Novidades em dímeros

Carlos Tomei

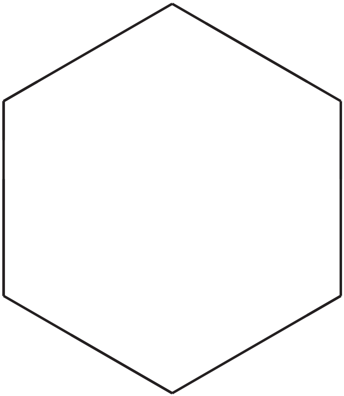
Departamento de Matemática, PUC-Rio

Instituto de Física, UFF

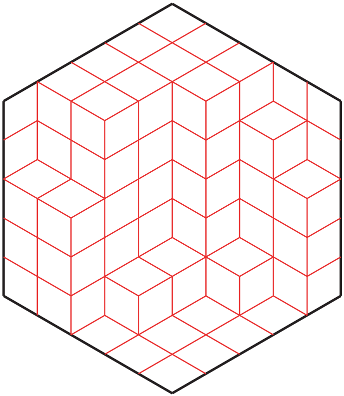
Niterói

Março, 2009

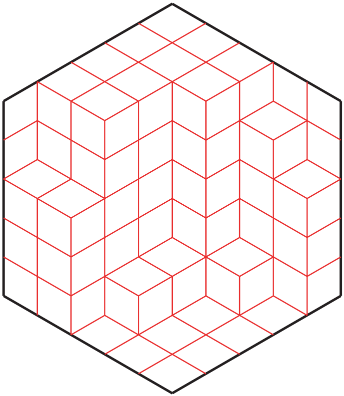
Calissons

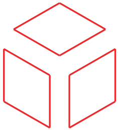


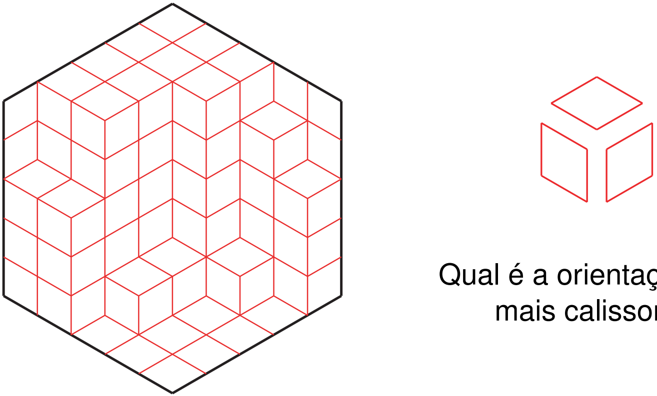
Calissons



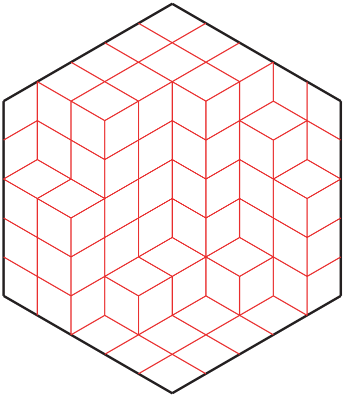
Calissons

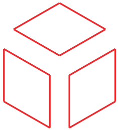






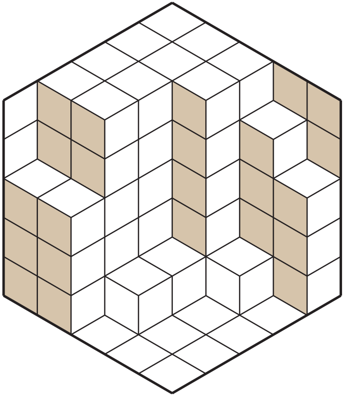
Qual é a orientação com mais calissons?

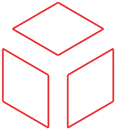




Qual é a orientação com mais calissons?

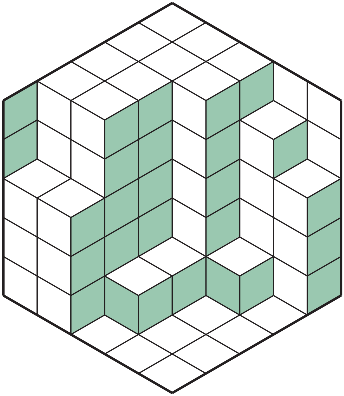
Qualquer uma!

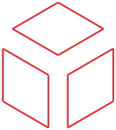




Qual é a orientação com mais calissons?

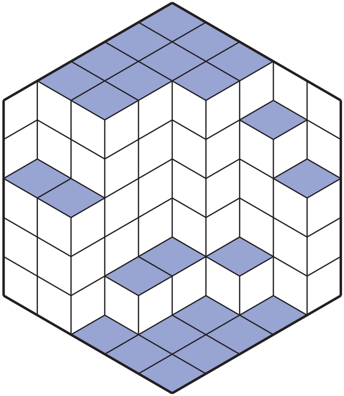
Qualquer uma!

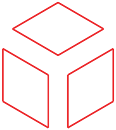




Qual é a orientação com mais losangos?

Qualquer uma!

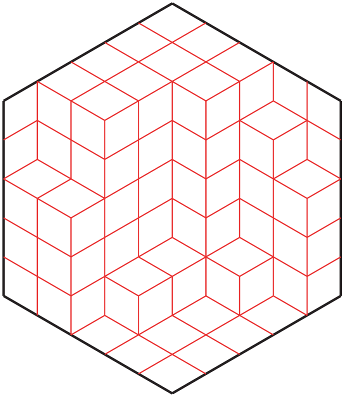


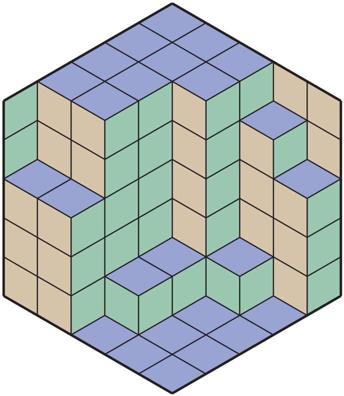


Qual é a orientação com mais calissons?

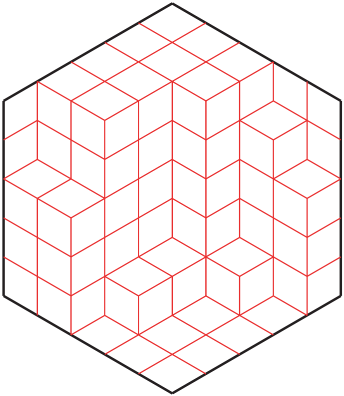
Qualquer uma!

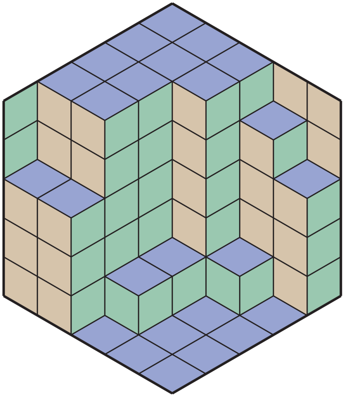
Por quê?!





Por quê?!

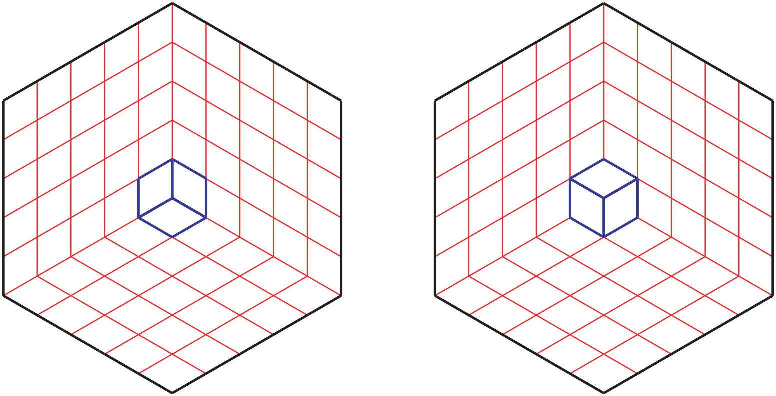




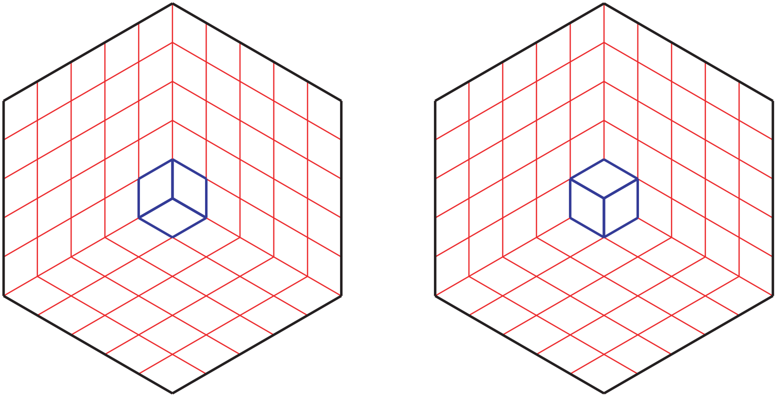
hexágono cheio de losangos $\Leftrightarrow$ cubo com cubinhos dentro

(de forma gravitacionalmente estável)

Flips de losangos

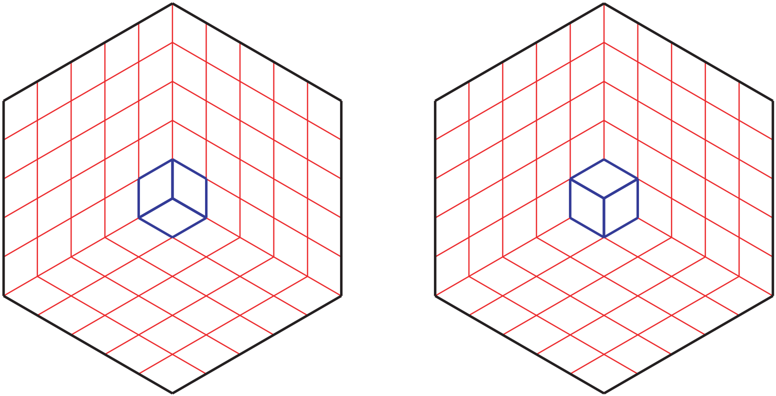


Flips de losangos



Dois preenchimentos quaisquer são ligados por flips.

Flips de losangos

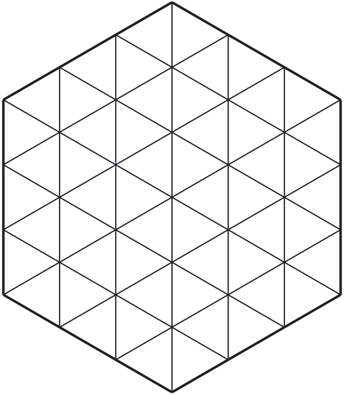


Dois preenchimentos quaisquer são ligados por flips.

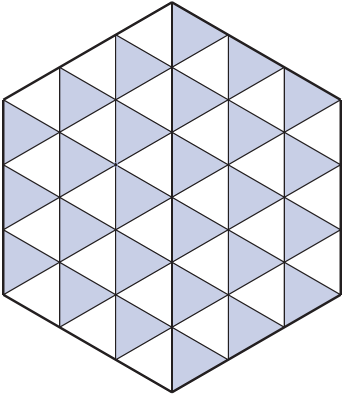
Os percursos mínimos são fáceis de identificar.

Para a caixa de lado 5, o percurso mais longo tem 125 flips.

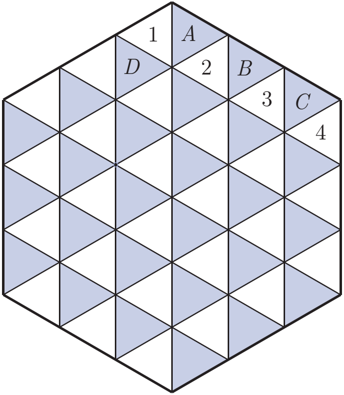
Contando preenchimentos 1

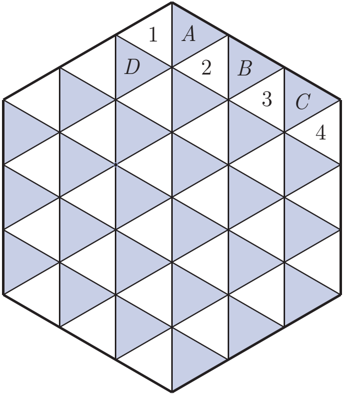


Contando preenchimentos 1



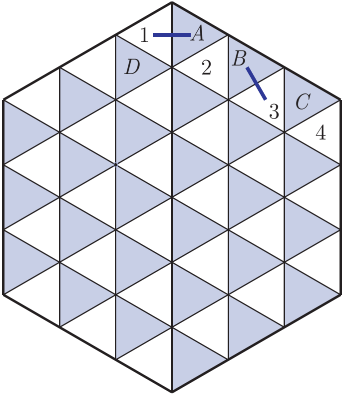
Contando preenchimentos 1





$$
M = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} A & B & C & D & \cdots \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\
1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & 1 & 1 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\
\cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

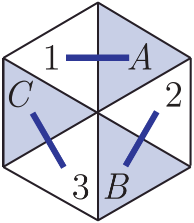
Contando preenchimentos por losangos 1



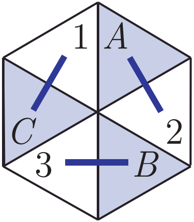
$$
M = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} A & B & C & D & \cdots \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccc}
\boxed{1} & 0 & 0 & 1 & \cdots \\
1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\
0 & \boxed{1} & 1 & 0 & \cdots \\
0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\
\cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Cada preenchimento é um monômio da expansão de $\det(M)$.

Contando preenchimentos por losangos 2

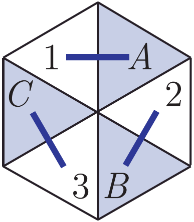


$$M = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 1 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{1} \end{bmatrix} \end{array}$$

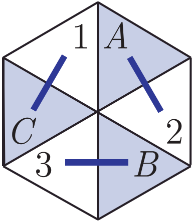


$$M = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \boxed{1} \\ \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Flips não alteram o sinal do monômio!



$$\begin{array}{c} \\ \\ M = \end{array} \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 1 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{1} \end{bmatrix} \end{array}$$



$$\begin{array}{c} \\ \\ M = \end{array} \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & \boxed{1} \\ \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

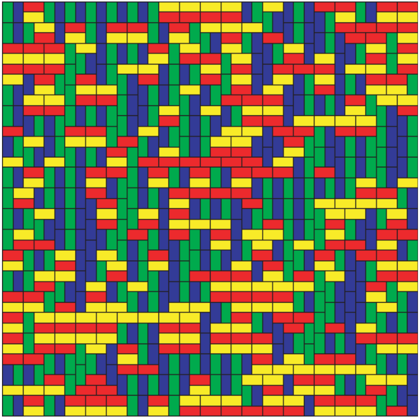
$$\#\ \text{preenchimentos} = \det(M) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} \frac{n+i+j-1}{i+j-1}.$$

Dominós

Com dominós, os desenhos não parecem tridimensionais.

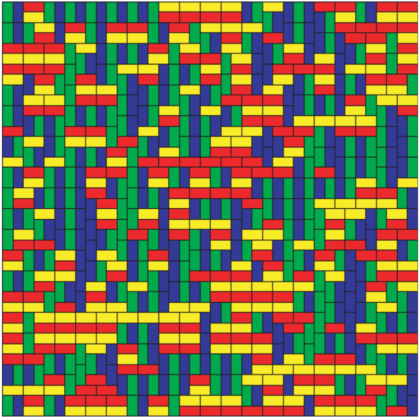
Dominós

Com dominós, os desenhos não parecem tridimensionais.



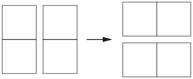
Dominós

Com dominós, os desenhos não parecem tridimensionais.

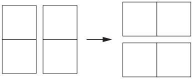


Mas existe uma função altura.

Flips de dominós

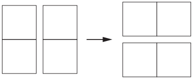
Um flip de dominós é .

Flips de dominós

Um flip de dominós é .

Preenchimentos por dominós são monômios de uma M análoga.

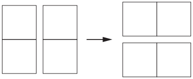
Flips de dominós

Um flip de dominós é .

Preenchimentos por dominós são monômios de uma M análoga.

Mas... um flip *muda* o sinal do monômio.

Flips de dominós

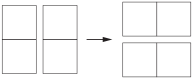
Um flip de dominós é .

Preenchimentos por dominós são monômios de uma M análoga.

Mas... um flip *muda* o sinal do monômio.

Se M não tem buracos, então $\det(M)$ é -1, 0 ou 1.

Flips de dominós

Um flip de dominós é .

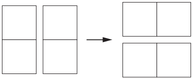
Preenchimentos por dominós são monômios de uma M análoga.

Mas... um flip *muda* o sinal do monômio.

Se M não tem buracos, então $\det(M)$ é -1, 0 ou 1.

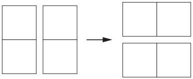
Para contar preenchimentos, redefina *adjacência* para fazer com que um flip não mude o sinal do monômio.

Rotule com -1 as adjacências verticais a quadrados brancos em linhas pares!



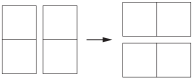
Contando preenchimentos por dominós

Rotule com -1 as adjacências verticais a quadrados brancos em linhas pares!



Agora, cada preenchimento por dominós é um monômio de uma M_K, e a contagem total é $\det M_K$.

Rotule com -1 as adjacências verticais a quadrados brancos em linhas pares!

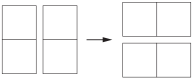


Agora, cada preenchimento por dominós é um monômio de uma M_K, e a contagem total é $\det M_K$.

O número de preenchimentos de um retângulo $n \times m$ é

Contando preenchimentos por dominós

Rotule com -1 as adjacências verticais a quadrados brancos em linhas pares!



Agora, cada preenchimento por dominós é um monômio de uma M_K, e a contagem total é $\det M_K$.

O número de preenchimentos de um retângulo $n \times m$ é

$$\prod_{i=1}^{m/2} \prod_{j=1}^{n} 2 \left(\cos^2 \frac{i\pi}{m+1} + \cos^2 \frac{j\pi}{n+1} \right)^{1/2}$$

Duas malandragens combinatórias

I. Qual é a probabilidade de usar o dominó cobrindo i e j?

Duas malandragens combinatórias

I. Qual é a probabilidade de usar o dominó cobrindo i e j?

Isto é $$\frac{\#\text{ preenchimentos com o dominó}}{\#\text{ preenchimentos}}\ .$$

I. Qual é a probabilidade de usar o dominó cobrindo i e j?

$$\text{Isto é} \quad \frac{\#\ \text{preenchimentos com o dominó}}{\#\ \text{preenchimentos}}\ .$$

A posição (j, i) da inversa de M_K !

Duas malandragens combinatórias

I. Qual é a probabilidade de usar o dominó cobrindo i e j?

$$\text{Isto é} \quad \frac{\#\ \text{preenchimentos com o dominó}}{\#\ \text{preenchimentos}}\ .$$

A posição (j, i) da inversa de M_K !

II. Quantos preenchimentos do hexágono usam m cubinhos?

Duas malandragens combinatórias

I. Qual é a probabilidade de usar o dominó cobrindo i e j?

$$\text{Isto é} \quad \frac{\#\ \text{preenchimentos com o dominó}}{\#\ \text{preenchimentos}} \ .$$

A posição (j, i) da inversa de M_K !

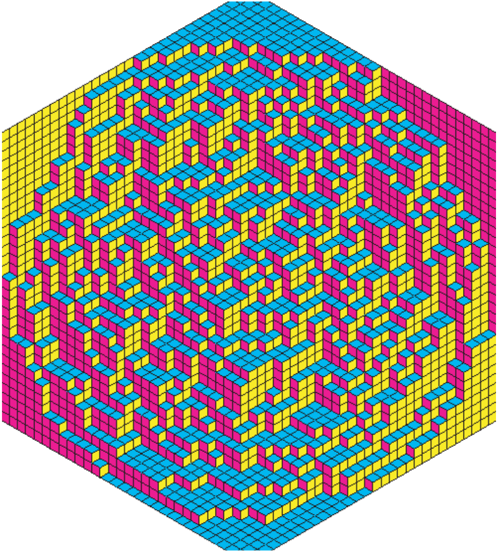
II. Quantos preenchimentos do hexágono usam m cubinhos?

$$\text{O coeficiente de } q^m \text{ em} \quad \Pi_{0 \leq i,j,k \leq n} \quad \frac{q^{i+j+k+2}-1}{q^{i+j+k+1}-1} \ .$$

Outras surpresas visuais 1

Como é o preenchimento típico de uma caixa por losangos?

Como é o preenchimento típico de uma caixa por losangos?

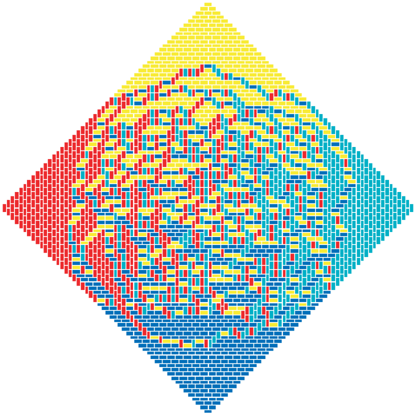


Outras surpresas visuais 2

Um dos $N = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ preenchimentos do *diamante asteca*.

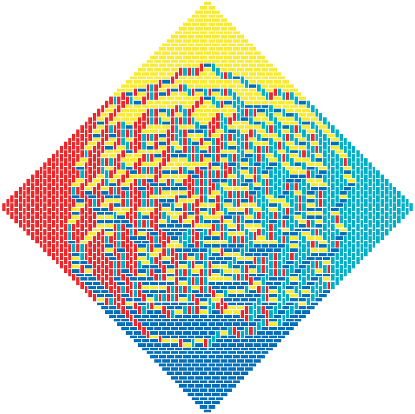
Outras surpresas visuais 2

Um dos $N = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ preenchimentos do *diamante asteca*.



Outras surpresas visuais 2

Um dos $N = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ preenchimentos do *diamante asteca*.



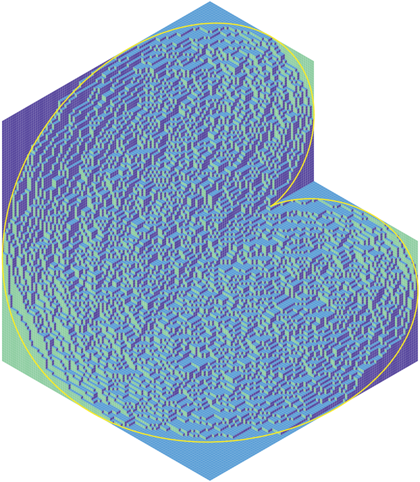
Fixe $\epsilon > 0$. Para n grande, a fronteira da zona temperada está a mais de ϵn do Círculo Ártico só em ϵN preenchimentos.

Só para losangos...

Fronteiras são curvas algébricas calculáveis!

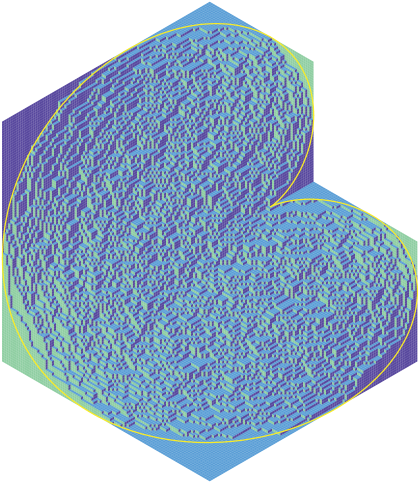
Só para losangos...

Fronteiras são curvas algébricas calculáveis!



Só para losangos...

Fronteiras são curvas algébricas calculáveis!



A fronteira 3D minimiza um funcional; gelo derretendo?!