



INSTITUTO DE FÍSICA

Universidade Federal Fluminense

**Movimento de partículas teste no
espaço-tempo de um monopolo global
massivo em gravidade $f(R)$**

Tiago de Oliveira Rosa

Niterói

Outubro, 2014

Tese de Doutorado

**Movimento de partículas teste no
espaço-tempo de um monopolo global
massivo em gravidade $f(R)$**

Tiago de Oliveira Rosa

Tese apresentada à Universidade Federal Fluminense
como requisito parcial exigido pelo Programa de Pós-
Graduação em Física, para a obtenção do Título de
Doutor em Física.

Orientadora: Profa. Dra. Maria Emília Xavier Guimarães

Niterói

Outubro, 2014

R788 Rosa, Tiago de Oliveira
Movimento de partículas teste no Espaço-Tempo de um
monopolo global massivo em gravidade $f(R)$ / Tiago de Oliveira
Rosa ; orientadora: Maria Emília Xavier Guimarães. --
Niterói, 2014.
72 p. : il.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal Fluminense,
Instituto de Física, 2014.
Bibliografia: p. 58-62.

1.GRAVITAÇÃO. 2.GRAVIDADE $F(R)$. 3.DEFEITO TOPOLÓGICO
GRAVITACIONAL. 4.DEFLEXÃO DA LUZ. I.Guimarães, Maria Emília
Xavier, Orientadora. II.Universidade Federal Fluminense.
Instituto de Física, Instituição responsável. III.Título.

CDD 530.11

Dedicatória

Aos meus pais.

Agradecimentos

Aos meus pais e meus irmãos por tudo que me ensinaram e por me apoiarem em meu caminho, sempre acreditando e me dando forças.

A Patrícia Camilo, minha namorada, por me apoiar e estar ao meu lado.

Aos meus amigos de infância que considero como irmãos, que acompanharam todas as etapas na qual passei durante esses 4 anos: Cristiano, Gabriel, Iago e Pedro.

Aos amigos que fizeram parte dessa longa trajetória, tornando-a mais fácil, seja no Rio ou em Minas: Ana Paula, André, Denis, Leandro, Luana, Márcio, Maria Elisa, Raphael e Sérgio.

Aos amigos do Instituto de Física da UFF, pelo companheirismo e convivência, seja nos estudos ou na descontração: Alberto, Anderson, Bárbara, Bruno, Fernando, Gabriel, Gildário, Jeannie, Leonardo, Orlenys, Rafael Aboo, Richard, Rhonald, Rodrigo e Thiago Corrêa.

À Flaviano e Estefani, com quem tive o privilégio de morar junto durante boa parte dessa jornada, passando pelas dificuldades de encontrar e montar um apartamento do zero e pela ótima convivência que tivemos.

Ao professor Roberto Bechara, por ter confiado e aceitado ser nosso fiador.

Aos professores Dalber, Daniel Rocco e Soriano, pela ótima companhia nos dias de sexta.

A Maria Emília, minha orientadora, por todo apoio e ajuda neste trabalho.

Ao professor Roberto Meigikos por me mostrar as dificuldades do estudo experimental.

Aos professores Ioav Waga, Luis Esteban Oxman e Rodrigo Sobreiro que me deram a oportunidade de aprender e crescer através dos ótimos cursos ministrados.

Aos funcionários do IF, em especial a Luci por sempre manter o gabinete limpo e em ótimo estado para os estudos.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pela bolsa de estudos concedida.

”Juro usar o meu conhecimento científico para o bem da humanidade. Prometo jamais causar dano a pessoa alguma na minha busca por sabedoria. Serei corajoso e atento na minha busca de maiores conhecimentos a respeito dos mistérios que nos cercam. Não usarei o conhecimento científico em proveito próprio, nem o cederei aos que procuram destruir o maravilhoso universo em que vivemos. Se eu quebrar este Juramento, que a beleza e a maravilha do universo permaneçam eternamente ocultas para mim”.

George e o segredo do Universo

Resumo

Nesta tese analisamos o movimento de partículas massivas e fótons na presença de um monopolo global, no contexto de uma classe particular das teorias $f(R)$ da gravitação. As equações de campo são expressas em termos da função $F(R)=df(R)/dR$. A simetria esférica do problema nos permite expressar tal função como $F(R(r)) = F(r)$. Para desenvolver nossa análise, adotamos uma forma específica para $F(r)$, assumindo uma pequena perturbação sobre a Relatividade Geral e assim obtemos as equações de campo modificadas e suas soluções no limite do campo fraco para partículas teste e para a deflexão da luz.

Abstract

In this thesis we analyze the motion of massive particles and photons in the presence of a global monopole, in the context of $f(R)$ gravity. The field equations are expressed in terms of $F(R) = df(R)/dR$ function. Since we are dealing with a spherically symmetric system, we assume that $F(R(r)) = F(r)$ is a function of the radial coordinate only. To achieve this goal, we adopt a specific form of $F(r)$, assuming that it is a small perturbation of the General Relativity Theory and thus obtain the modified field equations and their solutions in the weak field limit for particle test and deflection of light.

Sumário

Lista de Figuras	xi
Introdução	1
1 Teorias $f(\mathbf{R})$ da gravitação	5
1.1 Equações de campo modificadas	6
1.2 Condições de estabilidade sobre as funções $F(\mathbf{R})$	8
1.3 Soluções esfericamente simétricas em teorias $f(\mathbf{R})$ no vácuo . .	11
2 Quebra Espontânea de Simetria e Defeitos Topológicos	13
2.1 QES	14
2.2 QES discreta	16
2.3 QES contínua global	18
2.4 Defeitos topológicos e o universo primordial	20
2.5 Paredes de domínio	24
2.6 Monopolos globais	25
3 Monopolo global na Teoria da Relatividade Geral e em Teorias $f(\mathbf{R})$	27
3.1 Efeitos gravitacionais do monopolo global em RG	28

3.2	Efeitos gravitacionais do Monopolo Global em teorias $f(R)$ - Equações de campo	32
3.3	Soluções no regime de campo fraco	33
3.4	Movimento clássico de uma partícula teste	37
3.5	O movimento tangencial	39
3.6	O surgimento de uma força extra	41
4	Deflexão da luz e monopolo global em $f(R)$	43
4.1	Movimento clássico de uma partícula teste	45
4.2	A equação de movimento da luz	47
4.3	Equação de órbita da luz	48
4.4	O ângulo de deflexão da luz	52
	Conclusão	56
	Referências Bibliográficas	57

Lista de Figuras

2.1	Ferromagneto de Heisenberg. a) $T > T_c$. b) $T < T_c$	15
2.2	Energia livre de um sistema ferromagnético em função da magnetização	16
2.3	Potencial mínimo para $m^2 < 0$	17
2.4	Gráfico do potencial de um campo escalar complexo, conhecido como chapéu mexicano, exibindo QES.	19
2.5	Gráfico do potencial efetivo em função do campo para diferentes valores da temperatura.	22
2.6	(a) Domínios de puro vácuo com valores diferentes (círculos brancos) cercados por uma região de falso vácuo (cinza) (b) O crescimento dos domínios faz com eles se juntem em um domínio de puro vácuo cercado o falso vácuo e formando nessa região uma corda cósmica global.	23
2.7	Mecanismo de Kibble para a produção de paredes de domínio.	24
4.1	Deflexão angular da luz, com observador e fonte a distância infinita da lente.	52
4.2	Deflexão da luz para observador e fonte a distância finita da lente.	53

Introdução

Teorias que envolvem gravidade modificada têm recebido grande atenção, devido a certas limitações referentes à teoria da Relatividade Geral (RG). As teorias $f(R)$ estão entre as teorias alternativas à RG de Einstein que envolvem funções não lineares do escalar de curvatura R . Logo que a RG foi finalizada, tentativas de sua generalização foram propostas. O início dessas modificações se deu em 1919 com Weyl [1] e em 1923 com Eddington [2], ao considerar a inclusão de invariantes de curvatura de ordem superior na ação de Einstein-Hilbert.

No início dos anos 60, devido a teoria quântica, percebeu-se que a RG não era renormalizável e que, assim, não poderia ser quantizada convencionalmente. Em 1962, Utiyama e DeWitt mostraram que a renormalização em um loop necessitaria que a ação de Einstein-Hilbert fosse acrescida de um termo de curvatura de ordem superior [3]. Apesar de vários estudos teóricos procedentes de correções quânticas na gravitação e também em teorias de cordas apontarem para a necessidade de correções invariantes de maior ordem na ação gravitacional [4, 5], tais correções não foram estudadas mais a fundo pois acreditava-se que só seriam relevantes a situações de forte interação gravitacional, esperando ser desprezível em baixas energias. Por este motivo, essas correções foram consideradas importantes apenas em escalas

confinadas à escala de Planck, e consequentemente ao universo primordial [6, 7, 8], ou tentativas de se evitar singularidades cosmológicas e de buracos negros [9, 10].

Recentemente, um cenário inesperado para o universo tanto da análise astrofísica quanto cosmológica tem apontado para a necessidade de se considerar novas e desconhecidas formas de matéria, chamadas como matéria escura e energia escura [11, 12, 13, 14, 15]. A matéria escura possui a propriedade de se agregar com a matéria comum. Já o termo energia escura refere-se a uma desconhecida forma de energia que não se agrega como a matéria e seria responsável pela atual expansão acelerada do universo. Estima-se que nosso universo seja composto por 4,5 % matéria bariônica, 21,5 % de matéria escura e 74 % de energia escura.

Apesar de haver vários problemas observacionais que podem ser solucionados pela presença de matéria escura [16, 17], o mesmo não pode ser dito da energia escura. A presença da energia escura só seria justificada pelo crescimento acelerado do universo, sendo seu papel semelhante ao da constante cosmológica, que traz problemas ainda não resolvidos tanto para a gravitação quanto para interações em altas energias [18, 19]. A descoberta da expansão acelerada do universo em 1998 [20], serviu de grande motivação para se considerar, não só novos tipos de matéria, mas novas formulações da própria gravitação. Essas novas formulações podem vir em várias formas, mas os resultados teóricos já citados em Teorias de Campos a altas energias para explicar o período inflacionário indicam que a modificação da teoria pode ser necessária também para explicar essa aceleração atual em escalas cosmológicas. Muitos estudos acerca das propostas de novos modelos gravitacionais já foram e continuam sendo estudados, dentre eles podemos citar as teorias escalares-tensoriais proposta por Brans e Dicke em 1961 [21, 22],

teorias de branas [23, 24] e as teorias $f(R)$ [31] que são nosso foco nessa tese.

Inicialmente o universo se encontrava em um estado muito quente e denso, possuindo nesse estado um alto grau de simetria. Com a expansão do universo a temperatura foi diminuindo gradativamente, proporcionando assim transições de fase acompanhadas de quebras espontâneas de simetria (QES) [25, 26]. Os monopolos globais são defeitos topológicos que podem ter surgido devido a essas transições de fase quando há uma QES do grupo $SO(3)$ para o grupo $U(1)$. No contexto gravitacional os defeitos topológicos ainda não foram observados, mas seus efeitos no desvio da luz e possível produção de ondas gravitacionais a partir de sua dinâmica são pontos que motivam o seu estudo e consequências nos mais diversos contextos [27].

Os estudos sobre o campo gravitacional de um monopolo global, foram feitos em 1989 por Barriola e Vilenkin [28] no contexto da RG. Resolvendo as equações de Einstein nesse contexto, encontraram a métrica associada ao defeito. Foi observado entre outras coisas que o espaço-tempo apresenta um déficit de ângulo sólido, possibilitando assim o cálculo do desvio da luz que seria gerado pelo monopolo, indicando uma forma de detectá-lo. Além disso, mostraram que o monopolo global não exerce qualquer força gravitacional sobre partículas teste que se movam em sua vizinhança.

O estudo sobre o campo gravitacional de um monopolo global em teorias $f(R)$ foi realizado recentemente [29], e um dos resultados mais importantes está no fato de, ao contrário da teoria da RG, em $f(R)$ foi verificado que o monopolo global exerce força sobre uma partícula teste.

O objetivo principal desta tese é estudar o campo gravitacional de um monopolo global na teoria $f(R)$, levando em consideração o termo de massa do monopolo, desprezado anteriormente pelos autores de [29] por se considerar totalmente desprezível na escala astrofísica. Esse termo de massa pode

representar por exemplo um buraco negro dotado de um monopolo global.

No capítulo 1, faremos uma revisão a respeito das teorias $f(R)$ e analisaremos as principais características das equações de campo modificadas, focando nas soluções esfericamente simétricas no vácuo. No capítulo 2, apresentamos uma breve revisão do processo de QES, que nos leva a compreender a formação de defeitos topológicos em escala cosmológica. No capítulo 3, descreveremos o estudo do campo gravitacional associado ao monopolo global na teoria da RG e na teoria $f(R)$, desprezando em ambas o termo de massa. No capítulo 4, estudaremos o campo gravitacional do monopolo com o termo de massa, generalizando as equações para partículas teste e calculando explicitamente a deflexão da luz nesse cenário. Por fim, apresentamos os principais resultados dessa tese.

Capítulo 1

Teorias $f(R)$ da gravitação

Com a descoberta da expansão acelerada do universo e ao fato de associar esse expansão ao termo de energia escura [30], uma das primeiras idéias que surgiram para explicar esse fenômeno foi a de associar esse termo a uma energia de vácuo, que seria acrescentada à teoria através de uma constante cosmológica nas equações de Einstein. Porém, uma teoria com constante cosmológica prevê uma enorme discrepância entre a energia de vácuo para a Teoria Quântica de Campos e a cosmologia [18].

Essa discrepância associada à constante cosmológica motivou a busca por outras alternativas teóricas, tais como a de modificar a teoria da gravidade. Entre essas propostas podemos citar as teorias $f(R)$ [31].

A modificação da gravidade proposta numa teoria $f(R)$ consiste em substituir o escalar de curvatura na ação de Einstein-Hilbert por uma função arbitrária do mesmo. A consequência de uma generalização deste tipo na lagrangiana implicam em, tanto o formalismo variacional da métrica e o de Palatini para funções $f(R)$ não-lineares, conduzem a resultados distintos [31]. Mais tarde, levando em consideração correções na gravidade em escalas próximas à de Planck, considerou-se a possibilidade de que teorias deste tipo

acomodassem uma descrição consistente do processo inflacionário pelo qual o universo primordial teria passado [6]. Como uma alternativa viável à energia escura, as teorias $f(R)$ foram propostas mais recentemente [32, 33]. Outras possíveis aplicações das teorias $f(R)$, bem como suas consequências, podem ser encontradas de forma abundante na literatura [34, 35, 36, 37, 38, 39], entre outros.

1.1 Equações de campo modificadas

Como foi dito anteriormente, as teorias $f(R)$ vem de uma generalização direta da ação de Einstein-Hilbert,

$$S = \frac{1}{2k} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (1.1)$$

onde g é o determinante da métrica e $k \equiv 8\pi G$ é a constante de acoplamento gravitacional e R é o escalar de Ricci. Substituindo R por uma função arbitrária do mesmo, temos

$$S = \frac{1}{2k} \int d^4x \sqrt{-g} f(R). \quad (1.2)$$

Como já mencionado anteriormente, há dois formalismos variacionais possíveis de se usar para chegar às equações de campo de uma teoria de gravitação, o formalismo da métrica que adotaremos nesta tese e o formalismo de Palatini. No formalismo da métrica, considera-se a métrica $g_{\mu\nu}$ como sendo a única variável dinâmica independente, as conexões são assumidas como sendo as de Levi-Civita e as equações de campo são obtidas variando-se a ação com respeito à métrica. No segundo formalismo, considera-se não apenas a métrica como campo independente, mas também as conexões. Nesse caso, as equações de movimento são obtidas variando a ação com respeito a

estas duas variáveis. Na RG, as equações de campo obtidas a partir dos dois formalismos coincidem. O mesmo não ocorre numa teoria $f(R)$ [31, 34, 40].

Adicionando a ação de matéria à ação (1.1), temos

$$S = \frac{1}{2k} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + S_m(\psi, g_{\mu\nu}). \quad (1.3)$$

onde ψ representa os campos de matéria.

As equações de campo obtidas através da equação (1.3) são dadas por

$$F(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu F(R) + g_{\mu\nu} \square F(R) = kT_{\mu\nu}, \quad (1.4)$$

sendo $F(R) \equiv \frac{df(R)}{dR}$ e o tensor momento-energia associado a campos de matéria é dado por

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (1.5)$$

Tomando o traço da equação (1.4) obtemos

$$F(R)R - 2f(R) + 3\square F(R) = kT, \quad (1.6)$$

que é uma equação diferencial, relacionando o escalar de curvatura com o tensor momento-energia. Essa equação mostra que, para teorias $f(R)$ nesse formalismo, existe um grau de liberdade escalar extra associado ao campo gravitacional. Isso pode ser visto comparando a equação (1.6) com a equação de movimento de um campo escalar ϕ

$$\square \phi - \frac{dV(\phi)}{d\phi} = J, \quad (1.7)$$

onde V representa o potencial associado ao campo e J representa um termo de fonte qualquer. A partir das duas equações podemos observar que o

grau de liberdade escalar é representado por $F(R)$ (usualmente chamado de scalaron). Esse grau de liberdade pode ser responsável por algum tipo de processo inflacionário (dependendo da escala de energia estudada). Na escala cosmológica ele pode ser responsável pela atual expansão acelerada do universo.

Analisando a equação (1.4) podemos tentar escrever as equações de campo no formato das equações de Einstein com um tensor momento-energia efetivo que dependa do escalar de Ricci e de $f(R)$. Dessa forma, podemos redefinir a constante de Newton como $G_{eff} = \frac{G}{F(R)}$, que se torna a constante de acoplamento gravitacional efetiva. A redefinição dessa constante pode ser útil para estudar certas condições as quais uma determinada teoria $f(R)$ seja válida, como veremos a seguir. A utilização de um tensor momento-energia efetivo não é totalmente necessária nesse modelo, apesar de ser útil em teorias escalares-tensoriais, tais como teorias de Brans-Dicke [21]. Pode-se provar que as teorias $f(R)$ são equivalentes às teorias de Brans-Dicke com parâmetro $\omega = 0$ [29, 34].

1.2 Condições de estabilidade sobre as funções $F(R)$

Existem algumas condições que devem ser imposta sobre as teorias $f(R)$ para que assim se tornem modelos físicos viáveis. Essas exigências ocorrem devido ao grande sucesso da Relatividade Geral em descrever eventos onde a gravidade é fraca e também devido a enorme quantidade de dados que nos apontam uma determinada evolução cosmológica do universo. Ou seja, uma teoria $f(R)$ tem que reproduzir os resultados da Relatividade Geral no limite de campo fraco e ainda produzir um modelo realista de evolução cosmológica.

A primeira das condições que deve ser imposta é a de que $f'(R) = \frac{df}{dR} = F'(R)$ seja positivo. Essa condição pode ser entendida se tentarmos reescrever a equação (1.4) na forma das equações de Einstein, de onde obtemos

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{g_{\mu\nu}}{2}R = \frac{k}{F(R)} \left[T_{\mu\nu} + \frac{g_{\mu\nu}}{2}(f(R) - F(R)R + \nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \square)F(R) \right]. \quad (1.8)$$

Nessa equação podemos definir uma nova constante de acoplamento gravitacional,

$$G_{eff} = \frac{k}{F(R)} \quad (1.9)$$

que deve ser positiva para qualquer curvatura, para assim garantir o acoplamento usual do campo gravitacional com a matéria. Isso faz com que a função $F(R)$ tenha que ser necessariamente positiva. Se assumirmos o ponto de vista da Teoria Quântica de Campos, a positividade de $F(R)$ pode ser vista como a necessidade de evitar que o scalaron seja um ghost, o que geraria uma instabilidade no modelo [41].

Podemos analisar a equação (1.6) para assim identificar o potencial associado ao grau de liberdade escalar, reescrevendo-a como

$$\square F(R) + \frac{dV}{dF(R)} = \frac{kT}{3}. \quad (1.10)$$

Desta última equação podemos identificar o termo de massa como

$$\left. \frac{d^2V(F)}{dF^2} \right|_{F=F_{min}} = m_{(F)}^2, \quad (1.11)$$

a quantidade F_{min} pode ser interpretada como o regime em que a RG domina, ou seja, $F(R)_{min} = 1$. Por outro lado, para que as fases da evolução do universo sejam reproduzidas pela teoria, ela também deve se aproximar

da RG num regime de altas curvaturas, como ocorreu no início do universo [42]. Para isso, temos que considerar também que $f''(R) = F'(R) \ll 1$. Utilizando a equação (1.6), podemos identificar a forma do potencial relacionado ao scalaron e levando-se em consideração a aproximação citada, pode-se mostrar que

$$m_{(F)}^2 \approx \frac{1}{3F'(R)}. \quad (1.12)$$

Portanto, para que o campo escalar não seja um tachyon é preciso exigir que $F'(R) > 0$. Podemos também adotar uma interpretação mais direta sobre os efeitos gravitacionais da teoria, analisando as consequências de se considerar a equação (1.9) como a função que determina o acoplamento do campo gravitacional com a matéria. Como a quantidade varia com a curvatura, podemos analisar a variação da intensidade gravitacional a partir de sua derivada

$$\frac{dG_{eff}}{dR} = -\frac{F'(R)G}{F^2(R)}. \quad (1.13)$$

Assumindo que a primeira condição de estabilidade $F(R) > 0$ é respeitada, podemos ver que, exigir que $F'(R)$ seja positivo, é equivalente a exigir que a intensidade da interação gravitacional decresça com a curvatura. Essa exigência é necessária pois, do contrário, G_{eff} poderia crescer indefinidamente com a curvatura e o sistema não possuiria um estado fundamental.

1.3 Soluções esfericamente simétricas em teorias $f(R)$ no vácuo

Estamos interessados em estudar um caso específico de soluções para a equação (1.6) [43, 44]. Para o caso onde existe simetria esférica podemos escrever a métrica como

$$ds^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (1.14)$$

onde A e B são funções da coordenada radial somente.

Considerando um caso em que não há fontes, o tensor momento-energia é zero e a equação (1.6) se torna

$$F(R)R - 2f(R) + 3\Box F(R) = 0. \quad (1.15)$$

O escalar de curvatura correspondente é

$$R = \frac{1}{Ar^2} \left[1 - A + \left(\frac{B'}{B} - \frac{A'}{A} \right) r - \frac{1}{4} \frac{B'}{B} r^2 \left(\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A} \right) + \frac{1}{2} \frac{B''}{B} r^2 \right], \quad (1.16)$$

onde a $(') \equiv \frac{d}{dr}$.

Devido à simetria do problema, expressaremos as equações de campo em termos do scalaron $F(R)$, porém escrevendo-o como função da coordenada radial, $F(R) = F(r)$. Com isso ao invés de sugerirmos formas funcionais para $f(R)$, bastará propor um ansätze para $F(r)$. Isolando $f(R)$ na equação (1.15) e substituindo na equação (1.4) no vácuo, obtemos

$$\frac{FR_{\mu\mu} - \nabla_\mu \nabla_\mu F}{g_{\mu\mu}} = \frac{1}{4}(FR - \Box F). \quad (1.17)$$

Desde que a métrica dependa só de r, teremos um grupo de equações para $A(r)$, $B(r)$ e $F(r)$. Nesse caso ambos os lados são diagonais e independem

dos índices escolhidos. Este resultado independe do modelo $f(R)$ escolhido e é a forma mais direta de se obter as equações de campo. Deferenciando a equação (1.15) em relação a r , obtemos a seguinte relação de consistência

$$RF' - R'F + 3(\square F)' = 0, \quad (1.18)$$

que deve ser obedecida por qualquer solução de (1.17). A partir da equação (1.17) podemos verificar a combinação abaixo,

$$C_\mu = \frac{FR_{\mu\mu} - \nabla_\mu \nabla_\mu F}{g_{\mu\mu}}, \quad (1.19)$$

que é independente do índice μ e deste modo $C_\mu - C_\nu = 0$, para todos os índices μ, ν . Assim podemos obter duas equações de campo

$$2F \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + rF' \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - 2rF'' = 0, \quad (1.20)$$

$$\begin{aligned} -4B + 4AB - 4rB \frac{F'}{F} + 2r^2 B' \frac{F'}{F} + 2rB \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \\ -r^2 B' \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + 2r^2 B'' = 0. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Logo, definindo uma forma específica para a função $F(r)$ poderemos ver os efeitos de determinada modificação da gravidade nas equações de campo. Obtendo as soluções dessas equações podemos encontrar a forma do escalar de curvatura e, em princípio, obter o formato da função $f(R)$.

Capítulo 2

Quebra Espontânea de Simetria e Defeitos Topológicos

Simetria é uma característica que pode ser observada em certos objetos que mantêm uma certa invariância sob certas transformações, movimentos ou trocas. A quebra espontânea de simetria (QES) ocorre quando um sistema que é simétrico, passa de forma espontânea, para um estado não simétrico. A QES pode ocorrer nos mais variados sistemas físicos [45, 46].

Transições de fase podem quebrar simetrias existentes em um certo sistema. A quebra de simetria devido a transições de fase é um processo fundamental para a formação de defeitos topológicos.

Os defeitos topológicos já foram amplamente estudados em sistemas de matéria condensada, tais como cristais líquidos [26, 45]. Em cosmologia ainda não foi confirmado, mas é uma possibilidade bem razoável do ponto de vista físico [47, 48]. Existem basicamente três tipos de defeitos topológicos: paredes de domínio (superfícies de descontinuidade), vórtices (linhas extensas) e monopolos (objetos puntiformes).

Neste capítulo discutiremos os defeitos topológicos e seu processo de

formação no cenário cosmológico de forma geral. Porém, antes vamos revisar as QES brevemente.

2.1 QES

Para entender o processo de QES de um sistema simples, podemos utilizar como exemplo um sistema ferromagnético [49] que pode ser analisado pelo modelo desenvolvido por Heisenberg, que considera interações spin-spin. A hamiltoniana para o caso de um campo magnético igual a zero é dada por,

$$H = -\frac{1}{2}J \sum_{(i,j)} \sigma_i \sigma_j, \quad (2.1)$$

onde J é uma integral de interação, $\sum_{(i,j)}$ representa o somatório sobre os pares vizinhos (i, j) e σ_i o spin localizado na posição i . A hamiltoniana acima é uma grandeza escalar. Sendo assim, invariante sob rotações. Embora o sistema seja rotacionalmente invariante, isto ocorre apenas quando temos uma temperatura T maior que a temperatura crítica T_c (temperatura de Curie), em que os spins estão desordenados e o estado fundamental do sistema corresponde ao estado de magnetização zero ($M=0$). A partir do momento em que abaixamos a temperatura T a um valor menor do que T_c , os spins do corpo se alinham apontando para uma direção particular, adquirindo assim uma magnetização não nula M , que não é invariante sob rotações (Figura 2.1). Essa direção é escolhida espontaneamente pelo sistema, assim dizemos que a simetria foi espontaneamente quebrada.

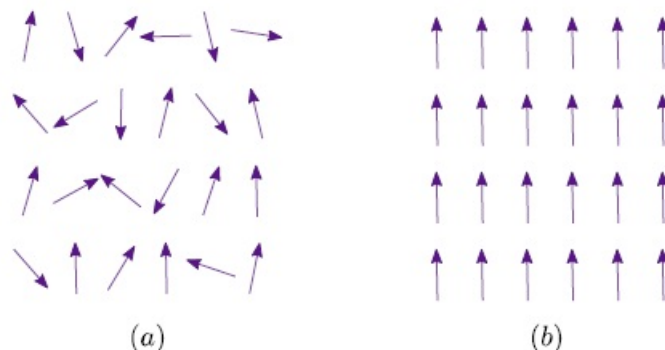


Figura 2.1: Ferromagneto de Heisenberg. a) $T > T_c$. b) $T < T_c$

Analisando a energia livre do sistema através da teoria do campo médio de Landau [50], pode-se mostrar que, no caso onde não há dependência espacial na magnetização, existe uma determinada temperatura crítica onde ocorre uma transição de fase e o sistema passa a ter magnetização não nula. A energia livre de um sistema ferromagnético isolado (sem campos magnéticos externos) pode ser escrito como

$$F = VN \left[\frac{T - T_c}{T_c} |M|^2 + \beta |M|^4 \right], \quad (2.2)$$

onde V é o volume, N a densidade de estados, T a temperatura e β uma constante positiva. Da equação acima temos que se $T > T_c$, F terá um mínimo quando $M=0$. Para $T < T_c$, o valor mínimo de F será quando $M \neq 0$. Assim, o primeiro caso nos mostra uma situação em que o estado fundamental é simétrico sob rotações. Enquanto, no segundo caso, a simetria é espontaneamente quebrada. A figura 2.2 serve de ilustração para este caso.

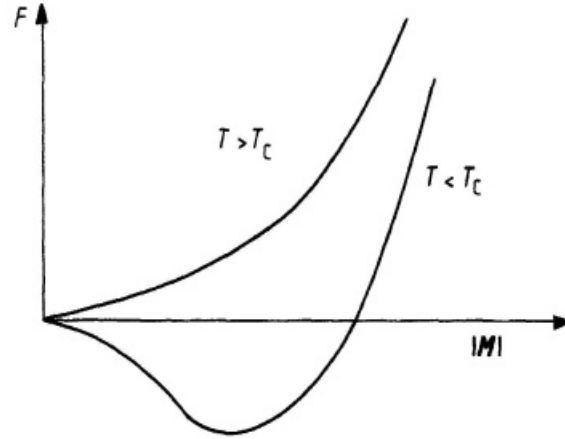


Figura 2.2: Energia livre de um sistema ferromagnético em função da magnetização

2.2 QES discreta

Nesse caso, consideramos uma lagrangiana que seja invariante sob transformações discretas, em que sua simetria interna deva ser quebrada por um campo escalar que tenha um valor não nulo no vácuo [51].

A lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - V(\phi), \quad (2.3)$$

onde o potencial V é

$$V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4. \quad (2.4)$$

Esta lagrangiana é invariante sob a transformação discreta

$$\phi \longrightarrow \phi' = -\phi. \quad (2.5)$$

Ou seja,

$$\mathcal{L}[\phi] = \mathcal{L}[-\phi].$$

O mínimo de energia é obtido minimizando-se $V(\phi)$. Desde que λ seja positivo, podemos ter dois casos possíveis, $m^2 > 0$ e $m^2 < 0$.

Para $m^2 > 0$ temos apenas um mínimo, que ocorre para $\phi = 0$ e portanto o estado fundamental é simétrico.

Para $m^2 < 0$, o potencial pode ser ilustrado pela figura 2.3, que apresenta dois estados fundamentais não nulos

$$\phi = \pm\phi_0$$

$$\phi_0 = \frac{m}{\sqrt{\lambda}}. \quad (2.6)$$

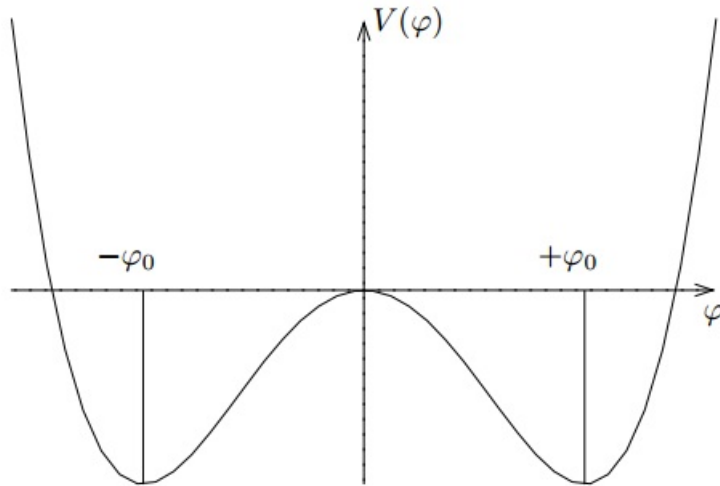


Figura 2.3: Potencial mínimo para $m^2 < 0$

Como nenhum dos dois valores de ϕ respeitam a simetria dada pela transformação (2.5), ao selecionar naturalmente um destes valores, a simetria do

sistema é espontaneamente quebrada. Definindo uma variável de campo que represente excitações em torno deste vácuo

$$\tilde{\phi} \equiv \phi - \phi_0, \quad (2.7)$$

cujo valor esperado do vácuo será

$$\langle 0 | \tilde{\phi}(x) | 0 \rangle = 0. \quad (2.8)$$

Já que temos uma função $\tilde{\phi}$, que mede flutuações em torno de ϕ_0 , é natural considerarmos que ao se escrever a lagrangiana em função desse termo a simetria $\tilde{\phi} \rightarrow -\tilde{\phi}$ não seja preservada, devido à quebra de simetria por reflexão,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \tilde{\phi})^2 - \frac{1}{2}m(\tilde{\phi})^2 - \lambda\phi_0(\tilde{\phi})^3 - \frac{1}{4}\lambda(\tilde{\phi})^4 - \frac{1}{4}m^2\phi_0^2. \quad (2.9)$$

Essa nova lagrangiana não exibe mais a simetria por reflexão, e o termo cúbico mostra que a simetria foi quebrada espontaneamente.

2.3 QES contínua global

Quando há uma quebra de simetria contínua, podemos estudar um sistema formado por campos escalares complexos, sendo a lagrangiana escrita como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^*)^2 - V(\phi, \phi^*), \quad (2.10)$$

no qual o potencial V é dado por

$$V(\phi, \phi^*) = m^2\phi\phi^* + \frac{\lambda}{4}(\phi\phi^*)^2. \quad (2.11)$$

A lagrangiana (2.10) é invariante sob transformações globais $U(1)$

$$\phi(x) \longrightarrow \phi'(x) = e^{i\alpha}(x). \quad (2.12)$$

Assim como feito anteriormente devemos analisar para $m^2 > 0$ e $m^2 < 0$. No caso em que $m^2 > 0$, temos um mínimo absoluto em $\phi = 0$. Quando $m^2 < 0$, temos um mínimo não nulo que satisfaz

$$|\phi| = \sqrt{\frac{-m^2}{2\lambda}} = \eta. \quad (2.13)$$

Este valor não é invariante sob a transformação global. O valor esperado para o vácuo deste potencial será dado por

$$\langle \phi \rangle = \eta e^{i\theta}. \quad (2.14)$$

Ao selecionar um valor específico do vácuo o campo quebra sua simetria pois o estado não é invariante sob a transformação de fase. Em princípio, o campo pode assumir qualquer valor que respeite a equação (2.14) e o vácuo é infinitamente degenerado, figura 2.4.

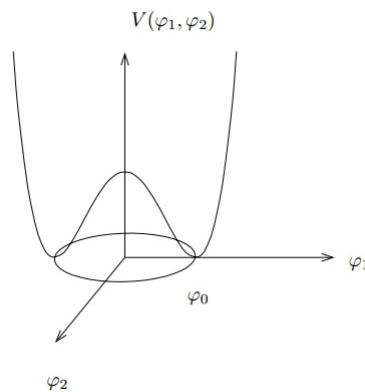


Figura 2.4: Gráfico do potencial de um campo escalar complexo, conhecido como chapéu mexicano, exibindo QES.

Considerando agora perturbações sobre o estado de vácuo e escolhendo $\theta = 0$, podemos representar ϕ como uma excitação em torno desse vácuo, ou seja

$$\phi = \eta + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2), \quad (2.15)$$

sendo ϕ_1 e ϕ_2 campos reais. Logo, substituindo (2.15) na lagrangiana (2.10) temos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2)^2 - \frac{\lambda}{2}\eta^2 \phi_1^2 + \mathcal{L}_{int}, \quad (2.16)$$

\mathcal{L}_{int} é o termo de interação que acomoda todos os termos cúbicos e de potências superiores em ϕ_1 e ϕ_2 . Podemos notar que o termo ϕ_1 , representa uma partícula massiva, sendo

$$m_1 = \sqrt{\lambda}\eta. \quad (2.17)$$

No entanto, ϕ_2 não é massivo. O campo ϕ_1 é conhecido como campo de Higgs e o campo ϕ_2 é conhecido como bóson de Goldstone [46].

A QES global exige o aparecimento de uma partícula com massa nula pelo Teorema de Goldstone.

2.4 Defeitos topológicos e o universo primordial

Durante as primeiras fases do universo, as componentes materiais estavam caracterizados por altos graus de densidade, temperatura e simetria [52]. Com o passar do tempo, houve um resfriamento do universo devido a sua expansão, e ao atingir uma temperatura crítica, $T = T_c$ ele pode sofrer uma

transição de fase. A origem dos defeitos topológicos esta ligada as transições de fase onde há uma quebra de simetria. Assim, há uma natural conexão entre evolução cosmológica e formação dos defeitos topológicos.

Os primeiros estudos acerca da formação de defeitos topológicos no contexto cosmológico, foi desenvolvido por Kibble [47]. Ele propôs um mecanismo para explicar como as transições de fase cosmológicas podem gerar a formação de domínios, cada um dos quais assumindo um valor de vácuo específico. Esses domínios estariam inicialmente incomunicáveis entre si, mas a medida em que o universo se expandisse, eles poderiam entrar em contato. No momento desse contato é que surgiriam os defeitos topológicos.

Para descrever este processo, vamos considerar como exemplo o modelo de Goldstone dada pela lagrangiana (2.10), na qual o potencial efetivo, com a correção devido a temperatura é

$$V_{eff}(\phi, T) = m^2(T)|\phi|^2 + \frac{\lambda}{4}|\phi|^4, \quad (2.18)$$

no qual

$$m^2(T) = \frac{\lambda}{12}(T^2 - 6\eta^2) \quad (2.19)$$

corresponde a massa do campo no estado em que ele se anula. Esse termo se anula para um determinado valor de T, chamado de temperatura crítica, no qual ocorre a transição de fase, figura 2.5. Para $T > T_c$ o termo de massa é positivo e o mínimo do potencial ocorre em $\phi = 0$. Para $T < T_c$ o mínimo ocorre em um valor diferente de zero dado por

$$|\phi| = \frac{1}{\sqrt{6}}(T_c^2 - T^2)^{1/2}. \quad (2.20)$$

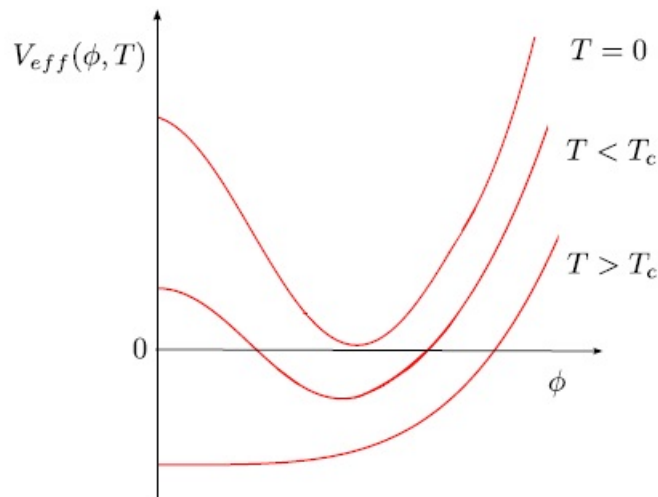


Figura 2.5: Gráfico do potencial efetivo em função do campo para diferentes valores da temperatura.

A expressão nos mostra que o campo cresce continuamente a medida que o T diminui (abaixo de T_c), o que caracteriza uma transição de fase de segunda ordem.

No contexto cosmológico, quando o universo resfria-se abaixo de T_c , o campo toma a forma da equação (2.20). Contudo, a fase θ não pode ser determinada apenas pela física local, dependendo também de flutuações aleatórias. Desta forma θ tomará diferentes valores em diferentes regiões do espaço. Assumindo $\xi(t)$ como sendo o comprimento de escala no qual os valores de θ não estão ligados, ou seja, os valores de ϕ em duas regiões distintas são independentes se elas estão separadas por uma distância maior do que um certo fator de correlação $\xi(t)$. Esse fator deve obedecer à condição de causalidade

$$\xi(t) < d_H, \quad (2.21)$$

onde d_H é a distância que a luz percorre durante o tempo de vida do universo.

Espera-se que, no momento em que os domínios entrem em contato (que ocorre a medida em que o universo se expande), que suas respectivas escalas de tamanho sejam da ordem do comprimento de correlação.

A figura (2.6) descreve bem a formação de cordas cósmicas. Em (a), vemos vários domínios (regiões em branco), que assumem diferentes valores de fase. A medida que os domínios crescem, os valores de fase passam a se correlacionar, formando assim um único domínio (b). A região comprimida no centro é a estrutura característica de uma corda cósmica global que se forma da junção de três domínios de valores de fase diferentes.

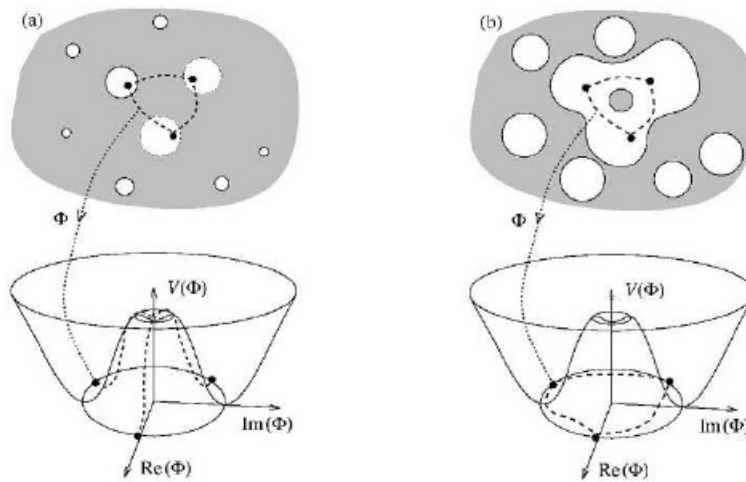


Figura 2.6: (a) Domínios de puro vácuo com valores diferentes (círculos brancos) cercados por uma região de falso vácuo (cinza) (b) O crescimento dos domínios faz com eles se juntem em um domínio de puro vácuo cercado o falso vácuo e formando nessa região uma corda cósmica global.

2.5 Paredes de domínio

No caso das paredes de domínio a formação se dá a partir de uma teoria de campo escalar real, descrita pela lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi) - \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - \eta^2)^2. \quad (2.22)$$

Neste caso há uma invariância sob transformação $\phi \rightarrow -\phi$ que é espontaneamente quebrada quando o campo ϕ escolhe um dos valores esperados, $\phi = \eta$ ou $\phi = -\eta$. A mesma análise feita anteriormente baseada no mecanismo de Kibble pode ser utilizada aqui.

Sejam inicialmente duas regiões no espaço inicialmente não correlacionadas, ou seja, separadas por uma distância maior que o comprimento de correlação ξ . Se em algum momento elas entrarem em contato, na região entre elas o campo ocupará o falso vácuo.

Esta região de transição entre elas, corresponderá a um defeito bidimensional, conhecido como parede de domínio, figura 2.7.

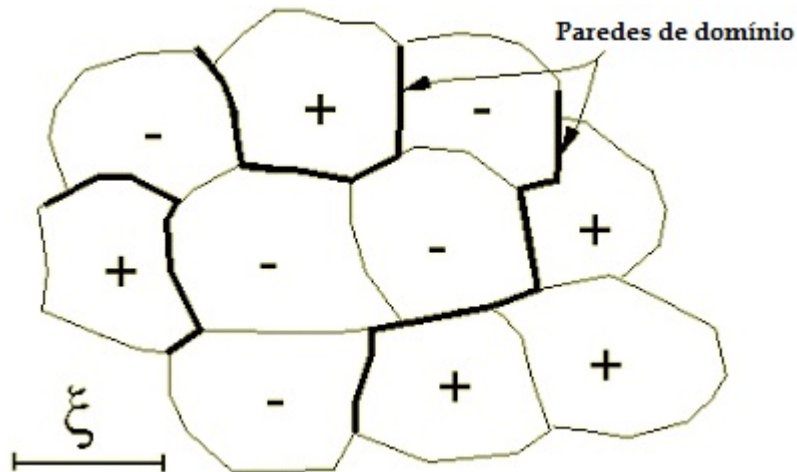


Figura 2.7: Mecanismo de Kibble para a produção de paredes de domínio.

2.6 Monopolos globais

Monopolos podem ser formados tanto a partir de uma quebra de simetria local [49, 53] quanto de simetria global. O processo de formação dos monopolos globais (no qual utilizaremos nesta tese) é basicamente o mesmo dos processos descritos anteriormente. O monopolo global, diferentemente dos outros defeitos, não se estende por uma região do espaço, ele é considerado um defeito pontual, apesar de possuir uma escala de comprimento associada ao seu núcleo.

O monopolo global surge em uma teoria cuja lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^a) - \frac{\lambda}{4}(\phi^a \phi^a - \eta^2)^2. \quad (2.23)$$

No qual o campo de Higgs, ϕ^a , é um isotripleto de campos escalares ($a= 1, 2, 3$). Como já foi dito, através do processo de quebra de simetria, este defeito pontual encontra-se no falso vácuo e é formado pela junção de domínios em diferentes estados de vácuo verdadeiro. A escala típica relacionada ao tamanho do monopolo é dado por [28]

$$\delta \sim (\sqrt{\lambda}\eta)^{-1}. \quad (2.24)$$

A forma que assumiremos para o campo ϕ^a é

$$\phi^a = \eta h(r) \frac{x^a}{r}, \quad (2.25)$$

onde $x^a x^a = r^2$.

A função $h(r)$ deve obedecer a algumas condições de contorno,

$$h(0) = 0, \quad h(r \gg \delta) \longrightarrow 1. \quad (2.26)$$

A primeira condição sobre $h(r)$ garante que o monopolo esteja na região de falso vácuo onde os campos se anulam, para assim evitar divergências na origem. A segunda, garante que fora do núcleo do monopolo o campo assumira os valores de vácuo proporcionais a η .

Capítulo 3

Monopolo global na Teoria da Relatividade Geral e em Teorias $f(R)$

A Relatividade Geral, desenvolvida e publicada por Einstein em 1915 [54], propôs um conjunto de equações diferenciais que deveriam descrever o comportamento do campo gravitacional. Baseado em novas idéias desenvolvidas por ele acerca da gravitação, é uma generalização da teoria da gravitação de Newton e é aceita e comprovada por muitos experimentos [57]. No mesmo ano, o matemático alemão David Hilbert obteve, independentemente, as mesmas equações de campo [55, 56], a partir de um princípio variacional. A ação usada por Hilbert para obter tais equações é constantemente mencionada na literatura como ação de Einstein-Hilbert. Com a recente descoberta da expansão acelerada do universo, a constante cosmológica volta ao cenário atual para tentar descrever essa expansão.

As teorias $f(R)$ da gravitação tem recebido grande atenção na última década, como um dos modelos possíveis para explicar a origem da expansão

acelerada do universo. Uma teoria $f(R)$ consiste em modificar a RG, propondo a substituição do escalar de curvatura na ação de Einstein-Hilbert por uma função arbitrária do mesmo, $f(R)$.

No intuito de analisar possíveis consequências em outros fenômenos já conhecidos e estudados no contexto da RG é que estamos dispostos a analisá-los em teorias $f(R)$. Tal análise pode representar uma ferramenta importante para uma melhor compreensão desses fenômenos, inclusive no contexto da RG. Em nosso caso essa análise se baseia na presença do monopolo global na teoria.

3.1 Efeitos gravitacionais do monopolo global em RG

A ação da Relatividade Geral também conhecida como ação de Einstein-Hilbert é dada por

$$S = \frac{1}{2k} \int d^4x \sqrt{-g} R + S_m, \quad (3.1)$$

onde

$$S_m = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m \quad (3.2)$$

é a ação de matéria, \mathcal{L}_m a lagrangiana de matéria, g é o determinante da métrica e $k \equiv 8\pi G$ é a constante de acoplamento gravitacional. As componentes do tensor momento-energia são obtidos através de

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (3.3)$$

Através do princípio de mínima ação, chegamos às equações de Einstein

$$R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}R = kT_{\mu\nu}. \quad (3.4)$$

O estudo do campo gravitacional de um monopolo global foi realizado por M. Barriola e A. Vilenkin no contexto da RG [28].

Considerando-se a lagrangiana dada pela equação (2.23), sendo o campo ϕ^a dado por (2.25), para um monopolo global, a métrica mais geral que possui uma simetria esférica pode ser escrita da seguinte forma

$$ds^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2). \quad (3.5)$$

As equações de campo para ϕ^a na métrica (3.5) se reduz em uma única equação para $h(r)$

$$\frac{1}{A}h'' + \left[\frac{2}{Ar} + \frac{1}{2B} \left(\frac{B}{A} \right)' \right] h' - \frac{2h}{r^2} - \lambda\eta^2 h(h^2 - 1) = 0. \quad (3.6)$$

As componentes não nulas do tensor momento-energia associado ao monopolo são dadas por

$$T_0^0 = \frac{\eta^2 h'^2}{2A} + \frac{\eta h^2}{r^2} + \frac{\lambda}{4}\eta^4 (h^2 - 1)^2, \quad (3.7)$$

$$T_1^1 = -\frac{\eta^2 h'^2}{2A} + \frac{\eta h^2}{r^2} + \frac{\lambda}{4}\eta^4 (h^2 - 1)^2, \quad (3.8)$$

$$T_2^2 = T_3^3 = \frac{\eta^2 h'^2}{2A} + \frac{\lambda\eta^4}{4}(h^2 - 1)^2. \quad (3.9)$$

E para o tensor de Ricci as componentes não nulas são

$$R_{00} = \frac{B''}{2A} + \frac{1}{4} \left(\frac{B'}{A} \right) \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{1}{r} \left(\frac{B'}{A} \right), \quad (3.10)$$

$$R_{11} = \frac{B''}{2B} - \frac{1}{4} \left(\frac{B'}{B} \right) \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{1}{r} \left(\frac{A'}{A} \right), \quad (3.11)$$

$$R_{22} = 1 - \frac{r}{2A} \left(-\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{1}{A}, \quad (3.12)$$

$$R_{33} = \text{sen}^2\theta R_{22}. \quad (3.13)$$

Em regiões distantes do núcleo, temos que $h(r) \rightarrow 1$. Assim, as componentes do tensor momento-energia associado ao monopolo global serão dadas aproximadamente por

$$T_0^0 = T_1^1 \approx \frac{\eta^2}{r}, \quad (3.14)$$

$$T_2^2 = T_3^3 \approx 0. \quad (3.15)$$

A solução geral das equações de Einstein com essa aproximação é

$$B(r) = A^{-1}(r) = 1 - 8\pi G\eta^2 - \frac{2GM}{r}. \quad (3.16)$$

Podemos estimar a massa M do monopolo usando a relação geral

$$B(r) = 1 - \frac{8\pi G\eta^2}{r} \int_0^r T_0^0 r^2 dr \quad (3.17)$$

comparando essa última equação com a equação (3.16) pode-se encontrar

$$M = 4\pi\eta^2 \int_0^r \left[\frac{h'^2}{2A} + \frac{h^2 - 1}{r^2} + \lambda\eta^4 \frac{(h^2 - 1)^2}{4} \right] r^2 dr \approx \lambda^{-1/2}\eta. \quad (3.18)$$

A integral na equação (3.18) é da ordem de $\delta \sim \lambda^{-1/2}\eta^{-1}$. Assim, $M \sim M_{nucleo}$. O valor da massa é considerado desprezível em escala astrofísica.

Uma métrica (3.16) que possua uma massa muito grande ($M \gg \delta/G$), descreveria a massa de um buraco negro carregando uma carga de monopolo global. Logo, desprezando a massa M a métrica do monopolo (3.5) pode ser escrita como

$$ds^2 = (1 - 8\pi G\eta^2)dt^2 - (1 - 8\pi G\eta^2)^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2). \quad (3.19)$$

Reescalando as variáveis r e t , podemos reescrever a equação (3.19) como

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - (1 - 8\pi G\eta^2)r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2). \quad (3.20)$$

A métrica (3.20) descreve um espaço com um deficit de ângulo sólido. A área de uma esfera de raio r não será $4\pi r^2$, mas sim $4\pi(1 - 8\pi G\eta^2)r^2$. A superfície $\theta = \pi/2$ possui a geometria de um cone com um deficit angular

$$\Delta = 8\pi G\eta^2. \quad (3.21)$$

Uma característica importante que pode ser observada através da métrica (3.20) é que, uma vez que $g_{00} = 1$, o monopolo não exerce força gravitacional sobre uma partícula teste em sua vizinhança.

Podemos analisar também a propagação da luz no campo gravitacional de um monopolo global. Considerando-se um feixe de luz propagando-se de uma fonte S para um observador O , e que ambos estejam no plano equatorial $\theta = \pi/2$. Se S , O e o monopolo estão perfeitamente alinhados, então a imagem terá a forma de um anel de diâmetro angular

$$\delta\varphi_0 = 8\pi^2 G\eta^2 \frac{l}{(d+l)}, \quad (3.22)$$

onde d é a distância do monopolo ao observador e l é a distância do monopolo à fonte.

3.2 Efeitos gravitacionais do Monopolo Global em teorias $f(\mathbf{R})$ - Equações de campo

Podemos agora generalizar a combinação expressa na relação (1.19), usada para obter as equações de campo modificadas com simetria esférica no vácuo, para os casos em que levamos em consideração a existência de um tensor momento-energia $T_{\mu\nu}$, assim a expressão pode ser escrita como

$$C_\mu = \frac{FR_{\mu\mu} - \nabla_\mu \nabla_\mu F - T_{\mu\mu}^m}{g_{\mu\mu}}. \quad (3.23)$$

Considerando o tensor momento-energia fora do núcleo do monopolo, obtemos as equações de campo abaixo

$$2F \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + rF' \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - 2rF'' = 0, \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} & - 4B + 4AB - 4rB \frac{F'}{F} + 2r^2 B' \frac{F'}{F} + 2rB \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \\ & - r^2 B' \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + 2r^2 B'' - \frac{4ABk\eta^2}{F} = 0. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Definindo

$$\beta \equiv \frac{A'}{A} + \frac{B'}{B}, \quad (3.26)$$

podemos escrever as equações de campo da seguinte forma

$$\frac{\beta}{r} = \frac{F''}{F} - \frac{1}{2} \frac{F'}{F} \beta, \quad (3.27)$$

e

$$\begin{aligned}
& - 4B + 4AB - 4rB \frac{F'}{F} + 2r^2 B' \frac{F'}{F} + 2rB\beta + \\
& -r^2 B' \beta + 2r^2 B'' - \frac{4ABk\eta^2}{F} = 0.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

3.3 Soluções no regime de campo fraco

Considerando uma aproximação de campo fraco nas equações de campo, e assumindo que $B(r) = 1 + b(r)$ e $A(r) = 1 + a(r)$ com $|b(r)|$ e $|a(r)| \ll 1$. Além disso vamos considerar que a modificação da teoria da gravidade corresponda a uma pequena correção na RG, de tal forma que $F(r) = 1 + \psi(r)$, com $|\psi(r)| \ll 1$ [29]. Utilizando essas aproximações, é possível verificar que, em primeira ordem, podemos escrever

$$\frac{F'}{F} = \frac{\psi'}{1 + \psi} \approx \psi', \quad \frac{F''}{F} = \frac{\psi''}{1 + \psi} \approx \psi'', \tag{3.29}$$

$$\frac{B'}{B} = \frac{b'}{1 + b} \approx b', \quad \frac{A'}{A} = \frac{a'}{1 + a} \approx a'. \tag{3.30}$$

Logo, as equações aproximadas para (3.24) e (3.25) são

$$\frac{\beta}{r} = \psi'' \tag{3.31}$$

e

$$4a - 4r\psi' + 2r(a' + b') + 2r^2 b'' - 4(1 + a + b - \psi)k\eta^2 = 0. \tag{3.32}$$

A solução destas equações dependem da forma escolhida para o parâmetro responsável pela alteração da teoria, $\psi(r)$. Vamos considerar $\psi(r) = \psi_0 r^n$

[29], em que ψ_0 é um parâmetro a ser determinado e associado à modificação da gravidade. Para que não haja singularidade natural na origem, consideramos apenas casos em que $n > 0$. Assim, para a equação (3.31) e (3.32) teremos

$$a' + b' = n(n - 1)\psi_0 r^{n-1}, \quad (3.33)$$

e

$$2a - 2n\psi_0 r^n + r(a' + b') + r^2 b'' - 2k\eta^2 = 0. \quad (3.34)$$

Da equação (3.33) podemos obter a seguinte relação

$$a + b = (n - 1)\psi_0 r^n, \quad (3.35)$$

$$a = (n - 1)\psi_0 r^n - b. \quad (3.36)$$

Usando a relação acima e substituindo em (3.34), esta pode ser expressa em termos somente da função $b(r)$

$$r^2 b'' - 2b + (n + 1)(n - 2)\psi_0 r^n - 2k\eta^2 = 0, \quad (3.37)$$

e como solução, temos

$$b(r) = \frac{c_1}{r} + c_2 r^2 - k\eta^2 - \psi_0 r^n (1 - k\eta^2). \quad (3.38)$$

onde c_1 e c_2 são constantes de integração. Considerando que estamos lidando com uma teoria sem constante cosmológica, podemos considerar que $c_2 = 0$. Vamos considerar também $c_1 = -2GM$, afim de recuperar o potencial newtoniano. Sendo $k = 8\pi G$ e $B(r) = 1 + b(r)$ então,

$$B(r) = 1 - \frac{2GM}{r} - 8\pi G\eta^2 - \psi_0 r^n (1 - 8\pi G\eta^2). \quad (3.39)$$

Para uma típica teoria de grande unificação, o parâmetro η é da ordem de 10^{16} Gev, assim $8\pi G\eta^2 \approx 10^{-5}$ [52]. Isto nos permite desprezar o termo $\psi_0 r^n \times 8\pi G\eta^2$ nos resultados obtidos, já que $|\psi_0 r| \ll 1$. Então podemos escrever

$$B(r) = 1 - \frac{2GM}{r} - 8\pi G\eta^2 - \psi_0 r^n. \quad (3.40)$$

De (3.26) resulta que

$$A(r)B(r) = c_0 e^{(n-1)\psi_0 r^n}, \quad (3.41)$$

onde c_0 é uma constante de integração que escolhemos como $c_0 = 1$. Portanto,

$$A(r) = e^{(n-1)\psi_0 r^n} \left[1 - \frac{2GM}{r} - 8\pi G\eta^2 - \psi_0 r^n \right]^{-1}. \quad (3.42)$$

O termo $\psi_0 r^n$ é uma quantidade adimensional. Assim, o parâmetro ψ_0 possuirá dimensão de L^{-n} , o que significa dizer

$$\left[\sqrt[n]{|\psi_0|^{-1}} \right] = L. \quad (3.43)$$

A equação acima sugere que o modelo seja dotado de uma escala de comprimento, expressa em termos do parâmetro ψ_0 . Como estamos considerando uma teoria que consiste em uma pequena correção sobre a RG, dado que $|\psi_0 r^n| \ll 1$, teremos então um limite superior para a coordenada radial em que $r < \frac{1}{|\psi_0|^{1/n}}$. Já observamos que o monopolo apesar de ser considerado um defeito pontual possui um núcleo com uma escala típica da ordem de $\lambda^{-1/2}\eta^{-1}$ e estamos interessados em estudar os efeitos externos ao seu núcleo.

Logo, a validade do modelo está restrita a uma região específica dada pelo intervalo

$$\lambda^{-1/2}\eta^{-1} < r < \frac{1}{|\psi_0|^{1/n}}. \quad (3.44)$$

Para o caso em que as distâncias são arbitrariamente grandes poderíamos considerar um modelo dinâmico no qual o monopolo possuísse velocidade. No caso estático, é interessante restringirmos a uma região finita em torno do monopolo para analisarmos seus efeitos gravitacionais. Para que o modelo seja teoricamente válido também precisamos abordar a questão da estabilidade da teoria $f(R)$, discutida na seção (1.2). Para isso utilizamos as equações (3.40) e (3.42) para obter o escalar de curvatura

$$R = -[(n-1)(n-2) + 2(n+2)]\psi_0 r^{n-2} - \frac{16\pi G\eta^2}{r^2}. \quad (3.45)$$

Desta forma é possível determinar a forma explícita da função $f(R)$. O procedimento a ser seguido é o de escrever a equação acima em função de R , em seguida substituir $r = r(R)$ em $F(r) = 1 + \psi_0 r^n$ e assim realizar a integração de $F(R)$, que resulta na $f(R)$. Em princípio é possível obter a forma dessa função para qualquer valor de n . Pode-se verificar que o fato de se considerar essa modificação na gravidade como uma pequena correção sobre RG, garante que a função acima satisfaça as seguintes condições de estabilidade, que é esperada para qualquer teoria $f(R)$ [34, 42]:

- $\frac{d^2 f(R)}{dR^2} > 0$ (teoria livre de táquions);
- $\frac{df(R)}{dR} > 0$ (teoria livre de ghosts);
- $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\Delta}{R} = 0$ e $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{d\Delta}{dR} = 0$ (GR recuperada a altos red-shifts),

onde $\Delta = \Delta(R)$ é definida como $\Delta = f(R) - R$.

Ao considerarmos o termo de massa desprezível, podemos escrever as equações (3.40) e (3.42) como

$$B(r) = 1 - 8\pi G\eta^2 - \psi_0 r^n, \quad (3.46)$$

$$A(r) = e^{(n-1)\psi_0 r^n} [1 - 8\pi G\eta^2 - \psi_0 r^n]^{-1}. \quad (3.47)$$

Realizando uma expansão binomial em (3.47) e desconsiderando os termos cruzados, temos que

$$A(r) \approx (1 + 8\pi G\eta^2 + n\psi_0 r^n). \quad (3.48)$$

Com isso, é possível mostrar que o elemento de linha descrito na solução dada pelas funções A(r) e B(r) são conformalmente relacionadas à solução de Barriola-Vilenkin, dada por

$$ds^2 = (1 - \psi_0 r^n)[dt^2 - dr^2 - (1 - 8\pi G\eta^2)r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]. \quad (3.49)$$

3.4 Movimento clássico de uma partícula teste

Consideramos a análise do movimento clássico de uma partícula teste [29], cujo o tensor métrico tem a forma (3.5) com as componentes dadas por (3.46) e (3.48). A partir do elemento de linha correspondente, podemos definir a lagrangiana de uma partícula movendo-se nessa geometria, da seguinte forma,

$$2\mathcal{L} = \left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2, \quad (3.50)$$

logo,

$$2\mathcal{L} = B(r)\dot{t}^2 - A(r)\dot{r}^2 - r^2\dot{\theta}^2 - r^2\text{sen}^2\theta\dot{\varphi}^2, \quad (3.51)$$

onde o ponto se refere a $d/d\tau$

Os momentos canônicos são dado por:

$$p_\alpha = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^\alpha}. \quad (3.52)$$

Logo, temos

$$\begin{aligned} p_t &= B(r)\dot{t}, & p_r &= -A(r)\dot{r}, \\ p_\theta &= -r^2\dot{\theta}, & p_\varphi &= -r^2\text{sen}^2\theta\dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Os momentos p_t e p_φ são interpretados como a energia E e o momento angular L . Para órbitas no plano equatorial $\theta = \pi/2$, podemos reescrever os momentos como

$$\begin{aligned} E &= B(r)\dot{t}, & p_r &= -A(r)\dot{r}, \\ p_\theta &= 0, & L &= -r^2\dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Utilizando a equação da geodésica

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \epsilon, \quad (3.55)$$

onde temos: $\epsilon = 0$ para fótons e $\epsilon = +1$ para partículas massivas.

Logo, para fótons ($\epsilon = 0$), temos como solução

$$E^2 = e^{(n-1)\psi_0 r^n} \dot{r}^2 + (1 - 8\pi G\eta^2 - \psi_0 r^n) \frac{L^2}{r^2}. \quad (3.56)$$

Para partículas massivas temos ($\epsilon = +1$), como solução obtemos

$$E^2 = e^{(n-1)\psi_0 r^n} \dot{r}^2 + (1 - 8\pi G\eta^2 - \psi_0 r^n) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right). \quad (3.57)$$

A energia potencial efetiva associada à partícula teste é definida por

$$V_{eff}(r) = (1 - 8\pi G\eta^2 - \psi_0 r^n) \frac{L^2}{r^2} \quad \epsilon = 0, \quad (3.58)$$

e

$$V_{eff}(r) = (1 - 8\pi G\eta^2 - \psi_0 r^n) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) \quad \epsilon = +1. \quad (3.59)$$

3.5 O movimento tangencial

Considerando as condições necessárias para um movimento orbital estável

$$(i) \dot{r} = 0$$

$$(ii) \frac{\partial V_{EFF}}{\partial r} = 0$$

$$(iii) \frac{\partial^2 V_{EFF}}{\partial r^2} > 0$$

Utilizando as equações (3.57) e (3.59), podemos verificar as seguintes condições,

$$(i) : \frac{E^2}{B} - \frac{L^2}{r^2} - 1 = 0 \quad (3.60)$$

$$(ii) : \frac{\partial}{\partial r} \left[B(r) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B' \left(1 + \frac{L^2}{r^2} \right) + B \left(-\frac{2L^2}{r^3} \right) = 0. \quad (3.61)$$

As soluções para E e L são

$$E = B \sqrt{\frac{2}{2B - B'r}}, \quad (3.62)$$

$$L = \sqrt{\frac{B'r^3}{2B - B'r}}. \quad (3.63)$$

A velocidade angular para uma órbita arbitrária no plano equatorial é definida como

$$\Omega \equiv \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\frac{d\varphi}{d\tau}}{\frac{dt}{d\tau}} = \frac{\dot{\varphi}}{\dot{t}} = \frac{BL}{r^2 E}. \quad (3.64)$$

Usando (3.62) e (3.63) obtemos

$$\Omega = \sqrt{\frac{B'}{2r}}. \quad (3.65)$$

A velocidade da partícula teste ao longo da direção i é [50,58],

$$v_i^2 = -\frac{g_{ii}}{g_{00}} \frac{dx^i dx^i}{dt^2}. \quad (3.66)$$

Logo a velocidade tangencial v_φ é dada por

$$v_\varphi^2 = -\frac{g_{\varphi\varphi}}{g_{00}} \frac{d\varphi^2}{dt^2} = -\frac{g_{\varphi\varphi}}{g_{00}} \Omega^2. \quad (3.67)$$

Desenvolvendo a equação acima e mantendo apenas os termos lineares em $G\eta^2$ e ψ_0 obtemos

$$v_\varphi = \sqrt{-\frac{1}{2}n\psi_0 r^n}. \quad (3.68)$$

A expressão acima nos diz que uma órbita circular só será permitida fisicamente se $\psi_0 < 0$. Desde que a massa do monopolo seja desprezível, o movimento circular da partícula teste é uma consequência direta da modificação da gravidade representada pelo parâmetro ψ_0 . Ainda podemos reescrever a equação (3.68) como

$$v_\varphi = \sqrt{\frac{1}{2}n|\psi_0|r^n}. \quad (3.69)$$

3.6 O surgimento de uma força extra

Um importante aspecto ausente na RG, é o fato da inexistência da força gravitacional devido ao monopolo sobre uma partícula teste. Já no contexto de uma teoria $f(R)$, esse aspecto físico é observado [29]. Na RG, a métrica g_{00} é constante, já em $f(R)$ é

$$g_{00} = 1 - 8\pi G\eta^2 - \psi_0 r^n, \quad (3.70)$$

o que dá origem a uma força radial atuando sobre a partícula para $\psi_0 \neq 0$.

O movimento de uma partícula teste em um campo gravitacional fraco é descrito pela equação [50]

$$\ddot{x} = -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i}, \quad (3.71)$$

onde h_{00} é uma função que nos dá o desvio da unidade da componente g_{00} do tensor métrico. Para obter a força dada por (3.71) expressamos a métrica em coordenadas galileanas, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$. Utilizando a seguinte mudança de coordenadas

$$t = (1 - 4\pi G\eta^2)\mathcal{T} \quad (3.72)$$

e

$$r = \left(1 + 4\pi G\eta^2 + \frac{4\pi G\eta^2 \ln(|\psi_0| \mathcal{R}^n)}{n} \right) \mathcal{R}, \quad (3.73)$$

teremos

$$ds^2 = (1 - 16\pi G\eta^2 - \psi_0 \mathcal{R}^n) d\mathcal{T}^2 - \left[1 + 16\pi G\eta^2 + \psi_0 \mathcal{R}^n + \frac{8\pi G\eta^2 \ln(|\psi_0| \mathcal{R}^n)}{n} \right] (d\mathcal{R}^2 + \mathcal{R}^2 d\Omega^2), \quad (3.74)$$

onde $\mathcal{R} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e $\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$. Então de (3.71) teremos que

$$\ddot{x} = \frac{n\psi_0 \mathcal{R}^{n-1} x^i}{2} \frac{x^i}{\mathcal{R}}. \quad (3.75)$$

Logo, a força por unidade de massa da partícula é

$$\vec{F} = \frac{n\psi_0 \mathcal{R}^{n-1}}{2} \hat{\mathcal{R}}. \quad (3.76)$$

Uma vez que $\psi_0 < 0$, então a força emergente será sempre atrativa, assim podemos escrever a equação anterior como

$$\vec{F} = -\frac{n|\psi_0| \mathcal{R}^{n-1}}{2} \hat{\mathcal{R}}. \quad (3.77)$$

Como consequência da modificação da RG, há o surgimento de uma força atrativa exercida pelo monopolo global sobre a partícula teste.

Capítulo 4

Deflexão da luz e monopolo global em $f(R)$

A luz, ao passar por um campo gravitacional, tende a ser desviada por esse campo. A previsão da Relatividade Geral em relação ao ângulo de deflexão no qual a luz sofre, foi confirmada em 1919, durante um eclipse solar total, quando foi possível medir a deflexão angular aparente de estrelas próximas ao sol. A deflexão angular devido à presença de um campo gravitacional tem desde então, sido repetidamente confirmado com medições de alta precisão e fornece provas convincentes a favor da relatividade geral. Uma importante aplicação do efeito de deflexão diz respeito à chamada lente gravitacional que atua como uma ferramenta para estudar várias características do universo, incluindo a estimativa da massas de galáxias [59].

A deflexão da luz, devido a uma distribuição de massa esfericamente simétrica (lente), é calculado através do estudo da trajetória dos raios de luz no campo gravitacional da lente. A trajetória da luz é obtida a partir da equação geodésica nula, utilizando uma abordagem perturbativa [60, 61] ou integrando diretamente a equação da geodésica para a equação de órbita da

luz [62, 63]. Quando a fonte e o observador estão situados muito longe da lente em comparação com a distância de aproximação máxima dos raios de luz da lente, o ângulo entre as duas assintóticas da órbita da luz é considerado como o ângulo de deflexão.

Como resultado várias questões relativas à estimativa do ângulo de deflexão permanecem obscuros para muitos, e a igualdade do ângulo de deflexão e do ângulo entre as duas assintóticas da trajetória de luz tem sido muitas vezes usado em situações em que não é realmente válido [64, 65]. A existência de diferentes métodos de estimativa da deflexão angular reforçou ainda mais a complexidade do problema. Consequentemente, são encontradas diferentes expressões do ângulo de deflexão para o mesmo problema de lente, particularmente para casos em que há presença de termos extras na teoria, tal como a constante cosmológica.

Inicialmente, muitos autores ao investigar a possível contribuição da constante cosmológica para a deflexão da luz, verificaram que ela não afetava essa deflexão [64, 65]. O principal argumento utilizado nestas investigações é que na equação diferencial de segunda ordem que descreve a trajetória da luz, o termo contendo Λ desaparece, e assim, a solução é a mesma de uma solução de Schwarzschild. Foi investigado que esse não é bem o caso [66], uma vez que na presença de um espaço com Λ , esse espaço não é assintoticamente plano. Após essa constatação, muitos trabalhos a respeito do assunto foram publicados [67, 68, 69, 70, 71] e a cada novo trabalho um termo diferente aparece ou desaparece.

O nosso principal interesse aqui é investigar a deflexão da luz na presença de um monopolo global em teorias $f(R)$.

4.1 Movimento clássico de uma partícula teste

Antes de entrarmos efetivamente no cálculo da deflexão da luz, vamos apenas verificar o movimento de uma partícula teste, levando em consideração o termo de massa (M) que antes foi desconsiderado.

As componentes do nosso tensor são dadas por (3.40) e (3.42). Logo, resolvendo a equação da geodésica (3.56), para fótons ($\epsilon = 0$), temos como solução

$$E^2 = e^{(n-1)\psi_0 r^n} \dot{r}^2 + \left(1 - \frac{4GM}{r} - 8\pi G\eta^2 - \psi_0 r^n\right) \frac{L^2}{r^2}. \quad (4.1)$$

Para partículas massivas ($\epsilon = +1$)

$$E^2 = e^{(n-1)\psi_0 r^n} \dot{r}^2 + \left(1 - \frac{4GM}{r} - 8\pi G\eta^2 - \psi_0 r^n\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right). \quad (4.2)$$

A energia potencial efetiva associada a partícula teste é definido por

$$V_{eff}(r) = \left(1 - \frac{4GM}{r} - 8\pi G\eta^2 - \psi_0 r^n\right) \frac{L^2}{r^2} \quad \epsilon = 0, \quad (4.3)$$

e

$$V_{eff}(r) = \left(1 - \frac{4GM}{r} - 8\pi G\eta^2 - \psi_0 r^n\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) \quad \epsilon = +1. \quad (4.4)$$

Para a velocidade tangencial obtemos como solução

$$v_\varphi = \sqrt{\frac{2GM}{r} - \frac{1}{2}n\psi_0 r^n}. \quad (4.5)$$

Se desconsiderarmos o termo de massa nessa última equação recuperamos exatamente a equação (3.68). Assim como anteriormente o termo ψ_0 , deve ser menor que zero, para assim obtermos soluções reais.

Obtemos aqui uma generalização das equações da geodésica e da velocidade tangencial para o caso em que o termo de massa não é desconsiderado.

Para o caso da seção (3.6), consideramos agora que a métrica g_{00} é

$$g_{00} = 1 - 8\pi G\eta^2 - \frac{2GM}{r} - \psi_0 r^n. \quad (4.6)$$

Utilizando a seguinte mudança de coordenadas

$$t = (1 - 4\pi G\eta^2)\mathcal{T} \quad (4.7)$$

e

$$r = \left(1 + 4\pi G\eta^2 + \frac{4\pi G\eta^2 \ln(|\psi_0|\mathcal{R}^n)}{n}\right) \mathcal{R}, \quad (4.8)$$

podemos reescrever a métrica como

$$ds^2 = (1 - 16\pi G\eta^2 - \frac{2GM}{r} - \psi_0 \mathcal{R}^n) d\mathcal{T}^2 - \left[1 + 16\pi G\eta^2 + \frac{2GM}{\mathcal{R}} + \psi_0 \mathcal{R}^n + \frac{8\pi G\eta^2 \ln(|\psi_0|\mathcal{R}^n)}{n}\right] (d\mathcal{R}^2 + \mathcal{R}^2 d\Omega^2). \quad (4.9)$$

Então, da equação (3.71) teremos que

$$\ddot{x} = \left(-\frac{GM}{\mathcal{R}^2} + \frac{n\psi_0 \mathcal{R}^{n-1}}{2}\right) \frac{x^i}{\mathcal{R}}, \quad (4.10)$$

logo a força por unidade de massa da partícula é

$$\vec{F} = \left(-\frac{GM}{\mathcal{R}^2} + \frac{n\psi_0 \mathcal{R}^{n-1}}{2}\right) \hat{\mathcal{R}}. \quad (4.11)$$

Novamente para $\psi_0 < 0$,

$$\vec{F} = -\left(\frac{GM}{\mathcal{R}^2} + \frac{n|\psi_0|\mathcal{R}^{n-1}}{2}\right) \hat{\mathcal{R}}. \quad (4.12)$$

Além do surgimento de uma força extra atrativa exercida pelo monopolo global sobre a partícula teste, teremos também a atração gravitacional convencional, devido à presença do termo de massa no sistema.

4.2 A equação de movimento da luz

Queremos encontrar uma expressão para a deflexão da luz levando em consideração o monopolo global e o termo de massa na teoria $f(R)$. Consideramos também que tanto o observador quanto a fonte, estão a distâncias finitas do monopolo.

A métrica estática e esfericamente simétrica é dada por,

$$ds^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2. \quad (4.13)$$

onde

$$B(r) = 1 - \frac{2GM}{r} - 8\pi G\eta^2 - \psi_0 r^n, \quad (4.14)$$

e

$$A(r) = e^{(n-1)\psi_0 r^n} B(r)^{-1}. \quad (4.15)$$

A equação associada ao movimento da partícula é dado por

$$\frac{dr}{d\varphi} \quad . \quad (4.16)$$

Considerando que o movimento ocorra no plano equatorial, ou seja, $\theta = \frac{\pi}{2}$, e reescrevendo a equação (3.56) e o momento relacionado a φ (3.54) temos

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = e^{-(n-1)\psi_0 r^n} \left[E^2 - \left(1 - \frac{2GM}{r} - 8\pi G\eta^2 - \psi_0 r^n\right) \frac{L^2}{r^2} \right], \quad (4.17)$$

e

$$\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 = \frac{L^2}{r^4}. \quad (4.18)$$

Assim, podemos obter a equação de movimento

$$\left(\frac{\frac{dr}{d\tau}}{\frac{d\varphi}{d\tau}}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = e^{-(n-1)\psi_0 r^n} r^4 \left[\frac{E^2}{L^2} - \left(1 - \frac{2GM}{r} - 8\pi G\eta^2 - \psi_0 r^n\right) \frac{1}{r^2} \right], \quad (4.19)$$

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = e^{-(n-1)\psi_0 r^n} \left[\frac{E^2}{L^2} - \left(1 - \frac{2GM}{r} - 8\pi G\eta^2 - \psi_0 r^n\right) \frac{1}{r^2} \right]. \quad (4.20)$$

Para $n=1$ e escrevendo $\frac{E^2}{L^2} = \frac{1}{b^2}$ obtemos a equação de movimento relacionada a luz.

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{b^2} - \left(1 - \frac{2GM}{r} - 8\pi G\eta^2 - \psi_0 r\right) \frac{1}{r^2}. \quad (4.21)$$

Aqui b é o parâmetro de impacto usual, definido pela razão entre o momento angular e a energia.

Solucionando a equação acima obtemos a equação de órbita da luz.

4.3 Equação de órbita da luz

Para calcular a deflexão da luz precisamos obter a equação da órbita. Antes vamos calcular a menor distância de aproximação dado por uma distância r_0 do núcleo do monopolo. A menor aproximação será quando $\frac{dr}{d\varphi} = 0$, logo da equação (4.21)

$$0 = \frac{1}{b^2} - \left(1 - \frac{2GM}{r} - 8\pi G\eta^2 - \psi_0 r\right) \frac{1}{r^2}, \quad (4.22)$$

obtemos entao uma equação do terceiro grau

$$\frac{r^3}{b^2} + \psi_0 r^2 - (1 - 8\pi G\eta^2)r + 2GM = 0. \quad (4.23)$$

Estamos interessados no menor resultado real dessa equação (r_0), assim obtemos

$$\frac{r_0}{b} = 2\sqrt{\frac{(1 - 8\pi G\eta^2)}{3}} \cos \left[\frac{1}{3} \arccos \left(-\frac{GM}{b} \sqrt{\frac{27}{(1 - 8\pi G\eta^2)^3}} \right) \right] - \frac{\psi_0 b}{3}. \quad (4.24)$$

Desde que $GM/b \ll 1$ seja satisfeita, podemos expandir a equação acima em torno desse ponto,

$$\frac{r_0}{b} \approx (1 - 8\pi G\eta^2) - \frac{\psi_0 b}{3} - (1 + 8\pi G\eta^2) \frac{GM}{b} - \frac{3}{2}(1 + 8\pi G\eta^2) \left(\frac{GM}{b} \right)^2 + \dots \quad (4.25)$$

Reescrevendo a equação (4.21) em termos de uma nova variável $u = \frac{r_0}{r}$, temos

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = \frac{r_0^2}{b^2} + \psi_0 r_0 u - (1 - 8\pi G\eta^2)u^2 + \frac{2GM}{r_0}u^3. \quad (4.26)$$

Diferenciando ambos os lados dessa equação com relação à coordenada φ , obtemos uma equação de segunda ordem,

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + (1 - 8\pi G\eta^2)u = \frac{\psi_0 r_0}{2} + \alpha u^2, \quad (4.27)$$

onde definimos o parâmetro $\alpha = \frac{3GM}{r_0} \ll 1$. Usando o método de perturbação para obter a solução aproximada da equação (4.20), em termos do pequeno parâmetro α , podemos escrever

$$u(\varphi) = u_0(\varphi) + \alpha u_1(\varphi) + \alpha^2 u_2(\varphi) + \dots \quad (4.28)$$

Substituindo esta série em (4.27) e agrupando as equações em ordem do parâmetro de perturbação α , e mantendo apenas os termos em primeira ordem, obtemos as seguintes equações

$$\frac{d^2 u_0}{d\varphi^2} + (1 - 8\pi G\eta^2)u_0 = \frac{\psi_0 r_0}{2} \quad (4.29)$$

e

$$\frac{d^2 u_1}{d\varphi^2} + (1 - 8\pi G\eta^2)u_1 = u_0^2. \quad (4.30)$$

A solução geral da equação (4.29) é dada por

$$u_0 = C_1 \cos(\sqrt{(1 - 8\pi G\eta^2)}\varphi) + C_2 \operatorname{sen}(\sqrt{(1 - 8\pi G\eta^2)}\varphi) + \frac{\psi_0 r_0}{2}. \quad (4.31)$$

Para determinar as constantes da equação para u_0 e posteriormente para u_1 vamos considerar que: desde que a menor distância de aproximação ocorra para $\varphi = \pi/2$, devemos ter $u(\pi/2) = 1$, que equivale a $u_0(\pi/2) = 1$ e $u_1(\pi/2) = 0$. Também devemos ter que a equação de órbita deve satisfazer, $du/d\varphi = 0$, logo, $du_0/d\varphi = 0$ e $du_1/d\varphi = 0$. A partir destas duas condições obtemos as constantes da equação (4.31) que são, $C_1 = 2\pi^2 G\eta^2$ e $C_2 = 1 - \frac{\psi_0 r_0}{2}$. Logo, a solução para u_0 é

$$u_0 = 2\pi^2 G\eta^2 \cos(\sqrt{1 - 8\pi G\eta^2}\varphi) + \left(1 - \frac{\psi_0 r_0}{2}\right) \operatorname{sen}(\sqrt{1 - 8\pi G\eta^2}\varphi) + \frac{\psi_0 r_0}{2}. \quad (4.32)$$

Introduzindo essa solução na equação (4.30) obtemos

$$\frac{d^2 u_1}{d\varphi^2} + (1 - 8\pi G\eta^2)u_1 =$$

$$\left(2\pi^2 G\eta^2 \cos(\sqrt{1-8\pi G\eta^2}\varphi) + \left(1 - \frac{\psi_0 r_0}{2}\right) \operatorname{sen}(\sqrt{1-8\pi G\eta^2}\varphi) + \frac{\psi_0 r_0}{2}\right)^2 \quad (4.33)$$

Como solução para esta equação encontramos

$$\begin{aligned} u_1 &= C_3 \cos(\sqrt{1-8\pi G\eta^2}\varphi) + C_4 \operatorname{sen}(\sqrt{1-8\pi G\eta^2}\varphi) \\ &- \frac{1}{3} \left(\frac{\psi_0 r_0}{2} - 4\pi G\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \cos(2\sqrt{1-8\pi G\eta^2}\varphi) - \frac{2\pi^2 G\eta^2}{3} \operatorname{sen}(2\sqrt{1-8\pi G\eta^2}\varphi) \\ &- \varphi \frac{\psi_0 r_0}{2} \cos(\sqrt{1-8\pi G\eta^2}\varphi) - \frac{1}{2} (\psi_0 r_0 - 8\pi G\eta^2 - 1), \end{aligned} \quad (4.34)$$

aplicando novamente as condições de contorno, agora para a equação anterior encontramos os valores de C_1 e C_2 , que são

$$C_3 = \left(\frac{\pi\psi_0 r_0}{4} - \frac{8\pi^2 G\eta^2}{12} \right), \quad C_4 = \frac{1}{3} (\psi_0 r_0 - 8\pi G\eta^2 - 1). \quad (4.35)$$

Assim, a equação geral para a órbita, em primeira ordem é

$$\begin{aligned} u &= \frac{8\pi^2 G\eta^2}{4} \cos(\sqrt{1-8\pi G\eta^2}\varphi) + \left(1 - \frac{\psi_0 r_0}{2}\right) \operatorname{sen}(\sqrt{1-8\pi G\eta^2}\varphi) + \frac{\psi_0 r_0}{2} \\ &+ \alpha \left[\left(\left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \frac{\psi_0 r_0}{2} - \frac{8\pi^2 G\eta^2}{12} \right) \cos(\sqrt{1-8\pi G\eta^2}\varphi) \right. \\ &\quad + \frac{1}{3} (\psi_0 r_0 - 8\pi G\eta^2 - 1) \operatorname{sen}(\sqrt{1-8\pi G\eta^2}\varphi) \\ &\quad - \frac{1}{3} \left(\frac{\psi_0 r_0}{2} - 4\pi G\eta^2 - \frac{1}{2} \right) \cos(2\sqrt{1-8\pi G\eta^2}\varphi) \\ &\quad \left. - \frac{2\pi^2 G\eta^2}{3} \operatorname{sen}(2\sqrt{1-8\pi G\eta^2}\varphi) - \frac{1}{2} (\psi_0 r_0 - 8\pi G\eta^2 - 1) \right]. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Esta é a equação da órbita da luz. Ela satisfaz todas as condições impostas anteriormente. Também descreve a trajetória do feixe de luz na presença do monopolo global.

Se observador e fonte estão situados a uma distância infinita da lente, então o ângulo de deflexão é dado pela diferença entre o ângulo de emissão da fonte (s) e o ângulo de recepção do observador (obs). Essa diferença angular é definida na literatura [60, 61, 62, 63] como sendo o ângulo de deflexão ($\delta\varphi \equiv \varphi_s(\infty) - \varphi_{obs}(\infty)$). Ver figura 4.1. Este não é nosso caso, pois consideramos que tanto observador e fonte estão a distâncias finitas da lente.

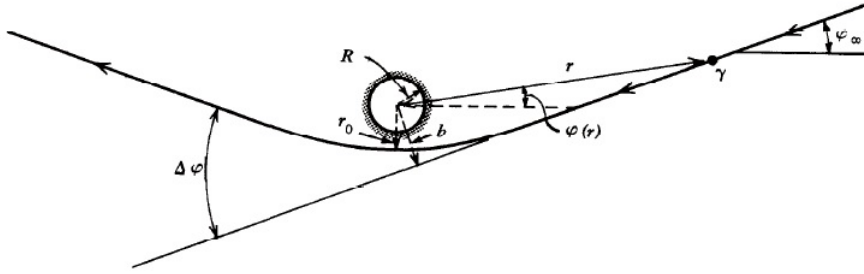


Figura 4.1: Deflexão angular da luz, com observador e fonte a distância infinita da lente.

Para um pequeno ângulo de aproximação, $\varphi \sim 0$, a equação da órbita pode ser expressa da seguinte forma

$$\varphi \approx -2\pi^2 G\eta^2 - \frac{2GM}{r_0} - \frac{\psi_0 r_0}{2} + \frac{r_0}{r} \left(1 + 8\pi^2 G\eta^2 + \frac{2GM}{r_0} + \frac{\psi_0 r_0}{2} \right). \quad (4.37)$$

4.4 O ângulo de deflexão da luz

Quando fonte e observador estão a uma distância finita da lente, $\delta\varphi$ não mais representa a deflexão angular. Para calcular o ângulo de deflexão devemos levar em conta um ângulo ψ tangente a trajetória da luz e assim fazer a subtração entre esse ângulo e φ [72]. Ver figura 4.2.

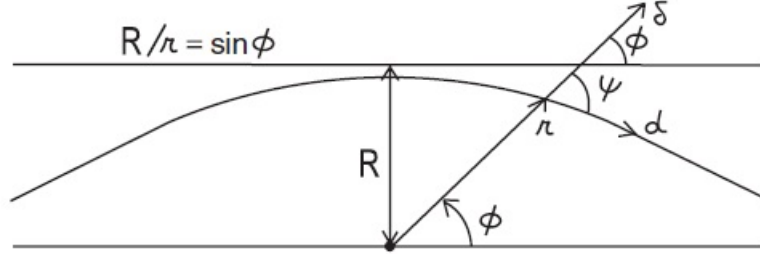


Figura 4.2: Deflexão da luz para observador e fonte a distância finita da lente.

Para encontrar o desvio angular vamos utilizar a fórmula do invariante para a tangente do ângulo ψ entre duas direções, a radial e a tangente a órbita [66], que é dada por

$$\tan(\psi) = \frac{\sqrt{g_{\varphi\varphi}}}{\sqrt{g_{rr}}} \left| \frac{d\varphi}{dr} \right| = r\sqrt{B} \left| \frac{d\varphi}{dr} \right|. \quad (4.38)$$

Utilizando a equação (4.21), podemos reescrevê-la como,

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r\sqrt{B}} \left(\frac{r^2}{b^2 B} - 1 \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.39)$$

substituindo esta equação em (4.38) obtemos

$$\tan(\psi) = \left(\frac{r^2}{Bb^2} - 1 \right)^{-1/2}. \quad (4.40)$$

Podemos utilizar a equação (4.21) para obter uma relação entre o parâmetro de impacto b e r_0 , tomando $r = r_0$, obtemos a seguinte relação

$$b^2 = \frac{r_0^2}{B_0}, \quad (4.41)$$

onde $B(r_0) \equiv B_0$, logo

$$\tan(\psi) = \left(\frac{r^2 B_0}{B r_0^2} - 1 \right)^{-1/2}. \quad (4.42)$$

Desenvolvendo a equação acima, temos que

$$\tan(\psi) = \sqrt{\frac{(1 - 8\pi G\eta^2) \frac{r_0^2}{r^2} - \psi_0 r_0 \frac{r_0}{r} - \frac{2GM}{r_0} \frac{r_0^3}{r^3}}{B_0 - (1 - 8\pi G\eta^2) \frac{r_0^2}{r^2} + \psi_0 r_0 \frac{r_0}{r} + \frac{2GM}{r_0} \frac{r_0^3}{r^3}}}. \quad (4.43)$$

Para um ângulo pequeno de ψ , temos que $r \gg r_0$, logo podemos expandir a equação acima em série, porém devemos desconsiderar a nossa modificação na gravidade, pois estamos restritos a uma região em que $\psi_0 r \ll 1$, logo desconsideramos esse termo na expansão. Assim

$$\tan(\psi) = \sqrt{\frac{(1 - 8\pi G\eta^2) \frac{r_0^2}{r^2} - 2GM \frac{r_0^2}{r^3}}{B_0 - (1 - 8\pi G\eta^2) \frac{r_0^2}{r^2} + 2GM \frac{r_0^2}{r^3}}}. \quad (4.44)$$

expandindo essa equação para $r \gg r_0$ encontramos

$$\psi \approx \frac{r_0}{r} + \frac{GM}{r} - \frac{GM r_0}{r^2} \quad (4.45)$$

O ângulo de deflexão total δ , numa dada posição angular φ é, $\delta = \psi - \varphi$, e a deflexão total é obtida adicionando as contribuições da posição da fonte e do observador, ou seja

$$\delta = (\psi_s + \psi_{obs}) - (\varphi_s + \varphi_{obs}). \quad (4.46)$$

Da equação de órbita (4.37), considerando a posição do observador (φ_{obs}, r_{obs}) e a posição da fonte (φ_s, r_s) , somar para as componentes de ambos, assim obtemos

$$(\varphi_s + \varphi_{obs}) \approx -\psi_0 r_0 - 4\pi^2 G\eta^2 - \frac{4GM}{r_0}$$

$$+r_0 \left(\frac{1}{r_s} + \frac{1}{r_{obs}} \right) \left(1 + \frac{\psi_0 r_0}{2} + 2\pi^2 G \eta^2 + \frac{GM}{r_0} \right). \quad (4.47)$$

Logo, das equações (4.45) e (4.47) podemos finalmente escrever a equação para a deflexão da luz,

$$\begin{aligned} \delta \approx & -GM r_0 \left(\frac{1}{r_s^2} + \frac{1}{r_{obs}^2} \right) + 4\pi^2 G \eta^2 + \frac{4GM}{r_0} + \psi_0 r_0 \\ & - r_0 \left(\frac{1}{r_s} + \frac{1}{r_{obs}} \right) \left(+8\pi^2 G \eta^2 + \frac{\psi_0 r_0}{2} \right). \end{aligned} \quad (4.48)$$

Esta última equação nos dá a deflexão que um feixe de luz sofre ao passar por uma região onde há a presença de um monopolo global em uma teoria do tipo $f(R)$, para o caso de observador e fonte a uma distância finita do monopolo.

Podemos verificar da equação (4.48) que a modificação feita na teoria afeta a trajetória da luz, fato até então não observado e que vem a ser nossa maior contribuição para o estudo realizado aqui. Se considerarmos apenas o termo de massa na equação acima recuperamos a equação (34) dada por [72], a menos do termo quadrático de massa. Ao retornarmos a RG desconsiderando o termo de massa, podemos encontrar a deflexão da luz na presença do monopolo global e conseqüentemente podemos encontrar o diâmetro angular dado pela equação (3.22). Em [29], o ângulo de deflexão da luz foi obtido através da conformidade entre a métrica de Barriola-Vilenkin e a métrica obtida em $f(R)$, aqui calculamos explicitamente a deflexão da luz e verificamos o surgimento do termo devido a massa e devido a modificação na teoria.

Conclusão

Nesta tese analisamos o campo gravitacional de um monopolo global no contexto de uma teoria $f(R)$ da gravitação. Iniciamos nosso estudo com uma revisão das teorias $f(R)$, descrevendo as motivações dessa teoria e apresentando as equações de movimento no formalismo da métrica. Fizemos uma revisão sobre QES e defeitos topológicos para então podermos introduzir monopolos globais na teoria. Inicialmente fizemos uma revisão com a presença de monopolos globais na teoria da RG e depois inserindo-os nas teorias $f(R)$. Em ambos os trabalhos o termo de massa do monopolo foi desconsiderado por ser desprezível em escala astrofísica.

Nosso principal estudo baseou-se em considerar o termo de massa na teoria, que pode ser considerado como um buraco negro dotado de um monopolo global, e analisamos o movimento de partículas em seu entorno, generalizando a equação da geodésica, da velocidade tangencial e da força extra que surge devido a presença do monopolo massivo na teoria. Também obtemos o ângulo de deflexão da luz nesse cenário, e encontramos que, a mudança realizada na teoria afeta o ângulo de deflexão da luz, um fato até então desconhecido.

Referências Bibliográficas

- [1] H. Weyl, Ann. Phys. **59**, 101 (1919).
- [2] A. S. Eddington, **The Mathematical Theory of Relativity**, Cambridge University Press, Cambridge, (1923).
- [3] R. Utiyama e B. S. DeWitt, J. Math. Phys. **3**, 608 (1962).
- [4] K. S. Stelle, Phys. Rev. **D16**, 953 (1977).
- [5] N. D. Birrel e P. C. W. Davies, **Quantum Fields in Curved Space-time** (Cambridge University Press, Cambridge) (1982).
- [6] A. A. Starobinsky, Phys. Lett. B **91**, 99 (1980).
- [7] J. D. Barrow e S. Cotsakis, Phys. Lett. B **214**, 515 (1988).
- [8] D. La e P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **62**, 376 (1989).
- [9] R. H. Brandenberger, eprint gr-qc/921004 (1992).
- [10] B., J. Shahid-Saless, Math. Phys. **31**, 2429 (1990).
- [11] S. Perlmutter et al., Astrophys. J. **517**, 565 (1999).
- [12] P. Astier et al. (SNLS, Astron. Astrophys. **447**, 31 (2006).
- [13] D. J. Eisenstein, et al. (SDSS), 2005, Astrophys. J. **633**, 560 (2005).

- [14] A. G. Riess et al. (Supernova Search Team), *Astron. J.* **116**, 1009 (2004).
- [15] D. N. Spergel, et al. (WMAP), *Astrophys. J. Suppl.* **170**, 377 (2007).
- [16] F. Zwicky, *Helv. Phys. Acta*, **6**, 110, (1933).
- [17] F. D. Kahn e L. Woltjer, *ApJ*, **130**, 705, (1959).
- [18] S. Weinberg, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 1 (1989).
- [19] S. M. Carroll, *Living Rev. Relativity* 4, (2001).
- [20] A. G. Riess et al., *Astron. J.* **166**, 1009 (1998).
- [21] C. Brans e R. H. Dicke, *Phys. Rev.* **124**, 925, (1961).
- [22] A. Barros e C. Romero, *Phys. Rev. D* **56**, 6688 (1997).
- [23] G. R. Dvali, G. Gabadadze e M. Porrati, *Phys. Lett. B* **485**, 208 (2000).
- [24] M. E. X. Guimarães, R. M. Luna e T. O. Rosa, *Eur. Phys. J. C* **74**, 2880 (2014).
- [25] N. D. Mermin, *Rev. Mod. Phys.* **51**, 591 (1979).
- [26] G. E. Volovik e V. P. Mineyrov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz. (CCCP)*, **72**, 2256 (1977).
- [27] A. Vilenkin e E. P. S. Shellard, **Cosmic Strings and Other Topological Defects**, Cambridge University Press, Cambridge, England, (1994).
- [28] M. Barriola e A. Vilenkin, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 341 (1989).
- [29] T. R. P. Caramês, E. R. Bezerra de Mello e M. E. X. Guimarães, *Mod. Phys. Lett. A* (2011).

- [30] D. Huterer e M.S. Turner, Phys. Rev. D **60**, 081301 (1999).
- [31] H. A. Buchdahl, Mon. Not. R. astr. Soc. **150**, 1-8, (1970).
- [32] S. Capozziello, Int. J. Mod. Phys. D, **11**, 483 (2002).
- [33] S. M. Carrol, V. Duvvuri, M. Trodden e M. S. Turner, Phys. Rev. D **70**, 043528 (2004).
- [34] V. Faraoni, arXiv:0810.2602 [gr-qc] (2008).
- [35] A. L. Erickcek, T. L. Smith, e M. Kamionkowski, Phys. Rev. D **74**, 121501 (2006).
- [36] X.-H. Jin, D.-J. Liu, e X.-Z. Li, astro-ph/0610854 (2006).
- [37] M. L. Ruggiero e L. Iorio, JCAP 0701, 010 (2007), gr-qc/0607093.
- [38] O. Bertolami, C. G. Boehmer, T. Harko, e F. S. N. Lobo, Phys. Rev. D **75**, 104016 (2007).
- [39] C. G. Boehmer, T. Harko, e F. S. N. Lobo, Astropart. Phys., **29**:386-392 (2008).
- [40] Q. Exirifard e M. M. Sheikh-Jabbari, Phys. Lett. B **661**, 158 (2008).
- [41] A. Nunez e S. Solganik, [arXiv:hep-th/0403159]
- [42] L. Pogosian e A. Silvestri, Phys. Rev. D **77**, 023503, (2008).
- [43] T. Multamaki e I. Vilja, Phys. Rev. D **74**, 064022, (2006).
- [44] T. R. P. Caramês e E. R. Bezerra de Mello, Eur. Phys. J. C **64**, 113, (2009).
- [45] G. Toulouse e M. Kleman, J. Phys. Lett., **37**, L-149 (1976).

- [46] J. Goldstone, *Nuovo Cim.* **19**, 154, (1961).
- [47] T. W. B. Kibble, *J. Phys. A* **9**, 1387 (1976).
- [48] A. Vilenkin, *Phys. Rep.* **121**, 263 (1985).
- [49] D. Bailin e S. Love, **Introduction to Gauge Field Theory**, Adam Hilger Bristol and Boston, (1986).
- [50] L. D. Landau e E. M. Lifshitz, **The Classical Theory of Fields**, Vol. 2, 4th edition, Butterworth-Heinemann, (1975).
- [51] V. A. Rubakov. **Classical Theory of Gauge Fields**, Princeton University Press, (2002).
- [52] A. Vilenkin e E. P. S. Shellard, **Cosmic Strings and Other Topological Defects**, Cambridge University Press, Cambridge, England, (1994).
- [53] L. Ryder, **Quantum Field Theory**, Cambridge University Press, (1996).
- [54] A. Einstein, *Sitz. Preuss. Akad. Wiss.*, 482, 844-847, (1915).
- [55] D. Hilbert, *Nachr. Königl. Gesellsch. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl.*, Heft 3, p. 395, (1915).
- [56] R. D’Inverno, **Introducing Einstein’s Relativity**, Clarendon Press, Oxford, England, (1992).
- [57] C. Will, **Theory and Experiment in Gravitational Physics** (Cambridge Univ. Press, 1993).
- [58] M. Leineker Costa, A. L. N. Oliveira, e M. E. X. Guimarães, *Int. J. Mod. Phys. D* **15**, 387 (2006)

- [59] P.Schneider, J. Ehlers, e E.E. Falco, **Gravitational Lenses** (Springer-Verlag, Berlin, 1992).
- [60] W. Rindler, **Relativity: Special, General, and Cosmological** (Oxford University Press, New York, 2006), 2nd ed.
- [61] C.W. Misner, K.S. Thorne, e J.A. Wheeler, **Gravitation** (Freeman, San Francisco, 1973).
- [62] S. Weinberg, **Gravitation and Cosmology** (Wiley, New York, 1972).
- [63] R.Wald, **General Relativity** (University of Chicago Press, Chicago, 1984)
- [64] J. N. Islam, Phys. Lett. A **97**, 6, 239-241, (1983).
- [65] F. Finelli, M. Galaverni e A. Gruppuso, Phys. Rev. D. **75** 043003 (2007).
- [66] W. Rindler, e M. Ishak, Phys. Rev. D, **76**, 043006 (2007)
- [67] M. Ishak, W. Rindler e J. Dossett, Mon. Not. R. Astro. Soc. **403**, 4, 2152-2156, (2010)
- [68] K. Lake, (2007), [arXiv:0711.0673].
- [69] M. Sereno, Phys. Rev. D, **77**, 043004 (2008).
- [70] M. Sereno, Phys. Rev. Letters **102**, 021301 (2009).
- [71] T. Biressa e J. A. de Freitas Pacheco, Gen. Rel. Grav. **43**, 10, 2649-2659, (2011).
- [72] A. Bhadra arXiv:1007.1794 (2010).