *Rev. Bras. Ens. Fis.*, v. 22, n. 2, p. 272-280, (2000).
- [56] PORTO, C. M.; PORTO, M. B. D. S. M. Galileu, Descartes e a elaboração do princípio da inércia. *Rev. Bras. Ens. Fis.*, v. 31, n. 4, p. 4601-4610, (2006).
- [57] GALILEU, G. Dialogue concerning the two chief world systems.2nd rev. ed. San Francisco: University of California Press, (1967).
- [58] NEWTON, I. Princípios matemáticos de filosofia natural. São Paulo: Nova Stella & Editora da USP, (1990).
- [59] GONÇALVES, M. A. C. Diferenças entre a abordagem entre a abordagem da física "superidealizada" e "não-idealizada" sobre força e movimento. 2007. 92 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências) - Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Mato Grosso, Cuiabá, 2007.

- [60] WAGNES, T. A.; SCHLAMMINGER, S.; GUNDLACH, J. H.; ADELBERGER, E. G. Torsion-balance tests of the weak equivalence principle, *Class. Quantum Grav.* 29, 184002 (2012).
- [61] WILLIAMS, J. G.; TURYSHEV, S. G.; BOGGS, D. H. Lunar laser ranging tests of the equivalence principle, *Class. Quantum Grav.* 29, 184004 (2012).
- [62] MUELLER, J.; HOFFMAN, E.; BISKUPEK, L. Testing various facets of the equivalence principle using lunar laser ranging, *Class. Quantum Grav.* 29, 184006 (2012).
- [63] STEP. Disponível em: <<http://einstein.stanford.edu/STEP/>>. Acesso em: 20 de março de 2016.
- [64] GG project. Disponível em: <<http://copernico.dm.unipi.it/toncelli/GG/GGproject.htm>>. Acesso em: 20 de março de 2016.
- [65] Microscope. Disponível em: <<https://microscope.cnes.fr/en/MICROSCOPE/index.htm>>. Acesso em: 20 de março de 2016.
- [66] THIRRING, H. *Phys. Zeitschr.* 19 33 (1918).
- [67] BONNOR, W. B. The field of an electric current in General Relativity, *Proc. Phys. Soc.* 76, 891-899 (1960).
- [68] DE FREITAS, V. P. Discos Relativísticos Auto-Gravitantes: Aspectos de Estabilidade. 2013. 93 f. Dissertação (Mestrado em Física) - Programa de Pós-Graduação em Física, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2013.
- [69] REISSNER, H. Über die Eigengravitation des electrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie. *Annalen der Physik (in German)* 50: 106 (1916).
- [70] Nordström, G. On the Energy of the Gravitational Field in Einstein's Theory. *Verhandl. Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap., Afdel. Natuurk., Amsterdam* 26: 1201-1208 (1918).
- [71] GOURGOULHON, E. An introduction to the theory of rotating relativistic stars In: COMPSTAR 2010 School GANIL, (2011). Caen, France. p. 90.
- [72] ZDUNIK, J.L.; HAENSEL, P.; GOURGOULHON, E.; BEJGER, M. Hyperon softening of the EOS of dense matter and the spin evolution of isolated neutron stars, *Astronomy and Astrophysics* 416, 1013-1022 (2004).

- [73] ZDUNIK, J. L.; HAENSEL, P.; BEJGER, M.; GOURGOULHON, E. EOS of dense matter and fast rotation of neutron stars, in Proceedings of the International Symposium on Exotic States of Nuclear Matter, EXOCT07, edited by M. Baldo, F. Burgio, H.-J. Schulze and U. Lombardo, World Scientific (2008).
- [74] SHAPIRO, I.I; REASENBERG, R. D.; MACNEIL, P. E.; GOLDSTEIN, R. B.; BRENKLE, J. P.; KOMAREK, T.; ZYGIELBAUM, A. I.; CUDDIHY, W. F.; MICHAEL JR, W. F. The viking relativity experiment. J. GEOPHYS. RES., v. 82, n.28, p. 4329-4334 (1977).
- [75] HOBSON, M. P.; EFSTATHIOU, G.; LASENBY, A. N., *General Relativity: an introduction for physicists*. Cambridge University Press, 2006. 572 p.
- [76] PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T., *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. 3. ed. Cambridge University Press, 2007. 1235 p.
- [77] FINLAYSON, B. A.; SCRIVEN, L.E. *The method of weighted residuals—a review*. Appl.Mech. Rev. 19, 735–748, 1966.
- [78] CANUTO, C.; HUSSAINI, Y. M.; QUARTERONI, A.; ZANG, T. A., *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. 2. ed. Springer-Verlag, 1988. 567 p.
- [79] FORNBERG, B., *A practical guide to pseudospectral methods*. Cambridge University Press, 1996. 231 p.
- [80] BONAZZOLA, S.; GOURGOULHON, E.; SALGADO, M.; MARCK, A. Axisymmetric rotating relativistic bodies: a new numerical approach for “exact” solutions, Astron. Astrophys. 278, 421 (1993).
- [81] BOQUET, M.; BONAZZOLA, S.; GOURGOULHON, E.; NOVAK, J. Rotating neutron star models with a magnetic field, Astron. Astrophys. 301, 757 (1995).
- [82] SMARR, L.; YORK, J. W. Kinematical conditions in the construction of spacetime, Phys. Rev. D17, 2529 (1978).
- [83] SHAPIRO, S. L.; TEUKOLSKY, S. A. Gravitational collapse to neutron stars and black holes - Computer generation of spherical spacetimes, ApJ. 235, 199 (1980).
- [84] EVANS, C. *Dynamical Spacetimes and Numerical Relativity*. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

- [85] BARDEEN, J. M.; PIRAN, T. General relativistic axisymmetric rotating systems: Coordinates and equations, *Phys. Rep.* 96, 205 (1983).
- [86] STARK, R. F.; PIRAN, T. Gravitational-Wave Emission from Rotating Gravitational Collapse, *Phys. Rev. Lett.* 55, 891 (1985).
- [87] JACKSON, J. D., *Classical electrodynamics*. 3. ed. John Wiley & Sons, 1999. 833 p.
- [88] NUSSENZVEIG, H. M., *Curso de física básica: eletromagnetismo*. 1. ed. v. 3. Blucher, 1997. 336 p.
- [89] BONAZZOLA, S.; GOURGOULHON, E. Gravitational waves from pulsars: emission by the magnetic field induced distortion, *Astron. Astrophys.* 312, 675 (1996).
- [90] KIUCHI, K.; KOTAKE, K.; YOSHIDA, S. Equilibrium configurations of relativistic stars with purely toroidal magnetic fields: effects of realistic equations of state, *ApJ*. 698, 541-557 (2009).
- [91] KONNO, K.; OBATA, T.; KOJIMA, Y. Deformation of relativistic magnetized stars, *Astron. Astrophys.* 352, 211 (1999).
- [92] IOKA, K.; SASAKI, M. Relativistic stars with poloidal and toroidal magnetic fields and meridional flow, *Astrophys. J.* 600, 296 (2004).
- [93] MALLICK, R.; SCHRAMM, S. Deformation of a magnetized neutron star. *Phys. Rev. C* 89, 045805 (2014).