

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE FÍSICA

TESE DE DOUTORADO

**Estudo do monopolo global
em teorias $f(R)$ da gravitação**

THIAGO ROBERTO DA POSSA CARAMÊS

NITERÓI

MARÇO DE 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE FÍSICA

Estudo do monopolo global em teorias $f(R)$ da gravitação

THIAGO ROBERTO DA POSSA CARAMÊS

Tese realizada sob orientação da
Prof^a. Dr^a. Maria Emília Xavier
Guimarães, apresentada ao Insti-
tuto de Física, em complementação
aos requisitos para obtenção do
título de Doutor em Física.

NITERÓI

MARÇO DE 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE FÍSICA

Estudo do monopolo global em teorias $f(R)$ da gravitação

THIAGO ROBERTO DA POSSA CARAMÊS

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Maria Emília Xavier Guimarães (Orientadora-UFF)

Prof. Dr. Luis Esteban Oxman (Examinador interno-UFF)

Prof. Dr. Rodrigo Ferreira Sobreiro (Examinador interno-UFF)

Prof. Dr. Eugênio Ramos Bezerra de Mello (Examinador externo-UFPB)

Prof. Dr. Antônio José Accioly (Examinador externo-CBPF)

Prof. Dr. Julio Marny Hoff da Silva (Examinador externo-UNESP)

NITERÓI

MARÇO DE 2009

Dedicatória

*À minha família: meus pais, Denilsa e Roberto;
minhas irmãs, Denise, Roberta, Bianca e meu irmão Lucas*

Agradecimentos

Gostaria de agradecer profundamente a todos os que estiveram comigo nesta longa caminhada e que em algum momento deram sua contribuição direta ou indireta para a conclusão bem-sucedida desta etapa da minha carreira. Dentre essas pessoas, gostaria de agradecer de forma especial:

Aos meus pais, Denilsa da Possa Caramês e Roberto dos Santos Caramês, por tudo que me deram, pelo carinho, pela educação, pela formação pessoal, pelo incentivo em todas as instâncias dos meus estudos, ao longo de todos esses anos, e pelo apoio irrestrito à minha opção pela carreira científica.

Às minhas irmãs: Denise, Roberta, Bianca; e ao meu irmão Lucas pelo apoio e compreensão, durante estes anos longe de casa.

À minha orientadora, Prof^a. Dr^a. Maria Emília Xavier Guimarães, pelas conversas, pela confiança, incentivo e apoio fundamentais não apenas para que eu chegasse até aqui, como para que eu pudesse seguir em frente.

Ao Prof. Dr. Eugênio Ramos Bezerra de Mello, pela oportunidade de colaboração durante esse período de Doutorado e por continuar sendo essa grande referência pessoal e profissional para mim, que contribuiu de forma decisiva e permanente para a minha formação como pesquisador.

Ao Prof. Dr. José Abdalla Helayël-Neto, de quem tive a satisfação de ser aluno. Agradeço não apenas pelos cursos excepcionais que fiz com ele, mas também pelo grande exemplo que se tornou para mim, não apenas como profissional, mas sobretudo como ser-humano. Agradeço também pelas discussões, sempre muito proveitosas, que puder ter com ele, ao longo deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Julio Marny Hoff da Silva, pela simpatia de sempre, pela enorme receptividade e hospitalidade nas ocasiões em que estive em Guaratinguetá, e também pela generosa oportunidade de colaboração que me proporcionou profícuos momentos de

discussão, pessoalmente ou por telefone. Estendo meus agradecimento à sua esposa, Ane, pela hospitalidade e gentileza a mim dispensadas sempre que estive lá.

A todos os professores com quem pude discutir, em momentos diversos deste trabalho, além dos já citados acima: Sérgio Jorás, Marco Moriconi, Jürgen Stilck e Luis E. Oxman. Ao Prof. Luis E. Oxman, agradeço também pelos excelentes cursos de *Mecânica Quântica II* e *Teoria Quântica de Campos I*, que contribuíram muito para minha formação.

Aos professores Mario Novello e Rodrigo Sobreiro, pelos estimulantes cursos de *Cosmologia* e *Introdução às Teorias de Calibre das Interações Fundamentais*, respectivamente, que ajudaram a ampliar os meus horizontes na física teórica.

Aos meus amigos Andreson Luis Carvalho Rego, Soraya Galdino Maciel e Wagner Pinheiro Pires, amigos de longa data, com os quais morei parte do Doutorado, enfrentando todos os desafios iniciais, referentes à moradia, adaptação etc, tanto pela amizade e companheirismo de sempre como pelas múltiplas aprendizagens inerentes à convivência.

À minha amiga Bárbara Esther da Fonseca Paes Ribeiro, pela amizade e gentileza, em especial por haver me recebido no Rio de Janeiro. Agradeço também à sua família: Dona Solange, Sr. Wilson e Dona Esther, pela generosidade e ajuda, providenciais naquela dura fase de adaptação. Saibam que tenho com vocês uma impagável dívida de gratidão.

Aos amigos do Instituto de Física da UFF, pela convivência prazerosa, amizade e camaradagem: Orahcio Felicio, Vladmir Miranda, Daniel Lourenço, Luciana Hirsch, Francisco Dinola, Nuno Crokidakis, André Luis, Pierre Soares, Gabriela Coutinho, Tiago Rosa, Raphael Dias, Marlon Ramos, Alexandre Lima, Vitor Lara, Ingrid Hammes, Daiana Faria, Francisco Culchac, Maria Florencia, Leonardo Justino, Carlo Eduardo Souza (Cadu), Diego Machado, Denis Lubián, Flaviano Santos, Estefani Marchiori, Richard Caraballos, David Montealegre, Antonio Duarte, Gabriel Rosa, Bruno Inchausp, Carlos Chinchay, Cynthia Contreras, Gildario Dias, Filipe Guimarães, Alberto Cid, Rafael Silveira, Rodrigo dos Santos e Marcos Eduardo.

À minha grande amiga Jeannie Rangel, por sua amizade sincera, pela gentileza e

paciência infinita em ouvir minhas reclamações e também pela companhia amistosa na hora de compartilhar as risadas e os muitos momentos de descontração.

Ao meu grande amigo Anderson Tomaz, por sua generosa amizade, camaradagem e pelas muitas conversas agradáveis sobre diversos temas: política, futebol, ciência, educação etc, com as quais sempre aprendi muito. Agradeço também por protagonizar aquelas imperdíveis sessões de *stand-up comedy* na Cantareira, IF-UFF, Caneco do Mário ou após nossas partidas de futebol.

Ao meu grande amigo Rhonald Burgos, pela agradável convivência, amizade e enorme generosidade.

Aos amigos do CBPF, pelas conversas e os momentos de diversão: Aline Araújo, Rafael Perez, Azucena Paz, Rafael Aranha, Júnio Toniato, Josephine Rua, Florencia Teppa, Felipe Poulis, Érico Goulart, Grasielle Santos, Eduardo Bittencourt, Marília Carneiro, Bruno Dias, Marcela Campista, Jefferson Morais e Rodrigo Turcati.

Às secretárias da pós-graduação: Fernanda Caetano e Valéria Azevedo, pela gentileza inesgotável, solicitude e enorme boa vontade em fazer um bom trabalho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro.

CÂNTICO NEGRO (JOSÉ RÉGIO)

“Vem por aqui” - dizem-me alguns com os olhos doces
Estendendo-me os braços, e seguros de que seria bom que eu os ouvisse
Quando me dizem: “vem por aqui!”
Eu olho-os com olhos lassos,
(Há, nos olhos meus, ironias e cansaços)
E cruzo os braços, e nunca vou por ali.
A minha glória é esta: criar desumanidades!
Não acompanhar ninguém - que eu vivo com o mesmo sem-vontade
Com que rasguei o ventre à minha mãe
Não, não vou por aí! Só vou por onde
Me levam meus próprios passos.
Se ao que busco saber nenhum de vós responde
Por que me repetis: “vem por aqui!”?

Prefiro escorregar nos becos lamacentos,
Redemoinhar aos ventos, como farrapos, arrastar os pés sangrentos,
A ir por aí. Se vim ao mundo, foi só para desflorar florestas virgens,
E desenhar meus próprios pés na areia inexplorada!
O mais que faço não vale nada.

Como, pois, sereis vós
Que me dareis impulsos, ferramentas e coragem
Para eu derrubar os meus obstáculos?
Corre, nas vossas veias, sangue velho dos avós,
E vós amais o que é fácil!

Eu amo o Longe e a Miragem, amo os abismos,
As torrentes, os desertos.

Ide! Tendes estradas, tendes jardins, tendes canteiros,
Tendes pátria, tendes tetos, tendes regras, e tratados,
E filósofos, e sábios.

Eu tenho a minha Loucura !

Levanto-a como um facho,

A arder na noite escura,

E sinto espuma, e sangue, e cânticos nos lábios.

Deus e o Diabo é que me guiam, mais ninguém!

Todos tiveram pai, todos tiveram mãe;

Mas eu, que nunca principio nem acabo,

Nasci do amor que há entre Deus e o Diabo.

Ah, que ninguém me dê piedosas intenções,

Ninguém me peça definições!

Ninguém me diga: “vem por aqui!”

A minha vida é um vendaval que se soltou,

É uma onda que se levantou,

É um átomo a mais que se animou.

Não sei por onde vou, não sei para onde vou,

Só sei que não vou por aí!

Resumo

Nesta tese analisamos o campo gravitacional de um monopolo global no contexto de uma teoria $f(R)$ da gravitação. Como primeiro passo, expressamos as equações de campo em termos de $F(R) = \frac{df(R)}{dR}$. Uma vez que estamos lidando com um sistema esfericamente simétrico, assumimos que $F(R)$ é uma função apenas da coordenada radial, i.e $F(R(r)) = \mathcal{F}(r)$. Assim, a escolha de uma forma específica para $f(R)$ será equivalente a adotar um *Ansatz* para $\mathcal{F}(r)$. Ademais, adotando a aproximação de campo fraco, encontramos as componentes não-nulas do tensor métrico.

Além disso, sugerimos uma abordagem para analisar o movimento de partículas no espaço-tempo de um monopolo global no escopo dessa teoria de gravidade modificada tipo- $f(R)$. Escolhendo uma forma funcional explícita para $\mathcal{F}(r)$, obtemos as soluções para o tensor métrico no regime do campo fraco e também calculamos as geodésicas do tipo-tempo e analisamos o movimento de uma partícula teste massiva neste espaço-tempo. Um aspecto interessante é o surgimento de uma força atrativa exercida pelo monopolo sobre a partícula. Por fim, fazemos também uma comparação com os resultados correspondentes obtidos na teoria da Relatividade Geral (RG) e na teoria de Brans-Dicke.

Abstract

In this thesis we analyze the gravitational field of a global monopole in the context of $f(R)$ gravity. As a first step, we express the field equations in terms of $F(R) = \frac{df(R)}{dR}$. Since we are dealing with a spherically symmetric system, we assume that $F(R(r)) = \mathcal{F}(r)$ is a function of the radial coordinate only. So, the choice of a specific form for $f(R)$ will be equivalent to adopt an *Ansatz* for $\mathcal{F}(r)$. Moreover, adopting the weak field approximation, we can provide all components of the metric tensor.

Besides, we suggest an approach to analyze the motion of a test particle in the space-time of a global monopole within this $f(R)$ -like modified gravity. By choosing an explicit functional form for $\mathcal{F}(r)$, we obtain the weak field solutions for the metric tensor, we compute the time-like geodesics and we also analyze the motion of a massive test particle in this space-time. An interesting feature is an emerging attractive force exerted by the monopole on the particle. A comparison with the corresponding results obtained in the General Relativity theory and in the Brans-Dicke theory are also made.

Conteúdo

Introdução	1
1 Quebra espontânea de simetria e formação de defeitos topológicos	5
1.1 Introdução	5
1.2 Quebra espontânea de simetria	6
1.2.1 Quebra espontânea de simetria num sistema ferromagnético	6
1.2.2 Quebra espontânea de uma simetria discreta	8
1.2.3 Quebra espontânea de uma simetria contínua global	11
1.3 Formação de defeitos topológicos no Universo primordial	14
1.3.1 Paredes de domínio	18
1.3.2 Monopolos globais	19
2 Monopolo global em teorias de gravitação: teoria da Relatividade Geral e teoria de Brans-Dicke	22
2.1 Introdução	22
2.2 Caso I: Teoria da Relatividade Geral	22
2.3 Caso II: Teoria de Brans-Dicke	25
3 As teorias $f(R)$ da gravitação	29
3.1 Introdução	29
3.2 Equações de campo modificadas	31
3.3 Equivalência entre teorias $f(R)$ e teorias escalar-tensoriais	33
3.4 Condições de estabilidade sobre as derivadas de $f(R)$	36

3.5	Soluções esfericamente simétricas em teorias $f(R)$ no vácuo	38
4	Monopolo global em teorias $f(R)$ da gravitação	41
4.1	Equações de campo	41
4.2	Soluções no regime de campo fraco	42
5	Movimento de partículas teste em torno de um monopolo global em uma teoria $f(R)$ da gravitação	47
5.1	Solução para $\mathcal{F}(r) = 1 + \psi_0 r^n$	47
5.1.1	A relação conforme com a métrica de Barriola-Vilenkin	51
5.2	Movimento clássico de uma partícula teste	52
5.2.1	O movimento tangencial	53
5.2.2	O surgimento de uma força extra	54
	Conclusão	60
	Bibliografia	62

Introdução

A formação de defeitos topológicos é um fenômeno frequentemente observado em diversos contextos na Física. Sua causa deve-se a um processo conhecido como *quebra espontânea de simetria* [1–3]. Tal processo ocorre sempre que um sistema físico possui uma determinada simetria que não é compartilhada pelo seu estado de mínima energia (vácuo). Como sabemos, transições de fase podem tanto quebrar quanto restaurar uma dada simetria de um sistema [4]. Sendo assim, o processo de quebra de simetria está, via de regra, associado a alguma transição de fase experimentada pelo sistema físico observado. Em sistemas ferromagnéticos, por exemplo, considerando que inicialmente o material está livre da influência de um campo magnético externo, a função hamiltoniana correspondente é invariante sob rotações. Porém, abaixo de uma certa temperatura crítica - conhecida como *temperatura de Curie* - o estado de mínima energia do sistema apresentará uma magnetização não-nula, que é claramente não-invariante sob rotações. Considerando que, para um mesmo valor da energia mínima, há vários valores possíveis a serem assumidos pela magnetização, dizemos que há uma degenerescência no vácuo. É exatamente a escolha aleatória que o sistema faz de um vácuo específico que constitui a quebra espontânea de simetria [5].

Sabemos que no processo de evolução do nosso universo, a temperatura sempre desempenhou um papel fundamental [6]. Tendo um início extremamente quente, o universo, ao longo de sua expansão, experimentou uma progressiva diminuição de sua temperatura, o que favoreceu a eclosão de sucessivas transições de fase que, ao longo do tempo, alteraram o estado altamente simétrico que o regime de temperaturas elevadas lhe conferia em que, acredita-se, vigorava uma teoria de grande unificação [7]. Uma das consequências dessas

quebras de simetria pode ter sido o surgimento de defeitos topológicos gravitacionais [8,9]. Alguns dos principais tipos de defeitos que podem ter sido produzidos no universo primordial são: cordas cósmicas, paredes de domínio e monopolos globais. O monopolo global, que é o tipo de defeito o qual esta tese se propõe a estudar, é formado numa teoria em que há uma quebra espontânea da simetria $SO(3)$ global para $U(1)$.

As propriedades do campo gravitacional de um monopolo global foram estudadas em 1989, por M. Barriola e A. Vilenkin [10], no contexto da RG. Resolvendo as equações de Einstein para uma métrica esfericamente simétrica, em que o tensor energia-momento é o do monopolo global, os autores observaram, entre outras coisas, que seu espaço-tempo apresenta um deficit de ângulo sólido. Além disso, mostraram que o monopolo global não exerce qualquer força gravitacional sobre partículas teste que eventualmente se movam na sua vizinhança.

Em 1997, A. Barros e C. Romero investigaram o campo gravitacional produzido por um monopolo global no âmbito de uma teoria de Brans-Dicke [11]. Entre outros aspectos interessantes estudados nesse trabalho, mostraram que a métrica obtida é conformalmente relacionada à métrica de Barriola-Vilenkin. Ademais, descobriram que numa teoria de Brans-Dicke, ao contrário do observado na RG, um monopolo global exerce força gravitacional sobre partículas teste que se movem em torno dele.

O foco principal desta tese é estudar o campo gravitacional de um monopolo global numa teoria de gravidade modificada, tipo $f(R)$. Na referência [12], apresentamos nossa contribuição ao tema, introduzindo na literatura a discussão sobre o espaço-tempo de um monopolo global, analisado sob essa nova perspectiva. Posteriormente, estudamos aspectos referentes ao movimento de partículas teste nesta geometria [13], com algumas generalizações ao que foi feito em [12], fazendo as devidas comparações com os resultados e aspectos investigados por Barriola-Vilenkin e Barros-Romero em [10] e [11], respectivamente.

As teorias $f(R)$ da gravitação têm recebido enorme atenção na última década, como

um dos modelos possíveis para explicar a origem da expansão acelerada do Universo, descoberta em 1998 [14]. Uma teoria $f(R)$ consiste em modificar a RG, em grandes escalas, ao propor a substituição do escalar de curvatura na ação de Einstein-Hilbert por uma função arbitrária do mesmo, $f(R)$. Modificações desse tipo na gravidade não são novidades. Elas já foram propostas há alguns anos atrás, seja como um possível caminho para se obter uma teoria de gravitação renormalizável, o que é indispensável para se alcançar a tão almejada gravitação quântica, como mostrou K. S. Stelle [15], seja como uma forma de descrever o processo inflacionário pelo qual o universo primordial passou como analisado por A. Starobinsky, J. D. Barrow e S. Cotsakis, assumindo correções na gravidade em escalas próximas à de Planck [16,17], ou ainda como uma maneira de evitar singularidades cosmológicas e em buracos negros [18]. Tais teorias, conforme analisado por R. P. Woodard [19], evitam a chamada instabilidade de Ostrogradski, que prevê uma instabilidade linear em hamiltonianas associadas a lagrangianas que dependem das derivadas superiores das variáveis dinâmicas [20]. Para uma boa revisão e discussão acerca das teorias $f(R)$ recomendamos [21–23].

Esta tese está organizada da seguinte maneira: no capítulo 1, faremos uma breve revisão do processo de quebra espontânea de simetria e sua consequência mais notável, e que mais nos interessa aqui, que é a formação de defeitos topológicos gravitacionais, dando ênfase ao monopolo global, que ocupa posição central nesta tese. No capítulo 2, revisaremos o estudo do campo gravitacional do monopolo global em duas diferentes teorias de gravitação, a saber, a RG e a teoria de Brans-Dicke. Destacaremos nesse capítulo, os principais resultados obtidos pelos autores, nos seus respectivos trabalhos. No capítulo 3, as teorias $f(R)$ com seus fundamentos e propriedades serão revisitadas, no intuito de familiarizar o leitor com estas teorias alternativas, e subsidiá-lo com o arcabouço necessário para a compreensão dos estudos feitos nos capítulos seguintes. O capítulo 4 será dedicado ao estudo do monopolo global no âmbito de uma teoria $f(R)$, que constitui uma contribuição original que apresentamos nesta tese [12], dando origem a um

novo horizonte de possibilidades a serem exploradas e de fenômenos diversos envolvendo monopolos globais nesta teoria alternativa, tão em voga na atualidade. No capítulo 5, damos um passo adiante, ao analisarmos alguns efeitos experimentados por uma partícula teste no campo gravitacional de um monopolo global ambientado numa gravidade $f(R)$. As devidas comparações com as análises correspondentes feitas nos cenários da RG e da teoria de Brans-Dicke também são feitas. Essa é mais uma contribuição original que oferecemos e que também motiva esta tese [13]. Por fim, na Conclusão, faremos uma síntese dos resultados, discutindo-os e apresentando algumas perspectivas futuras que esta tese nos oferece.

Ao longo desta tese, usamos a assinatura $(+, -, -, -)$, e as seguintes definições:

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \partial_{\gamma}\Gamma^{\alpha}_{\beta\delta} - \partial_{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma}\Gamma^{\mu}_{\beta\delta} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\delta}\Gamma^{\mu}_{\beta\gamma} \text{ e } R_{\alpha\beta} = R^{\gamma}_{\alpha\gamma\beta}.$$

Capítulo 1

Quebra espontânea de simetria e formação de defeitos topológicos

1.1 Introdução

Defeitos topológicos são estruturas muito peculiares, possíveis de serem observadas em diversos sistemas físicos [1]. Em sistemas de matéria condensada, tais como cristais líquidos, a existência de tais estruturas já é bastante conhecida [2, 3]. Em cosmologia, é ainda uma hipótese a ser confirmada, porém uma possibilidade bastante razoável do ponto de vista físico [8, 9]. O surgimento de defeitos topológicos num dado sistema está intimamente relacionado a processos de transições de fase experimentados por ele.

Como é sabido, transições de fase podem quebrar simetrias originalmente existentes num sistema, tanto quanto podem restaurar certas simetrias. A quebra de simetria, decorrente de transições de fase, é um fenômeno chave para a formação de defeitos topológicos, pois pode-se verificar que uma dada simetria que é quebrada determina um tipo específico de defeito a ser produzido. O processo de formação de defeitos pode ser ilustrado a partir de uma situação muito simples [24]: o fenômeno de congelamento da superfície de um lago. Inicialmente, na fase líquida, as moléculas da água encontram-se num estado extremamente desordenado e portanto com alto grau de simetria, visto que a água terá um aspecto altamente homogêneo, sendo muito difícil distinguir um ponto de outro, ao longo de toda a porção do fluido. Porém, com seu resfriamento gradual, o lago congela-se ao atingir a temperatura crítica, $0^\circ C$. Como sabemos, o gelo caracteriza-se por uma

estrutura cristalina em que as moléculas passam a um estado altamente ordenado. Dessa forma, a simetria inicial associada ao estado desordenado das moléculas é quebrada. Entretanto, esse estado ordenado não é o mesmo ao longo de todo o lago, mas distinto para diferentes regiões do lago. Porém, quando duas ou mais dessas regiões distintas do lago congelado entram em contato, a interface que as separa possui um ordenamento não definido e diferente de todas as regiões em volta, daí dizemos que ocorreu a formação de um *defeito* naquele ponto. Esse exemplo nos aproxima um pouco da ideia fundamental por trás do processo de formação de defeitos observados em diversos cenários na física.

Com essa motivação inicial, de natureza mais qualitativa, passamos à uma discussão um pouco mais técnica a respeito do processo conhecido como *quebra espontânea de simetria*. Partiremos de modelos que nos fornecerão subsídios necessários para compreensão do surgimento de defeitos no contexto cosmológico.

1.2 Quebra espontânea de simetria

1.2.1 Quebra espontânea de simetria num sistema ferromagnético

Para compreender o processo de quebra espontânea de simetria, tomaremos como inspiração um sistema ferromagnético [25], no qual o campo magnético externo é inicialmente zero. As propriedades de um sistema deste tipo são abordados pelo modelo desenvolvido por Heisenberg, que considera interações spin-spin, entre primeiros vizinhos, para o qual a função hamiltoniana é dada por:

$$H = -\frac{1}{2}J \sum_{(i,j)} \sigma_i \cdot \sigma_j , \quad (1.2-1)$$

sendo o somatório definido ao longo de todos sítios de primeiros vizinhos (i, j) e σ_i , o spin localizado no sítio i . A hamiltoniana acima, sendo uma grandeza escalar, é naturalmente invariante sob rotações realizadas no sistema. Uma forma de expressarmos essa invariância é definindo um operador unitário $U(R)$ que executa uma rotação R no sistema e impondo que tal operador comute com a hamiltoniana H , i.e

$$U(R)H = HU(R) . \quad (1.2-2)$$

Entretanto, tal invariância não se observará para o caso dos auto-estados de energia do sistema. De fato, é sabido que abaixo da temperatura crítica, T_c (temperatura de Curie), o estado fundamental do sistema possui uma magnetização não-nula, \mathbf{M} , que é obviamente não-invariante sob rotações. A invariância expressa pela equação (1.2-2) implica que o estado $|\mathbf{M}\rangle$ e o estado $|\mathbf{M}'\rangle$, em que

$$M'_i = R_{ij} M_j , \quad (1.2-3)$$

são degenerados. Isto significa que o estado com magnetização \mathbf{M} possui a mesma energia que um certo estado rotacionado \mathbf{M}' . De fato, se o sistema for aquecido até ultrapassar a temperatura crítica T_c (situação na qual \mathbf{M} se anula) e em seguida resfriado à temperatura original, ainda na ausência de qualquer campo magnético externo, então é de se esperar que, em geral, o estado fundamental tenha uma magnetização $\mathbf{M}' \neq \mathbf{M}$. Assim, a simetria consiste exatamente na degenerescência do estado de mínima energia e qualquer escolha de um estado fundamental em particular não será simétrico sob rotações, uma vez que a magnetização apontará numa direção bem definida. Esta direção é selecionada “espontaneamente” pelo sistema, conforme ele diminui sua temperatura e é por essa razão que dizemos que a simetria é “espontaneamente quebrada”.

Na teoria do campo médio de Ginzburg-Landau, o funcional da energia livre do sistema, aqui representado por F possui a seguinte forma

$$F = \int d^3x \left[\mathcal{F}(\mathbf{M}) + \frac{1}{2} K_L(\mathbf{M}) (\nabla \cdot \mathbf{M})^2 + \frac{1}{2} K_T(\mathbf{M}) (\nabla \times \mathbf{M})^2 + \dots \right] , \quad (1.2-4)$$

em que

$$\mathcal{F}(\mathbf{M}) = N \left(\frac{T - T_c}{T_c} \mathbf{M}^2 + \beta (\mathbf{M}^2)^2 + \dots \right) , \quad (1.2-5)$$

sendo N a densidade de estados, T a temperatura e β uma constante positiva. Em (1.2-4) as reticências representam termos envolvendo mais de duas derivadas e em (1.2-5) correspondem a potências superiores a \mathbf{M}^2 .

Os termos de divergência e rotacional do vetor magnetização, presentes na expressão (1.2-4), nos dizem que tal equação permite, a princípio, situações gerais em que são ob-

servadas flutuações locais em \mathbf{M} , como por exemplo: a presença de sorvedouros ou fontes, que contribuiria para um divergente não-nulo de \mathbf{M} ; ou uma circuitação deste vetor, que contribuiria para um rotacional não-nulo. Os coeficientes K_L e K_T são funções genéricas da magnetização, sempre positivas, que serviriam, respectivamente, como pesos dessas duas situações. Entretanto, tais situações são inibidas pela exigência de que a energia seja mínima, o que impõe que suas contribuições sejam muito pequenas. O requerimento de positividade das funções K_L e K_T , deve-se justamente ao fato de que, dessa forma, eles contribuiriam sempre para o aumento da energia, que por ser algo extremamente indesejado pela natureza, o sistema se organizaria de modo a penalizar tais situações representadas por estes coeficientes.

Vamos aqui assumir a hipótese bastante razoável de que o vácuo é homogêneo, não possuindo portanto nenhuma dependência espacial, i.e

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}) = \mathbf{M} . \quad (1.2-6)$$

Com isso descartamos todas as derivadas de \mathbf{M} , tornando F uma função apenas de $(\mathbf{M})^2$. Claramente, portanto, se \mathbf{M} é não-nulo, não é possível prever sua direção, e sua simetria é espontaneamente quebrada. Podemos obter $|\mathbf{M}|$ minimizando

$$F = VN \left(\frac{T - T_c}{T_c} |\mathbf{M}|^2 + \beta |\mathbf{M}|^4 \right) , \quad (1.2-7)$$

na qual V representa o volume do sistema. Considerando a magnetização muito pequena, desprezamos potências superiores de $|\mathbf{M}|$. Está claro na equação (1.2-7) acima, e ilustrado na figura (1.1) na página seguinte, que se $T > T_c$, F terá um mínimo quando $\mathbf{M} = 0$, enquanto que se $T < T_c$ o valor mínimo de F será verificado quando $\mathbf{M} \neq 0$. Dessa forma, o primeiro caso nos mostra uma situação em que o estado fundamental é simétrico sob rotações, simetria esta que é espontaneamente quebrada no segundo caso.

1.2.2 Quebra espontânea de uma simetria discreta

Usaremos agora o formalismo empregado na seção anterior, aplicando-o a uma teoria de campos à temperatura nula. Entretanto, a simetria a ser quebrada aqui não será

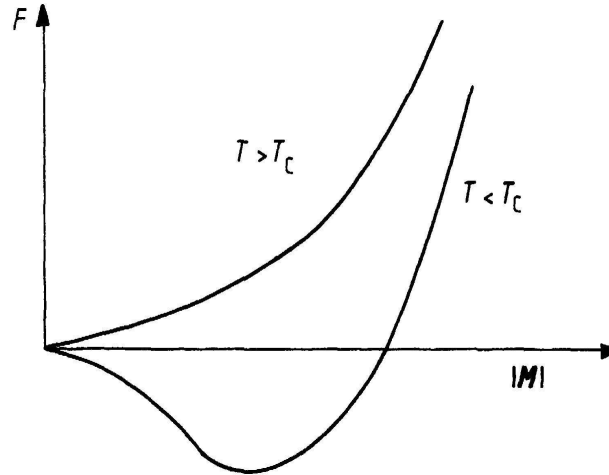


Figura 1.1: Funcional de energia livre de um sistema ferromagnético. Na representação gráfica acima fica clara a existência de quebra espontânea de simetria como consequência imediata de uma transição de fase sofrida pela sistema.

a simetria rotacional vista na última seção, mas sim alguma outra simetria interna do sistema. Neste caso, fica claro que o análogo do estado fundamental com que lidamos no caso do sistema ferromagnético será, evidentemente, o vácuo estudado no contexto de uma física de partículas.

Devemos portanto impor à lagrangiana da teoria uma invariância sob a referida simetria interna e ao mesmo tempo assumir que o vácuo seja caracterizado por algum campo que nesse estado assumira um valor diferente de zero e que não acompanhe a mesma invariância da lagrangiana perante tal transformação de simetria. Se o campo em questão fosse um espinor ou um campo vetorial, por exemplo, então o vácuo correspondente seria caracterizado por um momento angular não-nulo $J(= 1/2 \text{ ou } 1)$ e com isso a invariância rotacional seria quebrada. Na física de partículas, porém, o vácuo é invariante sob simetria de rotações. Com isso, é razoável assumirmos que a simetria interna, que estamos preocupados em analisar aqui, deva ser quebrada por um *campo escalar* que assumira um valor não-nulo no vácuo.

Usando uma linguagem importada da mecânica quântica ¹, podemos pensar nesse

¹Tendo em vista os propósitos estritos desta tese, os efeitos quânticos decorrentes desse tipo de formalismo serão, entretando, aqui omitidos.

campo escalar como um operador, cujo valor esperado na ausência de qualquer fonte, i.e no vácuo, é não-nulo:

$$\langle 0|\phi(x)|0\rangle = \phi_c(x) \neq 0 , \quad (1.2-8)$$

em que $\phi_c(x)$ é o valor do campo no vácuo. Verifica-se que o vácuo é dotado de invariância translacional, o que exige que $\phi_c(x)$ seja independente de x , ou seja

$$\phi_c(x) = \phi_c . \quad (1.2-9)$$

Consideremos um modelo bastante simples, cuja lagrangiana é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi) - V(\phi) \quad (1.2-10)$$

na qual o potencial V é dado por ²

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + \frac{1}{4!} \lambda \phi^4 . \quad (1.2-11)$$

A única simetria obedecida por esse modelo é a invariância sob a transformação discreta abaixo

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) \equiv -\phi(x) . \quad (1.2-12)$$

Claro está que V somente possuirá um mínimo absoluto se

$$\lambda \geq 0 . \quad (1.2-13)$$

Quando μ^2 é positivo, V terá um mínimo somente em $\phi = 0$, e μ corresponderá simplesmente à massa do campo ϕ . Por outro lado, V apresentará um mínimo num valor não-nulo de ϕ quando

$$\mu^2 < 0 , \quad (1.2-14)$$

que corresponderá aos seguintes valores

$$\phi_c = \pm (-6\mu^2/\lambda)^{1/2} . \quad (1.2-15)$$

²Aqui chamamos a atenção do leitor para a semelhança entre essa expressão para o potencial V e aquela mostrada na seção anterior para a energia livre (1.2-7). Nos dois casos, as duas grandezas correspondem à quantidade a ser minimizada para que se tenha um estado fundamental/vácuo.

Como nenhum dos dois valores de ϕ_c acima respeitam a simetria dada pela transformação (1.2-12), ao selecionar naturalmente um destes valores, a simetria do sistema é *espontaneamente* quebrada. É razoável definirmos um campo que represente excitações em torno deste vácuo, isto é

$$\tilde{\phi} \equiv \phi - \phi_c , \quad (1.2-16)$$

cujos valores esperados no vácuo serão claramente zero

$$\langle 0 | \tilde{\phi} | 0 \rangle = 0 . \quad (1.2-17)$$

Uma vez que a função $\tilde{\phi}$ mede flutuações em torno do ponto assimétrico $\phi = \phi_c$, i.e que quebra a simetria por reflexão, é natural pensarmos que ao expressarmos a lagrangiana (1.2-10) em termos de $\tilde{\phi}$, a simetria $\tilde{\phi} \rightarrow -\tilde{\phi}$ não seja preservada. Este fato pode ser imediatamente confirmado se usarmos (1.2-15) e (1.2-16):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\left(\partial_\mu \tilde{\phi} \right) \left(\partial^\mu \tilde{\phi} \right) + 2\mu^2 \tilde{\phi}^2 \right] - \frac{\lambda}{4!} \left(\tilde{\phi}^4 + 4\tilde{\phi}^3 \phi_c \right) - \frac{1}{4} \mu^2 \phi_c^2 . \quad (1.2-18)$$

Nessa expressão o termo cúbico $\tilde{\phi}^3$ nos diz que a simetria é espontaneamente quebrada, conforme esperado.

1.2.3 Quebra espontânea de uma simetria contínua global

A teoria de campo escalar, descrita pela lagrangiana (1.2-10), que discutimos até aqui possui apenas a simetria discreta (1.2-12). Um estudo mais detalhado das interações fundamentais, por outro lado, exigiria um passo adiante, que nos levaria à investigação da quebra espontânea de simetria para o caso de uma teoria com simetria de calibre contínua. Embora tal estudo aprofundado esteja muito além do escopo desta tese, acreditamos ser de grande importância darmos este passo adiante, sobretudo pelo aspectos inteiramente novos que a quebra de uma simetria contínua discreta acrescenta ao formalismo estudado na seção anterior e que, no caso de uma simetria discreta, não são observados. Assim sendo, consideramos o modelo de campo escalar complexo, conhecido como *modelo de*

Goldstone [26], descrito pela seguinte lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi) (\partial^\mu \phi^*) - V(\phi, \phi^*) , \quad (1.2-19)$$

que é invariante sob uma transformação de calibre global $U(1)$

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{i\alpha} \phi(x) \quad (1.2-20)$$

em que α é um parâmetro positivo e independente das coordenadas. É este o motivo de designarmos a transformação acima como “global”. Além disso,

$$V(\phi, \phi^*) = V(\phi\phi^*) . \quad (1.2-21)$$

Em teorias renormalizáveis é usual assumir a seguinte forma para o potencial V

$$V(\phi, \phi^*) = \mu^2 \phi\phi^* + \frac{\lambda}{4} (\phi\phi^*)^2 , \quad (1.2-22)$$

que é análogo a (1.2-11). Tal como assumido no caso anterior, impomos que λ seja positivo. Se μ^2 for positivo V terá um mínimo absoluto apenas em $\phi = 0$. Quando μ^2 é negativo, V adquire um mínimo num valor não-nulo de ϕ que satisfaz

$$|\phi_c|^2 = -2\mu^2/\lambda . \quad (1.2-23)$$

Podemos, por conveniência, definir o potencial (1.2-22) V como:

$$V(\phi, \phi^*) \approx \frac{\lambda}{4} (\phi^* \phi - \eta^2)^2 , \quad (1.2-24)$$

que estará de acordo com a equação (1.2-22) se $\eta^2 \equiv -2\mu^2/\lambda = |\phi_c|^2$. Os mínimos do potencial (1.2-24) residem sobre o círculo $|\phi| = \eta$, o estado fundamental da teoria, também conhecido como *variedade de vácuo*, que é caracterizado por um valor esperado não-nulo, a saber:

$$\langle 0|\phi|0\rangle = \eta e^{i\theta} , \quad (1.2-25)$$

sendo θ uma fase arbitrária. A transformação de fase (1.2-20) leva θ em $\theta + \alpha$, o que nos mostra que o estado de vácuo $|0\rangle$ não é invariante sob (1.2-20) e a simetria é espontaneamente quebrada.

O estado correspondente a $\langle 0|\phi|0\rangle = 0$, em que a simetria não é quebrada, equivale a um máximo local de V , usualmente chamado de *falso vácuo*, enquanto que o estado dado por (1.2-25) é denominado *vácuo verdadeiro*. Flutuações em torno do falso vácuo são descritas pela lagrangiana (1.2-19), ao considerarmos tal aproximação no potencial (1.2-24), isto é

$$V(\phi, \phi^*) \approx -\frac{1}{2}\lambda\eta^2\phi^*\phi + \text{const} . \quad (1.2-26)$$

O sinal negativo do termo de massa ³ na equação acima indica a instabilidade deste estado simétrico.

Os estados de vácuo (1.2-25) nos quais a simetria é quebrada são caracterizados, cada um, por infinitos valores possíveis de θ e estão relacionado entre si pela transformação (1.2-20). Por esta razão, costuma-se dizer que o vácuo desta teoria é infinitamente degenerado. Ver figura (1.2).

Podemos analisar as propriedades do vácuo em sua plenitude ao selecionarmos um valor específico de θ . Escolhendo $\theta = 0$, podemos representar ϕ como uma excitação em torno desse estado de vácuo, ou seja

$$\phi = \eta + \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) , \quad (1.2-27)$$

sendo ϕ_1 e ϕ_2 campos reais cujos valores esperados no vácuo são nulos. Substituindo (1.2-27) em (1.2-19) encontramos a seguinte forma para a lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi_2)^2 - \frac{\lambda}{2}\eta^2\phi_1^2 + \mathcal{L}_{\text{int}} . \quad (1.2-28)$$

Em que \mathcal{L}_{int} é o termo de interação que acomoda todos os termos cúbicos e de potências superiores em ϕ_1 e ϕ_2 . É imediato notar, a partir da equação acima, que ϕ_1 representa uma partícula com massa positiva e igual a $\mu = \sqrt{\lambda}\eta^2$, enquanto ϕ_2 é não-massivo. O campo ϕ_1 é conhecido como *campo de Higgs*. A partícula sem massa é chamada de *bóson de Goldstone* e seu surgimento constitui uma regra geral da quebra espontânea de simetrias globais, que pode ser expressa no teorema abaixo:

³Aqui a massa associada a um campo ϕ é definida como a segunda derivada do potencial correspondente, calculada no mínimo, ou seja $m^2 = \left. \frac{d^2V(\phi)}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_{\text{mín}}}$.

Teorema de Goldstone [26]: Dado um grupo de simetria contínua global qualquer, para cada gerador deste grupo quebrado espontaneamente, surgirá uma partícula escalar não-massiva.

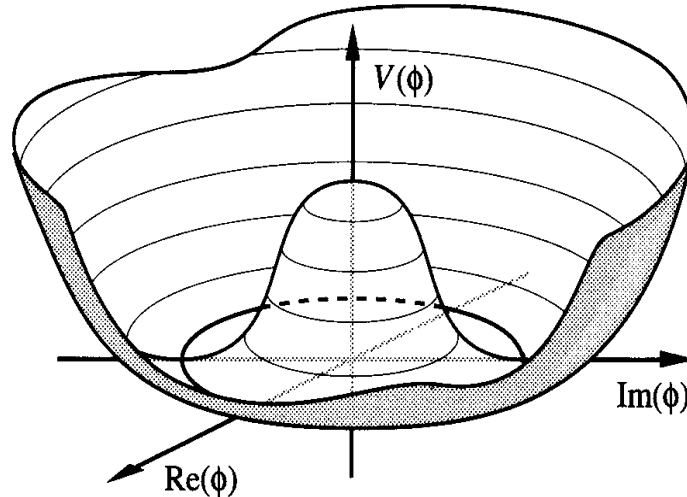


Figura 1.2: Gráfico do potencial de um campo escalar complexo, conhecido como *chapéu mexicano*, exibindo quebra espontânea de simetria.

1.3 Formação de defeitos topológicos no Universo primordial

O Modelo Cosmológico Padrão prevê que o nosso Universo em sua gênese encontrava-se num estado de altíssimas densidades e temperaturas [7]. Num regime de tão elevadas temperaturas, como ali se verificava, é natural intuirmos que havia um predomínio de um alto grau de simetria, que conferiria a um certo campo de Higgs, um valor de equilíbrio igual a $\phi = 0$. Conforme o Universo se expande e se resfria, ao atingir uma certa temperatura crítica $T = T_c$ ele pode sofrer uma transição de fase. Em teorias de grande unificação, sugere-se que até o instante $t = 10^{-43}$ s do nascimento do Universo, as interações fundamentais estariam unificadas e descritas por um certo grupo de simetria G , responsável pelo elevado grau de simetria ali observado. As sucessivas transições de fase ocorridas ao longo da expansão, seguidas das inúmeras quebras de simetria, permitiram que as interações fundamentais que hoje governam o Universo, descritas por subgrupos

de G , manifestassem posteriormente suas identidades próprias. Esse processo pode ser ilustrado no esquema abaixo

$$G \rightarrow H \rightarrow \dots \rightarrow SU(3) \times SU(2) \times U(1) \rightarrow SU(3) \times U(1)_{\text{em}} . \quad (1.3-29)$$

É exatamente no contexto de uma teoria de grande unificação, que concebe a existência de processos de quebra espontânea de simetria, decorrente de transições de fase nos momentos iniciais do Universo (cerca de 10^{-35} s, à temperaturas da ordem de 10^{16} GeV) que presume-se o surgimento de defeitos topológicos.

O primeiro a investigar a formação de defeitos topológicos no contexto cosmológico, baseado nas premissas acima descritas, foi T. W. Kibble em 1976 [8]. Sua ideia é de que uma dada transição de fase cosmológica, poderia ter resultado na formação de diversos domínios, cada um dos quais assumindo um valor específico da variedade de vácuo, representada por \mathcal{M} . Tais domínios seriam, inicialmente, comunicáveis entre si, não possuindo qualquer contato. No entanto, tal contato poderia passar a existir à medida que o Universo se expandisse. No momento em que isso acontecesse, os defeitos topológicos surgiriam exatamente na junção destes domínios. Tal processo é conhecido como *Mecanismo de Kibble*.

Passaremos agora a uma descrição um pouco mais detalhada deste processo [7]. Como ocorre em sistemas de matéria condensada, transições de fase podem ser tanto de primeira quanto de segunda ordem. Por questão de simplicidade, vamos nos ater somente ao caso de transições de segunda ordem. Para isso, consideremos como exemplo o modelo de Goldstone dado pela lagrangiana (1.2-19). O potencial efetivo, com a correção devida à temperatura, é dado por:

$$V_{\text{eff}}(\phi, T) = m^2(T) |\phi|^2 + \frac{\lambda}{4} |\phi|^4 , \quad (1.3-30)$$

em que

$$m^2(T) = \frac{\lambda}{12} (T^2 - 6\eta^2) \quad (1.3-31)$$

é a massa efetiva⁴ do campo ϕ no estado simétrico, $\langle \phi \rangle = 0$. Este termo de massa deve

⁴Para a obtenção mais rigorosa dessas quantidades, remetemos o leitor à referência [7].

se anular para um certo valor crítico da temperatura $T = T_c$, sendo

$$T_c = \sqrt{6}\eta . \quad (1.3-32)$$

O resultado verificado mostra que $T_c \sim \eta$. Para $T > T_c$, o quadrado da massa efetiva é positiva e o mínimo fixa-se em $\phi = 0$, assim o valor esperado de ϕ anula-se e a simetria se observa. Para $T < T_c$, temos $m^2(T) < 0$, o estado simétrico torna-se instável e ϕ possuirá um valor esperado não-nulo, e com isso a simetria se quebra. Minimizando V_{eff} em (1.3-30) obtemos, para $T < T_c$,

$$|\phi| = \frac{1}{\sqrt{6}} (T_c^2 - T^2)^{1/2} . \quad (1.3-33)$$

O aspecto determinante numa transição de fase de segunda ordem é que o parâmetro de ordem, no nosso caso o campo ϕ , cresce continuamente a partir de zero, à medida que a temperatura é diminuída (abaixo de T_c). A forma do potencial efetivo, abaixo e acima da temperatura crítica, está ilustrada na figura (1.3).

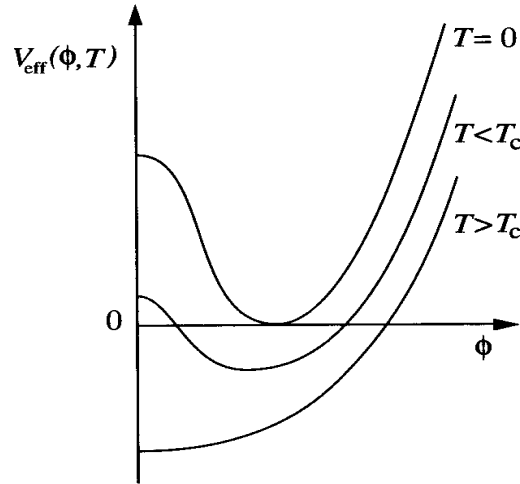


Figura 1.3: Gráfico do potencial efetivo dependente da temperatura $V_{eff}(\phi, T)$ para uma transição de fase de segunda ordem, próximo à temperatura crítica T_c .

Feitas essas considerações, cabe aqui alguns comentários a respeito do Mecanismo de Kibble, mencionado no início desta seção. No contexto cosmológico, quando o Universo esfria-se, abaixo da temperatura crítica, o campo apresenta a forma dada por (1.3-33).

Entretanto, a fase θ de ϕ não é determinada unicamente a partir da física local. Sua escolha depende de flutuações aleatórias, de modo que θ pode assumir valores distintos para diferentes regiões do espaço, que são os domínios aos quais nos referimos antes. Como a energia livre é minimizada por um campo espacialmente homogêneo ϕ , as variações espaciais de θ , da mesma forma, diminuirão gradualmente. Conforme comentado anteriormente, é de se esperar que tais domínios, em algum momento da evolução do Universo primordial, estiveram incomunicáveis entre si, portanto, é razoável definirmos aqui uma quantidade física, dependente apenas do tempo pelas razões expostas acima, que expresse o grau dessa incomunicabilidade entre os domínios. Dessa forma, definimos o *comprimento de correlação* $\xi(t)$ como sendo a escala de comprimento típica, acima da qual os valores de θ estão não-correlacionados. É de se esperar, portanto, que no momento em que os domínios entrarem em contato, o que ocorrerá à medida que o Universo se expandir, suas respectivas escalas de tamanho sejam da ordem do comprimento de correlação, conforme representado na figura (1.4).

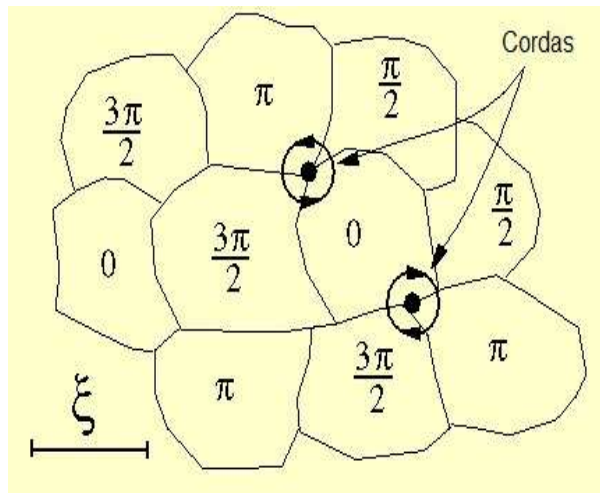


Figura 1.4: Formação de cordas cósmicas via Mecanismo de Kibble. O defeito é formado na junção entre três domínios, cada um representando um valor diferente para a fase θ . O tamanho típico dos domínios é o mesmo do comprimento de correlação.

Além disso, é exigido a $\xi(t)$ que obedeça ao seguinte vínculo de causalidade

$$\xi(t) < d_H(t) , \tag{1.3-34}$$

sendo d_H o horizonte causal, definido como a distância percorrida pela luz, medida no referencial comóvel, do instante do nascimento do Universo até o instante t .

Na figura (1.5) apresentamos uma outra ilustração bastante elucidativa quanto à formação de defeitos topológicos via Mecanismo de Kibble. No exemplo aqui considerado, em que a simetria quebrada é $U(1)$ global, temor como consequência a produção de um defeito linear chamado *corda cósmica global*.

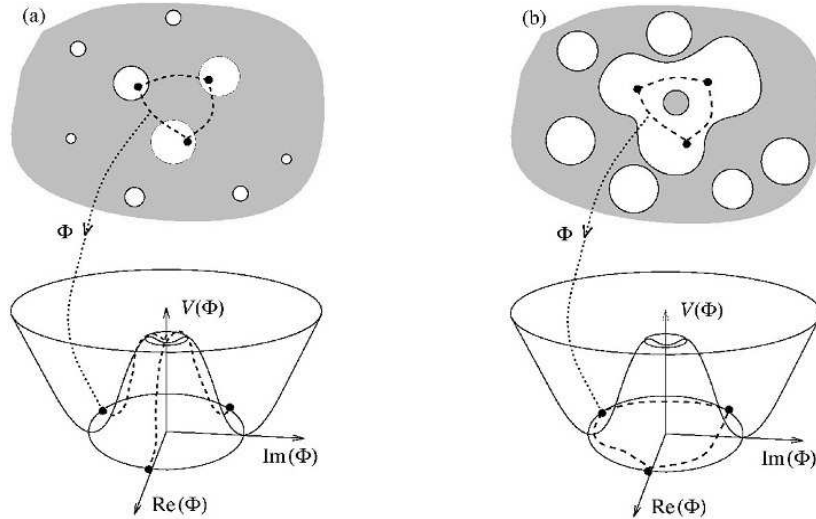


Figura 1.5: Mecanismo de Kibble: Produção de cordas cósmicas via quebra espontânea de simetria do grupo $U(1)$. (a) Na figura é observado o processo em que as regiões dominadas por diferentes valores do vácuo verdadeiro (isto é, diferentes valores da fase θ) começam a crescer como resposta à quebra da simetria. Os domínios em cinza representam o falso vácuo. (b) Na medida em que essas regiões entram em contato e se juntam, as regiões de falso vácuo, cercadas por domínios de vácuo verdadeiro, ficam comprimidas, formando assim defeitos topológicos.

Outros dois exemplos de defeitos topológicos que podem ter sido produzidos nas fases iniciais da evolução do Universo são as *paredes de domínio* e os *monopolos globais*.

1.3.1 Paredes de domínio

No caso das paredes de domínio, a formação se dá a partir de uma teoria de campo escalar real, descrita pela lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - \eta^2)^2 . \quad (1.3-35)$$

Neste caso, vemos que a simetria \mathcal{Z}_2 de reflexão da lagrangiana, isto é, a invariância sob a transformação $\phi \rightarrow -\phi$ é espontaneamente quebrada quando o campo ϕ escolhe um dos

valores esperados para o vácuo $\langle\phi\rangle = -\eta$ ou $\langle\phi\rangle = +\eta$. A mesma análise feita acima, baseada no Mecanismo de Kibble, para o caso da quebra da simetria global $U(1)$, pode ser aqui reproduzida: sejam duas diferentes regiões quaisquer do espaço, inicialmente não-correlacionadas, ou seja, separadas por uma distância maior do que o comprimento de correlação ξ . Se em uma delas $\langle\phi\rangle = \eta$ e na outra $\langle\phi\rangle = -\eta$, e em algum momento elas entrarem em contato, na região de transição entre elas, o campo ocupará o falso vácuo, i.e $\langle\phi\rangle = 0$. Esta região de transição, corresponderá a um defeito bidimensional, conhecido como parede de domínio. Na figura (1.6) abaixo, vemos uma ilustração do processo de formação de paredes.

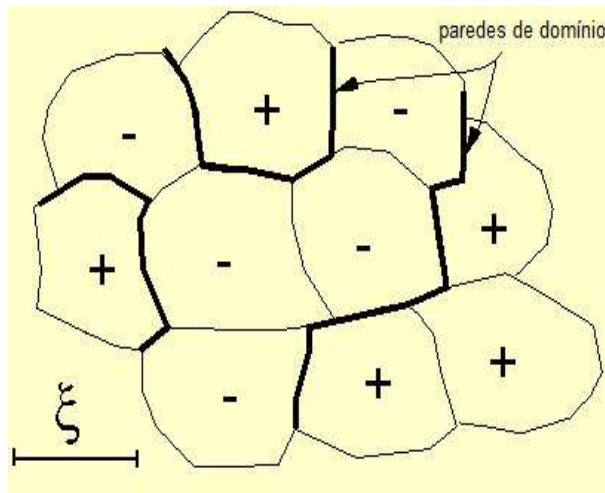


Figura 1.6: Mecanismo de Kibble para a produção de paredes de domínio.

1.3.2 Monopolos globais

Monopolos podem ser formados tanto a partir de uma quebra de simetria local⁵ quanto global. Neste último caso, em que campos de calibre estão ausentes da teoria, o monopolo é denominado *monopolo global*. Esta tese se concentrará exatamente neste último caso.

O monopolo global surge numa teoria cuja lagrangiana correspondente é

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi^a \partial^\mu \phi^a - \frac{\lambda}{4} (\phi^a \phi^a - \eta^2)^2, \quad (1.3-36)$$

⁵No caso em que temos a quebra de simetria local, destacamos o *monopolo de 't Hooft-Polyakov*, que é uma descrição via primeiros princípios do monopolo magnético de Dirac. Ver referências [5, 25].

em que o campo de Higgs ϕ^a trata-se de um isotripleto de campos escalares, i.e, $a = 1, 2, 3$. O modelo acima apresenta quebra espontânea de simetria do grupo $SO(3)$ para $U(1)$. Todo o procedimento ditado pelo Mecanismo de Kibble, conforme vimos ao longo deste capítulo, vale para a formação de monopolos globais. Pela simetria quebrada, trata-se de um defeito pontual que se encontra no vácuo falso e, tal como os outros, é formado pela junção de domínios residentes em diferentes estados do vácuo verdadeiro. Ou seja, todo o raciocínio usado na descrição dos outros defeitos, pode ser retomado aqui. Os monopolos globais são esféricamente simétricos e, embora considerados pontuais, possuem uma escala típica de tamanho, conhecida como núcleo do monopolo, dada por $\delta \sim (\sqrt{\lambda}\eta)^{-1}$ [10].

Para a forma funcional de ϕ^a , adotamos como *Ansatz* a configuração de *hedgehog*:

$$\phi^a = \eta h(r) \frac{x^a}{r}, \quad (1.3-37)$$

sendo $x^a x^a = r^2$. A função $h(r)$ deve obedecer a algumas condições de contorno. A primeira delas é que deve se anular em $r = 0$, a fim de que se assegure a regularidade na origem e garanta-se que o defeito se acomode sobre o falso vácuo $\phi^a = 0$, conforme esperado. A outra condição de contorno a ser imposta a $h(r)$ é que, para regiões fora do núcleo do monopolo, onde $r \gg \delta$, $h \rightarrow 1$. A importância dessa segunda condição é a de obrigar ϕ^a a cair na sua configuração de vácuo no infinito, que é representada por uma superfície esférica no espaço dos campos, no qual é válida a relação $\phi^a \phi^a = \eta^2$.

Uma vez que podemos identificar a borda do espaço real (o infinito) com uma superfície esférica, o fato de o campo assumir um valor não-nulo no infinito induzirá um mapeamento de uma superfície esférica no espaço dos campos, ou interno, S_{int}^2 , em outra superfície esférica no espaço real, S_{real}^2 . Este tipo de mapeamento, de uma superfície esférica ⁶ em outra, é o que define o caráter topológico desta teoria. Em topologia, tais mapeamentos são rotulados por elementos de um grupo, conhecido como *grupo de homotopia*. No caso do mapeamento descrito acima, representado por $S_{int}^2 \rightarrow S_{real}^2$, existem

⁶Aqui usamos a nomenclatura “superfície esférica” para nos referirmos genericamente às superfícies correspondentes numa dimensão qualquer, quer seja o círculo (S^1), a superfície esférica (S^2), uma hipersférica (S^3) e assim por diante.

$n \in \mathcal{Z}$ formas de “cobrir” uma superfície esférica com a outra. Este fato nos permite estabelecer uma relação de equivalência deste mapeamento com o conjunto dos números inteiros \mathcal{Z} , que pode ser expressa, de forma compacta, através da relação $\pi_2(S_2) = \mathcal{Z}$. Os vários valores de $n \in \mathcal{Z}$, definem o que chamamos de *setores de homotopia*. É possível verificar que mapeamentos dentro um setor de homotopia específico podem ser continuamente deformados uns nos outros, enquanto que mapeamentos pertencentes a diferentes setores de homotopia, não podem. Para uma revisão mais detalhada do assunto, recomendamos as referências [27] e [28].

Capítulo 2

Monopolo global em teorias de gravitação: teoria da Relatividade Geral e teoria de Brans-Dicke

2.1 Introdução

Neste capítulo nos concentraremos em analisar as consequências gravitacionais do monopolo global, tendo como base duas teorias de gravitação, a saber: a teoria da Relatividade Geral e a teoria de Brans-Dicke.

2.2 Caso I: Teoria da Relatividade Geral

Conforme é sabido [29], a ação da RG, também conhecida como ação de Einstein-Hilbert, é dada por

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} R + \mathcal{S}_m , \quad (2.2-1)$$

sendo

$$\mathcal{S}_m = \int d^4x \sqrt{-g} \mathcal{L}_m , \quad (2.2-2)$$

a ação de matéria, \mathcal{L}_m a lagrangiana de matéria, g o determinante da métrica e $\kappa \equiv 8\pi G$ a constante de acoplamento gravitacional. Além disso, as componentes do tensor energia-momento são obtidas através de

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}_m}{\delta g^{\mu\nu}} \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 . \quad (2.2-3)$$

A extremização da ação (2.2-1) com respeito à métrica, resulta nas equações de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \kappa T_{\mu\nu} . \quad (2.2-4)$$

Em 1989, M. Barriola e A. Vilenkin, investigaram o campo gravitacional de um monopolo global [10], apresentando em seu trabalho a solução aproximada das equações de Einstein (2.2-4) para a métrica fora do núcleo do monopolo.

Dada a simetria esférica do monopolo global, consideramos a forma mais geral para a métrica esfericamente simétrica e estática:

$$ds^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2) . \quad (2.2-5)$$

Pode-se verificar que as equações de campo associadas a ϕ^a , na métrica (2.2-5), reduzem-se a uma única equação para $h(r)$:

$$\frac{1}{A}h'' + \left[\frac{2}{Ar} + \frac{1}{2B} \left(\frac{B}{A} \right)' \right] h' - \frac{2h}{r^2} - \lambda\eta^2 h (h^2 - 1) = 0 . \quad (2.2-6)$$

As componentes não-nulas do tensor energia-momento associado à lagrangiana (1.3-36) são dadas por

$$\begin{aligned} T_0^0 &= \frac{\eta^2 h'^2}{2A} + \frac{\eta^2 h^2}{r^2} + \frac{\lambda}{4}\eta^4 (h^2 - 1)^2 , \\ T_1^1 &= -\frac{\eta^2 h'^2}{2A} + \frac{\eta^2 h^2}{r^2} + \frac{\lambda}{4}\eta^4 (h^2 - 1)^2 , \\ T_2^2 &= T_3^3 = \frac{\eta^2 h'^2}{2A} + \frac{\lambda}{4}\eta^4 (h^2 - 1)^2 . \end{aligned} \quad (2.2-7)$$

Para regiões muito distantes do núcleo do monopolo, onde vale a condição $h \approx 1$, as componentes do tensor energia-momento podem ser aproximadas por

$$T_0^0 \approx T_1^1 \approx \eta^2/r^2 \quad \text{e} \quad T_2^2 \approx T_3^3 \approx 0 . \quad (2.2-8)$$

Resolvendo as equações de Einstein para o tensor energia-momento aproximado (2.2-8) e a métrica (2.2-5), os autores obtiveram a seguinte solução

$$B(r) = A(r)^{-1} = 1 - 8\pi G\eta^2 - 2GM/r . \quad (2.2-9)$$

Para valores razoáveis de η e λ , o valor da massa encerrada no núcleo, M , é totalmente desprezível na escala astrofísica e pode ser negligenciada ¹. Uma métrica (2.2-9) com uma massa M muito grande, corresponderia ao espaço-tempo de um buraco negro de massa M dotado de uma carga de monopolo. Tal configuração poderia surgir, numa situação em que um monopolo global fosse engolido por um buraco negro de Schwarzschild.

Desprezando o termo de massa e reescalando apropriadamente as variáveis t e r , podemos reescrever a métrica do monopolo como

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - (1 - 8\pi G\eta^2) r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) . \quad (2.2-10)$$

A métrica (2.2-10) descreve um espaço com um deficit de ângulo sólido. Isto significa que a área de uma esfera de raio r não é $4\pi r^2$, mas $4\pi(1 - 8\pi G\eta^2) r^2$. A superfície $\theta = \pi/2$ possui a geometria de um cone com um deficit angular dado por $\Delta = 8\pi^2 G\eta^2$. Uma característica importante do espaço-tempo do monopolo global, que pode ser imediatamente verificado em (2.2-10) é que, uma vez que $g_{00} = \text{const.} = 1$, o monopolo não exerce força gravitacional sobre uma partícula teste na sua vizinhança. Chamamos a atenção para este resultado, destacando ser este um aspecto observado tipicamente no contexto da RG, e que conforme veremos mais à frente, não se reproduz em outras de teorias de gravitação.

Os autores analisaram também a propagação da luz no campo gravitacional de um monopolo global. Considere um sinal luminoso propagando-se de uma fonte S para um observador O . Sem perda de generalidade, podemos assumir que tanto S quanto O estão no plano equatorial, isto é, na superfície $\theta = \pi/2$. Se S , O e o monopolo estão perfeitamente alinhados, então a imagem aparecerá na forma de um anel cujo diâmetro angular é

$$\delta\phi = 8\pi^2 G\eta^2 l(d+l)^{-1} , \quad (2.2-11)$$

sendo d e l as distâncias do monopolo ao observador e à fonte, respectivamente.

¹Esta afirmação, a rigor, significa que na escala astrofísica o que é desprezível é o termo adimensional $\frac{GM}{r}$.

2.3 Caso II: Teoria de Brans-Dicke

Em 1997, A. Barros e C. Romero analisaram as propriedades do campo gravitacional de um monopolo global no contexto de uma teoria de Brans-Dicke [11]. Para a obtenção das equações de campo, consideraram uma aproximação de campo fraco e, por fim, fizeram comparações com a solução usual de Barriola-Vilenkin, obtida na RG. Nesta seção revisaremos os principais aspectos analisados pelos referidos autores em seu trabalho.

Como sabemos, numa teoria de Brans-Dicke, a gravitação é descrita não apenas pelo tensor métrico $g_{\mu\nu}$, mas também por um campo escalar ϕ . A ação da teoria Brans-Dicke num certo referencial, conhecido como *referencial de Jordan*, é dada por [30, 31]:

$$S_{BD} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\phi R - \frac{\omega}{\phi} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi + 16\pi \mathcal{L}_m \right]. \quad (2.3-12)$$

As equações de campo que resultam da extremização desta ação, com respeito à métrica e ao campo escalar, respectivamente, são as seguintes

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi}{\phi} T_{\mu\nu} &+ \frac{\omega}{\phi^2} \left(\partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi \right) \\ &+ \frac{1}{\phi} (\partial_\mu \partial_\nu \phi - g_{\mu\nu} \square \phi) \end{aligned} \quad (2.3-13)$$

e

$$\square \phi = \frac{8\pi T}{2\omega + 3}, \quad (2.3-14)$$

em que T é o traço do tensor energia-momento dos campos de matéria e ω um parâmetro adimensional, conhecido também como *parâmetro de Brans-Dicke*, que estabelece o limite no qual uma teoria de Brans-Dicke recai na RG, a saber, para valores muito grandes deste parâmetro. No limite $\omega \rightarrow \infty$, o campo escalar ϕ tenderá a uma constante ϕ_0 que vem a ser identificada com o inverso da constante gravitacional de Newton, G^{-1} , permitindo assim que a RG seja recuperada nesse regime [32].

Aplicando o tensor energia-momento (2.2-8) e a métrica (2.2-5) às equações de campo (2.3-13) e (2.3-14), obtemos o seguinte conjunto de equações diferenciais:

$$\frac{B''}{2A} - \frac{B'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{1}{r} \frac{B'}{A} = \frac{8\pi}{\phi} \left[\frac{\eta^2 B}{r^2 (2\omega + 3)} \right] - \frac{B'\phi}{2A\phi}, \quad (2.3-15)$$

$$-\frac{B''}{2A} + \frac{B'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{1}{r} \frac{A'}{A} = -\frac{8\pi}{\phi} \left[\frac{\eta^2 B}{r^2 (2\omega + 3)} \right] + \frac{\omega \phi'^2}{\phi^2} + \frac{1}{\phi} \left[\phi'' - \frac{A'}{2A} \phi' \right], \quad (2.3-16)$$

$$\phi'' + \frac{1}{2} \phi' \left(\frac{B'}{B} - \frac{A'}{A} + \frac{4}{r} \right) = -\frac{16\pi}{(2\omega + 3)} \left(\frac{\eta^2}{r^2} \right) A, \quad (2.3-17)$$

$$1 - \frac{r}{2A} \left(\frac{B'}{B} - \frac{A'}{A} \right) - \frac{1}{A} = \frac{8\pi\eta^2}{\phi} \left(\frac{2\omega + 2}{2\omega + 3} \right) + \frac{r\phi'}{A\phi}. \quad (2.3-18)$$

A partir daqui é adotada a aproximação do campo fraco, segundo a qual

$$A(r) = 1 + f(r), \quad B(r) = 1 + g(r) \quad \text{e} \quad \phi(r) = \phi_0 + \epsilon(r), \quad (2.3-19)$$

em que ϕ_0 é uma constante que pode ser, de alguma forma, identificada como o inverso da constante gravitacional de Newton, G^{-1} , no limite $\omega \rightarrow \infty$, conforme discutido acima, e as funções $f(r)$, $g(r)$ e $\frac{\epsilon(r)}{\phi_0}$ deverão ser calculadas até a primeira ordem em $\frac{\eta^2}{\phi_0}$ com

$$|f(r)|, |g(r)|, \left| \frac{\epsilon(r)}{\phi_0} \right| \ll 1. \quad (2.3-20)$$

Integrando as equações de campo, linearizadas a partir das aproximações apresentadas acima, podemos obter diretamente as soluções que, escolhendo apropriadamente as constantes de integração, serão escritas como:

$$A(r) = 1 + \frac{8\pi\eta^2(2\omega + 1)}{\phi_0(2\omega + 3)}, \quad (2.3-21)$$

$$B(r) = 1 - \frac{8\pi\eta^2}{\phi_0} + \frac{16\pi\eta^2}{\phi_0(2\omega + 3)} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right), \quad (2.3-22)$$

$$\phi(r) = \phi_0 - \frac{16\pi\eta^2}{2\omega + 3} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) . \quad (2.3-23)$$

Na solução final, tal como no modelo de Barriola-Vilenkin, o termo de massa foi descartado por ser desprezível em escala astrofísica.

A. Barros e C. Romero demonstram ainda que o elemento de linha definido pelas funções $A(r)$ e $B(r)$ acima, para valores muito grandes de ω , é relacionado à solução de Barriola-Vilenkin através de uma transformação conforme. Para demonstrar isso consideraram a seguinte mudança de coordenadas:

$$B(r) = p(r^*) \left(1 - \frac{8\pi\eta^2}{\phi_0}\right) , \quad (2.3-24)$$

$$A(r)dr^2 = p(r^*) \left(1 + \frac{8\pi\eta^2}{\phi_0}\right) dr^{*2} , \quad (2.3-25)$$

sendo $p(r^*)$ uma constante a ser determinada e $p(r^*) = 1 + q(r^*)$, com $|q(r^*)| \ll 1$.

Usando essa transformação de coordenadas e, em seguida, redefinindo a coordenada radial como $r = \left(1 + \frac{4\pi\eta^2}{\phi_0}\right) r^*$ e a constante $\phi_0 = \left(\frac{2\omega+4}{2\omega+3}\right) \frac{1}{G}$ (esta última redefinição deve-se à necessidade de se obter o limite newtoniano correto, a partir das equações de campo de Brans-Dicke), a forma final da solução é escrita como

$$ds^2 = \left(1 + \frac{16\pi\eta^2 G}{(2\omega + 4)} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)\right) \left[dt^2 - dr^2 - \left(1 - 8\pi G\eta^2 \left(\frac{2\omega + 3}{2\omega + 4}\right)\right)\right. \\ \left. \times r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right] . \quad (2.3-26)$$

Outro resultado interessante também obtido pelos autores foi o da propagação da luz na vizinhança do monopolo. Mostraram que um sinal luminoso propagando-se de uma fonte S para um observador O , quando S , O e o monopolo estão perfeitamente alinhados

produzem uma imagem com a forma de um anel de diâmetro angular dado por

$$\delta\Omega = 8\pi^2\eta^2 \left(\frac{2\omega + 3}{2\omega + 4} \right) G \frac{l}{l + d}, \quad (2.3-27)$$

sendo d e l as distâncias do monopolo ao observador e à fonte, respectivamente.

Uma outra notável propriedade física observada no modelo investigado por A. Barros e C. Romero é o surgimento de uma força gravitacional exercida pelo monopolo sobre a matéria ao seu redor. Efeito este totalmente ausente no contexto da RG como pode ser visto em [10]. Tal força possui natureza atrativa e é dada pela expressão

$$\ddot{x}^i = -\frac{4\pi\eta^2 G}{(\omega + 2)} \frac{x^i}{\mathcal{R}^2}, \quad (2.3-28)$$

escrita em coordenadas galileanas, em que a métrica pode ser expressa como $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$. Na equação(2.3-28) temos $\mathcal{R} = [x^2 + y^2 + z^2]^{1/2}$. Os detalhes omitidos nesta seção podem ser consultados na referência [11].

Capítulo 3

As teorias $f(R)$ da gravitação

3.1 Introdução

A Cosmologia chegou ao fim do século XX tomada por enormes incertezas e perplexidades. A razão principal de tais sentimentos, que atordoaram não apenas cosmólogos como também, de uma forma ou de outra, campistas e relativistas, era uma surpreendente descoberta que desafiava as previsões da RG e prometia transformar profundamente a compreensão que, até então, se tinha do Universo. Tal descoberta, feita em 1998 por duas equipes de astrônomos: o *High Z Supernova Search Team*, liderado pelo australiano Brian Schmidt, e o *Supernova Cosmology Project*, chefiado pelo americano Saul Perlmutter; intrigou a comunidade científica ao anunciar que as observações de Supernovas do tipo IA realizadas, de forma independente, por seus respectivos grupos, indicavam que a expansão do Universo se dava de forma acelerada, e não desacelerada como previa a RG [14, 33]. O então pós-doutorando de Brian Schmidt, Adam Riess, teve um papel destacado na referida descoberta, o que o permitiria 13 anos mais tarde, dividir com Perlmutter e Schmidt o Prêmio Nobel de Física de 2011. Em 1999, o cosmólogo norte-americano Michael Turner cunhou o termo *energia escura*¹, para referir-se a uma hipotética e exótica forma de energia que seria o agente físico responsável por acelerar a expansão [34]. Uma das primeiras ideias que surgiram para explicar o fenômeno foi a de associar a energia escura a uma energia do vácuo, que seria acrescentada na teoria através da inserção de uma constante

¹Do original em inglês *dark energy*.

cosmológica (Λ) nas equações de Einstein, o que resgataria a importância do velho termo cosmológico, o qual Einstein classificara como seu maior erro. A inclusão de tal termo nas equações de campo da RG, de fato, permitiria à teoria a descrição correta desta fase atual de expansão acelerada. Porém, é sabido que uma teoria com constante cosmológica padece do chamado *Problema da Constante Cosmológica* que diz respeito à enorme discrepância que existe entre o valor que a Teoria Quântica de Campos prevê para a energia do vácuo e àquele que a Cosmologia prevê para Λ [35].

O Problema da Constante Cosmológica, portanto, motivou a busca por outras alternativas teóricas para a energia escura e, desde então, vários modelos teóricos foram propostos. Entre esses modelos, destacam-se: Quintessência, K-essência, Gás de Chaplin, entre outros. O que estas propostas têm em comum é a de consistir em modelos que incluem novos campos no Universo, visando identificar a energia escura com tais campos, o que pode ser um inconveniente adicional, visto que as observações mostram que a energia escura, se imaginada como uma componente material do Universo, responderia por cerca de 73% de todo o conteúdo de matéria-energia do Universo [36]. Isto é, praticamente 3/4 de todo o conteúdo energético do nosso Universo seria atribuído a uma forma de energia exótica, de cuja natureza não dispomos de nenhuma informação. Tais campos, assim, deveriam ser dotados de uma natureza extremamente peculiar e a suas origens também seriam uma grande questão a ser respondida.

Uma alternativa a isso, apresentada por vários autores, têm sido a de prescindir da inclusão de campos desconhecidos no Universo e, em vez disso, modificar a teoria da gravidade em grandes escalas. Entre as propostas de modificação da gravidade, destacamos: teorias escalar-tensoriais, teorias de Gauss-Bonnet, gravidade modificada $f(R)$ (ou teorias $f(R)$), entre outras.

A modificação da gravidade proposta numa teoria $f(R)$ consiste em substituir o escalar de curvatura na ação de Einstein-Hilbert por uma função arbitrária do mesmo, $f(R)$. Consequências de se considerar uma generalização deste tipo na lagrangiana da

RG, foram originalmente analisadas por H. A. Buchdal [37], em que o autor verificou que os formalismos variacionais da métrica e de Palatini, para funções $f(R)$ não-lineares, conduzem a resultados distintos. Mais tarde, assumindo correções na gravidade em escalas próximas à de Planck, A. Starobinsky considerou a possibilidade de que teorias deste tipo acomodassem uma descrição consistente do processo inflacionário pelo qual o Universo primordial teria passado [16]. Contudo, como alternativa viável à energia escura, as teorias $f(R)$ foram propostas pela primeira vez por S. Capozziello em [38] e S. Carrol *et al* em [39]. Outras possíveis aplicações das teorias $f(R)$, bem como suas consequências, podem ser encontradas de forma abundante na literatura, como nas referências [21, 22, 40–44].

3.2 Equações de campo modificadas

A ação gravitacional modificada, para uma teoria $f(R)$ é dada por

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} f(R) + \mathcal{S}_m, \quad (3.2-1)$$

que é uma clara generalização de (2.2-1).

Conforme brevemente mencionado na seção anterior, há dois formalismos variacionais possíveis de ser usar para se chegar às equações de campo de uma teoria de gravitação, a saber, o formalismo da métrica e o formalismo de Palatini. No primeiro, considera-se a métrica, $g_{\mu\nu}$, como a única variável dinâmica independente. As conexões são assumidas como sendo as de Levi-Civita e as equações de campo são obtidas variando-se a ação com respeito à métrica. No segundo formalismo, considera-se não apenas a métrica como campo independente, como também as conexões. Nessa caso, as equações de movimento são obtidas variando-se a ação com respeito a estas duas variáveis. Na RG, as equações de campo obtidas a partir do formalismo da métrica coincidem com aquelas obtidas via formalismo de Palatini. O mesmo não ocorre numa teoria $f(R)$, como podemos ver em [21, 37, 45].

Nesta tese adotaremos o formalismo da métrica como procedimento variacional. As

equações de campo obtidas por meio desse formalismo são dadas por

$$F(R)R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}f(R)g_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu F(R) + g_{\mu\nu} \square F(R) = \kappa T_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3 \quad (3.2-2)$$

sendo $F(R) \equiv \frac{df(R)}{dR}$ e o tensor energia-momento associado a campos de matéria, $T_{\mu\nu}$, dado por (2.2-3).

Um aspecto bastante interessante das teorias $f(R)$ pode ser imediatamente verificado se tomarmos o traço das equações (3.2-2)

$$\square F(R) + \frac{1}{3}(F(R)R - 2f(R)) = \frac{1}{3}\kappa T, \quad (3.2-3)$$

que mostra a existência de um grau de liberdade escalar adicional na teoria, visto que a equação acima equivale a uma genérica equação de movimento de um campo escalar ϕ , do tipo:

$$\square \phi + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = J, \quad (3.2-4)$$

em que $V(\phi)$ corresponde a um potencial ao qual o campo escalar ϕ está associado e J representa um termo de fonte arbitrário. Na equação (3.2-4) verifica-se que o papel do campo escalar é desempenhado por $F(R)$, sugerindo que esta função desempenha o papel de uma variável dinâmica nesta gravidade modificada. Por ser a quantidade física que carrega esse grau de liberdade escalar, a função $F(R)$ é usualmente chamada de *scalaron*. A equação acima descreve a dinâmica de um campo escalar massivo, cuja massa é dada por:

$$m^2 = \left. \frac{d^2V(\phi)}{d\phi^2} \right|_{\phi=\phi_{\text{mín}}}, \quad (3.2-5)$$

Sendo $\phi_{\text{mín}}$ o valor mínimo assumido pelo campo escalar. Espera-se que tal grau de liberdade extra, que surge naturalmente a partir do tipo de modificação na gravidade feita por uma teoria $f(R)$, seja responsável por produzir a aceleração observada hoje para a expansão do Universo. Este é um aspecto importante de tais teorias, que a favorecem fortemente enquanto modelo teórico viável para a energia escura. Além das preocupações cosmológicas, que consistem na maior razão de ser das teorias $f(R)$, é interessante analisar

possíveis consequências desse grau de liberdade extra em outros fenômenos já conhecidos e estudados no contexto da RG. Tal análise pode representar uma ferramenta importante para uma melhor compreensão desses fenômenos, inclusive no âmbito da RG. Esta é uma ideia que orienta esta tese, do início ao fim, no objetivo a que ela se propõe.

3.3 Equivalência entre teorias $f(R)$ e teorias escalar-tensoriais

Tomando como ponto de partida a discussão que finalizou a seção anterior, acerca do grau de liberdade escalar que emerge numa teoria $f(R)$, iremos mostrar nesta seção a equivalência dinâmica observada entre tais teorias e as teorias de natureza escalar-tensorial. Em especial, limitaremos nossa análise, mostrando a equivalência de uma teoria $f(R)$ no formalismo da métrica com uma teoria de Brans-Dicke, para um parâmetro $\omega = 0$, que possua um potencial associado ao campo escalar. Para uma discussão mais detalhada remetemos o leitor à referência [46]. Vamos primeiramente escrever as equações (3.2-2) da seguinte forma

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{F(R)} \left\{ \frac{1}{2} g_{\mu\nu} [f(R) - RF(R)] + \nabla_\mu \nabla_\nu F(R) - g_{\mu\nu} \square F(R) \right\} + \frac{\kappa}{F(R)} T_{\mu\nu} . \quad (3.3-6)$$

Vamos agora considerar a seguinte ação escalar-tensorial:

$$S_\phi = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} [f(\phi) + (R - \phi) f'(\phi)] + \mathcal{S}_m . \quad (3.3-7)$$

Nesta seção definimos $(') \equiv d/d\phi$. Se variarmos a ação acima com respeito ao tensor métrico, obtemos as seguintes equações de movimento

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{f'(\phi)} \left\{ \frac{1}{2} g_{\mu\nu} [f(\phi) - \phi f'(\phi)] + \nabla_\mu \nabla_\nu f'(\phi) - g_{\mu\nu} \square f'(\phi) \right\} + \frac{\kappa}{f'(\phi)} T_{\mu\nu} , \quad (3.3-8)$$

enquanto que a variação da ação (3.3-7) em relação ao campo escalar ϕ nos conduz à equação

$$[R - \phi] f''(\phi) = 0 . \quad (3.3-9)$$

A partir da equação acima, podemos verificar imediatamente que, para uma dada função $f(\phi)$, em que $f''(\phi) \neq 0$, teremos $R = \phi$ e dessa forma as equações (3.3-6) e (3.3-8)

coincidirão. Esta coincidência entre os dois conjuntos de equações de campo, indica que a ação (3.3-7) representa uma forma diferente de se escrever a ação (3.2-1), isto é, as duas teorias são equivalentes. Podemos entender a teoria escalar-tensorial descrita pela ação (3.3-7), como uma forma de tornar explícito o grau de liberdade escalar adicional presente na teoria $f(R)$. Além disso, fazendo as seguintes correspondências

$$\varphi = f'(\phi) , \quad \text{e} \quad V(\varphi) = \phi f'(\phi) - f(\phi) , \quad (3.3-10)$$

podemos reescrever a ação (3.3-7) como

$$S_\varphi = \frac{1}{2\kappa} \int d^4x \sqrt{-g} [\varphi R - V(\varphi)] + \mathcal{S}_m . \quad (3.3-11)$$

Comparando as equações (3.3-11) e (2.3-12), verificamos que a expressão acima corresponde à ação de uma teoria de Brans-Dicke sujeita a um potencial $V(\varphi)$ associado ao campo φ , em que o parâmetro de Brans-Dicke é $\omega = 0$. Uma teoria do tipo (3.3-11) é também conhecida como *gravidade dilatônica massiva* e foi proposta originalmente em [47].

A partir das identificações que as equações (3.3-8), (3.3-9) e (3.3-10) nos permitem fazer, podemos facilmente chegar às equações de campo dessa teoria escalar-tensorial ou, por outras palavras, às equações de campo de uma teoria $f(R)$ na forma escalar-tensorial, que serão

$$G_{\mu\nu} = \frac{\kappa}{\varphi} T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} V(\varphi) + \frac{1}{\varphi} (\nabla_\mu \nabla_\nu \varphi - \square \varphi) \quad (3.3-12)$$

e

$$R = \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} , \quad (3.3-13)$$

que são exatamente as equações de movimento que seriam obtidas se minimizássemos a ação (3.3-11), como era de se esperar. Tomando o traço da equação (3.3-12) e em seguida substituindo (3.3-13) no resultado obtido, ficaremos com a seguinte equação

$$3\square\varphi + 2V(\varphi) - \varphi \frac{dV}{d\varphi} = \kappa T , \quad (3.3-14)$$

que evidencia que o grau de liberdade escalar emergente na gravidade $f(R)$ é, de fato, dinâmico. Essa característica dinâmica do traço marca uma profunda diferença em relação

à RG, na qual o traço das equações de movimento, a saber $R = -\kappa T$, corresponde a uma mera relação algébrica entre o escalar de Ricci e o traço do tensor energia-momento, não apresentando dinâmica alguma e, portanto, não adicionando qualquer grau de liberdade extra na teoria. Naturalmente, essa equação é equivalente à equação (3.2-3), sendo possível obter uma a partir da outra, através das associações apresentadas acima. É importante ainda observar que na (3.3-14) podemos definir um potencial efetivo, $V_{eff}(\varphi)$, como $V_{eff}(\varphi) = \frac{1}{3} \left(2V(\varphi) - \varphi \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} \right)$, de tal modo que (3.3-14) possa ser reescrita na forma (3.2-4). Esta equivalência observada entre uma teoria $f(R)$ no formalismo da métrica e uma teoria de Brans-Dicke com potencial e parâmetro $\omega = 0$, poderia servir como argumento para descartar essas teorias como modelos de gravitação fisicamente viáveis. A razão disso é que, como se sabe, uma teoria de Brans-Dicke recupera de forma bem-sucedida os resultados da RG na escala do sistema solar, somente para ω muito grande, mais precisamente para $|\omega| > 40.000$ [48]. Então, por este argumento, uma teoria de Brans-Dicke para o qual $\omega = 0$, tal como são as teorias $f(R)$ no formalismo métrico, deveria ser imediatamente abandonada. O que as salva dessa rejeição aparentemente certa, é o termo correspondente ao potencial, que confere massa ao *scalaron*. Existe um importante fenômeno, conhecido como *Mecanismo Camaleão*, observado em teorias escalar-tensoriais massivas, como alguns modelos de quintessência, que prevê uma dependência direta da massa do campo escalar com a densidade de matéria-energia do ambiente sob estudo [49, 50]. Como pode-se verificar nas referências mencionadas, esse mecanismo estabelece que quanto maior a densidade de matéria-energia da região que estamos analisando (ou, dizendo de outra forma, quanto maior a curvatura dessa região), maior será a massa do campo escalar. Por outro lado, quanto menor for essa densidade, menor será a massa do campo escalar. A consequência interessante disso é que, visto que o alcance do campo está relacionado à sua massa via o comprimento de onda Compton $\lambda_c \equiv \frac{2\pi}{m_{f'}}$, que nos diz que quanto maior for a massa do campo escalar, menor será o seu alcance e vice-versa, tendo o *scalaron* um alcance muito curto na escala local, onde a densidade é grande, seu efeito será tão dimin-

uto que não afetará em nada o que a RG consegue prever com sucesso. Por outro lado, o seu efeito será apreciável na escala cosmológica, onde a densidade de matéria-energia é baixíssima, e com isso poderá, por conseguinte, viabilizar-se como o agente físico da aceleração cósmica. Para uma análise mais detalhada a respeito do Efeito Camaleão em teorias $f(R)$, remetemos o leitor a [51] e [22], bem como as referências aí contidas.

3.4 Condições de estabilidade sobre as derivadas de $f(R)$

Existem algumas condições a serem impostas a uma função $f(R)$, para que esta possa se viabilizar do ponto de vista físico. A primeira delas é a condição de positividade de $f'(R)$ ². Tal condição advém de uma peculiaridade que pode ser imediatamente observada na equação (3.2-2). Podemos ver, a partir dessa equação, que o último termo à direita nos permite redefinir a constante gravitacional de Newton, em termos de uma constante efetiva cuja forma é

$$G_{\text{eff}}(R) = \frac{G}{f'(R)} . \quad (3.4-15)$$

É conveniente garantirmos que esta constante gravitacional efetiva permaneça com o sinal positivo, o que nos obriga naturalmente a impor a condição de positividade sobre a primeira derivada de $f(R)$, i.e $f'(R) > 0$. Além disso, esse condição serve também para impedir que o *scalaron* se torne um *ghost*, o que geraria uma instabilidade no modelo, conforme discutido em [52].

A condição de positividade dever ser imposta também sobre a segunda derivada de $f(R)$. Há duas importantes justificativas para isso. A primeira pode ser verificada se tomarmos a derivada de (3.4-15) com respeito a R :

$$\frac{dG_{\text{eff}}}{dR} = \frac{-f''(R)G}{(f'(R))^2} . \quad (3.4-16)$$

Se $\frac{dG_{\text{eff}}}{dR} > 0$, significa que o efeito da gravidade, cuja intensidade é representada por G_{eff} ,

²Especialmente nesta seção, a fim de não carregarmos demasiadamente a notação, adotaremos as seguintes definições: $F(R) = \frac{df(R)}{dR} \equiv f'(R)$ e $\frac{d^2f(R)}{dR^2} \equiv f''(R)$.

se torna cada vez mais acentuado a medida que a curvatura tende a valores mais altos. Esse crescimento indefinido da intensidade gravitacional representa uma clara instabilidade no modelo, uma vez que o sistema não possuiria um estado fundamental. A intensidade gravitacional aumentará sem parar, a medida que a curvatura se agrava e vice-versa. Uma forma de evitar tal instabilidade é impondo que a G_{eff} sofra um processo inverso, ou seja, que ela diminua à medida que a curvatura aumente, o que seria garantido se adotássemos a condição $\frac{dG_{\text{eff}}}{dR} < 0$. Com isso, pela equação (3.4-16), deveríamos impor que $f''(R) > 0$.

A segunda justificativa, para adotarmos que $f''(R) > 0$, está relacionada a uma propriedade do *scalaron*. Para observarmos isso, vamos escrever a equação (3.2-3) na mesma forma da equação (3.2-4), ou seja

$$\square f' + \frac{dU(f')}{df'} = \frac{\kappa T}{3}, \quad (3.4-17)$$

no qual $U(f')$ é o potencial associado ao *scalaron*, a partir do qual podemos obter a massa do mesmo, tomando como base a equação (3.2-5)

$$m_{(f')}^2 = \left. \frac{d^2U(f')}{df'^2} \right|_{f'=f'_{\text{mín}}}. \quad (3.4-18)$$

Uma vez que o *scalaron* representa o grau de liberdade herdado pela teoria $f(R)$, é perfeitamente razoável admitir que o seu valor mínimo $f'_{\text{mín}}$ corresponda ao regime em que a RG domina, isto é, no limite em que o grau de liberdade escalar está ausente da teoria da gravitação. Ora, sabe-se que na RG, $f(R) = R + \text{const.}$, portanto $f'(R) = 1$. Dessa forma teremos $f'_{\text{mín}} \rightarrow 1$. Por outro lado, espera-se que em um regime de altas curvaturas, como ocorreu no passado remoto do Universo, a altos valores de *red shift* [53], a RG deve ser recuperada. Esta condição é necessária para que o sucesso da RG em descrever corretamente as fases pelas quais o Universo passou, seja preservado. Porém, a altas curvaturas, temos também $|f''R| \ll 1$. Dessa forma a massa do *scalaron* deve ser

calculada levando em conta essas duas aproximações:

$$m_{f'}^2 = \left. \frac{d^2 U(f')}{df'^2} \right|_{f'=1, |f'' R| \ll 1} \quad (3.4-19)$$

daí obteremos,

$$m_{f'}^2 \approx \frac{1}{3f''}, \quad (3.4-20)$$

o que nos força a impor positividade sobre a segunda derivada de $f(R)$, a fim de que a massa do *scalon* permaneça real. Uma massa ao quadrado negativa é própria de partículas taquiônicas, logo, a condição $f'' > 0$ também pode ser justificada como um exigência para que a teoria $f(R)$ em questão seja livre de táquions.

3.5 Soluções esfericamente simétricas em teorias $f(R)$ no vácuo

Devido à simetria do problema, o qual nos propomos a analisar nesta tese, estamos particularmente interessados em soluções esfericamente simétricas das equações de campo modificadas (3.2-2). Tomando como base a abordagem usada em [54] e [55] para a obtenção das equações de campo, expressaremos aqui tais equações em termos do *scalon* $F(R)$, porém escrevendo-o como uma função da coordenada radial, i.e $F(R) = \mathcal{F}(r)$, expediente ao qual a simetria esférica nos autoriza a recorrer. Dessa forma, em vez de sugerirmos formas funcionais para $f(R)$, bastará propormos *Ansätze* para $\mathcal{F}(r)$. Nos casos em que for possível expressarmos $r = r(R)$, poderemos, a partir de uma integração direta de $F(R)$, obter a $f(R)$ correspondente. As principais justificativas físicas para explicitarmos o *scalon* nas equações de movimento, foram apresentadas e discutidas na seção anterior, ao mostrarmos esta função como um grau de liberdade escalar dinâmico, que é naturalmente inserido na teoria, em função da modificação da gravidade. Outra justificativa adicional é que, sendo $F(R) = \frac{df(R)}{dR}$, se escolhermos escrever as equações, não em termos de $f(R)$, mas de suas derivadas primeira, estaríamos simplificando consideravelmente o problema, visto que reduziríamos a ordem das equações em uma unidade.

A métrica a ser considerada é dada pelo elemento de linha esfericamente simétrico (2.2-5):

$$ds^2 = B(r)dt^2 - A(r)dr^2 - r^2d\Omega^2 , \quad (3.5-21)$$

sendo $d\Omega^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2$.

Se contrairmos as equações (3.2-2), considerando inicialmente o vácuo, temos:

$$F(R)R - 2f(R) + 3\Box F(R) = 0 . \quad (3.5-22)$$

Podemos, pela equação acima, isolar $f(R)$ e substituir nas equações (3.2-2) no vácuo que, em seguida, poderão ser escritas como

$$FR_{\mu\nu} - \nabla_\mu \nabla_\nu F = \frac{1}{4}g_{\mu\nu} (FR - \Box F) . \quad (3.5-23)$$

Ou seja, expressas em termos da função $F(R)$ que, doravante, será escrita como $F(R(r)) = \mathcal{F}(r)$. Diferenciando a equação (3.5-22) em relação a r , é possível obtermos a seguinte relação de consistência para $\mathcal{F}(r)$:

$$R\mathcal{F}' - R'\mathcal{F} + 3(\Box\mathcal{F})' = 0 , \quad (3.5-24)$$

que deve ser obedecida por qualquer solução de (3.5-23). A partir da equação (3.5-23), verificamos de imediato que a combinação abaixo

$$C_\mu = \frac{F(R)R_{\mu\mu} - \nabla_\mu \nabla_\mu F(R)}{g_{\mu\mu}} , \quad (3.5-25)$$

com índices μ fixos, é independente do índice μ . Isto implica que $C_\mu = C_\nu$, $\forall \mu, \nu$.

$$2\mathcal{F} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + r\mathcal{F}' \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - 2r\mathcal{F}'' = 0 , \quad (3.5-26)$$

$$\begin{aligned} -4B + 4AB & - 4rB \frac{\mathcal{F}'}{\mathcal{F}} + 2r^2 B' \frac{\mathcal{F}'}{\mathcal{F}} + 2rB \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \\ & - r^2 s' \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + 2r^2 B'' = 0 , \end{aligned} \quad (3.5-27)$$

sendo $' \equiv d/dr$. Logo, ao adotarmos um *Ansatz* específico para \mathcal{F} , teremos um sistema de duas equações e duas variáveis, o que tornará possível, em princípio, a obtenção de

soluções fechadas para o problema analisado. É esta a prescrição que iremos seguir nos capítulos 4 e 5, a fim de descrevermos a dinâmica, caso a caso, dos problemas que ali analisaremos.

Capítulo 4

Monopolo global em teorias $f(R)$ da gravitação

Agora que analisamos, nos capítulos precedentes, alguns aspectos físicos resultantes do campo gravitacional de um monopolo global, nos contextos da RG e da teoria de Brans-Dicke apresentaremos, no presente capítulo, bem como no próximo, algumas das propriedades observadas no escopo de uma teoria de gravidade modificada tipo $f(R)$ [12].

4.1 Equações de campo

A combinação expressa na relação (3.5-25), usada para obter as equações de campo modificadas com simetria esférica no vácuo, pode agora ser generalizada para os casos em que consideramos a existência de um tensor energia-momento $T_{\mu\nu}$ e, dessa forma, a expressão será reescrita como

$$C_{\mu} = \frac{F(R)R_{\mu\mu} - \nabla_{\mu}\nabla_{\mu}F(R) - \kappa T_{\mu\mu}^m}{g_{\mu\mu}}. \quad (4.1-1)$$

Seguindo, assim, a mesma receita fornecida no capítulo 3, e considerando o tensor energia-momento fora do núcleo do monopolo, chegamos às equações de campo abaixo:

$$2r\mathcal{F}'' - r\mathcal{F}'\left(\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A}\right) - 2\mathcal{F}\left(\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A}\right) = 0, \quad (4.1-2)$$

e

$$\begin{aligned} & - 4B + 4AB - 4rB\frac{\mathcal{F}'}{\mathcal{F}} + 2r^2B'\frac{\mathcal{F}'}{\mathcal{F}} - r^2B'\left(\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A}\right) \\ & + 2r^2B'' + 2Br\left(\frac{B'}{B} + \frac{A'}{A}\right) - \frac{4AB\kappa\eta^2}{\mathcal{F}} = 0, \end{aligned} \quad (4.1-3)$$

sendo, conforme visto anteriormente, $F(R)$ definido como $F(R(r)) = \mathcal{F}(r)$.

Definindo

$$\beta \equiv \frac{B'}{B} + \frac{A'}{A}, \quad (4.1-4)$$

podemos escrever as equações de campo da seguinte forma

$$\frac{\beta}{r} = \frac{\mathcal{F}''}{\mathcal{F}} - \frac{1}{2} \frac{\mathcal{F}'}{\mathcal{F}} \beta, \quad (4.1-5)$$

e

$$\begin{aligned} & - 4B + 4AB - 4rB \frac{\mathcal{F}'}{\mathcal{F}} + 2r^2 B' \frac{\mathcal{F}'}{\mathcal{F}} \\ & + 2r^2 B'' - r^2 B' \beta + 2Br\beta - \frac{4AB\kappa\eta^2}{\mathcal{F}} = 0. \end{aligned} \quad (4.1-6)$$

Um aspecto interessante a ser destacado aqui é que se substituirmos $\omega = 0$ na equação (9) da referência [11] e substituirmos $\phi(r)$ por $\mathcal{F}(r)$, a equação (4.1-5) é recuperada. Este fato enfatiza a equivalência da gravidade $f(R)$, no formalismo da métrica, com uma gravidade de Brans-Dicke de parâmetro $\omega = 0$, conforme acentuado em [21] e discutido no capítulo 3. Além do mais, isto nos mostra mais uma vez a relevância de expressarmos as equações de campo em termos de $F(R)$ se quisermos comparar nossos resultados com aqueles obtidos via teoria de Brans-Dicke, uma vez que o papel do grau de liberdade escalar nas teorias $f(R)$ é desempenhado, justamente, pela função $F(R)$.

4.2 Soluções no regime de campo fraco

Agora, consideremos uma aproximação do campo fraco nas equações de campo. Assumindo que $B(r) = 1 + b(r)$ e $A(r) = 1 + a(r)$ com $|b(r)|$ e $|a(r)|$ sejam menores que a unidade. Além disso, vamos considerar que a modificação da teoria da gravidade corresponde a uma pequena correção na RG, de tal forma que $\mathcal{F}(r) = 1 + \psi(r)$, com $|\psi(r)| \ll 1$. Adotando tais aproximações, é possível verificar que, até a primeira ordem, podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}'}{\mathcal{F}} &= \frac{\psi'}{1 + \psi} \approx \psi', \quad \frac{\mathcal{F}''}{\mathcal{F}} = \frac{\psi''}{1 + \psi} \approx \psi'', \\ \frac{B'}{B} &= \frac{b'}{1 + b} \approx b', \quad \frac{A'}{A} = \frac{a'}{1 + a} \approx a'. \end{aligned} \quad (4.2-7)$$

Dessa forma, as equações aproximadas para (4.1-2) e (4.1-3) são

$$\frac{\beta}{r} = \psi'' \quad (4.2-8)$$

e

$$4a - 4r\psi' + 2r(a' + b') + 2r^2b'' - 4(1 + a + b - \psi)\kappa\eta^2 = 0 . \quad (4.2-9)$$

Resultados específicos para as equações de campo podem ser obtidos ao adotarmos diferentes *Ansätze* para $\psi(r)$. Vamos considerar $\psi(r)$ como sendo uma função analítica, e por questão de simplicidade, que seja linear na coordenada radial, isto é $\psi(r) = \psi_0 r$. Assim, teremos o seguinte resultado para a equação (4.2-8):

$$\frac{\beta}{r} = 0 , \quad (4.2-10)$$

que significa

$$a' + b' = 0 \quad (4.2-11)$$

$$a + b = c_0 , \quad (4.2-12)$$

em que c_0 é uma constante de integração que escolhemos como $c_0 = 0$. Portanto

$$a(r) = -b(r) . \quad (4.2-13)$$

Então (4.2-9) será escrito como

$$\frac{1}{2}r^2b'' - b - r\psi_0 - (1 - \psi_0 r)\kappa\eta^2 = 0 , \quad (4.2-14)$$

cuja solução é

$$b(r) = \frac{c_1}{r} + c_2 r^2 - \kappa\eta^2 - \psi_0 r(1 - \kappa\eta^2) , \quad (4.2-15)$$

sendo c_1 e c_2 constantes de integração. Considerando que estamos lidando com uma teoria sem constante cosmológica, podemos impor $c_2 = 0$. E também escolhemos $c_1 = -2GM$, a fim de recuperarmos o potencial newtoniano presente na solução de Barriola-Vilenkin.

Então,

$$B(r) = 1 - \frac{2GM}{r} - 8\pi G\eta^2 - \psi_0 r(1 - 8\pi G\eta^2) , \quad (4.2-16)$$

pois $\kappa = 8\pi G$. Para uma teoria de grande unificação, o parâmetro η é da ordem de 10^{16} GeV [7]. Assim, $8\pi G\eta^2 \approx 10^{-5}$ [7]. Isto nos permite desprezar o termo $\psi_0 r \times 8\pi G\eta^2$ nos resultados obtidos acima, já que $|\psi_0 r| \ll 1$. Então, podemos escrever

$$B(r) = 1 - \frac{2GM}{r} - 8\pi G\eta^2 - \psi_0 r . \quad (4.2-17)$$

Da equação (4.2-10) temos

$$A(r) = \frac{a_0}{B(r)} , \quad (4.2-18)$$

em que a_0 é uma constante de integração. Redefinindo a coordenada temporal, podemos impor que $a_0 = 1$. Então,

$$A(r) = \left[1 - \frac{2GM}{r} - 8\pi G\eta^2 - \psi_0 r \right]^{-1} . \quad (4.2-19)$$

Conforme assumido anteriormente por M. Barriola e A. Vilenkin, desprezaremos aqui o termo de massa em (5.1-6) e (5.1-8), visto que sua contribuição é irrelevante na escala astrofísica. Com isso teremos

$$B(r) = 1 - 8\pi G\eta^2 - \psi_0 r \quad (4.2-20)$$

e

$$A(r) = (1 - 8\pi G\eta^2 - \psi_0 r)^{-1} . \quad (4.2-21)$$

Usando as aproximações adotadas, podemos obter o escalar de curvatura associado à solução apresentada acima:

$$R = -\frac{16\pi G\eta^2}{r^2} - \frac{6\psi_0}{r} . \quad (4.2-22)$$

A partir de $\mathcal{F}(r)$ e $R = R(r)$ podemos determinar, em princípio, $F(R)$ e finalmente $f(R)$, pelo mesmo procedimento sugerido na seção (3.5). No caso aqui analisado, a forma explícita obtida para $f(R)$ é dada por

$$\begin{aligned} f(R) = & R - 3\psi_0^2 \ln \left(\frac{R}{R_0} \right) - 2\psi_0 \sqrt{9\psi_0^2 - 16\pi G\eta^2 R} \\ & - 3\psi_0^2 \ln \left[\frac{\sqrt{9\psi_0^2 - 16\pi G\eta^2 R} - 3\psi_0}{\sqrt{9\psi_0^2 - 16\pi G\eta^2 R_0} - 3\psi_0} \right] + 3\psi_0^2 \ln \left[\frac{\sqrt{9\psi_0^2 - 16\pi G\eta^2 R} + 3\psi_0}{\sqrt{9\psi_0^2 - 16\pi G\eta^2 R_0} + 3\psi_0} \right] , \end{aligned} \quad (4.2-23)$$

sendo R_0 uma constante com dimensão de L^{-2} e mesmo sinal de R ¹, que pode ser interpretada como uma escala típica de curvaturas em que a modificação na gravidade tem efeitos perceptíveis. Pode-se verificar imediatamente que o fato de estarmos considerando essa modificação na gravidade como uma pequena correção sobre a RG, nos garante que a função acima satisfaça as seguintes condições de estabilidade, o que é esperado para qualquer teoria $f(R)$ fisicamente relevante [21, 53]:

- $\frac{d^2 f(R)}{dR^2} > 0$ (teoria livre de táquions);
- $\frac{df(R)}{dR} > 0$ (teoria livre de *ghosts*);
- $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\Delta}{R} = 0$ and $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{d\Delta}{dR} = 0$ (GR é recuperada a altos *red-shifts*),

em que $\Delta = \Delta(R)$ é definida como $\Delta = f(R) - R$. Sendo as duas primeiras condições listadas acima, aquelas que discutimos no capítulo 3.

Agora deveremos mostrar que o elemento de linha descrito pela solução dada pelas funções $A(r)$ e $B(r)$ são conformalmente relacionados à solução ordinária de Barriola-Vilenkin.² Para isso, consideremos a seguinte transformação de coordenadas:

$$B(r) = p(r^*) (1 - 8\pi G\eta^2) , \quad (4.2-24)$$

$$A(r)dr^2 = p(r^*) (1 + 8\pi G\eta^2) (dr^*)^2 , \quad (4.2-25)$$

$$r = p^{1/2}(r^*)r^* , \quad (4.2-26)$$

em que $p(r^*)$ é uma função arbitrária de r^* a ser determinada, e $p(r^*) = 1 + q(r^*)$ with $|q(r^*)| \ll 1$. Diferenciando a equação (5.1-18) temos

$$dr^2 = \left(1 + r^* \frac{dq}{dr^*} + q \right) dr^{*2} . \quad (4.2-27)$$

Substituindo a equação acima em (5.1-17) e mantendo apenas termos lineares em $q(r^*)$, $\psi_0 r$ e $G\eta^2$, obtemos o seguinte resultado para $q(r^*)$:

$$q(r^*) = -\psi_0 r^* , \quad (4.2-28)$$

¹A fim de assegurarmos positividade ao argumento do primeiro termo logarítmico da equação (4.2-23).

²Um procedimento análogo foi desenvolvido na referência [11].

então

$$p(r^*) = 1 - \psi_0 r^* . \quad (4.2-29)$$

Dessa forma, podemos escrever o elemento de linha (2.2-5) na coordenada r^* da seguinte forma:

$$\begin{aligned} ds^2 &= (1 - \psi_0 r^*) [(1 - 8\pi G\eta^2) dt^2 - (1 + 8\pi G\eta^2) dr^{*2} \\ &\quad - r^{*2} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] . \end{aligned} \quad (4.2-30)$$

Reescalando a coordenada temporal e redefinindo a coordenada radial como $r = (1 + 4\pi G\eta^2) r^*$, chegamos ao elemento de linha abaixo:

$$ds^2 = (1 - \psi_0 r) [dt^2 - dr^2 - (1 - 8\pi G\eta^2) r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] . \quad (4.2-31)$$

Um importante aspecto surge aqui, caso estejamos interessado em analisar a deflexão da luz nesta métrica. É bem sabido que os ângulos de deflexão são sempre preservados para duas métricas relacionadas entre si via uma transformação conforme. Portanto, a deflexão de um raio de luz pelo monopolo neste modelo de gravidade modificada que apresentamos aqui será o mesmo que aquele anteriormente obtido em [10]:

$$\delta\phi = 8\pi^2 G\eta^2 l(d+l)^{-1} . \quad (4.2-32)$$

Capítulo 5

Movimento de partículas teste em torno de um monopolo global em uma teoria $f(R)$ da gravitação

No capítulo anterior apresentamos uma análise do campo gravitacional de um monopolo global em uma teoria $f(R)$ reparametrizada na coordenada radial, recurso permitido pela simetria do problema. Escolhemos para a função $\psi(r)$ que, neste caso, carrega a informação da modificação da teoria, a forma de uma função linear da coordenada radial. O nosso próximo passo, neste capítulo, é investigar aspectos do movimento clássico de partículas massivas em tal espaço-tempo [13]. Todavia, faremos nossa análise considerando uma classe mais ampla de funções $\psi(r)$, a saber, funções polinomiais de grau arbitrário n .

5.1 Solução para $\mathcal{F}(r) = 1 + \psi_0 r^n$

Tomando as equações de campo (4.2-8) e (4.2-9), vamos considerar aqui como *Ansatz* para $\psi(r)$ uma função tipo lei de potência, ou seja $\psi(r) = \psi_0 r^n$, em que ψ_0 é o mesmo parâmetro constante, antes visto, a ser determinado e associado à modificação da gravidade. Seria conveniente, em princípio, impormos à função $\psi(r)$ a condição de regularidade na origem, o que implicaria em $\psi(0) = 0$, o que, conseqüentemente, inviabilizaria todos os casos de potências negativas para r . Porém, como estamos concentrando nosso estudo em regiões externas ao núcleo do monopolo, a origem $r = 0$ está naturalmente excluída

de nossa análise, e assim a condição de regularidade na origem perderia totalmente o sentido o que, por conseguinte, revogaria a proibição da existência de potências negativas de r . Porém, lembremos da nossa decisão inicial de modificar a gravitação de tal modo a nos afastarmos apenas ligeiramente da RG, traduzida pela condição $|\psi(r)| \ll 1$. Tal condição, fundamental para o desenvolvimento de toda a análise aqui empregada, ficaria seriamente comprometida se potências negativas de r fossem permitidas, visto que para valores pequenos de r , ou seja, nas imediações do núcleo do monopolo, o valor de $|\psi(r)|$ seria muito grande, o que contradiria imediatamente a exigência prévia de que esta quantidade represente uma ligeira perturbação na RG. Desta forma, o mais correto a fazer é assumirmos que potências negativas de r , ou em outras palavras valores negativos de n , devem ser descartadas no modelo aqui investigado para que a nossa aproximação $|\psi(r)| \ll 1$ seja válida. Ademais, assumimos que $\psi(r)$ é uma função analítica de r , de tal forma que admita uma expansão em série de Taylor.

As equações (4.2-8) e (4.2-9), para o *Ansatz* acima mencionado, respectivamente, são

$$a' + b' = n(n - 1)\psi_0 r^{n-1} \quad (5.1-1)$$

e

$$\begin{aligned} 2a - 2n\psi_0 r^n + r(a' + b') + r^2 b'' \\ - 2\kappa\eta^2 = 0 . \end{aligned} \quad (5.1-2)$$

A fim de assegurarmos que a métrica seja assintoticamente plana no limite em que $\psi_0 \rightarrow 0$, a constante de integração que surge de (5.1-1), é fixada como zero. Obtemos assim a seguinte relação entre $a(r)$ e $b(r)$:

$$a + b = (n - 1)\psi_0 r^n . \quad (5.1-3)$$

A relação acima pode ser usada em (5.1-2), e com isso passa a ser expressa em termos de $b(r)$

$$r^2 b'' - 2b + (n + 1)(n - 2)\psi_0 r^n - 2\kappa\eta^2 = 0 , \quad (5.1-4)$$

cuja solução é

$$b(r) = \frac{c_1}{r} - c_2 r^2 - \psi_0 r^n - \kappa \eta^2, \quad (5.1-5)$$

em que as constante de integração c_1 e c_2 são definidas como $c_1 = -2GM$, para recuperar apropriadamente o potencial newtoniano e $c_2 = 0$, uma vez que não estamos consideramos a presença de constante consmológica no modelo analisado. Sendo $B(r) = 1 + b(r)$, então temos:

$$B(r) = 1 - \frac{2GM}{r} - 8\pi G\eta^2 - \psi_0 r^n. \quad (5.1-6)$$

Da equação (4.1-4) resulta que

$$A(r)B(r) = a_0 e^{(n-1)\psi_0 r^n}, \quad (5.1-7)$$

onde fixamos a constante de integração a_0 como sendo a unidade, a fim de termos um espaço-tempo assintoticamente plano no limite $\psi_0 \rightarrow 0$. Com isso,

$$A(r) = e^{(n-1)\psi_0 r^n} \left[1 - \frac{2GM}{r} - 8\pi G\eta^2 - \psi_0 r^n \right]^{-1}. \quad (5.1-8)$$

Seguindo o mesmo raciocínio de M. Barriola e A. Vilenkin, negligenciamos aqui o termo de massa, por ser desprezível na escala astrofísica, o que nos permite escrever a solução como

$$B(r) = 1 - 8\pi G\eta^2 - \psi_0 r^n \quad (5.1-9)$$

e

$$A(r) = e^{(n-1)\psi_0 r^n} (1 - 8\pi G\eta^2 - \psi_0 r^n)^{-1}. \quad (5.1-10)$$

A expansão binomial pode ser aplicada na solução (5.1-10) de modo que podemos expressá-la como

$$A(r) \approx 1 + 8\pi G\eta^2 + n\psi_0 r^n. \quad (5.1-11)$$

Uma característica notável deste modelo diz respeito à dimensão de ψ_0 . Uma vez que $\psi_0 r^n$ trata-se de uma quantidade adimensional, o parâmetro ψ_0 possuirá dimensão de L^{-n} , o que significa dizer que

$$\left[\sqrt[n]{|\psi_0|^{-1}} \right] = L. \quad (5.1-12)$$

A equação acima sugere que o modelo seja dotado de uma escala de comprimento típica, expressa unicamente em termos de seu parâmetro fundamental ψ_0 . Como estamos considerando uma teoria que consiste numa pequena correção sobre a RG, fato garantido pela hipótese $|\psi_0 r^n| < 1$, teremos naturalmente um limite superior para a coordenada radial, já que a condição supracitada implicará que $r < \frac{1}{|\psi_0|^{\frac{1}{n}}}$. Ademais, se lembrarmos que nossa análise está restrita às regiões distantes do núcleo do monopolo, teremos um limite inferior para a coordenada radial o que restringirá a validade do modelo a uma região específica do espaço dada pelo intervalo abaixo:

$$\delta < r < \frac{1}{|\psi_0|^{\frac{1}{n}}} , \quad (5.1-13)$$

sendo $\delta \approx (\lambda\eta^{1/2})^{-1}$ da ordem de magnitude do núcleo do monopolo. A existência de um limite superior para a coordenada radial é muito importante para o nosso estudo, pois nos permite evitar uma patologia da qual padeceria inevitavelmente este modelo se fosse permitido à coordenada radial variar até o infinito. Nos referimos ao problema da energia do monopolo global, que passamos a descrever brevemente. Por meio da componente T_0^0 da tensor energia-momento, que corresponde à densidade de energia, é possível calcularmos a energia da configuração, que será dada por

$$\mathcal{E} = 4\pi \int_0^r T_0^0 r^2 dr \approx 4\pi\eta^2 r , \quad (5.1-14)$$

que é linearmente divergente para $r \rightarrow \infty$. No caso de monopolos locais, essa divergência é contornada através da inclusão de campos de calibre, ausentes no caso do monopolo global. Assim, é necessário que qualquer análise acerca do monopolo global admita um *cut off* na coordenada radial, a fim de que essa divergência seja evitada. O modelo aqui apresentado tem, portanto, o mérito de acomodar naturalmente esta condição, conforme verificado na equação (5.1-13) em que o tal limite superior na coordenada radial é uma consequência natural da hipótese, previamente assumida, de que nossa teoria modificada consiste numa pequena perturbação na RG.

As soluções (5.1-9) e (5.1-11) acima nos permitem calcular o escalar de Ricci corre-

spondente

$$R = - [(n-1)(n-2) + 2(n+2)] \psi_0 r^{n-2} - \frac{16\pi G \eta^2}{r^2}, \quad (5.1-15)$$

a partir do qual, em princípio, é possível determinarmos a forma explícita de $f(R)$. O procedimento a ser seguido, consiste em invertermos a equação acima, expressando-a como uma função de R , em seguida, substituímos $r = r(R)$ em $\mathcal{F}(r) = 1 + \psi_0 r^n$ e, por fim, realizamos a integração de $F(R)$, que resultará em $f(R)$ mais uma constante de integração, que poderá ser descartada caso nenhuma constante cosmológica esteja sendo levada em conta na teoria. Conforme mencionamos no capítulo anterior, uma teoria $f(R)$ fisicamente viável, está restrita às condições de estabilidade elencadas na seção (4.2).

5.1.1 A relação conforme com a métrica de Barriola-Vilenkin

É notável que, a relação conforme persiste mesmo para uma classe de teorias com valor arbitrário para n . Consideramos a transformação de coordenadas:

$$B(r) = p(\bar{r}) (1 - 8\pi G \eta^2), \quad (5.1-16)$$

$$A(r) dr^2 = p(\bar{r}) (1 + 8\pi G \eta^2) d\bar{r}^2, \quad (5.1-17)$$

$$r = p^{1/2}(\bar{r}) \bar{r}, \quad (5.1-18)$$

em que $p(\bar{r})$ é uma função arbitrária de \bar{r} a ser determinada $p(\bar{r}) = 1 + q(\bar{r})$ with $|q(\bar{r})| < 1$.

Diferenciando a equação (5.1-18) temos

$$dr^2 = \left(1 + \bar{r} \frac{dq}{d\bar{r}} + q \right) d\bar{r}^2. \quad (5.1-19)$$

Substituindo a equação (5.1-19) em (5.1-17) obtemos o seguinte resultado para $q(\bar{r})$ (mantendo apenas termos lineares em $q(\bar{r})$, $\psi_0 r$ e $G\eta^2$):

$$q(\bar{r}) = -\psi_0 \bar{r}^n, \quad (5.1-20)$$

então

$$p(\bar{r}) = 1 - \psi_0 \bar{r}^n. \quad (5.1-21)$$

Assim podemos escrever o elemento de linha (2.2-5) na coordenada \bar{r} da seguinte forma

$$\begin{aligned} ds^2 &= (1 - \psi_0 \bar{r}^n) [(1 - 8\pi G\eta^2) dt^2 \\ &- (1 + 8\pi G\eta^2) d\bar{r}^2 \\ &- \bar{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] . \end{aligned} \quad (5.1-22)$$

Reescalando a coordenada temporal e redefinindo a coordenada radial como $r = (1 + 4\pi G\eta^2) \bar{r}$ chegamos ao elemento de linha abaixo

$$\begin{aligned} ds^2 &= (1 - \psi_0 r^n) [dt^2 - dr^2 - (1 - 8\pi G\eta^2) \\ &\times r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)] . \end{aligned} \quad (5.1-23)$$

Então, da mesma forma que visto antes para o caso de uma função $\psi(r)$ linear, para o caso de uma função do tipo lei de potência, a relação conforme com o espaço-tempo de Barriola-Vilenkin se observa. Assim, o fenômeno da deflexão da luz permanece inalterado em relação ao descrito na RG, pelas razões anteriormente expostas.

5.2 Movimento clássico de uma partícula teste

Nesta seção analisaremos o movimento clássico de uma partícula teste no espaço-tempo cujo tensor métrico tem a forma (2.2-5) com componentes dadas por (5.1-9) e (5.1-11). A partir do elemento de linha correspondente, podemos definir a lagrangiana de uma partícula movendo-se nessa geometria, da seguinte forma [29]:

$$\begin{aligned} \left(\frac{ds}{d\tau} \right)^2 &= 2\mathcal{L} = B(r)\dot{t}^2 - A(r)\dot{r}^2 \\ &- r^2\dot{\theta}^2 - r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 , \end{aligned} \quad (5.2-24)$$

onde o ponto representa a derivada com respeito ao tempo próprio, τ .

Para órbitas restritas ao plano equatorial, i.e., com $\theta = \frac{\pi}{2}$, os momentos canônicos correspondentes, $p_\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha}$ são,

$$\begin{aligned} p_t &= E = B(r)\dot{t} , & p_\theta &= -L_\theta = 0 , \\ p_r &= -A(r)\dot{r} , & p_\phi &= -L_\phi = -r^2\dot{\phi} , \end{aligned} \quad (5.2-25)$$

em que as constantes de movimento E e L_φ são interpretadas, respectivamente, como a energia e o momento angular, por unidade de massa da partícula, na direção φ .

Dada uma partícula massiva, a seguinte relação é válida

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 1 , \quad (5.2-26)$$

da qual obtemos

$$[1 + (n-1)\psi_0 r^n] \dot{r}^2 + V_{eff}(r) = E^2 , \quad (5.2-27)$$

que nos mostra uma dependência na posição por parte da massa. Além disso, $V_{eff}(r)$ vem a ser a energia potencial efetiva associada à partícula teste e é definida como

$$V_{eff}(r) = (1 - 8\pi G\eta^2 - \psi_0 r^n) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) , \quad (5.2-28)$$

com $L \equiv L_\varphi$. Nas próximas seções, analisaremos de forma mais detalhada o movimento clássico da partícula teste.

5.2.1 O movimento tangencial

Para este caso, precisamos impor as condições necessárias para um movimento orbital estável. Tais condições são

- (i) $\dot{r} = 0$,
- (ii) $\frac{\partial V_{eff}}{\partial r} = 0$,
- (iii) $\frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial r^2} > 0$.

A primeira e segunda condições nos fornecem o seguinte sistema de equações:

$$\frac{E^2}{B} - \frac{L^2}{r^2} - 1 = 0 \quad (5.2-29)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[B \left(\frac{L^2}{r^2} + 1 \right) \right] = 0 . \quad (5.2-30)$$

Cuja solução para E e L é, respectivamente, dada por:

$$E = B \sqrt{\frac{2}{2B - B'r}} \quad (5.2-31)$$

e

$$L = \sqrt{\frac{B'r^3}{2B - B'r}} . \quad (5.2-32)$$

A velocidade angular para uma órbita arbitrária no plano equatorial é definida como

$$\Omega \equiv \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi/d\tau}{dt/d\tau} . \quad (5.2-33)$$

Assim, das equações (5.2-31) e (5.2-32) obtemos:

$$\Omega = \frac{B L}{r^2 E} = \sqrt{\frac{B'}{2r}} . \quad (5.2-34)$$

Sabe-se que a velocidade da partícula teste ao longo da direção i é [56, 57]:

$$v_i^2 = -\frac{g_{ii}}{g_{00}} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^i}{dt} . \quad (5.2-35)$$

Com isso, a velocidade tangencial v_φ será dada por

$$v_\varphi^2 = -\frac{g_{\varphi\varphi}}{g_{00}} \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = -\frac{g_{\varphi\varphi}}{g_{00}} \Omega^2 . \quad (5.2-36)$$

Desenvolvendo a expressão acima e mantendo apenas os termos lineares em $G\eta^2$ e ψ_0 obtemos

$$v_\varphi = \sqrt{-\frac{1}{2}n\psi_0 r^n} . \quad (5.2-37)$$

A expressão acima nos diz que uma órbita circular só será fisicamente possível se $\psi_0 < 0$.

Assim, impondo tal condição a equação (5.2-37) pode ser reescrita como

$$v_\varphi = \sqrt{\frac{1}{2}n|\psi_0| r^n} , \quad (5.2-38)$$

que nos mostra que para o caso que estamos analisando, em que a massa do núcleo do monopolo é desprezível, o movimento circular da partícula teste é uma consequência direta da modificação da gravidade representada pelo parâmetro ψ_0 .

5.2.2 O surgimento de uma força extra

Um importante aspecto físico observado ao estudarmos o monopolo global no contexto de uma teoria $f(R)$ é o surgimento de uma força gravitacional exercida sobre uma

partícula massiva que se move na vizinhança do monopolo. Conforme discutido antes, esta característica está ausente na RG, uma vez que o monopolo de Barriola-Vilenkin tem uma métrica com $g_{00} = \text{const.}$, o que significa a inexistência de qualquer força gravitacional. Por outro lado, baseado em nosso resultado anterior, encontramos

$$g_{00} = 1 - 8\pi G\eta^2 - \psi_0 r^n , \quad (5.2-39)$$

que dá origem a uma força radial atuando sobre a partícula para $\psi_0 \neq 0$.

Sabemos que o movimento de uma partícula teste em um campo gravitacional fraco é descrito pela equação [56]

$$\ddot{x}^i = -\frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^i} , \quad (5.2-40)$$

sendo h_{00} uma função que mede o quanto estamos nos desviando da unidade na componente g_{00} do tensor métrico. Visando a obtenção da força dada por (5.2-40), expressaremos a métrica (2.2-5) em coordenadas galileanas, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$. Para isso, faremos a seguinte mudança de coordenadas

$$t = (1 - 4\pi G\eta^2) \mathcal{T} , \quad (5.2-41)$$

e

$$r = \left(1 - 4\pi G\eta^2 - \frac{4\pi G\eta^2 \ln(|\psi_0| \mathcal{R}^n)}{n} \right) \mathcal{R} , \quad (5.2-42)$$

que implicará em

$$\begin{aligned} ds^2 &= (1 - 8\pi G\eta^2 - \psi_0 \mathcal{R}^n) d\mathcal{T}^2 \\ &- \left[1 - 16\pi G\eta^2 - \psi_0 \mathcal{R}^n \right. \\ &- \left. \frac{8\pi G\eta^2 \ln(|\psi_0| \mathcal{R}^n)}{n} \right] \times \\ &\times (d\mathcal{R}^2 + \mathcal{R}^2 d\Omega^2) , \end{aligned} \quad (5.2-43)$$

sendo $\mathcal{R} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Assim, desenvolvendo (5.2-40) para (5.2-43) obtemos

$$\ddot{x}^i = \frac{n\psi_0 \mathcal{R}^{n-1} x^i}{2 \mathcal{R}}, \quad (5.2-44)$$

a partir da qual encontramos a força por unidade de massa experimentada pela partícula, isto é

$$\vec{F} = \frac{n\psi_0 \mathcal{R}^{n-1}}{2} \hat{\mathcal{R}}. \quad (5.2-45)$$

A imposição que fizemos anteriormente sobre o sinal de ψ_0 , exigindo que seja negativo, implicará que tal força emergente seja de natureza atrativa. Tal aspecto pode ser melhor visualizado se expressarmos (5.2-45) na forma abaixo

$$\vec{F} = -\frac{n|\psi_0| \mathcal{R}^{n-1}}{2} \hat{\mathcal{R}}. \quad (5.2-46)$$

Observamos assim uma notável consequência da modificação da RG da forma que fizemos aqui, que é o surgimento de uma força atrativa a ser exercida pelo monopolo global sobre a partícula teste.

É interessante investigar quais os possíveis movimentos que a partícula teste pode realizar. Visando tal propósito, expressaremos o potencial efetivo em termos de um conjunto de variáveis adimensionais definida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \tilde{r} &\equiv (\eta\lambda^{1/2})r, \quad |\tilde{\psi}_0| \equiv |\psi_0| (\eta\lambda^{1/2})^{-n}, \\ \tilde{L}^2 &\equiv L^2 (\eta^2\lambda), \quad \alpha^2 \equiv 1 - 8\pi G\eta^2. \end{aligned} \quad (5.2-47)$$

Com essas mudanças, o intervalo de validade (5.1-13) é redefinido como

$$1 < \tilde{r} < \frac{1}{|\tilde{\psi}_0|^{\frac{1}{n}}}. \quad (5.2-48)$$

Uma característica importante que a expressão acima nos revela, e importante de ressaltarmos aqui, é que o intervalo apresentado acima tende a diminuir quanto maior for o valor de n . O que quer dizer que, o tamanho da região do espaço em que alguma mudança, resultante da modificação da gravidade, seja perceptível tenderá a diminuir conforme consideramos potências de $\psi(r)$ mais elevadas. Tal restrição nos recomenda que concentremos nossa atenção a valores pequenos de n .

Em termos dessas novas variáveis, o potencial efetivo (5.2-28) pode ser escrito como

$$V_{eff}(\tilde{r}) = \alpha^2 + |\tilde{\psi}_0|\tilde{r}^n + \alpha^2 \frac{\tilde{L}^2}{\tilde{r}^2} - \tilde{\psi}_0 \tilde{L}^2 \tilde{r}^{n-2} . \quad (5.2-49)$$

Atribuindo valores numéricos para os parâmetros α^2 , $\tilde{\psi}_0$, \tilde{L} e n , presentes na equação acima, podemos analisar o comportamento dos possíveis perfis para o potencial efetivo. Vamos agora esboçar $V_{eff}(\tilde{r})$ vs \tilde{r} para diferentes valores de $\tilde{\psi}_0$ e então observar como o potencial efetivo se comporta para valores específicos de n , isto é, para $n = 1, 2$ and 3 , respectivamente.

Gráfico para $n = 1$

O gráfico de $V_{eff}(\tilde{r})$ vs \tilde{r} é mostrado na figura (5.1). Plotamos o gráfico atribuindo valores específicos para α^2 e $\tilde{\psi}_0$. O gráfico foi construído para duas configurações distintas do potencial efetivo: na primeira, representada pela curva sólida, compatível com o contexto de gravidade modificada, podemos ver que a força atrativa captura a partícula teste que se move com uma energia superior ao valor mínimo do potencial. Na segunda, que está representada pela curva tracejada, o parâmetro associado à modificação da gravidade $\tilde{\psi}_0$ é fixado em zero e o potencial não apresenta qualquer ponto extremo. Assim, neste último, a partícula não será capturada pelo monopolo, conforme previsto por M. Barriola e A. Vilenkin, uma vez que o monopolo não exerce, neste caso, nenhuma força gravitacional sobre uma partícula massiva que se mova em torno dele.

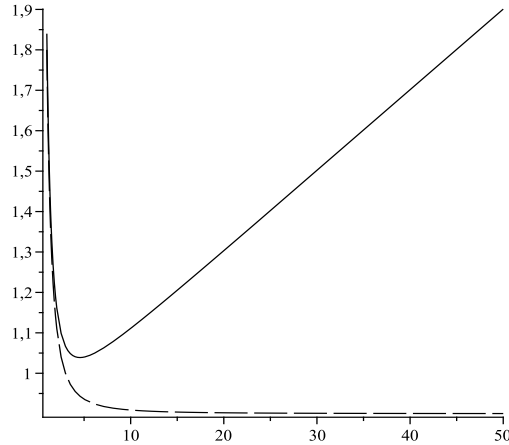


Figura 5.1: Gráfico do potencial efetivo V_{eff} vs \tilde{r} para dois diferentes conjunto de valores de α , $\tilde{\psi}_0$ e \tilde{L} . A curva sólida mostra o mínimo do potencial para $\alpha^2 = 0.9$, $\tilde{\psi}_0 = -0.02$ e $\tilde{L} = 1$, que significa que uma partícula movendo-se com energia $E^2 > V_{eff}^{min}$ será capturada pelo monopolo. Por outro lado, a curva tracejada expressa o potencial efetivo correspondente, no contexto da RG, com $\alpha^2 = 0.9$, $\tilde{\psi}_0 = 0$ e $\tilde{L} = 1$. Neste último caso, o potencial não possui nenhum mínimo e a partícula não será capturada pelo monopolo, conforme previsto no modelo de Barriola-Vilenkin.

Gráficos adicionais para os casos $n = 2$ e 3

Os próximos exemplos que pretendemos analisar são aqueles referentes a $n = 2$ e 3 . Os gráficos V_{eff} vs \tilde{r} mostrados abaixo representam os perfis do potencial efetivo (5.2-49) para cada um destes valores de n . Os valores numéricos de $\tilde{\psi}_0$ adotados em cada caso foram $\tilde{\psi}_0 = -0.02$. As diferentes escalas do eixo horizontal em cada gráfico evidencia a dependência do intervalo de validade (5.2-48) em relação ao valor adotado para n .

Conforme podemos ver, para valores crescentes de n , os gráficos tendem a manter comportamentos semelhantes, isto é, sempre possuindo um mínimo bem definido, que é uma exigência para o surgimento da força extra. Como a força (5.2-45) é atrativa, será possível observar uma captura da partícula teste pelo monopolo global se a partícula se mover com energia maior que a do mínimo do potencial. Em cada caso representado acima haverá dois pontos de retorno para o movimento da partícula. Tal processo de captura da partícula teste é um aspecto ausente deste problema quando analisado no contexto da RG, sendo uma consequência exclusiva do tipo de modificação da gravidade que fizemos.

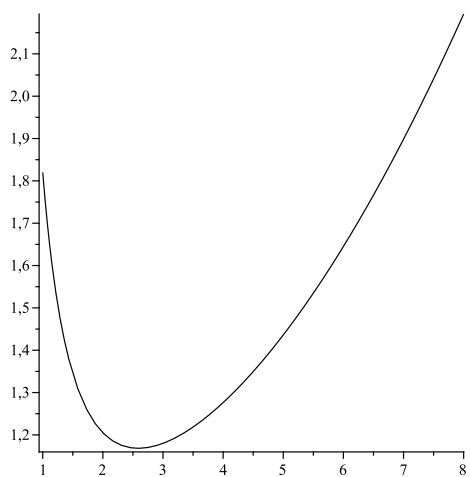


Figura 5.2: Caso $n = 2$. Para este caso, o intervalo de validade é $1 < \tilde{r} < 7.07$, então, é razoável permitir que a coordenada radial varie entre 1 e 8 conforme está expresso no gráfico.

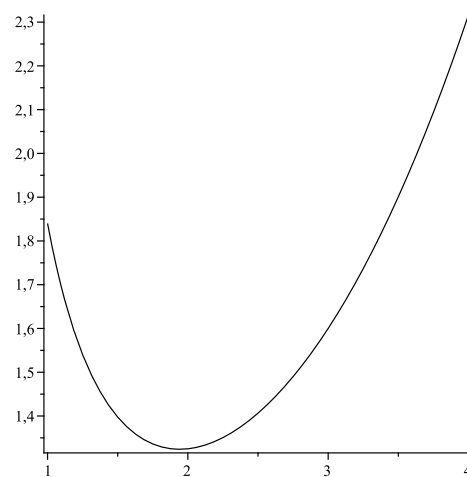


Figura 5.3: Case $n = 3$. Agora, o intervalo de validade é $1 < \tilde{r} < 3.68$, que sugere a variação mostrada no eixo horizontal, a saber, entre 1 e 4.

Conclusão

O objetivo central desta tese foi analisar o campo gravitacional de um monopolo global inserido numa gravitação descrita por uma teoria $f(R)$. Algumas consequências advindas dessa propostas também foram investigadas como, por exemplo, o movimento clássico de partículas no espaço-tempo desse monopolo.

Visando fornecer uma motivação ao leitor, no capítulo 1, revisitamos o importante conceito de quebra espontânea de simetria, estabelecendo as conexões desse fenômeno com a formação de defeitos topológicos no Universo primordial, através do Mecanismo de Kibble, processo pelo qual acredita-se terem surgido os defeitos topológicos gravitacionais, na qual incluem-se os monopolos globais.

No capítulo 2, foi revisado o estudo do monopolo global em teorias de gravitação, no qual destacamos os modelos de Barriola-Vilenkin no contexto da RG e de Barros-Romero, no âmbito de uma teoria de Brans-Dicke. Mostramos as propriedades mais notáveis de ambas as soluções, estabelendo as comparações importantes entre as duas. No capítulo 3, nos dedicamos à revisão e discussão das teorias $f(R)$, abordando vários aspectos que julgamos serem importantes para o acompanhamento dos capítulos posteriores.

Os capítulos 4 e 5 constituem a espinha dorsal desta tese, que é o estudo do campo gravitacional do monopolo global, em um teoria $f(R)$ e algumas de suas consequências. Observamos que, vivendo num cenário de gravidade modificada, o monopolo global se enriquece, apoderando-se de propriedades físicas diferentes daquelas verificadas quando ele está na RG. Sendo a principal delas a capacidade de exercer uma força atrativa sobre partículas movendo-se nas suas adjacências. A contribuição oferecida por esta tese, que através dos trabalhos [12] e [13] foi compartilhada com todas as pessoas interessadas em

estudar o tema, tem despertado o interesse de alguns desses colegas que, recentemente, se debruçaram sobre as soluções aqui apresentadas para, com base nelas, investigar variados tipos de fenômenos que este modelo viabiliza, como podemos ver nas referências [58–60].

Nosso estudo, portanto, parece abrir um novo horizonte de possibilidades a serem exploradas em trabalhos futuros. Extensões possíveis de fenômenos já conhecidos, envolvendo monopolos globais em RG, é uma possibilidade a ser considerada. Acreditamos que esses novos horizontes inaugurados pelos trabalhos aqui apresentados são amplos e podem contribuir tanto para a melhor compreensão da física de um monopolo global, quanto para o estudo das teorias $f(R)$, o que seria de grande importância para a física teórica atual.

Bibliografia

- [1] N. D. Mermin, *Rev. Mod. Phys.* **51**, 591 (1979).
- [2] G. Toulouse e M. Kléman, *J. Phys. Lett.*, **37**, L-149 (1976).
- [3] G. E. Volovik and V. P. Mineyrov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz. (CCCP)*, **72**, 2256 (1977).
- [4] E. W. Kolb e M. S. Turner, *The Early universe*, Addison Wesley, Redwood City, C.A. (1990).
- [5] L. Ryder, **Quantum Field Theory**, Cambridge University Press, (1996).
- [6] J. N. Islan, **An Introduction to Mathematical Cosmology**, Cambridge University Press, UK (1992).
- [7] A. Vilenkin e E. P. S. Shellard, **Cosmic Strings and Other Topological Defects**, Cambridge University Press, Cambridge, England, (1994).
- [8] T. W. B. Kibble, *J. Phys. A* **9**, 1387 (1976).
- [9] A. Vilenkin, *Phys. Rep.* **121**, 263 (1985).
- [10] M. Barriola and A. Vilenkin, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 341 (1989).
- [11] A. Barros e C. Romero, *Phys. Rev. D* **56**, 6688 (1997).
- [12] T. R. P. Caramês, E. R. B. de Mello e M. E. X. Guimarães, *Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser.* **3**, 446, (2011).

- [13] T. R. P. Caramês, E. R. B. de Mello e M. E. X. Guimarães, *Mod. Phys. Lett. A*, Vol. 27, No. 30, 1250177, (2012).
- [14] A. G. Riess *et al.*, *Astron. J.* **166**, 1009 (1998).
- [15] K. S. Stelle, *Phys. Rev. D* **16**, 953 (1977).
- [16] A. A. Starobinsky, *Phys. Lett. B* **91**, 99 (1980).
- [17] J. D. Barrow e S. Cotsakis, *Phys. Lett. B*, **214**, 515, (1988).
- [18] R. H. Brandenberger, eprint gr-qc/921004 (1992).
- [19] R. P. Woodard, *Lect. Notes. Phys.* **720**, 403, (2007).
- [20] M. Ostrogradski, *Mem. Ac. St. Petersburg VI* **4**, 385 (1850).
- [21] V. Faraoni, arXiv:0810.2602 [gr-qc] (2008).
- [22] T. P. Sotiriou e V. Faraoni, *Rev. Mod. Phys.* **82**, 451 (2010).
- [23] S. E. Jorás, *Int. J. Mod. Phys. A*, **26**, 3730 (2011).
- [24] M. Novello, N. P. Neto e S. E. P. Bergliaffa (ORG), Programa Mínimo de Cosmologia, ICRA-CBPF, (2010).
- [25] D. Bailin e S. Love, **Introduction to Gauge Field Theory**, Adam Hilger Bristol and Boston, (1986).
- [26] J. Goldstone, *Nuovo Cim.* **19**, 154, (1961).
- [27] M. Nakahara, **Geometry, Topology and Physics**, Second Edition, Institute of Physics Publishing, (2003).
- [28] R. Rajaraman, **Solitons and Instantons: An Introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory**, North-Holland Personal Library, (1987).

- [29] R. A. d'Inverno, **Introducing Einstein's Relativity**, Oxford University Press, (1992).
- [30] P. Jordan, *Zeit. Phys.* **157**, 112, (1959).
- [31] C. Brans e R. H. Dicke, *Phys. Rev.* **124**, 925, (1961).
- [32] S. Weinberg, **Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity**, John Wiley and Sons, (1972).
- [33] S. Perlmutter *et al.*, *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999).
- [34] D. Huterer e M.S. Turner, *Phys. Rev. D* **60**, 081301 (1999).
- [35] S. Weinberg, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 1 (1989).
- [36] L. Papantonopoulos, **The Invisible Universe: Dark Matter and Dark Energy**, *Lect. Notes. Phys.* 207, Springer Berlin Heidelberg, (2007).
- [37] H. A. Buchdahl, *Mon. Not. R. astr. Soc.*, **150**, 1-8, (1970).
- [38] S. Capozziello, *Int. J. Mod. Phys. D*, **11**, 483 (2002).
- [39] S. M. Carrol, V. Duvvuri, M. Trodden e M. S. Turner, *Phys. Rev. D* **70**, 043528 (2004).
- [40] A. L. Erickcek, T. L. Smith, e M. Kamionkowski, *Phys. Rev. D* **74**, 121501 (2006).
- [41] X.-H. Jin, D.-J. Liu, e X.-Z. Li, *astro-ph/0610854* (2006).
- [42] M. L. Ruggiero e L. Iorio, *JCAP* 0701, 010 (2007), *gr-qc/0607093*.
- [43] O. Bertolami, C. G. Boehmer, T. Harko, e F. S. N. Lobo, *Phys. Rev. D* **75**, 104016 (2007), *arXiv:0704.1733 [gr-qc]*.
- [44] C. G. Boehmer, T. Harko, e F. S. N. Lobo, *Astropart. Phys.*, **29**:386-392 (2008), *arXiv:0704.1733 [gr-qc]*.

- [45] Q. Exirifard e M. M. Sheikh-Jabbari, *Phys. Lett. B* **661**, 158 (2008).
- [46] M. Capone e M. L. Ruggiero, *Class. Quantum Grav.* **27**, 125006, (2010).
- [47] J. O’Hanlon, *Phys. Rev. Lett.* **29**, 137, (1972).
- [48] B. Bertotti, L. Iess, e P. Tortora, *Nature* **425**, 374, (2003).
- [49] J. Khoury and A. Weltman, *Phys. Rev. D* **69**, 044026, (2004).
- [50] J. Khoury and A. Weltman, *Phys. Rev. Letters* **93**, 171104, (2004).
- [51] J. A. R. Cembranos, *Phys. Rev. D* **73**, 064029 (2006)
- [52] A. Nunez e S. Solganik, [arXiv:hep-th/0403159].
- [53] L. Pogosian e A. Silvestri, *Phys. Rev. D* **77**, 023503, (2008).
- [54] T. Multamaki e I. Vilja, *Phys. Rev. D* **74**, 064022, (2006).
- [55] T. R. P. Caramês e E. R. Bezerra de Mello, *Eur. Phys. J. C* **64**, 113, (2009).
- [56] L. D. Landau e E. M. Lifshitz, **The Classical Theory of Fields**, Vol. 2, 4th edition, Butterworth-Heinemann, (1975).
- [57] V. P. Frolov e I. D. Novikov, **Black Hole Physics: Basic Concepts and New Developments**, Kluwer Academic Publishers, (1989).
- [58] J. P. Morais Graça e V. B. Bezerra, *Mod. Phys. Lett. A*, Vol. 27, No. 31, 1250178, (2012).
- [59] J. Man e H. Cheng, arXiv:1205.4857 [gr-qc] (2012).
- [60] J. Man e H. Cheng, *Phys. Rev. D* **87**, 044002, (2013).