



INSTITUTO DE FÍSICA
Universidade Federal Fluminense

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Cosmologia proveniente de uma teoria de calibre modificada para a gravidade

Guilherme Silva de Araújo Sadovski

Niterói
2015

Guilherme Silva de Araújo Sadoski

Cosmologia proveniente de uma teoria de calibre modificada para a gravidade

Dissertação apresentada ao colegiado do Programa de Pós-graduação em Física da UFF, como requisito parcial para a obtenção do grau de MESTRE em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Rodrigo Ferreira Sobreiro

Niterói
2015

S126 Sadovski, Guilherme Silva de Araújo.

Cosmologia proveniente de uma teoria de calibre modificada para a gravidade / Guilherme Silva de Araújo Sadovski ; orientador: Rodrigo Ferreira Sobreiro -- Niterói, 2015.
74 p. : il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Fluminense, Instituto de Física, 2015.
Bibliografia: p. 67-73.

1. COSMOLOGIA. 2.GRAVIDADE QUÂNTICA. 3.TEORIA DE CALIBRE.
I. Sobreiro, Rodrigo Ferreira, Orientador. II.Universidade Federal Fluminense. Instituto de Física, Instituição responsável. III.Título.

CDD 523.1

Guilherme Silva de Araújo Sadoski

Cosmologia proveniente de uma teoria de calibre modificada para a gravidade

Dissertação apresentada ao colegiado do Programa de Pós-graduação em Física da UFF, como requisito parcial para a obtenção do grau de MESTRE em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Rodrigo Ferreira Sobreiro

Aprovado em 26 de Fevereiro de 2015

BANCA EXAMINADORA

MEMBROS TÍTULARES

Prof. Dr. Rodrigo Ferreira Sobreiro

Instituto de Física - UFF

Prof. Dr. Felipe Tovar Falciano

Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas - CBPF

Prof^a. Dr^a. Maria Emília Xavier Guimarães

Instituto de Física - UFF

Prof. Dr. Santiago Esteban Perez Bergliaffa

Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ

MEMBROS SUPLENTES

Prof. Dr. Carlos Enrique Navia Ojeda

Instituto de Física - UFF

Resumo

O objetivo principal desta dissertação é o de testarmos a consistência em larga-escala de um modelo de gravidade quântica. Este modelo consiste de uma teoria de Yang-Mills para o grupo de calibre $SO(m, n)$ escrita em um espaço-tempo euclidiano quadridimensional. Ao tomarmos o limite infravermelho, a álgebra do grupo $SO(m, n)$ sofre uma contração de Inönü-Wigner e é deformada na álgebra de Poincaré, quebrando, assim, a simetria de calibre. Como consequências, temos o surgimento das simetrias locais de Lorentz e a identificação dos campos de calibre com a *vierbein*, $e(x)$, e a conexão de spin, $\omega(x)$. A gravidade resultante é uma teoria efetiva tipo-Einstein-Cartan que contém termos de correção ultravioleta e campo de torção propagante. Uma vantagem deste modelo de gravidade induzida é o surgimento natural de uma constante cosmológica gravitacional que, junto com a constante de Newton, G , pode ser calculada perturbativamente. Utilizamos a métrica FLRW e o *ansatz* de um espaço-tempo riemanniano para demonstramos que esta gravidade efetiva possui o Modelo Cosmológico Padrão como seu limite infravermelho. Além disso, o setor ultravioleta de teoria prevê uma fase de Sitter hiper-acelerada que pode vir a ser associada à inflação e prevê também a presença de matéria exótica no Universo primordial.

Palavras-chave: Cosmologia. Gravidade Quântica. Gravidade Efetiva. Teoria de Calibre.

Abstract

Our main goal in this thesis is to test the large-scale consistency of a quantum gravity model. This model consists of a Yang-Mills theory with gauge group $SO(m, n)$ written in a four-dimensional euclidean space-time. In the infrared limit, the $SO(m, n)$ algebra undergoes an Inönü-Wigner contraction to Poincaré algebra and the gauge symmetry is broken. As consequence, Lorentz local symmetries arise and the gauge fields can be identified with a vierbein field, $e(x)$, and a spin connection field, $\omega(x)$. The resulting gravity is an effective Einstein-Cartan-like theory with ultraviolet correction terms and propagating torsion field. An advantage of this model is the natural appearance of a gravitational cosmological constant that, along with Newton's gravitational constant, G , can be calculated perturbatively. Making use of the FLRW metric and the *ansatz* of a riemannian spacetime we demonstrate that this effective gravity has the Standard Cosmological Model in its infrared sector. Furthermore, the ultraviolet regime foresees a hyper-accelerated de Sitter phase that may prove to be inflationary and also foresees the presence of exotic matter in the early Universe.

Keywords: Cosmology. Quantum Gravity. Effective Gravity. Gauge Theory.

Sumário

1	Introdução	9
2	Teorias de Gravidade	12
2.1	A gravidade einsteiniana	12
2.2	A gravidade de Einstein-Cartan-Sciama-Kibble	17
2.2.1	Élie Cartan: a metricidade e a afinidade	17
2.2.2	Tom Kibble e Dennis Sciama: teorias de calibre e gravidade	17
2.2.3	Os fundamentos da teoria ECSK	18
3	O Modelo Cosmológico Padrão	24
3.1	Os fundamentos do Modelo Cosmológico Padrão	24
3.2	As equações de Friedmann	29
3.3	A Lei de Hubble, a origem e o destino do Universo	31
3.4	Os modelos de Friedmann	35
3.4.1	Universos dominados por poeira	36
3.4.2	Universos dominados por radiação	36
3.5	A expansão acelerada do Universo e a Energia escura	38
3.5.1	Universos dominados por vácuo	40
4	A gravidade induzida por uma Teoria de Yang-Mills	42
4.1	A teoria de Yang-Mills para o grupo $SO(m, n)$	42
4.2	A quebra dinâmica de simetria e a teoria de gravidade efetiva	45

5	A cosmologia proveniente de uma teoria de gravidade efetiva	49
5.1	A cosmologia do setor infravermelho	49
5.2	A cosmologia do setor ultravioleta	50
5.2.1	Universos dominados por vácuo	50
5.2.2	Universos dominados por um fluido perfeito	53
5.3	Cosmologia do setor ultravioleta profundo	56
5.3.1	Perturbações de primeira ordem nas soluções de de Sitter	57
6	Conclusões	60
A	Tópicos complementares do Modelo Cosmológico Padrão	64
A.1	Interpretação Newtoniana para as equações de Friedmann	64
A.2	O tempo de Hubble e a idade máxima do Universo	65
	Referências Bibliográficas	67

Lista de Figuras

3.1	(a) Um feixe arbitrário de geodésicas seguidos pelas galáxias a, b, \dots, f . (b) Uma congruência de geodésicas seguidas pelas galáxias a, b, \dots, f	26
3.2	O tempo cósmico e a folheação do espaço-tempo.	26
3.3	Exemplos de variedades maximalmente simétricas, imersas no \mathbb{R}^3 , com os diversos valores de κ . Infelizmente não é possível representarmos um 3-hiperboloide ou uma 3-esfera tridimensionalmente.	28
3.4	Representação da expansão métrica sobre uma curva tipo-espaço no caso de $\kappa = 0$. A contração tem o efeito contrário, basta inverter o sentido da seta. As linhas pontilhadas indicam que cada hipersuperfície se estende infinitamente.	29
3.5	Evolução do fator de escala para os diferentes valores de κ	34
3.6	O decaimento da densidade de radiação, ρ_r , e da densidade de poeira, ρ_p , a medida que o Universo se expande. A linha descontínua marca a época de igualdade entre a radiação e a poeira.	37
3.7	Evolução das três contribuições para a densidade de energia do Universo. A primeira linha descontínua marca a época de igualdade entre radiação e poeira. A segunda linha descontínua marca a época de igualdade entre poeira e vácuo.	41

Capítulo 1

Introdução

Há décadas muito esforço tem sido empregado na busca de uma teoria de gravidade quântica. Diversas candidatas foram estudadas no século passado, culminando no desenvolvimento de duas principais teorias. A Teoria de Cordas [1, 2, 3] e a *Loop Quantum Gravity* (LQG) [4, 5] são tidas como as teorias de gravidade quântica mais promissoras que possuímos atualmente. No entanto, apesar de partilharem certas características, elas são fundamentalmente diferentes entre si.

A Teoria de Cordas teve como berço a Física de Partículas Elementares, ela nasceu como resultado de irmos além do Modelo Padrão, incorporando ideias como supersimetria, dimensões extras, teorias de unificação, etc. Já a LQG nasceu da tentativa de quantização da própria Relatividade Geral, iniciada nos anos 30 por P. A. M. Dirac (1902-1984), passando pela quantização canônica, equação de Wheeler-DeWitt, etc [6, 7]. No entanto, todas as teorias de gravidade quântica desenvolvidas até então, incluindo estas, apresentam os mais variados problemas. Por exemplo, a Teoria das Cordas necessita de dimensões espaciais extras e de supersimetria para manter sua consistência interna. Ninguém sabe se estas características realmente estão presentes na Natureza. Além disso, a Teoria de Cordas não é capaz de determinar univocamente uma única teoria quântica de campos como limite de baixas energias [8]. A LQG, por sua vez, ainda possui muito pontos obscuros em sua dinâmica, em seu acoplamento com férmions e também no seu limite de baixas energias [9, 10].

As dificuldades apresentadas pelas Teorias de Cordas e LQG, por exemplo, contrastam com o enorme sucesso do Modelo Padrão (MP) da Física de Altas Energia [11, 12, 13]. De fato, este último é tido como a joia da coroa da Física contemporânea. Isto se deve, principalmente, à altíssima precisão de suas previsões. Na Eletrodinâmica Quântica, por exemplo, o valor teórico previsto para a constante de estrutura fina é confirmado experimentalmente com a precisão de 10 partes por bilhão (10^{-8}). Esta concordância é considerada a previsão mais precisa de toda a Física.

A estrutura dinâmica do MP consiste de uma ação de Yang-Mills, construída de forma a ser invariante por um grupo semi-simples de transformações locais agindo sobre o espaço-tempo: a chamada simetria de calibre. Este grupo de calibre é o grupo não-abeliano $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ que dá origem a três das quatro interações fundamentais conhecidas. O campo eletromagnético surge do setor abeliano, $U(1)$, enquanto o campo de sabor e de cor surgem do setor não-abeliano, $SU(2) \times SU(3)$. A teoria pode ser quantizada via, por exemplo, integrais de trajetória.

Parte do grande sucesso das teorias de calibre em descrever interações fundamentais se dá pelo fato delas serem renormalizáveis e unitárias, gerando uma teoria quântica consistente. Não que todas as teorias de calibre sejam renormalizáveis, todavia as únicas teorias renormalizáveis que descrevem nosso Universo são teorias de calibre. Portanto, é natural esperarmos que uma teoria de gravidade quântica consistente seja obtida de uma teoria de calibre para a interação gravitacional.

O capítulo 2 desta dissertação tem como objetivo deixar claro que a gravidade clássica é uma teoria intimamente ligada à geometria do espaço-tempo. Como tal, sua estrutura algébrica difere da estrutura algébrica de teorias de calibre. O fato de não podermos formular a gravidade como uma teoria de calibre para o grupo de Poincaré levanta a suspeita da gravidade realmente não ser uma interação fundamental.

No capítulo 3 introduziremos os conceitos fundamentais do chamado Modelo Cosmológico Padrão (MCP) [14, 15, 16]. Este modelo descreve a evolução do nosso Universo baseado nas equações dinâmicas da Relatividade Geral. A importância deste capítulo jaz na introdução do conhecimento teórico necessário para que possamos avaliar a consistência em larga-escala de outras teorias de gravidade, incluindo candidatas a teoria de gravidade quântica. De fato, esta última deve apresentar, em seu setor infravermelho, uma cosmologia condizente com o nosso conhecimento atual sobre o Universo em larga-escala.

No capítulo 4 seguiremos a tendência ditada pela Natureza e partiremos do pressuposto que todas as interações fundamentais são descritas por teorias de calibre. Desta forma, a gravidade deve ser encarada como uma teoria efetiva, que se manifesta apenas no regime infravermelho de alguma teoria (de calibre) mais fundamental. Iremos propor que esta teoria fundamental seja uma teoria de Yang-Mills para o grupo $SO(m, n)$ e discutiremos o mecanismo pelo qual a gravidade pode surgir. Em seguida, faremos uma rápida discussão das principais características desta teoria de gravidade efetiva.

O capítulo 5 será dedicado ao teste em larga-escala desta gravidade efetiva. O objetivo principal é procurarmos o MCP no regime infravermelho desta teoria. Desta forma, podemos ter certeza que ela condiz com o paradigma atual da origem e evolução do Universo. Em seguida, analisaremos a região ultravioleta, onde a curvatura espaço-temporal é suposta ser muito grande, buscando soluções fisicamente razoáveis que talvez descrevam

o estado primordial do Universo.

Capítulo 2

Teorias de Gravidade

Neste capítulo, apresentaremos uma sucinta discussão sobre duas importantes formulações relativísticas de uma teoria clássica da gravidade. Tentaremos seguir uma abordagem um pouco mais axiomática para que fique claro a diferença nos fundamentos de cada teoria, suas vantagens e desvantagens. Portanto, alerto que não é nossa intenção aqui apresentar o ferramental matemático [17, 18, 19, 20], nos aprofundarmos no desenvolvimento de cada formulação, ou ainda em efeitos físicos provenientes de teorias relativísticas da gravidade [21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30]. Nos contentaremos com o necessário para introduzirmos conceitos básicos do formalismo utilizado na teoria de Einstein-Cartan-Sciama-Kibble, pois estes serão importantes no desenvolvimento de nosso trabalho.

2.1 A gravidade einsteiniana

Em 1905 Albert Einstein (1879-1955) publicou o artigo “*Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento*” [31, 32] em que propôs uma solução para a inconsistência entre o eletromagnetismo maxwelliano e a mecânica newtoniana. A relatividade especial (RE), como ficou conhecida, apoia-se firmemente em um princípio de simetria; subestimados na época. Neste caso, o triunfo de Einstein foi perceber que as simetrias do eletromagnetismo são as que melhor representam as simetrias fundamentais da Natureza. Em uma linguagem moderna, isto significa que todas as leis fundamentais da Física devem ser covariantes por representações no grupo de Poincaré, $ISO(1, 3)$.

Nos anos seguintes, a busca pela estrutura matemática por detrás dos enunciados físicos de Einstein atraiu muita atenção. Através dos esforços de Hermann Minkowski (1864-1909), Vladimir Ignatowsky (1875-1942), Phillip Frank (1884-1966), Hermann Rothe (1882-1923), Aleksandr D. Aleksandrov (1912-1999) e outros [33], ficou claro que a RE

nada mais é do que a adoção de uma estrutura causal que permite apenas interações locais¹. Sendo as interações não-locais, i.e., as ações à distância da mecânica newtoniana, meras aproximações válidas apenas para um regime de baixas velocidades comparadas a da luz. Esta interpretação mais profunda fica explícita ao analisarmos, por exemplo, o teorema de não-interação de Van Dam e Wigner [34], que demonstra a necessidade de introduzirmos campos locais para mediar interações no espaço-tempo². Sob esta ótica, fica explícita a incompatibilidade entre a RE e a gravitação universal de Isaac Newton.

Einstein, já ciente desta inconsistência, trabalhava para obter uma teoria relativística para a interação gravitacional. Em mais uma demonstração de sua extrema intuição física, Einstein descobriu que o princípio da equivalência galileano³ equivale a dizermos que a ação de um campo gravitacional sobre um corpo é localmente indistinguível de acelerações fictícias. A conclusão tirada disto é que, localmente, referenciais inerciais e não-inerciais são igualmente válidos na descrição de fenômenos físicos. Logo, a simetria global $ISO(1, 3)$ da RE deve ser substituída por simetrias locais do grupo geral de transformações afins, $A(4, \mathbb{R})$; isto justifica o nome Relatividade Geral dado à esta teoria de gravidade.

Numa abordagem geométrica, a impossibilidade de adotarmos um sistema coordenado global para o espaço-tempo significa que sua geometria é curva e, portanto, precisa ser descrita por um campo tensorial métrico, $g_{\mu\nu}(x)$. Sob o ponto de vista de Einstein, este era o campo fundamental da sua teoria de gravidade, responsável por todos os efeitos puramente gravitacionais e pelo qual todas as propriedades geométricas do espaço-tempo deveriam ser extraídas⁴. Em particular, para que a conexão afim, $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}(x)$, seja obtida de $g_{\mu\nu}(x)$, é necessário assumirmos que ela é uma conexão métrica e livre de torção. Isto significa, respectivamente, que o tensor de não-metricidade, $C_{\alpha\mu\nu}$, e o tensor de torção, $Q^\alpha_{\mu\nu}$, são ambos nulos:

$$C_{\alpha\mu\nu} \equiv \nabla_\alpha g_{\mu\nu}(x) = 0, \quad (2.1)$$

$$Q^\alpha_{\mu\nu}(x) \equiv \frac{1}{2} [\Gamma^\alpha_{\mu\nu}(x) - \Gamma^\alpha_{\nu\mu}(x)] = 0. \quad (2.2)$$

Nestas condições, a conexão afim $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}(x)$ é dada pelos símbolos de Christoffel, $\{\overset{\alpha}{\mu\nu}\}$,

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu}(x) = \{\overset{\alpha}{\mu\nu}\} \equiv \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} (-\partial_\lambda g_{\mu\nu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\lambda\mu}), \quad (2.3)$$

¹ Uma interação é chamada de local quando seus efeitos afetam imediatamente apenas a sua vizinhança.

² Segundo este teorema, a conservação de energia-momento exige que a linha de mundo de duas partículas sejam sempre linhas retas. Nunca pode haver, portanto, interações entre elas. Por esta razão, é necessário introduzirmos um ente físico que medeie a interação, i.e., que “guarde” a energia-momento “desaparecida” após o processo de colisão elástica [35].

³ Também conhecido como o princípio universal da queda livre, este princípio atesta a igualdade entre massa inercial e massa gravitacional. Ou seja, que dois corpos de massas quaisquer imersos em um campo gravitacional estarão sempre sujeitos a uma mesma aceleração.

⁴ Por este motivo, muitas vezes a relatividade geral é chamada de teoria métrica da gravidade, ou simplesmente gravidade métrica.

e ganha o nome de conexão de Levi-Civita. A sua curvatura pode, então, ser calculada a partir do tensor métrico. Isto é feito pelo tensor de Riemann,

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu}(x) = \partial_\mu \{ \nu\beta^\alpha \} - \partial_\nu \{ \mu\beta^\alpha \} + \{ \mu\sigma^\alpha \} \{ \nu\beta^\sigma \} - \{ \nu\sigma^\alpha \} \{ \mu\beta^\sigma \}. \quad (2.4)$$

Todas estas conclusões que chegamos podem ser resumidas no seguinte postulado:

Postulado 1 (Estrutura espaço-temporal). *O espaço-tempo (i.e., o conjunto de todos os eventos) é descrito por uma variedade pseudo-riemanniana quadridimensional, \mathcal{M}_4 , dotada de um campo métrico, $g_{\mu\nu}(x)$, de assinatura $(-, +, +, +)$ e uma conexão de Levi-Civita, $\{ \mu\nu^\alpha \}(x)$.*

Agora, precisamos determinar como a geometria do espaço-tempo evolui. Em uma teoria de campo usual, as equações dinâmicas do campo em questão podem ser derivadas a partir de um princípio variacional, assumiremos que este é o caso. Para determinarmos corretamente a forma da ação gravitacional, precisamos postular que as equações de Euler-Lagrange resultantes contêm, no máximo, derivadas de segunda ordem⁵ do campo métrico. Precisamos também assumir que sua solução constitui um problema de Cauchy.

Postulado 2 (Dinâmica). *O campo gravitacional satisfaz ao princípio de Hamilton; as equações de campo são tensoriais, envolvem, no máximo, derivadas de segunda ordem da métrica e os dados de Cauchy são necessários para resolvê-las univocamente.*

Este postulado é, na verdade, uma herança da mecânica clássica: a possibilidade de determinarmos o campo gravitacional, em qualquer momento, a partir do conhecimento de um ponto do espaço de configurações. É, também, uma característica da dinâmica hamiltoniana e, portanto, sugere que talvez uma versão quântica da teoria, obtida através do método canônico de quantização, possa existir.

Em um espaço-tempo definido pelo postulado 1, a ação de gravidade mais geral possível que satisfaz o postulado 2 é, segundo o teorema de Lovelock [36],

$$S_g[g_{\mu\nu}(x)] = \int_{\mathcal{M}_4} [\alpha_0 (R^{\alpha\beta\mu\nu} R_{\alpha\beta\mu\nu} - 4R^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + R^2) + \alpha_1 R + \alpha_2] \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.5)$$

sendo os α 's constantes arbitrárias. Em particular, o termo entre parênteses é conhecido como densidade de Gauss-Bonnet. Sua integral sobre uma variedade quadridimensional, \mathcal{M}_4 , resulta no invariante topológico de Euler, χ_4 , que não contribuirá para as equações

⁵ Esta característica gera à teoria de Einstein mais um rótulo: gravidade de 2ª ordem.

de campo⁶. Portanto, podemos reduzir a ação (2.5) para:

$$S_g = \int_{\mathcal{M}_4} (\alpha_1 R + \alpha_2) \sqrt{-g} d^4x. \quad (2.6)$$

No terceiro postulado definiremos como um campo físico qualquer, $\phi(x)$, se acopla à geometria do espaço-tempo.

Postulado 3 (Acoplamento). *A ação S , que descreve a interação do campo gravitacional, $g_{\mu\nu}(x)$, com um campo físico, $\phi(x)$, é dada pela simples soma da ação que descreve o campo gravitacional, S_g , com a ação que descreve o campo físico, S_ϕ .*

Portanto, S é, simplesmente,

$$S = \alpha_1 \int_{\mathcal{M}_4} \left(R + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} + \alpha_1^{-1} \mathcal{L}_\phi \right) \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.7)$$

onde \mathcal{L}_ϕ é a densidade de lagrangiana do campo ϕ . Fica claro, então, que a consequência do postulado 3 é identificarmos a constante α_1^{-1} como a constante de acoplamento entre o campo ϕ e a geometria do espaço-tempo. O princípio de equivalência, implicitamente contido no postulado 1, exige que todo ente físico sinta um mesmo campo gravitacional, i.e., qualquer que seja a natureza do campo ϕ em questão, esta não pode interferir em como este campo se acopla à geometria do espaço-tempo. Portanto, a ação (2.7) descreve o acoplamento de qualquer que seja(m) o(s) campo(s) físico(s) com a geometria do espaço-tempo. Sendo assim, podemos chamá-los coletivamente de campos de matéria, ou simplesmente matéria.

O valor da constante de acoplamento, α_1^{-1} , i.e., o quanto a geometria do espaço-tempo é modificada pela presença de matéria, é facilmente obtido ao aplicarmos o chamado *princípio da correspondência*. Este princípio determina que a teoria se reduza à gravitação newtoniana no limite não-relativístico. Este será o quarto e último postulado da RG.

Postulado 4 (Princípio da Correspondência). *No limite de campo fraco e de baixas velocidades comparadas à da luz, a gravitação newtoniana deve ser retomada.*

Portanto, no limite descrito, as equações de Euler-Lagrange provindas da ação (2.7) devem se reduzir à equação de Poisson para o potencial gravitacional newtoniano. Isto acaba

⁶ Em espaços-tempos de dimensão par, os termos de curvatura de mais alta potência formam o termo topológico de Euler (que não contribui para as equações de campo *on-shell*). Em particular, espaços-tempos quadridimensionais têm a particularidade de possuir como termo topológico justamente a densidade de Gauss-Bonnet. Portanto, em $D = 4$, o termo de Gauss-Bonnet em nada acrescenta à dinâmica do campo gravitacional, apesar dele ser um importante termo de correção ultravioleta para $D > 4$.

fixando o valor de α_1 e α_2/α_1 em:

$$\alpha_1 = \frac{c^4}{16\pi G}, \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 0, \quad (2.8)$$

sendo G a constante da gravitação universal e c a velocidade da luz no vácuo. A ação S fica, portanto, unicamente determinada⁷. Em particular, a ação puramente gravitacional S_g é dada, em unidades de $c = 1$, por

$$S_{\text{E-H}}(g) = \frac{1}{2\chi} \int_{\mathcal{M}_4} R\sqrt{-g}d^4x. \quad (2.9)$$

onde a definição da constante $\chi \equiv 8\pi G$ foi e será usada daqui por diante. Esta é a chamada ação de Einstein-Hilbert, obtida por David Hilbert em novembro 1915 [37]. Supondo uma variação infinitesimal do campo gravitacional que se anula na fronteira da variedade,

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g_{\mu\nu}(x) + \delta g_{\mu\nu}(x) \quad ; \quad \delta g_{\mu\nu}(x)|_{\partial\mathcal{M}_4} = 0. \quad (2.10)$$

A variação em primeira ordem da ação total S será dada por

$$\delta S \equiv S(g + \delta g) - S(g) = \frac{1}{\chi} \int_{\mathcal{M}_4} (G^{\mu\nu} - \chi T^{\mu\nu}) \delta g_{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.11)$$

sendo $G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - (1/2)Rg^{\mu\nu}$ as componentes do chamado tensor de Einstein e $T^{\mu\nu} \equiv (2/\sqrt{-g})\delta\mathcal{L}_\phi/\delta g_{\mu\nu}$ as componentes do chamado tensor energia-momento [21]. Finalmente, impondo o princípio de Hamilton, $\delta S = 0$, obtemos as equações de Euler-Lagrange,

$$G^{\mu\nu} = \chi T^{\mu\nu}. \quad (2.12)$$

Essas são as chamadas equações de Einstein. Fica claro, portanto, que a fonte de curvatura do espaço-tempo é o tensor energia-momento. As equações de Einstein formam um sistema de 10 EDP's não-lineares acopladas, característica que as tornam quase impossíveis de serem resolvidas analiticamente, excetuando-se alguns poucos casos de alta simetria. Elas foram publicadas por Einstein, também em novembro 1915 [38]. Historicamente não é claro quem as derivou primeiro, porém, alguns anos depois, Hilbert atribuiu o feito à Einstein e qualquer polêmica maior sobre o assunto se encerrou.

⁷ Veremos no Capítulo 3 que o termo α_2/α_1 assume um valor não-nulo em larga-escala e está associado à chamada Constante Cosmológica.

2.2 A gravidade de Einstein-Cartan-Sciama-Kibble

2.2.1 Élie Cartan: a metricidade e a afinidade

De forma geral, conceitos geométricos como tamanho, ângulo, área, volume, em uma variedade, estão codificados no tensor métrico, $g_{\mu\nu}(x)$. Por outro lado, outras propriedades geométricas tal como o paralelismo, estão codificadas na conexão afim, $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}(x)$. Podemos, então, fazer a separação destes conceitos em duas classes, nomeadamente metricidade e afinidade, que, em princípio, são logicamente independentes uma da outra [39]. Porém, nada proíbe de reduzirmos o paralelismo, por exemplo, à uma mera medida de ângulos. Isto é exatamente a essência da geometria riemanniana: todos os conceitos geométricos reduzidos à conceitos métricos.

A distinção entre metricidade e afinidade iniciou uma controvérsia entre Einstein e o matemático francês Élie Cartan (1869-1951). De um lado, Einstein defendia a economia de campos fundamentais e, portanto, uma geometria riemanniana para o espaço-tempo. Do outro, Cartan argumentava que o tensor métrico e a conexão afim são campos independentes e, portanto, não era necessário adotar uma conexão livre de torção, *vide* (2.2). Apesar de menos econômico em graus-de-liberdade, introduzidos pela torção não-nula, o ponto de vista de Cartan é mais econômico em suposições sobre a geometria do espaço-tempo, e portanto, mais geral. Isto é uma clara vantagem no contexto de uma teoria de gravidade cujo objetivo é justamente prever propriedades geométricas de uma variedade.

O artigo de 1922 no qual Élie Cartan desenvolveu seus argumentos [40], é tido como o precursor das teorias de gravidade com torção não-nula, descritas na geometria de Riemann-Cartan [29]. Os graus-de-liberdade extras destas teorias podem ser acoplados à densidades de spins da mesma forma que a curvatura é acoplada à densidade de energia-momentum. A introdução de uma propriedade microscópica como o spin em uma teoria de gravidade é um importante passo na busca de uma descrição unificada do mundo macro e microscópico. Infelizmente, naquela época, o conceito de spin mal havia sido descoberto, muito menos compreendido⁸. Talvez, por isso, a teoria de Cartan tenha ficado à sombra da RG.

2.2.2 Tom Kibble e Dennis Sciama: teorias de calibre e gravidade

As primeiras tentativas de descrever a gravidade como uma teoria de calibre iniciaram-se nos anos '50 e '60. Em seu artigo de 1956 [41], Ryoyu Utiyama construiu uma teoria

⁸ O spin foi descoberto em 1922 por Otto Stern (1888-1969) e Walther Gerlach (1889-1979), porém só compreendido matematicamente em 1927 por Wolfgang Pauli (1900-1958).

de calibre a partir do grupo de Lorentz, $SO(1, 3)$, e dela obteve uma teoria de gravidade. Porém, sua abordagem não era completamente satisfatória. Por exemplo, a corrente conservada devido à simetria local $SO(1, 3)$ é a de momento angular. No entanto, sabemos que momento angular não é a única fonte de gravidade. Criou-se, então, a expectativa de construirmos a gravidade como uma teoria de calibre para o grupo de Poincaré, $ISO(1, 3) = SO(1, 3) \rtimes \mathbb{R}^4$, que é o produto semi-direto do subgrupo de translações, \mathbb{R}^4 , agindo sobre o subgrupo de Lorentz, $SO(1, 3)$.

O trabalho de 1961 de Sir Tom W. B. Kibble (1932-)[42] e o de 1962 do Dennis W. Sciama (1926-1999) [43] apontaram nesta direção. Enquanto Sciama utilizou uma analogia entre spin e carga elétrica, Kibble generalizou as simetrias globais de Poincaré para simetrias locais. Infelizmente, ambas as abordagens podem ser vistas apenas como uma teoria de calibre para o grupo de Lorentz [29], uma vez que uma ação invariante para os campos de calibre não foi obtida. De fato, é impossível obtermos uma ação para esses campos que leve às equações de Yang-Mills devido ao caráter não semi-simples do grupo de Poincaré [44]. Todavia, nestes trabalhos eles obtiveram uma importante generalização da RG chamada teoria de Einstein-Cartan-Sciama-Kibble (ECSK).

2.2.3 Os fundamentos da teoria ECSK

Ao generalizarmos as simetrias globais do espaço-tempo de Minkowski, $ISO(1, 3)$, para simetrias locais, somos obrigados a introduzir 40 novas variáveis de campo para que a covariância de calibre da teoria seja mantida [42]. 24 delas formam o campo⁹ $\omega^a_{b\mu}(x) = -\omega^b_{a\mu}(x)$, ligado ao subgrupo $SO(1, 3)$, enquanto que as 16 restantes formam um outro campo independente, $e^a_{\mu}(x)$, ligado ao subgrupo das translações, \mathbb{R}^4 . Esses campos podem ser vistos como as componentes de dois campos de 1-formas, $e^a(x)$ e $\omega^a_b(x)$, respectivamente.

$$e^a(x) \equiv e^a_{\mu}(x)dx^{\mu}, \quad (2.13)$$

$$\omega^a_b(x) \equiv \omega^a_{b\mu}(x)dx^{\mu}. \quad (2.14)$$

Do ponto de vista geométrico, $e^a(x)$, forma uma base para o espaço de 1-formas e define uma 1-forma com valores vetoriais, $e(x) = e^a(x) \otimes e_a(x)$, que representa um isomorfismo local, conhecido como *soldering form*, entre a variedade \mathcal{M}^4 e o fibrado tangente. Naturalmente, portanto, o espaço-tempo surge com uma estrutura de fibrados. Fisicamente, $e(x)$, é interpretado como um campo de referenciais ortonormais (i.e., inerciais) locais, conhecido como tetrada ou *vierbein*. Perceba, então, que a *vierbein* representa uma de-

⁹ Utilizaremos letras do alfabeto romano (a, b, c, ...) como índices do grupo de Poincaré, enquanto que letras gregas (μ, ν, λ, \dots) denotam índices devido à coordenatização da variedade, chamados de índices de espaço-tempo.

formação da geometria minkowskiana original para uma geometria que é minkowskiana apenas localmente. Veja, então, que o princípio de equivalência surge da invariância de calibre estabelecida *a priori*. O campo $\omega^a_b(x)$, por sua vez, define uma 1-forma com valores tensoriais, $\omega(x) = \omega^a_b(x) \otimes e_a(x) \otimes e^b(x)$, que representa uma conexão de Ehresmann sobre o $SO(1, 3)$ -fibrado principal - também conhecida como conexão de spin ou de Lorentz. Na Física, $\omega(x)$ é o que chamamos de campo de calibre para o grupo de Lorentz. Fica claro, então, que a teoria ECSK não é uma teoria de calibre para o grupo de Poincaré *per se*, uma vez que $e(x)$ não se comporta como uma conexão sobre o fibrado principal, i.e., não é um campo de calibre.

A *vierbein*, $e(x)$, e a conexão de spin, $\omega(x)$, são os campos fundamentais desta teoria e, portanto, independentes um do outro - notem que elementos das ideias introduzidas por Cartan começam a surgir. Neste contexto, o tensor métrico e a conexão afim do espaço-tempo aparecem apenas como campos compostos,

$$g_{\mu\nu}(x) = e^a_\mu(x)e^b_\nu(x)\eta_{ab}, \quad (2.15)$$

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu}(x) = e_a^\alpha(\omega^a_{b\mu}e^b_\nu + \partial_\mu e^a_\nu), \quad (2.16)$$

que são invariantes de calibre e, portanto, observáveis físicos¹⁰. Vale ressaltar que a única suposição que será feita sobre a conexão afim é que ela é uma conexão métrica, i.e., $C_{\alpha\mu\nu} = 0$, *vide* (2.1). Com isto, o espaço-tempo deixa de ser riemanniano e passar a possuir a chamada geometria de Riemann-Cartan [29].

A conexão de spin nos permite definir uma estrutura diferenciável sobre o fibrado chamada derivada covariante exterior. A derivada covariante exterior, D , é um mapeamento que satisfaz os axiomas de linearidade e regra de Leibniz, e que atua sobre uma p -forma com valores tensoriais, $\Phi(x)$, mapeando-a em uma $(p + 1)$ -forma com valores tensoriais. Através dela, a forma curvatura, $\Omega(x)$, pode ser definida como:

$$D^2\Phi = \Omega \wedge \Phi, \quad (2.17)$$

onde \wedge simboliza o produto exterior. Já que o lado direito (LD) da equação é uma $(p + 2)$ -forma com valores tensoriais, a igualdade só fará sentido se o lado esquerdo (LE) da equação também o for. Portanto, a forma curvatura, $\Omega(x)$, é necessariamente uma 2-forma com valores tensoriais. Podemos associá-la a uma 2-forma, $\Omega^a_b(x)$,

$$\Omega(x) = \Omega^a_b(x) \otimes e_a(x) \otimes e^b(x), \quad (2.18)$$

conhecida como 2-forma de curvatura, e definida pela chamada segunda equação de es-

¹⁰Esta premissa é conhecida como princípio de calibre [45].

trutura:

$$\Omega^a_b \equiv d\omega^a_b + \omega^a_c \wedge \omega^c_b, \quad (2.19)$$

sendo d a derivada exterior. As componentes da 2-forma de curvatura estão intimamente ligadas às componentes do tensor de curvatura¹¹, $R^\alpha_{\beta\mu\nu}(x)$,

$$\Omega^a_b = \frac{1}{2!} e^\alpha_a e_b^\beta R^\alpha_{\beta\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (2.20)$$

Já a existência de uma *soldering form*, $e(x)$, sobre o fibrado tangente, nos permite definir uma 2-forma com valores vetoriais chamada de forma torção, $\Sigma(x)$,

$$\Sigma(x) \equiv De(x). \quad (2.21)$$

e que pode ser expressa em termos de uma 2-forma, $\Sigma^a(x)$,

$$\Sigma(x) = \Sigma^a(x) \otimes e_a(x), \quad (2.22)$$

conhecida como 2-forma de torção e definida pela chamada primeira equação de estrutura,

$$\Sigma^a \equiv de^a + \omega^a_b \wedge e^b. \quad (2.23)$$

Já as componentes de $\Sigma^a(x)$ estão intimamente relacionadas às componentes do tensor torção, $Q^\alpha_{\mu\nu}(x)$,

$$\Sigma^a = \frac{1}{2!} e^\alpha_a Q^\alpha_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu. \quad (2.24)$$

Vale acrescentar que a forma curvatura, $\Omega(x)$, e a forma torção, $\Sigma(x)$, satisfazem às chamadas identidades de Bianchi:

$$D\Omega = 0, \quad (2.25)$$

$$D\Sigma = \Omega \wedge e. \quad (2.26)$$

Por fim, todas essas conclusões podem ser resumidas na seguinte modificação do postulado 1 da RG:

Postulado 1 (Estrutura espaço-temporal). *O espaço-tempo (i.e., o conjunto de todos os eventos) é descrito por uma variedade de Riemann-Cartan quadridimensional, \mathcal{U}_4 , dotada de uma soldering form $e(x)$ sobre o fibrado tangente e uma conexão de spin $\omega(x)$ sobre o fibrado principal.*

¹¹É imediato quereremos identificar o tensor de curvatura com o tensor de Riemann, *vide* (2.1). Lembremos, no entanto, que não estamos mais em uma geometria riemanniana. O tensor de curvatura só é igual ao tensor de Riemann quando a conexão afim for a de Levi-Civita. Em geral, este não é o caso na teoria ECSK.

Os outros postulados da RG serão mantidos. No entanto, continuaremos utilizando o formalismo matemático natural desta teoria: o cálculo diferencial exterior. Isto trará uma nova cara a equações compartilhadas entre a teoria ECSK e a RG. Em particular, a ação de Einstein-Hilbert pode ser reescrita, em termos de formas diferenciais, como¹²:

$$S_{\text{E-H}}(e, \omega) = \frac{1}{4\chi} \int_{\mathcal{U}_4} \epsilon_{abcd} \Omega^{ab} e^c e^d, \quad (2.27)$$

$$= \frac{1}{2\chi} \int_{\mathcal{U}_4} \Omega^{ab} \star (e_a e_b), \quad (2.28)$$

sendo \star o operador estrela de Hodge¹³ e onde o símbolo de produto exterior, \wedge , foi, e será, omitido daqui por diante. A ação total da geometria acoplada com a matéria é:

$$S(e, \omega, \phi) = S_{\text{E-H}} + \int_{\mathcal{U}_4} \mathcal{L}_M(e, \phi, D\phi), \quad (2.29)$$

onde \mathcal{L}_M é a 4-forma lagrangiana de matéria. Agora, supomos uma variação infinitesimal dos campos puramente gravitacionais, $e^a(x)$ e $\omega^a_b(x)$, que se anulará na fronteira da variedade, i.e.,

$$e^a(x) \rightarrow e^a(x) + \delta e^a(x) \quad ; \quad \delta e^a(x)|_{\partial\mathcal{M}_4} = 0, \quad (2.30)$$

$$\omega^a_b(x) \rightarrow \omega^a_b(x) + \delta\omega^a_b(x) \quad ; \quad \delta\omega^a_b(x)|_{\partial\mathcal{M}_4} = 0. \quad (2.31)$$

A variação, em primeira ordem, da ação S , devido à variação da *vierbein*, $e^a(x)$, é dada por,

$$\delta S \equiv S(e + \delta e, \omega) - S(e, \omega) = \frac{1}{2\chi} \int_{\mathcal{U}_4} [\Omega^{ab} \star (e_a e_b e_c) + 2\chi \star \tau_c] \delta e^c, \quad (2.32)$$

sendo τ_c uma 1-forma intimamente relacionada ao tensor energia-momento assimétrico¹⁴, $\tilde{T}_{\mu\nu}$,

$$\tau_c = e_c^\mu \tilde{T}_{\mu\nu} dx^\nu. \quad (2.33)$$

Já a variação em primeira ordem da ação total S , devido à variação da conexão de spin,

¹²O teorema de Lovelock assume uma conexão livre de torção e, portanto, não nos fornece a ação de gravidade mais geral possível para a teoria ECSK. A extensão deste teorema para gravidades com torção foi feita por Jorge Zanelli e Alejandro Mardones em 1991 [46]. No entanto, a conclusão que se chega é que, em quatro dimensões, o único termo da ação de Zanelli-Mardones que efetivamente contribui para a dinâmica *on-shell* do campo gravitacional é o termo de Einstein-Hilbert.

¹³No contexto encontrado no artigo [46], de construção da ação gravitacional, a utilização do operador estrela é imprópria por razões explicadas no mesmo. Entretanto, este não é o contexto desta dissertação. Aqui, assumimos que a ação de Zanelli-Mardones já é conhecida e, portanto, podemos reescrevê-la utilizando o operador estrela se assim desejarmos.

¹⁴Na presença de spin, o tensor energia-momento não precisa ser simétrico, $\tilde{T}_{\mu\nu} - \tilde{T}_{\nu\mu} = \partial_\alpha S^{\mu\nu\alpha}$ [47].

$\omega^a_b(x)$, é dada por,

$$\delta S \equiv S(e, \omega + \delta\omega) - S(e, \omega) = \frac{1}{2\chi} \int_{\mathcal{U}_4} [\Sigma^a \star (e_a e_b e_c) + 2\chi \star \theta_{bc}] \delta\omega^{bc}, \quad (2.34)$$

sendo θ_{ab} uma 1-forma intimamente relacionada ao tensor de spin da matéria, $S_{\alpha\mu\nu}(x)$,

$$\theta_{ab} = e_a^\alpha e_b^\mu S_{\alpha\mu\nu} dx^\nu. \quad (2.35)$$

Finalmente, impondo o princípio de Hamilton, obtemos as equações de Euler-Lagrange para o campo gravitacional

$$\Omega^{ab} \star (e_a e_b e_c) = -2\chi \star \tau_c, \quad (2.36)$$

$$\Sigma^a \star (e_a e_b e_c) = -2\chi \star \theta_{bc}. \quad (2.37)$$

Essas são as chamadas equações de Einstein-Cartan (EC). Notem que elas contêm apenas derivadas de primeira ordem dos campos fundamentais. Por este motivo, esse tipo de teoria de gravidade é chamada de formalismo de primeira ordem, ou simplesmente gravidade de primeira ordem. As componentes destas equações em relação a uma base são exatamente as equações de campo encontradas por Sciama e Kibble em seus artigos.

$$\tilde{G}_{\mu\nu} = \chi \tilde{T}_{\mu\nu}, \quad (2.38)$$

$$Q^\alpha_{\mu\nu} + \delta^\alpha_\mu Q^\sigma_{\nu\sigma} - \delta^\alpha_\nu Q^\sigma_{\mu\sigma} = \chi S^\alpha_{\mu\nu}, \quad (2.39)$$

sendo $\tilde{G}_{\mu\nu}$ o tensor de Einstein assimétrico. Vejam, portanto, que a densidade de energia-momento atua como fonte de curvatura, enquanto que a densidade de spin da matéria atua como fonte de torção; exatamente como proposto por Cartan 40 anos antes. Há, ainda, duas características importantes destas equações a serem notadas. A primeira é a clara semelhança entre a equação (2.38) e as equações de campo de Einstein, *vide* (2.12). A segunda, é que a equação de campo (2.39), diferentemente da (2.38), é uma equação algébrica e, portanto, pode ser resolvida para o tensor torção:

$$Q^\alpha_{\mu\nu} = \chi \left(S^\alpha_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \delta^\alpha_\mu S^\sigma_{\nu\sigma} + \frac{1}{2} \delta^\alpha_\nu S^\sigma_{\sigma\mu} \right). \quad (2.40)$$

Isto significa que a torção é um campo não-propagante, i.e., só há torção dentro de uma densidade de spins. De fato, podemos substituir o tensor torção pelo tensor de spin de forma a eliminá-lo efetivamente de todas as equações. Ao fazê-lo, as equações de campo

(2.38) e (2.40) são combinadas em uma única equação de campo [29]:

$$G^{\mu\nu} = \chi T^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\chi^2 \left[S^{\mu\lambda}{}_{\lambda} S^{\nu\sigma}{}_{\sigma} - S^{\mu\lambda}{}_{\sigma} S^{\nu\sigma}{}_{\lambda} - S^{\mu\lambda\sigma} S^{\nu}{}_{\lambda\sigma} + \frac{1}{2} S^{\lambda\sigma\mu} S_{\lambda\sigma}{}^{\nu} + \frac{1}{4} g^{\mu\nu} (2S_{\lambda}{}^{\sigma}{}_{\tau} S^{\lambda\tau}{}_{\sigma} - 2S_{\lambda}{}^{\sigma}{}_{\sigma} S^{\lambda\tau}{}_{\tau} + S^{\lambda\sigma\tau} S_{\lambda\sigma\tau}) \right], \quad (2.41)$$

Veja que o termo entre colchetes do LD da equação (2.41) é um termo de correção na curvatura do espaço-tempo devido à presença de densidade de spin. Em razão deste estar sendo multiplicado pelo fator χ^2 , ele se torna uma correção desprezível para densidades de matéria comumente encontradas no Universo¹⁵ [50]. Portanto, fica claro que nestas situações usuais, as equações de campo da teoria ECSK, (2.41), resumem-se às equações de campo da RG, *vide* (2.12) - e, conseqüentemente, às suas previsões teóricas.

Após essa breve exposição da teoria ECSK, fica claro que ela é uma generalização possível da RG que introduz, por exemplo, a possibilidade da descrição de campos fermiônicos no espaço-tempo curvo. Além disto, sua estrutura matemática está intimamente ligada à estrutura matemática de teorias de calibre - de fato, ela pode ser vista como uma teoria de calibre para o grupo de Lorentz. Essas e outras vantagens¹⁶ que o formalismo de primeira ordem possui o torna um *framework* muito mais apropriado do que a RG quando o assunto é a quantização da gravidade.

¹⁵De fato, se considerarmos um fluido composto de nêutrons, por exemplo, esta correção torna-se significativa em densidades $\sim 10^{54} \text{ g cm}^{-3}$. Só para efeito de comparação, uma estrela de nêutrons tem densidade típica $\sim 10^{15} \text{ g cm}^{-3}$. Um aspecto importante deste termo é que ele evita a singularidade primordial e a de buracos negros. De fato, é possível estabelecer uma relação íntima entre o nascimento de buracos negros e de Universos. Veja, por exemplo, [48, 49].

¹⁶Veja, por exemplo, [51, 52].

Capítulo 3

O Modelo Cosmológico Padrão

Neste capítulo, estabeleceremos os fundamentos e as soluções cosmológicas advindas do chamado Modelo Cosmológico Padrão (MCP) [14, 16, 15, 21, 53, 23, 26]. Mais especificamente, introduziremos o conjunto de hipóteses que permitirão a descrição dinâmica do Universo em larga-escala. Esta é feita através de um sistema de equações diferenciais, conhecidas como equações de Friedmann. Analisaremos suas soluções tendo em vista nosso conhecimento empírico atual sobre a estrutura e evolução do Universo em larga-escala.

3.1 Os fundamentos do Modelo Cosmológico Padrão

A Cosmologia é a sub-área da Física que visa descrever a estrutura e evolução do Universo como um todo. Esta tarefa, no entanto, é extremamente difícil uma vez que só temos acesso a uma pequena porção dele, chamada de Universo observável¹. Apesar disto, parece haver certas suposições sobre a estrutura do Universo em larga-escala que são aproximadamente verdadeiras. Isto nos permite construir modelos cosmológicos simplificados que, surpreendentemente, concordam bem com os dados observacionais.

Iniciamos o enunciado do conjunto de suposições do MCP com a escolha da teoria física adequada para descrevermos a estrutura e evolução do Cosmos em larga-escala. Imediatamente percebemos que as únicas teorias físicas que podem ser relevantes nesse domínio são as teorias de gravidade, uma vez que a matéria macroscópica é, em média, eletricamente neutra. Mais especificamente, adotaremos a RG (ou a teoria ECSK com torção nula) uma vez que ela é a teoria de gravidade mais precisa e confiável que possuímos atualmente.

¹ A limitação de quão longe podemos enxergar é devido à expansão do Universo, *vide* seção 3.3. A distâncias suficientes grandes, a taxa de expansão torna-se supra-luminal e qualquer informação mais distante jamais conseguirá nos alcançar - estará para sempre inacessível. Isto define o chamado horizonte de eventos cósmico cuja distância de nós é o raio do Universo observável.

Hipótese 1. *O Universo em larga-escala é descrito por um espaço-tempo riemanniano cuja evolução é dada pelas equações de Einstein, $G_{\mu\nu} = \chi T_{\mu\nu}$.*

Estabelecida a RG como a teoria dinâmica do nosso modelo, notem, a partir de agora, que todas as outras hipóteses que adotaremos serão *ansätze* versando sobre a natureza da geometria e do conteúdo de matéria do Universo. Elas se fazem necessárias para que possamos reduzir os graus-de-liberdade das equações de Einstein, de modo que possamos obter soluções analíticas razoavelmente confiáveis. Por exemplo, adotaremos as galáxias como as entidades fundamentais de nossa teoria e assumiremos que, em escalas suficientemente largas, elas se comportam como um conjunto contínuo modelável como um fluido cujas características são descritas por um tensor energia momento, $T_{\mu\nu}$.

Hipótese 2. *Em larga-escala, o conteúdo de matéria do Universo se comporta como um fluido contínuo descrito pelo tensor energia-momento, $T_{\mu\nu}$.*

Com isto, nos livramos da enorme complexidade envolvida na resolução de um problema de muitos corpos na RG, traduzindo-o para um problema consideravelmente mais simples. Na terceira hipótese, conhecida como princípio de Weyl [54, 16], estabeleceremos que uma porção bastante representativa dessas galáxias - i.e., as partículas que compõem nosso fluido cósmico - seguem uma classe específica de linhas de mundo². Vale ressaltar que todas as características geométricas do espaço-tempo serão definidas tomando como referência esta classe de linhas de mundo e, portanto, apenas nela nosso modelo cosmológico será válido.

Hipótese 3 (Princípio de Weyl). *As linhas de mundo de galáxias formam (em média) uma congruência de geodésicas tipo-tempo que preenchem o espaço-tempo.*

Uma congruência de geodésicas é uma família de linhas de mundo não-intersectantes. Notem, portanto, que a hipótese de Weyl introduz ordem no feixe de geodésicas seguidas pelas galáxias, *vide* Figura 3.1. De fato, uma congruência de geodésicas pode ser interpretada como uma família de galáxias em queda-livre que nunca colidem entre si. Ou melhor, que colisões intergalácticas são eventos insignificantes para a estrutura do espaço-tempo em larga-escala.

Hipótese 4. *A congruência de geodésicas tipo-tempo são perpendiculares a uma série contínua de hipersuperfícies tipo-espaço.*

A hipótese 4 nos permite definir uma coordenada temporal global, t , conhecida como tempo cósmico, que rotulará cada uma dessas hipersuperfícies, *vide* Figura 3.2a. Notem

² Notem que como consideramos que as galáxias formam um conjunto contínuo, suas linhas de mundo acabarão por formar uma folha de mundo contínua, que será a folha de mundo seguida pelo fluido cósmico.

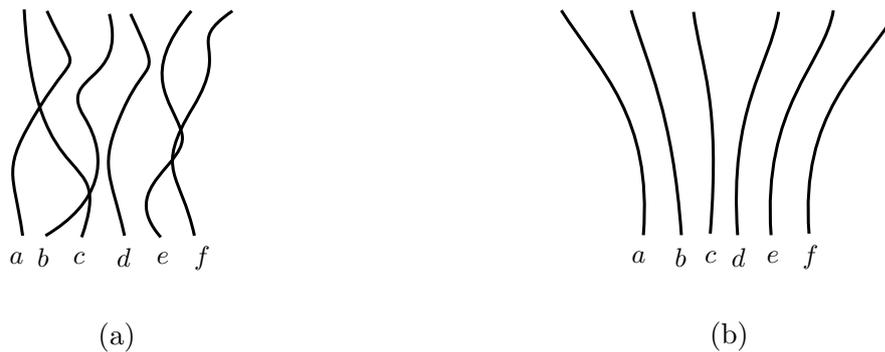
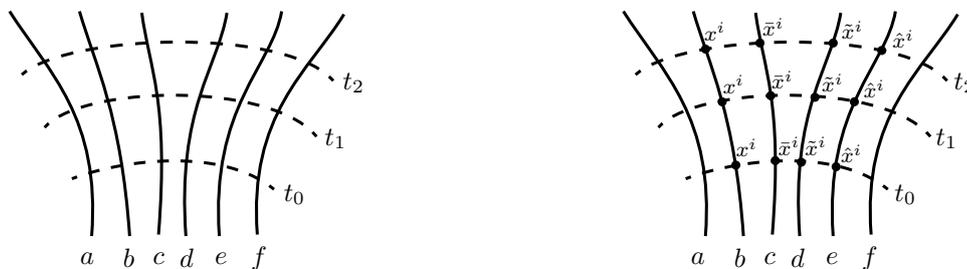


Figura 3.1: (a) Um feixe arbitrário de geodésicas seguidos pelas galáxias a, b, \dots, f . (b) Uma congruência de geodésicas seguidas pelas galáxias a, b, \dots, f .

que todos os observadores de uma mesma hipersuperfície concordam sobre o valor do tempo cósmico e, portanto, cada hipersuperfície tipo-espaço é uma hipersuperfície de simultaneidade. Além disso, podemos introduzir um atlas [25, 23, 18], $\{x^i, \bar{x}^i, \tilde{x}^i, \hat{x}^i, \dots\}$, em uma das hipersuperfície de simultaneidade, digamos, t_0 , e propagarmos este atlas para as demais hipersuperfícies utilizando as linhas de mundo do fluido cósmico. Isto é feito de modo que todos os eventos de uma mesma linha de mundo possuam o mesmo sistema coordenado local, *vide* Figura 3.2b. Com isso, introduzimos um atlas em todo o espaço-tempo na qual as galáxias, i.e., o fluido cósmico, estarão sempre em repouso. Por este motivo, chamamos este sistema coordenado de co-móvel ao fluido cósmico.



(a) O tempo cósmico e as hipersuperfícies ortogonais tipo-espaço. (b) Propagação das coordenadas através do espaço-tempo.

Figura 3.2: O tempo cósmico e a folheação do espaço-tempo.

No sistema coordenado co-móvel, uma consequência direta da hipótese 4 é a ortogonalidade entre os vetores base tipo-tempo e tipo-espaço,

$$\partial_t \cdot \partial_i = 0. \quad (3.1)$$

Ainda neste sistema, um segmento infinitesimal de uma das geodésica tipo-tempo,

$$ds^2 = -dt^2, \quad (3.2)$$

demonstra que o intervalo de tempo cósmico, dt^2 , possui a característica especial de medir o intervalo de tempo próprio, $d\tau^2 \equiv -ds^2$, da galáxia que segue essa geodésica. De fato, o intervalo de tempo cósmico é o intervalo de tempo próprio de todas as galáxias e, portanto, do fluido cósmico. Por outro lado, a quadri-velocidade ao longo dessas geodésicas, $U = \partial_t$, nos leva a concluir que

$$\partial_t \cdot \partial_t = -1. \quad (3.3)$$

As equações (3.1) e (3.3), válidas no sistema coordenado co-móvel, nos revelam que, neste sistema coordenado, o elemento de linha do espaço-tempo pode ser escrito da seguinte forma:

$$ds^2 = -dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j, \quad (3.4)$$

uma vez que $g_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu \cdot \partial_\nu$. Qualquer sistema coordenado no qual a métrica pode ser localmente escrita na forma (3.4) é dito ser síncrono.

Após o resultado (3.4), fica claro que as hipóteses 3 e 4 têm o papel de restringir o espaço de soluções das equações de Einstein para uma região que contém apenas espaços-tempos nos quais podemos introduzir um atlas síncrono. Ou seja, espaços-tempos que podem ser folheados em secções puramente espaciais, i.e., onde o tempo e o espaço podem ser tratados separadamente³. Com isto, reduzimos o problema de encontrarmos a geometria do espaço-tempo ao problema de encontrarmos a geometria das secções puramente espaciais. Adiante, faremos uma hipótese que nos ajudará a simplificar ainda mais este problema. Ela é conhecida como Princípio Cosmológico, e suas implicações nos levam a reduzir o número de variáveis métricas de seis para uma, além de um parâmetro fixo.

Hipótese 5 (Princípio Cosmológico). *No sistema coordenado co-móvel ao fluido cósmico, o Universo em larga-escala é (em média) espacialmente isotrópico em todos os seus pontos a qualquer instante do tempo.*

Um espaço que é isotrópico em todos os seus pontos também é homogêneo. Estas duas propriedades geométricas se traduzem no fato do espaço possuir o número máximo de vetores de Killing [15]. Portanto, para que o Princípio Cosmológico seja satisfeito, a geometria das secções espaciais precisa ser reduzida à geometria de espaços maximalmente simétricos (EMS) [23, 15]. No nosso caso, estamos interessado em EMS tridimensionais com assinatura de métrica $(+, +, +)$. Tais espaços possuem sua geometria localmente caracterizada pela constante $\kappa = R/6$, onde R é o escalar de curvatura. A métrica desses espaços pode ser escrita, em coordenadas esféricas, como:

$$ds_{EMS}^2 = \frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2[d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2]. \quad (3.5)$$

De fato, podemos classificá-los de três formas distintas devido à diferença em suas carac-

³ Notem que o espaço-tempo de Minkowski é um espaço-tempo folheado por definição.

terísticas geométricas. Os EMS tridimensionais com $\kappa < 0$ possuem sempre curvatura negativa e geometria local de um 3-hiperboloide. Globalmente, eles podem se estender infinitamente, i.e., são variedades sem fronteira. Por este motivo, são muitas vezes chamados de espaços abertos. Já EMS tridimensionais com $\kappa = 0$ não possuem curvatura e, portanto, são chamados de planos. Sua geometria é localmente euclidiana porém, globalmente, ele pode ser representado tanto pelo \mathbb{R}^3 quanto por uma variedade mais complexa como o 3-toro, $S_1 \times S_1 \times S_1$. Já o $\kappa > 0$ define os EMS tridimensionais de curvatura positiva. Estes possuem geometria local e global de uma 3-esfera. Veja na Figura 3.3 exemplos de variedade maximalmente simétricas que possuem geometria localmente semelhante a dos EMS descritos acima.

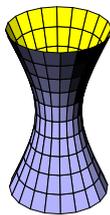
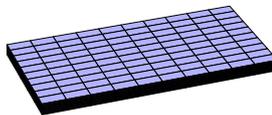
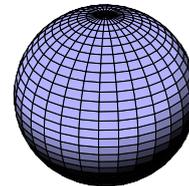
(a) 2-hiperboloide ($\kappa < 0$).(b) \mathbb{R}^3 ($\kappa = 0$).(c) 2-esfera ($\kappa > 0$).

Figura 3.3: Exemplos de variedades maximalmente simétricas, imersas no \mathbb{R}^3 , com os diversos valores de κ . Infelizmente não é possível representarmos um 3-hiperboloide ou uma 3-esfera tridimensionalmente.

Após essa análise, concluímos que as cinco hipóteses acima simplificam a geometria do espaço-tempo para a de uma variedade cuja métrica descreve a evolução temporal da geometria de hipersuperfícies maximalmente simétricas tipo-espaço,

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2[d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2] \right\}. \quad (3.6)$$

Esta evolução resume-se a uma expansão (ou contração) métrica, descrita por uma função, $a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, suave do tempo cósmico, chamada fator de escala, $a(t)$. Sua ação sobre as hipersuperfícies está exemplificada na Figura 3.4. Adotaremos a definição na qual o fator de escala possui dimensão de comprimento e pode ser visto como o raio de curvatura das seções espaciais nos casos em que $\kappa \neq 0$. Por outro lado, a coordenada r torna-se adimensional e κ passa a ser um parâmetro discreto que assume apenas os valores $\{-1, 0, +1\}$ representando, respectivamente, secções espaciais abertas, planas e fechadas⁴. O elemento de linha (3.6) é conhecido como métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker

⁴ Esta definição é possível pois todos os EMS com $\kappa > 0$ (ou $\kappa < 0$) possuem as mesmas características geométricas locais e a única diferença entre eles é a magnitude de R , que corresponde à um escalonamento global no tamanho do espaço. Podemos, então, absorver esta informação na própria definição de $a(t)$. Com isto, κ torna-se normalizado e passa a nos dizer apenas se as hipersuperfícies são abertas, planas ou fechadas, i.e., $\kappa \in \{-1, 0, +1\}$ [23].

(FLRW) e foi derivada pela primeira vez em 1922 por Alexander Friedmann (1888-1925). Os trabalhos de Friedmann passaram despercebidos até dois anos após sua morte quando, em 1927, esta métrica foi independentemente proposta por Georges Lemaître (1894-1966) em face da descoberta da expansão do Universo⁵. Em 1935 Howard P. Robertson (1903-1961) e Arthur G. Walker (1909-2001) demonstraram rigorosamente que a métrica FLRW é a métrica mais geral possível compatível com um Universo espacialmente homogêneo e isotrópico.

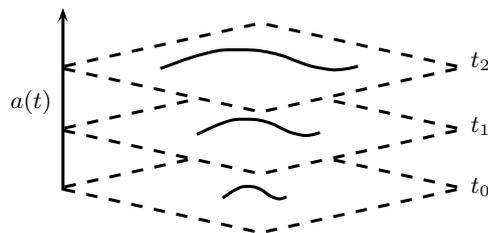


Figura 3.4: Representação da expansão métrica sobre uma curva tipo-espaço no caso de $\kappa = 0$. A contração tem o efeito contrário, basta inverter o sentido da seta. As linhas pontilhadas indicam que cada hipersuperfície se estende infinitamente.

O Princípio Cosmológico também reduz drasticamente as propriedades permitidas para o fluido cósmico. Em particular, para que este princípio seja satisfeito, o fluido cósmico também precisa ser isotrópico em todos os seus pontos. Esta propriedade define os chamados fluidos perfeitos [15]. Tais fluidos são completamente caracterizados por sua pressão, p , e sua densidade de energia, ρ . No sistema coordenado co-móvel, as componentes não-nulas do seu tensor energia-momento são, simplesmente,

$$T_{00} = \rho, \quad T_{ij} = p\delta_{ij}, \quad (3.7)$$

onde ρ , agora, é simplesmente a densidade de energia de repouso do fluido.

3.2 As equações de Friedmann

Nesta seção, utilizaremos as equações de Einstein para obtermos as equações dinâmicas que governam o comportamento do fator de escala, $a(t)$. Para tanto, precisamos das componentes não-nulas do tensor de Einstein para a métrica FLRW. Estas são,

$$G_{ij} = -(2l + h)\delta_{ij}, \quad (3.8)$$

$$G_{00} = 3h, \quad (3.9)$$

⁵ Abordaremos a descoberta da expansão do Universo e suas consequências na Seção 3.3.

onde $l \equiv \ddot{a}/a$, $h \equiv H^2 + \kappa/a^2$ e $H \equiv \dot{a}/a$ foram as definições feitas e que utilizaremos daqui por diante. Em particular, veremos na seção 3.3 que H é conhecido como parâmetro de Hubble e que este mede a taxa de expansão métrica das seções espaciais. Utilizando as componentes do tensor energia-momento do fluido cósmico, *vide* (3.7), as equações de Einstein nos levam às equações,

$$3h - \chi\rho = 0, \quad (3.10)$$

$$2l + h + \chi p = 0, \quad (3.11)$$

lembrando que $\chi = 8\pi G$. Estas equações são equações diferenciais de primeira e segunda ordem, respectivamente, para $a(t)$ e são conhecidas como as equações de Friedmann. Dada a equação de estado do fluido cósmico - *vide* seção 3.4 - e as condições iniciais do fator de escala, as equações de Friedmann determinam completamente a evolução temporal da geometria do espaço-tempo. Elas podem ser combinadas de forma a eliminarmos o termo de segunda ordem, $l = \ddot{a}/a$, da segunda equação. Desta forma, obtemos a chamada equação de compatibilidade,

$$\dot{\rho} + 3(\rho + p)H = 0. \quad (3.12)$$

Notem que esta equação possui a forma de uma equação de conservação local de energia. O primeiro termo representa a variação da energia da matéria enquanto que o segundo termo é um termo de interação, que garante que esta variação é devido apenas à troca de energia com a geometria do espaço-tempo. De fato, ela pode ser obtida da componente tipo-tempo da equação de conservação local do tensor energia-momento, $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$.

Por outro lado, as equações de Friedmann podem ser combinadas de forma a eliminarmos o termo $h = H^2 + \kappa/a^2$. Deste jeito, obtemos uma equação envolvendo apenas l ,

$$l + \frac{\chi}{6}(\rho + 3p) = 0. \quad (3.13)$$

De fato, podemos utilizar qualquer par do conjunto $\{(3.10), (3.11), (3.12), (3.13)\}$ para determinarmos completamente o fator de escala, desde que saibamos a equação de estado do fluido cósmico, claro. Vale ressaltar que é comum encontrarmos na literatura autores que preferem denominar o par $\{(3.10), (3.13)\}$ como as equações de Friedmann. No fim, ambas as definições são equivalentes e a escolha do par de equações é definida simplesmente pela conveniência de cálculo. Um ponto interessante é que podemos atribuir uma interpretação newtoniana para estas equações mesmo com sua origem sendo puramente relativística, veja o apêndice A.1.

3.3 A Lei de Hubble, a origem e o destino do Universo

Como vimos nas seções anteriores, a métrica FLRW descreve a geometria de Universos folheados em hipersuperfícies tipo-espaco que são homogêneas e isotrópicas. Além disso, as equações de Friedmann descrevem a evolução dinâmica dessas hipersuperfícies a medida que o tempo cósmico passa. No entanto, também é possível deduzirmos características cinemáticas gerais destes Universos antes mesmo de iniciarmos a resolução destas equações. Tais características, claro, independem da forma específica do $a(t)$ e são um reflexo direto da RG e dos postulados utilizados na construção da métrica FLRW.

A primeira característica que discutiremos é o fluxo de Hubble. Este é o nome dado ao efeito de incessante afastamento ou aproximação de quaisquer dois corpos-teste contidos em um Universo FLRW. Suponha, por exemplo, que um destes corpos-teste é a nossa galáxia e o outro é uma outra galáxia qualquer. Suponha também uma coordenatização do espaço-tempo tal qual nossa galáxia esteja localizada em $r = 0$ e a outra galáxia esteja localizada em um $r > 0$ finito. No tempo t a outra galáxia está a uma distância própria, D , de nós, dada por:

$$D = \int_0^r ds^2 = a(t) \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1 - \kappa r'^2}} = a(t)f(r), \quad (3.14)$$

tal que,

$$f(r) = \begin{cases} \operatorname{arcsinh}(r) & ; \quad \kappa = -1, \\ r & ; \quad \kappa = 0, \\ \operatorname{arcsin}(r) & ; \quad \kappa = 1. \end{cases} \quad (3.15)$$

Vemos, então, que $D \propto a(t)$ e, portanto, a distância própria evoluirá temporalmente segundo o fator de escala do Universo. A velocidade, v , deste afastamento (ou aproximação) é dada por

$$v = \dot{D} = \dot{a}(t)f(r) = H(t)D. \quad (3.16)$$

Ou seja, em larga escala, devido à evolução métrica do Universo, todas as galáxias estarão sempre se afastando ($H > 0$) ou se aproximando ($H < 0$) umas das outras, com velocidades diretamente proporcionais às distâncias entre elas. A equação (3.16) é a conhecida Lei de Hubble, ela foi derivada pela primeira vez em 1927 por G. Lemaître e confirmada observacionalmente pelo astrônomo norte-americano Edwin Hubble (1889-1953). Os créditos da descoberta acabaram sendo atribuídos a Hubble devido ao seu artigo de 1929 [55]. Nele, Hubble concluiu que a luz emitida de galáxias longínquas sofre um *redshift* que está

diretamente relacionado à distância até sua fonte e que este efeito provavelmente é uma consequência direta do Universo estar se expandindo. De fato, este *redshift*, em analogia com o efeito Doppler, deveria ser causado por uma velocidade de afastamento as galáxias,

$$v = H_0 D. \quad (3.17)$$

A constante de proporcionalidade, H_0 , ganhou o nome de constante de Hubble e seu valor atualmente aceito é de $(67.80 \pm 0.77) \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ [56]. De fato, segundo a equação (3.16) a constante de Hubble, descoberta ser positiva, deve ser vista como o parâmetro que mede a atual taxa da expansão métrica das hipersuperfícies tipo-espaço. Atualmente, a Lei de Hubble é amplamente aceita como a primeira evidência direta da expansão métrica do Universo.

A segunda característica se trata da origem do Universo. Antes de iniciarmos esta análise introduziremos um outro parâmetro importante na Cosmologia. O parâmetro de desaceleração, q , definido como,

$$q \equiv -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}^2} = -lH^{-2}, \quad (3.18)$$

mede a taxa com que a expansão do Universo cessa a medida que o tempo cósmico passa, i.e., a desaceleração da expansão. Utilizando a equação de Friedmann (3.13) obtemos que este parâmetro, para Universos FLRW, é dado por:

$$q = \frac{\chi}{6}(\rho + 3p)H^{-2}, \quad (3.19)$$

e se mantêm positivo desde que $\rho + 3p > 0$. Nesta situação, a velocidade de expansão do Universo estará sempre decrescendo com o tempo. Não há surpresas aqui. Nossa intuição newtoniana já nos levava a crer que este é o efeito esperado devido a natureza sempre atrativa da interação gravitacional⁶. A surpresa vem ao analisarmos o comportamento qualitativo do fato de escala, $a(t)$.

Vimos que os parâmetros H e q assumem valores positivos e que o fator de escala também é positivo, por definição. Isto nos leva a concluir que $a(t)$ precisa ter evoluído, do passado até os dias atuais, como uma função crescente do tempo cósmico cuja concavidade é voltada para baixo. Deste modo, em algum instante finito do passado ela deve ser sido zero. No limite em que atingimos este instante, os termos l e h divergem,

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} l = \lim_{a \rightarrow 0^+} h = +\infty. \quad (3.20)$$

⁶ Veremos na Seção 3.5 que essa intuição newtoniana é falha, no contexto da RG, uma vez que é possível introduzirmos um termo nas equações de Einstein que contribui negativamente para a atração gravitacional. Este termo, conhecido como Constante Cosmológica, diminui a desaceleração da expansão métrica e, caso se torne dominante, leva a uma expansão métrica acelerada.

Consequentemente, os escalares de curvatura como, por exemplo, o escalar de Ricci, R , ou o escalar de Ricci quadrático, $R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, ou ainda o escalar de Kretschmann, $R^{\alpha\beta\mu\nu}R_{\alpha\beta\mu\nu}$, divergem todos.

$$R = 6(l + h), \quad (3.21)$$

$$R^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = 12(l^2 + lh + h^2), \quad (3.22)$$

$$R^{\alpha\beta\mu\nu}R_{\alpha\beta\mu\nu} = 12(l^2 + h^2). \quad (3.23)$$

Além disso, segundo as equações de Friedmann (3.10) e (3.11), a densidade de matéria, ρ , e a pressão, p , também divergirão. Vale notar que uma vez que estas grandezas são escalares, estas divergências ocorrerão qualquer que seja a coordenatização adotada na variedade. Isto indica que, em algum momento do passado, o Universo possuiu uma singularidade física que, pelo Princípio Cosmológico, necessariamente ocorreu em todos os pontos do espaço. De fato, a prova formal da existência desta singularidade espaço-temporal em Universos FLRW é obtida ao demonstrarmos que estes Universos satisfazem as condições do teorema de singularidade de Penrose-Hawking [57, 58]. A conclusão obtida é que eles, no mínimo, possuem uma singularidade cosmológica em um passado finito e podem possuir uma outra num futuro finito.

Singularidades podem ser interpretadas como buracos na topologia da variedade, onde geodésicas tipo-tempo encontram seu fim (ou início!) e não podem mais serem estendidas ao futuro (passado). Por este motivo, a singularidade cosmológica inicial é vista como o momento do surgimento do próprio espaço-tempo, popularmente conhecida como *Big Bang*⁷. Já a singularidade cosmológica futura é vista como o fim e ganha o nome de *Big Crunch*. Vale lembrar, no entanto, que a RG ou a teoria ECSK, são teorias clássicas de gravidade e, portanto, suas previsões em um regime acima da escala de energia de Planck, como é o caso das singularidades físicas, são, no máximo, aproximações em primeira ordem que desprezam efeitos de gravidade quântica. Por esta razão, as singularidades da RG não devem ser vistas como entidades que realmente se manifestam no nosso Universo.

A Radiação Cósmica de Fundo (CMB, em inglês) é uma evidência observacional contundente que corrobora a teoria do *Big Bang* e, de fato, modelos de Universos FLRW. Descoberta acidentalmente pela dupla de astrônomos norte-americanos Arno A. Penzias (1933-) e Robert W. Wilson (1936-) em 1964⁸, ela foi imediatamente associada a uma radiação residual, prevista anos antes, que data da época em que o Universo tinha apenas 380 mil anos de idade. Este período, conhecido como Era da Recombinação, foi a época em que o Universo já havia se expandido o suficiente para resfriar-se ao ponto de permitir o desacoplamento entre radiação e matéria. A partir deste momento, os primeiros fótons

⁷ Este termo também será utilizado para nos referirmos à fase inicial quente e densa do Universo.

⁸ Veja o artigo em que eles anunciam a descoberta em [59].

começaram a se propagar livremente pelo espaço-tempo e, desde então, vêm sofrendo *redshift* cosmológico. A CMB exibe um espectro de corpo negro ao qual podemos associar uma temperatura de ~ 3 K, corroborando com a temperatura que a radiação residual deveria apresentar nos dias atuais. Por este motivo, a CMB é considerada uma evidência direta de um estágio passado em que o Universo se encontrava em um estado muito mais denso e quente que o atual - o *Big Bang*. Além disso, a CMB apresenta alta isotropia, com desvios de apenas 10^{-5} ou menos, da média e, por isso, pode ser considerada como uma evidência parcial a favor da hipótese do Princípio Cosmológico e, portanto, da métrica FLRW. Para uma estimativa da idade do Universo veja o apêndice A.2.

A terceira característica trata-se do destino do Universo. Este será definido pelo valor assumido pelo parâmetro de curvatura, κ . Ou seja, dependerá da geometria local das secções espaciais. Veja, pela equação de Friedmann (3.10), que

$$H^2 = \frac{\chi}{3}\rho - \frac{\kappa}{a^2}. \quad (3.24)$$

No caso de um Universo com geometria espacial localmente euclidiana, $\kappa = 0$, este se expandirá *ad infinitum* uma vez que o parâmetro de Hubble, H , assume sempre um valor positivo. Uma expansão infinita também ocorrerá com no caso de uma geometria espacial localmente hiperbólica, $\kappa = -1$. No entanto, esta será mais acentuada devido a presença do termo positivo a^{-2} . Já no caso de Universos em que a geometria espacial é localmente esférica, $\kappa = 1$, o parâmetro de Hubble pode vir a se anular e trocar de sinal, resultando em um período de contração. Este ponto crítico ocorre quando a densidade de matéria, ρ , atinge o valor $3\chi^{-1}a^{-2}$. O destino destes Universos é o de uma contração métrica que fatalmente resultará em um *Big Crunch*. Veja a evolução destes Universos na Figura 3.5. Felizmente, dados obtidos das CMB e de supernovas tipo Ia indicam que nosso Universo é quase que perfeitamente plano e, portanto, tem um futuro infinito pela frente [60, 56, 61].

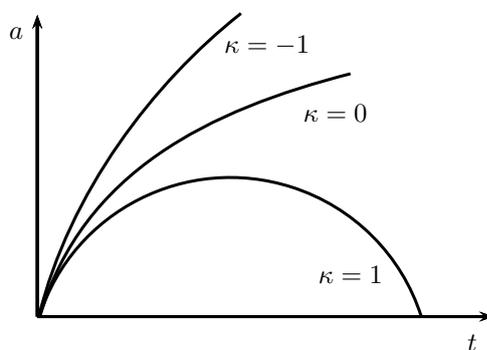


Figura 3.5: Evolução do fator de escala para os diferentes valores de κ .

A curvatura espacial do Universo deve, obviamente, depender da densidade de matéria

contida nele. Portanto, se o futuro de nosso Universo é um *Big Crunch* ou uma expansão eterna dependerá se há, ou não, matéria suficiente para frear completamente a expansão inicial. Considere a equação (3.24) resolvida para κ e particularizada para o dias atuais, $t = t_0$.

$$\kappa = \frac{\chi a_0^2}{3}(\rho_0 - \rho_c), \quad (3.25)$$

onde fizemos a definição $\rho_c \equiv 3H_0^2/\chi$. A quantidade ρ_c é conhecida como densidade crítica do Universo pois seu valor define o limite máximo de matéria que este Universo comporta sem que ele colapse sob si mesmo num fatal *Big Crunch*. Isto fica claro ao analisarmos mais detalhadamente a equação (3.25). Caso $\rho_0 > \rho_c$, temos $\kappa = 1$ e, mais uma vez, o destino do Universo estará fadado ao *Big Crunch*. Por outro lado, se $\rho_0 \leq \rho_c$, temos $\kappa \leq 0$ e o futuro do Universo, mais uma vez, consistirá de uma eterna expansão desacelerada.

3.4 Os modelos de Friedmann

As equações dinâmicas dos Universos FLRW, {(3.10), (3.11), (3.12), (3.13)}, representam, como vimos, apenas duas equações dinâmicas independentes. No entanto, qualquer que seja o par escolhido, este apresentará sempre três incógnitas, $a(t)$, $\rho(t)$, e $p(t)$. Portanto, para que uma solução completa deste sistema seja possível, é necessário conhecermos ao menos mais uma relação envolvendo alguma dessas três variáveis. Com este objetivo em mente, faremos a suposição que o fluido cósmico se comporta como um fluido barotrópico linear, isto é, que satisfaz uma equação de estado do tipo,

$$p = w\rho, \quad (3.26)$$

sendo w um parâmetro constante que define a natureza do fluido. Modelos de Universos que adotam a métrica de FLRW e a equação de estado (3.26) são conhecidos como modelos de Friedmann. A equação de compatibilidade (3.12), acrescida da equação de estado (3.26), pode ser reescrita como:

$$\dot{\rho} + 3\rho(1 + w)H = 0. \quad (3.27)$$

Esta equação agora pode ser facilmente resolvida por integração direta. Sua solução é,

$$\rho[a(t)] = \rho_0 a^{-3(1+w)}, \quad (3.28)$$

onde ρ_0 é apenas uma constante de integração. A seguir, analisaremos dois dos principais modelos de Friedmann: Universos dominados por poeira e Universos dominados por radiação.

3.4.1 Universos dominados por poeira

A poeira é definida como um fluido perfeito barotrópico caracterizado por $w = 0$. Portanto, obedece à equação de estado, $p = 0$, que simplesmente expressa o fato da poeira ser um fluido perfeito sem pressão. Particularizando a solução (3.28), temos que sua densidade decai com o cubo do fator de escala a medida que o Universo se expande,

$$\rho \propto a^{-3}. \quad (3.29)$$

De fato, a poeira é definida de modo a modelar a matéria ordinária, não-relativística. Esta possui como sua principal característica a conservação de sua massa de repouso durante o processo de expansão, $\rho a^3 = \text{cte}$. Isto é garantido, frente a equação de compatibilidade (3.27), justamente exigindo que o fluido obedeça a equação de estado, $p = 0$.

Universos cujo principal componente da matéria pode ser modelado como poeira são conhecidos como Universos dominados por poeira. Em tais Universos, o fator de desaceleração permanece positivo e é dado por,

$$q = \frac{\chi}{6} \rho H^{-2}. \quad (3.30)$$

O que se traduz em uma expansão métrica desacelerada.

3.4.2 Universos dominados por radiação

O modelo de radiação consiste de um fluido perfeito barotrópico caracterizado por $w = 1/3$. E, portanto, obedece à equação de estado, $p = \rho/3$. Desta forma, obtemos que sua densidade decai com a quarta potência do fator de escala do Universo,

$$\rho \propto a^{-4}. \quad (3.31)$$

O modelo de radiação foi proposto de forma a modelarmos a matéria quântica-relativística como, por exemplo, fótons ou neutrinos. Vimos, no caso de poeira, que o decaimento cúbico da densidade de matéria é o esperado quando a sua energia está sendo conservada. Este, entretanto, não é o caso aqui. Devido à natureza quântica destas partículas, elas sofrem o efeito de *redshift* cosmológico. Isto ocorre pois seu comprimento de onda de de Broglie, $\lambda = h/p$, sofre o desvio $\lambda \rightarrow a\lambda$. Sua natureza ultra-relativística, i.e., massa de repouso nula ou aproximadamente nula, implica que $E = pc$ e, portanto, a energia é dada por $E = hc/\lambda$. Fica explícito, então, o decaimento da energia por um fator extra a^{-1} durante a expansão.

Universos cujo principal componente da matéria é a radiação são conhecidos como

Universos dominados por radiação. Estes também possuem um fator de desaceleração positivo, agora dado por,

$$q = \frac{\chi}{3}\rho H^{-2}. \quad (3.32)$$

O que garante um regime de expansão também desacelerada.

A era da radiação e a era da poeira

No Universo real, temos que considerar a presença conjunta de radiação e poeira. Suponha, então, um Universo contendo radiação e poeira que, no entanto, estão desacoplados um do outro. As respectivas densidades, ρ_r e ρ_p , durante o processo de expansão, decairão segundo as equações (3.31) e (3.29), respectivamente. Portanto,

$$\frac{\rho_r}{\rho_p} \propto a^{-1}. \quad (3.33)$$

Ou seja, a densidade de radiação decai mais rapidamente do que a densidade de poeira, *vide* Figura 3.6. Isto significa que, em seu momento primordial, o Universo necessariamente se comporta como um Universo dominado por radiação. Esta época distinta na evolução do Universo é chamada de era da radiação. Por outro lado, a medida que o Universo se expande e a densidade de radiação se dilui, a poeira começa a se tornar a componente dominante. Inequivocamente, o futuro reserva ao Universo um comportamento de Universo dominado por poeira. Este momento da sua evolução é conhecido como era da poeira.

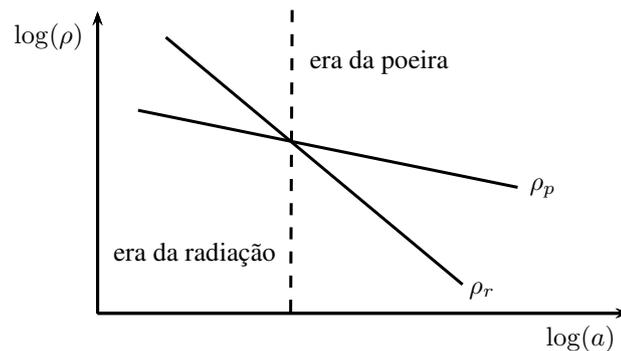


Figura 3.6: O decaimento da densidade de radiação, ρ_r , e da densidade de poeira, ρ_p , a medida que o Universo se expande. A linha descontínua marca a época de igualdade entre a radiação e a poeira.

A era da radiação inicia-se já na juventude do Universo, quando este possuía apenas $\sim 10^{-12}$ s. A igualdade entre a densidade de radiação e a poeira ocorre quando o Universo tinha aproximadamente $\sim 10^{11}$ s. Logo após isso, temos o momento da recombinação - quando a CMB foi criada - e, em seguida, o início da era de poeira [53, 16, 61].

3.5 A expansão acelerada do Universo e a Energia escura

Em 1998, observações de supernovas do tipo Ia indicaram que o Universo parece estar sofrendo uma expansão métrica acelerada [60]. Ou seja, que o parâmetro de desaceleração atual do Universo é, na verdade, negativo. Isto contraria o resultado obtido do modelo cosmológico que desenvolvemos nas seções acima. Por outro lado, este mesmo modelo foi capaz de prever o fluxo de Hubble e a CMB, e estes são fortes indícios a favor de o considerarmos ainda como um modelo válido, apesar de incompleto.

A natureza do agente responsável pela aceleração do Universo é, até hoje, incerta. Por este motivo, o nome de Energia Escura lhe foi dado. A proposta mais simplista é que ela é uma energia de vácuo, presente uniformemente em todo o espaço-tempo. Esta energia de vácuo será introduzida no nosso modelo cosmológico através da chamada Constante Cosmológica, representada pela letra grega Λ . Mais especificamente, reconsideramos o termo α_2/α_1 da ação (2.7) associando-o à própria constante cosmológica. Considere a ação de gravidade mais geral possível acoplada à matéria,

$$S = \frac{1}{2\chi} \int_{\mathcal{M}_4} (R - 2\Lambda + 2\chi\mathcal{L}_\phi) \sqrt{-g} d^4x. \quad (3.34)$$

Nela, fizemos a conveniente definição $\alpha_2/\alpha_1 \equiv -2\Lambda$. Ao aplicarmos o princípio de Hamilton, obtemos as equações de Einstein modificadas,

$$G^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} = \chi T^{\mu\nu}. \quad (3.35)$$

Entretanto, para que esta nova teoria, que denotaremos por RGII, satisfaça ao Princípio da Correspondência, Λ precisa ser um termo relevante apenas em largas-escalas. De fato, passaremos a enunciar este princípio da seguinte maneira:

Postulado (Princípio da Correspondência 2.0). *No limite de campo fraco, baixas velocidades comparadas à da luz, e de pequenas escalas, a gravitação newtoniana deve ser retomada.*

Notem, então, que a gravitação newtoniana não é mais considerada uma teoria aplicável em largas-escalas. De fato, nem a RG como proposta no Capítulo 2. Esta última, que denotaremos por RGI, é, na verdade, um limite de curtas-escalas da RGII. Como antecipado, a principal diferença entre a RGI e a RGII é o valor de suas energias de vácuo. Enquanto a RGI possui uma energia de vácuo nula, a RGII possui uma energia de vácuo não-nula que lhe garante uma maior riqueza de soluções. Uma característica interessante do vácuo da RGII é que ele se comporta como um fluido perfeito. De fato, suas equações

dinâmicas no vácuo,

$$G^{\mu\nu} = -\Lambda g^{\mu\nu}, \quad (3.36)$$

podem ser vistas através da RGI como equações de Einstein na presença de um fluido cujo tensor energia-momento é dado por,

$$T^{\mu\nu} = -\frac{\Lambda}{\chi} g^{\mu\nu}. \quad (3.37)$$

Comparando-o com o tensor energia-momento de um fluido perfeito,

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)U^\mu U^\nu + pg^{\mu\nu}, \quad (3.38)$$

fica imediatamente claro que o vácuo da RGII pode realmente ser visto como um fluido perfeito barotrópico, de pressão $p_\Lambda = -\Lambda/\chi$, e que satisfaz à equação de estado,

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda. \quad (3.39)$$

Aqui, consideraremos sempre a densidade de energia do vácuo, $\rho_\Lambda \equiv \Lambda/\chi$, como uma constante positiva. Consequentemente, somos obrigados a concluir que o espaço vazio possui, de fato, uma pressão negativa que contribui negativamente para a desaceleração do Universo.

As novas equações dinâmicas do Universo podem ser obtidas ao fazermos as seguintes substituições nas equações de Friedmann (3.10), (3.11), (3.13) e na equação de compatibilidade (3.12),

$$\rho \rightarrow \rho + \rho_\Lambda \quad (3.40)$$

$$p \rightarrow p - \rho_\Lambda \quad (3.41)$$

Explicitamente, as equações de Friedmann com constante cosmológica são, respectivamente,

$$3h - \chi(\rho + \rho_\Lambda) = 0, \quad (3.42)$$

$$2l + h + \chi(p - \rho_\Lambda) = 0, \quad (3.43)$$

$$l + \frac{\chi}{6}(\rho + 3p - 2\rho_\Lambda) = 0 \quad (3.44)$$

Já a equação de compatibilidade permanece inalterada. Utilizando, novamente, as substituições (3.40) e (3.41) obtemos o parâmetro de desaceleração,

$$q = \frac{\chi}{6}(\rho + 3p - 2\rho_\Lambda)H^{-2} \quad (3.45)$$

Fica claro, portanto, que quando $\rho + 3p < 2\rho_\Lambda$ o parâmetro de desaceleração se torna negativo e o Universo entra em um regime de expansão acelerada. A seguir, analisaremos o modelo de Universo dominado por vácuo.

3.5.1 Universos dominados por vácuo

Como vimos, o vácuo é descrito por um fluido perfeito barotrópico caracterizado por $w = -1$ e, portanto, satisfaz à equação de estado $p_\Lambda = -\rho_\Lambda$. Por sua própria definição, o vácuo possui uma densidade de energia constante,

$$\rho_\Lambda \propto a^0. \quad (3.46)$$

Um Universo cujo conteúdo de matéria é desprezível possui, como principal contribuição para a densidade de energia, a energia do vácuo, ρ_Λ . Tais Universos são chamados de Universos dominados por vácuo ou constante cosmológica. Particularizando as equações de Friedmann (3.42) e (3.44) para este caso, temos, respectivamente, que

$$\dot{a}^2 + \kappa - (\Lambda/3)a^2 = 0, \quad (3.47)$$

$$\ddot{a} - (\Lambda/3)a = 0. \quad (3.48)$$

Esta última tem como sua solução geral,

$$a(t) = C_1 \exp \left[\sqrt{(\Lambda/3)t} \right] + C_2 \exp \left[-\sqrt{(\Lambda/3)t} \right], \quad (3.49)$$

onde C_1 e C_2 são constante de integração. Estas constantes podem ser restringidas ao exigirmos que esta solução também satisfaça a equação (3.47). A condição para que isto ocorra é

$$\frac{4}{3}\Lambda C_1 C_2 = \kappa. \quad (3.50)$$

Veja que em um Universo plano ($\kappa = 0$), uma das constantes precisa ser nula. Escolheremos $C_1 = 3/\Lambda$ e $C_2 = 0$. Se ambas as constante são não-nulas, podemos escolher uma coordenatização tal que, em $t = 0$, $|C_1| = |C_2|$. Desta forma, para um Universo fechado ($\kappa = 1$), temos $C_1 = C_2 = 3/2\Lambda$ enquanto que para um Universo aberto ($\kappa = -1$) temos $C_1 = -C_2 = 3/2\Lambda$. Explicitamente, as três soluções ficam:

$$a(t) = (3/\Lambda) \begin{cases} \cosh \left[\sqrt{(\Lambda/3)t} \right] & ; \quad (\kappa = -1), \\ \exp \left[\sqrt{(\Lambda/3)t} \right] & ; \quad (\kappa = 0), \\ \sinh \left[\sqrt{(\Lambda/3)t} \right] & ; \quad (\kappa = 1). \end{cases} \quad (3.51)$$

De fato, todas elas descrevem o mesmo espaço-tempo físico em diferentes coordenatizações. Estes Universos também são conhecidos como Universos de de Sitter. Seu parâmetro de desaceleração é dado por:

$$q = -(\Lambda/3)H^{-2}, \quad (3.52)$$

e que é igual à -1 no caso de $\kappa = 0$. Veja, portanto, que o Universo de de Sitter está sempre em um regime de expansão acelerada.

Para finalizar, concluímos que o futuro do Universo está fadado à uma era dominada por vácuo. Isso ocorre pois ρ_Λ permanece constante enquanto a densidade de energia das outras contribuições, i.e., poeira e radiação, decaem com o cubo e com a quarta potência do fator de escala, respectivamente. Veja a figura 3.7. De fato, a era de vácuo iniciou-se quando o Universo tinha $\sim 10^{17}$ s [61].

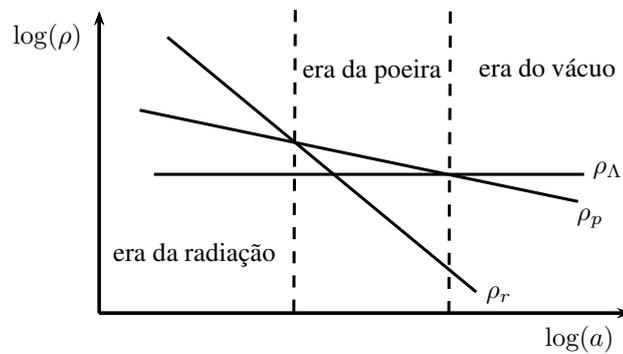


Figura 3.7: Evolução das três contribuições para a densidade de energia do Universo. A primeira linha descontínua marca a época de igualdade entre radiação e poeira. A segunda linha descontínua marca a época de igualdade entre poeira e vácuo.

Capítulo 4

A gravidade induzida por uma Teoria de Yang-Mills

Neste Capítulo, consideraremos a possibilidade da gravidade não ser uma interação fundamental. Mais especificamente, a possibilidade da gravidade, como geometria do espaço-tempo, ser uma teoria efetiva que surge do limite de baixas energias de uma teoria mais fundamental. Tal teoria, subjacente à gravidade, é suposta ser uma teoria quântica consistente, i.e., renormalizável e livre de anomalias. Dado o sucesso do Modelo Padrão na descrição das interações fundamentais, teorias de calibre ocupam o primeiro lugar da lista de candidatas. Portanto, construiremos nosso modelo de gravidade quântica a partir da suposição de que existe uma teoria de calibre responsável por gerar a gravidade em um limite de baixas energias. Receio que a apresentação feita aqui será sucinta, uma vez que todo desenvolvimento necessário já foi feito em [62, 63]. Como leitura complementar, veja [64, 65]. O desenvolvimento de modelos semelhantes a esse pode ser encontrada em [66, 67, 68].

4.1 A teoria de Yang-Mills para o grupo $SO(m, n)$

Considere uma teoria de calibre definida sobre um espaço-tempo euclidiano quadridimensional¹, \mathbb{R}^4 , e baseada num grupo de Lie semi-simples e não-abeliano. Nesta dissertação, consideraremos como grupo de calibre o grupo ortogonal 10-dimensional, $SO(5)$, o grupo de de Sitter, $SO(1, 4)$, e o grupo de anti-de Sitter, $SO(2, 3)$. Estes serão coletivamente denotados pelo grupo $SO(m, n)$ sendo que $m + n = 5$ e $m \in \{0, 1, 2\}$. O grupo $SO(m, n)$ pode ser visto como uma variedade diferenciável 5-dimensional local-

¹ A formulação perturbativa de uma teoria de calibre no espaço-tempo euclidiano é equivalente à sua formulação perturbativa no espaço-tempo minkowskiano. Pela conveniência de cálculo, o espaço-tempo euclidiano é comumente preferido. Esta equivalência é dada pela rotação de Wick [17, 69].

mente plana, $\mathbb{R}^{m,n}$, dotada de uma métrica $\eta^{AB} = \text{diag}(\epsilon, \epsilon, 1, 1, 1)$, tal que $\epsilon = (-1)^{(2-m)!}$ e $\epsilon = (-1)^{m!+1}$. É importante ressaltar que os índices latinos maiúsculos correm na ordem $\{5, 0, 1, 2, 3\}$ e que a variedade $\mathbb{R}^{m,n}$ não tem qualquer relação com o espaço-tempo, \mathbb{R}^4 .

A álgebra de Lie do $SO(m, n)$ é dada por,

$$[J^{AB}, J^{CD}] = -\frac{1}{2} [(\eta^{AC} J^{BD} + \eta^{BD} J^{AC}) - (\eta^{AD} J^{BC} + \eta^{BC} J^{AD})], \quad (4.1)$$

onde J^{AB} são seus 10 geradores anti-hermitianos, cujos índices são anti-simétricos. Já o campo de calibre do grupo $SO(m, n)$ é, por definição, uma conexão de Ehresmann sobre o $SO(m, n)$ -fibrado principal e pode ser representada por uma 1-forma com valores em sua álgebra de Lie (4.1),

$$Y = Y^A_B J_A^B. \quad (4.2)$$

Esta conexão nos permite definir uma derivada covariante exterior, D_Y , sobre o fibrado. Através dela, a forma curvatura desta conexão, F_Y , pode ser definida de modo análogo à definição da forma curvatura da conexão de spin - *vide* (2.17) - feita no Capítulo 2. De fato, F_Y é mais conhecida como intensidade de campo e é dada por,

$$F_Y = (dY^A_B + \kappa Y^A_C Y^C_B) J_A^B, \quad (4.3)$$

onde κ é um parâmetro de acoplamento adimensional e o simbolo do produto exterior, \wedge , foi e será, daqui em diante, omitido. Já a dinâmica desta teoria será dada pela ação de Yang-Mills,

$$S_{\text{YM}} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} \text{Tr}(F_Y * F_Y), \quad (4.4)$$

onde $*$ é o operador estrela de Hodge no espaço-tempo, \mathbb{R}^4 . Esta ação garante que a teoria seja uma teoria local, renormalizável e que as equações de movimento necessitem apenas dos dados de Cauchy para serem resolvidas.

O grupo $SO(m, n)$ pode ser escrito como o produto direto de seu subgrupo de estabilidade, $SO(m! - 1, n)$, com seu co-setor simétrico, $SO(4) = SO(m, n)/SO(m! - 1, n)$.

$$SO(m, n) = SO(m! - 1, n) \times S(4). \quad (4.5)$$

Isto significa que a sua álgebra, (4.1), pode ser escrita na seguinte forma decomposta,

$$[J^{ab}, J^{cd}] = -\frac{1}{2} [(\eta^{ac} J^{bd} + \eta^{bd} J^{ac}) - (\eta^{ad} J^{bc} + \eta^{bc} J^{ad})], \quad (4.6a)$$

$$[J^{ab}, J^c] = \frac{1}{2} (\eta^{ac} J^b - \eta^{bc} J^a), \quad (4.6b)$$

$$[J^a, J^b] = -\frac{\epsilon}{2} J^{ab}, \quad (4.6c)$$

onde letras latinas minúsculas correm na ordem $\{0, 1, 2, 3\}$ e as definições $J^a \equiv J^{5a}$ e $\eta^{ab} \equiv \text{diag}(\varepsilon, 1, 1, 1)$ foram utilizadas. O campo de calibre, Y , e a intensidade de campo, F_Y , também podem ser escritos em uma forma decomposta, respectivamente,

$$Y = A + \theta, \quad (4.7)$$

$$F_Y = F_A - \frac{\epsilon\kappa}{4}\theta^a\theta_b J_a^b + K^a J_a, \quad (4.8)$$

sendo $A \equiv A^a{}_b J_a^b$ a conexão do setor $SO(m! - 1, n)$ e $\theta \equiv \theta^a J_a$ a conexão do setor $S(4)$ do grupo $SO(m, n)$. Além disso, as definições $K^a \equiv d\theta^a + \kappa A^a{}_b \theta^b$ e $F_A \equiv (dA^a{}_b + \kappa A^a{}_c A^c{}_b) J_a^b$ também foram utilizadas. Vale ressaltar que se definirmos D_A como a derivada covariante exterior da conexão A , temos que $K^a = D_A \theta^{a2}$. Ademais, imagino estar claro que F_A é a forma curvatura da conexão A . Já a ação de Yang-Mills pode ser escrita na forma decomposta como,

$$S_{\text{YM}} = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} \left[(F_A)^a{}_b * (F_A)^a{}_b + \frac{1}{2} K^a * K_a - \frac{\epsilon\kappa}{2} (F_A)^a{}_b * (\theta_a \theta^b) + \frac{\kappa^2}{16} \theta^a \theta_b * (\theta_a \theta^b) \right] \quad (4.9)$$

sendo que a definição $(F_A)^a{}_b \equiv dA^a{}_b + \kappa A^a{}_c A^c{}_b$ foi utilizada.

Até o momento, temos em mãos uma teoria de Yang-Mills para o grupo de Lie semi-simples $SO(m, n)$. Como tal, ela é renormalizável e possui propriedades importantes como liberdade assintótica e geração dinâmica de massa [70, 71, 72]. A liberdade assintótica é a característica que o parâmetro de acoplamento, κ , tem de diminuir a medida que a escala de energia aumenta. Ou seja, em altas-energias, o parâmetro de acoplamento é muito pequeno e o campo de calibre se acopla muito fracamente com a matéria. Já a geração dinâmica de massa provém da necessidade de eliminarmos divergências que aparecem no regime de baixas energias da teoria. Para isso, se faz necessário a introdução de parâmetro de massa, γ . Por fim, se assim desejarmos, podemos extrair a versão quântica desta teoria através do método de integral de caminho, fazendo a fixação de calibre e introduzindo os fantasmas de Faddeev-Popov [17, 73]. No entanto, este não é o objetivo desta dissertação. A seguir, discutiremos o mecanismo de quebra da simetria de calibre que irá deformar a teoria de Yang-Mills em uma teoria de gravidade.

² Notem que K^a possui uma forma muito semelhante à 2-forma torção do espaço-tempo, *vide* (2.23). De fato, quando tomarmos o limite de baixas energias desta teoria e ela sofrer uma quebra dinâmica de simetria, este termo será responsável pelo surgimento da forma torção do espaço-tempo de Riemann-Cartan.

4.2 A quebra dinâmica de simetria e a teoria de gravidade efetiva

Como dito inicialmente, a ideia deste modelo é que uma gravidade efetiva surge dinamicamente de uma teoria de Yang-Mills quando certa escala de energia é ultrapassada. Por sinal, é natural esperarmos que esta seja a escala de energia de Planck, acima da qual teorias clássicas de gravidade deixam de valer. Utilizaremos as propriedades de geração dinâmica de massa e de liberdade assintótica para deformarmos a simetria de calibre em simetrias locais de Lorentz, surgindo assim, o princípio de equivalência e a geometria do espaço-tempo. Para tanto, nos utilizaremos do parâmetro de massa, γ , e do parâmetro de acoplamento, κ , para fazermos uma redefinição conveniente dos campos de calibre A e θ :

$$A \rightarrow \kappa^{-1}A, \quad (4.10)$$

$$\theta \rightarrow \gamma\kappa^{-1}\theta. \quad (4.11)$$

Desta forma, a ação de Yang-Mills decomposta, (4.9), é reescrita como

$$S_{\text{YM}} = \frac{\gamma^2}{4\kappa^2} \int_{\mathbb{R}^4} \left[\frac{2}{\gamma^2} \bar{\Omega}^a{}_b * \bar{\Omega}^a{}_b + \bar{K}^a * \bar{K}_a - \epsilon \bar{\Omega}^a{}_b * (\theta_a \theta^b) + \frac{\gamma^2}{8} \theta^a \theta_b * (\theta_a \theta^b) \right], \quad (4.12)$$

onde as definições $\bar{\Omega}^a{}_b \equiv dA^a{}_b + A^a{}_c A^c{}_b$ e $\bar{K}^a \equiv d\theta^a + A^a{}_b \theta^b$ foram utilizadas. Note que a importância da redefinição dos campos de calibre está associada à fatoração da constante multiplicativa γ^2/κ^2 na ação. Em breve, ficará claro que poderemos identificá-la com a constante de acoplamento gravitacional, λ , e isto permitirá identificarmos esta ação com uma ação de gravidade.

A inclusão do parâmetro de massa, γ , na ação nos força a redefinirmos, também, os geradores do grupo $SO(m, n)$. Isto reflete em uma pequena alteração de sua álgebra,

$$[J^{ab}, J^{cd}] = -\frac{1}{2} [(\eta^{ac} J^{bd} + \eta^{bd} J^{ac}) - (\eta^{ad} J^{bc} + \eta^{bc} J^{ad})], \quad (4.13a)$$

$$[J^{ab}, J^c] = \frac{1}{2} (\eta^{ac} J^b - \eta^{bc} J^a), \quad (4.13b)$$

$$[J^a, J^b] = -\frac{\epsilon\gamma^2}{2\kappa^2} J^{ab}. \quad (4.13c)$$

A liberdade assintótica da teoria e o comportamento do parâmetro de massa faz com que $\gamma^2/\kappa^2 \rightarrow 0$ no regime de baixas energias. Fica explícito, portanto, que esta propriedade causará a deformação dinâmica da álgebra do $SO(m, n)$ quando o limite de baixas energia for tomado. Esta deformação é equivalente a uma contração de Inönü-

Wigner [74, 75]. Ademais, neste limite, as dimensões do espaço interno, $\mathbb{R}^{m,n}$, são reduzidas para 4 e os geradores J^a podem ser identificados com os geradores de translações espaço-temporais, P^a . Como consequência deste último, a álgebra deformada pode ser identificada com a álgebra do grupo $ISO(m! - 1, n)$.

A ação de Yang-Mills também sofre uma quebra de sua simetria de calibre $SO(m, n)$ para simetrias locais do grupo $SO(m! - 1, n)$. Notem que os grupos $ISO(m! - 1, n)$ e $SO(m! - 1, n)$ são os grupos de Poincaré e Lorentz, respectivamente, a menos de uma possível rotação de Wick. Em resumo, ao tomarmos o limite de baixas energias, a teoria necessariamente sofre uma quebra dinâmica de simetria (DSB, em inglês) e se deforma em uma teoria de calibre para o grupo de Lorentz (notem elementos da teoria ECSK surgindo).

Após a DSB, o campo de calibre A , como conexão do setor $SO(m! - 1, n)$, assume o papel da conexão de spin, ω . Já o campo de calibre θ , assume o papel da *vierbein*, e . Isto pode ser interpretado como o surgimento do princípio de equivalência, i.e., da geometria do espaço-tempo. Neste ponto, podemos identificar o Hodge dual do espaço-tempo euclidiano, $*$, com o Hodge dual do espaço-tempo minkowskiano, \star . Em face destas mudanças, a intensidade de campo, $\bar{\Omega}$, torna-se a forma curvatura do espaço-tempo, Ω , \bar{K} torna-se a forma torção, Σ , e a ação de Yang-Mills transforma-se em

$$S = \frac{\gamma^2}{4\kappa^2} \int_{u_4} \left[\frac{2}{\gamma^2} \Omega^a{}_b \star \Omega_a{}^b + \Sigma^a \star \Sigma_a - \epsilon \Omega^a{}_b \star (e_a e^b) + \frac{3\gamma^2}{2} \star \mathbb{1} \right] \quad (4.14)$$

sendo $\mathbb{1}$ a 0-forma identidade. Esta ação pode ser vista como uma ação de gravidade se fizermos a associação

$$\frac{\gamma^2}{\kappa^2} = 2\chi^{-1}, \quad \gamma^2 = \frac{4\Lambda_g}{3} \quad (4.15)$$

onde Λ_g é a constante cosmológica gravitacional, i.e., a energia de vácuo do campo gravitacional. Uma grande vantagem deste modelo de gravidade é que ele permite o cálculo perturbativo do parâmetro de acoplamento, κ , e do parâmetro de massa, γ . Desta forma, as relações em (4.15) nos permite obter o valor teórico da constante de Newton, G , e da contribuição gravitacional, Λ_g , para a constante cosmológica observacional. Finalmente, temos como a ação de gravidade,

$$S_g = \frac{1}{2\chi} \int_{u_4} \left[\frac{3}{2\Lambda_g} \Omega^a{}_b \star \Omega_a{}^b + \Sigma^a \star \Sigma_a - \epsilon \Omega^a{}_b \star (e_a e^b) + 2\Lambda_g \star \mathbb{1} \right]. \quad (4.16)$$

Vejam que o primeiro termo do integrando é um termo quadrático de curvatura, o segundo termo é um termo quadrático de torção, o terceiro termo é o termo de Einstein-Hilbert - *vide* (2.28) - e o último termo é o termo de constante cosmológica. De fato, nossa teoria de gravidade efetiva surge como uma teoria tipo-ECSK. Isto não deveria ser uma surpresa,

dado que a teoria ECSK tem relações muito mais próximas com teorias de calibre do que a RG. Vale ressaltar que esta ação, na verdade, representa duas teorias de gravidade diferentes. Isto porque o parâmetro ϵ , multiplicando o termos de Einstein-Hilbert, pode assumir o valor 1 ou -1 a depender se a teoria de Yang-Mills inicial foi, respectivamente, para o grupo ortogonal ou para os grupos de Sitter e anti-de Sitter.

As equações de campo para a *vierbein*, $e(x)$, e para a conexão de spin, $\omega(x)$, obtidas do princípio de Hamilton, são, respectivamente,

$$\frac{3}{2\Lambda_g}\Omega^{bc}\star(\Omega_{bc}e_a) + D\star\Sigma_a + \Sigma^b\star(\Sigma_b e_a) - \epsilon\Omega^{bc}\star(e_b e_c e_a) - 2\Lambda_g\star e_a = 0, \quad (4.17)$$

$$\frac{3}{2\Lambda_g}D\star\Omega_{ab} + e_b\star\Sigma_a - \epsilon\Sigma^c\star(e_c e_a e_b) = 0. \quad (4.18)$$

Estas equações de campo revelam que esta teoria de gravidade efetiva possui uma dinâmica completamente diferente da dinâmica da teoria ECSK. Por exemplo, basta um olhar superficial para a equação de campo (4.18) para percebermos que ela não é mais uma equação algébrica para a torção - como era a equação de campo de ω na teoria ECSK, *vide* (2.37). De fato, nesta nova teoria de gravidade, a torção é, em geral, um campo propagante. Ou seja, existem soluções de vácuo cuja torção é não-nula. Portanto, esta teoria não simplesmente se resume à RG na ausência de densidades de spin. Na verdade, a RG só é obtida ao tomarmos o limite $\Omega/\Lambda_g \rightarrow 0$ e impormos a condição de torção nula, $\Sigma = 0$. Nesta situação, as equações de campo (4.17) e (4.18) realmente se reduzem à equação de Einstein com constante cosmológica no vácuo,

$$\Omega^{bc}\star(e_b e_c e_a) - 2\epsilon\Lambda_g\star e_a = 0. \quad (4.19)$$

O limite $\Omega/\Lambda_g \rightarrow 0$ é um limite de curvatura espaço-temporal relativamente baixa, o qual chamaremos de setor infravermelho. De fato, cálculos perturbativos a 1 e 2-laços estimam um valor extremamente alto para a constante cosmológica gravitacional, $\Lambda_g \sim 10^{32}$ TeV² [66, 76]. Podemos, então, concluir que os termos das equações (4.16), (4.17) e (4.18) que contêm o fator Λ_g^{-1} são, de fato, muito pequenos no regime infravermelho da teoria e podem ser vistos como correções ultravioletas.

A expectativa é que cálculos mais precisos, i.e., não-perturbativos, demonstrem que Λ_g possui o valor exato para que o Problema da Constante Cosmológica seja resolvido [77]. Este problema constitui-se da discrepância de 120 ordens de grandezas entre o presente valor observacional da constante cosmológica, $\tilde{\Lambda} \sim 10^{-92}$ TeV², e o valor teórico previsto pela Teoria Quântica de Campos, $\Lambda_{\text{TQC}} \sim -10^{28}$ TeV². Este último, não leva em conta a contribuição gravitacional para a energia de vácuo. Portanto, a esperança é que Λ_g possa cancelá-lo quase que perfeitamente - até sua 120ª casa decimal - de forma que o resultado seja uma constante cosmológica efetiva imensamente pequena e que concorda com o valor

observacional. Em resumo, que

$$\tilde{\Lambda} = \Lambda_{\text{TQC}} + \Lambda_g. \quad (4.20)$$

Entretanto, até que os cálculos não-perturbativos realmente demonstrem que Λ_g assume esse valor necessário, o Problema da Constante Cosmológica continua em aberto.

Capítulo 5

A cosmologia proveniente de uma teoria de gravidade efetiva

Neste capítulo, faremos uma verificação da consistência em larga-escala da teoria de gravidade efetiva discutida no capítulo anterior. De fato, um modelo de gravidade quântica que tem a pretensão de descrever a realidade deve possuir um limite de baixas energias capaz de gerar uma cosmologia consistente com os resultados do MCP. Como veremos a seguir, este é realmente o caso. Além disto, analisaremos também a cosmologia proveniente do setor ultravioleta e ultravioleta profundo desta teoria de gravidade, onde os termos de correção são relevantes. Vale ressaltar que sempre assumiremos os *ansätze* da métrica FLRW e de um espaço-tempo riemanniano em larga-escala.

5.1 A cosmologia do setor infravermelho

No final do capítulo 4, vimos que as equações de campo (4.17) e (4.18), no setor infravermelho da teoria, resumem-se às equações de Einstein com constante cosmológica gravitacional se assumirmos um espaço-tempo riemanniano. É evidente, entretanto, que para obtermos soluções cosmológicas condizente com o Universo em que vivemos, precisamos também levar em conta a contribuição da TQC para a energia de vácuo do espaço-tempo. Isso é feito adicionando-se na equação tipo-Einstein (4.19) o termo de constante cosmológica da TQC - $2\Lambda_{\text{TQC}} \star e_a$ - ou, equivalentemente, trocando Λ_g por $\tilde{\Lambda}$. Desta forma, obtemos a equação apropriada para extrairmos modelos cosmológicos razoáveis,

$$\Omega^{bc} \star (e_b e_c e_a) - 2\epsilon \tilde{\Lambda} \star e_a = 0. \quad (5.1)$$

Após esta mudança, a adoção da métrica FLRW nos leva diretamente às soluções do MCP. No entanto, temos de ser cautelosos e não nos precipitarmos nas conclusões. Digo isto pois

acabamos de ver que as equações em (5.1) - e, conseqüentemente, suas soluções - possuem um regime de validade específico, o de baixa curvatura espaço-temporal. Portanto, para concluirmos que a cosmologia do setor infravermelho deste modelo realmente coincide com o MCP, precisamos assumir que a curvatura espaço-temporal do Universo, ao início da era da radiação, já era relativamente muito pequena comparada ao valor de Λ_g . Isto soa razoável uma vez que a constante cosmológica gravitacional é da ordem de 10^{32} TeV^2 . Portanto, parece seguro afirmarmos que a cosmologia deste modelo de gravidade, de fato, possui o MCP como seu limite infravermelho (caso não haja torção no espaço-tempo).

5.2 A cosmologia do setor ultravioleta

Analisaremos agora as soluções cosmológicas advindas deste modelo de gravidade efetiva quando os termos de correção ultravioleta não podem mais serem desprezados - ou seja, em seu setor ultravioleta e ultravioleta profundo. Em princípio, estas soluções vão além do MCP e seriam capazes de descrever a dinâmica do Universo primitivo; antes da era da radiação. Inicialmente procuraremos as soluções de vácuo e, em seguida, acoplaremos um fluido perfeito à geometria para buscarmos modelos tipo-Friedmann razoáveis para a época. Ao fim, fazemos consideração sobre o modelo logo acima da era de Planck.

5.2.1 Universos dominados por vácuo

O primeiro passo que tomaremos é o de simplificação do modelo de gravidade em mãos. Apesar da uma torção não-nula trazer efeitos interessante para a cosmologia do Universo primordial, esta acrescenta relativa complexidade à resolução das equações dinâmicas. Por este motivo, restringiremos o espaço de soluções das equações de campo (4.17) e (4.18) ao espaço de soluções puramente riemannianas. Para isto, basta fazemos a 2-forma de torção igual à zero, $\Sigma^a = 0$. Desta forma, temos:

$$\frac{3}{2\Lambda_g} \Omega^{bc} \star (\Omega_{bc} e_a) - \epsilon \Omega^{bc} \star (e_b e_c e_a) - 2\tilde{\Lambda} \star e_a = 0, \quad (5.2)$$

$$\frac{3}{2\Lambda_g} D \star \Omega_{ab} = 0. \quad (5.3)$$

O segundo passo consiste em projetarmos estas equações de campo em uma base de 1-formas, e^a . Deste jeito, obtemos que suas componentes são, respectivamente,

$$\frac{3\epsilon}{8\chi\rho_\Lambda} (R^{cdef} R_{cdef} \delta^a_b - 2R^{cdea} R_{cdeb}) + G^a_b + \epsilon\chi\rho_\Lambda \delta^a_b = 0, \quad (5.4)$$

$$\nabla_a R^a_{bcd} = 0, \quad (5.5)$$

onde as definições $\rho_\Lambda \equiv \Lambda_g \chi^{-1}$ e $\rho_{\tilde{\Lambda}} \equiv \tilde{\Lambda} \chi^{-1}$ foram utilizadas. Em particular, a equação de campo (5.5) pode ser simplificada ao utilizarmos a propriedade de divergência nula do tensor de Einstein. De fato, obtemos que (5.5) implica em um escalar de Ricci constante, $\partial_a R = 0$, durante toda a evolução do Universo.

As equações dinâmicas para o fator de escala são obtidas ao inserirmos a métrica FLRW nas equações de campo tipo-Einstein em (5.4). Para isto, precisamos dos termos de correção ultravioleta calculados para a métrica de FLRW. O escalar de Kretschmann $R^{cdef} R_{cdef}$, por acaso, já foi dado no Capítulo 3, *vide* (3.23). Por outro lado, temos que:

$$R^{cde0} R_{cde0} = 6l^2, \quad (5.6)$$

$$R^{cdei} R_{cdej} = 2(l^2 + 2h^2)\delta^i_j. \quad (5.7)$$

Enfim, as equações tipo-Friedmann obtidas são:

$$\frac{3\epsilon}{2\chi\rho_\Lambda} h^2 - h + \frac{\epsilon\chi\rho_{\tilde{\Lambda}}}{3} = 0, \quad (5.8)$$

$$\frac{3\epsilon}{2\chi\rho_\Lambda} (h^2 + 2l^2) - 2l - h + \epsilon\chi\rho_{\tilde{\Lambda}} = 0. \quad (5.9)$$

Ainda é possível combiná-las de modo a eliminarmos os termos de h e h^2 . O resultado é:

$$\frac{3\epsilon}{2\chi\rho_\Lambda} l^2 - l + \frac{\epsilon\chi\rho_{\tilde{\Lambda}}}{3} = 0. \quad (5.10)$$

Está claro que os termos quadráticos são termos de correção das equações de Friedmann tradicionais. Por conveniência de cálculo, utilizaremos o par (5.8) e (5.10) para obtermos a evolução do fator de escala. Antes disso, notem que este par consiste de uma mesma equação quadrática tanto para l quanto para h . Isto, claro, não significa necessariamente que l e h são iguais, porém, como raízes de um polinômio de segundo grau, eles assumem, no máximo, dois valores distintos. Estes são:

$$(h_{\tilde{\Lambda},\Lambda})^\pm = \frac{\chi\rho_\Lambda}{3\epsilon} \left(1 \pm \sqrt{1 - 2\frac{\rho_{\tilde{\Lambda}}}{\rho_\Lambda}} \right), \quad (5.11)$$

e dependem do valor de ρ_Λ e $\rho_{\tilde{\Lambda}}$. Desta forma, podemos concluir que a equação de campo $\partial_a R = 0$ é redundante. De fato, dado o resultado acima e o escalar de Ricci para a métrica de Friedmann,

$$R = 6(l + h), \quad (5.12)$$

é fácil ver que R é, necessariamente, uma constante. Seu valor é $12(h_{\tilde{\Lambda},\Lambda})^\pm$ caso l e h sejam raízes iguais, ou $4\epsilon\chi\rho_\Lambda$ caso l e h sejam raízes diferentes. Agora, as soluções cosmológicas

podem ser facilmente obtida através da equação,

$$l = (h_{\tilde{\Lambda},\Lambda})^{\pm}. \quad (5.13)$$

Ela nos diz que o fator de escala, $a(t)$, é solução da equação diferencial,

$$\ddot{a} - (h_{\tilde{\Lambda},\Lambda})^{\pm} a = 0. \quad (5.14)$$

Notem que esta é exatamente a mesma equação diferencial que governa a evolução dos Universos de de Sitter, discutidos no Capítulo 3. Suas soluções serão:

$$a(t) = [1/(h_{\tilde{\Lambda},\Lambda})^{\pm}] \begin{cases} \cosh \left[\sqrt{(h_{\tilde{\Lambda},\Lambda})^{\pm} t} \right] & ; \quad (\kappa = -1), \\ \exp \left[\sqrt{(h_{\tilde{\Lambda},\Lambda})^{\pm} t} \right] & ; \quad (\kappa = 0), \\ \sinh \left[\sqrt{(h_{\tilde{\Lambda},\Lambda})^{\pm} t} \right] & ; \quad (\kappa = 1). \end{cases} \quad (5.15)$$

Ao primeiro olhar, parece estar claro que estas, de fato, representam Universos de de Sitter. Isto realmente é verdade se $(h_{\tilde{\Lambda},\Lambda})^{\pm}$ for positivo. No entanto, devemos lembrar que dentro de $(h_{\tilde{\Lambda},\Lambda})^{\pm}$ há o parâmetro ϵ , e que este pode assumir os valores -1 ou 1 . Caso $\epsilon = -1$, $(h_{\tilde{\Lambda},\Lambda})^{\pm}$ é negativo e estas são, na verdade, soluções oscilatórias. Soluções deste tipo são conhecidas como Universos de anti-de Sitter, no entanto, não temos nenhum bom motivo para acreditar que o Universo primitivo tenha passado por uma era anti-de Sitter. Desta forma, iremos nos ater às soluções em que $\epsilon = 1$. Ou seja, daqui em diante, adotaremos apenas a teoria de gravidade induzida pela teoria de Yang-Mills para o grupo ortogonal $SO(5)$.

O parâmetro de desaceleração para estes Universos de de Sitter é,

$$q = -(h_{\tilde{\Lambda},\Lambda})^{\pm} H^{-2}, \quad (5.16)$$

o que garante um regime de expansão acelerada. O agente responsável pelo fluxo de Hubble, neste caso, é $(h_{\tilde{\Lambda},\Lambda})^{\pm}$. De fato, $H \propto \sqrt{(h_{\tilde{\Lambda},\Lambda})^{\pm}}$. Para analisarmos melhor quem exatamente é $(h_{\tilde{\Lambda},\Lambda})^{\pm}$, consideraremos o regime $\rho_{\tilde{\Lambda}}/\rho_{\Lambda} \ll 1$ em que ele pode ser aproximado como o termo de primeira ordem de sua série de Taylor,

$$(h_{\tilde{\Lambda},\Lambda})^{\pm} \approx \frac{\chi\rho_{\Lambda}}{3} \left[1 \pm \left(1 - \frac{\rho_{\tilde{\Lambda}}}{\rho_{\Lambda}} \right) \right]. \quad (5.17)$$

Vejam que a raiz $(h_{\tilde{\Lambda},\Lambda})^{+}$ é aproximadamente proporcional à ρ_{Λ} ,

$$(h_{\tilde{\Lambda},\Lambda})^{+} \approx \frac{\chi\rho_{\Lambda}}{3} \left(2 - \frac{\rho_{\tilde{\Lambda}}}{\rho_{\Lambda}} \right). \quad (5.18)$$

Dado o imenso valor de ρ_Λ , isto aponta para um Universo expandindo-se violentamente - $H \propto \sqrt{\Lambda_g}$. É razoável pensarmos que esta solução talvez seja capaz de descrever uma era inflacionária [16, 53] do Universo primitivo. É claro que para comprovarmos isso, precisamos fazer uma análise muito mais detalhada do caso. Isto será feito no futuro.

Já a raiz $(h_{\bar{\Lambda},\Lambda})^-$ é aproximadamente proporcional à $\rho_{\bar{\Lambda}}$,

$$(h_{\bar{\Lambda},\Lambda})^- \approx \frac{\chi\rho_{\bar{\Lambda}}}{3}. \quad (5.19)$$

Ou seja, em primeira aproximação, esta solução representa o Universo de de Sitter tradicional, contido no MCP. Portanto, a solução exata pode ser vista como o modelo de Friedmann para o vácuo corrigido.

5.2.2 Universos dominados por um fluido perfeito

Introduziremos agora um fluido perfeito para vermos como a dinâmica do setor ultravioleta é modificada. Para isto, acoplaremos matéria sem spin à geometria do espaço-tempo,

$$\frac{3}{8\chi\rho_\Lambda} (R^{cdef}R_{cdef}\delta^a_b - 2R^{cdea}R_{cdeb}) + G^a_b + \chi\rho_{\bar{\Lambda}}\delta^a_b = \chi T^a_b, \quad (5.20)$$

$$\partial_a R = 0. \quad (5.21)$$

Como sempre, adotaremos o modelo de fluido perfeito cuja pressão e densidade de energia são dadas por p e ρ , respectivamente. Através da métrica FLRW, obteremos as seguintes equação dinâmicas:

$$\frac{3}{2\chi\rho_\Lambda} h^2 - h + \frac{\chi}{3}(\rho + \rho_{\bar{\Lambda}}) = 0, \quad (5.22)$$

$$\frac{3}{2\chi\rho_\Lambda} (h^2 + 2l^2) - (h + 2l) - \chi(p - \rho_{\bar{\Lambda}}) = 0. \quad (5.23)$$

Mais uma vez é interessante compará-las com as equações de Friedmann tradicionais, *vide* (3.42) e (3.43). Notem que estas equações tipo-Friedmann não são mais equações algébricas para h e l - o coeficiente do termo livre agora envolve as funções $\rho(t)$ e $p(t)$. Logo, diferentemente da situação de vácuo, a equação de campo (5.21) não será mais automaticamente satisfeita. De fato, esta equação introduzirá um vínculo extra que trará importantes consequências físicas para o modelo. Por enquanto, nos limitaremos a explicitar que este vínculo impõe a condição $6(l + h) = R_0$ e, portanto, que

$$l = \frac{R_0}{6} - h. \quad (5.24)$$

Utilizaremos este resultado para eliminarmos os termos de l e l^2 da equação (5.23). A equação resultante é:

$$\frac{9}{2\chi\rho_\Lambda}h^2 + (6\sigma_0 + 1)h - \chi[p - \rho_\Lambda - \rho_\Lambda\sigma_0(3\sigma_0 + 2)] = 0, \quad (5.25)$$

onde $\sigma_0 \equiv -(R_0/6\chi\rho_\Lambda)$ foi uma redefinição conveniente de constantes. Agora, a combinaremos com a equação tipo-Friedmann (5.22) de modo a eliminarmos o termo quadrático em h . Resolvendo o resultado obtido para o termo linear, h , temos que:

$$h = \frac{\chi}{2} \left(\frac{p + \rho}{3\sigma_0 + 2} - \sigma_0\rho_\Lambda \right). \quad (5.26)$$

Por outro lado, pela própria definição de h , obtemos que:

$$\dot{h} = 2H(l - h). \quad (5.27)$$

Ao substituirmos (5.24) em (5.27) chegamos, após a reconstrução da regra do produto, no resultado:

$$\frac{d}{dt}[a^4(h - R_0/12)] = 0. \quad (5.28)$$

Ou seja, a quantidade $a^4(h - R_0/12)$ é uma constante temporal. Ao integrarmos este resultado e o resolvermos, novamente, para h , obtemos que:

$$h = \frac{\xi_0}{a^4} + \frac{R_0}{12}, \quad (5.29)$$

onde a constante de integração foi denotada por ξ_0 . A equação acima deixa claro a diferença entre o caso de matéria e o caso de vácuo. Na presença de matéria, h decai com a quarta potência do fator de escala. Para o caso particular de $\xi_0 = 0$, retomamos as soluções de vácuo para o caso de $h = l = (h_{\Lambda,\Lambda})^\pm$. Enfim, as equações (5.26) e (5.29) podem ser combinadas de modo a obtermos a equação:

$$p + \rho = \left(\frac{4\chi - R_0}{\chi^2\rho_\Lambda} \right) \xi_0 a^{-4}. \quad (5.30)$$

Os resultados em (5.29) e (5.30) nos permite obter a densidade e pressão do fluido cósmico como função do fator de escala antes mesmo de introduzirmos uma equação de estado. Substituindo (5.29) na equação tipo-Friedmann (5.22), obtemos:

$$\rho = \frac{3\xi_0}{\chi} \left(1 - \frac{\xi_0 R_0}{4\chi\rho_\Lambda} \right) a^{-4} - \frac{9\xi_0^2}{2\chi^2\rho_\Lambda} a^{-8} + \left(\frac{R_0}{4\chi} - \frac{R_0^2}{32\chi^2\rho_\Lambda} - \rho_\Lambda \right). \quad (5.31)$$

A pressão é imediatamente obtida da equação (5.30),

$$p = -\rho + \left(\frac{4\chi - R_0}{\chi^2 \rho_\Lambda} \right) \xi_0 a^{-4}. \quad (5.32)$$

Esta característica incomum é uma reflexo do vínculo (5.24). Como vimos no Capítulo 3, as equações dinâmicas para o fato de escala formam sistema indeterminado de equações diferenciais - apenas duas equações para três incógnitas. Portanto, para que uma resolução seja possível, é necessário adotarmos mais uma relação entre as variáveis envolvidas. No caso do MCP, esta relação é justamente a equação de estado (3.26). No caso aqui em questão, o modelo cosmológico já surge com equações dinâmicas formando um sistema determinado - três equações (5.22), (5.23), (5.24) para três variáveis. Como consequência, a própria teoria nos informa a natureza do conteúdo de matéria presente no Universo primordial¹. De fato, o primeiro termo da equação (5.31) pode ser identificado como uma componente de radiação, enquanto que o segundo não tem uma interpretação física muito clara - talvez esteja associado à presença de algum tipo de matéria exótica.

A evolução do fator de escala pode ser determinada através da equação (5.29),

$$\dot{a}^2 - \frac{R_0}{12} a^2 - \frac{\xi_0}{a^2} + \kappa = 0. \quad (5.33)$$

Esta é uma equação diferencial não-linear cujas soluções são:

Para $R_0 \neq 0$,

$$a(t) = \sqrt{\frac{\exp[\sqrt{R_0}(2a_0 \pm t/\sqrt{3})] + (36\kappa^2 - 12R_0\xi_0) \exp[-\sqrt{R_0}(2a_0 \pm t/\sqrt{3})] + 12\kappa}{2R_0}}. \quad (5.34)$$

Para $R_0 = 0$ e $\kappa \neq 0$,

$$a(t) = \sqrt{\frac{\xi_0 - \kappa^2(t \pm a_0)^2}{\kappa}}. \quad (5.35)$$

E, para $R_0 = 0$ e $\kappa = 0$,

$$a(t) = \sqrt{2(a_0 \pm \sqrt{\xi_0}t)}. \quad (5.36)$$

onde a_0 é uma constante de integração.

Uma outra questão interessante jaz no fato desta teoria de gravidade apresentar uma equação tipo-Einstein, *vide* (5.20), cuja quadri-divergência covariante é não-nula. Isto acaba refletindo em um equação de compatibilidade modificada,

$$\dot{\rho} + 3(p + \rho)H + \frac{\dot{\rho}^2}{8H(\rho + \rho_{\bar{\Lambda}} - \rho_\Lambda/2)} = 0. \quad (5.37)$$

¹ Talvez a equação de estado volte a ser relevante se o campo de torção for considerado não-nulo.

Ao compará-la com a equação de compatibilidade usual, *vide* (3.12), fica claro que o último termo é um termo de correção ultravioleta da interação entre matéria e geometria. Ou seja, esta teoria prevê um efeito extra, não-linear, de interação entre a matéria e a geometria, no regime de alta curvatura espaço-temporal.

A natureza do fluido cósmico permitido pelo modelo é realmente esquisita. De fato, um olhar mais conservador sobre a equação (5.31) pode muito bem concluir que este não é um resultado físico. Sendo assim, poderíamos tentar introduzir no modelo uma equação de estado usual,

$$p = w\rho. \quad (5.38)$$

No entanto, ela nos permite encontrar uma relação entre ρ e h utilizando equação (5.26) que pode, então, ser combinada com equação tipo-Friedmann (5.22) para gerar uma equação algébrica para h ,

$$\frac{\sigma_0}{R_0} h^2 - \left[\frac{2(3\sigma_0 + 2)}{3(1+w)} - 1 \right] h + \frac{R_0}{18\sigma_0} \left[\frac{(3\sigma_0 + 2)\sigma_0}{1+w} + \frac{\rho_{\Lambda}}{\rho_{\Lambda}} \right] = 0. \quad (5.39)$$

Isto é o mesmo que dizer que h é uma constante. Por outro lado, para que isso seja consistente com a equação (5.29), ξ_0 precisa ser zero. Neste caso, a equação (5.30) imediatamente nos diz que $p = -\rho$ e, portanto, contraria a hipótese inicial de que ρ e p descrevem matéria. Isto significa que o único fluido barotrópico consistente com o modelo é o vácuo. Logo, se (5.31) for realmente um resultado não-físico, a única era prevista pelo modelo para o Universo primordial é a era de vácuo hiper-acelerada obtida na seção anterior.

5.3 Cosmologia do setor ultravioleta profundo

Como vimos no Capítulo 4, o nosso modelo de gravitação quântica consiste de uma teoria de Yang-Mills pura que, abaixo de certa escala de energia, sofre uma transição de fase e vira uma teoria geometrodinâmica de gravidade. A escala de energia desta transição foi estimada por métodos perturbativos a 1 e 2-laços em, aproximadamente, 10^{16} TeV [66, 76]. Isto condiz com a escala de energia de Planck, ou seja, quando o Universo tinha apenas $\sim 10^{-43}$ s de idade.

Após essa transição de fase, i.e., após a escala de Planck, o parâmetro massa, γ , e o parâmetro de acoplamento, κ , da teoria de Yang-Mills, foram identificados com a constante cosmológica gravitacional, Λ_g , e a constante de Newton, G , *vide* (4.15). Entretanto, originalmente, tanto κ quanto γ possuíam uma dependência com a escala de energia, conhecida como *running*. Isto, obviamente, induzirá um *running* tanto em Λ_g quanto G . Mais uma vez, podemos encontrar em [66, 76] estimativas a 1 e 2-laços indicam que

estes *runnings* cessam logo após sairmos da escala de Planck, fazendo com que ambos, Λ_g e G , tendam a valores fixos finitos. A partir de então, as análises cosmológicas feitas nas sessões 5.1 e 5.2 tornam-se válidas. Antes disso, os *runnings* são relevantes e uma análise cosmológica mais detalhada precisa ser feita; chamaremos este setor de ultravioleta profundo da teoria de gravidade efetiva.

As equações de campo para o setor ultravioleta profundo da teoria de gravidade efetiva são, no vácuo,

$$\frac{3}{8\Lambda_g} (R^{cdef} R_{cdef} \delta^a_b - 2R^{cdea} R_{cdeb}) + G^a_b + \tilde{\Lambda} \delta^a_b = 0, \quad (5.40)$$

$$\nabla_a \left(\frac{R^a_{bcd}}{\Lambda_g} \right) = 0. \quad (5.41)$$

Mais uma vez, podemos simplificar a equação (5.41) utilizando a propriedade de quadri-divergência livre do tensor de Einstein. Como resultado, obtemos:

$$\partial_a R = 2R^b_a \partial_b \ln(\Lambda_g). \quad (5.42)$$

Nesta situação, as equações cosmológicas apresentam-se como:

$$\frac{3}{2\Lambda_g} h^2 - h + \frac{\tilde{\Lambda}}{3} = 0, \quad (5.43)$$

$$\frac{3}{2\Lambda_g} l^2 - l + \frac{\tilde{\Lambda}}{3} = 0, \quad (5.44)$$

$$\partial_t(l + h) - 2l\partial_t \ln(\Lambda_g) = 0. \quad (5.45)$$

O comportamento exato de Λ_g e G em função da escala de energia não é totalmente conhecido. Isto porque a identificação (4.15) foi feita no regime infravermelho da teoria de Yang-Mills, onde é necessário empregarmos um método de cálculo não-perturbativo. Infelizmente, nenhum método deste tipo é conhecido até o momento. Devido à esta dificuldade, faremos uma análise do sistema de equações $\{(5.43);(5.44);(5.45)\}$ utilizando teoria de perturbação. O objetivo é tentarmos extrair algum efeito de primeira ordem que um *running* em Λ_g causaria nos Universos de de Sitter obtidos na sub-sessão 5.2.1.

5.3.1 Perturbações de primeira ordem nas soluções de de Sitter

Iniciamos supondo perturbações de primeira ordem no fator de escala e na constante cosmológica gravitacional que dependem explicitamente do tempo:

$$a(t) \longrightarrow a(t) + \epsilon\alpha(t), \quad (5.46)$$

$$\Lambda_g \longrightarrow \Lambda_g + \epsilon\beta(t). \quad (5.47)$$

Estas perturbações produzem as seguintes perturbações dos termos l , h e Λ_g^{-1} :

$$h \longrightarrow h + 2a^{-1}(H\dot{\alpha} - h\alpha)\epsilon, \quad (5.48)$$

$$l \longrightarrow l + a^{-1}(\ddot{\alpha} - l\alpha)\epsilon, \quad (5.49)$$

$$\Lambda_g^{-1} \longrightarrow \Lambda_g^{-1} - \beta\Lambda_g^{-2}\epsilon. \quad (5.50)$$

Substituindo-as no sistema de equações dinâmicas $\{(5.43);(5.44);(5.45)\}$ e mantendo a primeira ordem no parâmetro ϵ , obtemos as seguintes equações diferenciais para α e β :

$$H\dot{\alpha} - h\alpha - \frac{3h^2\beta a}{4\Lambda_g(3h - \Lambda_g)} = 0, \quad (5.51)$$

$$\ddot{\alpha} - l\alpha - \frac{3l^2\beta a}{2\Lambda_g(3l - \Lambda_g)} = 0, \quad (5.52)$$

$$\ddot{\alpha} + 2H\dot{\alpha} - (2h + l)\alpha - \frac{2la\beta}{\Lambda_g} = C_0a, \quad (5.53)$$

onde C_0 é uma constante de integração. As equações (5.51) e (5.52) podem ser combinadas de forma a desacoplarmos β . O resultado é:

$$\ddot{\alpha} - 2\left(\frac{3h - \Lambda_g}{3l - \Lambda_g}\right)\frac{l^2}{h^2}H\dot{\alpha} + \left[2\left(\frac{3h - \Lambda_g}{3l - \Lambda_g}\right)\frac{l}{h} - 1\right]l\alpha = 0. \quad (5.54)$$

Aqui devemos particularizá-la para dois casos distintos. No primeiro, quando $l = h$, temos:

$$\ddot{\alpha} - 2H\dot{\alpha} + l\alpha = 0. \quad (5.55)$$

Já no segundo, quando $l \neq h$, temos:

$$\ddot{\alpha} + 2\left(\frac{3l}{\Lambda} - 1\right)^2 H\dot{\alpha} - \left(\frac{6l}{\Lambda} - 1\right)l\alpha = 0. \quad (5.56)$$

A resolução qualitativa destas duas equações diferenciais pode ser feita comparando-as com a equação diferencial do oscilador clássico amortecido [78]:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2x = 0. \quad (5.57)$$

Nela, a derivada de segunda ordem advém da lei fundamental da dinâmica, a derivada de primeira ordem é a contribuição da força amortecedora e a de ordem zero advém da força restauradora. Além disso, ω_0 é a frequência de oscilação harmônica e β é o parâmetro de amortecimento. Deve ficar claro, então, que os termos negativos em (5.55) e (5.56) representam “forças” a favor do crescimento da perturbação α . Isto aponta para um comportamento divergente. Como consequência, após um tempo suficientemente longo, $\epsilon\alpha(t)$ assumirá valores tão grande que ele não poderá mais ser visto apenas como um termo de perturbação. Ou seja, o sistema de equações $\{(5.43);(5.44);(5.45)\}$ é incompatível com

este método perturbativo.

Capítulo 6

Conclusões

No Capítulo 2, discutimos a origem e os fundamentos de duas das principais teorias clássicas de gravidade. A primeira delas foi a Relatividade Geral, cuja origem jaz nos esforços empregados por Albert Einstein na construção de uma teoria de gravidade que fosse compatível com sua recém criada Teoria da Relatividade Especial.

Vimos que a RG se apoia firmemente em um princípio de covariância geral. De fato, ao seguirmos o raciocínio originalmente feito por Einstein, concluímos que a gravidade precisa ser descrita por uma teoria localmente invariante pelo grupo $A(4, \mathbb{R})$. Além disso, a ausência de um sistema coordenado global nos obrigou a introduzir um campo tensorial métrico. A partir de então, ficou claro que a gravidade poderia ser vista como uma manifestação da geometria do espaço-tempo.

A teoria ECSK, por sua vez, não compartilha da mesma origem. Ela surgiu nos anos '60 dos trabalhos de Sciama e Kibble [43, 42] cujo objetivo era a construção de uma teoria de calibre para o grupo de Poincaré, $ISO(1, 3)$. Diferentemente da RG, a teoria ECSK se apoia firmemente na invariância de calibre. De fato, ela pode ser vista como uma teoria de calibre para o grupo de Lorentz. Vimos que o campo de calibre associado ao grupo de Lorentz é a conexão de spin, $\omega^a_b(x)$, e que este codifica as propriedades afim do espaço-tempo. Já o campo associado ao subgrupo das translações é, na verdade, uma *vierbein*, $e^a(x)$, que representa um isomorfismo local entre o espaço-tempo e o tangente de Minkowski. Em particular, a *vierbein* está associada ao princípio de equivalência e a ausência de um sistema coordenado global. Com isto, mais uma vez, a gravidade pode ser vista como a geometria do espaço-tempo.

A RG e a teoria ECSK deixaram bastante claro que existe uma relação íntima entre a gravidade e a geometria do espaço-tempo. De fato, é esta relação que impossibilita a descrição da gravidade como uma teoria de calibre, inviabilizando, portanto, o melhor caminho que conhecemos para obtermos descrições quânticas consistentes de interações

fundamentais. Para contornarmos este empecilho, consideramos a possibilidade da gravidade não ser uma interação fundamental, e sim, um efeito efetivo.

No Capítulo 4 discutimos a formulação de uma teoria de calibre e como ela pode estar associada a uma gravidade efetiva no seu regime de baixas energias. O grupo $SO(m, n)$ foi antecipadamente escolhido por possuir todas as propriedades necessárias para que uma gravidade efetiva pudesse ser obtida. Já a estrutura dinâmica de Yang-Mills foi escolhida por ela ser renormalizável e possuir propriedades como liberdade assintótica e geração dinâmica de massa.

O fato da teoria de calibre subjacente à gravidade ser renormalizável e livre de anomalias garante que uma quantização consistente do modelo pode ser feita no futuro. Já a liberdade assintótica e a geração dinâmica de massa nos permitiram introduzir um mecanismo de quebra da simetria de calibre original, fazendo com que a álgebra do $SO(m, n)$ fosse deformada na álgebra de Poincaré, $ISO(1, 3)$. Por sua vez, os campos de calibre de cada setor da álgebra puderam ser identificados com entes puramente geométricos, nomeadamente, a conexão de spin e a *vierbein*. Finalmente, pudemos identificar a ação de Yang-Mills original com uma ação de gravidade no setor infravermelho da teoria.

A gravidade efetiva induzida pela teoria de calibre surge como uma teoria tipo-ECSK com termos de correção ultravioleta e campo de torção, em geral, propagante. O modelo se mostrou consistente com a RG, uma vez que pudemos obtê-la tomando o limite de baixa curvatura espaço-temporal e impondo um campo de torção nulo. Uma das vantagens deste modelo é o aparecimento natural de uma constante cosmológica gravitacional, Λ_g , que pode vir a resolver o Problema de Constante Cosmológica.

No Capítulo 5 utilizamos a métrica FLRW e o *ansatz* do espaço-tempo riemanniano para obtermos as soluções cosmológicas deste modelo de gravidade quântica. O primeiro objetivo cumprido foi o de verificarmos se ele contempla os resultados do MCP ou não. Rapidamente percebemos que o enorme valor de Λ_g nos permite reduzir as equações de campo deste modelo às equações de Einstein desde o início da era da radiação - quando o Universo ainda era muito jovem. Desta forma, pudemos concluir que a cosmologia deste modelo de gravidade, em seu setor infravermelho, realmente coincide com as soluções do MCP.

O segundo objetivo foi o da análise das soluções cosmológicas do setor ultravioleta e ultravioleta profundo da teoria de gravidade efetiva. Acreditamos que as soluções deste setor podem descrever a dinâmica do Universo primitivo, quando a curvatura espaço-temporal ainda era extremamente alta e os termos de correção ultravioleta têm de ser levados em conta. Iniciamos pelo caso mais simples: Universos dominados por vácuo. As soluções obtidas foram soluções de de Sitter e anti-de Sitter, a depender se o grupo de calibre adotado foi o ortogonal, $SO(5)$, ou os de de Sitter e anti-de Sitter, respectivamente.

Em particular, não possuímos nenhum bom motivo para acreditar que o Universo passou por uma fase anti-de Sitter. Por esta razão, nos concentramos em analisar, a partir de então, apenas a cosmologia provinda da teoria de calibre para o $SO(5)$.

Verificamos que as soluções de de Sitter representam, na verdade, dois Universos distintos. Um está sofrendo uma expansão métrica violenta pois o agente da expansão é, em primeira aproximação, Λ_g . O outro, em primeira aproximação, é a solução de de Sitter usual do MCP; o agente da expansão é simplesmente a constante cosmológica observacional (extremamente pequena), $\tilde{\Lambda}$. Esperamos que a solução hiper-acelerada seja capaz de descrever a era inflacionária. Uma análise mais detalhada deste caso ficará como um dos objetivos futuros deste trabalho. A outra solução aparenta ser uma correção do modelo de Friedmann usual.

Concluída a análise do vácuo, introduzimos matéria no modelo através do tensor energia-momento de um fluido perfeito. A consequência imediata foi o aparecimento de um vínculo extra para a dinâmica do espaço-tempo, *vide* (5.24), provindo da equação de campo (5.21). Este vínculo permitiu que resolvêssemos as equações dinâmicas tipo-Friedmann sem a necessidade de introdução de uma equação de estado para a matéria. Surpreendentemente, o próprio modelo ditou o comportamento da densidade de energia a medida que o Universo se expande, *vide* (5.31). Esta parece ter um componente de radiação - uma vez que um de seus termos é proporcional à a^{-4} - e outra componente, $\propto a^{-8}$, de natureza desconhecida. Esta última pode estar ligada à presença de matéria exótica no Universo primordial. Caso contrário, o modelo prevê apenas uma fase de vácuo hiper-acelerada.

A equação diferencial não-linear (5.33) provou ter solução analítica e o fator de escala foi obtido sem a necessidade de métodos numéricos, *vide* (5.34), (5.35) e (5.36). Uma análise mais detalhada destas soluções ficará como objetivo futuro deste trabalho.

Por fim, tratamos da cosmologia do modelo logo acima da era de Planck, $\sim 10^{-43}$ s, onde a constante cosmológica gravitacional e a constante de Newton não são exatamente constantes e possuem um *running*. Devido ao problema das teorias de Yang-Mills no regime não-perturbativo fomos obrigados a nos restringir à análise do comportamento das soluções de de Sitter sob perturbações de primeira ordem. O resultado obtido foi que o método perturbativo empregado é insuficiente para obtermos qualquer informação deste setor do modelo. Portanto, a cosmologia provinda deste período ainda é desconhecida. De qualquer forma, esperamos que os efeitos cosmológicos destes *runnings* tenham cessado antes mesmo de entrarmos na era inflacionária, $\sim 10^{-36}$ s, de forma que as soluções encontradas na sessão 5.2.1 sejam capazes de modelar este período. Uma análise mais contundente da cosmologia do setor ultravioleta profundo ficará como objetivo futuro desta dissertação.

Concluimos esta dissertação reafirmando que, do ponto de vista cosmológico, a teoria de Yang-Mills para o grupo de calibre $SO(5)$ parece ser o modelo de gravidade quântica mais razoável entre os três analisados. Isto porque ele gera uma teoria de gravidade efetiva cuja cosmologia, além de coincidir com o MCP no limite infravermelho, possui, em seu setor ultravioleta, soluções cosmológicas com potencial para descrever o Universo primordial.

Apêndice A

Tópicos complementares do Modelo Cosmológico Padrão

Utilizarei este apêndice para expor alguns tópicos interessante do MCP que estavam à margem da discussão feita do Capítulo 3.

A.1 Interpretação Newtoniana para as equações de Friedmann

Considere um espaço euclidiano, dotado de um sistema coordenado global. Considere também uma galáxia de massa m a uma distância $r(t) = r_0 a(t)$ do centro de nosso sistema coordenado e sujeita à um potencial gravitacional. Pela conservação da energia, temos que a energia total, E , dessa galáxia é uma constante dada por:

$$E = \frac{1}{2} m r_0^2 \dot{a}^2 - \frac{4\pi G}{3} m \rho r_0^2 a^2. \quad (\text{A.1})$$

Com isto, obtemos que:

$$3 \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{2E}{m r_0^2} \frac{1}{a^2} \right) - \chi \rho = 0. \quad (\text{A.2})$$

Notem, portanto, que esta é a versão clássica da primeira equação de Friedman, (3.10), se interpretarmos a constante $-2E/mr_0^2$ como o análogo clássico da curvatura das secções espaciais, κ . Ou seja, a primeira equação de Friedmann, classicamente, pode ser vista como a equação que garante a conservação da energia total do Universo durante o processo de expansão (ou contração) do fluido cósmico. Por outro lado, imagine que o Universo seja um sistema termodinâmico que se expande (ou contrai) adiabaticamente, $\delta Q = 0$.

Pela primeira Lei da Termodinâmica temos:

$$dU = -pdV. \quad (\text{A.3})$$

Sendo U a energia interna do Universo, esta é dada, necessariamente, pela energia do fluido cósmico, i.e., $U = \rho V$. Já o volume, V , do Universo, é dado pela esfera cujo raio é $r(t)$. Com isto, obtemos que:

$$\dot{\rho} + 3(p + \rho)\frac{\dot{a}}{a} = 0. \quad (\text{A.4})$$

Esta é a versão clássica da equação de compatibilidade, (3.12). Por isso, a equação de compatibilidade pode ser vista, classicamente, como uma consequência do Universo estar se expandindo (contraído) adiabaticamente, i.e., conservando sua entropia total. Ainda é possível combinarmos estes dois resultados para obtermos a versão clássica da segunda equação de Friedmann, (3.11). Esta pode ser vista como a equação responsável pela aceleração ou desaceleração da expansão (ou contração) do Universo. Por este motivo, muitas vezes a segunda equação de Friedmann é chamada de equação da aceleração.

A.2 O tempo de Hubble e a idade máxima do Universo

Uma grandeza física importante para a cosmologia é o chamado tempo de Hubble, t_H . Este é definido simplesmente como sendo o inverso da constante de Hubble,

$$t_H = H_0^{-1}. \quad (\text{A.5})$$

e tem valor $\sim 18 \times 10^9$ anos. Considere uma coordenatização tal que a singularidade cosmológica inicial jaz em $t = 0$ e que os dias atuais estão em $t = t_0$. Desta maneira, t_0 , pode ser inequivocamente chamado de idade atual do Universo, uma vez que ele é o tempo total transcorrido desde o Big Bang. Agora, suponha que o parâmetro de desaceleração, q , é nulo no intervalo $0 < t < t_0$ e que, portanto, o Universo sofreu, até agora, uma expansão métrica constante no tempo. Com isto, $a(t)$ é necessariamente uma função linear que tem de satisfazer $a(t) = a(t_0)$ quando $t = t_0$. Lembrando que, nesta coordenatização, $a(0) = 0$, temos que

$$a(t) = \frac{a(t_0)}{t_0}t. \quad (\text{A.6})$$

Logo, nestas condições, a idade do Universo é exatamente dado pelo tempo de Hubble, t_H :

$$\begin{aligned}\dot{a}(t) &= a(t_0)/t_0 \\ t_0 &= a(t_0)/\dot{a}(t_0) \\ &= t_H.\end{aligned}\tag{A.7}$$

Voltaremos agora à situação em que q é positivo, dado pela equação (3.19), e que, conseqüentemente, freia a expansão do Universo. Neste caso, a idade do Universo deve, necessariamente, ser menor que o tempo de Hubble, $t_0 < 18 \times 10^9$ anos. Isto demonstra que os Universos FLRW possuem uma idade consistente com estimativas independentes da idade da Terra, $\sim 4.5 \times 10^9$ anos, e da idade de um dos mais antigos aglomerados de galáxias, $\sim 13.4 \times 10^9$ anos.

Referências Bibliográficas

- [1] POLCHINSKI, J. *String Theory: An Introduction to the Bosonic String*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics, v. 1).
- [2] ZWIEBACH, B. *A First Course in String Theory*. New York: Cambridge University Press, 2009.
- [3] GREEN, M.; SCHWARZ, J.; WITTEN, E. *Superstring Theory: Introduction*. Cambridge: Cambridge University Press, 1988. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics, v. 1).
- [4] GAMBINI, R.; PULLIN, J. *A First Course in Loop Quantum Gravity*. Oxford: Oxford University Press, 2011.
- [5] ROVELLI, C.; VIDOTTO, F. *Covariant Loop Quantum Gravity: An Elementary Introduction to Quantum Gravity and Spinfoam Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 2014. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics).
- [6] ROVELLI, C. Notes for a brief history of quantum gravity. p. 742–768, 2000. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/gr-qc/0006061>>. Acesso em: 2 fev. 2015.
- [7] ROVELLI, C. Strings, loops and others: A critical survey of the present approaches to quantum gravity. 1997. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/gr-qc/9803024>>. Acesso em: 2 fev. 2015.
- [8] ROVELLI, C. A critical look at strings. *Found. Phys.*, v. 43, p. 8, 2013. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1108.0868>>. Acesso em: 16 mar. 2015.
- [9] ASHTEKAR, A.; REUTER, M.; ROVELLI, C. From General Relativity to Quantum Gravity. 2014. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1408.4336>>. Acesso em: 16 mar. 2015.
- [10] ROVELLI, C. Loop quantum gravity: the first twenty five years. *Class. Quant. Grav.*, v. 28, n. 15, p. 153002, 2011. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1012.4707>>. Acesso em: 16 mar. 2015.

- [11] PESKIN, M.; SCHROEDER, D. *An Introduction To Quantum Field Theory*. USA: Westview Press, 1995. (Frontiers in physics).
- [12] MAGGIORE, M. *A Modern Introduction to Quantum Field Theory*. Oxford: Oxford University Press, 2004. (Oxford Master Series in Physics).
- [13] COTTINGHAM, W.; GREENWOOD, D. *An Introduction to the Standard Model of Particle Physics*. 2. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
- [14] PEEBLES, P. *Principles of Physical Cosmology*. New Jersey: Princeton University Press, 1993. (Princeton series in physics).
- [15] WEINBERG, S. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. USA: Wiley, 1972.
- [16] NARLIKAR, J. *An Introduction to Cosmology*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- [17] BERTLMANN, R. *Anomalies in Quantum Field Theory*. New York: Clarendon Press, 2000. (International Series of Monographs on Physics).
- [18] NAKAHARA, M. *Geometry, Topology and Physics*. 2. ed. Cornwall, UK: Taylor & Francis, 2003. (Graduate student series in physics).
- [19] THIRRING, W.; HARRELL, E. *Classical Mathematical Physics: Dynamical Systems and Field Theories*. USA: Springer, 2003.
- [20] FRANKEL, T. *The Geometry of Physics: An Introduction*. 3. ed. New York: Cambridge University Press, 2011.
- [21] MISNER, C.; THORNE, K.; WHEELER, J. *Gravitation*. San Francisco: W. H. Freeman, 1973.
- [22] d'INVERNO, R. *Introducing Einstein's Relativity*. Oxford: Clarendon Press, 1992.
- [23] CARROLL, S. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. California: Addison Wesley, 2003.
- [24] WALD, R. M. *General Relativity*. Chicago: The University of Chicago Press, 1984.
- [25] DE FELICE, F.; CLARKE, C. *Relativity on Curved Manifolds*. New York: Cambridge University Press, 1992. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics).
- [26] RYDER, L. H. *Introduction to General Relativity*. New York: Cambridge University Press, 2009.

- [27] SABBATA, V. D.; GASPERINI, M. *Introduction to Gravitation*. Singapore: World Scientific, 1985.
- [28] GÖCKELER, M.; SCHÜCKER, T. *Differential Geometry, Gauge Theories, and Gravity*. New York: Cambridge University Press, 1989. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics).
- [29] HEHL, F. W. et al. General relativity with spin and torsion: Foundations and prospects. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 48, p. 393–416, jul. 1976. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.48.393>>. Acesso em: 06 oct. 2014.
- [30] LASKOŚ-GRABOWSKI, P. *The Einstein-Cartan Theory: the meaning and consequence of torsion*. Dissertação (Mestrado) — University of Wrocław, Faculty of Physics and Astronomy, 2009. Disponível em: <<https://th.if.uj.edu.pl/~plg/ph.pdf>>. Acesso em: 06 oct. 2014.
- [31] EINSTEIN, A. Zur elektrodynamik bewegter körper. *Annalen der Physik*, WILEY-VCH Verlag, v. 322, n. 10, p. 891–921, 1905. ISSN 1521-3889. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/andp.19053221004>>. Acesso em: 16 aug. 2014.
- [32] EINSTEIN, A. On the electrodynamics of moving bodies. In: _____. *The principle of relativity: A collection of original memoirs on the special and general theory of relativity*. Translated by PERRETT, W.; JEFFERY, G. B. New York: Dover, 1952. cap. 3. ISBN 9780486600819.
- [33] PETROV, A. Z. *Einstein Spaces*. Hungary: Pergamo Press, 1969.
- [34] DAM, H. V.; WIGNER, E. P. Instantaneous and asymptotic conservation laws for classical relativistic mechanics of interacting point particles. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 142, p. 838–843, feb. 1966. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.142.838>>. Acesso em: 16 aug. 2014.
- [35] OHANIAN, H. C. *Gravitation and Spacetime*. New York: WW Norton & Co, 1976.
- [36] LOVELOCK, D. The einstein tensor and its generalizations. *J. Math. Phys.*, American Institute of Physics, v. 12, p. 498–501, mar. 1971. Disponível em: <<http://scitation.aip.org/content/aip/journal/jmp/12/3/10.1063/1.1665613>>. Acesso em: 27 aug. 2014.
- [37] HILBERT, D. Grundlagen der physik, erste mitteilung, vorgelegt in der sitzung vom 20. november 1915. *Nachrichten von der Koeniglichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Goettingen, Math-physik. Klasse*, v. 1915, p. 395–407, nov. 1915.

- Disponível em: <<http://digilib.mpiwg-berlin.mpg.de/digitalibrary/jquery/digilib.html?fn=/permanent/einstein/MHTT6W63/pageimg&pn=2>>. Acesso em: 21 sep. 2014.
- [38] EINSTEIN, A. Feldgleichungen der gravitation. *Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte*, p. 844–847, nov. 1915.
- [39] ZANELLI, J. Lecture notes on Chern-Simons (super-)gravities. Second Edition. 2008. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/hep-th/0502193>>. Acesso em: 6 nov. 2014.
- [40] CARTAN, E. Sue une généralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces à torsion. *Comptes Rendus, Paris*, n. 172, 1922.
- [41] UTIYAMA, R. Invariant theoretical interpretation of interaction. *Phys. Rev.*, American Physical Society, v. 101, p. 1597–1607, mar 1956. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.101.1597>>. Acesso em: 14 nov. 2014.
- [42] KIBBLE, T. W. B. Lorentz invariance and the gravitational field. *Journal of Mathematical Physics*, v. 2, n. 2, p. 212–221, 1961. Disponível em: <<http://scitation.aip.org/content/aip/journal/jmp/2/2/10.1063/1.1703702>>. Acesso em: 14 nov. 2014.
- [43] SCIAMA, D. W. On the analogy between charge and spin in general relativity. In: *Recent Developments in General Relativity*. Oxford: Pergamon + PWN, 1962. p. 415.
- [44] ALDROVANDI, R.; PEREIRA, J. G. Natural Poincaré gauge model. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 33, p. 2788–2795, may 1986. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.33.2788>>. Acesso em: 14 nov. 2014.
- [45] RUBAKOV, V. *Classical Theory of Gauge Fields*. Translated by Stephen S. Wilson. New Jersey: Princeton University Press, 2002.
- [46] MARDONES, A.; ZANELLI, J. Lovelock-Cartan theory of gravity. *Classical and Quantum Gravity*, v. 8, n. 8, p. 1545, 1991. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0264-9381/8/i=8/a=018>>. Acesso em: 23 nov. 2014.
- [47] TRAUTMAN, A. Einstein-Cartan Theory. 2006. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/gr-qc/0606062>>. Acesso em: 17 nov. 2014.
- [48] POPLAWSKI, N. J. Cosmology with torsion: An alternative to cosmic inflation. *Physics Letters B*, v. 694, n. 3, p. 181–185, 2010. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269310011561>>. Acesso em: 26 nov. 2014.

- [49] POPLAWSKI, N. Nonsingular, big-bounce cosmology from spinor-torsion coupling. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 85, p. 107502, may 2012. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.85.107502>>. Acesso em: 26 nov. 2014.
- [50] HEHL, F. W.; HEYDE, P. von der; KERLICK, G. D. General relativity with spin and torsion and its deviations from Einstein's theory. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 10, p. 1066–1069, aug 1974. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.10.1066>>. Acesso em: 26 nov. 2014.
- [51] TSEYTLIN, A. A. On the first-order formalism in quantum gravity. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, v. 15, n. 3, p. L105, 1982. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0305-4470/15/i=3/a=005>>. Acesso em: 27 nov. 2014.
- [52] HEHL, F. W. Alternative gravitational theories in four-dimensions. 1997. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/gr-qc/9712096>>. Acesso em: 27 nov. 2014.
- [53] MUKHANOV, V. *Physical Foundations of Cosmology*. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
- [54] RUGH, S.; ZINKERNAGEL, H. Weyl's Principle, Cosmic Time and Quantum Fundamentalism. In: DIEKS, D. et al. (Ed.). *Explanation, Prediction, and Confirmation*. Springer Netherlands, 2011, (The Philosophy of Science in a European Perspective, v. 2). p. 411–424. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1007/978-94-007-1180-8_28>. Acesso em: 30 nov. 2014.
- [55] HUBBLE, E. A relation between distance and radial velocity among extra-galactic nebulae. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 15, n. 3, p. 168–173, 1929. Disponível em: <<http://www.pnas.org/content/15/3/168.short>>. Acesso em: 1 jan. 2015.
- [56] Planck Collaboration et al. Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results. *Astronomy and Astrophysics*, v. 571, p. A1, 2014. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1051/0004-6361/201321529>>. Acesso em: 1 jan. 2015.
- [57] HAWKING, S. W.; PENROSE, R. The Singularities of Gravitational Collapse and Cosmology. *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, The Royal Society, v. 314, n. 1519, p. 529–548, 1970. Disponível em: <<http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/314/1519/529>>. Acesso em: 16 jan. 2015.
- [58] HAWKING, S. W.; ELLIS, G. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1973. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics).

- [59] PENZIAS, A. A.; WILSON, R. W. A measurement of excess antenna temperature at 4080-mc/s. *Astrophys. J.*, v. 142, p. 419–421, 1965. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/doi/10.1086/148307>>. Acesso em: 16 jan. 2015.
- [60] RIESS, A. G. et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. *Astron. J.*, v. 116, p. 1009–1038, 1998. Disponível em: <<http://iopscience.iop.org/1538-3881/116/3/1009/>>. Acesso em: 26 jan. 2015.
- [61] RYDEN, B. S. *Introduction to Cosmology*. USA: Addison-Wesley, 2003.
- [62] SOBREIRO, R. F.; TOMAZ, A. A.; OTOYA, V. J. V. de Sitter gauge theories and induced gravities. *The European Physical Journal C*, Springer-Verlag, v. 72, n. 5, 2012. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1140/epjc/s10052-012-1991-4>>. Acesso em: 26 jan. 2015.
- [63] TOMAZ, A. A. *Mapeamentos em teorias de calibre da gravidade*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Fluminense, 2012. Disponível em: <http://www.if.uff.br/pt/baixargeral/doc_download/315-anderson-alves-tomaz-dissertacao-de-mestrado-2012>. Acesso em: 26 jan. 2015.
- [64] SOBREIRO, R. F.; TOMAZ, A. A.; OTOYA, V. J. V. Induced gravity from gauge theories. *Journal of Physics: Conference Series*, v. 453, n. 1, p. 012014, 2013. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/1742-6596/453/i=1/a=012014>>. Acesso em: 26 jan. 2015.
- [65] SOBREIRO, R. F.; OTOYA, V. J. V. Affine gauge theory of gravity and its reduction to the Riemann-Cartan geometry. *J. Phys. Conf. Ser.*, v. 283, p. 012032, 2011. Disponível em: <<http://iopscience.iop.org/1742-6596/283/1/012032/>>. Acesso em: 26 jan. 2015.
- [66] ASSIMOS, T. et al. Dark gravity from a renormalizable gauge theory. 2013. Disponível em: <<http://arxiv.org/abs/1305.1468>>. Acesso em: 26 jan. 2015.
- [67] MIELKE, E. W. Spontaneously broken topological $SL(5, R)$ gauge theory with standard gravity emerging. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 83, p. 044004, Feb 2011. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.83.044004>>. Acesso em: 26 jan. 2015.
- [68] TSEYTLIN, A. A. Poincaré and de Sitter gauge theories of gravity with propagating torsion. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 26, p. 3327–3341, Dec 1982. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.26.3327>>. Acesso em: 26 jan. 2015.

- [69] COLLINS, J. C. *Renormalization: An Introduction to Renormalization, the Renormalization Group and the Operator-Product Expansion*. Cambridge: Cambridge University Press, 1984. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics).
- [70] 't Hooft, G.; VELTMAN, M. Regularization and renormalization of gauge fields. *Nuclear Physics B*, v. 44, n. 1, p. 189 – 213, 1972. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321372902799>>. Acesso em: 26 jan. 2015.
- [71] GROSS, D. J.; WILCZEK, F. Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 30, p. 1343–1346, Jun 1973. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.30.1343>>. Acesso em: 26 jan. 2015.
- [72] POLITZER, H. D. Reliable perturbative results for strong interactions? *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 30, p. 1346–1349, Jun 1973. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.30.1346>>. Acesso em: 26 jan. 2015.
- [73] DAS, A. *Lectures on Quantum Field Theory*. Singapore: World Scientific, 2008.
- [74] INÖNÜ, E.; WIGNER, E. P. On the Contraction of Groups and Their Representations. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, v. 39, n. 6, p. 510–524, 1953. Disponível em: <<http://www.pnas.org/content/39/6/510.short>>. Acesso em: 26 jan. 2015.
- [75] GILMORE, R. *Lie Groups, Physics, and Geometry: An Introduction for Physicists, Engineers and Chemists*. New York: Cambridge University Press, 2008.
- [76] SOBREIRO, R. F.; TOMAZ, A. A. One and two-loop estimates from a quantum gravity theory candidate. *Work in progress*.
- [77] WEINBERG, S. The cosmological constant problem. *Rev. Mod. Phys.*, American Physical Society, v. 61, p. 1–23, Jan 1989. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.61.1>>. Acesso em: 27 jan. 2015.
- [78] MARION, J.; THORNTON, S. *Classical Dynamics of Particles and Systems*. 5. ed. USA: Brooks/Cole, 2004.