



Universidade Federal Fluminense  
Instituto de Física

# Fidelidade em Teoria de Campos

*Rafael dos Santos Silveira*

orientador: *Marco Moriconi*

Niterói, Maio de 2015.



# Fidelidade em Teoria de Campos

*Rafael dos Santos Silveira*

orientador: *Marco Moriconi*

Niterói, Maio de 2015.



2587 Silveira, Rafael dos Santos.  
Fidelidade na teoria de campos / Rafael dos Santos  
Silveira ; orientador: Marco Moriconi. -- Niterói, 2015.  
75 p. : il.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal Fluminense,  
Instituto de Física, 2015.  
Bibliografia: p. 55-58.

1.TEORIA DE CAMPOS (FÍSICA). 2.INFORMAÇÃO QUÂNTICA.  
3.FIDELIDADE (FÍSICA). 4.EQUILÍBRIO TÉRMICO. I.Moriconi,  
Marco, Orientador. I.Universidade Federal Fluminense.  
Instituto de Física, Instituição responsável. III.Título.

CDD 530.143



Dedico esta tese a todos que me suportaram durante este período.



“Vows are spoken

To be broken

Feelings are intense

Words are trivial

Pleasures remain

So does the pain

Words are meaningless

And forgettable”

-Depeche Mode, “Enjoy the Silence”



# Agradecimentos

Agradeço à minha família, por ter me criado;

À Iwata, Sakurai, Aonuma, Fils-Aime, e Garfield, pelo apoio em diversas fases difíceis;

Aos amigos do Cafis-UFRJ, por terem me ajudado no início da universidade;

Aos amigos do IF-UFF, por terem ajudado a terminar a universidade;

Ao Google, por me poupar muito tempo;

Ao meu orientador, pela paciência durante o doutorado;

Ao CNPQ, pelo apoio financeiro;

E à Margarete, por estar comigo em todos momentos e me amar apesar deles.



# Abstract

In this thesis, we present a method to compute the quantum fidelity in field theory. We introduce a replica trick to handle the square roots of operators and apply the method to compute the fidelity for free field theories with different masses. We also show how to apply our method in approximations of interacting theories.



# Resumo

Nesta tese, apresentamos um método para calcular a fidelidade quântica em teoria de campos. Apresentamos um método de réplicas para lidar com as raízes quadradas de operadores e aplicamos o método para calcular a fidelidade para a teoria de campos livres com massas diferentes. Também mostramos como aplicar nosso método em aproximações de teorias interagentes.



# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Informação clássica e quântica	2
1.1.1 Teoria de Shannon	3
1.1.2 Entropia de von Neumann	4
1.2 Decoerência	5
<b>Fidelidade Quântica</b>	<b>7</b>
2.1 Introdução	7
2.2 Misturas quânticas	7
2.3 Matriz densidade em teoria de campos	10
2.4 Fidelidade e misturas quânticas	11
2.5 Formulação de Jozsa-Uhlmann	12
2.6 Exemplo	13
2.7 Propriedades da fidelidade de Jozsa-Uhlmann	15
2.8 Exemplo: Decaimento exponencial	16
2.9 Outras medidas de decoerência	18
<b>Fidelidade em Teoria de campos</b>	<b>23</b>
3.1 Fidelidade em TQC	23
3.2 Extensão analítica: Método da réplica	24
3.3 Método das réplicas	26
3.4 Campo equivalente	27

---

<b>Campo bosônico em 2D</b>	<b>33</b>
4.1 Introdução . . . . .	33
4.2 Campo equivalente . . . . .	34
4.3 Massa equivalente . . . . .	35
4.4 Cálculo da fidelidade . . . . .	38
4.5 Teorema de Gel'fland-Yaglom . . . . .	40
4.6 Análise da fidelidade para campos bosônicos . . . . .	43
<b>Aplicações</b>	<b>47</b>
5.1 Teorias interagentes . . . . .	47
5.2 Fonte externa constante . . . . .	49
<b>Conclusões</b>	<b>51</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>55</b>

# Lista de Figuras

2.1	Função Partição . . . . .	11
2.2	Fidelidade em um caso simples de decaimento exponencial. . . . .	18
2.3	Exemplo do uso da entropia para determinar decoerência. . . . .	20
3.4	Evolução dos campos, aqui mostramos as condições iniciais e finais dos $(2n + 1)n$ campos	
4.5	Fidelidade para diferentes massa. Podemos notar que para massas muito diferentes, a fidelidade	
4.6	Fidelidade para diferentes dimensões de sistema. Para sistemas menores, há mais chances de	
4.7	Fidelidade para diferentes temperaturas. Notamos que interações com reservatórios a altas	

# Introdução

Quando realizamos uma medida, realizamos uma comparação entre algo que conhecemos, e tomamos como padrão, e um objeto cujas características queremos identificar. Dado isso, é possível ter uma ideia do quão importantes as comparações são para movermos o mundo.

Quando pensamos na qualidade de transmissão, queremos que a mensagem recebida seja idêntica à enviada, mas, devido a diversos fatores, pode ocorrer perda de informação enviada. Em geral essa perda se deve basicamente a dois efeitos: perda de informação devido à influência do meio externo, e à falta de recursos para realizar a transmissão [1]. Uma vez que sistemas quânticos têm sido cada vez mais utilizados para transmitir informação, é necessário também criar ferramentas para analisar a qualidade dessa transmissão.

Para estados quânticos puros, esta comparação é simples: basta a projeção no espaço dos estados entre dois sistemas. O mesmo não ocorre para estados referentes a misturas quânticas. É preciso definir uma nova projeção para poder compará-las.

A *Fidelidade* surge como uma proposta para esta comparação, sendo utilizada para medir o comportamento de sistemas reais em relação às suas contrapartes, consideradas ideais. Este tipo de medida já vem sendo utilizadas como medida de qualidade em relação à perda de informação, dada interação com o ambiente em experimentos quânticos [1, 2], teleportação quântica [3,4], e criptografia [5].

Mas para realizar tais comparações, se faz necessário conhecer as matrizes densidades destes sistemas. Estas matrizes, em geral, são conhecidas através de repetidas realizações de um mesmo experimento. Em alguns casos, é possível escrever a matriz densidade analiticamente, como no caso de estados térmicos definidos por uma hamiltoniana micros-

cópica.

Cardy e Calabrese, em seus trabalhos [6,7] trouxeram o conceito de entropia de emaranhamento para a Teoria Quântica de Campos (*TQC*), e abriram as portas para físicos teóricos se aproximarem da informação quântica, um território até então pouco explorado por eles. Nestes trabalhos, o uso de ferramentas já conhecidas pelos “*campistas*”, simplificam o cálculo da entropia quântica em teorias com a simetria conforme [6,7].

Posteriormente, Cardy e Calabrese calcularam a *negatividade* [8,9,10] de um sistema utilizando ferramentas de TQC. A negatividade é uma medida de emaranhamento de um sistema quântico, e é definida como  $\mathcal{N}(\rho) \equiv \sum (|\lambda_i| - \lambda_i) / 2$ , onde  $\lambda_i$  são os autovalores da transposta parcial de  $\rho$ , demonstrando que as ideias apresentadas nos primeiros trabalhos poderiam ser aplicadas além do cálculo da entropia de emaranhamento.

Dado isto, não é difícil imaginarmos outras medidas nas quais podemos utilizar ferramentas teóricas para simplificar a obtenção de seus valores.

Nesta tese apresentamos a fidelidade quântica como ferramenta de comparação entre dois sistemas descritos por misturas quânticas. Após revermos conceitos referentes à fidelidade, apresentaremos nosso método para o cálculo da fidelidade utilizando o método da réplica para lidar com as raízes quadradas que surgem na expressão da fidelidade quântica.

Utilizaremos nosso método no cálculo da fidelidade quântica em sistemas descritos por teorias de campos livres, mas que tenham massas diferentes. Posteriormente mostramos como este resultado pode ser aplicado em teorias interagentes.

## 1.1 Informação clássica e quântica

O estudo da teoria da informação foi iniciado por Claude Shannon em [11], onde ele formulou os fundamentos do assunto. Neste artigo, Shannon mostra que o principal problema em comunicações é reproduzir com exatidão a mensagem enviada no seu local de recebimento, ou que, pelo menos, o mais próximo o possível seja.

A teoria da informação quântica é motivada em boa parte pelo mesmo problema, e a grande diferença está no fato de que tanto a mensagem em si, quanto seu método de

reprodução envolvem efeitos quânticos [12]. Embora o primeiro artigo em teoria clássica da informação tenha sido publicado em 1948, o estudo sistemático da área começou há pouco mais de vinte anos, quando foram abandonados os esforços de usar métodos clássicos para medir e classificar informação em sistemas quânticos.

### 1.1.1 Teoria de Shannon

Shannon [11] apresentou dois teoremas que depois foram generalizados para a teoria quântica da informação. No primeiro teorema, é dada uma fórmula capaz de determinar o máximo que se pode comprimir um sinal aleatório emitido por uma fonte, para que se possa recuperar o sinal original com o máximo de fidelidade [12].

Este teorema afirma que uma fonte  $X$  que emite  $n$  possíveis sinais com probabilidades  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , pode ser reduzida a  $N = (n H(X) + o(n))$  bits e ser restaurada com alta eficiência, onde  $H(X)$  é a *entropia* de Shannon e  $N$  será o próximo número inteiro de bits após  $n H(X)$  após a soma com  $o(n)$ , que garante este ser um valor inteiro. A entropia é dada por

$$H(X) = H(\{p_i\}) = - \sum_{i=1}^n p_i \log_2(p_i). \quad (1.1)$$

O segundo teorema, para situações em que existem limitações físicas fundamentais à transferência de informação (ruído, largura de banda), estabelece a capacidade do canal em transmitir informação. O teorema da codificação de canal, também chamado teorema fundamental da teoria da informação, determina que,  $n$  usos de canal de transmissão  $N$  que apresenta ruído, podem ser transmitidos  $n C - o(n)$  bits com maior eficiência, onde  $C$  é chamada capacidade do canal e é dada por

$$C = \max_{p(X)} I(X; N(X)), \quad (1.2)$$

onde a maximização é feita sobre todas as possíveis distribuições de probabilidade em  $X$  para o envio feito pelo canal,  $N(X)$  para o sinal recebido, dado o envio  $X$ . A informação mútua,  $I(X; Y)$ , é definida por

$$\begin{aligned} I(X; Y) &= H(Y) - H(Y|X) \\ &= H(X) + H(Y) - H(X, Y), \end{aligned} \quad (1.3)$$

onde  $H(X, Y)$  é a entropia dada pela distribuição conjunta de  $X$  e  $Y$ , e  $H(Y|X)$  é chamada entropia condicional de  $Y$ , dado  $X$ , e é dada pela expressão

$$H(Y|X) = \sum_i p_{X=X_i} H(Y|X = X_i). \quad (1.4)$$

A informação mútua é uma medida da quantidade de informação que uma variável aleatória contém acerca da outra. Por exemplo, no caso de duas variáveis aleatórias independentes  $X$  e  $Y$ , de probabilidades  $p(x)$  e  $p(y)$ ,  $p(x, y) = p(x) \cdot p(y)$ , a informação mútua resultaria em 0 como seria esperado.

### 1.1.2 Entropia de von Neumann

Sendo argumentos termodinâmicos, envolvendo o aumento da entropia associada ao trabalho realizado por um sistema, von Neumann foi capaz de deduzir o equivalente à entropia de informação para um sistema quântico, a entropia de von Neumann [12]. Dado um sistema quântico descrito pela matriz densidade  $\rho$ , sua entropia é dada por

$$S(\rho) = -Tr[\rho \log_2 \rho]. \quad (1.5)$$

Lembrando que  $\rho$  é um operador positivo definido, mostra-se que  $-Tr[\rho \log_2 \rho]$  é uma grandeza bem definida. As demais propriedades para matrizes densidade e misturas quânticas serão apresentadas posteriormente neste trabalho. No caso de  $\rho$  ser descrita em sua base de autovetores, com autovalores  $\lambda_i$ , ela é diagonal, assim como a matriz  $(-\rho \log_2 \rho)$  com autovalores  $(-\lambda_i \log_2 \lambda_i)$ , de forma que para este caso,

$$S(\rho) = H(\{\lambda_i\}), \quad (1.6)$$

dado que  $Tr(\rho) = 1$ .

## 1.2 Decoerência

Na mecânica quântica, a decoerência quântica é a perda da coerência ou do ordenamento das fases entre componentes de um sistema em uma superposição quântica. Esta perda não evita que diferentes elementos na superposição quântica da função de onda conjunta ambiente e sistema interfiram entre si. E este efeito é uma das origens do *colapso da função de onda*.

A decoerência[13], traz diversas implicações na implementação da informação quântica em computadores quânticos reais. A principal, é que sistemas quânticos reais nunca estão completamente isolados do meio externo, mas sim imersos e interagindo continuamente com o meio. Esta área estuda, a partir do formalismo padrão da mecânica quântica, a formação de correlações entre o sistema quântico e meio externo, e muitas vezes, o efeito supressor que a interação com o meio traz sobre o sistema quântico.

Sistemas podem perder informação para o meio através das mais diversas interações. Este tipo de estudo foi iniciado por Zurek em um artigo publicado em 1991 [14] no qual ele relaciona perda de informação nas medidas causada por interações com o meio externo. Em [15], Zurek mostra que, ao contrário de sistemas clássicos, em sistemas quânticos as interações externas não podem ser desconsideradas ao se realizar uma medida.

Em sistemas quânticos isolados, a evolução é dada por operadores unitários, ou seja, estados puros permanecem puros. Mas ao interagir com o meio externo, a pureza do sistema, em geral, é perdida ao longo da sua evolução temporal. Esta influência do meio pode se dar na forma de acoplamento com seus graus de liberdade ou devido a hamiltoniana de interação do sistema quântico com o ambiente.



# Fidelidade Quântica

## 2.1 Introdução

Sistemas puros na mecânica quântica são aqueles que podem ser representados através de raio pertencente a um espaço de Hilbert, estando contida toda informação no elemento que chamamos *estado do sistema*. O primeiro postulado da mecânica quântica dita que toda informação de um sistema quântico está definida, em um tempo específico  $t_0$ , por um raio  $|\psi(t_0)\rangle$  pertencente ao espaço dos estados.

Assim como vetores de um mesmo espaço vetorial, a comparação entre dois sistemas puros pode ser realizada através do produto escalar entre os estados correspondentes a cada um deles. Sejam  $|\phi\rangle$  e  $|\psi\rangle$  dois estados pertencentes a um mesmo espaço de Hilbert. Podemos, por exemplo, compará-los por meio de

$$\langle\phi|\psi\rangle = \int dA \langle\phi|A\rangle \langle A|\psi\rangle = \int dA \phi(A) \psi(A), \quad (2.1)$$

onde  $|A\rangle$  são estados conhecidos do sistema, tais como posição ou momento linear, e  $\phi(A)$  e  $\psi(A)$ , as projeções dos sistemas nesses estados.

## 2.2 Misturas quânticas

Diferente de estados puros, que podem ser descritos na forma  $|\Psi\rangle = \sum_i \alpha_i |\psi_i\rangle$ , onde  $|\psi_i\rangle$  formam uma base de estados de propriedades conhecidas, *misturas quânticas* representam ensembles estatísticos para o sistema e são descritas utilizando matrizes densidades, usualmente representadas por  $\rho$  [17][18]. Estes estados mistos podem ser escritos como uma soma ponderada de matrizes densidades correspondentes a estados puros

$$\rho = \sum_i p_i \rho_i^{(puro)} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \quad (2.2)$$

com  $\sum_i p_i = 1$ , isto representa que o sistema tem probabilidade  $p_i$  de ser encontrado no estado  $|\psi_i\rangle$ .

Dado um observável qualquer  $A$  do sistema, seu valor esperado dentro do ensemble é dado pela soma ponderada por  $p_i$  dos valores esperados de  $A$  em cada um dos estados puros  $|\psi_i\rangle$ . Sendo assim,

$$\langle A \rangle_\rho = \sum_i p_i \langle\psi_i| A |\psi_i\rangle = Tr[\rho A]. \quad (2.3)$$

A matriz densidade apresenta as seguintes propriedades:

1.  $Tr[\rho] = 1$ ;
2.  $Tr[\rho^2] \leq 1$ , sendo igual a 1 se, e somente se,  $\rho = \rho_{puro} = |\psi\rangle\langle\psi|$ ;
3.  $\langle A \rangle_\rho = Tr[\rho A]$ ;
4.  $\rho$  é um operador hermitiano;
5. seus autovalores são não-negativos e representam a probabilidade de encontrar o sistema em um dado estado;
6. satisfaz a equação de von Neumann,  $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho = [H, \rho]$ , onde  $H$  é o hamiltoniano que descreve o sistema;
7. no caso de sistemas compostos, pertencentes ao espaço  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , o estado pode ser escrito através do estado  $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$ , onde  $\rho_A$  e  $\rho_B$  representam cada um dos subsistemas e são dados pelos traços parciais do sistema

$$\rho_A = Tr_B[\rho_{AB}], \quad \rho_B = Tr_A[\rho_{AB}]. \quad (2.4)$$

Existe uma maneira pela qual estados mistos podem ser representados através de estados puros, a chamada *Purificação de Schmidt* [19]. Suponhamos que o estado  $\rho_A$  representa o estado de um sistema quântico. Para este sistema há uma representação diagonal

$$\rho_A = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|, \quad (2.5)$$

onde os estados  $\{|\psi_i\rangle\}$  formam uma base ortonormal para o espaço  $\mathcal{H}_A$ . Podemos introduzir um segundo sistema descrito pelo espaço  $\mathcal{H}_B$ , que será uma cópia do espaço de Hilbert  $\mathcal{H}_A$ , com uma base ortonormal  $\{|\phi_i\rangle\}$ . Podemos definir um estado puro para o sistema composto  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ , da seguinte maneira

$$|\psi\phi\rangle \equiv \sum_i \sqrt{p_i} |\psi_i\rangle \otimes |\phi_i\rangle. \quad (2.6)$$

Dessa forma ao tomarmos o traço parcial no espaço  $\mathcal{H}_B$  neste estado  $|\psi\phi\rangle$  recuperamos a matriz densidade  $\rho_A$ . O sistema  $B$ , que não possui interpretação física, pode ser chamado de um *sistema de referência*, sendo apenas uma ferramenta matemática para a purificação.

Podemos demonstrar facilmente a validade desta representação,

$$\begin{aligned} Tr_B[\rho_{AB}] &= Tr_B[|\psi\phi\rangle\langle\psi\phi|] \\ &= \sum_{ij} \sqrt{p_i p_j} |\psi_i\rangle\langle\psi_j| Tr[|\phi_i\rangle\langle\phi_j|] \\ &= \sum_{ij} \sqrt{p_i p_j} |\psi_i\rangle\langle\psi_j| \delta_{ij} \\ &= \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \\ &= \rho_A, \end{aligned} \quad (2.7)$$

de forma que o traço parcial no espaço  $\mathcal{H}_B$  nos fornece novamente a matriz densidade original  $\rho_A$ .

Um caso importante é o de estados assintóticos [6][7], ou seja  $t \rightarrow \infty$ , onde já ocorreu a termalização do sistema, de modo que este se encontrará em equilíbrio térmico a temperatura  $T$  com um possível reservatório e a matriz densidade parcial do sistema, excluindo o reservatório, deve ser próxima a

$$\rho \rightarrow \frac{e^{-\beta\hat{H}_s}}{Z}, \quad (2.8)$$

onde,  $\beta = 1/k_B T$ ,  $Z \equiv Tr[e^{-\beta\hat{H}_s}]$  a função partição, e  $\hat{H}_s$  é a hamiltoniana do sistema

quântico.

## 2.3 Matriz densidade em teoria de campos

Para descrever a matriz densidade utilizando a teoria quântica de campos para sistemas bosônicos que interajam com um reservatório térmico [6][7], começamos discretizando o espaço, criando assim, uma coleção de sítios, rotulados pela variável discreta  $\vec{x}$ , que determina a posição espacial do sítio. Podemos tratar, assim, problemas com domínios de espaços finitos, semi-infinitos ou infinitos. Mantemos o tempo como contínuo.

Denotamos como  $\{\hat{\phi}_{\vec{x}}\}$  um conjunto de observáveis locais e comutantes entre si, com autovalores  $\{\phi_{\vec{x}}\}$  e autoestados  $\{|\phi_{\vec{x}}\rangle\}$ , caracterizados pela posição na rede  $\vec{x}$ . Os estados produtos  $|\prod_{\vec{x}}\{\phi_{\vec{x}}\}\rangle \equiv \otimes_{\vec{x}}|\phi_{\vec{x}}\rangle$  formam uma base para o sistema com dinâmica descrita pela hamiltoniana  $\hat{H}$ .

Por exemplo, poderíamos considerar o campo fundamental de uma teoria bosônica na rede ou, no caso fermiônico, podemos tratar de uma das componentes do spin em particular. Então o estado assintótico deste sistema poderá ser descrito como

$$\rho \rightarrow \frac{e^{-\beta\hat{H}_S}}{Z}, \quad (2.9)$$

cujos elementos são dados na base  $\{|\prod_{\vec{x}}\{\phi_{\vec{x}}\}\rangle\}$  por

$$\rho \left[ \prod_{\vec{x}}\{\phi_{\vec{x}}\}, \prod_{\vec{x}'}\{\phi_{\vec{x}'}\} \right] = \langle \prod_{\vec{x}}\{\phi_{\vec{x}}\} | \rho | \prod_{\vec{x}'}\{\phi_{\vec{x}'}\} \rangle = \frac{1}{Z(\beta)} \langle \prod_{\vec{x}}\{\phi_{\vec{x}}\} e^{-\beta\mathcal{H}} | \prod_{\vec{x}'}\{\phi_{\vec{x}'}\} \rangle \quad (2.10)$$

que pode ser escrita através de uma integral funcional com condições de configurações inicial e final  $|\prod_{\vec{x}'}\{\phi_{\vec{x}'}\}\rangle$  e  $|\prod_{\vec{x}}\{\phi_{\vec{x}}\}\rangle$  respectivamente. Temos

$$\rho \left[ \prod_{\vec{x}}\{\phi_{\vec{x}}\}, \prod_{\vec{x}'}\{\phi_{\vec{x}'}\} \right] = \frac{1}{Z(\beta)} \int [D\phi] \delta \left\{ \phi(y, 0) - \prod_{\vec{x}'}\{\phi_{\vec{x}'}\} \right\} \times \delta \left\{ \phi(y, \tau) - \prod_{\vec{x}}\{\phi_{\vec{x}}\} \right\} e^{-S_E[\phi]}, \quad (2.11)$$

onde  $S_E = S_E[\prod_{\vec{x}}\{\phi_{\vec{x}}\}, \partial_\mu \prod_{\vec{x}}\{\phi_{\vec{x}}\}] = \int_0^\beta \mathcal{L} d\tau$  é a ação do sistema e  $\mathcal{L}$  sua lagrangiana. O

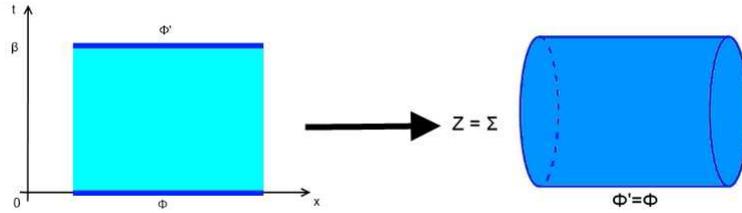


Figura 2.1: Função Partição

conjunto de deltas indica a necessidade de realizar a comparação sítio a sítio da configuração do sistema. A função de partição  $Z[\beta]$ , responsável pela normalização que assegura que  $Tr[\rho] = 1$ , é encontrada ao escolhermos  $\prod_{\vec{x}'} \{\phi_{\vec{x}'}\} = \prod_{\vec{x}} \{\phi_{\vec{x}}\}$  e, também pode ser representada de maneira análoga

$$\begin{aligned}
 Z[\beta] &\equiv Tr_s[e^{-\beta \hat{H}_s}] \\
 &= \int [D\phi] \delta \left\{ \phi(y, 0) - \prod_{\vec{x}} \{\phi_{\vec{x}}\} \right\} \times \\
 &\quad \times \delta \left\{ \phi(y, \tau) - \prod_{\vec{x}} \{\phi_{\vec{x}}\} \right\} e^{-S_E[\phi]}.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

No caso da integral funcional, isto tem o efeito de formar um cilindro de circunferência  $\beta$ , juntando as extremidades  $\tau = 0$  e  $\tau = \beta$  no espaço dos estados. A figura (4.1) ilustra esta ideia.

## 2.4 Fidelidade e misturas quânticas

É difícil realizar uma comparação entre sistemas que se encontram em misturas quânticas, descritas por matrizes densidade do tipo  $\rho = \sum_{\psi} p_{\psi} |\psi\rangle \langle \psi|$ . A fidelidade é apresentada como uma generalização da projeção entre estados puros  $|\psi\rangle$ , para o caso de estados mistos  $\rho$  [1][20]. É uma medida comparativa entre dois estados que relaciona quão próximos eles estão no espaço dos estados quânticos. Mas embora meça a proximidade entre estados, não pode ser tomada como métrica deste espaço, apesar de ser possível criar tais métricas a partir da fidelidade [21].

Como medida de decoerência, ela compara quanto um sistema real, interagente com o meio que o cerca, é semelhante ao sistema quântico que imaginamos ser o ideal. Neste caso, a fidelidade entre dois sistemas quânticos representados pelas matrizes densidade

$\rho_{real}$  e  $\rho_{ideal}$ ,  $F(\rho_{real}, \rho_{ideal})$ , mede a perda de informação que o sistema real sofre ao interagir com o meio externo em relação ao sistema ideal, completamente isolado.

## 2.5 Formulação de Jozsa-Uhlmann

Para formular a expressão de Jozsa-Uhlmann [1], consideremos dois sistemas quânticos, representados pelas matrizes densidades  $\rho_1$  e  $\rho_2$ , correspondente ao espaço de Hilbert  $\mathcal{H}$  de dimensão  $n$ .

Sejam  $|\Phi_1\rangle$  e  $|\Phi_2\rangle$  um par qualquer de representações por meio da purificação de Schmidt para  $\rho_1$  e  $\rho_2$ , correspondente ao espaço de Hilbert estendido  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$ . Podemos representar  $|\Phi_1\rangle$  da maneira

$$|\Phi_1\rangle = \sum_i \sqrt{\lambda_i} |e_i\rangle \otimes |m_i\rangle, \quad (2.13)$$

onde,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  são os autovalores de  $\rho_1$  correspondentes à base ortonormal de auto vetores  $\{|e_1\rangle, \dots, |e_n\rangle\}$ , e  $\{|m_1\rangle, \dots, |m_n\rangle\}$  é uma base ortonormal arbitrária para  $\mathcal{H}'$ . Da mesma forma para  $|\Phi_2\rangle$

$$|\Phi_2\rangle = \sum_i \sqrt{\mu_i} |f_i\rangle \otimes |l_i\rangle. \quad (2.14)$$

Podemos supor, sem perda de generalidade, que  $|\Phi_1\rangle$  e  $|\Phi_2\rangle$  pertencem a  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ . Sendo assim, podemos relacionar as diversas bases que temos para  $\mathcal{H}$  por meio de transformações unitárias  $V$ ,  $U_1$ , e  $U_2$

$$|f_i\rangle = V |e_i\rangle, \quad |m_i\rangle = U_1 |e_i\rangle, \quad |l_i\rangle = U_2 |e_i\rangle, \quad (2.15)$$

$$\sqrt{\rho_1} |e_i\rangle = \sqrt{\lambda_i} |e_i\rangle, \quad \sqrt{\rho_2} |f_i\rangle = \sqrt{\mu_i} |f_i\rangle. \quad (2.16)$$

Para estados da forma  $|\phi\rangle = \sum_i |f_i\rangle \otimes |f_i\rangle$ , podemos usar a seguinte relação para qualquer operador  $A$

$$(A \otimes I)|\phi\rangle = (I \otimes A^T)|\phi\rangle. \quad (2.17)$$

Este resultado pode ser obtido reescrevendo a equação em termos da base  $|f_i\rangle \otimes |f_j\rangle$  para o espaço  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ . e utilizando o fato de que  $|\phi\rangle$  tem apenas valores não nulos quando  $\delta_{ij}$  difere de zero. Podemos reescrever os estados  $|\Phi_1\rangle$  e  $|\Phi_2\rangle$  na forma

$$|\Phi_1\rangle = \sum_i \sqrt{\lambda_i} |e_i\rangle \otimes |m_i\rangle = \sum_i \sqrt{\rho_1} U_1 |e_i\rangle \otimes |e_i\rangle, \quad (2.18)$$

$$|\Phi_2\rangle = \sum_i \sqrt{\mu_i} |f_i\rangle \otimes |l_i\rangle = \sum_i \sqrt{\rho_2} U_2^T V V^T |e_i\rangle \otimes |e_i\rangle. \quad (2.19)$$

Sendo assim a probabilidade de transição entre  $|\Phi_1\rangle$  e  $|\Phi_2\rangle$  é dada por

$$\langle \Phi_1 | \Phi_2 \rangle = \sum_i \langle e_i | U_1^{T\dagger} \sqrt{\rho_1} \sqrt{\rho_2} U_2^T V V^T | e_i \rangle = \text{Tr} \left[ \sqrt{\rho_1} \sqrt{\rho_2} U_2^T V V^T U_1^{T\dagger} \right]. \quad (2.20)$$

Pode-se mostrar [1] que para qualquer operador  $A$  sob efeito de transformação unitária  $U$ , feita a maximização,  $\gamma = \max |\text{Tr}[AU]| = \text{Tr}[|A|]$ . A maximização feita sobre a taxa de transição das representações purificadas, obtemos

$$F(\rho_1, \rho_2) = \max |\langle \Phi_1 | \Phi_2 \rangle|^2 = \left( \text{Tr} \left[ (\sqrt{\rho_1} \rho_2 \sqrt{\rho_1})^{\frac{1}{2}} \right] \right)^2. \quad (2.21)$$

Esta expressão pode ser facilmente calculada para matrizes diagonais, mas há dificuldade para seu cálculo em vários casos mais complexos, tais como matrizes densidade não diagonais, infinitas, ou mesmo quando obtidas através da teoria quântica de campos.

## 2.6 Exemplo

Uma primeira aplicação possível para este resultado é na comparação entre dois sistemas que apresentam comportamentos diferentes. Um desses sistemas descrito exclusivamente pelo estado  $|\psi\rangle$ , e outro que durante o experimento pode apresentar os estados  $|\psi\rangle$ , com probabilidade igual a  $\frac{1}{2}$ , e  $|\phi\rangle$ , com probabilidade também igual a  $\frac{1}{2}$ , com  $\langle \phi | \psi \rangle = 0$ .

Podemos escrever as matrizes densidade de cada sistema, real  $\rho_R$  e ideal  $\rho_I$ , da forma

$$\rho_I = |\psi\rangle\langle\psi| \quad (2.22)$$

$$\rho_R = \frac{1}{2}|\psi\rangle\langle\psi| + \frac{1}{2}|\phi\rangle\langle\phi| \quad (2.23)$$

A fidelidade, nos dá que a proximidade entre estes estados é dada por

$$F(\rho_I, \rho_R) = \left( \text{Tr} \left[ (\sqrt{\rho_I} \rho_R \sqrt{\rho_I})^{\frac{1}{2}} \right] \right)^2. \quad (2.24)$$

Como o estado inicial é puro, e sua matriz densidade também é o projetor no estado  $|\psi\rangle$ , é válida a propriedade

$$P_{|\psi\rangle} = |\psi\rangle\langle\psi| = (P_{|\psi\rangle})^2, \quad (2.25)$$

e portanto podemos facilmente calcular  $\sqrt{\rho_I}$ , uma vez que,

$$\sqrt{\rho_I} = \sqrt{P_{|\psi\rangle}} = \sqrt{(P_{|\psi\rangle})^2} = P_{|\psi\rangle} = \rho_I. \quad (2.26)$$

Logo, a fidelidade pode ser escrita na forma

$$F(\rho_I, \rho_R) = \left( \text{Tr} \left[ (|\psi\rangle\langle\psi| \rho_R |\psi\rangle\langle\psi|)^{\frac{1}{2}} \right] \right)^2, \quad (2.27)$$

que pode ser reduzida à

$$\begin{aligned} F(\rho_I, \rho_R) &= \text{Tr}[\rho_I \rho_R] \\ &= \langle\psi|\rho_R|\psi\rangle \end{aligned} \quad (2.28)$$

Substituindo nossa definição para  $\rho_R$  na expressão acima, obtemos

$$F(\rho_I, \rho_R) = \frac{1}{2}, \quad (2.29)$$

o que corresponde à ideia do sistema ter 50% de probabilidade de se encontrar no estado considerado ideal.

## 2.7 Propriedades da fidelidade de Jozsa-Uhlmann

A expressão de Jozsa-Uhlmann para fidelidade, dada pela equação [2.24], apresenta 6 propriedades principais [1]:

1.  $0 \leq F(\rho_1, \rho_2) \leq 1$ , onde  $F(\rho_1, \rho_2) = 1$  se, e somente se  $\rho_1 = \rho_2$ .
2. simetria de troca:  $F(\rho_1, \rho_2) = F(\rho_2, \rho_1)$ .
3. caso um dos sistemas seja puro, por exemplo,  $\rho_1 = |\epsilon\rangle\langle\epsilon|$ , temos:  $F(\rho_1, \rho_2) = \langle\epsilon|\rho_2|\epsilon\rangle = \text{Tr}[\rho_1\rho_2]$ .
4. convexidade: uma vez que  $\rho_1, \rho_2 \geq 0$ , e  $p_1 + p_2 = 1$ , temos  $F(\rho, p_1\rho_1 + p_2\rho_2) \geq p_1 F(\rho, \rho_1) + p_2 F(\rho, \rho_2)$ .
5.  $F(\rho_1, \rho_2) \geq \text{Tr}[\rho_1\rho_2]$ .
6. multiplicidade:  $F(\rho_1 \otimes \rho_3, \rho_2 \otimes \rho_4) = F(\rho_1, \rho_2) F(\rho_3, \rho_4)$ .

A primeira e segunda propriedades decorrem diretamente da definição dada anteriormente para fidelidade dos sistemas purificados,  $F(\rho_1, \rho_2) = \max |\langle\Phi_1|\Phi_2\rangle|^2$ . A terceira pode ser deduzida lembrando que para um sistema descrito por um único estado  $\rho_1 = |\epsilon\rangle\langle\epsilon|$ , temos  $\rho_1 = \rho_1^2 = \sqrt{\rho_1}$  e substituindo em  $F(\rho_1, \rho_2) = \left( \text{Tr} \left[ (\sqrt{\rho_1} \rho_2 \sqrt{\rho_1})^{\frac{1}{2}} \right] \right)^2$ .

Para provar a quarta propriedade, consideremos  $|\epsilon_1\rangle$  e  $|\mu_1\rangle$  purificações para  $\rho$  e  $\rho_1$  respectivamente que pertencem ao espaço  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$  e  $|\epsilon_2\rangle$  e  $|\mu_2\rangle$  purificações para  $\rho$  e  $\rho_2$  que pertencem ao espaço  $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}''$ , escolhidas de forma que  $\mathcal{H}' \perp \mathcal{H}''$  e

$$F(\rho, \rho_1) = |\langle\epsilon_1|\mu_1\rangle|^2, \quad F(\rho, \rho_2) = |\langle\epsilon_2|\mu_2\rangle|^2, \quad (2.30)$$

de forma que para o espaço de Hilbert  $\mathcal{H} \otimes (\mathcal{H}' \oplus \mathcal{H}'')$ , o estado  $|\epsilon\rangle = \lambda_1|\epsilon_1\rangle + \lambda_2|\epsilon_2\rangle$  é uma purificação possível para  $\rho$  dado que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  satisfaçam  $|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 = 1$ . E o estado  $|\mu\rangle = \eta_1|\mu_1\rangle + \eta_2|\mu_2\rangle$  é a purificação para o estado  $p_1\rho_1 + p_2\rho_2$ , desde que  $|\eta_1|^2 = p_1$  e  $|\eta_2|^2 = p_2$ . Sendo assim para um par  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  arbitrário temos

$$F(\rho, p_1\rho_1 + p_2\rho_2) \geq |\langle\epsilon|\mu\rangle|^2 = |\bar{\lambda}_1\mu_1\langle\epsilon_1|\mu_1\rangle + \bar{\lambda}_2\mu_2\langle\epsilon_2|\mu_2\rangle|^2. \quad (2.31)$$

Tomando o valor máximo através da variação dos parâmetros  $\lambda$

$$F(\rho, p_1\rho_1 + p_2\rho_2) \geq |\mu_1\langle\epsilon_1|\mu_1\rangle|^2 + |\mu_2\langle\epsilon_2|\mu_2\rangle|^2. \quad (2.32)$$

Substituindo os valores conhecidos, obtemos  $F(\rho, p_1\rho_1 + p_2\rho_2) \geq p_1 F(\rho, \rho_1) + p_2 F(\rho, \rho_2)$ . A quinta propriedade decorre diretamente da terceira e quarta propriedades, se fizermos a expansão de  $\rho_2$  como uma soma ponderada de auto estados.

A demonstração da sexta propriedade decorre do fato de que, para quaisquer operadores  $A$  e  $B$ , temos  $Tr[A \otimes B] = Tr[A] \cdot Tr[B]$  e  $\sqrt{(A \otimes B)} = \sqrt{A} \otimes \sqrt{B}$ .

São estas propriedades que definem a fidelidade, sendo as quatro primeiras necessárias para que a consideremos como uma projeção entre estados, e as duas finais decorrentes apenas da expressão obtida por Jozsa-Uhlmann.

## 2.8 Exemplo: Decaimento exponencial

Considere um sistema de 2 níveis,  $|\psi\rangle$  e  $|\phi\rangle$ , onde a energia do estado  $|\psi\rangle$  é superior à correspondente a  $|\phi\rangle$ . Neste experimento preparamos os estados de forma que sejam igualmente prováveis. Neste caso podemos escrever a matriz densidade ideal como

$$\rho_I = \frac{1}{2}|\psi\rangle\langle\psi| + \frac{1}{2}|\phi\rangle\langle\phi| = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

Mas devido a alguma interação com o meio externo, ocorre um decaimento do estado  $|\psi\rangle$  ao estado  $|\phi\rangle$  com constante de decaimento  $\alpha$ . Uma maneira de representar este sistema através da matriz densidade seria

$$\rho_R(t) = \left(\frac{1}{2}e^{-\alpha t}\right)|\psi\rangle\langle\psi| + \left(1 - \frac{1}{2}e^{-\alpha t}\right)|\phi\rangle\langle\phi| = \begin{pmatrix} (1 - \frac{1}{2}e^{-\alpha t}) & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2}e^{-\alpha t}) \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Podemos fazer uma medida da qualidade do experimento através da fidelidade, imaginando esta medida como um desvio do sistema ideal. Para tal, podemos escrever a fidelidade como

$$F(\rho_I, \rho_R) = \left( \text{Tr} \left[ (\sqrt{\rho_I} \rho_R \sqrt{\rho_I})^{\frac{1}{2}} \right] \right)^2. \quad (2.35)$$

É fácil percebermos que para tempos próximos aos iniciais o sistema se manterá próximo ao ideal e portanto, sua fidelidade se manterá próxima a 1. Mas se tivermos  $t \rightarrow \infty$ , o caso será semelhante ao apresentado na seção 2.6, então esperamos que a fidelidade atinja o valor  $\frac{1}{2}$ .

Para simplificar nosso cálculo, reescrevemos a matriz  $\rho_I$  na forma

$$\rho_I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} I_{2 \times 2}, \quad (2.36)$$

O que nos ajudará, dado o fato de que sendo  $I_{2 \times 2}$  a matriz identidade  $2 \times 2$ ,  $\sqrt{I_{2 \times 2}} = I_{2 \times 2}$ . Utilizando a propriedade do traço  $\text{Tr}[kM] = k \text{Tr}[M]$ , sendo  $k$  um escalar, obtemos

$$F(\rho_I, \rho_R) = \frac{1}{2} (\text{Tr}[\sqrt{\rho_R}])^2. \quad (2.37)$$

Por ser diagonal, a matriz  $\rho_R$  tem sua raiz quadrada facilmente obtida, logo

$$\sqrt{\rho_R(t)} = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \frac{1}{2}e^{-\alpha t}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{2}e^{-\alpha t}} \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

substituindo esta expressão no cálculo da fidelidade e obtemos

$$\begin{aligned} F(\rho_I, \rho_R) &= \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 - \frac{1}{2}e^{-\alpha t}} + \sqrt{\frac{1}{2}e^{-\alpha t}} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[ 1 + \sqrt{e^{-\alpha t} (2 - e^{-\alpha t})} \right], \end{aligned} \quad (2.39)$$

uma expressão que reproduz os resultados esperados e mostra um comportamento do tipo decaimento para a fidelidade também. A figura (2.2) ilustra o comportamento deste caso para  $\alpha = 1[t]^{-1}$ .

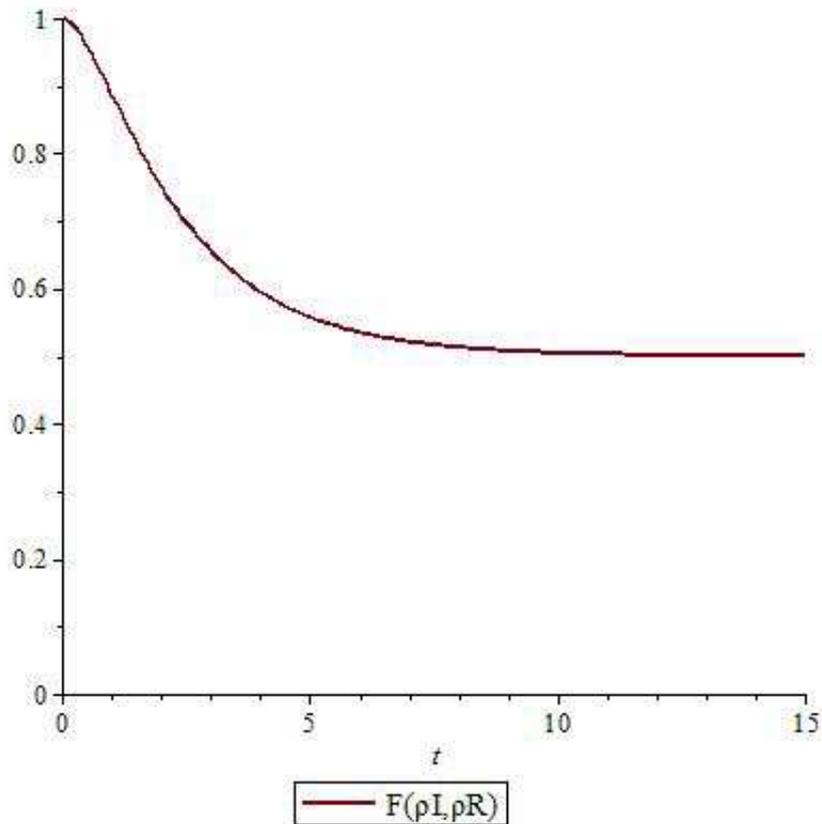


Figura 2.2: Fidelidade em um caso simples de decaimento exponencial.

## 2.9 Outras medidas de decoerência

Quando falamos em medir a decoerência, estamos falando em medir toda a influência do meio externo que possa ser tratada como “ruído” em medidas feitas no sistema, e não apenas perda de fase do estado quântico.

Dado o fato de que todo comportamento de um sistema poder ser descrito por meio de uma matriz densidade ou um conjunto das mesmas, é possível definir medidas de comparação entre sistemas isolados e sistemas que sofram algum tipo de influência do meio externo.

Sendo assim, podemos definir duas categorias de medida para decoerência: desvio do sistema de um sistema puro; ou o desvio do sistema de um sistema descrito por um único estado ou descritos por um único estado em particular. Para ambos casos, comparações com estados dependentes ou não do tempo.

E é através destas comparações que é possível definir critérios de tolerância para a ação do meio externo no sistema, assim podemos definir um máximo de efeito que o meio

externo pode exercer sem afetar demais o sistema quântico.

### Entropia Quântica

A entropia quântica [22][23][6], conhecida como entropia de von Neumann, de expressão

$$S^{vN}(t) = -Tr[\rho(t) \ln(\rho(t))], \quad (2.40)$$

assim como sua equivalente clássica, fornece uma medida do mínimo de recursos (qubits) necessários para a transmissão de uma informação aleatória, além de ser uma forma de medir a correlação quântica de uma parte do sistema. Ou de maneira similar poderíamos utilizar sua expressão em primeira ordem

$$s^{(1)}(t) = 1 - Tr[\rho^2(t)] \quad (2.41)$$

Ambas fornecem uma maneira de medir efeitos do meio externo sobre o sistema quântico em consideração. Apesar de não ser um cálculo comparativo entre estados, fornecem o desvio de um estado puro que imaginamos ser o ideal. Para estados puros é fácil provar que

$$S_{puro}^{vN}(t) = s_{puro}^{(1)}(t) = 0. \quad (2.42)$$

Qualquer valor diferente já demonstra um efeito do meio sobre o sistema. Esta abordagem é útil em situações onde sabemos que o sistema pouco se modifica de um estado puro sob efeito de sua dinâmica ou ação do meio externo.

Consideremos um sistema de 2 estados que deveria se manter em seu estado excitado, mas que, devido à ação do meio externo, decaia ao estado fundamental, de forma semelhante ao apresentado na seção (2.6). Na figura (2.9), vemos o gráfico da entropia quântica e entropia de primeira ordem para este sistema, quando  $\alpha = 1 [1/t]$ :

### Norma-1

Dado dois sistemas quânticos,  $\rho$  e  $\sigma$ , podemos definir a distância entre seus traços, também chamada norma-1 [22][24], como

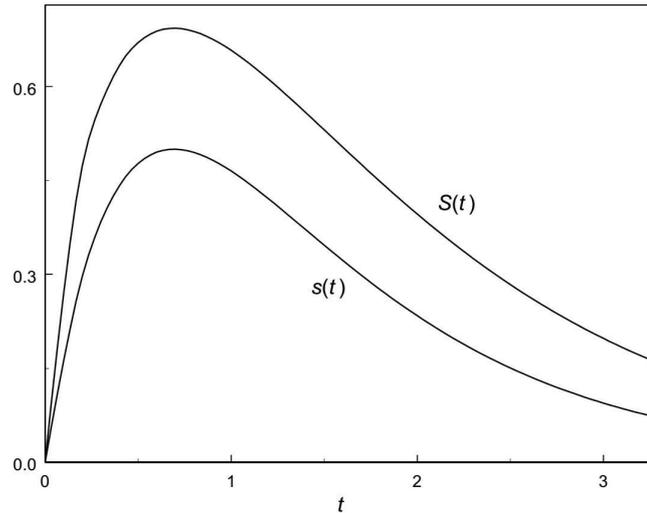


Figura 2.3: Exemplo do uso da entropia para determinar decoerência.

$$D(\rho, \sigma) \equiv \frac{1}{2} \|\rho - \sigma\|_1, \quad (2.43)$$

onde

$$\|M\|_1 \equiv \text{Tr}[|M|] = \text{Tr} \left[ \sqrt{M^\dagger M} \right]$$

é a norma do traço de um operador de traço nulo  $M$ . E  $A = \sqrt{B}$  é qualquer matriz positiva que apresente a propriedade  $A \cdot A = B$ . A norma-1 tem valores que variam no intervalo  $[0, 1]$ , onde  $D = 0$  acontece para estados idênticos, e  $D = 1$  para sistemas ortogonais no espaço dos estados.

A norma-1 determina, na verdade, a chance de erro em diferenciar sistemas  $\rho$  e  $\sigma$  no espaço de estados através de medidas. Então, no caso de uma medida de decoerência, podemos interpretar como a chance de um sistema real ser diferente do sistema que julgamos ser ideal.

### Normas de Schatten

Há ainda uma outra grandeza associada a normas mais gerais, chamadas normas de Schatten [22][25], que relaciona sistemas com seus estados sem correlações quânticas mais próximos. Para um número  $p$  inteiro, a norma- $p$  para este sistema é dada por

$$D_p = \min_{\Omega_0} \|\rho - \rho_c\|_p, \quad (2.44)$$

onde a minimização feita é sobre todos os estados quânticos sem correlações quânticas, e

$$\|M\|_p \equiv \left( \text{Tr} \left[ (M^\dagger M)^{\frac{p}{2}} \right] \right)^{\frac{1}{p}} \quad (2.45)$$

é a norma-p de Schatten. Dentre às famílias de possíveis normas, se destacam a norma-1 que ocorre para  $p = 1$ , apresentada como possível medida para decoerência, e  $p = 2$ , conhecida como norma de Hilbert-Schmit ou norma-2, que mede a discórdia geométrica [25].

Um exemplo: consideremos dois sistemas puros, descritos pelos estados  $|u\rangle$  e  $|v\rangle$  pertencentes ao espaço  $\mathcal{H}$ , e calculemos a família de normas entre estes dois sistemas:

$$D_p(\rho_u, \rho_v) = \|A\|_p \equiv \left( \text{Tr} \left[ (A^\dagger A)^{\frac{p}{2}} \right] \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (2.46)$$

onde  $A \equiv |u\rangle\langle u| - |v\rangle\langle v|$ . Claramente,  $A$  é um operador hermitiano, de traço nulo e de autovalores  $\pm\sqrt{1 - |\langle u|v\rangle|^2}$  e 0, com multiplicidade  $(\dim(\mathcal{H}) - 2)$ . Usando estas informações podemos calcular  $D_p$ :

$$\begin{aligned} D_p(\rho_u, \rho_v) &= \||u\rangle\langle u| - |v\rangle\langle v|\|_p \\ &= \left( 2(1 - |\langle u|v\rangle|^2)^{\frac{p}{2}} \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= 2^{\frac{1}{p}} (1 - |\langle u|v\rangle|^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Mostrando que este cálculo é bastante simples entre estados puros.

Dentre as medidas apresentadas, escolhemos trabalhar com a fidelidade, por apresentar uma interpretação mais direta, sendo esta, uma generalização de projeção ou taxa de transição entre os estados. Apesar da expressão ser difícil de ser calculada para matrizes densidade com muitos ou infinitos graus de liberdade. Para estados térmicos, contudo, podemos demonstrar através do nosso trabalho ser possível realizar este cálculo por meio de técnicas de teoria de campos.



# Fidelidade em Teoria de campos

## 3.1 Fidelidade em TQC

Até aqui, apresentamos a fidelidade como medida de comparação entre dois sistemas descritos por matrizes densidade. Agora mostraremos que, apesar de terem infinitos graus de liberdade, podemos medir a fidelidade entre dois sistemas bosônicos, que já atingiram a termalização com seu meio externo. Esta medida terá o efeito de uma projeção no espaço dos estados quânticos, medindo, dada a evolução total do sistema, o quão os dois sistemas são parecidos.

Iremos nos aprofundar no caso de campos bosônicos em 2 dimensões, como por exemplo, na comparação de um sistema real, representado por [6][7]

$$\rho_R(\beta) \rightarrow \frac{e^{-\beta \hat{H}_R}}{Z_R}, \quad (3.1)$$

onde  $\hat{H}_R$  é a hamiltoniana que melhor modela o sistema, incluindo todas as possíveis interações, internas ou externas, com um sistema ideal

$$\rho_I(\beta) \rightarrow \frac{e^{-\beta \hat{H}_I}}{Z_I}, \quad (3.2)$$

que apresenta evolução representada pela hamiltoniana  $\hat{H}_I$  considerada ideal ou desejada.

A comparação entre os dois sistemas, através da fidelidade, é dada por

$$F(\rho_I, \rho_R) = \left( \text{Tr} \left[ (\sqrt{\rho_I} \rho_R \sqrt{\rho_I})^{\frac{1}{2}} \right] \right)^2. \quad (3.3)$$

### 3.2 Extensão analítica: Método da réplica

Como enfatizado anteriormente, fora os casos em que temos matrizes densidades diagonais ou de estados puros, o cálculo de raízes de operadores é uma tarefa bastante complicada, especialmente para misturas quânticas descritas pela TQC, onde tais operadores, são em geral de dimensão infinita e não diagonais.

Calcularemos estas raízes através de uma abordagem inspirada no método das réplicas. Este método, bastante utilizado na física estatística para o cálculo da energia livre de um sistema, vem da aplicação da representação

$$\lim_{n \rightarrow 0} \frac{Z^n - 1}{n} = \ln Z, \quad (3.4)$$

onde inicialmente consideraremos  $n$  um número inteiro. É muito mais simples calcular uma potência inteira de uma matriz do que um logaritmo, realizando agora o cálculo para  $n$  cópias do sistema original, e no final, tomamos o limite para  $n \rightarrow 0$  onde supomos a validade da extensão analítica da expressão (3.4).

Podemos ilustrar este tipo de método por meio de um exemplo simples: estamos interessados em descobrir a função  $y(x)$  que satisfaça a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = x^{\frac{1}{2}}, \quad (3.5)$$

reescrevendo a equação na forma

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{n \rightarrow \frac{1}{2}} x^n, \quad (3.6)$$

e integrando ambos os lados da equação em relação a  $x$ , obtemos

$$y(x) = \lim_{n \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x^{n+1}}{n+1} + cte. \quad (3.7)$$

Tomando por fim o limite, obtemos o resultado  $y(x) = \frac{2}{3} x^{3/2} + cte$ , que satisfaz às condições do problema.

Uma ideia semelhante foi aplicada por Calabrese e Cardy em [6][7], onde obtêm a entropia de emaranhamento através do limite :

$$\begin{aligned}
S &= -Tr [\rho \ln \rho] \\
&= \lim_{n \rightarrow 1} S^{(n)}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$S^{(n)} = \frac{1}{1-n} \ln Tr [\rho^n],$$

onde  $S^{(n)}$  também é conhecida como entropia de Rényi.

Um último exemplo simples, em que podemos aplicar este tipo de ideia, é encontrar a raiz quadrada de uma matriz de rotação em 2 dimensões. Podemos escrever uma rotação em duas dimensões em função do ângulo  $\theta$  como

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

A matriz  $\sqrt{M}$  pode ser obtida através de

$$\sqrt{M} = \lim_{n \rightarrow \frac{1}{2}} M^n = \lim_{n \rightarrow \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & \sin(n\theta) \\ -\sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

De forma que para realizar o cálculo desta fidelidade, definimos uma fidelidade generalizada  $F_n(\rho_I, \rho_R)$ , de maneira análoga para simplificar o cálculo das raízes de matrizes na expressão original. Definiremos esta função na forma:

$$F_n(\rho_I, \rho_R) \equiv (Tr [((\rho_I)^n \rho_R (\rho_I)^n)^n]) = (Tr [\rho_I^n \rho_R \rho_I^n \rho_I^n \rho_R \dots \rho_I^n]) \quad , \tag{3.11}$$

utilizando a propriedade cíclica do traço:

$$F_n(\rho_I, \rho_R) = (Tr [((\rho_I)^{2n} \rho_R)^n]) \tag{3.12}$$

de forma que:

$$F(\rho_I, \rho_R) = \lim_{n \rightarrow \frac{1}{2}} (F_n(\rho_I, \rho_R))^2. \tag{3.13}$$

### 3.3 Método das réplicas

Partimos da definição que escolhemos para fidelidade generalizada,

$$F_n(\rho_I, \rho_R) = (\text{Tr} [ ((\rho_I)^{2n} \rho_R)^n ]), \quad (3.14)$$

reescrevemos o traço como  $\text{Tr}[\hat{A}] = \int [D\phi] \langle \phi | \hat{A} | \phi \rangle$ ,

$$F_n(\rho_I, \rho_R) = \int [D\phi_0] \langle \phi_0 | ((\rho_I)^{2n} \rho_R)^n | \phi_0 \rangle, \quad (3.15)$$

e inserimos resoluções da identidade, do tipo  $I = \int [D\psi_i] |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$ , de forma apropriada

$$\begin{aligned} F_n(\rho_I, \rho_R) &= \int [D\phi_0] [D\psi_1] \dots [D\psi_{(2n+1)n}] \langle \phi_0 | \rho_R | \psi_1 \rangle \langle \psi_1 | \rho_I | \psi_2 \rangle \\ &\quad \times \langle \psi_2 | \rho_I | \psi_3 \rangle \dots \langle \psi_{(2n+1)n} | \rho_I | \phi_0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Identificamos os elementos  $\langle \psi_i | \rho_j | \psi_k \rangle$ , como

$$\langle \psi_i | \rho_j | \psi_k \rangle = \frac{1}{Z_j(\beta)} \int [D\phi_l] \delta \{ \phi_l(y, 0) - \psi_k \} \delta \{ \phi_l(y, \beta) - \psi_i \} e^{-S_j[\phi_l]}, \quad (3.17)$$

onde  $S_j[\phi_l]$  é a ação descrita pela evolução do campo  $\phi_l$  com lagrangiana  $H_j$ . De forma que a expressão (3.16) possa ser expressa como

$$\begin{aligned} F_n(\rho_I, \rho_R) &= \frac{1}{(Z_R(\beta))^n (Z_I(\beta))^{2n^2}} \int [D\phi_0] [D\psi_1] \dots [D\psi_{(2n+1)n}] [D\phi_1] \dots [D\phi_{(2n+1)n}] \times \\ &\quad \times \delta \{ \phi_1(y, 0) - \psi_1 \} \delta \{ \phi_1(y, \beta) - \phi_0 \} e^{-S_I[\phi_1]} \times \\ &\quad \times \delta \{ \phi_2(y, 0) - \psi_2 \} \delta \{ \phi_2(y, \beta) - \psi_1 \} e^{-S_I[\phi_2]} \times \dots \times \\ &\quad \times \delta \{ \phi_{(2n+1)}(y, 0) - \psi_{(2n+1)} \} \delta \{ \phi_{(2n+1)}(y, \beta) - \psi_{2n} \} \times \\ &\quad e^{-S_R[\phi_{(2n+1)}]} \times \dots \times \delta \{ \phi_{(2n+1)n}(y, 0) - \phi_0 \} \times \\ &\quad \delta \{ \phi_{(2n+1)n}(y, \beta) - \psi_{(2n+1)n} \} e^{-S_R[\phi_{(2n+1)n}]}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Podemos simplificar esta equação usando o fato de que

$$\int [D\psi_i] \delta \{ \phi_l(y, 0) - \psi_i \} \delta \{ \phi_k(y, \beta) - \psi_i \} = \delta \{ \phi_k(y, \beta) - \phi_l(y, 0) \}, \quad (3.19)$$

de forma que chegamos à expressão final para a fidelidade generalizada

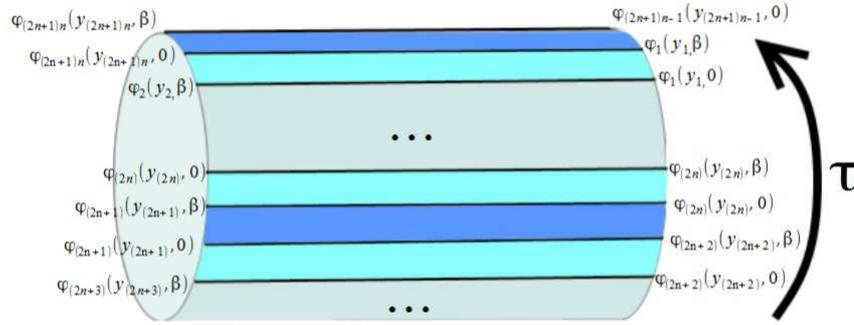


Figura 3.4: Evolução dos campos, aqui mostramos as condições iniciais e finais dos  $(2n + 1)n$  campos

$$\begin{aligned}
F_n(\rho_I, \rho_R) = & \frac{1}{(Z_R(\beta))^n (Z_I(\beta))^{2n^2}} \int [D\phi_1] \dots [D\phi_{(2n+1)n}] \times \\
& \times \delta \{ \phi_1(y, \beta) - \phi_{(2n+1)n}(y, 0) \} e^{-S_I[\phi_1]} \times \\
& \times \delta \{ \phi_2(y, \beta) - \phi_1(y, 0)_1 \} e^{-S_I[\phi_2]} \times \\
& \times \dots \times \delta \{ \phi_{(2n+1)}(y, 0) - \psi_{(2n)}(y, \beta) \} e^{-S_R[\phi_{(2n+1)}]} \times \\
& \times \dots \times \delta \{ \phi_{(2n+1)n-1}(y, 0) - \phi_{(2n+1)n}(y, \tau) \} e^{-S_R[\phi_{(2n+1)n}]} .
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Podemos observar uma semelhança com o cálculo da função partição, os campos  $\phi_1, \dots, \phi_{(2n+1)n}$  evoluem de forma a conectar suas condições iniciais e finais. A fidelidade generalizada será obtida ao somarmos as contribuições das possíveis evoluções destes campos. Este tipo de evolução pode ser representada pela figura (3.3). As diferentes cores indicam qual o regime de evolução cada campo obedece, azul claro para o sistema ideal e azul escuro para o real.

### 3.4 Campo equivalente

Observando a expressão obtida na seção anterior, vemos que o problema se assemelha ao problema de um campo contínuo, mas que possui hamiltoniana que descreve sua evolução dependente do parâmetro  $\tau$ . Tal como na mecânica quântica, uma partícula encontra em regiões diferentes do espaço potenciais diferentes e altera sua dinâmica, mas não deixando

de ter uma função de onda contínua. Aplicaremos o mesmo tipo de ideias e descreveremos o problema do campo bosônico como um problema dependente do parâmetro  $\tau$ .

Aproveitando da semelhança do termo presente na fidelidade generalizada

$$\begin{aligned}
Z_n = & \int [D\phi_1] \dots [D\phi_{(2n+1)n}] \times \\
& \times \delta \{ \phi_1(y, \beta) - \phi_{(2n+1)n}(y, 0) \} e^{-S_I[\phi_1]} \times \\
& \times \delta \{ \phi_2(y, \beta) - \phi_1(y, 0)_1 \} e^{-S_I[\phi_2]} \times \\
& \times \dots \times \delta \{ \phi_{(2n+1)n-1}(y, 0) - \phi_{(2n+1)n}(y, \beta) \} e^{-S_R[\phi_{(2n+1)n}]}.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

com a definição que usamos para a função partição:

$$Z = \int [D\phi] \delta \left\{ \phi(y, 0) - \prod_x \{ \phi_x \} \right\} \delta \left\{ \phi(y, \beta) - \prod_x \{ \phi_x \} \right\} e^{-S_E[\phi]}, \tag{3.22}$$

faremos uso de um campo equivalente, que conterà toda informação original do nosso problema. Para tal, precisamos lembrar que sob uma translação temporal, temos as seguintes condições:

$$\begin{aligned}
y & \rightarrow y' = y \\
\tau & \rightarrow \tau' = \tau - a.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Neste caso, o campo se comporta da seguinte maneira

$$\phi(y, \tau) \rightarrow \phi'(y', \tau') = \phi(y, \tau + a), \tag{3.24}$$

e a ação associada, definida por

$$S[\phi] = \int \int_0^\beta dy d\tau \mathcal{L}[\phi(y, \tau)], \tag{3.25}$$

pode ser escrita na forma

$$S[\phi] = \int \int_a^{\beta+a} dy d\tau \mathcal{L}[\phi(y, \tau - a)] = \int \int_a^{\beta+a} dy d\tau' \mathcal{L}[\phi'(y, \tau')]. \tag{3.26}$$

Então, para cada campo, faremos translações do tipo:

$$\begin{aligned} y_i &\rightarrow y'_i = y_i \\ \tau_i &\rightarrow \tau'_i = \tau_i - [(2n+1)n - i]\beta \end{aligned} \quad (3.27)$$

De forma que os campos assumem a forma:

$$\phi_i(y_i, \tau_i) \rightarrow \phi'_i(y'_i, \tau'_i) = \phi_i(y_i, \tau_i + [(2n+1)n - i]\beta), \quad (3.28)$$

e a ação associada a cada um:

$$S_X[\phi_i] = \int \int_{[(2n+1)n-i]\beta}^{[(2n+1)n-i+1]\beta} dy_i d\tau'_i \mathcal{L}_X[\phi'_i(y_i, \tau'_i)]. \quad (3.29)$$

Fazendo a substituição na expressão da fidelidade generalizada, obtemos

$$\begin{aligned} F_n(\rho_I, \rho_R) &= \frac{1}{(Z_R(\beta))^n (Z_I(\beta))^{2n^2}} \int [D\psi_1] \dots [D\psi_{(2n+1)n}] [D\phi_1] \dots [D\phi_{(2n+1)n}] \times \\ &\quad \times \delta \left\{ \phi'_1(y, (2n+1)n\beta) - \phi'_{(2n+1)n}(y, 0) \right\} \times \dots \times \\ &\quad \times \delta \left\{ \phi'_{(2n+1)n}(y, \beta) - \phi'_{(2n+1)n-1}(y, \beta) \right\} \times \\ &\quad \times e^{-\int \int_0^\beta dy_i d\tau'_{(2n+1)n} \mathcal{L}_R[\phi'_{(2n+1)n}(y_i, \tau'_{(2n+1)n})]} \times \\ &\quad \times e^{-\int \int_\beta^{2\beta} dy_i d\tau'_{(2n+1)n-1} \mathcal{L}_I[\phi'_{(2n+1)n-1}(y_i, \tau'_{(2n+1)n-1})]} \times \\ &\quad \times \dots \times e^{-\int \int_{[(2n+1)n-1]\beta}^{(2n+1)n\beta} dy_i d\tau'_1 \mathcal{L}_I[\phi'_1(y_i, \tau'_1)]}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Podemos ver uma semelhança do nosso sistema de  $(2n+1)n$  campos evoluindo no intervalo de tempo imaginário  $[0, \beta]$ , cada campos evoluindo de forma independente, com um único campo contínuo equivalente  $\tilde{\phi}(y, \tau)$  que evolui no intervalo  $[0, (2n+1)n\beta]$  com uma hamiltoniana  $\tilde{H}$  dependente do parâmetro  $\tau$ .

Se escolhermos um campo contínuo  $\tilde{\phi}(y, \tau)$  da forma

$$\tilde{\phi}(y, \tau) = \begin{cases} \phi_{(2n+1)n}(y_i, \tau), & 0 \leq \tau < \beta \\ \phi_{(2n+1)n-1}(y_i, \tau - \beta), & \beta \leq \tau < 2\beta \\ \phi_{(2n+1)n-2}(y_i, \tau - 2\beta), & 2\beta \leq \tau < 3\beta \\ \dots & \dots \\ \phi_1(y_i, \tau - (2n+1)n\beta), & [(2n+1)n-1]\beta \leq \tau < (2n+1)n\beta \end{cases} \quad (3.31)$$

que evolua com a lagrangiana associada  $\tilde{\mathcal{L}}[\tilde{\phi}, \tau]$

$$\tilde{\mathcal{L}}[\tilde{\phi}, \tau] = \begin{cases} \mathcal{L}_R, & 0 \leq \tau < \beta \\ \mathcal{L}_I, & \beta \leq \tau < (2n+1)\beta \\ \mathcal{L}_R, & (2n+1)\beta \leq \tau < (2n+2)\beta \\ \dots & \dots \\ \mathcal{L}_I, & (2n-1)n\beta \leq \tau < (2n+1)n\beta \end{cases} \quad (3.32)$$

Com isto, a expressão da fidelidade pode ser escrita se escolhermos este campo equivalente como

$$F_n(\rho_I, \rho_R) = \frac{1}{(Z_R(\beta))^n (Z_I(\beta))^{2n^2}} \int [D\tilde{\phi}] \delta \left\{ \tilde{\phi}(y, (2n+1)n\beta) - \tilde{\phi}(y, 0) \right\} \times \times e^{-\int_0^{(2n+1)n\beta} \int dy d\tau \tilde{\mathcal{L}}[\tilde{\phi}, \tau]} \quad (3.33)$$

Onde definimos a partir desta expressão, uma função partição equivalente  $\tilde{Z}_n$  associada ao campo equivalente

$$\tilde{Z}_n[(2n+1)n\beta] \equiv \int [D\tilde{\phi}] \delta \left\{ \tilde{\phi}(y, (2n+1)n\beta) - \tilde{\phi}(y, 0) \right\} e^{-\int_0^{(2n+1)n\beta} \int dy d\tau \tilde{\mathcal{L}}[\tilde{\phi}, \tau]}, \quad (3.34)$$

de forma que podemos expressar a fidelidade na forma

$$F(\rho_I, \rho_R) = \lim_{n \rightarrow \frac{1}{2}} \left( \frac{\tilde{Z}_n[(2n+1)n\beta]}{(Z_R(\beta))^n (Z_I(\beta))^{2n^2}} \right)^2. \quad (3.35)$$

Esta expressão compara a evolução dos dois sistemas durante o tempo imaginário  $\beta$ , através da relação entre as funções de partição dos campos originais e de um campo equivalente mas com intervalo para o parâmetro  $\tau$  de tamanho  $(2n+1)n\beta$ .



# Campo bosônico em 2D

## 4.1 Introdução

Para ilustrarmos como o método pode ser utilizado, consideremos um sistema bosônico ideal em 2D, de tamanho  $L$  e periódico, em contato com um reservatório térmico a temperatura  $T$ , associado a um campo escalar que possui uma massa ideal  $m_I$  e evolui livremente. Este sistema pode ser descrito pela lagrangiana,

$$\mathcal{L}_I[\phi(x, t)] = \frac{1}{2} (\partial_x \phi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_t \phi)^2 + \frac{1}{2} m_I^2 \phi^2. \quad (4.1)$$

Queremos comparar sua evolução com um sistema real, de massa  $m_R$ , viável experimentalmente. Descrevemos este sistema através da lagrangiana

$$\mathcal{L}_R[\phi(x, t)] = \frac{1}{2} (\partial_x \phi)^2 + \frac{1}{2} (\partial_t \phi)^2 + \frac{1}{2} m_R^2 \phi^2. \quad (4.2)$$

Os dois sistemas são idênticos, exceto pelos valores de massas  $m_I$  e  $m_R$ . E têm seu comportamento assintótico para um tempo imaginário  $\beta \equiv \frac{1}{k_B T}$ , sendo  $k_B$  a constante de Boltzmann, descrito pelas matrizes densidade

$$\rho_I = \frac{e^{-\beta \hat{H}_I}}{Z_I}, \quad (4.3)$$

$$\rho_R = \frac{e^{-\beta \hat{H}_R}}{Z_R}, \quad (4.4)$$

de forma que podemos comparar o comportamento assintótico dos dois sistemas por meio da fidelidade,

$$F(\rho_I, \rho_R) = \left( \text{Tr} \left[ (\sqrt{\rho_I} \rho_R \sqrt{\rho_I})^{\frac{1}{2}} \right] \right)^2, \quad (4.5)$$

assim obteremos uma relação que dita o quão diferentes os sistemas serão em função de seu tamanho, temperatura e, principalmente, diferença de massas.

## 4.2 Campo equivalente

Partindo da expressão para fidelidade, em termos do campo equivalente  $\tilde{\phi}$

$$F(\rho_I, \rho_R) = \lim_{n \rightarrow \frac{1}{2}} \left( \frac{\tilde{Z}_n[(2n+1)n\beta]}{(Z_R(\beta))^n (Z_I(\beta))^{2n^2}} \right)^2, \quad (4.6)$$

como definido anteriormente,

$$\tilde{Z}_n[(2n+1)n\beta] = \int [D\tilde{\phi}] \delta \left\{ \tilde{\phi}(y, (2n+1)n\beta) - \tilde{\phi}(y, 0) \right\} e^{- \int_0^{(2n+1)n\beta} dy d\tau \tilde{\mathcal{L}}[\tilde{\phi}, \tau]}, \quad (4.7)$$

a lagrangiana  $\tilde{\mathcal{L}}[\tilde{\phi}, \tau]$  será escrita em termos de uma massa  $\tilde{m}(\tau, n)$  dependente do tempo imaginário  $\tau$  e do número de réplicas  $n$ . Assim sendo:

$$\tilde{\mathcal{L}}[\tilde{\phi}, \tau] = \frac{1}{2} \left( \partial_x \tilde{\phi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \partial_t \tilde{\phi} \right)^2 + \frac{1}{2} (\tilde{m}^2(\tau, n)) \tilde{\phi}^2 \quad (4.8)$$

$$\tilde{m}^2(\tau, n) \equiv \begin{cases} m_R^2, & 0 \leq \tau < \beta \\ m_I^2, & \beta \leq \tau < (2n+1)\beta \\ m_R^2, & (2n+1)\beta \leq \tau < (2n+2)\beta \\ \dots & \dots \\ m_I^2, & [n(2n+1) - 1]\beta \leq \tau < n(2n+1)\beta \end{cases} \quad (4.9)$$

Logo, ao tomar o limite da fidelidade generalizada:

$$F(\rho_I, \rho_R) = \left( \frac{\tilde{Z}_{\frac{1}{2}}[\beta]}{\sqrt{Z_R(\beta) Z_I(\beta)}} \right)^2, \quad (4.10)$$

sendo este resultado ainda dependente da massa  $\tilde{m}(\tau, \frac{1}{2})$ .

### 4.3 Massa equivalente

Vemos que o campo equivalente tem dinâmica descrita por meio de uma massa dependente do parâmetro  $\tau$ , tal como uma massa dependente do tempo. Para calcularmos o comportamento do sistema no caso de “*meia replica*”, podemos reescrever a expressão da massa como:

$$m^2(\tau, n) = \sum_{l=0}^{n-1} \tilde{m}^2(\tau - l\tau_1), \quad (4.11)$$

$$\tilde{m}^2(\tau) = \begin{cases} m_R^2, & 0 \leq \tau < \beta \\ m_I^2, & \beta \leq \tau < \tau_1 \end{cases} \quad (4.12)$$

onde definimos  $\tau_1 \equiv (2n + 1)\beta$ .

A fim de obtermos o valor da fidelidade, o limite  $n \rightarrow 1/2$  para a função  $\tilde{m}^2(\tau, n)$  será necessário. Mas uma vez que a dependência em  $n$  vem como número de termos do somatório, o cálculo deste limite é não trivial. Se faz necessário uma maneira de reescrever  $\tilde{m}^2(\tau, n)$  de forma que a dependência em  $n$  apareça analiticamente.

Por meio da transformada de Fourier e suas propriedades, encontramos uma maneira de reescrever tal dependência. Inicialmente reescrevemos  $m^2(\tau, n)$  como

$$m^2(\tau, n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega M(\omega, n) e^{i\omega\tau}, \quad (4.13)$$

onde:

$$M(\omega, n) = \mathcal{F} [m^2(\tau, n)] (\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau m^2(\tau, n) e^{-i\omega\tau}. \quad (4.14)$$

Utilizando a propriedade geral de transformada de Fourier

$$\mathcal{F}[f(\tau - a)](\omega) = e^{-i\omega a} \mathcal{F}[f(\tau)](\omega), \quad (4.15)$$

podemos reescrever  $M(\omega)$  como

$$M(\omega, n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \sum_{l=0}^{n-1} \tilde{m}^2(\tau - l(2n+1)\beta) e^{-i\omega\tau} = \sum_{l=0}^{n-1} \frac{e^{-i\omega l\tau_1}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \tilde{m}^2(\tau) e^{-i\omega\tau}, \quad (4.16)$$

onde,

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \tilde{m}^2(\tau) e^{-i\omega\tau} \equiv \tilde{M}(\omega) = \frac{i m_R^2}{\omega\sqrt{2\pi}} (e^{-i\omega\beta} - 1) + \frac{i m_I^2}{\omega\sqrt{2\pi}} (e^{-i\omega\tau_1} - e^{-i\omega\beta}). \quad (4.17)$$

Se observarmos a expressão para  $M(\omega)$ , vemos uma soma de termos de uma progressão geométrica de  $n$  termos com primeiro termo  $\tilde{M}(\omega)/\sqrt{2\pi}$  e razão  $e^{-i\omega\tau_1}$ . Podemos contornar o fato de  $|e^{-i\omega\tau_1}| = 1$  adicionando um valor  $-\epsilon$  e depois tomarmos o limite de  $\epsilon$  indo a 0, por simplicidade, não iremos escrever para não carregar as notações. Assim, a soma destes termos é dada por:

$$M(\omega, n) = \frac{\tilde{M}(\omega)}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 - e^{-i\omega n\tau_1}}{1 - e^{-i\omega\tau_1}}. \quad (4.18)$$

E para eliminar o denominador, podemos aplicar a aproximação por série de Taylor:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} x^j. \quad (4.19)$$

Substituímos na expressão para  $M(\omega, n)$ :

$$M(\omega, n) = \frac{\tilde{M}(\omega)}{\sqrt{2\pi}} (1 - e^{-i\omega n\tau_1}) \sum_{j=0}^{\infty} e^{-i\omega j\tau_1}. \quad (4.20)$$

De forma que finalmente podemos escrever a expressão para  $\tilde{m}^2(\tau, n)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{m}^2(\tau, n) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left( \frac{i m_R^2}{\omega \sqrt{2\pi}} (e^{-i\omega\beta} - 1) + \frac{i m_I^2}{\omega \sqrt{2\pi}} (e^{-i\omega\tau_1} - e^{-i\omega\beta}) \right) \times \\ &\quad \times (1 - e^{-i\omega n \tau_1}) \left( \sum_{j=0}^{\infty} e^{-i\omega j \tau} \right) e^{i\omega\tau}, \end{aligned} \quad (4.21)$$

Por fim, realizamos a integração e novamente utilizando a propriedade de deslocamento para transformada de Fourier, obtemos a expressão:

$$\begin{aligned} \tilde{m}^2(\tau, n) &= \frac{m_R^2}{2} \sum_{j=0}^{\infty} [-\text{sign}(\tau - \beta - j\tau_1) + \\ &\quad + \text{sign}(\tau - \beta - (n + j)\tau_1) + \\ &\quad + \text{sign}(\tau - j\tau_1) - \text{sign}(\tau - (n + j)\tau_1)] + \\ &\quad + \frac{m_I^2}{2} \sum_{j=0}^{\infty} [-\text{sign}(\tau - (1 + j)\tau_1) + \\ &\quad + \text{sign}(\tau - (1 + n + j)\tau_1) + \\ &\quad + \text{sign}(\tau - \beta - j\tau_1) - \text{sign}(\tau - \beta - (n + j)\tau_1)]. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Esta função é capaz de descrever as expressões para todas as massas com valores de  $n$  inteiros. Tomando o limite  $n \rightarrow \frac{1}{2}$  desta expressão, para o intervalo  $0 \leq \tau \leq \beta$ , obtemos

$$\tilde{m}^2\left(\tau, \frac{1}{2}\right) = \frac{m_R^2}{2} + \frac{m_I^2}{2} \equiv m_{\frac{1}{2}}^2. \quad (4.23)$$

Observamos que esta expressão respeita a simetria de troca na fidelidade,  $F(\rho_R, \rho_I) = F(\rho_I, \rho_R)$  e recupera o resultado para o caso  $m_R = m_I$ .

Por estarmos trabalhando com uma função periódica, podemos aplicar um método similar e reescrever esta função por meio da série de Fourier, onde

$$m^2(\tau, n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \exp\left[i\frac{2\pi k}{T} \tau\right], \quad (4.24)$$

$$C_k = \frac{1}{T} \int_0^T m^2(\tau, n) \exp\left[-i\frac{2\pi k}{T} \tau\right].$$

Ao fazermos um processo parecido ao anterior, obtemos uma expressão para  $m^2(\tau, n)$  na forma

$$\begin{aligned}
m^2(\tau, n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \left( -\frac{n(2n+1)\beta}{i2\pi k} \right) [m_R^2(\exp \left[ i\frac{2\pi k}{n(2n+1)\beta} (t - \beta - l(2n+1)\beta) \right] - \\
&\quad - \exp \left[ i\frac{2\pi k}{n(2n+1)\beta} (t - \beta - (n-1)(2n+1)\beta - l(2n+1)\beta) \right] - \\
&\quad - \exp \left[ i\frac{2\pi k}{n(2n+1)\beta} (t - l(2n+1)\beta) \right] + \\
&\quad + \exp \left[ i\frac{2\pi k}{n(2n+1)\beta} (t - (n-1)(2n+1)\beta - l(2n+1)\beta) \right]) + \\
&\quad + m_I^2(\exp \left[ i\frac{2\pi k}{n(2n+1)\beta} (t - (2n+1)\beta - l(2n+1)\beta) \right] - \\
&\quad - \exp \left[ i\frac{2\pi k}{n(2n+1)\beta} (t - (2n+1)\beta - (n-1)(2n+1)\beta - l(2n+1)\beta) \right] - \\
&\quad - \exp \left[ i\frac{2\pi k}{n(2n+1)\beta} (t - \beta - l(2n+1)\beta) \right] + \\
&\quad + \exp \left[ i\frac{2\pi k}{n(2n+1)\beta} (t - \beta - (n-1)(2n+1)\beta - l(2n+1)\beta) \right]). \tag{4.25}
\end{aligned}$$

Para recuperar o resultado, temos que comparar este resultado com a serie de Fourier para uma função do tipo  $sign(\tau - a)$  de período  $T$ ,

$$\frac{sign(\tau - a)}{2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( -\frac{T}{i2\pi k} \right) \exp \left[ i\frac{2\pi k}{T} (t - a) \right], \tag{4.26}$$

assim, ao realizarmos o limite, encontraremos novamente

$$\tilde{m}^2\left(\tau, \frac{1}{2}\right) = m_{\frac{1}{2}}^2, \tag{4.27}$$

confirmando nosso resultado anterior.

## 4.4 Cálculo da fidelidade

Uma vez obtida a função  $\tilde{m}^2\left(\tau, \frac{1}{2}\right)$ , a dificuldade do cálculo reside em calcular as integrais funcionais contidas na expressão da fidelidade

$$F(\rho_I, \rho_R) = \left( \frac{\tilde{Z}_{\frac{1}{2}}[\beta]}{\sqrt{Z_R(\beta) Z_I(\beta)}} \right)^2, \tag{4.28}$$

onde cada função partição é dada por

$$Z_i[\beta] \equiv \int [D\phi_i] \delta \{ \phi_i(y, \beta) - \phi_i(y, 0) \} e^{-\int_0^\beta \int_0^\beta dy d\tau \mathcal{L}_i[\phi_i]} \tag{4.29}$$

e

$$\mathcal{L}_i[\phi_i] = \frac{1}{2}(\partial_x \phi_i)^2 + \frac{1}{2}(\partial_t \phi_i)^2 + \frac{1}{2}m_i^2 \phi_i^2 = \frac{1}{2}\phi_i(\partial^a \partial_a + m_i^2)\phi_i + \text{termos de superficie.} \quad (4.30)$$

Kleinert [27] mostra é realizado o cálculo de integrais funcionais de uma certa classe, por meio de determinantes dos operadores envolvidos. Integrais funcionais que apresentam esta forma, são conhecidas como integrais de Fresnel, por exemplo

$$\int [D\psi] \exp \left[ -\frac{i}{2} \int d^D x d^D x' \psi(x) M(x, x') \psi(x') \right], \quad (4.31)$$

onde  $D$  é a dimensão do espaço, e  $M(x, x')$  é, por hipótese, ser um operador real e simétrico. Estas integrais podem ser reescritas na forma discreta

$$\left[ \prod_n \int \frac{d\psi_n}{\sqrt{\frac{2\pi i}{e^D}}} \right] \exp \left[ -\frac{i}{2} \epsilon^D \sum_{n,m} \psi_n M_{nm} \psi_m \right]. \quad (4.32)$$

Podemos diagonalizar a matriz  $[M_{nm}]$  através de uma rotação

$$\psi_n \rightarrow \psi'_n = R_n^m \psi_m, \quad (4.33)$$

este tipo de transformação faz da medida da integração  $[D\psi]$  um invariante

$$\frac{\partial(\psi_1, \dots, \psi_n)}{\partial(\psi'_1, \dots, \psi'_n)} = \det [R^{-1}] = 1. \quad (4.34)$$

Nesta forma diagonal, a integral (4.32) pode ser calculada:

$$\left[ \prod_n \int \frac{d\psi'_n}{\sqrt{\frac{2\pi i}{e^D}}} \right] \exp \left[ -\frac{i}{2} \epsilon^D \sum_n \psi'_n M_n \psi'_n \right] = \prod_n \frac{1}{\sqrt{-\epsilon^D M_n}} = (\det [-\epsilon^D M])^{-\frac{1}{2}} \quad (4.35)$$

Uma vez que determinantes são invariantes por rotações, e a relação para matrizes  $\det[A] = \exp[\log \det[A]] = \exp[Tr[\log A]]$  é conhecida, no limite contínuo a integral funcional será dada por

$$\int [D\psi] \exp \left[ -\frac{i}{2} \int d^D x d^D x' \psi(x) M(x, x') \psi(x') \right] = (\det [-M])^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.36)$$

De forma que cada uma das funções partições resultar em

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{\frac{1}{2}}[\beta] &= \int [D\psi] \exp \left[ -\frac{i}{2} \int dr dr' \psi(r) (\partial_x^2 + \partial_\tau^2 + m_{\frac{1}{2}}^2) \delta(r - r') \psi(r') \right] \\ &= \left( \det \left[ -(\partial_x^2 + \partial_\tau^2 + m_{\frac{1}{2}}^2) \delta(r - r') \right] \right)^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (4.37)$$

$$\begin{aligned} Z_I[\beta] &= \int [D\psi] \exp \left[ -\frac{i}{2} \int dr dr' \psi(r) (\partial_x^2 + \partial_\tau^2 + m_I^2) \delta(r - r') \psi(r') \right] \\ &= \left( \det \left[ -(\partial_x^2 + \partial_\tau^2 + m_I^2) \delta(r - r') \right] \right)^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} Z_R[\beta] &= \int [D\psi] \exp \left[ -\frac{i}{2} \int dr dr' \psi(r) (\partial_x^2 + \partial_\tau^2 + m_R^2) \delta(r - r') \psi(r') \right] \\ &= \left( \det \left[ -(\partial_x^2 + \partial_\tau^2 + m_R^2) \delta(r - r') \right] \right)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

E, portanto, a expressão para fidelidade é dada por

$$F(\rho_I, \rho_R) = \left( \frac{\det \left[ -(\partial_x^2 + \partial_\tau^2 + m_I^2) \right] \det \left[ -(\partial_x^2 + \partial_\tau^2 + m_R^2) \right]}{\left( \det \left[ -(\partial_x^2 + \partial_\tau^2 + m_{\frac{1}{2}}^2) \right] \right)^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.40)$$

## 4.5 Teorema de Gel'fland-Yaglom

Por fim, o problema do cálculo da fidelidade para campos bosônicos livres reside em obter os determinantes de operadores diferenciais. Apesar de que para o caso de massas constantes o resultado seja conhecido, apresentaremos um método geral para se obter estes determinantes.

Utilizaremos o resultado de Gel'fland-Yaglom que relaciona o determinante de um operador com a solução de uma equação diferencial com determinadas condições iniciais [27][28][29]. A maneira mais fácil de escrever este teorema é considerar o operador hamiltoniano  $H = (-d^2/dx^2 + V(x))$  definido no intervalo  $x \in [0, L]$  com condições de contorno de Dirichlet

$$(-d^2/dx^2 + V(x))\psi(x) = \lambda\psi(x) \quad ; \quad \psi(0) = \psi(L) = 0 \quad (4.41)$$

Em vez de calcular o conjunto completo de autovalores de  $H$ , resolveremos o problema relacionado

$$(-d^2/dx^2 + V(x))\phi(x) = 0 \quad ; \quad \phi(0) = 0, \quad \dot{\phi}(0) = 1, \quad (4.42)$$

e teremos que o determinante

$$\det[H] = \det[(-d^2/dx^2 + V(x))] = \phi(L). \quad (4.43)$$

Por exemplo, estamos interessados na relação entre os determinantes

$$I = \frac{\det[(-d^2/dx^2 + m^2)]}{\det[(-d^2/dx^2)]}, \quad (4.44)$$

ambos definidos no intervalo  $x \in [0, L]$  com condições de contorno de Dirichlet. Podemos facilmente obter os autovalores para estes operadores,  $\lambda_n = m^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$  com  $n = 1, 2, 3, \dots$ , assim

$$I = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{m^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}{\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} = \prod_{n=1}^{\infty} \left[ 1 + \left(\frac{mL}{n\pi}\right)^2 \right] = \frac{\sinh(mL)}{mL}. \quad (4.45)$$

Para obter o resultado por meio do teorema de Gel'fland-Yaglom, precisamos resolver as equações diferenciais, obedecendo as condições de iniciais  $\phi(0) = \Phi(0) = 0$  e  $\dot{\phi}(0) = \dot{\Phi}(0) = 1$ , assim

$$(-d^2/dx^2 + m^2)\phi(x) = 0 \quad \longrightarrow \quad \phi = \frac{\sinh(mL)}{m} \quad (4.46)$$

$$(-d^2/dx^2)\Phi(x) = 0 \quad \longrightarrow \quad \Phi(x) = x$$

O teorema implica que a relação entre os determinantes será dada por

$$I = \frac{\phi(L)}{\Phi(L)} = \frac{\sinh(mL)}{mL}. \quad (4.47)$$

Este resultado pode ser generalizado para outras condições de contorno e para múltiplas variáveis [29]. Para um operador  $\mathcal{M}_{(i)} = -\left(\partial_x^2 + \partial_\tau^2 - m_{(i)}^2\right)$ , onde podemos aplicar separação de variáveis e tem região limitada, utilizaremos a relação

$$\ln \left( \frac{\det[\mathcal{M}_{(i)}]}{\det[\mathcal{M}_{(j)}]} \right) = \sum_k \text{deg}(k) \ln \left( \frac{\det[\mathcal{M}_{(i)k}]}{\det[\mathcal{M}_{(j)k}]} \right), \quad (4.48)$$

onde  $k$  é designada como a constante de separação,  $\text{deg}(k)$  é a degenerescência associada ao valor  $k$ , e  $\mathcal{M}_{(i)k}$  é o operador após a separação de variável. Por escolha, faremos  $\mathcal{M}_{(i)k} = \partial_\tau^2 - (k^2 + m_{(i)}^2)$ , operador limitado por valores de  $\tau \in [0, \beta]$

Para um operador  $\mathcal{M}_{(i)k}$  com condições periódicas, como no nosso caso, o determinante deste operador é dado por

$$\det[\mathcal{M}_{(i)k}] = \det_{2 \times 2} \left[ \mathbf{M} + \mathbf{N} \begin{pmatrix} u_1(\beta) & u_2(\beta) \\ u'_1(\beta) & u'_2(\beta) \end{pmatrix} \right], \quad (4.49)$$

para condições periódicas, as matrizes são escolhidas como  $\mathbf{M} = \mathbf{1}$ ,  $\mathbf{N} = -\mathbf{1}$ ,  $\mathbf{1}$  é a matriz identidade  $2 \times 2$ , e  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$  são soluções da equação diferencial

$$\mathcal{M}_{(i)k} u(t) = 0, \quad (4.50)$$

com as seguintes condições iniciais

$$\begin{aligned} u_1(0) &= 1 & ; & & u_2(0) &= 0 \\ u'_1(0) &= 0 & ; & & u'_2(0) &= 1. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Resolvendo a equação (4.49), temos que

$$\det[\mathcal{M}_{(i)k}] = 2 - (u_1(\beta) + u'_2(\beta)), \quad (4.52)$$

e para um operador do tipo  $\mathcal{M}_{(i)k}$ , temos como soluções

$$u_1(\tau) = \cosh \left( \sqrt{k^2 + m_i^2} \tau \right) \quad ; \quad u_2(\tau) = \frac{\sinh \left( \sqrt{k^2 + m_i^2} \tau \right)}{\sqrt{k^2 + m_i^2}}, \quad (4.53)$$

com degenerescência  $\text{deg}(k) = 1$ .

A expressão para a fidelidade 4.40 pode ser reescrita como

$$F(\rho_I, \rho_R) = \exp \left[ \frac{1}{2} \sum_k \text{deg}(k) \ln \left( \frac{\det[-(\partial_\tau^2 - (k^2 + m_I^2))]}{\det[-(\partial_\tau^2 - (k^2 + m_{\frac{1}{2}}^2))]} \right) \right] \times \exp \left[ \frac{1}{2} \sum_k \text{deg}(k) \ln \left( \frac{\det[-(\partial_\tau^2 - (k^2 + m_R^2))]}{\det[-(\partial_\tau^2 - (k^2 + m_{\frac{1}{2}}^2))]} \right) \right] \quad (4.54)$$

Substituindo as soluções para os determinantes, chegamos a :

$$F(\rho_I, \rho_R) = \prod_k \left[ \frac{\sinh \left( \sqrt{k^2 + m_I^2} \beta / 2 \right) \sinh \left( \sqrt{k^2 + m_R^2} \beta / 2 \right)}{\left( \sinh \left( \sqrt{k^2 + \left( \frac{m_I^2}{2} + \frac{m_R^2}{2} \right)} \beta / 2 \right) \right)^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (4.55)$$

onde podemos refinar os valores de  $k$ , se utilizarmos o fato do sistema ser periódico no espaço, ou seja , para a parte espacial:

$$\begin{aligned} \partial_x^2 \chi(x) &= -k^2 \chi(x) \\ \chi(x) &= A \cos(kx) + B \sin(kx) \\ \chi(x + L) &= \chi(x) \quad \implies \quad k = \frac{2\pi l}{L} \end{aligned} \quad (4.56)$$

para valores  $l \in \mathbb{Z}$ . Substituindo este valor em (4.55), temos o resultado final para fidelidade neste caso:

$$F(\rho_I, \rho_R) = \prod_{l=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\sinh \left( \sqrt{(2\pi l)^2 + L^2 m_I^2} \beta / 2L \right) \sinh \left( \sqrt{(2\pi l)^2 + L^2 m_R^2} \beta / 2L \right)}{\left( \sinh \left( \sqrt{(2\pi l)^2 + L^2 \left( \frac{m_I^2}{2} + \frac{m_R^2}{2} \right)} \beta / 2L \right) \right)^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.57)$$

Temos por fim, uma expressão que compara o comportamento assintótico dos dois sistemas que, como esperado, dependerá da temperatura, tamanho dos sistemas e principalmente da diferença de valores das massas.

## 4.6 Análise da fidelidade para campos bosônicos

Uma vez alcançada a expressão para a fidelidade, podemos estudar o seu comportamento ao variarmos os parâmetros do sistema.

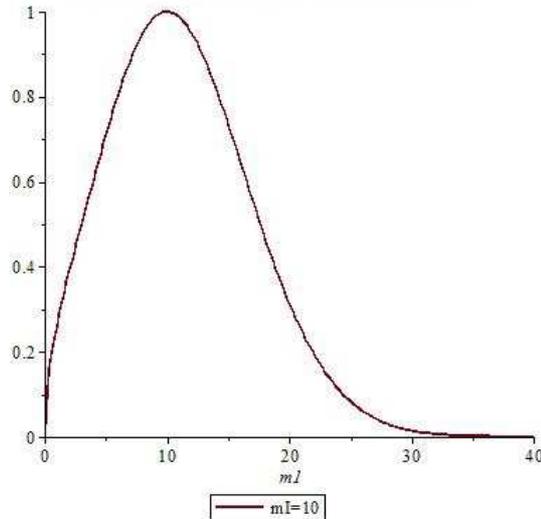


Figura 4.5: Fidelidade para diferentes massa. Podemos notar que para massas muito diferentes, a fidelidade irá a zero e é máxima para quando ambas as massas são iguais.

A figura (4.5) nos apresenta a fidelidade como função da massa real do sistema. Neste exemplo, foi utilizado um sistema com tamanho  $L = 10[L]$ ,  $\beta = 1[\beta]$ , e  $m_I = 10[m_I]$ . Como esperado, para massas iguais, o valor 1 para fidelidade é encontrado, respeitando a propriedade da fidelidade que o valor máximo e será igual a 1 apenas para sistemas de mesma matriz densidade. Podemos ver ainda que, para sistemas com valores muito diferentes de massa, a fidelidade cai a zero.

Na figura (4.6) são apresentadas fidelidades para diferentes valores de massa real, mas variando o tamanho do sistema. Foram utilizados os seguintes parâmetros  $\beta = 1[\beta]$ , e  $m_I = 1[m_I]$ . Vemos um comportamento para as curvas parecidos para diferentes valores de massa, sempre caindo de valor ao crescer o tamanho do sistema.

Na figura (4.7), observamos o comportamento para diferentes temperaturas,  $\beta = (1/k_B T)$ , para diferentes valores de massas reais. Utilizamos os parâmetros  $L = 10[L]$ , e  $m_I = 1[m_I]$ . E, como esperado, para temperaturas muito altas,  $\beta \rightarrow 0$ , temos os valores máximos na comparação. Estes serão menores quanto maior a diferença entre as massas.

Para temperaturas baixas,  $\beta \rightarrow \infty$ , a fidelidade irá se anular, dado que os sistemas irão aos estados fundamentais referentes a cada massa.

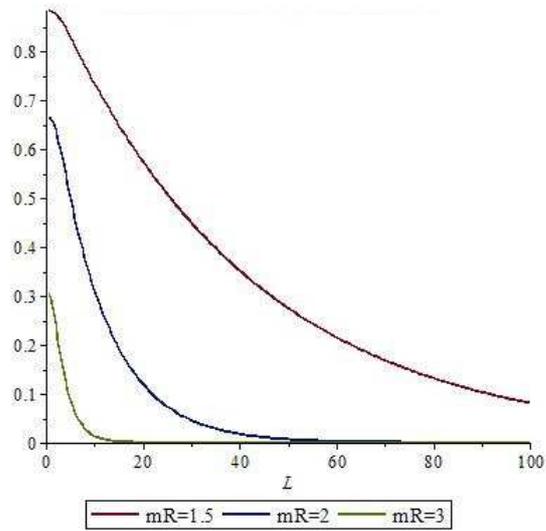


Figura 4.6: Fidelidade para diferentes dimensões de sistema. Para sistemas menores, há mais chances de similaridade entre os sistemas.

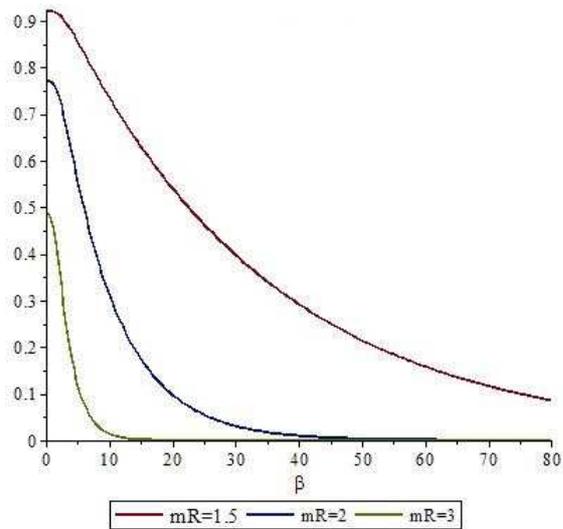


Figura 4.7: Fidelidade para diferentes temperaturas. Notamos que interações com reservatórios a altas temperaturas, os sistemas tendem a ser mais similares, o contrário acontece para reservatórios a baixas temperaturas.



# Aplicações

Neste capítulo, apresentaremos mais alguns casos onde o resultado do capítulo anterior pode ajudar na comparação entre misturas quânticas.

## 5.1 Teorias interagentes

Podemos lidar com interações de forma análoga ao tratamento dado a massa equivalente, definindo um potencial equivalente dependente do parâmetro  $\tau$ . Um exemplo no qual podemos estudar por esse método é potencial de sine-Gordon, consideremos dois sistemas descritos por este tipo de potencial, mas que apresentem valores diferentes das constantes  $m$  e  $\lambda$

$$U_1(\phi) = \frac{m_1^4}{\lambda_1} \left\{ \cos \left[ \frac{\sqrt{\lambda_1}}{m_1} \phi \right] - 1 \right\} \quad (5.1)$$

$$U_2(\phi) = \frac{m_2^4}{\lambda_2} \left\{ \cos \left[ \frac{\sqrt{\lambda_2}}{m_2} \phi \right] - 1 \right\}$$

Para valores pequenos de acoplamentos  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  em relação as constantes  $m_1$  e  $m_2$  respectivamente, podemos realizar uma expansão nestes parâmetros

$$U_1(\phi) = -\frac{1}{2}m_1^2\phi^2 + \frac{\lambda_1}{4!}\phi^4 - \frac{\lambda_1^2\phi^6}{6!m_1^2} + \dots \quad (5.2)$$

$$U_2(\phi) = -\frac{1}{2}m_2^2\phi^2 + \frac{\lambda_2}{4!}\phi^4 - \frac{\lambda_2^2\phi^6}{6!m_2^2} + \dots$$

Neste tipo de exemplo, caso façamos  $\lambda \rightarrow 0$ , teremos a equação para a partícula livre já estudada anteriormente. Sendo assim, podemos utilizar nossos resultados anteriores (4.57) para fazer diversas comparações entre dois sistemas que obedecem sine-Gordon, de valores diferentes para  $m$  no regime de acoplamento fraco.

Tomaremos um número  $k$  de termos para expansão. Apesar do resultado para campos bosônicos bidimensionais livres 4.57 não poder ser usado diretamente, desenvolveremos uma maneira similar de lidar com o cálculo da fidelidade para neste caso.

Partindo da expressão para a fidelidade generalizada em termos do campo equivalente

$$F(\rho_1, \rho_2) = \lim_{n \rightarrow \frac{1}{2}} \left( \frac{\tilde{Z}_n[(2n+1)n\beta]}{(Z_1(\beta))^n (Z_2(\beta))^{2n^2}} \right)^2, \quad (5.3)$$

definiremos uma lagrangiana equivalente em termos das expansões. Seja  $\tilde{\mathcal{L}}$  definida com base no potencial  $\tilde{U}(\tilde{\phi}, \tau)$ , dependente também do nosso tempo imaginário  $\tau$ , descrito por

$$\tilde{U}_n(\tilde{\phi}, \tau) = \begin{cases} U_1, & 0 \leq \tau \leq \beta \\ U_2, & \beta \leq \tau \leq (2n+1)\beta \\ U_1, & (2n+1)\beta \leq \tau \leq (2n+2)\beta \\ \dots & \\ U_2, & [n(2n+1)-1]\beta \leq \tau \leq n(2n+1)\beta \end{cases}, \quad (5.4)$$

Podemos reescrever este potencial na forma

$$\tilde{U}_n(\tilde{\phi}, \tau) = \sum_{i=1}^k \tilde{b}_i(\tau, n) \tilde{\phi}^{2i}, \quad (5.5)$$

onde cada coeficiente  $\tilde{b}_i(\tau, n)$  será expresso através dos coeficientes das expansões para  $U_1$  e  $U_2$ . Por exemplo  $\tilde{b}_2(\tau, n)$ , pode ser escrito como

$$\tilde{b}_2(\tau, n) = \begin{cases} \frac{\lambda_1}{4!}, & 0 \leq \tau \leq \beta \\ \frac{\lambda_2}{4!}, & \beta \leq \tau \leq (2n+1)\beta \\ \frac{\lambda_1}{4!}, & (2n+1)\beta \leq \tau \leq (2n+2)\beta \\ \dots & \\ \frac{\lambda_2}{4!}, & [n(2n+1)-1]\beta \leq \tau \leq n(2n+1)\beta \end{cases} \quad (5.6)$$

Sendo bastante similar ao caso apresentado na seção 4.3, no qual calculamos qual seria a massa equivalente ao tomarmos o limite  $n \rightarrow \frac{1}{2}$  para a fidelidade generalizada, tomando

a transformada de Fourier e reescrevendo a dependência em  $n$  de outra forma. No caso de aplicarmos a mesma técnica da expansão de Fourier para cada um dos coeficientes separadamente, encontraremos

$$\tilde{b}_i(\tau, n) = \frac{1}{2} \left( b_i^{(1)} + b_i^{(2)} \right), \quad (5.7)$$

e assim teremos

$$\tilde{b}_1 = -\frac{1}{2}(m_1^2 + m_2^2) \quad \tilde{b}_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1}{4!} + \frac{\lambda_2}{4!}\right) \quad \tilde{b}_3 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1^2}{6!m_1^2} + \frac{\lambda_2^2}{6!m_2^2}\right) \quad \dots \quad (5.8)$$

A dificuldade neste método está em calcular a função partição generalizada

$$\tilde{Z}_{\frac{1}{2}}[\beta] = \int [D\psi] \exp \left[ -\frac{i}{2} \int dx d\tau \left( (\partial_x \psi)^2 + (\partial_t \psi)^2 + \sum_{i=1}^k \tilde{b}_i \psi^{2i} \right) \right], \quad (5.9)$$

pois não é possível aplicar o método usado na seção 4.4 por não sermos capazes de escrever na forma de um integral de Fresnel.

Mas ilustrado no exemplo, podemos utilizar nosso método também para comparar sistemas através de expansões dos potenciais. Basta tratar cada coeficiente da expansão separadamente, com a única restrição dele não ser uma função do tempo imaginário  $\tau$ , restando apenas a dificuldade no cálculo para  $\tilde{Z}_{\frac{1}{2}}[\beta]$ .

## 5.2 Fonte externa constante

Um caso simples de interação que podemos estudar e aplicar nosso resultado é o de uma interação do sistema com uma fonte externa de partículas constante e que apresente uma distribuição do tipo gaussiana.

Queremos comparar nosso sistema ideal, descrito pela função de partição

$$Z_I[\beta] = \int [D\phi(y, \tau)] \delta\{\phi(y, \beta) - \phi(y, 0)\} \exp \left[ -\beta \int d^2r \left( \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 \right) \right], \quad (5.10)$$

com um sistema real, que interage com o meio externo por meio de um campo  $\xi$ , cuja forma conhecemos e não possui termo cinético. Podemos escrever sua função de partição na forma

$$\begin{aligned} Z_R[\beta, \xi] &= \int [D\phi(y, \tau)] \int [D\xi] \delta\{\phi(y, \beta) - \phi(y, 0)\} \times \\ &\times \exp \left[ -\beta \int d^2r \left( \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 - g\xi\phi + \frac{1}{2\Delta}\xi^2 \right) \right]. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Analisaremos alguns dos termos separadamente, assim podemos reescrever

$$\left( -g\xi\phi + \frac{1}{2\Delta}\xi^2 \right) = \frac{1}{2\Delta}(\xi - g\beta\Delta\phi)^2 - \frac{1}{2}g^2\Delta\phi^2. \quad (5.12)$$

Uma vez que será realizada uma integral funcional sobre todos os campos  $\xi$ , um deslocamento igual nos termos não irá influenciar o resultado. Portanto, podemos redefinir nossa fonte externa como

$$\bar{\xi} \equiv \xi - g\beta\Delta\phi, \quad (5.13)$$

de forma que a função partição para o sistema real pode ser escrita como

$$\begin{aligned} Z_R[\beta, \xi] &= \int [D\bar{\xi}] \exp \left[ -\beta \int d^2r \left( \frac{1}{2\Delta}\bar{\xi}^2 \right) \right] \int [D\phi(y, \tau)] \delta\{\phi(y, \beta) - \phi(y, 0)\} \times \\ &\times \exp \left[ -\beta \int d^2r \left( \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{1}{2}(m^2 - g^2\Delta)\phi^2 \right) \right] \\ &\equiv \mathcal{A} \int [D\phi(y, \tau)] \delta\{\phi(y, \beta) - \phi(y, 0)\} \times \\ &\times \exp \left[ -\beta \int d^2r \left( \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{1}{2}(m')^2\phi^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (5.14)$$

onde definimos  $\mathcal{A} \equiv \int [D\bar{\xi}] \exp \left[ -\beta \int d^2r \left( \frac{1}{2\Delta}\bar{\xi}^2 \right) \right]$  e  $(m')^2 \equiv (m^2 - g^2\Delta)$ , assim podemos analisar novamente este problema como o caso da fidelidade entre sistemas com massa diferentes, e o resultado obtido no capítulo anterior podendo ser utilizado diretamente para a comparação entre os dois sistemas.

## Conclusões

Como visto neste trabalho, apresentamos uma medida de comparação entre misturas quânticas, chamada *fidelidade*, talvez a mais direta entre as utilizadas. Ela que surge como uma generalização de projeção entre estados quânticos, é facilmente obtida para comparações entre matrizes finitas e diagonalizáveis. Mas se mostra difícil de ser calculada para sistemas mais complexos devido à dificuldade de se calcular raízes quadradas de operadores, tais como sistemas infinitos ou não diagonalizáveis.

Mostramos ser possível fazer este cálculo para estados térmicos, comuns em teorias de campo. E desenvolvemos todo um conjunto de técnicas que facilitam este cálculo, uma vez que estas matrizes são em geral, contínuas e dificultam obter tais raízes. Por meio de método de réplicas, conseguimos contornar este problema e obter uma expressão mais amigável para a fidelidade

$$F(\rho_I, \rho_R) = \lim_{n \rightarrow \frac{1}{2}} \left( \frac{\tilde{Z}_n[(2n+1)n\beta]}{(Z_R(\beta))^n (Z_I(\beta))^{2n^2}} \right)^2. \quad (6.1)$$

Para exemplificar o método, calculamos de maneira totalmente analítica, a fidelidade entre estados térmicos de sistemas bosônicos livres bidimensionais, mas de massas distintas. Por meio de técnicas da teoria de campos, foi possível encontrar uma expressão analítica para a fidelidade neste caso,

$$F(\rho_I, \rho_R) = \prod_{l=0}^{\infty} \left[ \frac{\sinh \left( \sqrt{(2\pi l)^2 + L^2 m_I^2} \beta / 2L \right) \sinh \left( \sqrt{(2\pi l)^2 + L^2 m_R^2} \beta / 2L \right)}{\left( \sinh \left( \sqrt{(2\pi l)^2 + L^2 \left( \frac{m_I^2}{2} + \frac{m_R^2}{2} \right)} \beta / 2L \right) \right)^2} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (6.2)$$

que respeita todas as propriedades esperadas para este cálculo. Foi demonstrado também

como este mesmo resultado pode ser aplicado em alguns casos, por exemplo, expansões para teorias interagentes e o caso interagente com campos externos. Tornando este, um resultado bastante robusto e relevante.

Este primeiro resultado, vindo de um caso simples, ainda poderia ser complementado por trabalhos subsequentes, tais como comparações entre sistemas que se encontram em temperaturas ou tamanhos diferentes um do outro. Mostrando que mesmo o caso de campos livre é bastante rico e pode render ainda novos trabalhos.

Imaginamos ser possível estender os argumentos e aplicar nosso método também para sistemas não apenas bosônicos, sendo viáveis também aplicá-los para os casos fermiônico e super simétrico.

Pode-se ir além da fidelidade, nosso método e resultado podem ser aplicados para o cálculo do *Eco de Loschmidt* [30]. Esta medida está relacionada à inversão temporal imperfeita de um sistema e à impossibilidade de se recuperar um estado quântico (não clonagem).

Ela mede o quão similares são o estado inicial  $|\psi_0\rangle$  de um sistema que evolui com hamiltoniana  $H_1$  durante um tempo  $t$  e o estado final, que tenta retornar ao estado inicial, partindo do estado  $U_{H_1}(t)|\psi_0\rangle$  mas com hamiltoniana  $H_2$  durante um tempo equivalente a  $-t$ , sendo  $H_2$  o quão próxima de  $H_1$  seja possível. O eco de Loschmidt  $M(t)$  entre duas hamiltonianas é usualmente descrito pela expressão:

$$M(t) = |\langle \psi_0 | e^{iH_2 t/\hbar} e^{-iH_1 t/\hbar} | \psi_0 \rangle|^2 \quad (6.3)$$

Este tipo de medida é importante para a implementação de um computador quântico, sendo também um indicador de viabilidade para o mesmo.

Sendo para a grande maioria dos casos, o Eco de Loschmidt é igual à fidelidade entre dois estados puros que evoluem a partir de um mesmo estado inicial mas com hamiltonianas diferente,  $H_1$  e  $H_2$ . Nosso método poderia ser utilizado para estender o cálculo do eco de Loschmidt para misturas quânticas.

Outra vertente possível para estudos é procurar novas medidas nas quais a técnica de cópias facilite o calculo. Nosso conjunto de técnicas facilitam bastante para outras

medidas que também apresentem raízes da matriz densidade.

Dentre as candidatas a tais medidas, podemos citar algumas apresentadas neste trabalho: são a norma-1 e, possivelmente, as normas de Schatten de forma geral, que por meio de um método irmão ao nosso poderiam ser mais facilmente obtidas e descritas por meio de expressões gerais e analíticas.



## Referências Bibliográficas

- [1] JOZSA, Richard. Fidelity for Mixed Quantum States. *Journal Of Modern Optics*, London, v. 12, n. 41, p.2315-2323, 1994. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1080/09500349414552171>>. Acesso em: 28 maio 2013.
  
- [2] COVER, T., and THOMAS, J., 1991, *Elements of Information Theory* (Wiley).
  
- [3] HORODECKI, Michal; HORODECKI, Pawel; HORODECKI, Ryszard. General teleportation channel, singlet fraction and quasi-distillation. 1999. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/quant-ph/9807091v2>>. Acesso em: 07 mar. 2015.
  
- [4] RAFSANJANI, Seyed Mohammad Hashemi; MIRHOSSEINI, Mohammad. Teleportation via classical entanglement. 2015. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1503.03807v1>>. Acesso em: 20 mar. 2015.
  
- [5] FUCHS, Christopher A.; GRAAF, Jeroen van de. Cryptographic Distinguishability Measures for Quantum-Mechanical States. *Ieee Trans. Inf. Theory*, New York, Us, v. 45, n. 4, p.1216-1227, maio 1999.
  
- [6] CALABRESE, Pasquale; CARDY, John. Entanglement Entropy and Quantum Field Theory. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/hep-th/0405152v3>>. Acesso em: 20 mar. 2015.

- 
- [7] CALABRESE, Pasquale; CARDY, John. Entanglement entropy and conformal field theory. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/0905.4013v2>>. Acesso em: 20 mar. 2015.
- [8] CALABRESE, Pasquale; CARDY, John; TONNI, Erik. Finite temperature entanglement negativity in conformal field theory. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1408.3043>>. Acesso em: 20 mar. 2015.
- [9] CALABRESE, Pasquale; CARDY, John; TONNI, Erik. Entanglement negativity in extended systems: A field theoretical approach. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1210.5359>>. Acesso em: 20 mar. 2015.
- [10] CALABRESE, Pasquale; CARDY, John; TONNI, Erik. Entanglement negativity in quantum field theory. 2012. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1206.3092>>. Acesso em: 20 mar. 2015.
- [11] SHANNON, C. E. "A mathematical theory of communication," The Bell System Tech. J., vol. 27, pp. 379–423, 623–656, 1948
- [12] SHOR, Peter. Quantum Information Theory: Results and Open Problems. In: SHOR, Peter et al. Visions in Mathematics: GAFA 2000 Special volume, Part II. Basileia: Springer, 2010. p. 816-838.
- [13] SCHLOSSHAUER, Maximilian. Decoherence, the measurement problem, and interpretations of quantum mechanics. 2005. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/quant-ph/0312059v4>>. Acesso em: 20 mar. 2015.
- [14] ZUREK, W. H., 1991, Phys. Today 44, 36.
- [15] ZUREK, W. H., 2003c, Phys. Rev. Lett. 90, 120404.
- [16] COHEN-TANNOUDJI, Claude; DIU Benard; LACË, Franck. Quantum Mechanics, Vol. 1. New York:Wiley, 1991.
- [17] SAKURAI, J.; NAPOLITANO, J.. Modern Quantum Mechanics. London: Addison-Wesley, 2010.

- [18] GOTTFRIED, Kurt; YAN, Tung-Mow. Quantum Mechanics: Fundamentals: Graduate Texts in Contemporary Physics. New York: Springer, 2004.
- [19] NIELSEN, Michael; CHUANG, Isaac. Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition. Cambridge: Cambridge University Press, 2011.
- [20] UHLMANN, A., 1976, Rep. Math. Phys ., 9, 273 .
- [21] MENDONÇA, Paulo E. M. F. et al. Alternative fidelity measure for quantum states. 2008. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/0806.1150v2>>. Acesso em: 20 mar. 2015.
- [22] FEDICHKIN, Leonid; FEDOROV, Arkady; PRIVMAN, Vladimir. Measures of Decoherence. Proceedings Of Spie, Orando, v. 5105, n. 1, p.243-254, abr. 2003.
- [23] NEUMANN, J. von . Mathematical Foundations of Quantum Mechanics. Princeton: University Press, 1983.
- [24] Gaetana Spedalieri et al 2013 J. Phys. A: Math. Theor. 46 025304
- [25] PAULA, F. M.; OLIVEIRA, Thiago. R. de; SARANDY, M. S.. Geometric quantum discord through the Schatten 1-norm. 2013. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1302.7034>>. Acesso em: 20 mar. 2015.
- [26] CASTELLANI, Tommaso; CAVAGNA, Andrea. Spin-Glass Theory for Pedestrians. 2005. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/cond-mat/0505032v1>>. Acesso em: 20 mar. 2015.
- [27] KLEINERT, Hagen. Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets. 2009. Disponível em: <<http://users.physik.fu-berlin.de/~kleinert/kleinert/?p=booklist>>. Acesso em: 20 mar. 2015.

- 
- [28] GEL'FLAND, I.M.; YAGLOM, A.M.. Integration in Functional Spaces and its Applications in Quantum Physics . Journal of Mathematical Physics 1, 48 (1960); doi: 10.1063/1.1703636
- [29] DUNNE, Gerald V.. Functional Determinants in Quantum Field Theory. 2007. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/0711.1178v1>>. Acesso em: 20 mar. 2015.
- [30] GOUSSEV, Arseni et al. (2012) Loschmidt echo. Scholarpedia, 7(8):11687.
- [31] RAJARAMAN, R.. Solitons and instantons. Amsterdam: North-holland, 1989.,
- [32] RAJARAMAN, R.. SOME NON-PERTURBATIVE SEMI-CLASSICAL METHODS IN QUANTUM FIELD THEORY\* (A PEDAGOGICAL REVIEW). Physics Letters, Amsterdam, v. 5, n. 21, p.227-313, maio 1975.