UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Soluções estáticas e esfericamente simétricas em uma teoria de gravidade induzida

FERNANDA ALVARIM SILVEIRA

NITERÓI
2016

FERNANDA ALVARIM SILVEIRA

Soluções estáticas e esfericamente simétricas em uma teoria de gravidade induzida

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da UFF, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Física.
Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Ferreira Sobreiro.

NITERÓI
2016

S587 Silveira, Fernanda Alvarim.
Soluções estáticas e esfericamente simétricas em uma teoria de gravidade induzida / Fernanda Alvarim Silveira ; orientador: Rodrigo Ferreira Sobreiro –– Niterói, 2016.
45 p.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal Fluminense, Instituto de Física, 2016.
Bibliografia: p. 43-45.

1.TEORIA DA GRAVITAÇÃO. 2.GRAVITAÇÃO QUÂNTICA. 3.TEORIA DE CALIBRE I. Sobreiro, Rodrigo Ferreira, Orientador. II.Universidade Federal Fluminense. Instituto de Física, Instituição responsável. III.Título.

CDD 530.11

“ Venha!
Meu coração está com pressa
Quando a esperança está dispersa
Só a verdade me liberta
Chega de maldade e ilusão
Venha!
O amor tem sempre a porta aberta
E vem chegando a primavera
Nosso futuro recomeça
Venha! Que o que vem é Perfeição!”
Perfeição - Legião Urbana

Agradecimentos

Gostaria de deixar meu humilde agradecimento as pessoas que foram essencias para que eu conseguisse chegar nessa etapa de minha vida acadêmica e aquelas que me ajudaram durante o desenvolvimento deste trabalho. Espero não só retribuir minha gratidão nesta nota de página, mas que eu possa produzir bons frutos com todos esses conhecimentos para a sociedade.

Assim, agradeço a Deus acima de tudo, aos meus pais Elizabeth e Mário, meu irmão Victor e a toda a minha família, em especial agradeço a minha vó, Daguimar Alvarim, a quem muito devo e a quem amo. Agradeço a todos os amigos, Ivan, Octávio, Guilherme, Léo e Mariane por toda ajuda durante as disciplinas e nas discussões sobre física. Agradeço aos meus orientadores Rodrigo Sobreiro pela oportunidade de pesquisa e por toda ajuda, não só durante o mestrado, mas desde a iniciação científica e ao Anderson Tomaz pela ajuda fundamental durante todo este trabalho. E a todos o professores e funcionários do IF-UFF.

Deixo o meu agradecimento amoroso a pessoa que faz da minha vida mais feliz e a quem eu amo, meu namorado Gustavo Pazzini de Brito. E também por todo seu apoio e ajuda durante a realização deste trabalho.

Por fim, agradeço a UFF, ao IF-UFF e a CAPES pelo financiamento de minha bolsa.

Resumo

Neste trabalho, estudamos algumas soluções estáticas e esfericamente simétricas para uma teoria de gravidade induzida por uma teoria de Yang-Mills no regime de baixas energias. Tal estudo foi feito na situação de vácuo e na presença de uma fonte descrita pelo tensor energia-momento para as equações de campo da gravidade induzida e associada a condição de torção nula. Assim, para a situação de vácuo analisamos duas soluções, uma perturbativa e outra exata. Desta forma, encontramos uma solução perturbativa em torno da solução de Schwarzschild-de Sitter, enquanto a solução exata é uma solução de espaço-tempo de de Sitter modificado. Também discutimos sobre as singularidades para este caso. Na presença do tensor energia-momento das equações de campo da gravidade induzida, analisamos uma solução para uma fonte eletricamente carregada e uma solução associada a um tensor energia-momento de um fluido perfeito. Neste caso, encontramos uma solução perturbativa em torno da solução de Reissner - Nordström - de Sitter e expressões perturbativas para as soluções dentro de um modelo de estrela. Por fim, analisando as equações de campo para uma geometria estática e esfericamente simétrica acoplada a um tensor energia-momento de um fluido perfeito, encontramos uma equação de equilíbrio hidrostático para a densidade de energia e pressão. Onde obtemos uma equação perturbativa em torno equação de Tolman - Oppenheimer - Volkoff - de Sitter.

Palavras-Chave: Gravitação. Soluções esfericamente simétricas. Gravidade quântica. Gravidade efetiva. Teoria de calibre.

Abstract

In this work, we study some static and spherically symmetric solutions to a gravity theory induced by a Yang-Mills theory in the low-energy regime. This study was done in vacuum condition and in the presence of a source described by the energy-momentum tensor to the field equations of induced gravity and associated null torsion condition. Thus, for vacuum situation we analyzed two solutions, one perturbative and another exact. In this way, we find a perturbative solution around the Schwarzschild-de Sitter solution. While the exact solution is a solution of spacetime of de Sitter modified. We also discussed about the singularities in this case. In the presence of the energy-momentum tensor of the field equations of induced gravity, we analyze a solution to an electrically charged source and a solution associated with an energy-momentum tensor of a perfect fluid. In this case, we find a perturbative solution around the Reissner - Nordström - de Sitter solution and perturbative expressions for the solutions within a star model. Finally, analyzing the field equations for a static and spherically symmetric geometry coupled to an energy-momentum tensor of a perfect fluid, we found a hydrostatic equilibrium equation for the energy density and pressure. Where we get a perturbation equation around equation Tolman- Oppenheimer - Volkoff - de Sitter.

Keywords: Gravitation. Spherically symmetric solutions. Quantum gravity. Effective gravity. Gauge Theory.

Sumário

Introdução

Diante do cenário atual sobre teorias de gravidade quântica, vemos que muito se tem trabalhado acerca de tal assunto e muitas são as propostas que tentam descrever uma teoria quântica para a gravidade. Nesse sentido, muitas abordagens existem, onde vários aspectos são ainda discutidos, tal como a possibilidade da gravidade ser uma teoria fundamental ou se ela pode emergir de alguma outra teoria mais fundamental do que ela. Desta forma, algumas candidatas para esse propósito são *loop quantum gravity* [1–3], Horava-Lifshitz *quantum gravity* [4–6], teoria de cordas [7, 8], teorias de derivadas superiores [9, 10], teorias de gravidades emergentes [11–14], entre outras. Todas essas possíveis abordagens sobre teorias de gravidade quântica possuem vantagens e desvantagens, tanto no que diz respeito ao apresentar problemas inerentes na sua formulação quanto a falta de experimentos que as comprovem totalmente [14]. Em particular, teorias de gravidade emergentes tentam contornar o problema de quantizar uma teoria geométrica para a gravidade. O que elas buscam fazer é partir de uma teoria quântica, que a princípio não tem nenhuma relação com a dinâmica do espaço-tempo, e procuram uma forma de emergir ou induzir uma gravidade geométrica a partir desta teoria mais fundamental.

Sob essas perspetivas, este trabalho tem como objetivo estudar alguns aspectos clássicos de uma teoria de gravidade que emerge de uma teoria de calibre. A escolha por uma teoria de calibre, em particular uma teoria de Yang-Mills [15,16], como nossa teoria fundamental foi motivada por ser uma teoria unitária e renormalizável. Além disso, as outras três interações fundamentais da Natureza são descritas com sucesso através de teorias de calibre [17, 18]. Vale mencionar que essa abordagem é uma tentativa de desenvolver uma analogia entre o problema do confinamento, proveniente do setor não-perturbativo da cromodinâmica quântica (CDQ), e a gravidade [19]. Neste caso, temos que na CDQ o conteúdo físico corresponde a estados confinados identificados com hádrons e glueballs. Na teoria da gravidade induzida, o conteúdo físico é identificado com propriedades geométricas do espaço-tempo.

Assim, discutiremos neste trabalho algumas soluções clássicas para a teoria de gravidade induzida associadas a condição de torção nula. Ou seja, explorar quais são os tipos de soluções estáticas e esfericamente simétricas para o vácuo e na presença de fonte de curvatura, descrita pelo tensor energia - momento, essa teoria tem a nos oferecer. E entender como ela se aproxima ou se afasta dos resultados já conhecidos da relatividade geral. Fisicamente tais soluções descrevem os campos gravitacionais no vácuo e produzidos por uma fonte de curvatura previstos pela teoria de gravidade induzida. Além disso, iremos discutir uma equação de equilíbrio hidrostático para um modelo de estrela. Tal equação, nos permite estudar fenômenos físicos interessantes que vai desde o estudo de processos nucleares dentro de estrelas até o fenômeno de colapso gravitacional.

Desta forma, no Capítulo 1, faremos uma breve revisão das soluções estáticas e esfericamente simétricas da teoria da relatividade geral. Assim, iremos discutir sobre a geometria de Schwarzschild - de Sitter e suas singularidades. Além disso, analisaremos as soluções estáticas e esfericamente simétricas associadas a uma fonte eletricamente carregada, a geometria de Reissner - Nordström - de Sitter. Para uma fonte associada a um tensor energia-momento de um fluido perfeito, faremos o estudo das expressões gerais da geometria dentro de um modelo de estrela. Por fim, veremos que explorando as equações de campo associadas a um fluido perfeito, chegaremos numa equação de equilíbrio hidrostático conhecida como equação de Tolman - Oppenheimer - Volkoff - de Sitter [20].

Por outro lado, de forma a nos dar um embasamento teórico sobre a teoria de gravidade induzida, o Capítulo 2 será dedicado ao estudo resumido de tal teoria. Assim, iremos discutir como podemos obter uma teoria efetiva para gravidade no formalismo de primeira ordem a partir de um teoria de calibre, quando o regime de baixas energias é atingido.

No capítulo 3 estudaremos que tipos de soluções estáticas e esfericamente simétricas da teoria de gravidade induzida produz na situação de vácuo e na presença do tensor energia-momento. Para a situação de vácuo, estudaremos duas soluções estáticas e esfericamente simétricas, uma perturbativa e outra exata. Também iremos discutir os horizontes de eventos e os horizontes cosmológicos para este caso. Na presença do tensor energia-momento, iremos analisar uma solução perturbativa para uma fonte eletricamente carregada e uma solução perturbativa associada a um tensor energia-momento de um fluido perfeito. Por fim, veremos que explorando as equações de campo da gravidade induzida associadas a uma geometria esfericamente simétrica e acoplada a um fluido perfeito nos levará a uma equação de equilíbrio hidrostático para a densidade de energia e pressão. Finalmente, o último capítulo será dedicado às considerações finais sobre esta dissertação.

Ao longo deste trabalho utilizamos unidades naturais em que $c = \hbar = 1$ e consideramos a métrica de Minkowski como sendo $\eta_{\mu\nu} = diag(-,+,+,+)$, a menos que algo diferente disso seja explicitamente mencionado.

Capítulo 1

Soluções estáticas e esfericamente simétricas na relatividade geral

Esse capítulo tem como objetivo estudar soluções estáticas e esfericamente simétricas na situação de vácuo e na presença de um tensor energia-momento para a teoria da relatividade geral [21–26]. Além disso, faremos uma breve discussão sobre a equação de equilíbrio hidrostático. Assim, para a situação de vácuo das equações de Einstein, discutiremos a geometria de Schwarzschild - de Sitter e suas singularidades. Para as equações de Einstein na presença do tensor energia-momento, discutiremos a geometria de Reissner - Nordström - de Sitter e a geometria associada a um tensor energia-momento de um fluido perfeito. Por fim, explorando as expressões para as equações associadas à geometria de um fluido perfeito, veremos que podemos obter uma equação de equilíbrio hidrostático. Porém, antes de todas estas discussões, faremos a apresentação das equações de Einstein com constante cosmológica.

1.1 Equações de campo de Einstein

A teoria da relatividade geral utiliza uma elegante estrutura matemática, dada pela geometria pseudo-riemanniana, para descrever de forma brilhante, a natureza da gravitação. Além disso, ela é uma teoria muito bem sucedida dentro do seu limite de validade. Consegue descrever desde o movimento de partículas em um campo gravitacional até fazer previsões da existência de buracos negros. Assim, a equação que descreve a dinâmica da geometria do espaço-tempo, na teoria da relatividade geral, é dada pelas equações de Einstein, expressas por

$$R_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{1.1}$$

onde $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci, R é o escalar de Ricci, Λ é a constante cosmológica, $T_{\mu\nu}$ é o tensor momento-energia da distribuição de matéria e G é a constante de Newton. De acordo com essa equação, temos uma interação entre geometria, caracterizada pelo tensor métrico, e a distribuição de matéria e energia, caracterizada pelo tensor energia-momento. Ou seja, a gravidade é uma manifestação da curvatura do espaço-tempo, onde o tensor energia-momento funciona como fonte de tal curvatura. Além disso, resolver essa equação, significa encontrar qual é a geometria compatível com uma dada distribuição de matéria-energia. Porém, mesmo na ausência do tensor momento-energia, tais equações apresentam solução não triviais de vácuo.

Além disso, ao tomarmos o traço da equação (1.1), teremos, para um $T_{\mu\nu}$ de traço nulo,

$$R + 4\Lambda - \frac{1}{2}R4 = 0 \Rightarrow R = 4\Lambda. \tag{1.2}$$

Assim, substituindo $R = 4\Lambda$ na equação (1.1), ficamos a seguinte equação, para o caso especial de $g^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = 0$,

$$R_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{1.3}$$

Para a situação de vácuo das equações de Einstein, $T_{\mu\nu} = 0$, temos, simplesmente

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}. \tag{1.4}$$

1.2 Geometria de Schwarzschild-de Sitter

A geometria de Schwarzschild - de Sitter é um dos casos mais simples, porém, bastante interessante da teoria da relatividade geral. Pois com ela, conseguimos descrever campos gravitacionais, em boa aproximação, como o do Sol ou da Terra [21]. Logo, ela é uma boa fonte de previsões acessíveis da relatividade geral.

Assim, iremos estudar uma solução esfericamente simétrica e estática[1] para a equação (1.4). Esfericamente simétrica significa ter a mesma simetria[2] do S^2 [21]. Por outro lado, a condição estática significa que, para um sistema de coordenadas estático, as componentes do $g_{\mu\nu}$ são independentes do tempo e também temos que $g_{0\nu} = 0$ [25]. De forma geral, podemos escrever uma geometria esfericamente simétrica através do elemento de linha

$$ds^2 = -e^{2\alpha(r)}\mathrm{d}t^2 + e^{2\beta(r)}\mathrm{d}r^2 + r^2 d\Omega^2 \ , \tag{1.5}$$

onde $d\Omega^2 = d\theta^2 + sin^2\theta d\phi^2$, $e^{2\alpha(r)}$ e $e^{2\beta(r)}$ são, claramente, funções[3] de "r" que foram

[1] Para uma definição mais rigorosa sobre o conceito de esfericamente simétrico, estático ou mesmo estacionário o leitor pode consultar em [21] e [23].

[2] No espaço euclidiano 3-dimensional, tais simetrias são justamente as rotações ordinárias [21].

[3] É interessante dizer, que poderiam ser funções da coordenada r e da coordenada temporal t. No entanto, ao efetuarmos as contas da substituição da geometria nas equações de Einstein veremos que a dependência da variável t some, deixando somente funções de r. Por conta disso, podemos dizer que

escolhidas por simplicidade[4].

O próximo passo para achar a solução para o vácuo das equações de Einstein é calcular os símbolos de Christoffel, $\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}$, para a geometria (1.5). Feito isso, os símbolos não nulos encontrados, são

$$\begin{aligned}
\Gamma^{t}_{tr} &= \partial_r\alpha, &(1.6a)\\
\Gamma^{r}_{tt} &= e^{2(\alpha-\beta)}\partial_r\alpha, &(1.6b)\\
\Gamma^{r}_{rr} &= \partial_r\beta, &(1.6c)\\
\Gamma^{\theta}_{r\theta} &= \frac{1}{r}, &(1.6d)\\
\Gamma^{r}_{\theta\theta} &= -re^{-2\beta}, &(1.6e)\\
\Gamma^{\phi}_{r\phi} &= \frac{1}{r}, &(1.6f)\\
\Gamma^{r}_{\phi\phi} &= -re^{-2\beta}\sin^2\theta, &(1.6g)\\
\Gamma^{\theta}_{\phi\phi} &= -\sin\theta\cos\theta, &(1.6h)\\
\Gamma^{\phi}_{\theta\phi} &= \frac{\cos\theta}{\sin\theta}. &(1.6i)
\end{aligned}$$

Com os símbolos de Christoffel em mãos, podemos calcular o tensor de curvatura, onde as componentes não nulas são

$$\begin{aligned}
R^{t}{}_{rtr} &= [\partial_r\alpha\partial_r\beta - \partial_r{}^2\alpha - (\partial_r\alpha)^2], &(1.7)\\
R^{t}{}_{\theta t\theta} &= -re^{-2\beta}\partial_r\alpha,\\
R^{t}{}_{\phi t\phi} &= -re^{-2\beta}\sin^2\theta\partial_r\alpha,\\
R^{t}{}_{\theta r\theta} &= re^{-2\beta}\partial_r\beta,\\
R^{r}{}_{\phi r\phi} &= re^{-2\beta}\sin^2\theta\partial_r\beta,\\
R^{\theta}{}_{\phi\theta\phi} &= (1-e^{-2\beta})\sin^2\theta.
\end{aligned}$$

Contraindo o tensor de Riemann, podemos encontrar as componentes do tensor de Ricci, que serão dados por

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= e^{2(\alpha-\beta)}[\partial_r{}^2\alpha + (\partial_r\alpha)^2 - \partial_r\alpha\partial_r\beta + \frac{2}{r}\partial_r\alpha], &(1.8)\\
R_{rr} &= -[\partial_r{}^2\alpha + (\partial_r\alpha)^2 - \partial_r\alpha\partial_r\beta - \frac{2}{r}\partial_r\beta],\\
R_{\theta\theta} &= e^{-2\beta}[r(\partial_r\beta - \partial_r\alpha) - 1] + 1,\\
R_{\phi\phi} &= R_{\theta\theta}\sin^2\theta,
\end{aligned}$$

uma solução esfericamente simétrica é automaticamente, também, uma solução estática, para o caso da relatividade geral [21].

[4] Poderiam ser quaisquer outras funções de "r", como $W(r)$, por exemplo.

e, tirando o traço do tensor de Ricci, podemos encontrar o escalar de curvatura,

$$R = -2e^{-2\beta}\left[\partial_r^2\alpha + (\partial_r\alpha)^2 - \partial_r\alpha\partial_r\beta + \frac{2}{r}(\partial_r\alpha - \partial_r\beta) + \frac{1}{r^2}(1 - e^{2\beta})\right]. \tag{1.9}$$

Desta forma, através das equações R_{tt} e R_{rr} podemos achar um vínculo para α e β de modo que

$$0 = e^{2(\beta-\alpha)}R_{tt} + R_{rr} = \frac{2}{r}(\partial_1\alpha + \partial_1\beta)\ , \tag{1.10}$$

que implicará em $\alpha = -\beta + c$. Escolhendo $c = 0$ ou redefinindo a coordenada temporal de forma que $t \rightarrow e^{-c}t$ teremos

$$\alpha = -\beta\ . \tag{1.11}$$

Para tal vínculo, equação (1.11), podemos achar uma solução esfericamente simétrica através da equação, $R_{\theta\theta} = \Lambda g_{\theta\theta}$, que será

$$e^{2\alpha}(2r\partial_r\alpha - 1) + 1 = \Lambda r^2, \tag{1.12}$$

e, portanto, nos oferece a seguinte solução

$$e^{2\alpha} = 1 - \frac{R_S}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2, \tag{1.13}$$

onde R_S é uma constante de integração. Tal constante pode ser encontrada tomando o limite assintótico quando $r \rightarrow \infty$ e fazendo $\Lambda \rightarrow 0$ para que o limite de campos fracos seja alcançado, e podermos identificar R_S como $2GM$, onde G é a constante de Newton e M é a massa do objeto que está produzindo o campo gravitacional.

Desta forma, a solução esfericamente simétrica para o vácuo da teoria da relatividade geral é dada, através do elemento de linha

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{\Lambda r^2}{3} - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{\Lambda r^2}{3} - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{1.14}$$

Tal solução será chamada de Schwarzschild - de Sitter para $\Lambda > 0$ e Schwarzschild - anti - de Sitter para $\Lambda < 0$. Note que quando $\Lambda = 0$ teremos o espaço-tempo de Schwarzschild. Além disso, vemos que a parte mais significativa dessa geometria concentra-se na parte temporal. Ou seja, temos que o setor temporal da geometria é mais significativo do que a parte espacial[5]. Por outro lado, no limite em que $r >> 2GM$ tal solução se reduz assintoticamente ao espaço-tempo de de Sitter (ou anti-de Sitter dependendo do sinal da constante cosmológica), dado através do seguinte elemento de

[5]Isso é um fato interessante da geometria de Schwazschild-de Sitter, onde temos um espaço-tempo curvo, porém, a deformação é mais intensa na parte abstrata da geometria. Esse efeito é considerável na explicação, por exemplo, do atraso no tempo de propagações de sinais luminosos (atraso de Shapiro) [21], [27].

linha

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{1.15}$$

Para $\Lambda = 0$ temos o espaço-tempo plano de Minkowski. É interessante mencionar que este tipo de solução para o vácuo, equação (1.15), não apresenta singularidade física decorrente de um buraco negro. É simplesmente uma configuração de espaço-tempo curvo (devido a presença da constante cosmológica) tal como a geometria de Minkowski representa uma configuração para espaço-tempo plano.

1.2.1 Singularidades

O modo como analisaremos as possíveis singularidades da geometria de Schwarzschild - de Sitter será estudando quais os pontos (raízes) no qual componentes da geometria possivelmente podem divergir[6]. Desta forma, quando $e^{-2\beta} = 0$, temos a seguinte equação de terceiro grau:

$$r - r^3 l^2 - 2GM = 0, \tag{1.16}$$

onde $l^2 = \frac{\Lambda}{3}$. As raízes dessa equação podem ser dadas através da solução trigonométrica de Viète [28], [29]

$$r_1 = \frac{2}{\sqrt{3}l} \sin\psi, \tag{1.17}$$

$$r_2 = \frac{1}{l}\cos\psi - \frac{1}{\sqrt{3}l}\sin\psi, \tag{1.18}$$

$$r_3 = -\frac{1}{l}\cos\psi - \frac{1}{\sqrt{3}l}\sin\psi, \tag{1.19}$$

onde $\sin(3\psi) = 3\sqrt{3}MGl$. Como M e l são considerados positivos, então a raiz r_3 é negativa, e, portanto, não física. Assim, temos que estudar em quais regimes as outras duas raízes são de fato singularidades [29]. Portanto,

- Para $0 < \sin(3\psi) < 1$ temos a localização do horizonte de eventos (r_1) e a localização do horizonte cosmológico em (r_2).
- Para $\sin(3\psi) = 1$ temos que os raios dos dois horizontes coincidem[7] $r_1 = r_2$.
- Para $\sin(3\psi) > 1$ temos que os raios de ambos os horizontes assumem valores complexos e são não físicos[8].

[6]Somente o estudo de objetos invariantes de coordenadas podem nos dizer realmente se temos um singularidade física ou uma singularidade de coordenadas atribuídas a tais raízes. No final desta seção discutiremos mais sobre isso.

[7]Esse caso corresponde ao buracao negro de Nariai [29].

[8]Nesse caso teríamos que o raio do horizonte cosmológico seria menor que o raio do horizonte de eventos e qualquer observador na região $r_1 < r < r_2$ não poderia saber sobre isso [29].

Desta forma, temos que para uma massa, M, o raio do horizonte de evento de Schwarzschild - de Sitter (r_1) é maior que o raio do horizonte de Schwarzschild ($r_1 > 2GM$). E se reduz ao raio do horizonte de Schwarzschild, ($r = 2GM$), quando $l \to 0$. Por outro lado, quando $M \to 0$ o raio do horizonte cosmológico torna-se igual ao raio do horizonte de de Sitter ($r_2 = l^{-1}$).

Geometricamente, sabemos que os objetos geométricos invariantes de coordenadas, são, por exemplo, o escalar de Ricci, o escalar de Kretschmann, entre diversos outros escalares [21]. Assim, as singularidades físicas são analisadas no estudo desses objetos, quando eles divergem. Logo, a singularidade do horizonte de evento, r_1, é, na verdade, uma singularidade de coordenadas, pois ao calcularmos os objetos invariantes de coordenadas, eles são finitos em r_1. Porém, existe uma singularidade física em $r = 0$, onde, por exemplo, o escalar de Kretschmann diverge em tal ponto. Tais singularidades, previstas pela geometria de Schwarzschild - de Sitter, representam fisicamente, um buraco negro que é definido como uma região do espaço-tempo onde o campo gravitacional é tão forte que nada, nem mesmo a luz, consegue escapar [26].

1.3 Geometria de Reissner-Nordström-de Sitter

Nesta seção iremos discutir uma solução estática e esfericamente simétrica para uma fonte eletricamente carregada conhecida como geometria de Reissner-Nordström-de Sitter [21], [30]. A situação física é de uma geometria de um buraco negro esférico, carregado e sem rotação. Além disso, não haverá campo magnético devido as cargas elétricas uma vez que estamos considerando que a carga é estática e por isso, não haverá corrente através do buraco negro [30]. Assim, estudaremos as equações de Einstein em que consideraremos o tensor energia-momento como sendo o do eletromagnetismo de Maxwell, que é dado por

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\rho}F_{\nu}{}^{\rho} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\rho\sigma}F^{\rho\sigma}, \tag{1.20}$$

onde $F_{\mu\nu}$ é o tensor intensidade do campo ou tensor de Maxwell e que deve satisfazer as equações de Maxwell no espaço vazio

$$g^{\mu\nu}\nabla_{\mu}F_{\nu\sigma} = 0, \tag{1.21}$$

$$\nabla_{\mu}F_{\nu\rho} + \nabla_{\nu}F_{\rho\mu} + \nabla_{\rho}F_{\mu\nu} = 0, \tag{1.22}$$

onde ∇_{μ} é o operador derivada covariante. Além disso, o tensor energia-momento, (1.20), possui traço nulo, e, portanto, podemos usar a equação (1.3), para este caso.

Por outro lado, como estamos interessados em simetria esférica, e buscando soluções esfericamente simétricas, utilizaremos a geometria dada através do elemento de linha

(1.5). Logo, todos os cálculos feitos para os símbolos de Christoffel, (1.6), e para o tensor de Ricci, (1.8), continuarão os mesmos para este caso. Com isso, podemos começar estudando a componente r da equação de Maxwell (1.21), onde teremos

$$\partial_t F_{tr} - \Gamma^{\alpha}_{tt} F_{\alpha r} - \Gamma^{\alpha}_{tr} F_{t\alpha} = 0, \tag{1.23}$$

que abrindo no somatório em α ficará,

$$\partial_t F_{tr} - F_{tr}(\Gamma^{r}_{tt} + \Gamma^{r}_{tr}) = 0. \tag{1.24}$$

Uma vez que a métrica é diagonal e β não depende do tempo, então, $\Gamma^r_{tt} = 0$, $\Gamma^r_{tr} = \partial_t \beta = 0$ e da equação (1.24), teremos $\partial_t F_{tr} = 0$. Portanto, teremos

$$F_{tr} = f(r) = -F_{rt}. \tag{1.25}$$

Para acharmos $f(r)$ utilizaremos a seguinte identidade, para um tensor de segunda ordem [30], $T_{\mu\nu}$,

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu (\sqrt{|g|} T^{\mu\nu}), \tag{1.26}$$

onde g é o determinante de $g_{\mu\nu}$, que, para a nossa geometria, será $\sqrt{|g|} = r^2 \sin\theta$. Assim, usando a condição de compatibilidade da métrica para subir os índices do tensor de Maxwell da equação (1.21), e usando a identidade acima, teremos, para a componente $\mu = r$,

$$\nabla_r F^{rt} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \partial_r (r^2 \sin\theta F^{rt}) = 0, \tag{1.27}$$

logo,

$$\partial_r (r^2 \sin\theta F^{rt}) = \partial_r (r^2 g^{rr} g^{tt} F_{rt}) = \partial_r [r^2 f(r)] \Rightarrow f(r) = \frac{const}{r^2}, \tag{1.28}$$

onde, pela lei de Gauss temos que a constante pode ser identificada como $const. = Q/\sqrt{4\pi}$ de modo que, Q é a carga elétrica do buraco negro. A outra equação de Maxwell, equação (1.22), nos fornecerá um nova função de r, que através da lei de Gauss, poderemos identificar como uma função do campo magnético associado a "carga magnética" (monopolo), P, do buraco negro que iremos ignorar para esse trabalho.

Desta forma, as componentes do tensor energia-momento, dadas através de (1.20), levando em conta (1.25) e (1.28), serão

$$
\begin{aligned}
T_{tt} &= \frac{Q^2}{4\pi r^4}\frac{1}{2}e^{-2\beta}, && (1.29)\\
T_{rr} &= -\frac{Q^2}{4\pi r^4}\frac{1}{2}e^{-2\alpha}, && (1.30)\\
T_{\theta\theta} &= \frac{Q^2}{4\pi r^4}\frac{1}{2}e^{-2(\alpha+\beta)}, && (1.31)\\
T_{\phi\phi} &= T_{\theta\theta}\sin^2\theta. && (1.32)
\end{aligned}
$$

Assim, as três[9] componentes das equações de Einstein, para tt, rr e $\theta\theta$, são, respectivamente

$$e^{2(\alpha-\beta)}[\partial_r{}^2\alpha + (\partial_r\alpha)^2 - \partial_r\alpha\partial_r\beta + \frac{2}{r}\partial_r\alpha] + \Lambda e^{2\alpha} = G\frac{Q^2}{r^4}e^{-2\beta}, \tag{1.33}$$

$$-[\partial_r{}^2\alpha + (\partial_r\alpha)^2 - \partial_r\alpha\partial_r\beta - \frac{2}{r}\partial_r\beta] - \Lambda e^{2\beta} = -G\frac{Q^2}{r^4}e^{-2\alpha}, \tag{1.34}$$

$$e^{-2\beta}[r(\partial_r\beta - \partial_r\alpha) - 1] + 1 - \Lambda r^2 = G\frac{Q^2}{r^4}e^{-2(\alpha+\beta)}. \tag{1.35}$$

Podemos solucionar a equação de Einstein através da componente $\theta\theta$, Eq. (1.35), que ficará, usando o fato[10] de que temos $\alpha = -\beta$, simplesmente

$$e^{2\alpha}[r(-\partial_r\alpha - \partial_r\alpha) - 1] + 1 - \Lambda r^2 = G\frac{Q^2}{r^4}, \tag{1.36}$$

onde tal equação, (1.36), nos oferece a seguinte solução

$$e^{2\alpha} = 1 - \frac{R_S}{r} + \frac{GQ}{r^2} - \frac{\Lambda r^2}{3}, \tag{1.37}$$

onde R_S é uma constante de integração e pode ser achada da mesma forma que para o vácuo, explorando o limites assintóticos, de modo que podemos identificá-la como $R_S = 2GM$. Assim, a geometria de Reissner-Nordström-de Sitter é dada através do elemento de linha

$$ds^2 = -\triangle dt^2 + \triangle^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2, \tag{1.38}$$

onde

$$\triangle = 1 - \frac{\Lambda r^2}{3} - \frac{2GM}{r} + \frac{GQ^2}{r^2}. \tag{1.39}$$

Portanto, temos uma geometria estática e esfericamente simétrica, correspondendo fisicamente ao nosso campo gravitacional produzido por uma fonte eletricamente carregada. Tal geometria também prevê horizontes de eventos e singularidade física que descreverá uma situação de buraco negro com carga e sem rotação.

[9] A quarta equação ($\phi\phi$) é proporcional a equação para $\theta\theta$

[10] Subtraindo a componente tt da equação de Einstein pela componente rr continuamos encontrando o vínculo $\alpha = -\beta$.

1.4 Solução para um fluido perfeito e equação de equilíbrio hidrostático

O objetivo desta seção é fazermos uma breve discussão sobre a geometria (ou gravidade) dentro de um objeto esférico e estático, que chamaremos de estrela. Além disso, veremos que explorando as equações de campo da relatividade geral associadas a uma geometria estática e esfericamente simétrica, solução (1.5), acopladas ao tensor energia-momento de um fluido perfeito, nos permitirá chegar numa equação de equilíbrio hidrostático para a densidade de energia, $\rho(r)$, e pressão, $p(r)$. Tal equação é conhecida como equação de Tolman - Oppenheimer - Volkoff - de Sitter (TOVdS) [20, 31]. Nesse caso, iremos tratar a própria estrela como um fluido perfeito.

Geometria dentro de uma estrela

Como dito antes, podemos usar a geometria (1.5), para estudar uma solução para dentro de uma estrela representada por um fluido perfeito [21] associado ao tensor energia-momento,

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu}, \tag{1.40}$$

onde ρ é a densidade de energia, p a pressão e U_μ é a 4-velocidade do fluido. A densidade de energia e a pressão poderão ser funções de r. Por outro lado, como estamos procurando soluções estáticas, podemos tomar a 4-velocidade apontando na direção tipo-tempo. Onde, normalizada toma a forma de $U^\mu U_\mu = -1$. Assim, nossa 4-velocidade será

$$U_\mu = (e^\alpha, 0, 0, 0). \tag{1.41}$$

Com isso, as componentes não-nulas do tensor energia-momento, equação (1.40), serão

$$T_{tt} = e^{2\alpha}\rho, \tag{1.42}$$
$$T_{rr} = e^{2\beta}p, \tag{1.43}$$
$$T_{\theta\theta} = r^2 p, \tag{1.44}$$
$$T_{\phi\phi} = r^2(\sin^2\theta)p. \tag{1.45}$$

Logo, as três[11] componentes independentes da equação de Einstein para tt, rr e $\theta\theta$, são, respectivamente

$$\frac{1}{r^2}e^{-2\beta}(2r\partial_r\beta + 1 - e^{2\beta}) + \Lambda = -8\pi G\rho, \tag{1.46}$$

$$\frac{1}{r^2}e^{-2\beta}(2r\partial_r\alpha + 1 - e^{2\beta}) - \Lambda = 8\pi Gp, \tag{1.47}$$

[11] A equação para $\phi\phi$ é proporcional a equação $\theta\theta$.

$$e^{-2\beta}[\partial_r^2\alpha + (\partial_r\alpha)^2 - \partial_r\alpha\partial_r\beta + \frac{1}{r}(\partial_r\alpha - \partial_r\beta)] - \Lambda = 8\pi G p. \tag{1.48}$$

Desta forma, vemos que a equação (1.46), é uma equação que só envolve β e ρ, e portanto, podemos chegar numa expressão para $e^{-2\beta}$ que pode ser dada por[12]

$$e^{-2\beta} = 1 - \frac{2Gm(r)}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}, \tag{1.49}$$

onde

$$m(r) = \int_0^r 4\pi\rho r^2 dr. \tag{1.50}$$

Por outro lado, achar uma expressão para $e^{2\alpha}$ é mais complicado, uma vez que estamos trabalhando com um caso geral para um $\rho(r)$ e um $p(r)$. No entanto, podemos encontrar uma uma expressão para a derivada de α. Assim, ao substituirmos a solução, equação (1.49), na componente rr das equações de Einstein, equação (1.47), teremos

$$\frac{d\alpha}{dr} = \frac{-3Gm(r) + r^3\Lambda - 12G\pi r^3 p(r)}{r[6Gm(r) - 3r + r^3\Lambda]}. \tag{1.51}$$

Esta equação depende de condições de contorno tais como considerarmos uma estrela com regularidade no centro, possuir pressão nula na superfície e para um $r > R$, onde R é o raio da estrela, a geometria deve ser descrita pela geometria de Schwarzschild-de Sitter [20, 21, 31].

Portanto, temos as expressões generalizadas para α e β que nos permitem explorar geometrias mais gerais para uma dada densidade de energia, $\rho(r)$, e uma dada pressão, $p(r)$. Uma vez conhecidos $\rho(r)$ e $p(r)$, torna-se simples obter uma geometria para dentro de uma estrela através das equações (1.49) e (1.51). Fisicamente tais soluções representam o campo gravitacional dentro de um modelo de estrela.

Equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff-de Sitter

Nesse momento, estamos interessado em achar uma equação de equilíbrio hidrostático que envolva $\rho(r)$ e $p(r)$ proveniente da relatividade geral. Desta forma, podemos observar que na equação (1.51), temos uma relação de $\rho(r)$ e $p(r)$, exceto pela derivada de α. No entanto, podemos utilizar a componente $\theta\theta$ das equações de Einstein[13], (1.48), para eliminarmos a dependência da variável α de (1.51). Logo, podemos substituir as equações (1.51) e (1.49) na equação (1.48) de modo a obtermos uma equação para o

[12] Estamos considerando uma estrela com regularidade no centro. Isso significa que desprezaremos a constante integração [20], [31].

[13] Poríamos usar a equação de conservação do tensor energia-momento, $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, onde as contas ficam muito mais simples, ao invés da equação (1.48). Mas, para referências futuras faremos desse modo nossas contas. Para o leitor que está tendo o primeiro contato com essas contas, recomendo usar a equação da conservação do $T_{\mu\nu}$, como em [21].

equilíbrio hidrostático, como

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{(\rho + p)[-3Gm(r) + r^3\Lambda - 12\pi G r^3 p]}{r[6m(r)G - 3r + r^3\Lambda]}, \tag{1.52}$$

que é a equação de Tolman - Oppenheimer - Volkoff - de Sitter. No entanto, para obtermos um expressão para a pressão, $p(r)$, que dependa[14] somente de r, devemos ter uma outra equação que relacione $\rho(r)$ e $p(r)$. Isto pode ser alcançado através de uma equação de estado, $p(r) = p(\rho)$.

Com a equação de TOVdS e uma equação de estado conveniente, podemos isolar a pressão e obtermos informações físicas para a pressão dentro de uma estrela, que no nosso modelo é estática e esférica. Além disso, estas equações nos permitem estudar fenômenos físicos interessantes que vão desde estudos de processos nucleares dentro da estrela até o efeito de colapso gravitacional de estrelas.

[14] Em geral, a pressão pode ser uma função da densidade de energia e da entropia, $p(r, S)$. Porém, frequentemente a entropia é muito pequena e acaba sendo negligenciada [21].

Capítulo 2

Teoria de gravidade induzida

2.1 Introdução

Nesse capítulo, discutiremos uma possibilidade de gravidade geométrica induzida por uma teoria de Yang-Mills quando um certa escala de energia[1] é ultrapassada. Assim, partiremos de uma teoria de calibre para o grupo $SO(5)$ em quatro dimensões. Explorando suas propriedades de liberdade assintótica e o parâmetro de massa da teoria veremos que, no regime de baixas energias, poderemos associar os campos de calibre com as propriedades geométricas do espaço-tempo como a *vierbein* e a conexão de spin. Como consequência, chegaremos numa teoria efetiva para a gravidade no formalismo de primeira ordem. Esse capítulo será baseado nas referências [14,19,32–35] e será discutido no formalismo de formas diferenciais, por simplicidade nas operações matemáticas.

2.2 Teoria de Yang-Mills para o grupo $SO(5)$

Em poucas palavras, a teoria de Yang-Mills é uma teoria de calibre para um grupo de simetria não-abeliano onde a lagrangeana é invariante por transformações locais e cuja dinâmica do campo de calibre, corresponde a uma partícula de spin-1 auto-interagente. Ela é renormalizável, unitária[2] e possui propriedades importantes como liberdade assintótica e geração dinâmica de massa. Uma teoria é dita renormalizável se pudermos eliminar todas as suas divergências. Com relação à unitariedade, essa propriedade garante a ausência de estados de norma negativa, os indesejáveis fantasmas. A liberdade assintótica está associada ao parâmetro de acoplamento da teoria, κ, que

[1]Tal escala é dada pela energia de Planck, acima da qual não valem as teorias de gravidade clássicas.

[2]Ela é renormalizável e unitária sob certas circunstâncias, como está associada a um grupo compacto e semi-simples, por exemplo [14].

diminui quando a escala de energia aumenta. Por outro lado, a geração dinâmica de massa surge da necessidade de eliminarmos divergências que aparecem no regime de baixas energias e está associado a um parâmetro de massa, γ, que é dado pelo parâmetro de Gribov. Tal parâmetro é obtido a partir da equação de gap de massa, a qual é determinada por meio da minimização da ação quântica para a Teoria de Yang-Mills [14, 19, 34].

Neste trabalho, descreveremos uma teoria de Yang-Mills para o grupo $SO(m,n)$, em particular, $SO(5)$, em quatro dimensões definida num espaço-tempo euclidiano $\mathbb{R}^4$. Tal grupo pode ser pensando como uma variedade diferenciável e, portanto, podemos definir um espaço tangente interno 5-dimensional, $\mathbb{R}^5_S$, com uma métrica expressa por $\delta^{AB} = \text{diag}\,(1,1,1,1,1)$. É importante ressaltar que o espaço tangente ($\mathbb{R}^5_S$) não tem qualquer relação com o espaço-tempo ($\mathbb{R}^4$).

O campo de calibre fundamental é representado por uma 1-forma $Y = Y^A_B J^B_A$, onde J^B_A são os 10 geradores anti-hermitianos do grupo. Além disso, os índices latinos maiúsculos correm na ordem $\{5,0,1,2,3\}$. Através desse campo de calibre podemos escrever a 2-forma intensidade de campo dado por

$$F^A_B = (dY^A_B + \kappa Y^A_C Y^C_B) J^B_A, \tag{2.1}$$

onde κ é um parâmetro de acoplamento adimensional. Por outro lado, dado o campo de calibre e a intensidade do campo, podemos escrever a ação de Yang-Mills como

$$S_{\text{YM}} = \frac{1}{2}\int F^A{}_B * F_A{}^B, \tag{2.2}$$

onde $*$ é o operador estrela de Hodge no espaço-tempo, $\mathbb{R}^4$. Durante todo esse processo, estamos considerando a álgebra do grupo $SO(5)$, dada por

$$\left[J^{AB}, J^{CD}\right] = -\frac{1}{2}\left[\left(\eta^{AC}J^{BD} + \eta^{BD}J^{AC}\right) - \left(\eta^{AD}J^{BC} + \eta^{BC}J^{AD}\right)\right]. \tag{2.3}$$

2.2.1 A decomposição do grupo

Podemos decompor o grupo inicial $SO(5)$ da seguinte forma

$$SO(5) = SO(4) \times S(4), \tag{2.4}$$

onde $S(4)$ é o *coset* simétrico com 4 graus de liberdade: $S(4) = SO(5)/SO(4)$. Com essa decomposição, projeta-se o espaço do grupo na quinta coordenada $A = 5$. Chamaremos então $J^{5a} = J^a$ onde os índices Latinos minúsculos tomam os valores $\{0,1,2,3\}$.

Com isso, a nossa álgebra inicial (2.3) será decomposta como

$$\begin{aligned}
\left[J^{ab}, J^{cd}\right] &= -\frac{1}{2}\left[\left(\eta^{ac}J^{bd}+\eta^{bd}J^{ac}\right)-\left(\eta^{ad}J^{bc}+\eta^{bc}J^{ad}\right)\right], && (2.5)\\
\left[J^{ab}, J^{c}\right] &= \frac{1}{2}\left(\eta^{ac}J^{b}-\eta^{bc}J^{a}\right), && (2.6)\\
\left[J^{a}, J^{b}\right] &= -\frac{1}{2}J^{ab}, && (2.7)
\end{aligned}$$

onde $\eta^{ab} \equiv diag(1,1,1,1)$, $J^{ab} \in algSO(4)$ e $J^{a} \in algS(4)$. Além disso, essa decomposição também se reflete numa decomposição no campo de calibre Y,

$$Y = Y^{A}{}_{B}J_{A}{}^{B} = A^{a}{}_{b}J_{a}{}^{b} + \theta^{a}J_{b}, \tag{2.8}$$

onde $A \in algSO(4)$ e $\theta \in algS(4)$. Consequentemente, a intensidade do campo pode também ser decomposta na forma

$$F = F^{A}{}_{B}J_{A}{}^{B} = (\Omega^{a}{}_{b} - \frac{\kappa}{4}\theta^{a}\theta_{b})J_{a}{}^{b} + K^{a}J_{a}, \tag{2.9}$$

onde, $\Omega^{a}{}_{b} = dA^{a}{}_{b} + \kappa A^{a}{}_{c}A^{c}{}_{b}$ e $K^{a} = D\theta^{a} = d\theta^{a} + \kappa A^{a}{}_{b}\theta^{b}$ sendo "D" a derivada covariante $D = d + \kappa A$ com relação ao setor $SO(4)$ da álgebra. A ação de Yang-Mills decomposta ficará então

$$S_{\mathrm{YM}} = \frac{1}{2}\int\left[\Omega^{a}_{b} * \Omega^{b}_{a} + \frac{1}{2}K^{a} * K_{a} - \frac{\kappa}{2}\Omega^{a}_{b} * (\theta_{a}\theta^{b}) + \frac{\kappa^{2}}{16}\theta^{a}\theta_{b} * (\theta_{a}\theta^{b})\right]. \tag{2.10}$$

Resumindo o que temos até agora: partimos de uma ação de Yang-Mills para o grupos $SO(5)$ e depois usamos o fato que podemos decompor o grupo incial da forma como em (2.4) para chegarmos numa ação de Yang-Mills decomposta.

A ideia é partimos de uma teoria de calibre, em particular a teoria de Yang-Mills, e a modificarmos em uma teoria de gravidade no regime de baixas energias. Sabemos que o grupo de Lorentz, $SO(1,3)$, preserva a métrica de um espaço-tempo localmente plano (Minkowski). A motivação inicial é, portanto, sairmos de um grupo que possa ser reduzido ao grupo de Lorentz, cuja versão euclideana 4-dimensional corresponde ao grupo $SO(4)$. Além disso, os grupos $SO(1,3)$ e $SO(4)$ podem ser conectados através de um rotação de Wick.

2.2.2 A quebra dinâmica de simetria

Para conquistarmos uma mudança na álgebra do $SO(5)$ e consequentemente reduzirmos ao grupo de Lorentz, para que possa emergir o princípio de equivalência e a geometria do espaço-tempo, precisamos fazer uma redefinição dos campos de calibre [19], [33]. Para isso, usaremos as propriedades de liberdade assintótica associado ao parâmetro de acoplamento, κ e o parâmetro de massa da teoria, γ. Essa redefinição, no regime de baixas energias, deverá estar associada a *vierbein* e a conexão de spin, campos fundamentais do formalismo de primeira ordem da gravitação. Assim, a redefinição conveniente para nós será

$$A \rightarrow \kappa^{-1} A, \tag{2.11}$$

$$\theta \rightarrow \gamma\kappa^{-1}\theta. \tag{2.12}$$

Com essa redefinição nos campos de calibre, a ação de Yang-Mills (2.10) torna-se

$$S_{\mathrm{YM}} = \frac{\gamma^2}{4\kappa^2}\int\left[\frac{2}{\gamma^2}\bar{\Omega}^a_b * \bar{\Omega}^b_a + \bar{K}^a * \bar{K}_a - \bar{\Omega}^a_b * (\theta_a\theta^b) + \frac{\gamma^2}{8}\theta^a\theta_b * (\theta_a\theta^b)\right], \tag{2.13}$$

onde usamos $\bar{\Omega}^a_b \equiv dA^a{}_b + A^a{}_c A^c{}_b$ e $\bar{K}^a \equiv d\theta^a + A^a{}_b\theta^b$. Para que o parâmetro κ saia da ação ambos os setores A e θ são redefinidos com κ^{-1}. Por outro lado, o parâmetro de massa γ afeta só o setor θ de modo que se torne um campo com componentes sem dimensão e assim conseguirmos associá-lo a *vierbein*. O campo de calibre A não é redefinido também com parâmetro de massa, pois desta forma não poderíamos associá-lo a conexão de spin [19].

Por conta da introdução do parâmetro de massa na ação, haverá uma mudança nos geradores do grupo $SO(5)$ e consequentemente sua álgebra será reescrita da forma

$$\begin{aligned}
\left[J^{ab}, J^{cd}\right] &= -\frac{1}{2}\left[\left(\eta^{ac}J^{bd} + \eta^{bd}J^{ac}\right) - \left(\eta^{ad}J^{bc} + \eta^{bc}J^{ad}\right)\right], \\
\left[J^{ab}, J^{c}\right] &= \frac{1}{2}\left(\eta^{ac}J^{b} - \eta^{bc}J^{a}\right), \\
\left[J^{a}, J^{b}\right] &= -\frac{\gamma^2}{2\kappa^2}J^{ab}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Devido a liberdade assintótica, uma hipóteses razoável é que tenhamos $\gamma^2/\kappa^2 \rightarrow 0$ no regime de baixas energias [19]. Nesse regime, podemos ver que a álgebra (2.14) sofre uma deformação dinâmica e teremos que os geradores J^a poderão ser identificados como os geradores de translação, P^a. Portanto, teremos que o grupo $SO(5)$ inicial será contraído[3] ao grupo de Poincaré euclideano $ISO(4)$. Além disso, a ação de Yang-Mills sofre uma quebra de simetria de calibre $SO(5)$ para simetrias locais do grupo $SO(4)$ que é o grupo de Lorentz euclideano. Pois o grupo de Poincaré euclideano, $ISO(4)$, não mantém a ação de Yang-Mills invariante, mas o grupo de Lorentz euclideano, $SO(4)$, sim.

[3] Esta contração é conhecida como contração de Inönü - Wigner [14], [34].

2.3 Gravidade induzida

Após a quebra dinâmica de simetria, temos agora uma teoria de calibre para o grupo de Lorentz euclideano e poderemos induzir uma geometria efetiva se

- Toda configuração (A, θ) define uma geometria efetiva (ω, e);
- Existe um mapeamento de cada ponto $x \in \mathbb{R}^4$ ao ponto $X \in \mathbb{M}^4$ de um espaço deformado.
- O grupo de calibre local $SO(4)$ define, em cada ponto do mapeamento, as isometrias do espaço-tangente $T_X(\mathbb{M}^4)$.

Dessa forma, podemos identificar o campo de calibre θ com a *vierbein* e o campo de calibre A com a conexão de spin ω através de

$$\begin{aligned} \omega_\mu^{\mathfrak{ab}}(X)dX^\mu &= \delta_b^{\mathfrak{a}}\delta_b^{\mathfrak{b}}A_\mu^{ab}(x)dx^\mu, & (2.15) \\ e_\mu^{\mathfrak{a}}(X)dX^\mu &= \delta_a^{\mathfrak{a}}\theta_\mu^a(x)dx^\mu, & (2.16) \end{aligned}$$

onde os índices Latinos $\{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, ...\}$ pertencem ao espaço tangente $T_X(\mathbb{M}^4)$. Além disso, é sempre possível impor que o espaço de todas as p-formas em $\mathbb{R}^4$ são mapeadas no espaço das p-formas em $X \in \mathbb{M}^4$, a saber, $\Pi^p \to \tilde{\Pi}^p$ da mesma forma para o espaço do Hodge, $*\Pi^p \to \star\tilde{\Pi}^p$, onde $\star$ é o Hodge dual do espaço-tempo deformado.

Com tudo isso, o último passo que daremos antes de reescrever a ação (2.13) em uma ação de gravidade efetiva é associarmos o parâmetro de massa, γ, e o parâmetro de acoplamento, κ, com as constantes da gravitação como a constante de Newton, G, e a constante cosmológica renormalizada, Λ, [14], [33], de forma que

$$\frac{\gamma^2}{\kappa^2} = \frac{1}{4\pi G} \quad \text{e} \quad \gamma^2 = \frac{4}{3}\Lambda^2. \tag{2.17}$$

Além disso, essa teoria nos permite obter os valores da constante de Newton, G, e da constante cosmológica, Λ, através das relações (2.17) quando é feito o cálculo perturbativo [14], [19], do parâmetro de acoplamento κ, e do parâmetro de massa[4], γ.

Finalmente, podemos escrever a ação de gravidade efetiva no formalismo de primeira ordem como

$$S_g = \frac{1}{16\pi G}\int \left[\frac{1}{2\Lambda^2}R^{\mathfrak{a}}{}_{\mathfrak{b}} \star R_{\mathfrak{a}}{}^{\mathfrak{b}} + T^a \star T_a - \frac{1}{2}\epsilon_{\mathfrak{abcd}}R^{\mathfrak{ab}}e^{\mathfrak{ab}}e^{e^{\mathfrak{c}}}e^{e^{\mathfrak{d}}} + \frac{\Lambda^2}{4}\epsilon_{\mathfrak{abcd}}e^{\mathfrak{a}}e^{\mathfrak{b}}e^{\mathfrak{c}}e^{\mathfrak{d}}\right], \tag{2.18}$$

[4] A estimativa do parâmetro de Gribov (o nosso parâmetro de massa γ), por exemplo, nos oferece um modo conhecido para se calcular o corte na escala de energia e os parâmetros *running* que estão associados aos parâmetros gravitacionais. Ver em: [14].

onde temos a curvatura escrita como $R^{\mathfrak{a}}_{\mathfrak{b}} = d\omega^{\mathfrak{a}}{}_{\mathfrak{b}} + \omega^{\mathfrak{a}}{}_{\mathfrak{c}}\omega^{\mathfrak{c}}{}_{\mathfrak{b}}$ e a torção $T^{\mathfrak{a}} = de^{\mathfrak{a}} + \omega^{\mathfrak{a}}{}_{\mathfrak{b}}e^{\mathfrak{b}}$. Nesta ação podemos identificar o termo de curvatura ao quadrado, torção ao quadrado e a parte de Einstein-Hilbert com constante cosmológica.

As equações de campo obtidas pelo princípio de Hamilton considerando a variação da ação em relação à *vierbein* $e^{\mathfrak{a}}$ e à conexão de spin $\omega^{\mathfrak{a}}{}_{\mathfrak{b}}$, são respetivamente

$$\frac{3}{2\Lambda^2}R^{\mathfrak{bc}}\star(R_{\mathfrak{bc}}e_{\mathfrak{a}}) + \epsilon_{\mathfrak{abcd}}\left(-R^{\mathfrak{bc}}e^{\mathfrak{d}} + \frac{1}{3}\tilde{\Lambda}^2 e^{\mathfrak{b}}e^{\mathfrak{c}}e^{\mathfrak{d}}\right) + T^{\mathfrak{b}}\star(T_{\mathfrak{b}}e_{\mathfrak{a}}) + D\star T_{\mathfrak{a}} = 0, \tag{2.19}$$

$$\frac{3}{\Lambda^2}D\star R_{\mathfrak{ba}} + e_{\mathfrak{b}}\star T_{\mathfrak{a}} - \epsilon_{\mathfrak{abcd}}T^{\mathfrak{c}}e^{\mathfrak{d}} - e_{\mathfrak{a}}\star T_{\mathfrak{b}} = 0, \tag{2.20}$$

onde $\tilde{\Lambda^2} = \Lambda^2{}_{TQC} + \Lambda^2$ é a constante cosmológica observacional, que é da ordem de $\tilde{\Lambda^2} \sim 10^{-92}\,TeV^2$, e surge do fato de considerarmos a contribuição da energia de vácuo[5] via teoria quântica de campos (TQC) a qual prevê um valor $\Lambda^2{}_{TQC} \sim -10^{28}\,TeV^2$. Por outro lado, cálculos perturbativos a 1 e 2-laços, [14], estimam uma valor bem alto para a constante cosmológica gravitacional renormalizada da teoria $\Lambda^2 \sim 10^{32}\,TeV^2$.

Desta forma, obtemos duas equações de movimento característica de um formalismo de primeira ordem para a gravidade no caso particular de vácuo, ou seja, sem associarmos uma distribuição de matéria-energia específica, a princípio. Na primeira equação, eq. (2.19), temos o termo de curvatura ao quadrado, o termo de Einstein com constante cosmológica e termos de torção. Na segunda equação de campo, eq. (2.20), temos o primeiro termo de curvatura e o restante somente termos de torção. Tais equações são do tipo Einstein-Cartan, onde obtemos dois conjuntos de equações para curvatura e torção. Entretanto, a equação (2.20) difere[6] das equações de do tipo Einstein-Cartan uma vez que ela é uma equação propagante para a torção [33].

Geometricamente a curvatura carrega informação sobre a regra do paralelogramo de adição de vetores e está associado com o transporte paralelo em um espaço-tempo curvo. Para a torção temos que dois vetores resultantes podem coincidir sobre o paralelismo, mas não estarão na mesma posição devido a rotação da variedade e está associado a medida do rotacional covariante da *vierbein* [19].

No formalismo de primeira ordem, por outro lado, temos que os campos fundamentais e independentes como sendo a 1-forma *vierbein* $e^{\mathfrak{a}}$ e a 1-forma conexão de spin $\omega^{\mathfrak{a}}{}_{\mathfrak{b}}$ [19]. Resolver tais equações de campo, significa encontrar quais são as *vierbein* e as conexões de spin que satisfazem estas equações. Além disso, tais equações são não-lineares e podem, portanto, gerar soluções não triviais de vácuo.

Por outro lado, ao considerarmos torção nula, temos que as equações (2.19) e (2.20)

[5]Isso pode ser feito adicionando à integral (2.18) o termo da energia de vácuo proveniente de todas as outras interações dado pela $\Lambda^2{}_{TQC}$ e, identificando assim, a constante cosmológica observacional $\tilde{\Lambda^2}$ como sendo igual a $\Lambda^2 + \Lambda^2{}_{TQC}$. A discrepância entre o valor da contaste cosmológica observacional e da constante prevista na TQC é conhecido como Problema da Constante Cosmológica, [14], [33].

[6]Pois, no caso de Einstein-Cartan temos uma equação algébrica para a torção.

devem recair nas equações da relatividade geral ao tomarmos um certo limite. De fato, esse caso é alcançado quando tivermos regiões onde a curvatura é muito pequena em comparação com o Λ^2. Nessa situação, temos que as equações de campo (2.19) e (2.20) se reduzem as equações de Einstein-Hilbert com constante cosmológica e no vácuo

$$\epsilon_{\mathfrak{abcd}}\left(-R^{\mathfrak{bc}}e^{\mathfrak{d}}+\frac{1}{3}\tilde{\Lambda}^2e^{\mathfrak{b}}e^{\mathfrak{c}}e^{\mathfrak{d}}\right)=0. \tag{2.21}$$

Portanto, vimos basicamente como podemos obter uma teoria de gravidade efetiva via teoria quântica de campos quando uma certa escala de energia é ultrapassada. Para isso, utilizamos uma teoria de calibre não-abeliana, a teoria de Yang-Mills, para o grupo $SO(5)$. Fizemos uma decomposição no grupo inicial com o objetivo de alcançarmos o grupo de Lorentz, para que o princípio de equivalência e a geometria surgissem. Redefinimos os campos de calibre associando-os a parâmetros quânticos da teoria. E por fim, no regime de baixas energia, chegamos numa teoria de gravidade emergente e pudemos associar entidades geométricas como a *vierbein* e a conexão de spin com os campos de calibre.

Além disso, a teoria de Yang-Mills traz a vantagem de ser uma teoria renormalizável e unitária. Por outro lado, é interessante dizer que a gravidade efetiva proveniente da teoria de Yang-Mills surge como uma teoria clássica. Ou seja, quando alcançamos o regime de baixas energias, e consequentemente as propriedades geométricas forem associados aos campos de calibre, a teoria deixa ser quântica e se torna uma teoria clássica para a gravidade.

Capítulo 3

Soluções estáticas e esfericamente simétricas na gravidade induzida

Diante de uma teoria nova para a gravidade, como a teoria de gravidade induzida discutida no Capítulo 2, nosso objetivo para esse capítulo, e deste trabalho em geral, é explorarmos alguns aspectos clássicos para a gravidade induzida associados à condição de torção nula. Além de estudar, como ela se aproxima ou se afasta dos resultados já conhecidos da relatividade geral. Assim, iremos discutir algumas soluções estáticas e esfericamente simétricas para o vácuo e na presença de uma fonte descrita pelo tensor energia-momento. Todas estas soluções representam fisicamente os campos gravitacionais descritos pela teoria de gravidade induzida para o vácuo e produzido por uma fonte de curvatura. Para a situação de vácuo, estudaremos duas soluções, uma perturbativa e outra exata e veremos qual regime em que ambas soluções convergem para uma mesma solução. Também será analisado as singularidades para este caso. Na presença de um tensor energia-momento, para as equações de campo da gravidade induzida, iremos discutir uma solução perturbativa associada a uma fonte carregada e outra possível solução associada a um fluido perfeito. Por fim, veremos que explorando as equações associadas a um fluido perfeito, encontraremos uma expressão generalizada para equação de equilíbrio hidrostático para tal teoria.

3.1 Soluções para o vácuo

Nesta seção, discutiremos duas soluções estáticas e esfericamente simétricas para a situação de vácuo da teoria de gravidade induzida. Além disso, discutiremos os horizontes de eventos e cosmológicos para tais soluções.

3.1.1 Solução perturbativa

As equações de campo para a gravidade induzida, (2.19) e (2.20), associadas a torção nula e escritas em forma tensorial são

$$R^{\mu}{}_{\nu} - \frac{1}{2}R\delta^{\mu}{}_{\nu} + \tilde{\Lambda}^2\delta^{\mu}{}_{\nu} + \frac{3}{8\Lambda^2}\Big(R^{\alpha\beta\sigma\tau}R_{\alpha\beta\sigma\tau}\delta^{\mu}{}_{\nu} - 2R^{\alpha\beta\sigma\mu}R_{\alpha\beta\sigma\nu}\Big) = 0, \tag{3.1}$$

$$\frac{1}{\Lambda^2}\nabla_{\alpha}R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = 0. \tag{3.2}$$

Assim como foi feito para a teoria da relatividade geral, estamos buscando uma possível solução estática e esfericamente simétrica que pode ser dado através do elemento de linha (1.5). A fim de encontrarmos uma solução deste tipo, para a gravidade induzida, devemos substituir a solução, (1.5), na equação (3.1), a princípio[1]. Para isso, utilizaremos os símbolos de Christoffel, tensor de Riemann, tensor de Ricci e o escalar de curvatura, já calculados no capítulo 1, para a relatividade geral, equações (1.6), (1.7), (1.8) e (1.9). Assim, as componentes da equação (3.1) para, tt, rr e $\theta\theta$, são, respectivamente

$$\frac{3}{4\Lambda^2}\left[\left(\frac{2e^{-2\beta}\partial_r\beta}{r}\right)^2 + 2\left(\frac{1-e^{-2\beta}}{r^2}\right)^2\right] + \tilde{\Lambda}^2 - \frac{2e^{-2\beta}\partial_r\beta}{r} - \frac{(1-e^{-2\beta})}{r^2} = 0, \tag{3.3}$$

$$\frac{3}{4\Lambda^2}\left[\left(\frac{2e^{-2\beta}\partial_r\alpha}{r}\right)^2 + 2\left(\frac{1-e^{-2\beta}}{r^2}\right)^2\right] + \tilde{\Lambda}^2 + \frac{2e^{-2\beta}\partial_r\alpha}{r} - \frac{(1-e^{-2\beta})}{r^2} = 0, \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}\frac{3}{4\Lambda^2}\{2e^{-4\beta}[\partial_r\alpha\partial_r\beta - \partial_r^2\alpha - (\partial_r\alpha)^2]^2 + 2(e^{-2\beta}\partial_r\alpha)^2r^{-2} + 2r^{-2}(e^{-2\beta}\partial_r\beta)^2\} + \\ \tilde{\Lambda}^2 + e^{-2\beta}[\partial_r^2\alpha + (\partial_r\alpha)^2 + r^{-1}(\partial_r\alpha - \partial_r\beta) - \partial_r\alpha\partial_r\beta] = 0.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Onde obtivemos a equação para $\phi\phi$ sendo igual a equação para $\theta\theta$, não sendo necessário, portanto, reescrevê-la. Por outro lado, ao subtrairmos a equação (3.3) pela equação (3.4) obtemos a seguinte expressão

$$(\partial_r\alpha + \partial_r\beta)\left[(\partial_r\beta - \partial_r\alpha)e^{-2\beta}\frac{3}{r4\Lambda^2} - 1\right] = 0. \tag{3.6}$$

Desta equação, podemos extrair dois vínculos para $\alpha(r)$ e $\beta(r)$, a saber

$$\partial_r(\alpha+\beta) = 0 \ \Rightarrow\ \alpha + \beta = cte, \tag{3.7}$$

$$\partial_r(\alpha-\beta) = \frac{-4\Lambda^2}{3}re^{2\beta}, \tag{3.8}$$

[1]Estamos analisando primeiramente, a equação (3.1) e suas soluções para depois analisarmos tais soluções na equação (3.2).

onde $\alpha\equiv\alpha(r)$ e $\beta\equiv\beta(r)$. O primeiro vínculo, equação (3.7), também surge no caso da teoria da relatividade geral, equação (1.11), e ele é único. Porém, o segundo vínculo, equação (3.8), é uma nova contribuição que a teoria da gravidade induzida tem a nos oferecer. Isso significa que esta teoria mostra duas possibilidades de soluções esfericamente simétricas e estáticas, o que possivelmente violaria o teorema de Birkhoff[2] da relatividade geral. Para esse trabalho, consideraremos somente soluções para o caso[3] em que $\alpha + \beta = cte$.

Além disso, vemos que ao multiplicarmos as equações (3.1) e (3.2), por $\tilde{\Lambda}^2$, o termo $\tilde{\Lambda}^2/\Lambda^2$ que multiplicará a parte de Riemann quadrado da equação (3.1) se tornará muito pequeno[4] em relação aos termos do setor de Einstein com constante cosmológica. Desta forma, será possível extrair uma solução perturbativa, em torno da solução da relatividade geral, para esta equação. No entanto, a equação (3.2) também terá um fator multiplicativo $\tilde{\Lambda}^2/\Lambda^2$ que a tornará um perturbação por si só, não admitindo assim, uma solução perturbativa.

Assim, podemos reescrever a equação (3.3), que será multiplicada por $\tilde{\Lambda}^2$, da seguinte forma

$$\frac{3}{2}\eta\left[\left(\frac{\partial_r e^{-2\beta}}{r}\right)^2 + 2\left(\frac{1-e^{-2\beta}}{r^2}\right)^2\right] + \tilde{\Lambda}^4 + \tilde{\Lambda}^2\frac{\partial_r e^{-2\beta}}{r} - \tilde{\Lambda}^2\frac{(1-e^{-2\beta})}{r^2} = 0, \tag{3.9}$$

onde $\eta = \tilde{\Lambda}^2/2\Lambda^2$. Para assim, obtermos uma solução perturbativa.

O método perturbativo consiste em escrever uma solução para a equação (3.9) como

$$f(r) = f_0(r) + f_1(r)\eta + f_2(r)\eta^2 + f_3(r)\eta^3 + ..., \tag{3.10}$$

onde $f(r) = 1 - e^{-2\beta}$. Em seguida, devemos substituir a solução (3.10) na equação (3.9) e, assim, obtermos uma equação que pode ser resolvida para cada ordem em η.

[2]Nessa situação, necessita-se estudar um novo teorema de Birkhoff para a gravidade induzida, que garanta ou não solução única para o vácuo na gravidade efetiva. Isso ainda não foi estudado.

[3]O segundo vínculo não foi estudado a fundo, uma vez que ele é uma equação diferencial e ao substituir tal relação nas equações de campo tornam as equações ainda mais difíceis de se resolver. Por outro lado, não é possível existir duas geometrias para uma mesma fonte de curvatura uma vez que isso implicaria em dois campos gravitacionais distintos para a mesma fonte. Além disso, o vínculo (3.7) é usado na relatividade geral para achar tais soluções.

[4]Uma vez que temos $\Lambda^2 \gg \tilde{\Lambda}^2$.

Desta forma, as equações a serem resolvidas até a segunda ordem[5] em η são

$$\begin{aligned}
-\tilde{\Lambda}^4+\tilde{\Lambda}^2\frac{f_0(r)}{r^2}+\tilde{\Lambda}^2\frac{f_0'(r)}{r} &= 0, & (3.11)\\
\eta\Bigg[-\frac{3{f_0}^2(r)}{r^4}+\tilde{\Lambda}^2\frac{f_1(r)}{r^2}-\frac{3{f_0'}^2(r)}{2r^2}+\tilde{\Lambda}^2\frac{f_1'(r)}{r}\Bigg] &= 0, & (3.12)\\
\eta^2\Bigg[-\frac{6f_0(r)f_1(r)}{r^4}+\tilde{\Lambda}^2\frac{f_2(r)}{r^2}-\frac{3f_0'(r)f_1'(r)}{r^2}+\tilde{\Lambda}^2\frac{f_2'(r)}{r}r\Bigg] &= 0. & (3.13)
\end{aligned}$$

Diante dessas equações, vemos que a equação de ordem zero, (3.11), só depende de $f_0(r)$ enquanto a equação de primeira ordem, (3.12), depende de $f_0(r)$ e $f_1(r)$. Assim como a equação de segunda ordem em perturbação, (3.13), depende de $f_0(r)$, $f_1(r)$ e $f_2(r)$. Logo, conforme analisamos as equações ordem a ordem vemos que para serem resolvidas dependeram sempre das soluções de ordens mais baixas.

A equação de ordem zero em η, equação (3.11), produz a solução de Schwarzschild - de Sitter, como era de se esperar,

$$f_0(r)=\frac{2GM}{r}+\frac{\tilde{\Lambda}^2}{3}r^2, \tag{3.14}$$

onde 2GM é encontrando tomando os limites assintóticos com feito para a relatividade geral, equação (1.13). Com a solução em ordem zero, $f_0(r)$, devemos substituir na equação em primeira ordem em η, equação (3.12), que ficará

$$\eta\Bigg\{-3\left(\frac{2GM}{r}+\frac{\tilde{\Lambda}^2}{3}r^2\right)^2r^{-4}+\tilde{\Lambda}^2\frac{f_1(r)}{r^2}-3\left[\partial_r\left(\frac{2GM}{r}+\tilde{\Lambda}^2 3r^2\right)\right]^2(2r^2)^{-1}+\tilde{\Lambda}^2\frac{f_1'(r)}{r}\Bigg\}=0,$$

e, nos fornecerá a seguinte solução

$$f_1(r)=\left[\frac{1}{3}r^2\tilde{\Lambda}^2-\frac{3}{2}\frac{(2GM)^2}{r^4\tilde{\Lambda}^2}+\frac{C_{11}}{r}\right], \tag{3.15}$$

onde C_{11} é uma constante de integração. Substituindo agora, as soluções $f_0(r)$ e $f_1(r)$ na equação (3.13), obtemos a seguinte equação diferencial para $f_2(r)$,

$$\begin{aligned}
&\eta^2\Bigg\{-6\left(\frac{2GM}{r}+\frac{\tilde{\Lambda}^2}{3}r^2\right)\left(\frac{1}{3}r^2\tilde{\Lambda}^2-\frac{3}{2}\frac{(2GM)^2}{r^4\tilde{\Lambda}}+\frac{C_{11}}{r}\right)r^{-4}+\\
&\tilde{\Lambda}^2\frac{f_2(r)}{r^2}-3\frac{2GM}{r}+\frac{\tilde{\Lambda}^2}{3}r^2\left[\frac{1}{3}r^2\tilde{\Lambda}^2+32\frac{(2GM)^2}{r^4\tilde{\Lambda}}+\frac{C_{11}}{r}\right]r^{-2}+\tilde{\Lambda}^2\frac{f_2'(r)}{r}r\Bigg\}=0, \quad (3.16)
\end{aligned}$$

[5]Poderíamos ir até a ordem que quiséssemos, porém, a fim de ilustrar a ideia aqui, só iremos até a segunda ordem em perturbação.

que produz a seguinte solução

$$f_2(r) = \left[\frac{2}{3}r^2\tilde{\Lambda}^2 + \frac{9}{2}\frac{(2GM)^3}{r^7\tilde{\Lambda}^4} - \frac{6GM}{r^4\tilde{\Lambda}^2}(2GM + C_{11}) + \frac{C_{21}}{r}\right], \tag{3.17}$$

onde C_{21} é uma constante de integração. Desta forma a solução perturbativa até segunda ordem para a equação (3.9), será

$$\begin{aligned} e^{-2\beta} = &\left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\tilde{\Lambda}^2}{3}r^2\right) - \eta\left[\frac{1}{3}r^2\tilde{\Lambda}^2 - \frac{3}{2}\frac{(2GM)^2}{r^4\tilde{\Lambda}^2} + \frac{C_{11}}{r}\right] + \\ &-\eta^2\left[\frac{2}{3}r^2\tilde{\Lambda}^2 + \frac{9}{2}\frac{(2GM)^3}{r^7\tilde{\Lambda}^4} - \frac{6GM}{r^4\tilde{\Lambda}^2}(2GM + C_{11}) + \frac{C_{21}}{r}\right] + ... \end{aligned} \tag{3.18}$$

Tal solução perturbativa, pode ser escrita de uma forma compacta como

$$e^{-2\beta} = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \eta^k \sum_{l=1}^{k+2} C_{kl} r^{5-3l}, \tag{3.19}$$

onde C_{kl}, para $k = 0, 1, 2...$, são constantes que envolvem G, M e constantes de integração. Por outro lado, como estamos utilizando o vínculo $\alpha = -\beta$, torna-se fácil encontrar uma solução para $e^{2\alpha}$.

Assim, temos uma solução estática e esfericamente simétrica de forma perturbativa em torno da solução de Schwarzschild - de Sitter para as equações de campo da gravidade induzida no vácuo. Tal solução representa fisicamente um campo gravitacional no vácuo nas proximidades de uma fonte de curvatura estática e esfericamente simétrica.

3.1.2 Solução exata

Além da solução perturbativa discutida na seção anterior, é possível encontrar uma solução exata que satisfazem as duas equações, (3.1) e (3.2). Tal solução é encontrada subtraindo a equação (3.4) pela equação (3.5) que resulta na seguinte equação diferencial

$$\frac{-3}{2\Lambda^2}\left[\left(\frac{\partial_r^2 e^{-2\beta}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1 - e^{-2\beta}}{r^2}\right)\right] - \frac{1}{2}\frac{\partial_r^2 e^{-2\beta}}{r^2} - \frac{1 - e^{-2\beta}}{r^2} = 0, \tag{3.20}$$

e que produz a solução

$$e^{-2\beta} = 1 - \Upsilon_{\pm} r^2 \ , \quad \text{onde} \tag{3.21}$$

$$\Upsilon_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\eta}}{3/\Lambda^2}. \tag{3.22}$$

Esta solução é o espaço-tempo de de Sitter com uma modificação no fator multiplicativo do termo r^2, que na teoria da relatividade geral com constante cosmológica é apenas $\tilde{\Lambda}^2$.

Por outro lado, explorando o regime $r \gg 2GM$ da solução perturbativa, Eq. (3.19), obtemos a seguinte solução

$$e^{-2\beta} = 1 - r^2\left(\frac{\tilde{\Lambda}^2}{3} + \frac{1}{3}\eta\tilde{\Lambda}^2 + \frac{2}{3}\eta^2\tilde{\Lambda}^2 + \frac{5}{3}\eta^3\tilde{\Lambda}^2 + ...\right). \tag{3.23}$$

Além disso, podemos usar o fato de que $4\eta \ll 1$ para podermos expandir a raiz da solução exata, equação (3.22), onde obtemos duas soluções aproximadas

$$e_{+}^{-2\beta} = 1 - r^2\left(\frac{2}{3}\Lambda^2 - \frac{2}{3}\Lambda^2\eta - \frac{2}{3}\Lambda^2\eta^2 - \frac{4}{3}\Lambda^2\eta^3 - ...\right), \tag{3.24}$$

$$e_{-}^{-2\beta} = 1 - r^2\left(\frac{\tilde{\Lambda}^2}{3} + \frac{1}{3}\eta\tilde{\Lambda}^2 + \frac{2}{3}\eta^2\tilde{\Lambda}^2 + \frac{5}{3}\eta^3\tilde{\Lambda}^2 + ...\right). \tag{3.25}$$

Desta forma, vemos que no limite $r \gg 2GM$ da solução perturbativa produz uma solução, Eq. (3.23), que coincide com a solução exata, Eq. (3.25). Ou seja, para regiões onde temos $r \gg 2GM$, na solução perturbativa, alcançamos o espaço-tempo de Sitter, como era de se esperar. Porém, com uma modificação na constante cosmológica, que no caso da gravidade induzida, é uma perturbação em torno da constante cosmológica gravitacional observacional. Note que quando $\eta = 0$, temos o espaço-tempo de de Sitter da relatividade geral com constante cosmológica. Enquanto a solução (3.24) produz uma solução de um espaço-tempo altamente curvo, e que podemos ignorar. Pois, fisicamente se ela não descreve uma geometria longe da fonte de curvatura, ela descreveria, então, a geometria da própria fonte de curvatura. Porém, não podemos ter duas geometrias distintas para o vácuo uma vez que isso implicaria em dois campos gravitacionais distintos para uma mesma fonte de curvatura.

3.1.3 Horizontes de eventos e horizontes cosmológicos

Esta seção tem como objetivo estudarmos o quanto os horizontes de Schwarzschild - de Sitter é modificado, ao truncarmos a solução perturbativa, equação (3.18), em primeira ordem. Ou seja, analisaremos o quanto o termo de primeira ordem em η, que é o mais relevante da solução, corrigirá as soluções de horizontes da relatividade geral.

Da mesma forma que foi feito no Capítulo 1, os horizontes são as raízes da equação $e^{-2\beta} = 0$. Que escrita em primeira ordem é simplesmente

$$\left(1 - \frac{2GM}{r} - \frac{\tilde{\Lambda}^2}{3}r^2\right) - \eta\left[\frac{1}{3}r^2\tilde{\Lambda}^2 - \frac{3}{2}\frac{(2GM)^2}{r^4\tilde{\Lambda}^2} + \frac{C_{11}}{r}\right] = 0. \tag{3.26}$$

Como o termo de primeira ordem em η ainda é muito pequeno em comparação ao termo de ordem zero em η, podemos usar o método perturbativo para extrair uma solução perturbativa em torno dos horizontes da relatividade geral, para a equação

(3.26). Assim, como feito na seção anterior, a solução perturbativa em primeira ordem de perturbação será

$$r \approx r_0 + r_1\eta. \tag{3.27}$$

É interessante dizer que estamos truncando em primeira ordem em η uma vez que já foi truncado anteriormente em primeira ordem em perturbação, equação (3.26). Não sendo necessário, portanto, tratarmos ordens mais altas. Logo, substituindo a solução (3.27) na equação[6] (3.26), obtemos uma equação que poderá ser resolvida para cada ordem em perturbação. Assim, a equação em ordem zero em η, se reduz a

$$r_0^3 - \frac{3}{\tilde{\Lambda}^2}r_0 + \frac{6GM}{\tilde{\Lambda}^2} = 0\ , \tag{3.28}$$

enquanto, em primeira ordem,

$$3r_1r_0^3\left(1 - \frac{\tilde{\Lambda}^2}{3}r_0^2\right) - \mathcal{C}_{11}r_0^3 - \frac{\tilde{\Lambda}^2}{3}r_0^6 + \frac{6G^2M^2}{\tilde{\Lambda}^2} - GM{r_0}^2r_1 = 0\ . \tag{3.29}$$

As soluções em ordem zero de perturbação, que satisfazem a equação (3.28), são aquelas discutidas no Capítulo 1, ou seja, equações (1.17) e (1.18). Com tais soluções de ordem zero em perturbação, devemos substituir, uma por uma, na equação (3.29) para determinarmos as raízes em primeira ordem de perturbação. Feito isso, nossos horizontes perturbativos serão escritos como, $r_{1pert} \approx r_{01} + r_1\eta$ e $r_{2pert} \approx r_{02} + r_2\eta$, onde r_1 e r_2 são as raízes de primeira ordem em η. Portanto, comecemos substituindo a solução (1.17) na equação (3.29), onde consideramos $c_\psi = \cos\psi$ e $s_\psi = \sin\psi$,

$$3r_1\left(\frac{2}{\tilde{\Lambda}^2}s_\psi\right)^3\left[1 - \frac{\tilde{\Lambda}^2}{3}\left(\frac{2}{\tilde{\Lambda}^2}s_\psi\right)^2\right] - \mathcal{C}_{11}\left(\frac{2}{\tilde{\Lambda}^2}s_\psi\right)^3 - \frac{\tilde{\Lambda}^2}{3}r_0^6 + \frac{6G^2M^2}{\tilde{\Lambda}^4} - GM\left(\frac{2}{\tilde{\Lambda}^2}s_\psi\right)^2 r_1 = 0 \tag{3.30}$$

que pode ser resolvida para r_1. Com isso, nosso primeiro horizonte perturbativo para equação (3.26), será

$$r_{1pert} \approx \frac{2}{\tilde{\Lambda}^2}s_\psi + \eta\frac{s_\psi^4\left(-12C\tilde{\Lambda}^2\csc^3\psi + 9G^2\tilde{\Lambda}^6M^2\csc^6\psi - 32\right)}{12\tilde{\Lambda}^2\left(3G\tilde{\Lambda}^2M + 8s_\psi^3 - 4s_\psi\right)}. \tag{3.31}$$

O mesmo pode ser feito para a segunda raiz, equação (1.18), que pode ser substituída

[6] Antes de substituir, é interessante multiplicar toda a equação por r^4, de forma a tiramos a variável do denominador.

na equação[7] (3.29), onde teremos

$$3r_2\left(\frac{\sqrt{3}}{\tilde{\Lambda}^2}c_\psi - \frac{1}{\tilde{\Lambda}^2}s_\psi\right)^3\left[1-\frac{\tilde{\Lambda}^2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{\tilde{\Lambda}^2}c_\psi - \frac{1}{\tilde{\Lambda}^2}s_\psi\right)^2\right] - \mathcal{C}_{11}\left(\frac{\sqrt{3}}{\tilde{\Lambda}^2}c_\psi - \frac{1}{\tilde{\Lambda}^2}s_\psi\right)^3 +$$
$$-\frac{\tilde{\Lambda}^2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{\tilde{\Lambda}^2}c_\psi - \frac{1}{\tilde{\Lambda}^2}s_\psi\right)^6 + \frac{6G^2M^2}{\tilde{\Lambda}^2} - GM\left(\frac{\sqrt{3}}{\tilde{\Lambda}^2}c_\psi - \frac{1}{\tilde{\Lambda}^2}s_\psi\right)^2 r_2 = 0. \quad (3.32)$$

Esta equação pode ser resolvida para r_2 que está associada a segunda raiz de ordem zero. Assim, a segunda raiz perturbativa encontrada para a equação (3.26), será

$$\begin{aligned} r_{2pert} &\approx \frac{\sqrt{3}}{\tilde{\Lambda}^2}c_\psi - \frac{1}{\tilde{\Lambda}^2}s_\psi + \quad (3.33)\\ &+ \eta\frac{C_{11}\left(\sqrt{3}c_\psi/\tilde{\Lambda}^2 - s_\psi/\tilde{\Lambda}^2\right)^3 - 6G^2M^2/\tilde{\Lambda}^2 + (1/3)\tilde{\Lambda}^4\left(\sqrt{3}c_\psi)/\tilde{\Lambda}^2 - s_\psi/\tilde{\Lambda}^2\right)^6}{-6GM\left(\sqrt{3}c_\psi/\tilde{\Lambda}^2 - s_\psi/\tilde{\Lambda}^2\right)^2 - 2\tilde{\Lambda}^4\left(\sqrt{3}c_\psi/\tilde{\Lambda}^2 - s_\psi/\tilde{\Lambda}^2\right)^5 + 4\left(\sqrt{3}c_\psi/\tilde{\Lambda}^2 - s_\psi/\tilde{\Lambda}^2\right)^3}. \end{aligned}$$

Portanto, temos as raízes perturbativas encontradas até primeira ordem em perturbação em torno das raízes da relatividade geral para a solução da gravidade induzida no vácuo e truncada em primeira ordem em η. Assim, a primeira raiz, equação (3.31), é o horizonte de evento corrigido pela gravidade induzida. Da mesma forma temos o horizonte cosmológico, equação (3.33), com o termo de correção em primeira ordem.

3.1.4 Explorando algumas informações extras das equações de campo da gravidade induzida

Esta seção, tem como objetivo estudar, basicamente, o efeito do termo de Riemann quadrado na equação (3.1). Sabemos que, quando multiplicamos toda equação por $\tilde{\Lambda}^2$ o setor de Riemann quadrado se torna muito pequeno em relação a parte de Einstein. Por outro lado, podemos extrair novas informações sobre o impacto do termo de Riemann quadrado na equação de campo da gravidade induzida, alterando a constante cosmológica gravitacional.

Desta forma, comecemos fazendo $\tilde{\Lambda} = 0$ na equação (3.1)

$$R^\mu{}_\nu - \frac{1}{2}R\delta^\mu{}_\nu + \frac{3}{8\Lambda^2}\left(R^{\alpha\beta\sigma\tau}R_{\alpha\beta\sigma\tau}\delta^\mu{}_\nu - 2R^{\alpha\beta\sigma\mu}R_{\alpha\beta\sigma\nu}\right) = 0. \quad (3.34)$$

Esta equação oferece a seguinte solução

$$e^{-2\beta} = 1 - \frac{2}{3}\Lambda^2 r^2. \quad (3.35)$$

[7] Estamos fazendo a troca $r_1 \longleftrightarrow r_2$ na equação (3.29), por motivos de clareza. É uma questão de notação somente.

Ou seja, temos um espaço-tempo de Sitter altamente curvo. Isso significa que o peso do setor de Riemann quadrado influencia na equação de Einstein como o peso de uma constante cosmológica renormalizada, Λ^2.

Por outro lado, consideremos agora uma constante cosmológica gravitacional como sendo $\tilde{\Lambda}^2 + \eta\tilde{\Lambda}^2$, ou seja, considerando uma pequena perturbação na constante cosmológica, $\tilde{\Lambda}^2$. Desta forma, temos

$$R^{\mu}{}_{\nu} - \frac{1}{2}R\delta^{\mu}{}_{\nu} + (\tilde{\Lambda}^2 + \eta\tilde{\Lambda}^2) + \frac{3}{8\Lambda^2}\left(R^{\alpha\beta\sigma\tau}R_{\alpha\beta\sigma\tau}\delta^{\mu}{}_{\nu} - 2R^{\alpha\beta\sigma\mu}R_{\alpha\beta\sigma\nu}\right) = 0, \tag{3.36}$$

que possui a seguinte solução

$$e^{-2\beta} = 1 - \frac{1}{3}\tilde{\Lambda}^2 r^2. \tag{3.37}$$

Portanto, essa modificação na equação de campo da gravidade induzida produz uma solução de de Sitter. Ou seja, o termo $\eta\tilde{\Lambda}^2$ compensa, de certa forma, o termo de Riemann quadrado para gerar uma solução de espaço-tempo de de Sitter.

Note que as soluções que estamos utilizando, equações (3.35) e (3.37), são as soluções de ordem zero em perturbação, das soluções (3.24) e (3.25). Ou seja, quando fazemos modificações nas equações de campo da gravidade induzida, temos como soluções o caso limite das soluções exatas das equações de campo originais, i.e., equação (3.1).

3.2 Solução para um fonte carregada

Nesta seção, discutiremos outra solução estática e esfericamente simétrica associada a uma fonte de carregada. Tal solução, no caso da teoria da relatividade geral, é descrita pela geometria de Reissner - Nordström - de Sitter. Para isso, estudaremos as equações de campo da gravidade induzida associada a uma distribuição de matéria-energia, que são dadas por

$$R^{\mu}{}_{\nu} - \frac{1}{2}R\delta^{\mu}{}_{\nu} + \tilde{\Lambda}^2\delta^{\mu}{}_{\nu} + \frac{3}{4\Lambda^2}\left(R^{\alpha\beta\sigma\tau}R_{\alpha\beta\sigma\tau}\delta^{\mu}{}_{\nu} - 2R^{\alpha\beta\sigma\mu}R_{\alpha\beta\sigma\nu}\right) = 8\pi G T^{\mu}{}_{\nu} \tag{3.38}$$

$$\frac{1}{\Lambda^2}\nabla_{\alpha}R^{\alpha}{}_{\beta\mu\nu} = 0.$$

Desta forma, estamos interessados em estudar tais equações de campo associadas ao tensor energia-momento do eletromagnetismo de Maxwell dado pela equação (1.20). Assim, usaremos todas as contas já discutidas neste trabalho, associadas a geometria (1.5), e combinaremos a fonte discutida no Capítulo 1, equação (1.29). Portanto, as componentes, tt, rr e $\theta\theta$ da equação (3.38), serão, respectivamente

$$\frac{3}{4\Lambda^2}\left[\left(\frac{\partial_r e^{-2\beta}}{r}\right)^2 + 2\left(\frac{1-e^{-2\beta}}{r^2}\right)^2\right] + \tilde{\Lambda}^2 + \frac{\partial_r e^{-2\beta}}{r} - \frac{(1-e^{-2\beta})}{r^2} = -G\frac{Q^2}{r^4}, \tag{3.39}$$

$$\frac{3}{4\Lambda^2}\left[\left(\frac{2e^{-2\beta}\partial_r\alpha}{r}\right)^2+2\left(\frac{1-e^{-2\beta}}{r^2}\right)^2\right]+\tilde{\Lambda}^2+\frac{2e^{-2\beta}\partial_r\alpha}{r}-\frac{(1-e^{-2\beta})}{r^2}=G\frac{Q^2}{r^4}, \quad (3.40)$$

$$\frac{3}{4\Lambda^2}\{2e^{-4\beta}[\partial_r\alpha\partial_r\beta-\partial_r^2\alpha-(\partial_r\alpha)^2]^2+2(e^{-2\beta}\partial_r\alpha)^2r^{-2}+2r^{-2}(e^{-2\beta}\partial_r\beta)^2\}+$$
$$\tilde{\Lambda}^2+e^{-2\beta}[\partial_r^2\alpha+(\partial_r\alpha)^2+r^{-1}(\partial_r\alpha-\partial_r\beta)-\partial_r\alpha\partial_r\beta]=G\frac{Q^2}{r^4}. \quad (3.41)$$

Assim, da mesma forma que para o caso de vácuo, podemos empregar o método perturbativo para o obter uma solução perturbativa para as equações de campo da gravidade induzida. Desta forma, a equação perturbativa a ser resolvida para este caso, será a mesma para o vácuo, equação (3.9), agora acoplado com a fonte $-GQ^2/r^4$ (equação 3.39). Logo, ao substituirmos a solução (3.10) na equação[8] (3.39), teremos o mesmo conjunto de equações obtidas para o vácuo, equações (3.11), (3.12), (3.13), com exceção da primeira, todas serão exatamente as mesmas. Onde teremos

$$-\tilde{\Lambda}^4+\tilde{\Lambda}^2\frac{f_0(r)}{r^2}+\tilde{\Lambda}^2\frac{f_0'(r)}{r} = -G\frac{Q^2}{r^4}\tilde{\Lambda}^2, \quad (3.42)$$

$$\eta\left[-\frac{3{f_0}^2(r)}{r^4}+\tilde{\Lambda}^2\frac{f_1(r)}{r^2}-\frac{3f_0'^2(r)}{2r^2}+\tilde{\Lambda}^2\frac{f_1'(r)}{r}\right] = 0, \quad (3.43)$$

$$\eta^2\left[-\frac{6f_0(r)f_1(r)}{r^4}+\tilde{\Lambda}^2\frac{f_2(r)}{r^2}-\frac{3f_0'(r)f_1'(r)}{r^2}+\tilde{\Lambda}^2\frac{f_2'(r)}{r}r\right] = 0. \quad (3.44)$$

A equação (3.42) nos dá a solução[9] de Reissner-Nordström-de Sitter, como era de se esperar,

$$f_0(r)=\frac{2GM}{r}-\frac{GQ}{r^2}+\frac{\tilde{\Lambda}^2r^2}{3}. \quad (3.45)$$

Da mesma forma feito para o vácuo, devemos substituir a solução de ordem zero em perturbação, $f_0(r)$, na equação de primeira ordem em perturbação, equação (3.43), onde obteremos a solução $f_1(r)$. Com a solução $f_0(r)$ e $f_1(r)$ em mãos, devemos substituir na equação (3.44) que nos fornecerá a solução $f_2(r)$. Esse processo pode ser feito para tantas quantas forem as ordens em perturbação que desejarmos. Portanto, a solução perturbativa para a equação (3.39), será, até a segunda ordem

$$\begin{aligned} e^{-2\beta} \approx\ & \left(1+\frac{GQ}{r^2}-\frac{r^2\tilde{\Lambda}^2}{3}-\frac{2GM}{r}\right)+ \quad (3.46)\\ -\ & \eta\left(-\frac{C_{11}}{r^2}-\frac{C_{12}}{r^6}+\frac{r^2\tilde{\Lambda}^2}{3}+\frac{C_{13}}{r^5}-\frac{C_{14}}{r^4}+\frac{C_{15}}{r}\right)+\\ -\ & \eta^2\left(-\frac{C_{21}}{r^2}-\frac{C_{22}}{r^{10}}-\frac{C_{23}}{r^6}+\frac{2r^2\tilde{\Lambda}^2}{3}+\frac{C_{24}}{r^9}-\frac{C_{25}}{r^8}+\frac{C_{26}}{r^7}-\frac{C_{27}}{r^4}+\frac{C_{28}}{r^5}+\frac{C_{29}}{r}\right)\end{aligned}$$

[8]Lembrando que devemos multiplicar toda a equação (3.39) por $\tilde{\Lambda}^2$.
[9]Lembrando que $f(r)=1-e^{-2\beta}$.

onde C_{kl}, de modo que $k = 1, 2$ e $l = 1, 2, ..., 9$, são constantes que envolvem G, Q, constantes de integração, e podem ser obtidas no Apêndice deste trabalho, enquanto C_{15} e C_{29} são constantes de integração.

Portanto, temos uma solução perturbativa em torno da solução de Reissner - Nordström - de Sitter para a teoria de gravidade induzida. Fisicamente tal solução representa um campo gravitacional produzido por uma fonte eletricamente carregada. Por outro lado, não foi encontrado nenhuma solução exata para este caso.

3.3 Solução para um fluido perfeito e equação de equilíbrio hidrostático

Nesta seção, iremos discutir expressões para uma solução estática e esfericamente simétrica associada ao tensor energia-momento de um fluido perfeito, equação (1.40). Além disso, veremos que analisando as equações de campo associadas a uma geometria estática e esfericamente simétrica, poderemos obter uma equação de equilíbrio hidrostático para a densidade de energia, $\rho(r)$, e a pressão, $p(r)$.

Geometria dentro de uma estrela

Como dito antes, iremos estudar uma solução para dentro de uma estrela representada por um fluido perfeito e associado ao tensor energia-momento (1.40). Logo, da mesma forma que nas outras seções, utilizaremos a geometria estática e esfericamente simétrica dada através do elemento de linha (1.5) e substituiremos na equação (3.38) que estará associada às componentes do tensor energia-momento (1.40). Desta forma, as componentes da equação (3.38) para tt, rr e $\theta\theta$, serão respectivamente

$$\frac{3}{4\Lambda^2}\left[\left(\frac{\partial_r e^{-2\beta}}{r}\right)^2 + 2\left(\frac{1-e^{-2\beta}}{r^2}\right)^2\right] + \tilde{\Lambda}^2 + \frac{\partial_r e^{-2\beta}}{r} - \frac{(1-e^{-2\beta})}{r^2} = -G8\pi\rho(r), \tag{3.47}$$

$$\frac{3}{4\Lambda^2}\left[\left(\frac{2e^{-2\beta}\partial_r\alpha}{r}\right)^2 + 2\left(\frac{1-e^{-2\beta}}{r^2}\right)^2\right] + \tilde{\Lambda}^2 + \frac{2e^{-2\beta}\partial_r\alpha}{r} - \frac{(1-e^{-2\beta})}{r^2} = 8\pi G p(r), \tag{3.48}$$

$$\begin{aligned}\frac{3}{4\Lambda^2}\{2e^{-4\beta}[\partial_r\alpha\partial_r\beta - \partial_r^2\alpha - (\partial_r\alpha)^2]^2 + 2(e^{-2\beta}\partial_r\alpha)^2 r^{-2} + 2r^{-2}(e^{-2\beta}\partial_r\beta)^2\} + \\ \tilde{\Lambda}^2 + e^{-2\beta}[\partial_r^2\alpha + (\partial_r\alpha)^2 + r^{-1}(\partial_r\alpha - \partial_r\beta) - \partial_r\alpha\partial_r\beta] = G8\pi p(r).\end{aligned} \tag{3.49}$$

Assim, podemos usar o método perturbativo, para encontrar uma solução para equação (3.47). Logo, ao substituirmos a solução (3.10) na equação[10] (3.47), iremos encontrar as mesmas equações encontradas para o vácuo, equações (3.11), (3.12) e (3.13), exceto

[10]Lembrando que temos que multiplicar por $\tilde{\Lambda}^2$ toda a equação (3.47) antes.

a de ordem zero estará acoplada com a fonte $-G\pi\rho(r)$. Portanto, para o fluido perfeito, teremos

$$\begin{aligned} -\tilde{\Lambda}^4 + \tilde{\Lambda}^2 \frac{f_0(r)}{r^2} + \tilde{\Lambda}^2 \frac{f_0'(r)}{r} &= -G\pi\rho(r)\tilde{\Lambda}^2, \quad (3.50) \\ \eta\left[-\frac{3{f_0}^2(r)}{r^4} + \tilde{\Lambda}^2 \frac{f_1(r)}{r^2} - \frac{3f_0'^2(r)}{2r^2} + \tilde{\Lambda}^2 \frac{f_1'(r)}{r} \right] &= 0, \quad (3.51) \\ \eta^2\left[-\frac{6f_0(r)f_1(r)}{r^4} + \tilde{\Lambda}^2 \frac{f_2(r)}{r^2} - \frac{3f_0'(r)f_1'(r)}{r^2} + \tilde{\Lambda}^2 \frac{f_2'(r)}{r} r \right] &= 0. \quad (3.52) \end{aligned}$$

Assim, a equação de ordem zero em perturbação, Eq. (3.50), nos dará a solução já discutida no Capítulo 1, ou seja,

$$f_0(r) = \frac{2Gm(r)}{r} + \frac{\tilde{\Lambda}^2 r^2}{3}, \quad (3.53)$$

onde

$$m(r) = \int_0^r 4\pi\rho r^2 dr. \quad (3.54)$$

Dessa maneira, podemos achar a solução de primeira ordem em perturbação, $f_1(r)$, substituindo a solução (3.53) na equação (3.51). Com as soluções $f_0(r)$ e $f_1(r)$ em mãos, podemos substituir na equação de segunda ordem em perturbação, e assim por diante. Nesta seção, só iremos até primeira ordem em perturbação por conta da extensão das expressões encontradas. Logo, a solução para equação (3.47), até primeira ordem em perturbação será

$$\begin{aligned} e^{-2\beta} &= \left(1 - \frac{2Gm(r)}{r} - \frac{\tilde{\Lambda}^2 r^2}{3}\right) - \\ &+ \eta\frac{1}{r}\int \left\{ -\frac{1}{2\tilde{\Lambda}^2 r^4} \left\{18G^2 m(r)^2 - 12Grm(r)\left[1 + 4\pi G\rho(r)r^2\right] + \right.\right. \\ &+ \left.\left. r^2\left[3 - 2\tilde{\Lambda}^2 r^2 + \tilde{\Lambda}^4 r^4 + 16\pi G\tilde{\Lambda}^2\rho(r)r^4 + 96\pi^2 G^2\rho(r)^2 r^4\right]\right\}\right\} dr \end{aligned} \quad (3.55)$$

onde $m(r)$ é o mesmo da (3.54). Assim, temos uma expressão para a solução perturbativa da equação (3.47) até primeira ordem. Por outro lado, para acharmos uma expressão para $\alpha'(r)$, como feito no Capítulo 1, devemos usar neste caso, teoria de perturbação para a variável α também. Assim, a solução perturbativa em primeira ordem será escrita como

$$\alpha(r) = \alpha_0(r) + \eta\alpha_1(r), \quad (3.56)$$

e, sua derivada em relação a r, será

$$\alpha'(r) = \alpha_0'(r) + \eta\alpha_1'(r). \quad (3.57)$$

Substituindo as soluções (3.55) e (3.57) na equação (3.49) teremos uma equação diferencial que poderá ser resolvida para cada ordem em perturbação. Assim, a ordem zero nos oferece a seguinte equação diferencial

$$\tilde{\Lambda}^4 + \frac{\tilde{\Lambda}^2\left(e^{-2\beta}-1\right)}{r^2} + \frac{2\tilde{\Lambda}^2 e^{-2\beta}\alpha_0'}{r} = 8\pi G\tilde{\Lambda}^2 p(r), \tag{3.58}$$

enquanto o termo de primeira ordem será

$$\eta\left(\frac{3\left(1-e^{-2\beta}\right)^2}{r^4} + \frac{6e^{-4\beta}{\alpha_0'}^2}{r^2} + \frac{2\tilde{\Lambda}^2 e^{-2\beta}\alpha_1'}{r}\right) = 0. \tag{3.59}$$

Assim, a equação (3.58) produz uma expressão para $\alpha_0'(r)$ conhecida da relatividade geral, equação (1.51), como era de se esperar

$$\alpha_0' = \frac{-3Gm(r) + r^3\tilde{\Lambda}^2 - 12G\pi r^3 p(r)}{r[6Gm(r) - 3r + r^3\tilde{\Lambda}^2]}. \tag{3.60}$$

Logo, podemos substituir o α_0' de ordem zero em perturbação, Eq. (3.60), na equação de primeira ordem em perturbação, Eq. (3.59), e obtermos o α_1'. Assim, nosso $\alpha'(r)$ perturbativo será

$$\alpha'(r) = \frac{-3Gm(r) + r^3\tilde{\Lambda}^2 - 12G\pi r^3 p(r)}{r[6Gm(r) - 3r + r^3\tilde{\Lambda}^2]} + \eta\alpha_1'(r), \tag{3.61}$$

onde

$$\begin{aligned}
\alpha_1'(r) &= \frac{1}{12\tilde{\Lambda}^2 r^4\left[r - 2Gm(r) - \frac{\tilde{\Lambda}^2}{3}r^3\right]^2}\Big\{6\tilde{\Lambda}^2 r^5 f_1(r)\left[-8\pi G r^2 p(r) + \right.\\
&+ \left.\tilde{\Lambda}^2 r^2 - 1\right] - 3\left[r - 2Gm(r) - \frac{\tilde{\Lambda}^2}{3}r^3\right]\Big\{\tilde{\Lambda}^4 r^6 + 48\pi G^2 r^3 m(r)p(r) + \\
&+ 18G^2 m(r)^2 + r^6\left[96\pi^2 G^2 p(r)^2 - 16\pi G\tilde{\Lambda}^2 p(r)\right]\Big\}\Big\},
\end{aligned} \tag{3.62}$$

onde $f_1(r)$ é o termo em primeira ordem em perturbação da solução (3.55), ou seja,

$$\begin{aligned}
f_1(r) &= \frac{1}{r}\int\Big\{-\frac{1}{2\tilde{\Lambda}^2 r^4}\left\{18G^2 m(r)^2 - 12Grm(r)\left[1 + 4\pi G\rho(r)r^2\right] + \right.\\
&+ \left. r^2\left[3 - 2\tilde{\Lambda}^2 r^2 + \tilde{\Lambda}^4 r^4 + 16\pi G\tilde{\Lambda}^2\rho(r)r^4 + 96\pi^2 G^2\rho(r)^2 r^4\right]\right\}\Big\}\, dr.
\end{aligned} \tag{3.63}$$

Portanto, temos as expressões generalizadas para $\beta(r)$ e $\alpha'(r)$ que nos permitem explorar geometrias mais gerais para uma dada densidade de energia, $\rho(r)$, e pressão, $p(r)$

para a gravidade induzida. Fixados $\rho(r)$ e $p(r)$, torna-se possível obter uma geometria esfericamente simétrica para dentro de uma estrela através das equações (3.55) e (3.61). Fisicamente tais soluções representam o campo gravitacional dentro de um modelo de estrela estática e esfericamente simétrica.

Equação de equilíbrio hidrostático

Achar uma expressão para a equação de equilíbrio hidrostático para a gravidade induzida é uma pouco mais trabalhoso[11]. Note que usamos a componente tt da equação de campo da gravidade induzida, para acharmos a solução (3.55). Usamos a segunda componente rr das equações da gravidade induzida junto com a solução (3.55), para acharmos uma expressão para $\alpha'(r)$, Eq. (3.61). Logo, para obtermos uma equação de equilíbrio hidrostático para a gravidade induzida devemos usar os resultados já extraídos das componentes tt e rr combinado com a componente $\theta\theta$ da equações da gravidade induzida. Logo, substituindo a solução (3.55), e a derivada de α, Eq. (3.61), na equação (3.52), obtemos a seguinte equação de equilíbrio hidrostático

$$p'(r) = -\frac{(\rho+p)[-3Gm(r) + r^3\tilde{\Lambda}^2 - 12\pi G r^3 p]}{r[6m(r)G - 3r + r^3\tilde{\Lambda}^2]} + \eta \mathcal{Q}(r) \ , \tag{3.64}$$

onde

$$\mathcal{Q}(r) = \left[\frac{1}{12r^6\left(-3r + \tilde{\Lambda}^2 r^3 + 6Gm(r)\right)^2}\right] \sum_{\ell=0}^{4} G^\ell \mathcal{Q}_\ell(r) \ , \tag{3.65}$$

e os $\mathcal{Q}_0(r)$, $\mathcal{Q}_1(r)$, $\mathcal{Q}_2(r)$, $\mathcal{Q}_3(r)$, $\mathcal{Q}_4(r)$, são respectivamente

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_0(r) &= \tilde{\Lambda}^4 r^{10}\left\{-18 + r^2\left\{18 + \tilde{\Lambda}^2\left[9 + \left(2 - 5r^2\right)\tilde{\Lambda}^2\right]\right\} + \right. \\ &- \left. 6r\left(-3 + \tilde{\Lambda}^2 r^2\right)\left[f_1(r) + r f_1'(r)\right]\right\} \end{aligned} \tag{3.66}$$

[11] Na gravidade induzida, não temos uma conservação do tensor energia-momento, e o setor que não conserva se torna uma expressão matemática grande. Por isso no Capítulo 1 optamos em usar a equação $\theta\theta$ ao invés da equação da conservação. O mesmo será feito aqui, usaremos a componente $\theta\theta$ da equação de campo da gravidade induzida ao invés da equação da conservação do tensor energia-momento, para acharmos uma equação de equilíbrio hidrostático.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Q}_1(r) &= 3\tilde{\Lambda}^2 r^7 \Big(m(r) \Big(-6 \left(\tilde{\Lambda}^2 r^2 + 3 \right) [r f_1'(r) + f_1(r)] + \\
&+ r^2 \left(\tilde{\Lambda}^2 \left(-8\tilde{\Lambda}^2 + (5\tilde{\Lambda}^2 - 72) r^2 + 63 \right) + 72 \right) - 72 \Big) + \\
&+ 4\pi r^3 \Big(2p(r) \Big(3r \left(\tilde{\Lambda}^2 r^2 - 3 \right) f_1'(r) + 6 f_1(r) \left(2\tilde{\Lambda}^2 r^2 - 3 \right) + \\
&+ \tilde{\Lambda}^2 (5\tilde{\Lambda}^2 + 6) r^4 - (\tilde{\Lambda}^2 + 6)(2\tilde{\Lambda}^2 + 3) r^2 + 18 \Big) + \\
&+ \rho(r) \Big(18 f_1(r) \left(\tilde{\Lambda}^2 r^2 - 1 \right) + \\
&+ r^2 \left(\tilde{\Lambda}^2 \left(4\tilde{\Lambda}^2 + (36 - 5\tilde{\Lambda}^2) r^2 - 33 \right) - 36 \right) + 36 \Big) + \\
&+ 12 r \left(r^2 - 1 \right) \left(\tilde{\Lambda}^2 r^2 - 3 \right) p'(r) \Big) \Big) \ ,
\end{aligned} \tag{3.67}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Q}_2(r) &= 18 r^4 \Big(-12\pi r^3 m(r) \Big(2p(r) \Big(-\tilde{\Lambda}^2 r^2 [r f_1'(r) + f_1(r)] + \\
&+ r^2 \left(\tilde{\Lambda}^2 \left(-\tilde{\Lambda}^2 + 2\tilde{\Lambda}^2 r^4 - (\tilde{\Lambda}^2 + 10) r^2 + 7 \right) + 6 \right) - 6 \Big) + \\
&+ 2r \left(r^2 \left(\tilde{\Lambda}^2 \left(2\tilde{\Lambda}^2 r^4 - (\tilde{\Lambda}^2 + 10) r^2 + 4 \right) + 6 \right) + 3 \right) p'(r) + \\
&+ \left(12\tilde{\Lambda}^4 r^6 - 3\tilde{\Lambda}^2 (3\tilde{\Lambda}^2 + 8) r^4 + 2((\tilde{\Lambda}^2 - 1)\tilde{\Lambda}^2 + 6) r^2 + 24 \right) \rho(r) \Big) + \\
&+ 3 m(r)^2 \Big(2\tilde{\Lambda}^2 r^2 [r f_1'(r) + f_1(r)] + \\
&+ r^2 \left(\tilde{\Lambda}^2 \left(2\tilde{\Lambda}^2 + 12\tilde{\Lambda}^2 r^4 - 2(4\tilde{\Lambda}^2 + 15) r^2 - 3 \right) + 12 \right) + 42 \Big) + \\
&+ 16\pi^2 r^6 \Big(2p(r) \Big(\rho(r) \Big(-3\tilde{\Lambda}^2 r^2 f_1(r) + \\
&+ r^2 \left(\tilde{\Lambda}^2 \left(-2(\tilde{\Lambda}^2 - 6) + 3\tilde{\Lambda}^2 r^4 + 2(\tilde{\Lambda}^2 - 9) r^2 \right) + 9 \right) - 9 \Big) + \\
&+ r \left(\tilde{\Lambda}^2 r^2 - 3 \right) \left(\tilde{\Lambda}^2 r^4 - 3r^2 + 3 \right) p'(r) \Big) + \\
&+ p(r)^2 \Big(-6\tilde{\Lambda}^2 r^2 f_1(r) + \\
&+ r^2 \left(\tilde{\Lambda}^2 \left(\tilde{\Lambda}^2 + \tilde{\Lambda}^2 r^4 - 2(\tilde{\Lambda}^2 + 6) r^2 + 15 \right) + 9 \right) - 9 \Big) + \\
&+ r^4 \left(\tilde{\Lambda}^2 r^2 - 3 \right)^2 p'(r)^2 + \\
&+ 2r^3 \left(\tilde{\Lambda}^2 r^2 - 3 \right) \left(\tilde{\Lambda}^2 \left(3r^2 - 1 \right) - 3 \right) \rho(r) p'(r) + \\
&+ \left(r^2 \left(\tilde{\Lambda}^2 \left(\tilde{\Lambda}^2 + 9\tilde{\Lambda}^2 r^4 - (5\tilde{\Lambda}^2 + 18) r^2 \right) + 9 \right) + 9 \right) \rho(r)^2 \Big) \Big) \ ,
\end{aligned} \tag{3.68}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Q}_3(r) &= 54r^3\Big(16\pi^2 r^6 m(r)\Big(2r\Big(6\tilde{\Lambda}^2 r^4 - (\tilde{\Lambda}^2+6)r^2 - 3\Big)\rho(r)p'(r) + \\
&+ 2p(r)\Big(r\Big(4\tilde{\Lambda}^2 r^4 - 3(\tilde{\Lambda}^2+4)r^2 + 15\Big)p'(r) + \\
&+ \Big(4\tilde{\Lambda}^2 + 18\tilde{\Lambda}^2 r^4 - (19\tilde{\Lambda}^2+18)r^2 + 15\Big)\rho(r)\Big) + \\
&+ 4r^4\Big(\tilde{\Lambda}^2 r^2 - 3\Big)p'(r)^2 + \\
&+ p(r)^2\Big(-2\tilde{\Lambda}^2 + 16\tilde{\Lambda}^2 r^4 - (11\tilde{\Lambda}^2+24)r^2 + 3\Big) + \\
&+ 2\Big(\tilde{\Lambda}^2\left(5r^2-1\right) - 9\Big)\rho(r)^2\Big) + \\
&- 12\pi r^3 m(r)^2\Big(2r\Big(5\tilde{\Lambda}^2 r^4 - (\tilde{\Lambda}^2+7)r^2 - 5\Big)p'(r) + \\
&+ 2p(r)\Big(\tilde{\Lambda}^2 + 5\tilde{\Lambda}^2 r^4 - (6\tilde{\Lambda}^2+7)r^2 + 13\Big) + \\
&+ \Big(-2\tilde{\Lambda}^2 + 6\tilde{\Lambda}^2 r^4 + (11\tilde{\Lambda}^2-6)r^2 - 35\Big)\rho(r)\Big) + \\
&+ m(r)^3\Big(-4\tilde{\Lambda}^2 + 36\tilde{\Lambda}^2 r^4 + (37\tilde{\Lambda}^2-36)r^2 - 189\Big) + \\
&- 64\pi^3 r^9 p(r)\Big(2\left(2r^2-1\right)\rho(r)\Big(r\Big(\tilde{\Lambda}^2 r^2 - 3\Big)p'(r) + \\
&+ \Big(-\tilde{\Lambda}^2 + 3\tilde{\Lambda}^2 r^2 - 3\Big)\rho(r)\Big) + p(r)\Big(2r^3\Big(\tilde{\Lambda}^2 r^2 - 3\Big)p'(r) + \\
&+ \Big(2r^2-1\Big)\Big(2\tilde{\Lambda}^2 + 5\tilde{\Lambda}^2 r^2 - 9\Big)\rho(r)\Big) + 2p(r)^2\Big(\tilde{\Lambda}^2 r^4 - 3r^2 + 3\Big)\Big)\Big) \quad ,
\end{aligned} \tag{3.69}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Q}_4(r) &= 162\left(-8\pi r^3 m(r)^3\left(2r^2\left(3r\left(r^2+1\right)p'(r) + 8\rho(r)\right) + \right.\right. \\
&+ \left.\left(6r^4 - 17r^2 - 1\right)p(r) + \rho(r)\right) + \\
&- 128\pi^3 r^9 m(r)p(r)\Big(p(r)\Big(2r^5 p'(r) + \left(1-2r^2\right)^2\rho(r)\Big) + \\
&+ \left(2r^2-1\right)\rho(r)\left(2r^3 p'(r) + \rho(r)\right) + r^2\left(2r^2-3\right)p(r)^2\Big) + \\
&+ 16\pi^2 r^6 m(r)^2\left(4r^6 p'(r)^2 + 4r^3\rho(r)p'(r) + \right. \\
&+ 2p(r)\left(2\left(2r^2-3\right)r^3 p'(r) + \left(6r^4 - r^2 - 2\right)\rho(r)\right) + \\
&+ \left.\left(10r^4 + 4r^2 + 1\right)p(r)^2 + \left(4r^2+1\right)\rho(r)^2\right) + \\
&+ \left.\left(9r^4 + 68r^2 + 1\right)m(r)^4 + 256\pi^4 r^{12} p(r)^2\left(\rho(r) - r^2(p(r) + 2\rho(r))\right)^2\right) \quad .
\end{aligned} \tag{3.70}
$$

Portanto, obtemos uma equação diferencial não linear para a pressão $p(r)$ que é uma perturbação em torno da equação de TOVdS da relatividade geral. Para $\eta = 0$ temos a equação de TOVdS, Eq. (1.52), como era de se esperar. Tal expressão para a densidade de energia e pressão para a gravidade induzida é um equação grande devido a presença do termo de Riemann quadrado na equação de campo. Além do tratamento das expressões das soluções para $\alpha'(r)$ e $e^{-2\beta}$ de modo perturbativo colaborando ainda mais para uma expressão matemática grande. Porém, através equação (3.64) vemos que podemos encontrar uma solução para a pressão[12] perturbativa, como fizemos para os horizontes de eventos da solução para o vácuo. E analisar o quanto o termo de primeira ordem em perturbação da equação (3.64) modificará a pressão calculada através da TOVdS da relatividade geral.

[12] Será necessário ainda uma equação de estado para a densidade de energia e pressão.

Conclusão

Durante o desenvolvimento desse trabalho, discutimos sobre uma teoria de gravidade induzida, com o objetivo de explorarmos alguns de seus aspectos clássicos. Assim, vimos que podemos induzir uma teoria de gravidade efetiva, no regime de baixas energias, a partir de uma teoria de Yang-Mills. Para isso, decompomos o nosso grupo inicial, $SO(5)$, e, explorando as propriedades de liberdade assintótica e o parâmetro de massa da teoria, vimos que no regime de baixas energias, podemos associar os campos de calibre com as propriedades geométricas do espaço-tempo, como a *vierbein* e a conexão de spin, campos fundamentais do formalismo de primeira ordem da gravitação. Surgindo assim, uma teoria clássica para a gravidade. Porém, antes disso, fizemos uma revisão da teoria da relatividade geral, por ser a teoria mais bem sucedida na descrição do fenômeno da gravitação, onde discutimos alguns de seus resultados associados às soluções estáticas e esfericamente simétricas.

Desta forma, tudo isso serviu como base e motivação para estudarmos o principal objetivo deste trabalho que foi explorar as soluções estáticas e esfericamente simétricas para a teoria de gravidade induzida na situação de vácuo e na presença de uma fonte descrita pelo tensor energia-momento. Assim, para a situação de vácuo discutimos uma solução perturbativa e uma solução exata. Fisicamente, encontramos uma configuração de espaço-tempo curvo que é uma deformação em torno da geometria de Schwarzschild - de Sitter. Enquanto a solução exata nos oferece uma forma de espaço-tempo de Sitter com correção na constante que modificará a distância do horizonte de de Sitter. Ainda para este caso, analisamos a solução perturbativa truncada em primeira ordem e vimos como o termo de primeira ordem influencia nos horizontes de eventos e horizontes cosmológicos da relatividade geral. Fisicamente, encontramos horizontes deformados para a gravidade induzida, ou seja, alterados no seu tamanho.

Na presença do tensor energia-momento, discutimos as soluções perturbativas associadas a uma fonte eletricamente carregada e a uma fonte descrita por um tensor energia-momento de um fluido perfeito. Fisicamente temos novamente configurações de espaços-tempos curvos que são deformações das geometrias clássicas da relatividade geral, como a geometria de Reissner - Nordströn - de Sitter e a geometria para dentro de uma estrela. Por fim, vimos que explorando as equações de campo para a gravidade induzida associadas a uma geometria esfericamente simétrica e acoplada ao tensor energia-momento de fluido perfeito, obtemos uma equação de equilíbrio hidrostático para a densidade de energia e a pressão. Tal equação encontrada para a gravidade induzida é uma equação diferencial não linear para pressão, e que é uma perturbação em torno da equação de TOVdS da relatividade geral.

As perspetivas em relação a esse trabalho são a possível busca por soluções exatas para as equações de campo da gravidade induzida na presença do tensor energia-momento e o estudo da geometria tipo Kerr - de Sitter. Além do estudo do teorema de Birkhoff e o estudo do potencial gravitacional associados a tais geometrias. Também podem ser analisados os testes clássicos para a gravidade induzida.

Apêndice

.1 Sobre os formalismos de teorias de gravidade

É importante deixar claro que neste trabalho utilizamos dois formalismos para a descrição da gravidade [19]. No Capítulo 1, por exemplo, foi utilizado o formalismo métrico, ou formalismo de segunda ordem, para tratar a gravidade. Neste formalismo, o tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, é o único campo fundamental da teoria e a conexão afim pode ser descrita como as derivadas do tensor métrico que é identificado pelos símbolos de Christoffel. Por outro lado, o formalismo que considera o tensor métrico, $g_{\mu\nu}$, e a conexão afim, $\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$, como campos fundamentais e independentes é conhecido como formalismo métrico-afim ou formalismo de Palatini e Cartan. Nesse formalismo, as equações de campos são obtidas não só a partir da variação da ação com respeito ao tensor métrico, como também em relação a conexão afim, produzindo dois conjuntos de equações, para a curvatura e torção. O formalismo de primeira ordem, por outro lado, é equivalente ao formalismo de Palatini e Cartan, porém as variáveis são escritas em termos da *vierbein*, e^{a}_{μ}, e conexão de spin, ω^{ab}_{μ}, ao invés do tensor métrico e da conexão afim. O formalismo de primeira ordem foi utilizado na descrição da teoria de gravidade efetiva no Capítulo 2, por exemplo.

No entanto, como nosso trabalho foi estudar o caso particular associado a condição de torção nula, os campos geométricos utilizados para o Capítulo 3, acabaram sendo os mesmos utilizados no Capítulo 1. Isso acontece porque os campos geométricos do formalismo de primeira ordem contém informações da curvatura e da torção. Quando negligenciamos a torção os campos geométricos do formalismo de primeira ordem são equivalentes aos campos geométricos do formalismo de segunda ordem. Portanto, neste apêndice discutiremos os campos geométricos utilizamos no capítulo 1 e 3, a título de recordação.

.1.1 Geometria

Símbolos de Christoffel

Os símbolos de Christoffel estão associados ao transporte paralelo de vetores em espaços curvos. E são matematicamente definidos como

$$\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \tag{71}$$

Tensor de Riemann

A curvatura do espaço-tempo é quantificada pelo tensor de Riemann e está associada a não-comutatividade da derivada covariante. Em um espaço-tempo plano, o tensor de curvatura é nulo. Matematicamente ele é dado por

$$R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^{\rho}_{\nu\sigma} + \Gamma^{\rho}_{\mu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\rho}_{\nu\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\nu\sigma}. \tag{72}$$

Algumas de suas propriedades são

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\mu\nu}, \tag{73}$$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = -R_{\sigma\rho\nu\mu}, \tag{74}$$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = R_{\rho\sigma\nu\mu}. \tag{75}$$

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} = 0. \tag{76}$$

Tensor de Ricci

A contração do tensor de Riemann nos leva ao tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu}. \tag{77}$$

O traço do tensor de Ricci, nos leva ao escalar de curvatura

$$R = R^{\mu}{}_{\nu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \tag{78}$$

.2 Definição das constantes

Estas são as constantes do capítulo três para a solução perturbativa em torno da solução de Reissner - Nordström - de Sitter truncada até a segunda ordem:

$$C_{11} = 2GQ^2, \quad C_{12} = \frac{9G^2Q^4}{5\tilde{\Lambda}^2} \quad C_{13} = \frac{32GMGQ^2}{\tilde{\Lambda}^2}, \quad C_{14} = \frac{32GM^2}{2\tilde{\Lambda}^2}, \tag{79}$$

$$C_{21} = 2GQ^2, \quad C_{22} = \frac{42G^3Q^6}{5\tilde{\Lambda}^4}, \quad C_{23} = \frac{54G^2Q^4}{5\tilde{\Lambda}^2}, \quad C_{24} = \frac{1892GMG^2Q^4}{10\tilde{\Lambda}^4}, \tag{80}$$

$$C_{25} = \frac{1082GM^2GQ^2}{7\tilde{\Lambda}^4}, \quad C_{26} = \frac{92GM^3}{2\tilde{\Lambda}^4}, \quad C_{27} = \frac{32GM\left(2GM + K\right)}{\tilde{\Lambda}^2 r^4}, \tag{81}$$

$$C_{28} = \frac{3\left(42GM + K\right)GQ^2}{\tilde{\Lambda}^2}, \tag{82}$$

onde K é uma constante de integração.

Referências Bibliográficas

[1] Abhay Ashtekar and Jerzy Lewandowski. Background independent quantum gravity: A Status report. *Class. Quant. Grav.*, 21:R53, 2004.

[2] Abhay Ashtekar, Martin Reuter, and Carlo Rovelli. From General Relativity to Quantum Gravity. 2014.

[3] Carlo Rovelli. Covariant loop gravity. *Lect. Notes Phys.*, 863:57–66, 2013.

[4] Petr Horava. Quantum Gravity at a Lifshitz Point. *Phys. Rev.*, D79:084008, 2009.

[5] Petr Horava and Charles M. Melby-Thompson. General Covariance in Quantum Gravity at a Lifshitz Point. *Phys. Rev.*, D82:064027, 2010.

[6] Daniele Vernieri and Thomas P. Sotiriou. Horava-Lifshitz gravity with detailed balance. *J. Phys. Conf. Ser.*, 453:012022, 2013.

[7] J. Polchinski. *String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string*, volume 1. Cambridge, 1998.

[8] J. H. Schwarz M. B. Green and E. Witten. *Superstring Theory. Vol. 1: Introduction*, volume 1 of *Cambridge Monographs On Mathematical Physics*. Cambridge, 1987.

[9] K. S. Stelle. Renormalization of Higher Derivative Quantum Gravity. *Phys. Rev.*, D16:953–969, 1977.

[10] M. Asorey, J. L. Lopez, and I. L. Shapiro. Some remarks on high derivative quantum gravity. *Int. J. Mod. Phys.*, A12:5711–5734, 1997.

[11] Harold Steinacker. Emergent Gravity from Noncommutative Gauge Theory. *JHEP*, 12:049, 2007.

[12] Harold Steinacker. Emergent Geometry and Gravity from Matrix Models: an Introduction. *Class. Quant. Grav.*, 27:133001, 2010.

[13] Carlos Barcelo, Matt Visser, and Stefano Liberati. Einstein gravity as an emergent phenomenon? *Int. J. Mod. Phys.*, D10:799–806, 2001.

[14] A. A. Tomaz. *Uma Teoria de Gravidade Induzida: aspectos quânticos e clássicos.* PhD thesis, Instituto de Física - Universidade Federal Fluminense, 2016.

[15] Chen-Ning Yang and Robert L. Mills. Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance. *Phys. Rev.*, 96:191–195, 1954.

[16] G. 't Hooft, editor. *50 years of Yang-Mills theory.* 2005.

[17] V. A. Rubakov. *Classical theory of gauge fields.* 2002.

[18] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to quantum field theory.* 1995.

[19] A. A. Tomaz A. D. Pereira Jr, R. F. Sobreiro. *Yang-Mills theories and confinement vs. Gravity and geometry.* 13-24 July 2015, $http : //mesonpi.cat.cbpf.br/escola2015/?pgn = Material$. Acessado em 11/08/2016.

[20] Christian G. Bohmer. *General Relativistic Static Fluid Solutions with Cosmological Constant.* PhD thesis, durchgefuhrt am Max-Planck-Institut fur Gravitationsphysik - Albert-Einstein-Institut - in Golm, 2006.

[21] Carroll S. *Spacetime and geometry. An introduction to general relativity.* AW, 2004.

[22] R. d'Inverno. *Introducing Einstein's relativity.* Clarendon Press; Oxford University Press, 1992.

[23] Andrew J. S. Hamilton. *General Relativity, Black Holes, and Cosmology.*

[24] Robert M. Wald. *General relativity.* University of Chicago Press, first edition edition, 1984.

[25] P. A. M. Dirac. *General theory of relativity.* Wiley, 1975.

[26] Andrei Frolov, Valeri P.; Zelnikov. *Introduction to Black Hole Physics.* Oxford University Press, 2011.

[27] A. F. Benevides. *O atraso de Shapiro.* Universidade Fedaral Fluminense. Monografia, 2014.

[28] Avinash Sathaye. Part 3: Cubics, trigonometric methods, and angle trisection, 2016, $http : //www.ms.uky.edu/\ sohum/ma330/files/eqns_3.pdf$. Acessado em 11/08/2016.

[29] Valerio Faraoni (auth.). *Cosmological and Black Hole Apparent Horizons*. Lecture Notes in Physics 907. Springer International Publishing, 2015.

[30] Gulmammad Mammadov. Reissner-nordstrom metric, 2016, *http : //gmammado.mysite.syr.edu/notes/RN$_M$etric.pdf* . Acessado 11/08/2016.

[31] A. D. Rendall and Bernd G. Schmidt. Existence and properties of spherically symmetric static fluid bodies with a given equation of state. *Class. Quant. Grav.*, 8:985–1000, 1991.

[32] R. F. Sobreiro, A. A. Tomaz, and V. J. Vasquez Otoya. Induced gravity from gauge theories. *J. Phys. Conf. Ser.*, 453:012014, 2013.

[33] G. S. A. Sadovski. Cosmologia proveniente de uma teoria de calibre modificada para a gravidade. Master's thesis, Uiversidade Federal Fluminense, 2015.

[34] A. A. Tomaz. Mapeamentos em teorias de calibre da gravidade. Master's thesis, Uiversidade Federal Fluminense, 2012.

[35] F. T. Falciano, G. Sadovski, R. F. Sobreiro, and A. A. Tomaz. Cosmology from a gauge induced gravity. 2015.