

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

INSTITUTO DE FÍSICA

MESTRADO EM FÍSICA

Francisco Bento Lustosa da Costa Duarte Pereira

Análise Termodinâmica de um Buraco Negro com Monopolo
Global em Teorias $f(R)$

Niterói-RJ

2014

P436 Pereira, Francisco Bento Lustosa da Costa Duarte Análise termodinâmica de um buraco negro com monopolo global em uma Teoria $f(R)$ / Francisco Bento Lustosa da Costa Duarte Pereira ; orientador: Maria Emilia Xavier Guimarães – Niterói, 2014. 46 p. : il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Fluminense, Instituto de Física, 2014. Bibliografia: p. 44-46.

1.BURACO NEGRO. 2.TEORIAS $F(R)$. 3.DEFEITO TOPOLÓGICO. 4.MONOPOLO GLOBAL. I. Guimarães, Maria Emilia Xavier, Orientadora. II.Universidade Federal Fluminense. Instituto de Física, Instituição responsável. III.Título.

CDD 531.14

FRANCISCO BENTO LUSTOSA DA COSTA DUARTE PEREIRA

ANÁLISE TERMODINÂMICA DE UM BURACO NEGRO COM MONOPOLO GLOBAL EM
TEORIAS $f(R)$

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado
em Física da
Universidade Federal Fluminense, como
requisito parcial para obtenção do Grau de
Mestre. Área de Concentração: Gravitação.

Orientador: Profa. Dra. Maria Emília Xavier Guimarães

Niterói-RJ

2014

FRANCISCO BENTO LUSTOSA DA COSTA DUARTE PEREIRA

ANÁLISE TERMODINÂMICA DE UM BURACO NEGRO COM MONOPOLO GLOBAL EM
TEORIAS $f(R)$

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado
em Física da
Universidade Federal Fluminense, como
requisito parcial para obtenção do Grau de
Mestre. Área de Concentração: Gravitação.

Aprovada em MÊS de ANO.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. MARIA EMILIA XAVIER GUIMARÃES - Orientadora
UFF

Prof. RODRIGO FERREIRA SOBREIRO - Examinador interno
UFF

Prof. JOSÉ ABDALLA HELAYEL-NETO - Examinador externo
CBPF

Prof. LUIS ESTEBAN OXMAN - Suplente interno
UFF

Prof. JOSÉ ANTONIO ACCIOLY - Suplente externo
CBPF

Niterói-RJ

2014

Dedico este trabalho à curiosidade Humana.

”Uma pessoa não pode deixar de se sentir reverente ao contemplar os mistérios da eternidade, da vida, da maravilhosa estrutura da realidade. Basta que a pessoa tente apenas compreender um pouco mais desse mistério a cada dia. Nunca perca uma sagrada curiosidade”.

Albert Einstein

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao Amor e a Música que me deram a paz e a inspiração para que eu pudesse concluir esse trabalho.

Agradeço aos meus principais formadores, Isabel Lustosa e Cesar Duarte, pela constante dedicação e preocupação em me dar a educação, o apoio e o carinho sem os quais não seria possível chegar até essa etapa da minha formação. Agradeço também aos demais familiares que de alguma forma contribuíram com a minha formação, especialmente minha tia Clélia Lustosa, meu padrasto Mario Bag, minha madrastra Lucia Melo e meu irmão Maurício.

Agradeço também a todos os profissionais que construíram o ambiente escolar mais acolhedor e inspirador que eu poderia encontrar ao longo da minha infância e a adolescência, o Centro Educacional Anísio Teixeira. Agradeço especialmente aos professores Antonio Cesar, Cláudio Veloso e Marcelo Sá Correa pelos exemplos de vida.

Agradeço aos professores do Departamento de Física da Universidade Federal do Ceará pela formação de qualidade ao longo da minha graduação, especialmente aos professores Carlos Alberto e José Ramos, pelas disciplinas ensinadas e pelo suporte proporcionado.

Agradeço especialmente a todos os companheiros de vida que pude conhecer durante a minhas passagens pelo Ceará, que me propiciaram a vivência cultural, social, política e intelectual que me transformou no profissional que sou hoje. Agradeço às primeiras amigas, Marília, Louise, Mariana, Giulianna pela amizade constante e pelas portas abertas, aos companheiros de dia-a-dia João, Rogério, Cecília, Potiguar, Livia, Louise, Pedro pelas diversas experiências engrandecedoras, e à todas as outras incríveis pessoas que tive a oportunidade de interagir na minha verdadeira terra.

Agradeço também aos professores da pós-graduação do Instituto de Física da Universidade Federal Fluminense, especialmente à minha orientadora Professora Maria Emília Guimarães, ao professor Luis Oxmann pelo excelente curso de Teoria Quântica de Campos, e aos professores Rodrigo Sobreiro e Ernesto Galvão pelos igualmente excelentes cursos de Eletromagnetismo e Mecânica Quântica. Agradeço ao professor José Helayel pela enorme disposição em ensinar e contribuir na minha formação com cursos e orientações sempre imensamente motivadores e inspiradores.

Um Sol Pra Cada Um - (Bruno Perdigão / Marcus Dias / Thales Catunda)

É um sol, é um sol,

É um sol pra cada um

É um sol, é um sol,

É um sol pra cada um

Nesse pedaço de planeta colorido

Onde tudo é dividido

Existe um sol pra cada um

Esse calor que você sente

É todo seu

Esse calor que me atormenta

É todo Meu

Vem pro meu lado

Se livrar desse cansaço

Da fadiga, do mormaço

Desse amor que se perdeu

Pois nessa vida

Só existe uma certeza

Sobre toda a natureza

Brilha a luz do astro rei

Se vai querer brilhar pra sempre

Isso eu não sei

Se a gente vai se apaixonar

Também não sei

Mas do calor que vai nascer

Nesse momento

Surgirá no firmamento

Um novo sol fora da lei

É um sol, é um sol (...)

Lista de Figuras

3.1	A energia livre de um sistema ferromagnético em função da magnetização.	12
3.2	O potencial efeito em função do campo para diferentes valores da temperatura	14
3.3	a) Domínios de puro vácuo com valores diferentes (representados pelos círculos brancos) cercados por uma região de falso vácuo (cinza) b) O crescimento dos domínios faz com eles se juntem em um domínio de puro vácuo cercado o falso vácuo e formando nessa região uma corda cósmica global.	15
4.1	Gráfico para $B(r, n)$	26
5.1	Temperatura Local em função de r_H para $n=2$ e $n=30$	35
5.2	Temperatura local em função de r_H para $n=1$ (esq.) e $n=2$ (dir.) e ψ_n variando.	36
5.3	Energia local em função de r_H para o caso clássico de Schwarzschild e $n=3, n=4, n=10$ e $n=50$ com $\psi_n = 0.2 \cdot 10^{-2n}$	37
5.4	Capacidade Térmica Local em função de r_H para o caso clássico de Schwarzschild com $r=2, r=10$ e $r=20$	38
5.5	Capacidade Térmica Local em função de r_H com $n=2, n=10$ e $n=40$, com e sem a modificação da gravidade.	40
5.6	Capacidade Térmica Local em função de r para $n=2, 10$ e 40 (esq.) com $r_H=2$ e $n=10$, com $r_H=5, 15, 25$ (dir.).	40

Sumário

Agradecimentos	v
Lista de Figuras	vii
Resumo	x
Abstract	xi
1 Introdução	1
2 Introdução às Teorias $f(R)$	5
2.1 Motivação	5
2.2 Equações de Campo Modificadas no Formalismo de Palatini	6
2.3 Equações de Campo Modificadas no formalismo da Métrica	7
2.3.1 Equações de Campo Estáticas e Esfericamente Simétricas no Vácuo	8
2.4 Condições de Estabilidade sobre as Funções $F(R)$	9
3 Formação e Efeitos Gravitacionais do Monopolo Global	11
3.1 Quebra Espontânea de Simetria	11
3.2 Surgimento de Defeitos Topológicos na Evolução do Universo	13
3.3 Monopolos Globais: Formação e Efeitos Gravitacionais	15
3.3.1 Efeitos Gravitacionais do Monopolo Global em Relatividade Geral	16
3.3.2 Efeitos Gravitacionais do Monopolo Global em Teorias $f(R)$	18
4 O Buraco Negro com Monopolo Global; Efeitos Gravitacionais	21
4.1 Desenvolvimento das Equações de Campo Fraco	21
4.2 Buraco Negro de Schwarzschild, Revisão Histórica	23
4.3 O Buraco Negro com Monopolo Global nas Teorias $f(R)$, Características Gerais	25
5 Análise Termodinâmica do Buraco Negro com Monopolo Global para $F(r) = 1 + \psi_n r^n$	29
5.1 Introdução a Termodinâmica de Buracos Negros	29
5.1.1 Criação e Aniquilação de Partículas por um Espelho em Movimento	31
5.2 Gravidade Superficial	32

	ix
5.3 Temperatura e Energia	33
5.4 Calor Específico, Estabilidade e Transições de Fase	37
5.4.1 O caso com Monopolo Global em Teorias $f(R)$	39
6 Conclusões e Perspectivas	42
Referências Bibliográficas	44

Resumo

Neste trabalho estudamos o problema do Buraco Negro (BN) em uma região contendo um Monopolo Global em uma teoria de gravidade $f(R)$. Utilizando o formalismo da métrica, obtemos as equações de campo em termos de $F(R) = \frac{df(R)}{R}$ e assumimos que $F(R)$ seja uma função de grau n da coordenada radial. Adotando uma aproximação, conseguimos obter soluções do tipo BN e analisamos suas quantidades termodinâmicas, como temperatura local, energia e capacidade térmica para qualquer n . Comparamos os resultados obtidos com o caso do BN de Schwarzschild com um Monopolo Global e também observamos se há influência do grau n nos efeitos termodinâmicos.

Palavras-chave: Buracos Negros. Teorias $f(R)$. Defeitos topológicos. Monopolos Globais.

Abstract

In this work we study the problem of a Black Hole (BH) in a region containing a Global Monopole in a $f(R)$ gravity. We use the metric formalism to obtain the field equations in terms of $F(R) = \frac{df(R)}{R}$ and assume that $F(R)$ is a n -degree function of the radial coordinate. Adopting an approximation, we obtain BH solutions and analyse the resulting thermodynamical quantities, such as local temperature, energy and heat capacity for all n 's. We compare the results with the ones obtained in the case of the Schwarzschild BH with a Global Monopole and observe if there is an influence of the degree n in the thermodynamical effects.

Keywords: Black Holes. $f(R)$ Theories. Topological Defects. Global Monopoles.

Capítulo 1

Introdução

A termodinâmica clássica e a relatividade geral até hoje são, em geral, estudadas separadamente e seus desenvolvimentos teóricos têm áreas de aplicação relativamente distantes. No entanto, não é novidade que o estudo do universo e dos astros passa necessariamente pela compreensão não só de sua dinâmica mas também pela sua evolução térmica [1]. Apesar disso, a relação entre as quantidades termodinâmicas e quantidades dinâmicas do campo gravitacional sempre foi tratada com certo estranhamento e descrença. O desenvolvimento da teoria de buracos negros, a partir da solução de Schwarzschild [2], e da teoria do colapso gravitacional trouxe novas e intrigantes questões para a relação entre as grandezas físicas das duas áreas. Buracos negros têm a propriedade de impedir que qualquer coisa que se aproxime da sua fronteira, também conhecida como horizonte de eventos, escape. Mesmo através da gravitação newtoniana é possível mostrar que um corpo com a massa M que seja diminuído a um raio menor que $2GM/c^2$ terá velocidade de escape maior do que a da luz. Isso significa que, ao atravessar esse horizonte, a matéria efetivamente "desaparece". Dessa forma, buracos negros têm a estranha propriedade de absorver tudo que se aproxima dele tornando impossível se saber o que de fato aconteceu com a matéria que foi engolida por ele, fazendo com que haja assim uma perda de informação.

O crescimento obrigatório - também conhecido como teorema da área (para uma revisão [3]) - e a aparente destruição de informação pelo buraco negro podem ser associados diretamente ao conceito de entropia. Mesmo em sua formação, através de um colapso estelar, fica claro que as informações relativas a estrela são substituídas por um conjunto de parâmetros macroscópicos que concentram em si todos os dados físicos do sistema. Esses parâmetros (massa, momento angular e carga, para um buraco negro genérico de Kerr-Newman) determinam toda a informação acessível a um observador externo ao horizonte. Em certo sentido, esse fato é análogo ao processo de organização de um gás, mensurado pela entropia. As colisões entre as moléculas destroem gradualmente a informação inicial a respeito do sistema espalhando-a pelos graus de liberdade microscópicos tornando-a essencialmente inacessível [4], a não ser pelo conjunto de parâmetros termodinâmicos macroscópicos. Para o caso dos buracos negros isso significa que quanto maior ele for mais informação terá absorvido, dessa forma, uma medida de entropia deve estar intimamente relacionada ao seu tamanho.

Em 1973, Bekenstein propôs uma relação de proporcionalidade entre a entropia do buraco negro

e sua área [5], quase ao mesmo tempo que Hawking, Carter e Bardeen [6] desenvolveram as leis da mecânica desses sistemas que são análogas às leis da termodinâmica clássica. Apesar das analogias claras, um tratamento puramente clássico não poderia ser suficiente para explicar como um sistema que não permite que nenhuma matéria escape dele pudesse ter uma temperatura associada. Essa questão foi resolvida por Hawking [7] utilizando conceitos de teoria quântica de campos. Foi demonstrado que um campo no vácuo pode gerar pares de partícula-antipartícula que teriam um espectro de radiação que seria o responsável por gerar uma temperatura associada a esse campo. Esse conceito quântico aplicado ao problema dos buracos negros demonstrou que era possível que pares desse tipo surgissem na região próxima ao horizonte de eventos. A partir dessa rápida sequência de desenvolvimentos teóricos a termodinâmica de buracos negros se tornou um ponto de interesse para o teste de vários modelos teóricos, recomendamos [8] e suas referências para um revisão. Mais recentemente, cenários mais complexos em que outros modelos gravitacionais são utilizados para analisar as relações descobertas por Hawking, Bardeen, Carter e Bekenstein têm sido estudados, como em soluções de Schwarzschild modificadas [9, 10], em buracos negros Born-Infeld-anti-de Sitter [11, 12] e também em cenários de gravitação modificada $f(R)$ [13].

Teorias de gravitação modificada $f(R)$ são aquelas que propõem a introdução de um termo escalar (uma função do escalar de Ricci) não-linear na ação de Einstein-Hilbert [14]. A introdução de novos termos na ação gravitacional é uma ideia antiga [15, 16] mas que encontrou espaço renovado nas últimas duas décadas devido à observação de efeitos inesperados na evolução cosmológica e no movimento das galáxias [17, 18, 19, 20, 21] que apontam para a necessidade de revermos nossos conceitos sobre a constituição da matéria conhecida e da própria gravitação. As teorias $f(R)$ ganharam força pois seriam capazes de explicar o atual crescimento acelerado do Universo sem a necessidade da inclusão de um novo tipo de energia mas com a inclusão de um novo grau de liberdade na relatividade geral. Nesta tese analisaremos termodinamicamente um buraco negro em um conjunto específico de teorias $f(R)$ caracterizados pela definição da derivada $\frac{df(R)}{dR} = 1 + \psi_n r^n$, estudada em [22] onde ela foi aplicada ao estudo do campo gravitacional associado a um monopolo global.

Monopolos globais são defeitos topológicos gravitacionais que podem ter surgido no contexto das transições de fase dos campos em cenários de início do universo [23], assim como as paredes de domínio e as cordas cósmicas. Em teorias de Grande Unificação se conjectura que a alta densidade de matéria e a altíssima temperatura associadas ao início da evolução cosmológica fizeram com que os campos tivessem um altíssimo grau de simetria podendo ser unificados em um único grupo. A expansão do universo fez com que essa temperatura gradualmente fosse diminuindo proporcionando transições de fase acompanhadas de *quebras espontâneas de simetria* [24, 28]. Essas quebras já são observadas em sistemas macroscópicos, como materiais ferromagnéticos, e são caracterizados pela perda de uma simetria do sistema que passa por uma determinada transição de fase. Para monopolos globais, a quebra de simetria acontece em uma transição do grupo $SO(3)$ para o grupo $U(1)$. Nessa transição um ponto no espaço fica cercado por uma região onde um campo quântico tem uma variedade de vácuo degenerada e contínua, sendo o ponto onde ele se encontra chamado de ponto de falso vácuo. No contexto gravitacional, defeitos topológicos ainda não foram observados mas seus efeitos no desvio da luz e a possível produção de ondas gravitacionais a

partir de sua dinâmica são pontos que motivam o interesse na sua observação e em suas consequências teóricas nos mais diversos contextos [23].

Em 1989, Barriola e Vilenkin analisaram o campo gravitacional gerado por um monopolo global em um cenário estático e esfericamente simétrico [26]. Nesse contexto, eles resolveram as equações de Einstein e encontraram a métrica associada ao defeito. A métrica apresentou um déficit de ângulo sólido possibilitando o cálculo do desvio da luz que seria gerado pelo monopolo, indicando assim uma forma de detectá-lo. Além disso, foi observado que para a relatividade geral o defeito não produziria uma força gravitacional em sua vizinhança. Mais recentemente essa análise foi feita para outros modelos gravitacionais como as teorias de Brans-Dicke [25] e as teorias $f(R)$ da gravitação [22]. Para essas teorias calculou-se também o desvio da luz chegando-se a um resultado ligeiramente diferente do obtido anteriormente e também observou-se que nesses cenários o monopolo global produziria um campo gravitacional mensurável em seu entorno.

A métrica associada ao monopolo tem uma estrutura muito parecida com a solução de Schwarzschild e já havia sido sugerido em [26] que considerando o termo de massa poderia se pensar nessa métrica como um cenário estático em que um monopolo global estivesse contido em um buraco negro. Foi a partir dessa ideia que em [29] foi utilizada a análise feita em [22] para construir uma descrição da termodinâmica de um cenário como esse. Nesse trabalho foi utilizada uma teoria $f(R)$ caracterizada por $\frac{df(R)}{dR} = 1 + \psi_n r^n$ com $n = 1$ para se estudar a temperatura de Hawking, a energia e a capacidade térmica do buraco negro com monopolo global. O objetivo central desta tese é generalizar essa análise para quaisquer graus avaliando a influência da modificação de n nas quantidades termodinâmicas do problema e na estabilidade do sistema.

No capítulo 2 faremos uma revisão das motivações das teorias $f(R)$ e analisaremos as principais características das equações de campo modificadas, focando nas soluções esfericamente simétricas no vácuo que são nosso principal interesse neste trabalho. No capítulo 3 apresentaremos uma breve revisão sobre a formação de defeitos topológicos em geral que nos levará a uma melhor compreensão dos processos de formação de defeitos topológicos em escalas cosmológicas. Descreveremos também os efeitos gravitacionais associados ao monopolo global tanto na relatividade geral quanto nas teorias $f(R)$ que estamos interessados aqui, desenvolvendo as equações de campo associadas ao defeito a partir do formalismo da métrica, apresentado no capítulo 2. No capítulo 4 apresentamos as equações incluindo o termo de massa, sugerindo a presença do buraco negro no sistema. Fazemos uma revisão histórica do desenvolvimento da teoria de buracos negros e demonstramos as principais características gravitacionais do cenário, como a presença do horizonte de eventos, usando a analogia com o buraco negro de Schwarzschild. Finalmente, no capítulo 5 introduzimos os conceitos básicos da termodinâmica de buracos negros e utilizamos a analogia do espelho em movimento [4] para tentar descrever a criação de partículas que gera a radiação de Hawking. Analisamos primeiramente as quantidades termodinâmicas para a solução de Schwarzschild, discutimos as condições de estabilidade associadas às quantidades locais que encontramos. Calculando a gravidade superficial do sistema buraco negro-monopolo global chegamos à temperatura de Hawking e construímos a análise termodinâmica do problema analisando o comportamento da temperatura crítica, da capacidade térmica e da energia livre conforme modificamos o grau n $\frac{df(R)}{dR}$ e também o parâmetro de modificação

ψ_n comparando também com o caso clássico. Por fim, concluiremos tentando analisar essas quantidades e fornecer uma interpretação apropriada para os efeitos que encontramos com a inclusão das variações na teoria citadas acima.

Capítulo 2

Introdução às Teorias $f(R)$

Neste capítulo apresentaremos brevemente as motivações e consequências para a introdução de modificações da ação de Einstein-Hilbert que consistam em funções do escalar de curvatura. Essa alteração leva a um novo modelo de gravidade que pode gerar efeitos divergentes daqueles produzidos pela Relatividade Geral.

2.1 Motivação

Apesar do recente ressurgimento das teorias de gravitação modificadas como uma possível explicação de dados experimentais [17] sobre a aceleração do crescimento do universo, a introdução de invariantes de maior ordem na ação já havia sido proposta por Weyl [15] e Eddington [16]. Sem uma motivação experimental ou teórica, no entanto, essas propostas receberam pouca atenção. Durante as décadas seguintes a gravitação não teve grandes desenvolvimentos, porém a Teoria Quântica de Campos dava grandes resultados teóricos e experimentais que uniam conceitos de relatividade especial e Mecânica Quântica. Nessa última, no entanto, a tentativa de quantizar a gravidade aparentava (e até hoje aparenta) não ser trivial. Três décadas se passaram e, apesar de vários resultados teóricos oriundos de correções quânticas na gravitação e também de Teoria de Cordas [31, 32, 33] apontarem para a necessidade de correções invariantes de maior ordem na ação gravitacional, essas correções não foram estudadas mais a fundo por cosmólogos pois se acreditava que só seriam relevantes em regimes de energia muito altos. Nesse sentido, essas correções foram de fato estudadas em cenários de início do universo, como o modelo de inflação proposto em [34], ou em tentativas de evitar singularidades cosmológicas ou em buracos negros [35, 36].

Mais recentemente, no entanto, resultados experimentais têm apontado para a necessidade de se considerar novas e desconhecidas formas de matéria conhecidas como matéria escura e energia escura [17, 18, 19, 20, 21]. A matéria escura se agrega da mesma maneira que a matéria comum, porém só interage gravitacionalmente. A energia escura seria um tipo de energia que não se agrega como matéria e dominaria a maior parte do Universo 76%, sendo ela a principal responsável pela atual evolução acelerada do mesmo.

Apesar de haver vários problemas observacionais que podem ser solucionados pela presença da matéria escura [37, 38], o mesmo não pode ser dito da energia escura. A sua presença só seria justificada pelo crescimento acelerado do universo, mas o seu papel se assemelha ao de uma constante cosmológica que traz problemas [40, 41] ainda não resolvidos tanto para a gravitação quanto para interações em altas energias em cenários cosmológicos. Fica claro que a descoberta do crescimento acelerado do universo no momento atual é uma grande motivação para considerar, não só novos tipos de matéria, mas novas formulações da própria gravitação. Essas novas formulações podem vir em várias formas, mas os resultados teóricos já citados em Teorias de Campos a altas energias para explicar o período inflacionário indicam que a modificação da teoria pode ser necessária também para explicar essa aceleração atual em escalas cosmológicas. Como propostas de novos modelos gravitacionais podemos citar as teorias escalares-tensoriais [39], as teorias de Gauss-Bonnet, e as teorias $f(R)$ (modificações que são funções do escalar de Ricci) [14].

Essas propostas já existiam bem antes do seu ressurgimento como alternativa à energia escura na última década [42] e desde seu surgimento já foi notado que, diferente da Relatividade Geral, o formalismo da métrica e o formalismo de Palatini não levam às mesmas equações de campo. Recentemente, as consequências da aplicação dessas teorias em escalas cosmológicas têm sido estudadas mais a fundo - em ambos os formalismos - e vários modelos específicos para a função $f(R)$ já foram estudados em diversos cenários [43] e alguns já descartados. Os modelos que incluem apenas termos de ordem superior no escalar de Ricci e não outros possíveis invariantes (como $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$) tem a vantagem de evitar a instabilidade de Ostrogradski [44].

Apesar dessas importantes motivações a seu favor, as teorias $f(R)$ são apenas modelos de como poderíamos alterar a teoria da Relatividade Geral para explicar efeitos já encontrados e, quem sabe, descobrir novos efeitos que possam nos ajudar a compreender aspectos mais fundamentais do campo gravitacional. Estudar os efeitos da aplicação destas teorias em um problema específico é o objetivo desta tese e é a motivação primordial de todo o trabalho que se segue.

2.2 Equações de Campo Modificadas no Formalismo de Palatini

Para se obter as equações de campo na Relatividade Geral, podem-se utilizar dois formalismos variacionais distintos. O formalismo de Palatini assume que a métrica e a conexão são variáveis independentes e a ação gravitacional varia com respeito a ambas, porém assume que a ação da matéria (S_m) só depende da métrica. Se construímos o tensor de Ricci a partir da conexão independente e definimos o escalar de Ricci da forma usual ($g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$), e modificarmos a ação com uma função $f(R)$, tal que

$$S_{pal} = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_m(g_{\mu\nu}, \psi), \quad (2.1)$$

onde $\kappa = 8\pi G$, sendo G a constante de Newton. Podemos obter as equações de campo no formalismo de Palatini. Variando com respeito à conexão independente e obtendo o traço, temos

$$\bar{\nabla}_\sigma(\sqrt{-g} f'(R) g^{\mu\nu}) = 0 \quad (2.2)$$

onde $f'(R)$ representa a derivada com respeito a R e a derivada covariante é tomada com respeito à conexão independente. Essa equação se torna a definição da conexão de Levi-Civita para a Relatividade Geral mas pode conter informações físicas no formalismo de Palatini. Se variarmos a equação (2.1) com respeito a métrica, obtemos

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (2.3)$$

que é apenas a Equação de Einstein no caso $f(R) = R$. Nessa tese, exploraremos de forma mais aprofundada o formalismo da métrica, que, como veremos, leva a equações diferentes e tem consequências físicas distintas das encontradas a partir de (2.2) e (2.3) [43, 45].

2.3 Equações de Campo Modificadas no formalismo da Métrica

A partir da equação (2.1), assumindo agora que o tensor de Ricci é construído a partir de uma conexão diretamente dependente da métrica e que a ação S_m depende apenas da métrica e dos campos de matéria, podemos chegar à equação

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - [\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square]f(R) = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (2.4)$$

Essa equação é genérica para todas as teorias $f(R)$ no formalismo da métrica. Novamente $f'(R)$ representa a derivada com respeito ao escalar de Ricci e será substituído nesse trabalho pela notação mais econômica $F(R)$ e as derivadas covariantes são tomadas com respeito à métrica. O traço da equação acima nos dá

$$F(R)R - 2f(R) + 3\square F(R) = \kappa T, \quad (2.5)$$

que é uma equação diferencial relacionando o escalar de curvatura com o tensor de energia-momento. Essa equação nos mostra que, para as teorias $f(R)$ nesse formalismo, existe um grau de liberdade escalar extra associado ao campo gravitacional. Isso pode ser visto comparando (2.5) com a equação de movimento de um campo escalar ϕ

$$\square\phi - \frac{dV(\phi)}{d\phi} = J, \quad (2.6)$$

onde V representa o potencial associado ao campo e J um termo de fonte qualquer. A partir das duas equações podemos observar que o grau de liberdade escalar é representado por $F(R)$ (por isso chamado de scalaron). Esse grau de liberdade pode ser responsável por algum tipo de processo inflacionário (dependendo da escala de energia estudada) e nesse trabalho estudaremos seu efeito em escala cosmológica, onde ele pode ser entendido como responsável pela atual evolução acelerada do universo.

Analisando a equação (2.4) também podemos tentar escrever as equações de campo no formato das Equações de Einstein com um tensor de momento-energia efetivo que dependa do escalar de Ricci e de $f(R)$. Dessa forma, podemos redefinir a constante de Newton por $G_{eff} = \frac{G}{F(R)}$, que se torna a constante de acoplamento gravitacional efetiva. A redefinição dessa constante pode ser útil para estudar as condições as quais uma determinada teoria $f(R)$ seja válida, como veremos a seguir, mas a utilização de um tensor de momento-energia efetivo não é totalmente necessária em nosso modelo, apesar de ser

muito útil em teorias escalares-tensoriais (como as Teorias de Brans-Dicke [39]). Na verdade, pode se provar que as teorias $f(R)$ são equivalentes às Teorias de Brans-Dicke com parâmetro $\omega = 0$ [43, 22].

2.3.1 Equações de Campo Estáticas e Esfericamente Simétricas no Vácuo

Neste trabalho estudaremos casos específicos de soluções para a equação (2.5), onde existe simetria esférica e o campo gravitacional é estático. Nesta seção abordaremos o caso sem fontes, para o qual a equação (2.5) se torna

$$F(R)R - 2f(R) + 3\Box F(R) = 0. \quad (2.7)$$

Assumindo a simetria esférica podemos escrever a métrica como

$$ds^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 - \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.8)$$

onde A e B são funções da coordenada radial somente e suas determinadas a posteriori. Podemos, então, escrever o escalar de curvatura como

$$R = \frac{1}{Ar^2} \left[1 - A + \left(\frac{B'}{B} - \frac{A'}{A} \right) r - \frac{1}{4} \frac{B'}{B} r^2 \left(\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right) + \frac{1}{2} \frac{B''}{B} r^2 \right]. \quad (2.9)$$

Assumimos também uma simetria esférica na primeira derivada da função $f(R)$, tal que

$$f'(R) = \frac{df(R)}{dR} = F(R) = F(r). \quad (2.10)$$

Com isso, esperamos conseguir escrever as equações de campo apenas em termos de $A(r)$, $B(r)$ e $F(r)$, para isso, isolamos a função $f(R)$ na equação (2.7) e a substituímos na equação (2.4) (igualando o termo da direita a zero), obtendo a função

$$\frac{FR_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu F}{g_{\mu\nu}} = \frac{1}{4}(FR - \Box F) \quad (2.11)$$

que nos mostra que a quantidade à esquerda da equação é diagonal e independe dos índices escolhidos. Esse resultado independe do modelo $f(R)$ escolhido e é a forma mais direta de se obter as equações de campo no formalismo da métrica. Definindo a quantidade

$$C_\mu = \frac{FR_{\mu\mu} - \nabla_\mu \nabla_\mu F}{g_{\mu\mu}} \quad (2.12)$$

utilizando (2.8), (2.9), (2.10) e calculando as diferenças $C_\mu - C_\nu = 0$ para todos os índices, obtemos as equações de campo

$$2F \left(\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right) - rF' \left(\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right) - 2rF'' = 0, \quad (2.13)$$

$$2r^2 B'' + 4B \left(A - 1 - r \frac{F'}{F} \right) 2r^2 B' \frac{F'}{F} + (2rB - 2r^2 B' \left(\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right)) = 0. \quad (2.14)$$

onde (\cdot) equivale à derivada em relação à coordenada radial. Definindo uma forma específica para a função $F(r)$ poderemos ver os efeitos de determinada modificação da gravidade nas equações de campo. Obtendo as soluções dessas equações podemos encontrar a forma do escalar de curvatura e, em princípio,

obter o formato da função $f(R)$ que seria introduzida na ação de Einstein-Hilbert integrando a função $F(r(R))$. No próximo capítulo estudaremos uma classe de soluções para o caso do monopolo global em teorias $f(R)$ [22] e no capítulo 3 estudaremos o caso dos buracos negros (com e sem o monopolo) para a mesma classe de teorias $f(R)$.

2.4 Condições de Estabilidade sobre as Funções $F(R)$

Apesar de se apresentar como uma receita simples de alteração da gravidade, as teorias $f(R)$ tem que estar de acordo com diversas exigências para se tornarem modelos físicos viáveis. Essas exigências ocorrem devido ao grande sucesso da Relatividade Geral em descrever eventos onde a gravidade é fraca (limite de campo fraco) e também devido à vasta quantidade de dados que nos apontam uma determinada evolução cosmológica do universo. Ou seja, uma teoria $f(R)$ tem que reproduzir os resultados da Relatividade Geral no limite de campo fraco e ainda produzir um modelo realista de evolução cosmológica. Neste trabalho estamos interessados nos efeitos da modificação da gravidade no regime de campo fraco em um modelo estático e por isso não nos aprofundaremos nas consequências do nosso modelo sobre a evolução cosmológica do universo, mas as consequências gerais das teorias $f(R)$ no formalismo da métrica já foram estudadas e algumas classes de teorias excluídas ([43] e referências citadas neste artigo).

A primeira condição é que $f'(R) = F(R)$ seja positivo. Essa condição pode ser percebida se tentarmos reescrever a equação (2.4) na forma das Equações de Einstein, de onde obtemos

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2}R = \frac{\kappa}{F(R)}[T_{\mu\nu} + \frac{g_{\mu\nu}}{2}(f(R) - F(R) \cdot R) + \nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square]F(R) \quad (2.15)$$

Nessa equação podemos definir uma nova *constante* de acoplamento gravitacional,

$$G_{eff} = \frac{\kappa}{F(R)} \quad (2.16)$$

que deve ser positiva para qualquer curvatura para garantir o acoplamento usual do campo gravitacional com a matéria. Isso faz com que a função $F(R)$ tenha que ser necessariamente positiva. Se assumirmos o ponto de vista de Teoria Quântica de Campos, a positividade de $F(R)$ pode ser vista como a necessidade de evitar que o scalaron (o grau de liberdade escalar) seja um ghost [46]. Sob o mesmo ponto de vista, podemos analisar a equação (2.5) para identificar o potencial associado ao grau de liberdade escalar, reescrevendo-a como

$$\square F(R) + \frac{dU}{dF} = \frac{\kappa T}{3} \quad (2.17)$$

onde podemos identificar o termo de massa como

$$\frac{d^2U(F)}{dF^2} \Big|_{F=F_{min}} = m_{(F)}^2 \quad (2.18)$$

e a quantidade F_{min} pode ser interpretada como o regime em que a Relatividade Geral domina, ou seja, $f'(R)_{min} = F(R)_{min} = 1$. Por outro lado, para que as fases de evolução do universo sejam reproduzidas

pela teoria, ela também deve se aproximar da Relatividade Geral a curvaturas muito altas, como em cenários de início do Universo [47]. Para isso, temos que considerar também que $f''(R) = F'(R) \ll 1$. Utilizando a equação (2.5) para identificarmos a forma do potencial relacionado ao scalaron e considerando a aproximação citada, pode-se mostrar que [43].

$$m_{(F)}^2 \approx \frac{1}{3F'(R)} \quad (2.19)$$

Portanto, para que o campo escalar não seja um tachyon é preciso exigir $F'(R) > 0$. Podemos também adotar uma interpretação mais direta sobre os efeitos gravitacionais da teoria, analisando as consequências de se considerar a equação (2.16) como a função que determina o acoplamento do campo gravitacional com a matéria. Como a quantidade varia com a curvatura, podemos analisar a variação da intensidade da interação gravitacional a partir de sua derivada,

$$\frac{dG_{eff}}{dR} = -\frac{F'(R) \cdot G}{F(R)^2} \quad (2.20)$$

Assumindo que a primeira condição de estabilidade $F(R) > 0$ é respeitada, podemos ver que, exigir que $F'(R)$ seja positivo, é equivalente a exigir que a intensidade da interação gravitacional decresça com a curvatura. Essa exigência é necessária pois, do contrário, G_{eff} poderia crescer indefinidamente com a curvatura e o sistema não possuiria um estado fundamental.

Temos assim as duas principais condições para que uma teoria $f(R)$ possa ser considerada um modelo válido. Apesar de estarmos interessados principalmente no limite de campo fraco, na argumentação apresentada nesta seção podemos notar uma característica muito peculiar das teorias $f(R)$ ligada à necessidade de se recuperar a Relatividade Geral também a altas curvaturas: a massa do scalaron dependerá do escalar de curvatura. Apesar de, conservadoramente, isso poder se apresentar como um problema, se identificarmos essa propriedade com o efeito camaleão [[48, 34, 43] podemos aceitá-la como consequência natural de se procurar um modelo que não altere a RG a baixas e altas curvaturas. Assim, com a massa do scalaron grande em escalas dos sistemas solar e terrestre mas pequena para escalas cosmológicas, podemos obter os efeitos desejados de expansão acelerada do universo sem perder os resultados bem sucedidos em testes da Relatividade Geral no sistema solar.

Capítulo 3

Formação e Efeitos Gravitacionais do Monopolo Global

Neste capítulo introduziremos o conceito de defeitos topológicos e descreveremos o processo de formação desses defeitos no cenário cosmológico de forma geral. Trataremos de forma mais específica o problema do monopolo global descrevendo suas características gerais e discutindo os efeitos gravitacionais do mesmo, tanto na Relatividade Geral quanto em Teorias $f(R)$.

3.1 Quebra Espontânea de Simetria

Defeitos topológicos são estruturas que se formam em sistemas com determinadas simetrias que estão sujeitos à transições de fase. Uma simetria pode ser vista como uma propriedade que permite que determinada quantidade possa sofrer uma transformação sem alterar seu significado físico. A simetria de rotação, por exemplo, é observada quando um sistema pode ser rotacionado por qualquer ângulo sem que a física observada se modifique. A quebra dessa simetria aconteceria, então, se esse sistema sofresse algum tipo de transição em que o estado final não seria mais invariante sob rotações. A quebra espontânea de simetria pode acontecer nos mais variados sistemas físicos, dos objetos macroscópicos mais simples na superfície terrestre [49, 50] aos próprios campos quânticos livres no espaço-tempo [51]. Em escalas cosmológicas, a formação de defeitos topológicos é uma hipótese teórica amplamente aceita e estudada [52, 53]. Para cada tipo de simetria (e cada tipo de sistema), podem se formar diferentes defeitos topológicos [?]. O processo de formação dessas estruturas está intimamente ligado às simetrias do problema em questão e é preciso saber encontrá-las e analisar como elas se comportam quando o sistema evolui.

Para ilustrar o processo de quebra espontânea de simetria em um sistema simples podemos utilizar o problema do corpo ferromagnético através do modelo de Heisenberg de interação spin-spin [54]. A Hamiltoniana para o caso de campo magnético externo igual a zero é dada por

$$H = -\frac{1}{2}J \cdot \sum_{(i,j)} \sigma_i \sigma_j, \quad (3.1)$$

onde J é uma integral de interação, $\Sigma_{(i,j)}$ representa o somatório sobre pares vizinhos (i, j) e σ_i o spin localizado na posição i . Por ser uma grandeza escalar, essa hamiltoniana é claramente invariante sob rotações. Em uma temperatura suficientemente alta (acima da temperatura crítica), os spins do corpo estão desordenados e o estado fundamental do sistema corresponde ao estado de magnetização zero ($M = 0$). Nesse caso, a simetria da hamiltoniana é respeitada pelo estado fundamental e não há quebra. Por outro lado, se analisarmos a energia livre do sistema através da teoria do campo médio de Landau [55], pode-se mostrar que, no caso em que não há dependência espacial na magnetização, existe uma determinada temperatura crítica T_c onde ocorre uma transição de fase e o sistema passa a ter magnetização não-nula. Quando isso acontece, a simetria de rotação do sistema é quebrada espontaneamente pelo estado fundamental do sistema. A energia livre de um sistema ferromagnético isolado (ou seja, sem a presença de campos magnéticos externos), pode ser escrita como

$$F = VN\left[\frac{T - T_c}{T_c} |M|^2 + \beta |M|^4\right], \quad (3.2)$$

onde V é o volume, N a densidade de estados e T a temperatura do sistema. Na figura 3.1, abaixo, fica claro que o mínimo da energia livre acontece para $M = 0$ apenas quando $T > T_c$, representando assim a quebra espontânea de simetria.

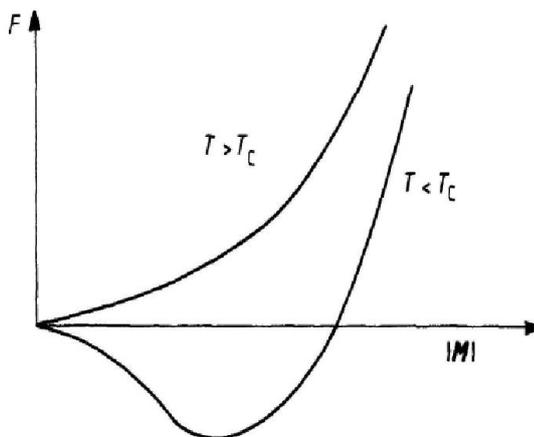


Figura 3.1: A energia livre de um sistema ferromagnético em função da magnetização.

Apesar do exemplo acima tratar de um sistema macroscópico, podemos ver que a descrição a partir da teoria quântica de campos é totalmente análoga. Para campos livres, o estado fundamental corresponde ao vácuo e se este não mantém uma simetria que a lagrangiana possui há a quebra espontânea de simetria. Analisando um exemplo específico podemos nos aproximar um pouco mais do mecanismo de formação de defeitos topológicos em escala cosmológica. Um campo escalar complexo pode ser descrito pelo modelo de Goldstone [51], que tem uma simetria contínua de calibre sob transformações de fase. A lagrangiana que descreve o modelo é dada por

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^*) - V(\phi, \phi^*) \quad (3.3)$$

onde o potencial depende do campo que estamos estudando. Em teorias renormalizáveis, o potencial

pode assumir a forma

$$V(\phi, \phi^*) = V(\phi\phi^*) = \mu^2\phi\phi^* + \frac{\lambda}{4}(\phi\phi^*)^2, \quad (3.4)$$

análoga a equação (3.2). Essa lagrangiana é invariante sob a transformação $\phi \rightarrow e^{i\alpha}\phi$, onde α é uma constante (e portanto, a transformação é global). Assumindo que λ seja positivo, temos novamente duas situações distintas para o mínimo do potencial. Caso μ^2 seja maior que zero, o estado fundamental do campo será $\phi = 0$. Nesse caso não há quebra espontânea da simetria global. No entanto, para $\mu^2 < 0$ o mínimo do potencial corresponde a um valor $|\phi_c| = \sqrt{-2\mu^2/\lambda}$ e este valor não é invariante sob a transformação global. O valor esperado para o vácuo deste potencial será dado por

$$\langle \phi \rangle = \phi_c e^{i\theta} \quad (3.5)$$

Ao selecionar um valor específico no vácuo o campo quebra sua simetria pois o estado não é invariante sob a transformação de fase. Em princípio, o campo pode assumir qualquer valor que respeite a equação (3.5) e o vácuo é infinitamente degenerado. O estado onde o valor esperado do campo é zero preserva a simetria e é um máximo local do potencial. Esse estado é conhecido como falso vácuo. A formação de defeitos topológicos no contexto da física dos campos se dá exatamente quando consideramos o que acontece quando campos com diferentes valores de vácuo formam domínios em torno de regiões de falso vácuo.

3.2 Surgimento de Defeitos Topológicos na Evolução do Universo

O cenário físico exato que originou o nosso universo como é hoje ainda não é conhecido. No entanto, o desenvolvimento da cosmologia teórica e experimental já permite que nós tenhamos parâmetros que eliminam certos modelos e nos incentivam a aprofundar as possíveis consequências de outros mais viáveis. Todos os modelos aceitáveis, porém, prevêm que o universo teve um estado inicial muito denso e com temperaturas altíssimas. É natural, portanto, esperar que tenha havido uma ou mais transições de fase no processo de resfriamento [23]. Além disso, num estado de altas temperaturas, espera-se que os campos livres no espaço-tempo encontrem-se em um alto grau de simetria e que tenham um certo valor de equilíbrio único e simétrico. Nesse sentido, a maioria das teorias de grande unificação também concordam, sugerindo que todas as interações fundamentais possam ter se originado de um mesmo grupo de simetria. Este grupo só teria durado cerca de $10^{-43}s$ após o Big Bang, tempo necessário para que o universo se expandisse e sua temperatura passasse por um determinado valor crítico onde o grupo passasse por uma transição de fase com uma quebra espontânea de simetria. Sucessivas quebras permitiriam que as interações se mostrassem através de subgrupos de simetria.

Seguindo a lógica apresentada nas duas últimas seções unido a um mecanismo que explica como defeitos topológicos poderiam se formar em escalas cosmológicas, Kibble propôs o mecanismo que leva seu nome [52] para explicar como as transições de fase cosmológicas podem gerar a formação de domínios, cada um dos quais assumindo um valor de vácuo do campo unificado. Esses domínios topológicos

poderiam ser isolados a princípio, mas a medida em que o universo se expandiu eles entrariam em contato e nas regiões de intersecção formaram-se defeitos topológicos. Esse processo é uma hipótese teórica ainda a ser confirmada pela observação, mas muito bem fundamentada pelo conhecimento que temos do comportamento de campos durante transições de fase. Para começar a ilustrar o chamado Mecanismo de Kibble vamos analisar o que acontece com o potencial do modelo de Goldstone apresentado na seção anterior quando acrescentamos uma correção devido à temperatura. Para incluir a correção substituiremos o termo μ^2 por um termo de massa dependente da temperatura dado por

$$m^2(T) = \frac{\lambda}{12}(T^2 - 6\eta^2), \quad (3.6)$$

que corresponde a massa do campo no estado em que ele se anula. Esse termo se anula para um determinado valor de T, chamado de temperatura crítica, no qual ocorre a transição de fase. Como podemos ver na Figura 3.2 abaixo, para $T > T_c$ o termo de massa é positivo e o mínimo do potencial ocorre quando o campo se anula. Para $T < T_c$ vemos que o mínimo ocorre em um valor diferente de zero, dado por

$$|\phi| = \frac{1}{\sqrt{6}}(T_c^2 - T^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.7)$$

A expressão nos mostra que o campo cresce continuamente a medida que T diminui (abaixo da temperatura crítica), o que caracteriza uma transição de fase de segunda ordem. Assim como mostramos na equação (25), o valor esperado do campo não dependerá apenas da temperatura, mas também da fase θ , que assume valores aleatórios. Esses valores, em princípio, são independentes de uma região para a outra, porém um princípio físico básico é o de que um sistema tentará alcançar o seu estado de menor energia. Nesse sentido, as flutuações sobre o valor da fase diminuirão gradualmente através do tempo, levando à formação de domínios cada vez maiores com valores determinados de θ . Conforme os domínios aumentam, eles entram em contato e formam diferentes

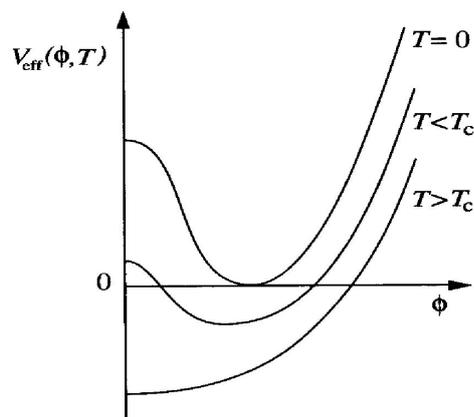


Figura 3.2: O potencial efetivo em função do campo para diferentes valores da temperatura

defeitos topológicos (cordas cósmicas, paredes de domínio ou monopolos globais). Os defeitos ocorrem justamente porque, com o crescimento dos domínios, os valores de fase passam a ter valores correlacionados fazendo com que surjam grandes domínios de puro vácuo.

Para ilustrar esse processo vamos descrever a formação de cordas cósmicas a partir da Figura 3.3. Na parte (a) vemos vários domínios (as regiões brancas) que assumem diferentes valores da fase. A medida que os domínios crescem os valores de fase passam a ficar correlacionados, formando um único domínio de puro vácuo cercado por uma região de falso vácuo. A região comprimida no centro é a estrutura característica de uma corda cósmica global. Neste caso específico, o defeito se forma na junção de três domínios com valores de fase diferentes. As paredes de domínio, outro tipo de defeito topológico previsto pelo mecanismo de Kibble, se formam quando há outro tipo de quebra de simetria. Quando há a quebra de uma simetria de reflexão, por exemplo, há a formação de domínios que podem assumir dois valores diferentes para o vácuo verdadeiro (um positivo e um negativo). Nesse caso, quando os domínios de sinal negativo crescem e se unem, as regiões de intersecção para os outros domínios se tornam paredes de domínio. O objetivo central dessa tese é estudar os efeitos gravitacionais de um monopolo global no cenário em que ele está dentro de um buraco negro. Portanto, indicamos [?] para um tratamento mais aprofundado sobre a formação de cordas cósmicas e paredes de domínio e avançaremos apenas na análise do monopolo global.

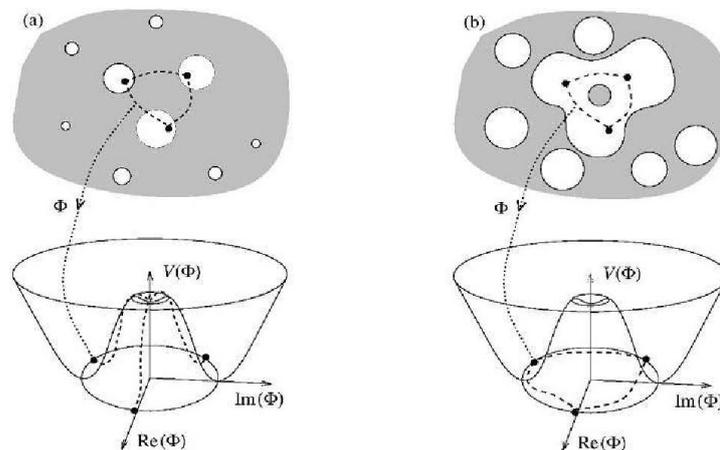


Figura 3.3: a) Domínios de puro vácuo com valores diferentes (representados pelos círculos brancos) cercados por uma região de falso vácuo (cinza) b) O crescimento dos domínios faz com eles se juntem em um domínio de puro vácuo cercado o falso vácuo e formando nessa região uma corda cósmica global.

3.3 Monopolos Globais: Formação e Efeitos Gravitacionais

O processo de formação de monopolos globais não difere substancialmente dos processos descritos acima. Como dito no início do capítulo, diferentes simetrias geram diferentes defeitos topológicos [23]. Diferente dos outros defeitos, o monopolo global não se estende por uma região do espaço e é considerado um defeito pontual. Apesar disso, ele tem uma escala de comprimento associada ao seu núcleo. É preciso notar também, que estamos lidando com um objeto distinto do monopolo magnético proposto por t'Hooft [54] justamente porque as quebras de simetrias associadas aos dois são diferentes; uma local e outra global.

Neste trabalho, mais do que aprofundar o conhecimento sobre as diferentes quebras de simetria, estamos interessados em compreender os possíveis efeitos gravitacionais de um defeito específico em um

cenário cosmológico. Portanto, após apresentarmos a lagrangiana e os campos que têm uma quebra espontânea de simetria capaz de gerar um monopolo, iremos inserí-lo nas equações de Einstein para analisar seu campo gravitacional [26].

Um campo de Higgs formado por um isotripleto de três campos escalares ($a = 1, 2, 3$) pode ser descrito pela lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^a - \frac{\lambda}{4} (\phi^a \phi_a - \eta^2)^2, \quad (3.8)$$

onde λ e η são parâmetros constantes do monopolo. O defeito surge devido a uma quebra espontânea de simetria dessa lagrangiana da forma descrita nas seções anteriores, ou seja, uma região de falso vácuo cercada por outras de puro vácuo para o campo de Higgs. Portanto, os campos podem assumir formas variadas, desde que cumpram essas condições. Escrevemos então

$$\phi^a = \eta h(r) \frac{x^a}{r} \quad (3.9)$$

onde $r^2 = x^a x^a$ e a função $h(r)$ deve obedecer as condições de contorno

$$h(0) = 0, h(r \gg \delta) \rightarrow 1 \quad (3.10)$$

onde δ é o tamanho do núcleo do monopolo que é da ordem de $\lambda^{-\frac{1}{2}} \eta^{-1}$. A primeira condição sobre a função $h(r)$ garante que o monopolo esteja na região de falso vácuo onde os campos se anulam, para evitar divergências na origem. A segunda garante que fora do núcleo do monopolo o campo assuma os valores de vácuo proporcionais a η . O campo descrito acima garante que exista o monopolo em determinada região mas não é o responsável pela existência do mesmo, é um ansatz que descreve corretamente as consequências da quebra espontânea de simetria de (3.8).

3.3.1 Efeitos Gravitacionais do Monopolo Global em Relatividade Geral

Analisaremos agora a interação entre o campo descrito acima e a gravidade a partir da teoria da Relatividade Geral. Para isso utilizaremos o formalismo variacional da métrica a partir da ação total do problema, dada por

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} [R + 16\pi G \mathcal{L}_m] \quad (3.11)$$

onde $8\pi G$ é a constante de acoplamento gravitacional, R é o escalar de curvatura, g é o determinante da métrica e \mathcal{L}_m é a densidade lagrangiana do conteúdo de matéria do sistema em questão. Estamos interessados no caso do monopolo global, portanto, inserindo a equação (3.8) na ação (3.11) e utilizando o princípio da mínima ação, chegamos às equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu} \quad (3.12)$$

O tensor de energia-momento é dado pela variação da lagrangeana da matéria com respeito à métrica. Para resolver a equação, vamos assumir que esta seja dada por

$$ds^2 = B(r) dt^2 - A(r) dr^2 - r^2 (d\theta^2 - \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (3.13)$$

que é a forma genérica de uma métrica simetricamente esférica. conforme a equação (2.8). Utilizando a equação acima e a densidade lagrangeana (3.8), chegamos à forma geral das componentes não nulas do tensor de energia-momento

$$\begin{aligned} g^{00}T_{00} = T_0^0 &= \frac{\eta^2 h'^2}{2A} + \frac{\eta^2 h^2}{r^2} + \frac{\lambda\eta^4(h'^2 - 1)^2}{4} \\ g^{11}T_{11} = T_1^1 &= -\frac{\eta^2 h'^2}{2A} + \frac{\eta^2 h^2}{r^2} + \frac{\lambda\eta^4(h'^2 - 1)^2}{4} \\ g^{22}T_{22} = T_2^2 = T_3^3 &= \frac{\eta^2 h'^2}{2A} + \frac{\lambda\eta^4(h'^2 - 1)^2}{4} \end{aligned} \quad (3.14)$$

onde $h'(r)$ representa a derivada com relação a coordenada radial r . Calculando o escalar e o tensor de curvatura associados a (3.13), podemos reduzir as equações (3.12) a uma expressão para $h(r)$ em função da métrica

$$\frac{h''}{A} + h' \left[\frac{2}{Ar} + \frac{1}{2B} \left(\frac{B}{A} \right)' \right] - \frac{2h}{r^2} - \lambda\eta^2 h(h'^2 - 1) = 0. \quad (3.15)$$

Está claro que o caso $h \sim 1$ utilizado para analisar as regiões um pouco distantes do núcleo do monopolo - quando utilizado na definição do tensor de energia-momento - leva às aproximações

$$\begin{aligned} T_0^0 = T_1^1 &\approx \frac{\eta^2}{r}, \\ T_2^2 = T_3^3 &\approx 0. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Utilizando essas aproximações chegamos à solução das equações de Einstein aproximadas, dadas pelas expressões para A e B [26]

$$B(r) = A^{-1}(r) = 1 - 8\pi G\eta^2 - \frac{2GM}{r}. \quad (3.17)$$

Para sabermos a massa do monopolo, basta relacionar a função g_{00} com a componente T_{00} do tensor de energia-momento através da relação [55]

$$B(r) = 1 - \frac{8\pi G\eta^2}{r} \int_0^r T_0^0 r^2 dr, \quad (3.18)$$

e compará-la com (3.18) utilizando (3.14). Fazendo essa substituição, chegamos à massa M do sistema

$$M = 4\pi\eta^2 \int_0^r \left[\frac{h'^2}{2A} + \frac{h^2 - 1}{r^2} + \frac{\lambda\eta^4(h'^2 - 1)^2}{4} \right] r^2 dr \approx \eta/\lambda^{-\frac{1}{2}} \quad (3.19)$$

que dependerá apenas dos parâmetros do monopolo. Essa massa é considerada muito pequena para escalas cosmológicas pois deve-se assumir um valor próximo do valor de vácuo do campo no infinito, como vimos anteriormente. Além disso, para teorias de grande unificação, o parâmetro η é aproximadamente $10^{16} GeV$ [23], fazendo com que o termo que aparece na métrica seja $8\pi G\eta^2 \approx 10^{-5}$. Por isso, ao considerarmos o monopolo isolado no espaço, o termo de massa nas equações (3.17) será próximo de zero e a métrica pode ser reescrita como

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - (1 - 8\pi G\eta^2)r^2(d\theta^2 - \sin^2\theta d\phi^2) \quad (3.20)$$

que expressa explicitamente o campo gravitacional de um monopolo global. Ele não gera um potencial gravitacional (pois a componente g_{00} é constante) mas gera um déficit de ângulo sólido no espaço-tempo. Esse déficit faz com que a área de uma esfera nessa região seja modificada e seja dada por $4\pi(1-8\pi G\eta^2)r^2$. Essa propriedade é extremamente relevante pois, apesar de não exercer uma força gravitacional sobre a região a sua volta, o monopolo global causará um desvio específico de luz que passar pela região em que ele se encontra. Por exemplo [26], assumamos que exista uma fonte luminosa S alinhada com um observador O sobre a superfície $\theta = \pi/2$, com o monopolo global M entre os dois. Se a reta SM está alinhada com MO, o observador verá um anel circular com diâmetro angular dado por

$$\delta\phi = 8\pi^2 G\eta^2 l(d+l)^{-1}, \quad (3.21)$$

onde d é o comprimento da reta MO e l é o comprimento da reta SM. Se houver um desvio entre as duas retas de um ângulo $\alpha < 8\pi^2 G\eta^2$, o observador verá duas imagens pontuais separadas por um ângulo dado pela equação (3.21). O monopolo aqui considerado é estático, no entanto, um cenário realístico deveria considerar a velocidade do objeto para calcular seus efeitos gravitacionais observáveis. Nessa tese estamos interessados em aprofundar as consequências teóricas da presença do monopolo em um cenário estático e portanto nos atemos a esse modelo.

3.3.2 Efeitos Gravitacionais do Monopolo Global em Teorias $f(R)$

Analisaremos agora os efeitos gravitacionais do monopolo global a partir do formalismo da métrica dado pela equação (2.1). Utilizando os passos demonstrados em detalhe na seção 2.3 para o vácuo adicionando um tensor de energia-momento ao problema, podemos mostrar que a quantidade

$$C_\mu = \frac{1}{g_{\mu\mu}} [F(R)R_{\mu\mu} - \nabla_\mu \nabla_\mu F(R) - 8\pi GT_{\mu\mu}] \quad (3.22)$$

é independente de índices e pode ser usada para obter as equações de campo. Em um espaço-tempo esfericamente simétrico com a métrica dada por (3.13) e com um tensor de momento-energia dado pelas equações (3.16) podemos mostrar que as equações de campo serão

$$2rF'' - \beta(rF' + 2F) = 0, \quad (3.23)$$

$$4B(A-1) + r\left(2\frac{F'}{F} - \beta\right)(rB' - 2B) + 2r^2B'' - \frac{4AB(8\pi G\eta^2)}{F} = 0, \quad (3.24)$$

onde assumimos novamente $F(R) = F(r)$ e as derivadas são todas em relação à coordenada radial. Definimos também a quantidade β tal que

$$\beta = \frac{1}{AB} \frac{d(AB)}{dr} \quad (3.25)$$

A solução dessas equações seria exatamente a descrição da geometria resultante da presença de um monopolo global em teorias $f(R)$. No entanto, até o momento, só foram obtidas soluções para o regime de campo fraco [22] (que pode ser assumido tanto para o caso do monopolo global isolado como para as proximidades do buraco negro, como veremos a seguir). Além disso, assumiremos também que a teoria

de modificação que estamos estudando é apenas uma pequena alteração da Relatividade Geral no regime de energias que estamos estudando. Assim, podemos redefinir

$$F(r) = 1 + \psi(r), \quad (3.26)$$

$$A(r) = 1 + a(r), \quad B(r) = 1 + b(r)$$

tais que $|a(r)|, |b(r)|e|\psi(r)|$ sejam menores que a unidade. Essas redefinições podem ser utilizadas nas equações (3.23) e (3.24), considerando

$$\frac{F'}{F} \approx \psi', \quad \frac{F''}{F} \approx \psi'', \quad (3.27)$$

$$\frac{A'}{A} \approx a'(r), \quad \frac{B'}{B} \approx b'(r).$$

As equações de campo aproximadas se tornarão, então

$$\frac{\beta}{r} = \psi'', \quad (3.28)$$

$$4a - 4r\psi' + 2r(a' + b') + 2r^2b'' - 4(1 + a + b - \psi)8\pi G\eta^2 = 0. \quad (3.29)$$

A solução dessas equações dependerá completamente da forma escolhida para o parâmetro responsável pela alteração da teoria de gravitação ($\psi(r)$). Como vimos no primeiro capítulo, o objetivo do estudo de teorias $f(R)$ é conhecer os efeitos gravitacionais efetivos de alterações específicas na ação de Einstein-Hilbert. Nessas equações, a escolha de uma forma para $\psi(r)$ implica na definição de $f'(R)$. O objetivo desta tese é analisar uma classe de funções específicas que possam desempenhar esse papel e produzir resultados físicos relevantes no problema aqui estudado e com isso estimular o estudo das consequências dessa classe de modificações da Relatividade Geral em outros problemas gravitacionais.

Escolhemos a função $\psi(r) = \psi_0 r^n$ [22] e a substituiremos nas equações (3.28) e (3.29) para obter as equações de campo para essa classe específica de teorias $f(R)$. Para garantir que não haja singularidade natural na origem, consideramos apenas casos em que $n > 0$. O problema apresentado aqui é o de um monopolo global isolado e podemos assumir novamente que ele terá massa desprezível para escalas cosmológicas. Sob essas condições, as soluções das equações (3.28) e (3.29) substituídas nas expressões para $A(r)$ e $B(r)$ em (3.26), determinam os termos da métrica

$$B(r) = 1 - 8\pi G\eta^2 - \frac{2GM}{r} - \psi_n r^n, \quad (3.30)$$

$$A(r) = e^{(n-1)\psi_n r^n} \left(1 - 8\pi G\eta^2 - \frac{2GM}{r} - \psi_n r^n\right)^{-1}. \quad (3.31)$$

Desenvolveremos com cuidado a obtenção dessas soluções para o caso onde a massa não é desprezível, que pode ser entendido como o caso de um monopolo global em uma região de buraco negro, no capítulo 4. Aqui consideramos o termo $\frac{2GM}{r} \sim 0$. Também pode-se mostrar [22] que a métrica obtida acima é conformalmente relacionada com uma métrica dada por

$$ds^2 = (1 - \psi_n r^n)(dt^2 - dr^2 - r^2(1 - 8\pi G\eta^2)d\Omega^2), \quad (3.32)$$

onde $d\Omega^2$ é a parte angular da métrica esfericamente simétrica. Assim, na aproximação de campo fraco, o desvio da luz seria obtido pela equação (3.21).

É importante notar que o modelo estudado se restringe a uma região determinada por suas escalas de comprimento fundamentais. Já observamos que o núcleo do monopolo tem um núcleo com escala da ordem de $\lambda^{-\frac{1}{2}}\eta^{-1}$ e estamos estudando seus efeitos externos. Porém, adicionamos também uma condição de escala advinda da teoria $f(R)$ escolhida, dada por

$$|\psi(r)| = |\psi_n r^n| \ll 1, \quad (3.33)$$

o que nos leva à restrição sobre a coordenada r

$$\lambda^{-\frac{1}{2}}\eta^{-1} < r < \frac{1}{|\psi_n r^n|}. \quad (3.34)$$

Isso não é um problema já que estamos interessados apenas no modelo de monopolo global isolado. Se considerássemos as possíveis consequências da presença do monopolo à distâncias arbitrariamente grandes teríamos novos problemas que só poderíamos abordar em um modelo dinâmico em que o monopolo possuísse velocidade. No caso estático, é interessante nos restringirmos a uma região finita em torno do monopolo para analisarmos seus efeitos gravitacionais. Para que o modelo seja teoricamente válido também precisamos abordar a questão da estabilidade da teoria $f(R)$ discutida na seção 2.4. Para isso, utilizamos as equações (3.30) e (3.31) na métrica (3.13) para obter o escalar de curvatura

$$R = -[(n-1)(n-2) + 2(n+2)]\psi_0 r^{n-2} - \frac{16\pi G\eta^2}{r^2}, \quad (3.35)$$

e assim poderemos obter a forma da função $f(R)$ de fato, lembrando que $F(r) = F(R) = df(R)/dR$. Em princípio é possível obter a forma dessa função para qualquer valor de n e é possível mostrar que a função $f(R)$ satisfaz às condições de estabilidade se considerarmos as aproximações de campo fraco. O problema analisado nesta seção é estreitamente relacionado com o caso do buraco negro estático de Schwarzschild, o que pode ser observado pelas semelhanças na métrica obtida na Relatividade Geral (equação (3.20)). Assim como o monopolo global estático, um buraco negro descrito por uma métrica tipo Schwarzschild é um modelo teórico útil porém irreal. Abordamos aqui este tema no intuito de aprofundarmos o conhecimento sobre as propriedades do modelo estático e analisarmos as possíveis consequências da presença de um monopolo global com uma teoria de modificação da Relatividade Geral específica em um modelo teórico conhecido. No próximo capítulo descreveremos detalhadamente como obter as soluções das equações para o caso em que a massa não é desprezível em uma teoria $f(R)$ e mostraremos que esse caso pode ser interpretado como uma situação em que um monopolo global existe dentro de uma configuração de buraco negro.

Capítulo 4

O Buraco Negro com Monopolo Global; Efeitos Gravitacionais

Nesse capítulo desenvolveremos as equações de campo para o problema do monopolo global em uma teoria $f(R)$ considerando a massa M . Mostraremos que nesse caso fica claro que há uma estrutura de Buraco Negro, testando a existência de um horizonte de eventos. Utilizaremos as aproximações de campo fraco para solucionar as equações podendo assim descrever no último capítulo as características termodinâmicas em torno do horizonte de eventos, analisando as consequências do monopolo e da modificação da gravidade neste cenário.

4.1 Desenvolvimento das Equações de Campo Fraco

Começaremos novamente a partir de uma métrica simetricamente esférica com a forma

$$ds^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (4.1)$$

Desenvolvemos no capítulo 2, através do formalismo da métrica, um método de encontrar uma equação independente de índices que servirá para solucionar as equações de campo mais diretamente. O método consiste em utilizar a equação (2.4),

$$f'(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - [\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu}\square]f'(R) = \kappa T_{\mu\nu}, \quad (4.2)$$

tirando seu traço e isolando $f(R)$, que é necessariamente um escalar. Mostramos no segundo capítulo que a quantidade

$$C_\mu = \frac{1}{g_{\mu\mu}}[f'(R)R_{\mu\mu} - \nabla_\mu \nabla_\mu f'(R) - \kappa T_{\mu\mu}] \quad (4.3)$$

é independente da escolha do índice μ . A partir de agora, utilizaremos a notação mais econômica justificada pela equação (2.10), lembrando que nesse estágio as derivadas ($'$) são com respeito ao escalar de curvatura, no entanto, este depende apenas da coordenada radial. Portanto, daqui em diante $F(R)$

será a derivada com relação a curvatura de $f(R)$ e todas as demais derivadas denotadas por (r) serão com respeito à coordenada radial. As componentes do tensor $R_{\mu\nu}$ serão dadas por,

$$R_{00} = \frac{1}{A} \left(\frac{B''}{2} - \frac{A'B'}{4A} + \frac{B'}{r} - \frac{B'^2}{4B} \right), \quad (4.4)$$

$$R_{11} = \frac{A'}{A} \left(\frac{B'}{4B} + \frac{1}{r} + \frac{B'^2}{4B^2} - \frac{B''}{2B} \right), \quad (4.5)$$

$$R_{22} = \frac{R_{33}}{\text{sen}^2\theta} = 1 - \frac{1}{A} \left(1 + \frac{rB'}{2B} - \frac{rA'}{A} \right). \quad (4.6)$$

Utilizando essas componentes e as segundas derivadas covariantes de $F(r)$ chegamos às equações para a quantidade C_μ

$$C_0 = \frac{F}{AB} \left[\frac{B''}{2} + \frac{B'}{r} - \frac{B'}{4} \beta \right] + \frac{F'B'}{2AB} - \frac{\kappa\eta^2}{r^2}, \quad (4.7)$$

$$C_1 = \frac{F''}{A} - \frac{A'}{2A^2} F' - \frac{\kappa\eta^2}{r^2} - \frac{F}{A} \left[\frac{A'}{Ar} - \frac{B''}{2} - \frac{B'}{4B} \beta \right], \quad (4.8)$$

$$C_2 = C_3 = \frac{F'}{Ar} - \frac{F}{r^2} \left[1 - \frac{1}{A} - \frac{rB'}{2AB} + \frac{A'r}{2A^2} \right], \quad (4.9)$$

onde β é definido como na equação (3.25). A diferença entre essas componentes deve ser igualada a zero e nos dará as equações (3.23) e (3.24). A solução exata dessas equações depende diretamente da determinação do tipo de modificação da gravidade que devemos esperar. No entanto, mesmo para a função $F(r)$ mais simples essas equações diferenciais ainda não foram resolvidas exatamente e nós não encontramos um método para tal. Utilizaremos novamente as definições $A(r) = 1 + |a(r)|$, $B(r) = 1 + |b(r)|$ e assumiremos uma pequena modificação na gravidade do tipo

$$\frac{df(R)}{dR} = F(r) = 1 + \psi_n r^n. \quad (4.10)$$

Também utilizaremos as aproximações de campo fraco dadas pelas equações (3.27) para chegar às formas aproximadas das equações diferenciais para $a(r)$ e $b(r)$, dadas por

$$\frac{\beta}{r} = n(n-1)\psi_n r^{n-2} \quad (4.11)$$

e

$$4a - 4n\psi_n r^n + 2r(a' + b') + 2r^2 b'' - 4(1 + a + b - \psi_n r^n)8\pi G\eta^2 = 0. \quad (4.12)$$

A solução dessas equações se dá em duas etapas: primeiro resolvemos a equação (4.12) para $a(r)$ usando a relação (4.11) e depois utilizamos esta última para encontrar $b(r)$. Dessa forma, encontramos

$$a(r) = \kappa\eta^2 + \frac{c_1}{r} + c_2 r^2 + \psi_n \left(n - \frac{2\kappa\eta^2}{n+1} \right) r^n, \quad (4.13)$$

onde c_1 e c_2 são constantes de integração. Presumindo a inexistência da constante cosmológica assumimos $c_2 = 0$ e afim de recuperar o potencial gravitacional newtoniano escolhemos $c_1 = 2GM$, que nesse caso não consideraremos desprezível. Como citado em [26] esse cenário pode ser entendido como o de um Buraco Negro com um Monopolo Global em seu interior. Novamente, $\kappa = 8\pi G$. Agora integramos β na equação (3.25), para encontrarmos a relação entre $A(r)$ e $B(r)$

$$A(r)B(r) = a_0 e^{(n-1)\psi_n r^n}, \quad (4.14)$$

escolhendo a constante de integração $a_0 = 1$, chegamos à forma aproximada de $B(r)$ como

$$B(r) = \frac{e^{(n-1)\psi_n r^n}}{A(r)} \approx (1 - a(r))e^{(n-1)\psi_n r^n} \approx 1 - \frac{2GM}{r} - \kappa\eta^2 - \psi_n \left(1 - \frac{2\kappa\eta^2}{n+1}\right) r^n. \quad (4.15)$$

Finalmente, temos agora a uma métrica esféricamente simétrica de uma região com massa M com um monopolo global com parâmetro η no centro da configuração

$$ds^2 = \left[1 - \frac{2GM}{r} - \kappa\eta^2 - \psi_n \left(1 - \frac{2\kappa\eta^2}{n+1} r^n\right)\right] dt^2 - \frac{e^{(n-1)\psi_n r^n}}{1 - \frac{2GM}{r} - \kappa\eta^2 - \psi_n \left(1 - \frac{2\kappa\eta^2}{n+1} r^n\right)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi). \quad (4.16)$$

É preciso ressaltar aqui que decidimos escrever a métrica usando a relação inversa à usada para definir $B(r)$, dada por $A(r) = \frac{e^{(n-1)\psi_n r^n}}{B(r)}$. Escolhemos essa forma para deixar claro que, apesar das aproximações, as singularidades (aparente e real) que caracterizam o buraco negro estão presentes na métrica. Veremos na próxima seção que apesar das aproximações, a singularidade real permanece, independente da forma como escrevermos a métrica. Além disso, veremos também que podemos caracterizar o horizonte de eventos para todos os graus n , apesar de não conseguirmos uma expressão exata para todos.

4.2 Buraco Negro de Schwarzschild, Revisão Histórica

O surgimento da teoria de buracos negros é bem anterior a escolha do termo que se tornou popular da segunda metade do século XX pra cá. Em 1784 um clérigo inglês chamado John Michel, usando argumentos newtonianos baseado na descrição corpuscular da luz, chegou à seguinte conclusão [56]

Se devem realmente existir na natureza quaisquer corpos cujas densidades não sejam menores que aquela do sol, e cujos diâmetros sejam mais do que 500 vezes o diâmetro do sol sua luz nunca poderia chegar até nós.

Essa afirmação, apesar de baseada em conceitos clássicos, já nos mostra uma das características fundamentais dos objetos que viriam a ser conhecidos como buracos negros quase 200 anos depois; nada, nem a luz, pode escapar de sua atração gravitacional. A teoria clássica da gravitação newtoniana e da teoria corpuscular da luz não poderia, no entanto, descrever muito mais do que isso sem a ajuda de novas compreensões sobre o caráter corpuscular da luz e sobre as fundamentais características da gravitação como força. Albert Einstein foi o responsável pela Teoria do Efeito Fotoelétrico [60] (que demonstrou que a luz, mesmo tendo características ondulatórias, poderia se comportar como um conjunto de quanta) e pelas teorias Especial e Geral da Relatividade. Essas duas últimas tem em seus fundamentos tanto a caracterização da velocidade da luz como absoluta como a descrição de como se dá a interação gravitacional entre todos os corpos que possuem energia.

O desenvolvimento das equações de Einstein para o campo gravitacional possibilitou um novo olhar sobre o problema do corpo extremamente massivo e denso. Karl Schwarzschild, tendo lido o trabalho

de Einstein de 1915 [61], desenvolveu a solução para o problema mais simples possível; o de um corpo massivo no vácuo. A solução de Schwarzschild servia para descrever o entorno (vazio) de qualquer corpo massivo, da Terra, do Sol e também de objetos muito mais massivos que este. No cenário da Relatividade Geral, como sabemos, a descrição de um campo gravitacional também descreve a dilatação e/ou contração espaço-temporal que aquele campo produz nos pontos a sua volta. A solução de Schwarzschild tem a característica peculiar de criar uma dilatação temporal infinita em um determinado raio crítico do corpo massivo, fazendo com que o corpo não permita que nada escape dele ao atingir esse raio, conhecido como raio de Schwarzschild, ou ainda, horizonte de eventos.

A solução das equações de Einstein no vácuo, apesar de ser de muita utilidade para os problemas testáveis à época, foi considerada problemática pelo próprio Einstein e pela maioria dos físicos por conter essa "singularidade" para um corpo suficientemente denso. Por muito tempo, a possibilidade da existência de objetos que sugassem até a luz foi considerada absurda, por motivos muito mais filosóficos do que matemáticos. O argumento central daqueles que não acreditavam que uma estrela pudesse chegar à gerar essa singularidade era justamente o de que não se poderia chegar a uma pressão infinita no interior do corpo. A solução de Schwarzschild só se propunha a descrever o exterior do objeto, logo, a física que aconteceria em seu interior (passado o horizonte de eventos) não deveria ser confundida com a descrição da Relatividade Geral do campo gravitacional. A descoberta das Anãs Brancas contribuiu para o aprofundamento das dúvidas sobre a existência desses "corpos negros", pois se era possível uma estrela compacta era preciso entender o que aconteceria com essa caso ela chegasse a diminuir ainda mais.

Em 1930 o jovem indiano Chandrasekhar provou matematicamente que uma Anã Branca que tivesse menos do que 1.4 vezes o raio do Sol não conseguiria se manter estável e colapsaria sem limite aparente [62]. Ainda assim, Einstein e a comunidade científica em geral, não estavam convencidos de que seria possível encontrar um corpo com uma deformação do tempo infinita em sua superfície. Oppenheimer, completou o trabalho de Chandrasekhar descrevendo detalhadamente como se daria o colapso de uma estrela cujo combustível termonuclear estivesse terminado [63], e demonstrou também que esse colapso "continuará indefinidamente".

No início dos anos 60 ficou claro que o principal problema na descrição de buracos negros não passava de um artifício matemático. Para descrever isso, observamos aqui a forma mais geral para uma métrica esféricamente simétrica de um corpo massivo, utilizada por Schwarzschild em 1916

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_H}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_H}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (4.17)$$

que contém claramente duas singularidades, uma para $r = r_H$ e outra para $r = 0$. Independentemente, três matemáticos (Kruskal, Finkelstein e Szekeres) perceberam que a singularidade no horizonte de eventos poderia ser removida por uma transformação de coordenadas, que manteria as propriedades de atração gravitacional e que ainda teria uma singularidade no centro da configuração. Essa singularidade não era vista como um problema tão sério pois estaria dentro do raio de Schwarzschild e portanto, fora do alcance de descrição da teoria da Relatividade Geral. Coube a Wheeler, para quem Kruskal mostrou seus cálculos, publicizar esse resultado e cunhar o termo buraco negro. Apesar da aceitação tardia da comunidade científica de que buracos negros pudessem ser objetos reais, vimos que a discussão sobre as

consequências da existência de tais objetos é bem anterior ao termo que ganhou popularidade da metade do século XX pra cá.

Não é o objetivo desta tese fazer uma revisão detalhada de todos os desenvolvimentos teóricos e experimentais na busca pela comprovação da existência e das características dos Buracos Negros em geral. Queremos aqui mostrar que a métrica que encontramos como solução para o problema do monopolo global, tanto na Relatividade Geral quanto em teorias $f(R)$, tem as características locais necessárias para definirmos que ela pode caracterizar um objeto de onde a luz não escaparia. Frisamos aqui que as características são locais pois, como podemos ver pela equação (4.16), a métrica não será assintoticamente plana. Isso ocorre tanto pela presença do monopolo global quanto pela modificação da gravidade, porém, utilizamos a condição de localidade expressa pela equação (3.34) para evitar a discussão sobre o espaço-tempo no infinito. O modelo aqui estudado só poderia ser estendido e analisado globalmente se fosse possível encontrar as soluções exatas das equações de campo.

4.3 O Buraco Negro com Monopolo Global nas Teorias $f(R)$, Características Gerais

A métrica (4.16), assim como a métrica de Schwarzschild, possui duas singularidades aparentes, uma verdadeira (em $r = 0$) e outra aparente no horizonte de eventos. Para provar que existe um horizonte de eventos (e conseqüentemente, o Buraco Negro) nessa configuração independente do grau n da modificação da gravidade, é necessário observar se a equação

$$1 - \frac{2GM}{r} - \kappa\eta^2 - \psi_n \left(1 - \frac{2\kappa\eta^2}{n+1}\right)r^n = 0 \quad (4.18)$$

tem soluções para todo e qualquer n . Para $n = 0$, a equação é de primeiro grau e tem uma solução trivial. Para $n = 1$, $n = 2$ e $n = 3$, é possível encontrar soluções exatas. Como era de se esperar, por serem equações do segundo grau em diante, todas apresentam mais de uma raiz. Nessa tese não iremos discutir o caso de buracos negros eletromagneticamente carregados ou em rotação, mas é importante evitar confusões nesse ponto para que possamos garantir que nosso modelo seja uma modificação de um problema estático análogo ao caso estudado inicialmente por Schwarzschild. A confusão poderia surgir pois, para Buracos Negros com momento angular surge um segundo horizonte de eventos, chamado de horizonte externo, que delimita uma região chamada de ergoesfera, que tem propriedades diferentes tanto do interior do horizonte interno quanto do exterior da região. Apesar de encontrarmos várias raízes para os diferentes graus da modificação da teoria de gravidade utilizada, apenas uma delas pode ser realmente compreendida como o horizonte de eventos pois apenas ela se encontra na região delimitada pela equação (3.34).

Neste momento vale a pena fazer um apontamento sobre o papel da constante ψ_n na definição da condição de localidade. Escolher uma constante que fosse a mesma para todos os graus de modificação nos traria sérios problemas. Mantendo o valor de ψ_n fixo e aumentando o grau da variável radial, diminuiríamos cada vez mais a região que poderíamos analisar em torno do buraco negro (novamente,

observando a condição (3.34)). Portanto, ao longo desta tese assumimos que, ao mudarmos o expoente da função radial, devemos também modificar a constante que o acompanha. A definimos então, como

$$\psi_n = 0.2 \cdot 10^{-2n}. \quad (4.19)$$

Isso nos garantirá ainda que, apesar de encontrarmos várias raízes para as equações (4.18), apenas uma delas poderá ser considerada como horizonte de eventos pois apenas ela está na região de validade da teoria. Para ilustrar esse argumento, utilizamos os gráficos das funções $B(r, n)$ que mostram que elas se igualam a zero em uma região próxima ao horizonte de eventos de um buraco negro clássico e que as outras raízes não devem ser consideradas.

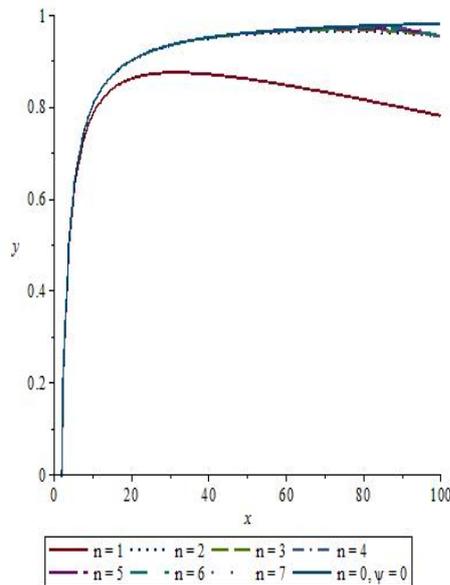


Figura 4.1: Gráfico para $B(r, n)$

Nos gráficos escolhemos $8\pi G\eta^2 \approx 10^{-5}$ e $2GM \approx 1$. Também escolhemos a definição da função $B(r, n)$ dada por (4.15). Incluímos ainda o caso sem a modificação da gravidade (Schwarzschild com Monopolo Global), para corroborar a tese de que o horizonte de eventos físico é de fato o horizonte "interno" [29]. Poderia se argumentar que modificando a constante adotada na condição (4.19) poderíamos aumentar a região de validade da solução, incluindo os horizontes externos na análise. A questão é que, mesmo diminuindo a constante ψ_n , o horizonte externo continua fora da região de validade porque ele mesmo depende da constante e é modificado por ela. O mesmo não acontece com o horizonte interno, que se mantém na mesma região. Dessa forma, consideraremos aqui apenas um horizonte de eventos (o interno) como parte da nossa análise física.

Esse é o primeiro e fundamental passo para começarmos a estudar as propriedades físicas dessa configuração a partir da teoria de buracos negros: identificar a singularidade aparente na região que estamos interessados em estudar. Definimos agora, além da condição (3.34) a condição $r > r_H$. A física necessária para o entendimento da região interna ao horizonte de eventos está fora do escopo desta tese.

Uma segunda característica fundamental a ser estudada é o comportamento da curvatura na

região próxima ao horizonte de eventos. Daqui em diante desconsideraremos os termos $\frac{2\kappa\eta^2}{n+1}$ e $\frac{2\kappa\eta^2}{n+1}$, pois estes aparecem multiplicando-se pelo termo $\psi_n r^n$. Utilizaremos também as aproximações para eliminar a exponencial $e^{(n-1)\psi_n r^n}$, definindo o termo $g_{11} \approx 1 + \kappa\eta^2 + \frac{2GM}{r} + n\psi_n r^n$. Utilizando essas aproximações podemos escrever o escalar de curvatura em função da coordenada radial, do parâmetro η e da modificação da gravidade como

$$R = -3n(1+n)\psi_n r^{n-2} - \frac{2\kappa\eta^2}{r^2} \quad (4.20)$$

que é claramente singular para $r = 0$. Em torno do horizonte de eventos não há motivos para imaginar que essa curvatura seja excessivamente grande, considerando as constantes adotadas na figura 4.1 e a escala de distância do horizonte interno é fácil ver que a curvatura não terá valores extremamente altos nessa região, não importando qual seja a escolha do grau n . Além disso, se retirássemos a modificação da gravidade e o monopolo global naturalmente recuperaríamos o resultado obtido para uma métrica de Schwarzschild clássica, $R = 0$. Seria interessante obter, a partir dessa curvatura, uma expressão geral para a função $f(R)$. Em [22] a expressão para $n = 1$ é demonstrada. No entanto aqui encontramos o mesmo problema que encontramos para a obtenção do horizonte de eventos, a equação que nos permitiria escrever a coordenada em função do escalar de curvatura atinge graus superiores aos que podemos encontrar uma solução e não existe, a princípio, uma solução para o grau n . Tendo em vista que as características gravitacionais da solução não sofrem grande impacto com a mudança do grau n (veja figura 4.1) é possível assumir que assim como a solução para $n = 1$, as demais soluções respeitem as condições de estabilidade listadas na seção 1.3.

O desenvolvimento do modelo teórico descrito nessa tese passa pela análise conjunta das equações como um todo e de sua relação com as soluções já conhecidas. O estranhamento sobre a possibilidade de aceitar uma solução não exata é natural porém a limitação que nos impede de analisar genericamente o caso para todos os graus n do tipo de modificação da gravidade é puramente matemática, assim como a limitação da região que podemos estudar com esse modelo. O argumento mais forte em que se baseia essa tese foi citado em [26] e reforçado aqui; a solução esfericamente simétrica (mesmo quando incluída a modificação $\psi_n r^n$) é totalmente análoga à solução de Schwarzschild. Como vimos na revisão histórica, a solução de Schwarzschild é apenas o pontapé inicial mas é também a solução que permitiu verificar os resultados mais básicos da teoria da Relatividade Geral. O modelo apresentado aqui é limitado em vários sentidos, porém, como veremos no próximo capítulo, ele indica que é possível introduzir modificações de qualquer grau na coordenada radial e recuperar os mesmos resultados físicos sobre a termodinâmica dos buracos negros. Assim como a singularidade no horizonte de eventos foi uma distração matemática que impediu os físicos por anos de enxergar a verdadeira importância da solução de Schwarzschild, as dificuldades matemáticas encontradas aqui não devem ser consideradas como impeditivos para que se analise o conteúdo físico das soluções.

Concluimos este capítulo tendo demonstrado que a configuração do monopolo global massivo pode, de fato, ser compreendida como uma configuração de buraco negro. Além disso demonstramos que o horizonte de eventos existe para diversos graus da modificação da gravidade escolhida ($F(R) = F(r) = 1 + \psi_n r^n$) e que sua posição varia muito pouco com a variação deste grau. Conseguimos também

obter uma curvatura que corresponde aos resultados de [22] e que recupera o resultado da solução de Shcwarzschild se retirarmos o monopolo global e o termo de modificação da gravidade. Passaremos agora para a análise das características termodinâmicas dessa configuração.

Capítulo 5

Análise Termodinâmica do Buraco Negro com Monopolo Global para

$$F(r) = 1 + \psi_n r^n$$

Nesse capítulo faremos uma revisão sobre a termodinâmica de buracos negros em geral, introduzindo a temperatura de Hawking através do cálculo da gravidade superficial, discutindo principalmente o caso da solução de Schwarzschild. Em seguida, calcularemos a gravidade superficial para a métrica (4.16), levando em conta as aproximações já citadas anteriormente. Fazendo uso desta quantidade calcularemos a temperatura de Hawking, a temperatura local associada e as demais quantidades termodinâmicas, como entropia, energia e capacidade térmica. Finalmente analisaremos a variação dessas quantidades com relação ao grau n da modificação da gravidade escolhida e também do parâmetro ψ_n .

5.1 Introdução a Termodinâmica de Buracos Negros

A relação entre gravitação e termodinâmica surgiu pouco depois dos buracos negros se tornarem plenamente aceitos entre os físicos. Foi Wheeler, o responsável por cunhar o termo "buraco negro", um dos primeiros a notar a relação entre a geometria do espaço-tempo e a termodinâmica. Simplicitermente, pode-se perceber que um campo gravitacional necessariamente altera a termodinâmica de uma região apenas notando que ele é sempre atrativo, tem sempre a tendência preferencial a crescer, ao invés de diminuir. Em uma configuração de buraco negro, que não permite em princípio que nada escape ao seu campo gravitacional, naturalmente, espera-se que ele cresça conforme absorve a matéria em seu entorno. O teorema da área [6] afirma que, em um buraco negro, o horizonte de eventos (e conseqüentemente a área superficial) não decresce em nenhum processo. Assim, a relação $dA \geq 0$ é chamada de segunda lei da termodinâmica de buracos negros por ser análoga à segunda lei da termodinâmica que afirma que a entropia não pode diminuir.

A partir da analogia entre a área superficial do buraco negro e a entropia é possível perceber

outras relações entre os parâmetros que definem essa configuração gravitacional (massa M , área A , carga Q e momento angular J) com aqueles da termodinâmica (energia, entropia e trabalho). Pode-se mostrar [64] que a área do buraco negro pode ser escrita como $A(M, J, Q)$ e que inversamente, podemos escrever uma lei de conservação do conteúdo de massa-energia da configuração da seguinte forma

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega dJ + \Phi dQ \quad (5.1)$$

onde Ω corresponde a velocidade angular e Φ ao potencial elétrico. Para o caso de Schwarzschild a expressão se reduz a $dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA$. Nessa relação, considerando a analogia entre área e entropia, fica claro que também há uma relação direta entre a quantidade κ e a temperatura ($dE \sim TdS$). É possível provar que esse parâmetro é constante na superfície de um buraco negro genérico (para a solução de Schwarzschild, por exemplo, $\kappa = (4M)^{-1}$), podendo ser considerada uma temperatura de equilíbrio. Esse parâmetro é identificado como a gravidade superficial e sua constância no horizonte de eventos é análoga à lei zero da termodinâmica.

A terceira lei está relacionada com o fato de um sistema termodinâmico não poder alcançar o zero absoluto. Para um buraco negro, isso significaria encontrar $\kappa = 0$, o que significaria simultaneamente que não haveria mais um horizonte de eventos e a singularidade ao centro do buraco negro poderia interagir livremente com o exterior, ou ficaria "nua". Singularidades "nuas" foram excluídas como possibilidades reais em [65], mas as motivações e as provas para sua hipótese ainda são discutidas. Para o caso da solução de Schwarzschild fica claro que essa possibilidade está excluída por princípio.

Essas relações, apesar de muito próximas das relações termodinâmicas clássicas, poderiam ser consideradas apenas analogias casuais se mantivéssemos um ponto de vista conservador a respeito da física de buracos negros. Em princípio, nada pode escapar do horizonte de eventos e conseqüentemente não poderia haver uma radiação saindo dessa região e produzindo a temperatura finita que encontramos, por exemplo, na solução de Schwarzschild. A teoria clássica nos indicaria que a temperatura da configuração deveria ser sempre zero. Para que o buraco negro tenha uma temperatura fixa e finita ele deve estar em equilíbrio termodinâmico, emitindo energia na mesma taxa em que absorve.

Se tratarmos o sistema quanticamente o cenário se transforma. Se a energia do buraco negro puder ser dada por $E = h/\lambda$, onde h é a constante de Planck e λ o comprimento de onda das "partículas" que estariam no interior do horizonte de eventos, ela terá necessariamente um valor mínimo. O máximo que qualquer matéria presa no buraco negro poderia ter como comprimento de onda seria o tamanho do próprio horizonte. A partir dessa informação [5] demonstrou-se que a entropia está diretamente relacionada com a massa (e naturalmente com a área) da superfície da configuração. A partir dessa relação, pode-se ver que, para um buraco negro de Schwarzschild, a temperatura será dada por

$$T \propto M^{-1} \propto \kappa \quad (5.2)$$

Ainda assim se mantém a pergunta: por que tratar um buraco negro quanticamente? Que tipo de radiação ele poderia emitir se sua característica fundamental é justamente de não permitir que nada (mesmo a luz) escape? Isso só pode ser explicado totalmente por um tratamento quântico do campo gravitacional gerado por essa configuração. Apesar do problema geral da quantização do campo

gravitacional ainda estar em aberto, [7] conseguiu-se tratar o problema a partir da teoria de campos em espaços curvos chegando a uma relação exata para a equação (5.2). O princípio da ideia está no fato de que o próprio campo gravitacional pode gerar excitações no vácuo em torno do horizonte de eventos podendo criar assim pares de partícula-antipartícula. Esses pares poderiam ser os responsáveis pela chamada *radiação Hawking*. Está fora do escopo desta tese se aprofundar no assunto da teoria quântica de campos em espaços curvos mas é possível reforçar o argumento acima com um exemplo relativamente simples [4], que descreveremos a seguir.

5.1.1 Criação e Aniquilação de Partículas por um Espelho em Movimento

Consideremos um espelho que reflita uma onda de um campo escalar qualquer ϕ que respeite a equação de onda

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0, \quad (5.3)$$

onde utilizamos $c = 1$. Para esse campo as ondas que refletidas se superpõem às incidentes, fazendo com que os modos do campo sejam descritos por

$$\psi_\omega = \exp[-i\omega(t+x)] - \exp[-i\omega(t-x)] \quad (5.4)$$

e o campo escalar quantizado pode ser escrito em termos de operadores de criação e aniquilação

$$\phi = \sum_\omega (a_\omega \psi_\omega + a_\omega^* \psi_\omega^*). \quad (5.5)$$

O número de quanta do vácuo será dado pela amplitude $\langle 0 | \sum_\omega a_\omega^* a_\omega | 0 \rangle$ e será sempre zero. A situação se modifica caso o espelho esteja em movimento acelerado. O modo de vibração que descreverá a onda refletida dependerá diretamente da trajetória espaço-temporal do espelho e fará com que o campo na região em frente ao espelho tenha outra configuração. Assumindo que possamos descrever a onda refletida por uma função do tipo $\exp[-i\omega f(t-x)]$ e definindo os novos modos do campo escalar como $\bar{\psi}_\omega$, o campo será descrito analogamente por

$$\phi = \sum_\omega (b_\omega \bar{\psi}_\omega + b_\omega^* \bar{\psi}_\omega^*). \quad (5.6)$$

Os operadores b_ω serão definitivamente diferentes, mas podem ser associados aos operadores da configuração estática por uma transformação de Bogoliubov;

$$b_\omega = \sum_{\omega'} (\alpha_{\omega\omega'} a_{\omega'} + \beta_{\omega\omega'} a_{\omega'}^*). \quad (5.7)$$

Dessa forma, se calcularmos o número de quanta do estado associado ao vácuo em torno do espelho obtemos agora

$$\langle 0 | b_\tau^* b_\tau | 0 \rangle = \sum_\omega |\beta_{\tau\omega}|^2, \quad (5.8)$$

ou seja, o movimento do espelho pode gerar a criação de quanta a partir do vácuo. Dependendo da direção do movimento do espelho em relação à origem da onda pode se criar um grande desvio para o vermelho ou um desvio para o azul. Em determinada trajetória o espelho pode alcançar uma velocidade

próxima a da luz rapidamente fazendo com que o desvio para o vermelho seja tão grande que a onda efetivamente não seja refletida, mas mantendo a criação de partículas no vácuo.

Nesse ponto fica claro a possível analogia com o caso dos buracos negros. Os campos que interagem com o campo gravitacional de um objeto compacto sofrem um desvio para o vermelho cada vez maior dependendo da configuração do mesmo e o tempo que um raio de luz, por exemplo, demora para atravessar um campo gravitacional aumenta exponencialmente com a gravidade superficial do objeto. Pelo mesmo argumento usado para o espelho em movimento, a diferença de frequência entre os modos do campo que é absorvido pelo campo e aquele refletido espera-se que haja a criação de quanta de energia. No caso do campo gravitacional ainda há de ser levada em consideração a possibilidade de que parte dos quanta criados seja sugado também para dentro do horizonte de eventos. Mas há um equilíbrio térmico entre o buraco negro e o exterior então existe um balanceamento entre a radiação emitida e a absorvida gerando assim a *radiação de Hawking*. O espectro dessa radiação teria uma temperatura dada genericamente por [7].

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi} \quad (5.9)$$

onde consideramos a constante de Boltzman igual a 1. Para o caso da solução de Schwarzschild a temperatura seria dada por $1/8\pi M$.

A partir da compreensão da temperatura de Hawking e das demais relações descritas na seção anterior estamos preparados para analisar termodinamicamente a configuração esféricamente simétrica e estática descrita no capítulo 4. Antes disso, no entanto, é interessante demonstrar brevemente como encontrar a gravidade superficial para uma configuração de buraco negro clássica e também para o caso que estudaremos a seguir.

5.2 Gravidade Superficial

A gravidade superficial pode ser vista sob dois pontos de vista, o geométrico e o mecânico. Mecanicamente ela está diretamente relacionada com a força necessária para segurar uma determinada partícula em torno de um campo gravitacional com simetria esférica. No caso dos buracos negros, ela é calculada diretamente na posição do horizonte de eventos (onde, como vimos, deve ser constante por questões termodinâmicas). No entanto, ela aparece mais diretamente se pensarmos na geometria simétrica de nosso problema [66].

Toda métrica que possui alguma simetria possui também um campo vetorial de Killing, caracterizado por manter a métrica inalterada sob uma derivada de Lie; $L_X g_{\mu\nu}$, que pode ser reescrita em termos das derivadas covariantes como

$$X_{\mu;\nu} + X_{\nu;\mu} = 0. \quad (5.10)$$

Todo vetor que obedecer a essas relações está associado a uma isometria da métrica. Associado a esse vetor estará uma hipersuperfície onde a sua norma é sempre nula ($X^\mu X_\mu = 0$), chamada de horizonte de Killing. Para configurações esféricamente estáticas como as que estudamos nessa tese o horizonte de Killing coincide com o horizonte de eventos. Além disso, os vetores de Killing serão sempre ortogonais

ao seu horizonte, fazendo com que

$$(X^\mu X_\mu)^{;\nu}|_H = -2\kappa X^\nu|_H \quad (5.11)$$

onde κ deve ser alguma quantidade constante sobre o horizonte de eventos que definimos como a gravidade superficial. Pode-se manipular a equação acima para isolar a gravidade superficial obtendo

$$\kappa^2|_H = -\frac{1}{2}X^{\mu;\nu}X_{\mu;\nu}|_H. \quad (5.12)$$

Dessa forma, conhecendo as simetrias da métrica basta aplicar essa equação para determinar a gravidade superficial da configuração estudada. Tanto a solução de Schwarzschild como o modelo para um buraco negro com monopolo global na teoria $f(R)$ possuem a mesma simetria temporal e esférica, o que nos permite encontrar uma expressão genérica para a gravidade superficial de ambas. Escolhendo o vetor de Killing $X^\mu = \delta_0^\mu$ teremos $X_\mu = g_{00}$. Substituindo essas expressões na equação acima e fazendo as derivadas covariantes com relação a uma métrica do tipo $ds^2 = g_{00}dt^2 - g_{11}dr^2 - r^2d\Omega$ chegamos à gravidade superficial para uma solução estática e simetricamente esférica das equações de Einstein

$$\kappa^2|_H = -\frac{1}{4}g^{11}g^{00}(\partial_1 g_{00})^2. \quad (5.13)$$

Substituindo essa expressão na equação (5.9) nos dá uma equação geral para a temperatura de Hawking para configurações esfericamente simétricas e estáticas, dada por

$$T_H = \frac{1}{4\pi}[\sqrt{-g^{11}g^{00}}(\partial_1 g_{00})]_{r=r_H}. \quad (5.14)$$

A partir da temperatura podemos analisar as demais quantidades termodinâmicas do buraco negro de acordo com a métrica escolhida.

5.3 Temperatura e Energia

Nesta seção tentaremos aplicar os conceitos e relações termodinâmicas gerais introduzidos na seção 5.1, utilizando a relação encontrada na equação (5.14) para encontrar os parâmetros termodinâmicos das configurações de buraco negro com e sem o monopolo global e a modificação da gravidade. Portanto, estudaremos simultaneamente uma métrica clássica tipo Schwarzschild

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}dr^2 - r^2d\Omega^2, \quad (5.15)$$

em comparação a métrica (4.16), que reescreveremos aqui, utilizando as aproximações apresentadas nas equações (3.27), como

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r} - 8\pi G\eta^2 - \psi_n r^n\right)dt^2 - \left(1 + \frac{2GM}{r} + 8\pi g\eta^2 + n\psi_n r^n\right)dr^2 - r^2d\Omega^2. \quad (5.16)$$

Novamente é importante lembrar as limitações que impomos sobre a análise da métrica (5.16) em relação a métrica (5.15). A solução que nos levou a essa configuração foi encontrada utilizando as aproximações de campo fraco (equações 3.27), o que nos faz desprezar aqui quaisquer termos cruzados. Além disso, a métrica 5.16 só é válida localmente para uma região $r_H < r < 1/|\psi_n|^{1/n}$, o que nos obrigará a trabalhar

com quantidades termodinâmicas locais. A métrica de Schwarzschild não apresenta tais limitações, mas para fins de comparação iremos calcular as quantidades termodinâmicas locais referentes a essa configuração também. Para escrever a temperatura de Hawking totalmente em função apenas do horizonte de eventos utilizamos a equação $B(r_H) = 0$ para definir

$$2GM = r_H[1 - 8\pi G\eta^2 - \psi_n r_H^n]. \quad (5.17)$$

O produto definido na equação (4.14) também nos será útil em sua forma aproximada

$$B(r)A(r) = e^{(n-1)\psi_n r^n} \approx 1 + (n-1)\psi_n r^n. \quad (5.18)$$

Finalmente, podemos escrever as temperaturas de Hawking referentes às métricas (5.15) e (5.16), respectivamente, como

$$T_H^S = \frac{1}{4\pi} \partial_1 g_{00}|_{r=r_H} = \frac{2GM}{4\pi r_H^2} = \frac{1}{4\pi r_H}, \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} T_H^{GM} &= \frac{1}{4\pi} \sqrt{-g^{11}g^{00}} \partial_1 g_{00}|_{r=r_H} \approx \frac{1}{4\pi} \left(1 - \frac{(n-1)}{2} \psi_n r_H^n\right) \left(\frac{2GM}{r_H} - n\psi_n r_H^{n-1}\right) \\ &\approx \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1 - 8\pi G\eta^2}{r_H} - (n+1)\psi_n r_H^{n-1}\right], \end{aligned} \quad (5.20)$$

onde pode ser visto que para o caso de $\eta = \psi_n = 0$ é recuperada a temperatura referente ao buraco negro de Schwarzschild. Essa relação se mantém para as demais quantidades termodinâmicas e, portanto, passaremos a calcular apenas as quantidades termodinâmicas de (5.16) comparando-a com as quantidades de Schwarzschild apenas retirando os parâmetros do monopolo e da teoria f(R).

Respeitando as limitações do nosso modelo (e observando que para o caso do monopolo global com a modificação de gravidade a temperatura de Hawking se torna negativa rapidamente) utilizaremos o resultado obtido por [1] para a temperatura local de uma radiação de corpo negro em um campo gravitacional em relação a sua temperatura de equilíbrio, dada por

$$T_{loc} = \frac{T}{\sqrt{g_{00}}}. \quad (5.21)$$

Substituindo (5.21) e a componente temporal da métrica (5.16) nesta equação encontramos a temperatura como função da posição

$$T_{loc} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1 - 8\pi G\eta^2}{r_H} - (n+1)\psi_n r_H^{n-1} \right] \sqrt{\frac{r}{\psi_n r_H^{n+1} - r_H(1 - 8\pi G\eta^2) + r(1 - 8\pi G\eta^2) - \psi_n r^{n+1}}}. \quad (5.22)$$

Uma característica importante a se observar nessa temperatura é a existência de um mínimo na sua variação com relação ao horizonte de eventos. Esse mínimo pode ser chamado de temperatura crítica [29], que seria a temperatura mínima na região em torno do buraco negro. Na figura 5.1 estão as curvas de temperatura local para $n = 2$ e $n = 30$ para ilustrar como a variação do grau n influi muito pouco no valor da temperatura crítica. Em [29] foi observada a diferença entre as temperaturas críticas entre o buraco negro de Schwarzschild e o caso do buraco negro com monopolo estudado aqui para $n = 1$.

É importante notar, acerca desse e dos gráficos a seguir, que fixamos uma posição para a medida da temperatura e estamos analisando como a temperatura nessa posição varia conforme o horizonte de

eventos aumenta, ou seja, estamos encontrando que tamanho o buraco negro tem no momento em que a temperatura na posição $r = 10$ é mínima. Nesse sentido, vemos que conforme o horizonte se aproxima da posição escolhida a temperatura desce rapidamente até o mínimo e depois aumenta assintoticamente quando este se aproxima de $r = 10$.

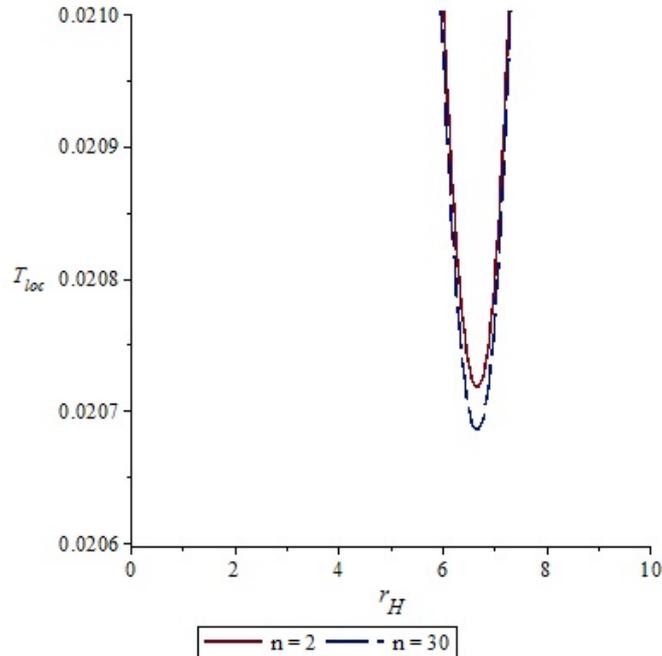


Figura 5.1: Temperatura Local em função de r_H para $n=2$ e $n=30$.

Observamos abaixo a pequena variação entre as temperaturas críticas se mantivermos o grau n mas diminuirmos o valor do parâmetro ψ_n , para $n=1$, $n=2$ e $n=3$.

Os gráficos mostram a pequena variação existente tanto entre os diferentes valores de ψ_n como para os diferentes valores de n . Agregados ao gráfico 5.1 eles indicam que a modificação da gravidade pode ser de qualquer grau e as características físicas do buraco negro de Schwarzschild com o monopolo global serão muito pouco alteradas.

Seguindo a analogia descrita na seção 5.1 e desenvolvida por [5], podemos assumir que $S = A/4 = \pi r_H^2$, onde A é a área do horizonte de eventos. Essa relação nos permite encontrar a energia local da configuração a partir da temperatura, utilizando a primeira lei da Termodinâmica

$$E_{loc} = E_0 + \int_{S_0}^S T_{loc} dS = E_0 + \int_{r_H(M=0)}^{r_H(M)} T_{loc} 2\pi r_H dr_H, \quad (5.23)$$

onde escolhemos $E_0 = 0$ por simplicidade [29]. Prosseguimos substituindo a expressão para a temperatura local na integral utilizando

$$r_H(M=0) = [(1 - 8\pi G\eta^2/\psi_n)]^{-\frac{1}{n}}, \quad (5.24)$$

obtendo

$$E_{loc} = -r \sqrt{(1 - 8\pi G\eta^2 - \psi_n r^n)} \cdot \sqrt{1 - \frac{r_H(1 - 8\pi G\eta^2 - \psi_n r_H^n)}{r(1 - 8\pi G\eta^2 - \psi_n r^n)}} \Big|_{r_H(M=0)}^{r_H(M)}$$

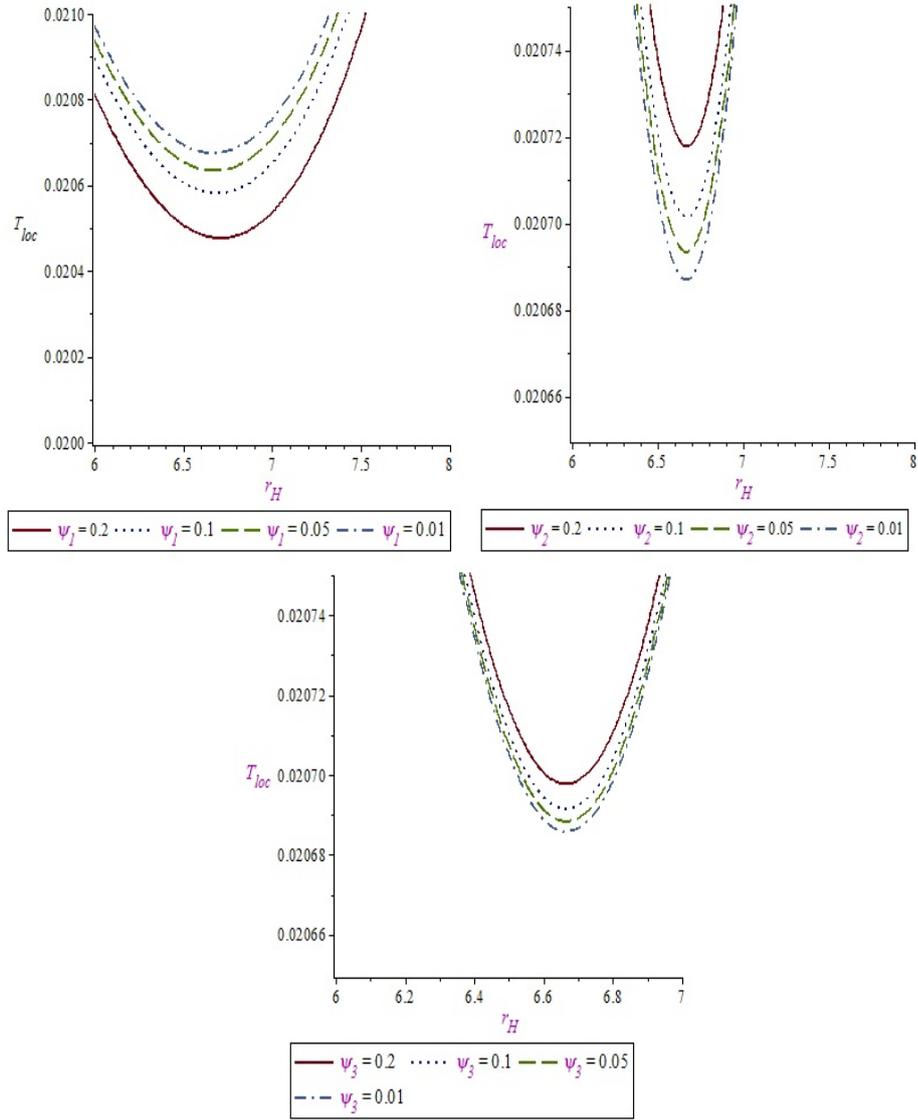


Figura 5.2: Temperatura local em função de r_H para $n = 1$ (esq.) e $n = 2$ (dir.) e ψ_n variando.

$$= r\sqrt{(1 - 8\pi G\eta^2 - \psi_n r^n)} - \sqrt{r}\sqrt{r(1 - 8\pi G\eta^2 - \psi_n r^n) - r_H(1 - 8\pi G\eta^2 - \psi_n r_H^n)}. \quad (5.25)$$

Para o caso clássico de Schwarzschild (e também para o caso clássico com monopolo global) obteríamos

$$E_{loc}^S = r(\sqrt{r} - \sqrt{r - r_H}). \quad (5.26)$$

Naturalmente, quando $r = r_H$ a energia é proporcional ao raio do buraco negro, como esperado pela relação (5.1). A modificação da gravidade não apresenta nenhuma incoerência com o caso do buraco negro com monopolo para a relatividade geral, como pode ser visto na figura 5.3, onde estão desenhadas (e superpostas) as curvas para $\psi_0 = 0$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 10$ e $n = 50$. No gráfico fica claro que conforme o horizonte de eventos se aproxima da posição onde está sendo calculada a energia esta aumenta assintoticamente.

A temperatura e a energia locais nos mostram até aqui que há pouca ou nenhuma diferença entre utilizar uma modificação de grau 1 ou de grau 30 ou 40. Em [29] foi calculado que o buraco negro de

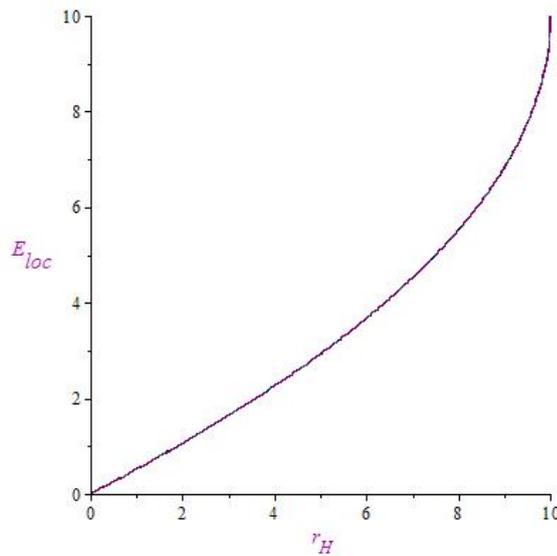


Figura 5.3: Energia local em função de r_H para o caso clássico de Schwarzschild e $n = 3$, $n = 4$, $n = 10$ e $n = 50$ com $\psi_n = 0.2 \cdot 10^{-2n}$.

Schwarzschild com monopolo apresenta uma temperatura crítica de $T_c^S = 0.01836$ enquanto o caso com modificação da gravidade de grau $n = 1$ a temperatura crítica será $T_c^{GM} = 0.02067$. O gráfico 5.1 nos mostra que se variarmos o grau de $n = 2$ até $n = 30$ a diferença entre as temperaturas críticas será de apenas 0,000032. Apesar de nos mostrar que há pouca variação entre as quantidades termodinâmicas para diferentes graus da modificação radial isso pode ser interessante pois, pelo menos para este problema específico, não estão descartadas teorias que contenham potências mais altas de r . Em princípio, todos os graus são permitidos fisicamente nesta análise.

5.4 Calor Específico, Estabilidade e Transições de Fase

Neste capítulo descrevemos até aqui como as relações análogas entre a gravitação e a termodinâmica se transformaram, com o desenvolvimento de uma teoria semi-clássica [6]–[7], em uma relação amplamente aceita em que a área do buraco negro corresponde de fato a sua entropia e conseqüentemente, sua gravidade superficial é responsável por mensurar a temperatura que a radiação emitida pelo buraco negro terá. Apesar de estarmos longe de testar esses resultados experimentalmente, a aparente falta de incoerências no modelo teórico e em sua aplicação a diversos casos de interesse [4] fazem com que ele seja amplamente aceito.

No entanto, o desenvolvimento de conceitos teóricos complexos como estes (conceitos que colocam quantidades geométricas em igualdade a quantidades termodinâmicas) dá vazão a uma série de especulações e discordâncias entre os físicos. Um dos pontos críticos dessas especulações está relacionado ao calor específico e a estabilidade dos buracos negros. A solução de Schwarzschild, por exemplo, tem uma capacidade térmica negativa se a calcularmos em termos da temperatura de Hawking e da massa,

$$C_H = \left(\frac{dE}{dT_H} \right) = -2\pi r_H^2. \quad (5.27)$$

Apesar de ser uma característica genérica de sistemas gravitacionais e também de ser esperado pela relação entre massa e temperatura - quanto maior a massa menor a temperatura - esse efeito é considerado como sinal de que o sistema seja instável [57]. Para entender essa instabilidade lembremos do exemplo da seção (5.1) que usamos como analogia para o processo de criação e aniquilação de partículas em torno de um buraco negro. Por ser um processo quântico, ele está sujeito a sofrer flutuações que podem aumentar (ou diminuir) ligeiramente a quantidade de energia perdida. Energia perdida equivale à diminuição de massa (e de tamanho) o que, para um buraco negro de Schwarzschild, gera aumento de sua temperatura. Dessa forma, quanto mais ele irradia, menor fica e mais quente fica, saindo facilmente do equilíbrio termodinâmico e sendo, portanto, instável. Se tentarmos analisar a capacidade térmica localmente, um fato interessante ocorre; a capacidade térmica tem um valor negativo para pequenos horizontes de eventos e se torna positiva conforme este aumenta. No entanto, ela se aproxima rapidamente de zero quando $r_H \rightarrow r$. Utilizando as equações (5.22) e (5.27), encontramos

$$C_{loc}^S = 4\pi \frac{r_H^2 (r - r_H)}{3r_H - 2r}. \quad (5.28)$$

A figura 5.5 nos mostra a variação da capacidade térmica em relação ao horizonte de eventos para $r = 2$, $r = 10$ e $r = 20$. Nela vemos qual seria a capacidade térmica observada por alguém nestas posições para diferentes valores do horizonte de eventos. É importante notar que, apesar de termos uma situação

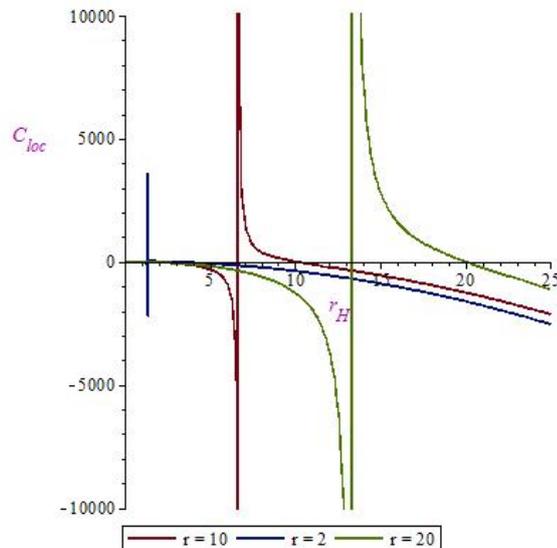


Figura 5.4: Capacidade Térmica Local em função de r_H para o caso clássico de Schwarzschild com $r = 2$, $r = 10$ e $r = 20$.

diferente para diferentes horizontes, não podemos deixar de lembrar que essa é uma quantidade medida localmente. As questões conceituais que envolvem a ideia de uma capacidade térmica local ainda não estão claras, mas o fato de um observador a uma distância determinada do buraco negro observar uma situação não quer dizer, necessariamente, que esta seja uma condição de estabilidade genérica para buracos negros pequenos ou grandes, como afirmado em [29]. Como podemos ver nas três curvas demonstradas, o que acontece é que a mudança de uma capacidade térmica negativa para uma positiva acontece conforme o horizonte de eventos se aproxima da posição onde estamos calculando. Sendo assim, o que estamos

observando é melhor caracterizado como uma demonstração da existência de uma "transição de fase observável", em que a posição em que estamos observando o horizonte será determinante para nós sabermos onde está essa transição. Se observamos o que acontece com a capacidade térmica independente da posição (mas diretamente correlacionada com a termodinâmica clássica), somos levados a acreditar que esta seja sempre negativa e que o buraco negro sempre obedeça a condição de *aumento (diminuição) de massa = queda (aumento) de temperatura*. Observando a capacidade térmica localmente vemos um fenômeno estranho; a capacidade térmica pode ser negativa ou positiva dependendo da posição do observador e do tamanho do horizonte de eventos. Quando o horizonte de eventos se encontra próximo a posição onde escolhemos calcular a capacidade esta assume descontinuamente um valor positivo que rapidamente se aproxima do zero quando $r_H = r$. Apesar de causar estranhamento quando tratada nesses termos, essa transição de fase também é observada em buracos negros com carga e momento angular mesmo quando tratada independentemente da posição [58].

5.4.1 O caso com Monopolo Global em Teorias f(R)

Introduzimos o assunto da estabilidade e das transições de fase no contexto da solução de Schwarzschild com o intuito de demonstrar o problema de interpretação que surge quando passamos de uma capacidade térmica que só depende do parâmetro de massa (ou horizonte de eventos) para uma que dependa também da posição. No problema central desta tese não temos a possibilidade de obter as quantidades termodinâmicas de forma independente da posição por isso temos a necessidade de estar constantemente comparando-o com a solução de Schwarzschild. Fazemos isso com a intenção de demonstrar que, apesar de encontrarmos efeitos interessantes e coerentes nessa análise, todos devem ser observados com cuidado para que não sejam interpretados como características gerais e globais da configuração.

Utilizaremos aqui a relação

$$C_{loc} = \left(\frac{dE_{loc}}{dT_{loc}} \right)_r = \left(\frac{dE_{loc}}{dr_H} \cdot \left(\frac{dT_{loc}}{dr_H} \right)^{-1} \right)_r \quad (5.29)$$

mantendo a posição r fixa. Utilizando a expressão 5.23 e a 5.26 encontramos a expressão

$$C_{loc} = \frac{H(r_H, r, \eta, n)}{W(r_H, r, \eta, n)}, \quad (5.30)$$

onde

$$H(r_H, r, \eta, n) = 2\pi r_H^2 (1 - 8\pi G\eta^2 - (n+1)\psi_n r_H^n) \times [r(1 - 8\pi G\eta^2 - \psi_n r^n) - r_H(1 - 8\pi G\eta^2 - \psi_n r_H^n)], \quad (5.31)$$

$$W(r, \eta, n) = \frac{r_H}{2} (1 - 8\pi G\eta^2 - (n+1)\psi_n r_H^n)^2 - (1 - 8\pi G\eta^2 + (n^2 - 1)\psi_n r_H^n) (r(1 - 8\pi G\eta^2 - \psi_n r^n) - r_H(1 - 8\pi G\eta^2 - \psi_n r_H^n)). \quad (5.32)$$

O caso clássico é recuperado para os parâmetros $\psi_n = \eta = 0$ e o caso estudado em [29] é recuperado para $n = 1$. Assim como no caso local para a solução de Schwarzschild, existe uma variação do sinal da capacidade térmica descontínua (para todos os n 's). Verificamos isso na figura 5.6 abaixo.

Avaliando as curvas progressivamente de $n = 2$ até $n = 40$ observamos que a única curva que é possível distinguir das demais é a curva para $n = 2$. As demais curvas se aproximam cada vez mais do

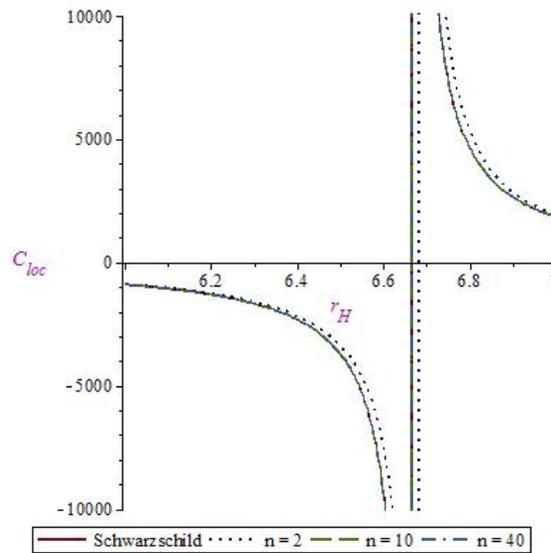


Figura 5.5: Capacidade Térmica Local em função de r_H com $n = 2$, $n = 10$ e $n = 40$, com e sem a modificação da gravidade.

caso clássico até o ponto em que se tornam superpostas. A análise da estabilidade do buraco negro feita para a solução de Schwarzschild se aplica novamente, se observarmos o que acontece quando variamos os graus n mantendo o horizonte fixo para a análise da capacidade térmica e também se modificarmos o horizonte de eventos com n fixo, analisando os gráficos em função da posição.

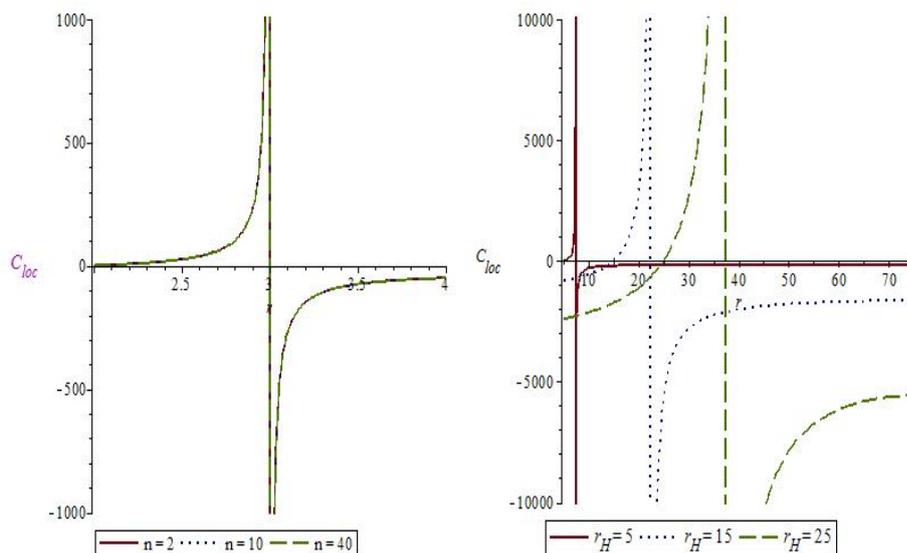


Figura 5.6: Capacidade Térmica Local em função de r para $n = 2, 10$ e 40 (esq.) com $r_H = 2$ e $n = 10$, com $r_H = 5, 15, 25$ (dir.).

Nos gráficos acima vemos novamente a ocorrência de uma transição de fase observável, que varia de posição de acordo com o tamanho do buraco negro mas que tem o mesmo comportamento qualitativo, apesar de se tornar quantitativamente mais "severa" conforme aumentamos o horizonte de eventos. No gráfico da esquerda, o eixo horizontal começa justamente na posição escolhida para o horizonte de eventos.

Assim, próximo ao horizonte, temos uma capacidade térmica positiva e conforme nos afastamos dele passamos pela região onde ocorre a transição e a capacidade se torna negativa tendendo a um valor constante. No gráfico da direita precisamos observar apenas os pontos maiores que cada horizonte de eventos analisados, vendo assim um comportamento qualitativamente idêntico entre buracos negros de diversos tamanhos com diferentes graus de modificação. É natural que as curvas estejam invertidas em relação a figura 5.4 para o caso de Schwarzschild pois nela a variável escolhida foi o horizonte de eventos, mantendo a posição fixa.

A partir da análise feita neste capítulo concluímos que o que ocorre em torno do buraco negro com monopolo global e a modificação de grau n é uma transição de fase termodinâmica local. A interpretação das consequências dessa transição ainda são incertas, mas a comparação com o caso de Schwarzschild nos indica que não há razão para afirmar que o buraco negro será instável dependendo de seu tamanho. Conforme aumentamos o horizonte de eventos a capacidade térmica tem um comportamento contínuo até atingir as proximidades da posição r , sofrendo uma transição assintótica para valores negativos. Por outro lado, conforme nos afastamos do horizonte de eventos observamos que a capacidade térmica assume um valor negativo constante, assim como a capacidade térmica não-local associada a solução de Schwarzschild (equação (5.27)). Dessa forma, não é possível excluir (a partir da análise de estabilidade termodinâmica) modelos com potências maiores de r no fator de modificação da gravidade estudado nesta tese, mas foi possível demonstrar que essa capacidade térmica local tem um comportamento qualitativamente igual para buracos negros maiores. Além disso, podemos afirmar também que quanto maior for o buraco negro mais "severa" será a transição de fase, no sentido de que a capacidade térmica assumirá valores mais negativos passando pela mesma descontinuidade. Um tratamento global se torna imprescindível para que avancemos na interpretação desses resultados e na tentativa de determinar quais parâmetros podem limitar a escolha da teoria $f(R)$ mais adequada para a descrição da gravidade. Além disso, uma compreensão mais aprofundada da relação entre gravidade, termodinâmica e a teoria quântica se mostra fundamental para a determinação do significado de transições de fase e estabilidade termodinâmicas no contexto de buracos negros [59].

Capítulo 6

Conclusões e Perspectivas

Neste trabalho nos propusemos a estudar as características termodinâmicas de um buraco negro que contivesse um monopolo global em uma classe específica de teorias $f(R)$. A partir da sugestão dada por Barriola-Vilenkin em seu artigo de 1989 de que a métrica de um monopolo global poderia ser entendida (quando se considerasse o termo de massa) como um cenário típico de buraco negro, associando às análises feitas por Caramês et al. [22] e Man et al. [29], pudemos verificar as implicações de se considerar este cenário em uma classe de teorias $f(R)$ mais ampla e obter assim resultados interessantes.

No capítulo 2 fizemos uma breve revisão das características gerais das teorias de modificação da gravidade $f(R)$, descrevendo suas motivações advindas de teorias e observações cosmológicas, principalmente pela recente descoberta da expansão acelerada do universo que ainda necessita de uma explicação teórica convincente. Nos concentramos então em desenvolver as equações de campo no formalismo da métrica para cenários esféricamente simétricos no vácuo com o intuito de introduzir os mecanismos que usamos para obter a solução monopolo global-buraco negro.

Ainda como revisão, introduzimos o conceito de defeitos topológicos no capítulo 3, utilizando exemplos diversos, como o de materiais ferromagnéticos, para descrever o processo de quebra espontânea de simetria. Esse processo também pode ocorrer em sistemas cosmológicos através do mecanismo de Kibble, que descrevemos principalmente para a formação de cordas cósmicas e monopolos globais. Finalmente, introduzimos uma breve revisão da análise feita por Caramês et al. dos efeitos gravitacionais associados a esse tipo de defeitos topológicos, demonstrando a modificação que ocorre no desvio da luz quando introduzimos a modificação nas teorias de gravidade.

Iniciamos então, no capítulo 4, a caracterizar a solução esféricamente simétrica com o termo de massa como uma solução de buraco negro. Para isso, resolvemos detalhadamente as equações de campo utilizando aproximações de campo fraco e a modificação da gravidade determinada pela definição $df(R)/dR = F(R) = 1 + \psi_n r^n$. Fazendo uma revisão histórica do desenvolvimento da solução de Schwarzschild e do processo de aceitação como um modelo teórico válido motivamos a inclusão de nossa solução nessa categoria. Confirmando a existência de um horizonte de eventos para todos os graus n 's e demonstrando que a curvatura recupera as características da solução clássica chegamos ao objetivo central da tese, estudado no último capítulo.

Neste último capítulo analisamos as características termodinâmicas do buraco negro com monopolo global na classe de teorias $f(R)$ escolhida. Introduzimos inicialmente a termodinâmica clássica de buracos negros e descrevemos, por analogia com o movimento de espelhos, o mecanismo de Hawking que possibilita a emissão de partículas e a criação de uma temperatura. O cálculo da temperatura de Hawking associado às aproximações que utilizamos nas soluções das equações de campo nos levou à uma análise local das quantidades termodinâmicas, como a energia, a capacidade térmica e a energia livre. Nesse ponto testamos as variações possíveis no parâmetro de modificação da gravidade e no grau n , chegando a importante conclusão de que, nesta análise - não importa qual o grau escolhido ou o valor da constante ψ_n - encontraremos o mesmo comportamento termodinâmico. Encontramos novamente um comportamento característico de uma transição de fase e interpretamos esse resultado a partir das limitações que um tratamento local proporciona. Nesse sentido, entendemos que a transição de fase local acontece em uma região específica sempre muito próxima ao horizonte de eventos que indica um comportamento extremo, natural, das características termodinâmicas do entorno do buraco negro, não caracterizando necessariamente uma instabilidade do modelo. Essa instabilidade só poderia ser confirmada através de uma análise global do sistema, o que ainda não é possível com as soluções que encontramos. Utilizamos a comparação com a solução clássica de Schwarzschild para confirmar essas interpretações mas o trabalho aqui apresentado motiva a tentativa de encontrar soluções exatas e ainda de estender a análise para modificações mais complexas das teorias de gravidade, pois demonstramos que funções radiais com graus elevados evam à características muito próximas às encontradas no caso clássico, possibilitando a inclusão de funções polinomiais genéricas na função $F(R) = df(R)/dR$.

Finalmente, a principal perspectiva diretamente relacionada a esse trabalho é um entendimento mais profundo e completo do que significa e de que efeitos podem ser gerados por uma transição de fase local em torno do buraco negro. Nesse sentido, seria interessante considerar cenários em que houvesse a inclusão de carga e momento angular além de matéria sendo atraída pelo buraco negro. Cenários como esse são extremamente complexos e em geral só podem ser tratados com a ajuda de simulações computacionais, o que pode ser benéfico pois poderíamos generalizar para uma classe mais ampla de teorias $f(R)$ além de obtermos, possivelmente, soluções exatas. Além disso, é sempre importante lembrar, que os conceitos aqui utilizados como motivação para o cenário estudado (modificação da gravidade, defeitos topológicos, temperatura de Hawking) ainda são modelos teóricos e quaisquer análises que nos levem a um entendimento maior desses modelos e de suas possíveis aplicações em modelos reais são de grande utilidade para o avanço não só da física teórica, como de algumas das questões mais importantes da física como um todo, como a interação entre gravitação e física quântica.

Referências Bibliográficas

- [1] R. C. Tolman, Phys. Rev. 35(1930)904; R. C. Tolman, Proc. Natural Academy of Sciences USA. (1928).
- [2] K. Schwarzschild, Reimer, Berlin 1916, S. 189 ff. Sitzungsberichte der Königlich-Preussischen Akademie der Wissenschaften, (1916).
- [3] T. Jacobson, Utrecht preprint THU-96/27, (1996).
- [4] P. C. W. Davies, Rep. Prog. Phys., Vol. 41, (1978).
- [5] J. D. Bekenstein, Phys. Rev. D 7 2333, (1973).
- [6] J. M. Bardeen;B. Carter; S. W. Hawking, Communications in Mathematical Physics 31, (1973), no. 2, 161–170.
- [7] S. W. Hawking, Nature 248, 30 - 31, (1974).
- [8] R. M. Wald, [hep-th] arXiv:gr-qc/9912119, (1999).
- [9] R. G. Cai, L. M. Cao, N. Ohta, J. High Energy Phys. 1004, (2010).
- [10] W. Kim, E. J. Son, M. Yoon, J. High Energy Phys. 0804 (2008).
- [11] Y. S. Myung, Y. Kim, Y. Park, Phys. Rev. D78, 084002, (2008).
- [12] A. Lala, D. Roychowdhury, Phys. Rev. D86, 084027, (2012).
- [13] A. de la Cruz-Dombriz, A. Dobado, A. L. Maroto, arXiv:0907.3872 [gr-qc] (2009).
- [14] H. A. Buchdahl, Mon. Not. R. astr. Soc., 150, 1-8, (1970).
- [15] H. Weyl, Ann. Phys. 59, 101 (1919).
- [16] A. S. Eddington, **The Mathematical Theory of Relativity**, Cambridge University Press, Cambridge, (1923).
- [17] S. Perlmutter et al., Astrophys. J. 517, 565 (1999)
- [18] P. Astier et al. (SNLS, Astron. Astrophys. 447, 31 (2006).
- [19] D. J. Eisenstein, et al. (SDSS), 2005, Astrophys. J. 633, 560 (2005).

- [20] A. G. Riess et al. (Supernova Search Team), *Astron. J.* 116, 1009 (2004).
- [21] D. N. Spergel, et al. (WMAP), *Astrophys. J. Suppl.* 170, 377 (2007).
- [22] T. R. P. Caramês, E. R. Bezerra de Mello, M. E. X. Guimarães, *Mod. Phys. Lett. A* (2011).
- [23] A. Vilenkin e E. P. S. Shellard, **Cosmic Strings and Other Topological Defects**, Cambridge University Press, Cambridge, England, (1994).
- [24] N. D. Mermin, *Rev. Mod. Phys.* 51, 591 (1979).
- [25] A. Barros e C. Romero, *Phys. Rev. D* 56, 6688 (1997).
- [26] M. Barriola e A. Vilenkin, *Phys. Rev. Lett.* 63, (1989).
- [27] J. Man, H. Cheng, *Physical Review*, D87, 044002, (2013).
- [28] G. E. Volovik e V. P. Mineyrov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz. (CCCP)*, 72, 2256 (1977).
- [29] J. Man e H. Cheng, *Physical Review*, D87, 044002, (2013).
- [30] R. Utiyama e B. S. DeWitt, *J. Math. Phys.* 3, 608 (1962).
- [31] K. S. Stelle, *Phys. Rev. D* 16, 953 (1977).
- [32] N. D. Birrell e P. C. W. Davies, **Quantum Fields in Curved Spacetime** (Cambridge University Press, Cambridge) (1982).
- [33] G. A. Vilkovisky, *Class. Quant. Grav.* 9, 895 (1992).
- [34] A. A. Starobinsky, *Phys. Lett.* B91, 99 (1980).
- [35] R. H. Brandenberger, eprint gr-qc/921004 (1992).
- [36] B., J. Shahid-Saless, *Math. Phys.* 31, 2429 (1990).
- [37] F. Zwicky, *Helv. Phys. Acta*, 6, 110, (1933).
- [38] F. D. Kahn e L. Woltjer, *ApJ*, 130, 705, (1959).
- [39] C. Brans e R. H. Dicke, *Phys. Rev.* 124, 925, (1961).
- [40] S. Weinberg, *Reviews of Modern Physics*, 61, (1989).
- [41] S. M. Carroll, *Living Rev. Relativity* 4, (2001).
- [42] S. M. Carroll, V. Duvvuri, M. Trodden e M. S. Turner, *Phys. Rev. D* 70, 043528 (2004).
- [43] V. Faraoni, arXiv:0810.2602 [gr-qc] (2008).
- [44] R. P. Woodard, *Lect. Notes. Phys.* 720, 403, (2007).
- [45] S. Capozziello e M. Francaviglia, *Gen. Rel. Grav.*, 40, 357, (2008).

- [46] A. Nunez e S. Solganik, [arXiv:hep-th/0403159]
- [47] L. Pogosian e A. Silvestri, Phys. Rev. D 77, 023503, (2008).
- [48] J. Khoury e A. Weltman, Phys. Rev. D 69, 044026, (2004).
- [49] G. Toulouse e M. Kléman, J. Phys. Lett., 37, L-149 (1976).
- [50] G. E. Volovik e V. P. Mineyrov, Zh. Eksp. Teor. Fiz. (CCCP), 72, 2256 (1977).
- [51] J. Goldstone, Nuovo Cim. 19, 154, (1961).
- [52] T. W. B. Kibble, J. Phys. A 9, 1387 (1976).
- [53] A. Vilenkin, Phys. Rep. 121, 263 (1985).
- [54] D. Bailin e S. Love, **Introduction to Gauge Field Theory**, Adam Hilger Bristol and Boston, (1986).
- [55] L. D. Landau e E. M. Lifshitz, **The Classical Theory of Fields**, Vol. 2, 4th edition, Butterworth-Heinemann, (1975).
- [56] P. C. W. Davies, **About Time; Einstein's Unfinished Revolution**, Simon and Schuster Paperbacks, (1995).
- [57] S. Hawking, Phys. Rev. D 13, 191, (1976).
- [58] V. P. Frolov e I. D. Novikov, **Black Hole Physics, Basic Concepts and New Developments**, Kluwer Academic Publishers, (1998).
- [59] G. J. Stephens e L. B. Hu, [arXiv:gr-qc/0102052v1].
- [60] A. Einstein, Annalen der Physik 6 (17): 132?148, (1905a).
- [61] A. Einstein, Königlich Preussische Akademie der Wissenschaften: 844?847, (1915).
- [62] S. Chandrasekhar, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 95, pp. 207–225, (1935).
- [63] J. R. Oppenheimer e G. M. Volkoff, Physical Review 55 (4): 374?381, (1939).
- [64] L. Smarr, Phys. Rev. Lett. 30 71, (1973).
- [65] R. Penrose, Nuovo Cim. 1 Special No 252, (1969).
- [66] R.M. Wald, **General relativity**, University of Chicago Press, (1984).