

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE FÍSICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

**Correlações quânticas geométricas sob
decoerência**

por

José David Montealegre Rodríguez

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Silva Sarandy.

Co-orientador: Dr. Fagner Muruci de Paula.

Niterói, setembro de 2013.

M772 Montealegre Rodríguez, José David.
Correlações quânticas geométricas sob decoerência / José David Montealegre Rodríguez ; orientador: Marcelo Silva Sarandy. -- Niterói, 2013.
53 f. : il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Fluminense.
Instituto de Física, 2013.
Bibliografia: f. 51-53.

1.INFORMAÇÃO QUÂNTICA. 2.DISCÓRDIA QUÂNTICA GEOMÉTRICA.
3.DECOERÊNCIA. 4.CORRELAÇÃO QUÂNTICA. I.Sarandy, Marcelo
Silva, Orientador. II.Universidade Federal Fluminense.
Instituto de Física, Instituição responsável. III.Título.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer:

- Ao IF-UFF por permitir a realização deste trabalho.
- À CAPES, CNPq e o povo brasileiro pelo apoio financeiro.
- Aos companheiros do instituto pela amizade.
- Ao meu orientador Prof. Dr. Marcelo Silva Sarandy pela educação e a paciência, e ao Dr. Fagner Muruci pela valiosa ajuda e seu tempo.

Resumo

A discórdia quântica geométrica é uma medida bem definida de correlação quântica se a norma do traço (norma-1 de Schatten) é adotada como medida de distância. Na presente dissertação, nós investigamos o comportamento dinâmico dessa medida sob decoerência. Partindo de estados Bell-diagonais mistos arbitrários sob ruído Markoviano local, fornecemos os decaimentos da correlação quântica como uma função dos parâmetros de decoerência. Em particular, mostramos que a discórdia quântica geométrica norma-1 apresenta as possibilidades de mudança súbita dupla e comportamento de congelamento durante sua evolução. Para estados Bell-diagonais não triviais sob canais Markovianos simples, estas são novas propriedades que estão em contraste com outras medidas de discórdia geométrica. As condições necessárias e suficientes para mudanças súbitas duplas, bem como suas localizações exatas em termos de probabilidades de decoerência são fornecidas. Além disso, nós apresentamos uma proposta de realização experimental dessas mudanças súbitas duplas em spins nucleares manipulados por técnicas de ressonância magnética nuclear.

Abstract

Geometric quantum discord is a well-defined measure of quantum correlation if Schatten 1-norm (trace norm) is adopted as a distance measure. Here, we analytically investigate the dynamical behavior of the 1-norm geometric quantum discord under the effect of decoherence. By starting from arbitrary Bell-diagonal mixed states under Markovian local noise, we provide the decays of the quantum correlation as a function of the decoherence parameters. In particular, we show that the 1-norm geometric discord exhibits the possibility of double sudden changes and freezing behavior during its evolution. For nontrivial Bell-diagonal states under simple Markovian channels, these are new features that are in contrast with other measures of geometric discord. The necessary and sufficient conditions for double sudden changes as well as their exact locations in terms of decoherence probabilities are provided. Moreover, we design a proposal of experimental realization of these double sudden changes in nuclear spins manipulated by nuclear magnetic resonance techniques.

Sumário

1	Introdução	1
2	Considerações Gerais	5
2.1	Postulados da física quântica	5
2.2	Decoerência	9
3	Discórdia quântica	15
3.1	Discórdia quântica entrópica	16
3.2	Discórdia quântica geométrica	25
3.2.1	Discórdia quântica geométrica (DQG) norma-p	26
3.2.2	DQG norma-1 para estados Bell-diagonais.	27
4	DQG norma-1 sob decoerência	31
4.1	Comportamento dinâmico dos estados Bell-diagonais sob canais Markovianos locais	31
4.2	DQG norma-1 dos estados Bell-diagonais sob decoerência	35
4.3	Exemplos	38
4.3.1	Mudança súbita dupla para o canal GAD	39
4.3.2	Comportamento de congelamento	40
4.4	Proposta de implementação experimental	41
4.4.1	Condições gerais para a mudança subita dupla da DQG norma-1 sob os canais de PF e GAD.	43
5	Conclusões e perspectivas futuras	45

A Cálculo alternativo analítico da DQG norma-1

47

Lista de Figuras

2.1	Esfera de Bloch;	6
2.2	Efeito da inversão de bit para $p = 0.3$	11
2.3	Efeito da inversão de fase para $p = 0.3$	12
2.4	Efeito da inversão de bit e fase para $p = 0.3$	12
2.5	Efeito da atenuação de amplitude para $\gamma = 0.8$ e $p = 1$	14
3.1	Diagrama de Venn das entropias clássicas	19
3.2	Estados Bell-diagonal, os vértices do tetraedro corresponden aos estados puros de Bell	24
4.1	Estados Bell-diagonais que podem exibir mudanças súbitas duplas sob o canal GAD (região vermelha dentro do tetraedro). O ponto azul $\vec{c} = (0.1, 0.2, 0.3)$ representa o estado usado como estado inicial na figura 4.2.	39
4.2	Mudança súbita dupla para o estado $\vec{c} = (0.1, 0.2, 0.3)$ sob o canal GAD, com $p_1^{SC} = 1/3$ e $p_2^{SC} = 2/3$. Gráfico inserido: Valor absoluto das correlações como função de γ	40
4.3	Comportamento de congelamento para o estado dado por $\vec{c} = (1, -0.1, 0.1)$ sob o canal PF. Gráfico inserido: Valor absoluto das correlações como função de p	41
4.4	Curva teórica da DQG norma-1 sob os canais PF+GAD na implementação em RMN com os parâmetros descritos no texto.	44

Capítulo 1

Introdução

Geometria desempenha um papel fundamental na física. Na teoria quântica moderna, esta ideia tem sido implementada através de muitas propostas de geometrização de recursos em informação quântica, como por exemplo o conceito de emaranhamento [1, 2, 3, 4]. Nos últimos anos, descrições geométricas também tem sido introduzidas para medidas de correlações quânticas mais gerais. Neste contexto, especial atenção tem sido dada à discórdia quântica (DQ) (ver referências [5, 6, 7] para revisões recentes), a qual é uma medida de correlações não-clássicas proposta originalmente por Ollivier e Zurek [8], usando uma abordagem entrópica (não-geométrica). A geometrização da DQ, chamada discórdia quântica geométrica (DQG), foi proposta por Dakic, Vedral e Brukner [9], principalmente motivados pela dificuldade para calcular analiticamente soluções da versão entrópica da DQ. DQG, como foi definida originalmente, pode ser considerada como uma deformação da DQ entrópica [10] e quantifica a magnitude das correlações quânticas com a distância do estado quântico até o estado clássico mais próximo, com a medida de distância sendo dada pela medida de Hilbert-Schmidt. Nessa definição um estado clássico é definido como aquele que pode ser medido sem ser perturbado para algum conjunto de operadores de medida atuando de maneira não-seletiva. Este cálculo é analiticamente computável para estados de 2 bits quânticos (q-bits) gerais [9] e para estados bipartitos arbitrários [11, 12, 13]. Aliás, mostrou-se que ela apresenta relevância operacional em protocolos específicos de comunicação quântica [14]. Apesar dessas propriedades notáveis, a DQG é sensível

à escolha da medida de distância [15]. Por outra parte, recentemente foi estabelecido que a DQG proposta na referência [9] não pode ser considerada uma boa medida do caráter quântico das correlações porque ela pode aumentar sob operações locais no subsistema não medido [16, 17, 18]. Em particular, foi mostrado por Piani na Ref. [18] que a simples introdução de um estado fatorizado local auxiliar na parte não medida muda a discórdia geométrica num fator dado pela pureza do estado auxiliar. De um ponto de vista técnico, a raiz desse problema é a falta de contractividade da medida de Hilbert-Schmidt, o que significa que a distância entre dois estados pode aumentar sob uma operação quântica que preserva o traço. Notavelmente, o problema pode ser completamente resolvido se a DQG for definida através da norma-1 de Schatten (norma do traço). De fato, no tocante a normas- p de Schatten gerais para a definição geométrica de DQ [19], foi mostrado na Ref [20] que a única norma- p capaz de definir consistentemente DQG é a norma-1 (veja também a Ref. [21]). Em particular a norma de Hilbert-Schmidt corresponde a norma-2 de Schatten. Nessa dissertação, investigamos a DQG norma-1 sob efeito da decoerência. Mais especificamente, consideramos estados Bell-diagonais atravessando canais quânticos Markovianos locais, que preservam a forma Bell-diagonal. Para estes estados, foi possível calcular analiticamente a DQG norma-1 como função da probabilidade de decoerência. Em particular, mostramos que a DQG norma-1 pode apresentar mudanças súbitas duplas e comportamento de congelamento durante a sua evolução. Em relação às mudanças súbitas duplas, a ocorrência delas para estados Bell-diagonal sob ruído Markoviano é uma característica nova que não tinha sido encontrada nas DQ entrópica [22] nem na norma-2 de Schatten geométrica [23]. Especificamente a este respeito, o comportamento de congelamento para estados Bell-diagonais gerais sob ruído Markoviano, ele também pode ocorrer na DQ entrópica [24], sendo interpretado como uma transição súbita entre a decoerência quântica e a clássica. Serão mostradas mudanças súbitas duplas e comportamento de congelamento através de exemplos simples, bem como uma proposta de implementação experimental desses fenômenos através de spins nucleares manipulados via ressonância magnética.

No segundo capítulo é revisada a teoria quântica básica necessária para a dissertação: a formulação baseada no formalismo de operador densidade e a teoria dos

sistemas abertos. No terceiro capítulo é feito o estudo das correlações quânticas e da discórdia quântica em particular, usando os resultados da literatura científica recente. No quarto capítulo são apresentados os resultados novos obtidos na presente dissertação: a investigação de correlações quânticas geométricas sob decoerência com ênfase nos fenômenos de mudança súbita dupla e comportamento de congelamento, usando DQG norma-1. Finalmente apresentamos nossas conclusões e perspectivas futuras.

Capítulo 2

Considerações Gerais

Neste capítulo faremos uma revisão das bases teóricas necessárias para obter os resultados da presente dissertação: a construção da mecânica quântica com um formalismo conveniente e a teoria de sistemas quânticos abertos.

2.1 Postulados da física quântica

MECÂNICA QUÂNTICA é um arcabouço matemático e conceitual que descreve as leis físicas que se manifestam principalmente em sistemas físicos microscópicos, tais como átomos elétrons e fótons. Em seus aspectos principais, a teoria pode ser descrita em quatro postulados [25], os quais estão brevemente descritos abaixo em termos do formalismo do operador densidade.

Postulado 1: *Para cada sistema físico existe um espaço vetorial complexo com produto interno (espaço de Hilbert) chamado espaço de estados do sistema. O sistema é completamente caracterizado pelo seu operador densidade ρ , que é um operador com traço 1 e positivo (auto-valores não-negativos) atuando no espaço de estados. Se o sistema está no estado ρ_m com probabilidade p_m , o seu operador densidade será*

$$\rho = \sum_m p_m \rho_m. \quad (2.1)$$

O sistema quântico mais simples e de grande interesse para nós é o *q-bit* (o *bit quântico*), isto é, um sistema de dois níveis. Neste caso, o espaço de estados possui

duas dimensões e a matriz densidade associada é uma matriz complexa 2x2 que, expandida na base das matrizes de Pauli, apresenta a seguinte forma:

$$\rho = \frac{1}{2}(I + \vec{\psi} \cdot \vec{\sigma}), \quad (2.2)$$

onde I representa o operador identidade, $\vec{\psi} = (\langle\sigma_1\rangle, \langle\sigma_2\rangle, \langle\sigma_3\rangle)$ denota um vetor pertencente à esfera unitária de Bloch (veja a 2.1) e $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ é um vetor formado pelas matrizes de Pauli. Assim, para determinarmos completamente o estado de um q-bit, basta conhecermos o vetor de Bloch $\vec{\psi}$, ou seja, precisamos obter os valores esperados $\langle\sigma_i\rangle$ ($i = 1, 2, 3$). O estado de um q-bit é maximamente misto quando $|\vec{\psi}| = 0$, misto no domínio $0 < |\vec{\psi}| < 1$ e puro quando $|\vec{\psi}| = 1$.

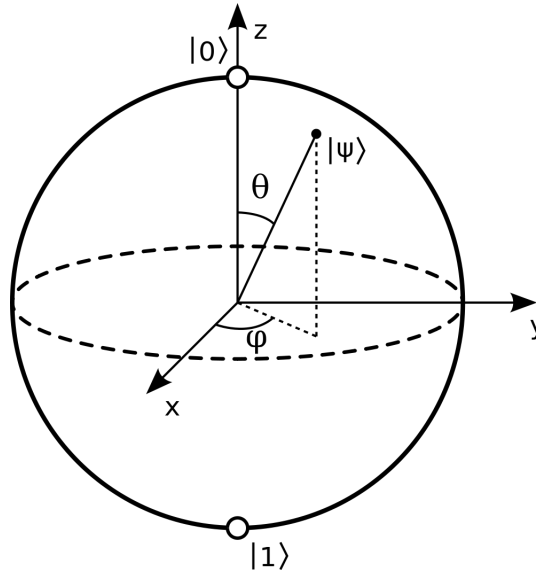


Figura 2.1: Esfera de Bloch;

Postulado 2: A evolução de um sistema quântico fechado é descrita por uma transformação unitária. Isto é, o estado ρ do sistema em um tempo t_1 está relacionado ao estado ρ' do sistema num tempo t_2 por um operador unitário $U(t_2 - t_1)$ tal que:

$$\rho' = U\rho U^\dagger. \quad (2.3)$$

O segundo postulado introduz o conceito de sistema fechado (ou isolado), o que

significa ausência de interação entre o sistema e seu entorno. Isso é uma idealização, válida como uma boa aproximação apenas quando o acoplamento é suficientemente fraco ou quando o sistema é o universo como um todo. Em geral, sistemas interagem com o universo (sistema+entorno) e suas evoluções temporais são descritas por transformações não-unitárias. Tais sistemas abertos (ou seja, afetados pelo ambiente) serão discutidos em mais detalhes na próxima seção.

Postulado 3: *As medidas quânticas são descritas por um conjunto de operadores de medida $\{M_m\}$. Esses operadores atuam sobre o espaço de estados do sistema. O índice m refere-se a um resultado possível da medida. Se o estado imediatamente antes da medida for ρ , a probabilidade de o resultado m ocorrer será*

$$p(m) = \text{tr}(M_m^\dagger M_m \rho) \quad (2.4)$$

e o estado do sistema após a medida será dado por

$$\rho_m = M_m \rho M_m^\dagger / p(m), \quad (2.5)$$

com os operadores de medida satisfazendo a relação de completude

$$\sum_m M_m M_m^\dagger = I. \quad (2.6)$$

O terceiro postulado é útil para explicar o que acontece quando o sistema interage com os equipamentos de medidas. Esse tipo de interação faz parte do processo de investigação e contribui com o não-isolamento de um sistema fechado. Portanto, a medida não é descrita por uma transformação unitária. Em particular, as denominadas *medidas projetivas de Von Neumann* ocorrem quando os elementos do conjunto $\{M_m\}$ são projetores ortonormais ($M_m M_n = \delta_{m,n} M_m$), ou seja, são operadores hermitianos. No caso de um sistema de dois níveis, o conjunto de medidas projetivas possui dois elementos, geralmente denotados pelos símbolos Π_- e Π_+ , onde

$$\Pi_\pm = \frac{1}{2}(I \pm \vec{n} \cdot \vec{\sigma}). \quad (2.7)$$

Nesta expressão, $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ representa um vetor unitário ($n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$) que

especifica a direção espacial na qual a medida está sendo realizada. É importante observar o requerimento de que $\{M_m\}$ denote um conjunto de projetores ortogonais não faz parte do postulado 3. De fato podemos considerar medidas mais gerais que aquelas projetivas. Nesse contexto, um formalismo adequado para tratar medidas é o formalismo POVM (positive operator-valued measure). Definimos um POVM como qualquer conjunto $\{E_m\}$ de operadores tais que:

- (a) E_m é positivos para qualquer m ;
- (b) Os operadores E_m satisfazem a relação de completitude, isto é, $\sum_m E_m = I$.

Os operadores E_m são conhecidos como elementos POVM associados à medida. Dado um POVM $\{E_m\}$ podemos sempre associar a ele um conjunto de operadores de medida $\{M_m\}$, onde $M_m = \sqrt{E_m}$.

Postulado 4: *O espaço de estados de um sistema físico composto é o produto tensorial dos espaços de estados das suas componentes. Se tivermos sistemas numerados de 1 até n , e o i -ésimo sistema for preparado em ρ_i , o estado do sistema composto será*

$$\rho = \rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \cdots \otimes \rho_n. \quad (2.8)$$

O último postulado trata de sistemas compostos e como o espaço de estados de tais sistemas deve ser construído a partir dos espaços de estados dos sistemas individuais. A matriz densidade ρ_i é conhecida como operador densidade reduzido do i -ésimo subsistema, e pode ser extraída do estado global ρ por meio da operação conhecida como “traço parcial”, isto é:

$$\rho_i = Tr_{\{\bar{i}\}} \rho, \quad (2.9)$$

onde a operação de traço atua sobre o conjunto de subsistemas $\{\bar{i}\}$ tal que $\bar{i} \neq i$. Por exemplo, se ρ descreve um sistema bipartido AB , a matriz densidade associada com o subsistemas A é dada pela expressão $\rho_A = Tr_B \rho$, com o traço parcial atuando apenas no subsistema B , isto é, $Tr_B(|a_1\rangle\langle a_2| \otimes |b_1\rangle\langle b_2|) = |a_1\rangle\langle a_2| Tr_B(|b_1\rangle\langle b_2|) = |a_1\rangle\langle a_2| \langle b_1 | b_2 \rangle$, onde $|a_i\rangle$ e $|b_i\rangle$ representam quaisquer vetores do espaço de A e B ,

respectivamente. É importante destacar que sistemas quânticos de duas ou mais partes apresentam propriedades novas e surpreendentes que inexitem em sistemas formados por uma única parte. Essas propriedades vêm sendo discutidas desde o célebre artigo de Einstein, Podolsky e Rosen [26], que abriu o estudo de fenômenos como a não-localidade, emaranhamento e discórdia.

2.2 Decoerência

A decoerência é o fenômeno responsável pela perda das propriedades quânticas de sistemas físicos [29]. O formalismo disponível para estudá-la é conhecida como teoria de sistemas quânticos abertos, a qual trata dos efeitos de interação entre o sistema de interesse e o seu ambiente [30]. Por simplicidade, iremos supor que o sistema (s) e o entorno (e) encontram-se inicialmente descorrelacionados, ou seja, o estado inicial do sistema global é dado pelo produto tensorial $\rho = \rho_s \otimes \rho_e$, onde ρ_s e ρ_e representam os estados do sistema de interesse e do entorno, respectivamente. Além disso, o sistema global é considerado fechado e, de acordo com o postulado 2, sua evolução $\rho' = U\rho U^\dagger$ é ditada por uma transformação unitária U . Utilizando esse esquema, a evolução do sistema aberto é obtida traçando-se os graus de liberdade associados ao ambiente, isto é, aplicando-se um mapa ε sobre o estado ρ_s descrito pela expressão

$$\varepsilon(\rho_s) = \text{Tr}_e \left\{ U \rho_s \otimes \rho_e U^\dagger \right\}. \quad (2.10)$$

Se N_e indica o número de graus de liberdade do ambiente, $\{|\mu\rangle\}$ representa uma base ortonormal na qual ρ_e é diagonal e p_μ denota a probabilidade de encontrar o ambiente no estado puro $|\mu\rangle$, então podemos escrever

$$\rho_e = \sum_{\mu=1}^{N_e} p_\mu |\mu\rangle \langle \mu|, \quad (2.11)$$

o que implica em

$$\varepsilon(\rho_s) = \sum_{\nu} \langle \nu | U \rho_s \otimes \sum_{\mu=1}^{N_e} p_{\mu} |\mu\rangle \langle \mu| U^{\dagger} | \nu \rangle = \sum_{\mu, \nu} p_{\mu} \langle \nu | U | \mu \rangle \rho_s \langle \mu | U^{\dagger} | \nu \rangle \quad (2.12)$$

ou

$$\varepsilon(\rho_s) = \sum_i \Gamma_i \rho_s \Gamma_i^{\dagger}, \quad (2.13)$$

onde definimos

$$\Gamma_i \equiv \sqrt{p_{\mu}} \langle \nu | U | \mu \rangle. \quad (2.14)$$

A expressão 2.13 é conhecida como representação soma de $\varepsilon(\rho_s)$, e $\{\Gamma_i\}$ são os chamados operadores de Kraus. Note que U opera no sistema total, enquanto o conjunto $\{\Gamma_i\}$ atua apenas no sistema de interesse.

Agora, derivemos a condição de normalização dos operadores de Kraus. Utilizando a unitariedade $U^{\dagger}U = I_s \otimes I_e$, encontramos:

$$\begin{aligned} \sum_i \Gamma_i^{\dagger} \Gamma_i &= \sum_{\mu, \nu} p_{\mu} \langle \mu | U^{\dagger} | \nu \rangle \langle \nu | U | \mu \rangle = \sum_{\mu} p_{\mu} \langle \mu | U^{\dagger} U | \mu \rangle \\ &= \sum_{\mu} p_{\mu} \langle \mu | I_s \otimes I_e | \mu \rangle = \sum_{\mu} p_{\mu} I_s \langle \mu | \mu \rangle = I_s \sum_{\mu} p_{\mu} = I_s, \end{aligned} \quad (2.15)$$

ou seja, os operadores de Kraus obedecem a relação de completude

$$\sum_i \Gamma_i^{\dagger} \Gamma_i = I_s, \quad (2.16)$$

que garante a preservação do traço de $\varepsilon(\rho_s)$. De fato, empregando a propriedade cíclica do traço, obtemos:

$$\text{Tr}[\varepsilon(\rho_s)] = \text{Tr}\left(\sum_i \Gamma_i \rho_s \Gamma_i^{\dagger}\right) = \text{Tr}\left(\rho_s \sum_i \Gamma_i^{\dagger} \Gamma_i\right) = \text{Tr}(\rho_s I_s) = \text{Tr}(\rho_s). \quad (2.17)$$

Abaixo encontram-se conjuntos de operadores de Kraus associados com alguns exemplos de canais que atuam sobre um único q-bit [25].

Inversão de bit:

Este proceso de decoerência acontece quando se inverte o estado de um q-bit, como por exemplo de $|1\rangle$ para $|0\rangle$ (e viceversa).

Se a probabilidade de ocorrência é $1 - p$, os operadores de Kraus são

$$\Gamma_0 = \sqrt{p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_1 = \sqrt{1-p} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Na figura 2.2 se mostra o efeito do canal inversão de bit sobre a esfera de Bloch.

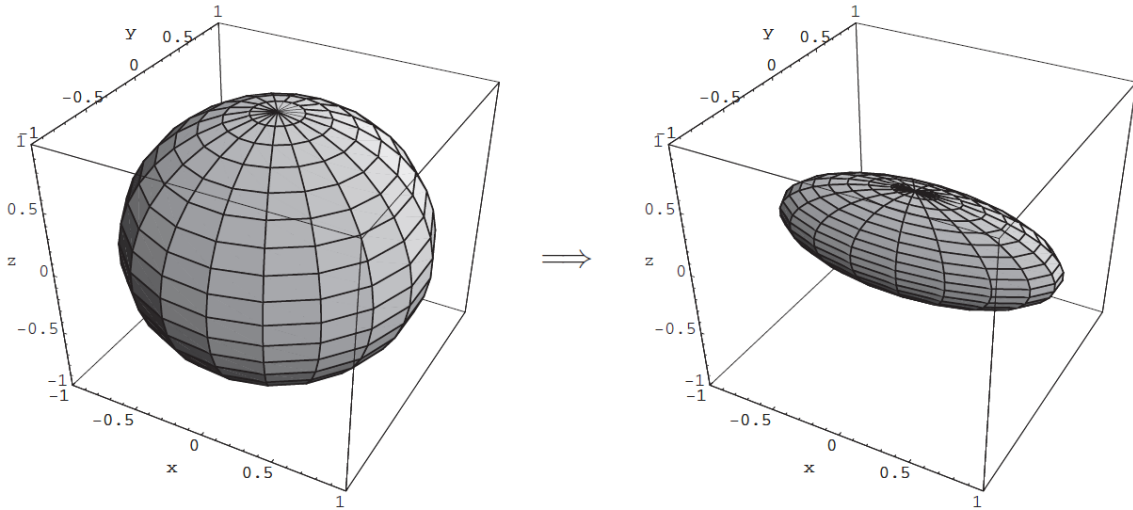


Figura 2.2: Efeito da inversão de bit para $p = 0.3$

Inversão de fase:

Este canal é um processo de ruído quântico com perda de informação de fase relativa sem perda de energia e é descrito pelos seguintes operadores de Kraus:

$$\Gamma_0 = \sqrt{p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_1 = \sqrt{1-p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Na esfera de Bloch, podemos ilustrar o efeito do canal inversão de fase, conforme a Fig. 2.3.

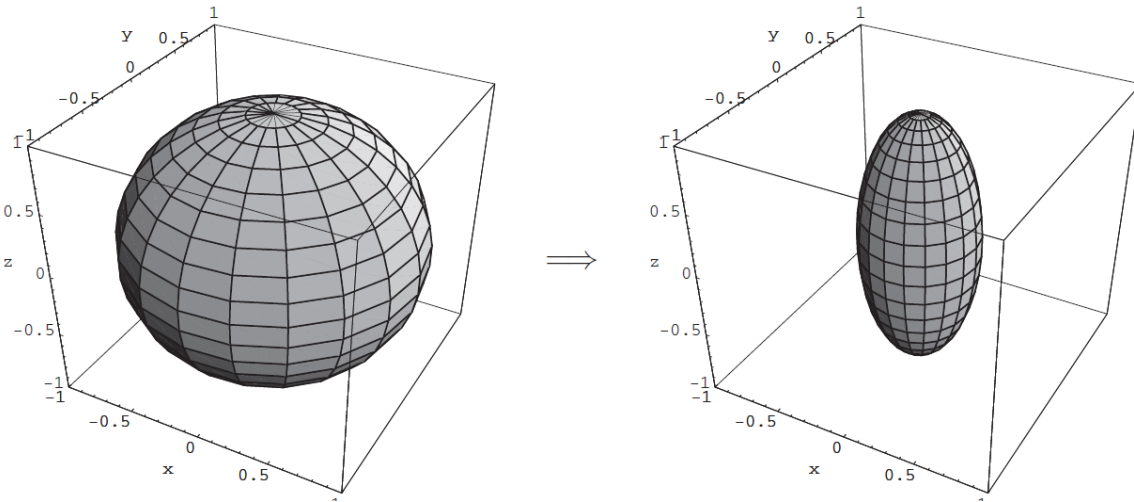


Figura 2.3: Efeito da inversão de fase para $p = 0.3$

Inversão de bit e fase:

Os ruídos deste canal são uma mistura daqueles descritos pelo canal inversão de fase e inversão de bit:

$$\Gamma_0 = \sqrt{p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_1 = \sqrt{1-p} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Na esfera de Bloch, a atuação desse canal está ilustrada na fig. 2.4.

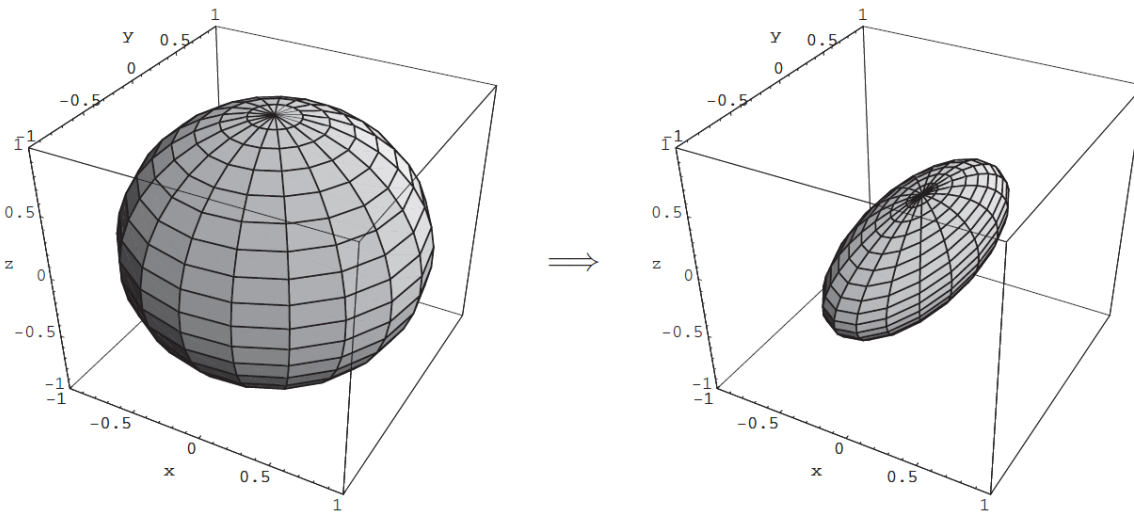


Figura 2.4: Efeito da inversão de bit e fase para $p = 0.3$

Os efeitos dos três canais de decoerência anteriores são semelhantes, a diferença é o eixo de “contração” para cada caso. Será mostrado posteriormente que o efeito da decoerência sobre as correlações clássicas e quânticas também vai ser similar para os três canais.

Atenuação de fase:

Este é um proceso de ruído de natureza completamente quântica. Há perda de informação quântica sem perda de energia. Os auto-estados de energia de um sistema quântico não mudam com o tempo, mas acumulam uma fase que é proporcional ao autovalor, e se o tempo de evolução do sistema não é conhecido com precisão, parte da informação sobre essa fase quântica (fase relativa entre auto-estados de energia) vai ser perdida. Os operadores de Kraus correspondentes são

$$\Gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\lambda} \end{pmatrix}, \quad \Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda} \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

As operações quânticas de atenuação de fase e inversão de fase são equivalentes e portanto o ilustrado para a inversão de fase, é valido para a atenuação de fase também.

Atenuação de amplitude generalizada:

Este processo envolve sistemas com perdas de energia a temperaturas finitas, onde os operadores de Kraus são definidos como,

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \sqrt{p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \end{pmatrix}, & \Gamma_1 &= \sqrt{p} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \Gamma_2 &= \sqrt{1-p} \begin{pmatrix} \sqrt{1-\gamma} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & \Gamma_3 &= \sqrt{1-p} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{\gamma} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

A seguir se ilustra o efeito da atenuação de amplitude, no caso particular de temperatura 0 correspondente a $p = 1$

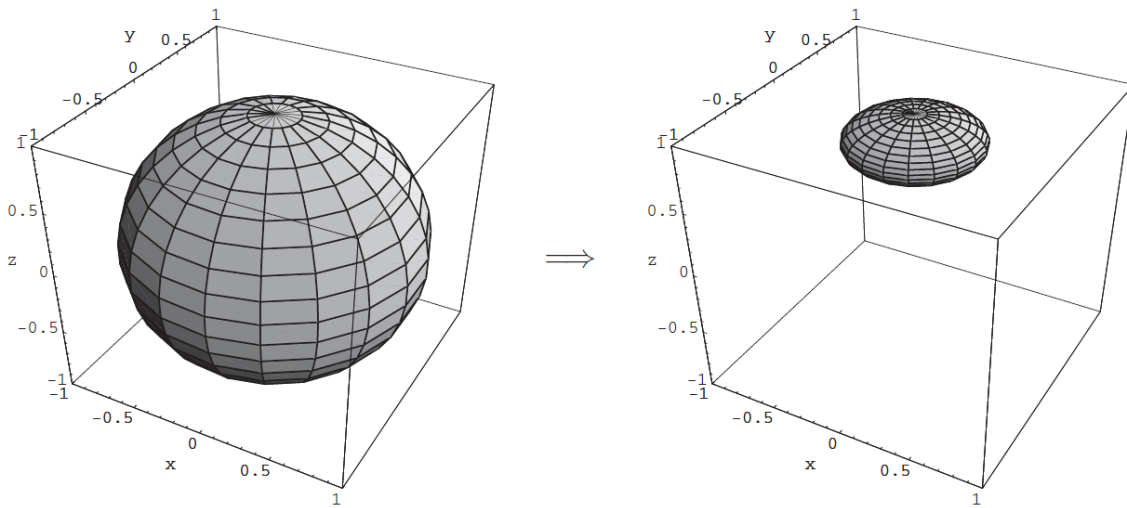


Figura 2.5: Efeito da atenuação de amplitude para $\gamma = 0.8$ e $p = 1$

Capítulo 3

Discórdia quântica

Em teoria da informação quântica, a discórdia quântica é uma medida de correlações não-clássicas entre os dois subsistemas de um sistema quântico bipartido. Ela inclui correlações que são devidas a efeitos físicos quânticos, mas não envolvem necessariamente emaranhamento. Assim, a noção de discórdia quântica vai além da distinção entre estados emaranhados e estados separáveis (não emaranhados). Em outras palavras, separabilidade por si só não implica em ausência de efeitos quânticos. Então, a discórdia quântica pode ser formulada como uma medida da não classicalidade de um estado, sendo que a classicalidade pode ser entendida como a existência de uma base de medida não-seletiva que deixa o estado não perturbado. De acordo com o anterior, definimos um estado clássico-clássico como aquele que pode ser escrito como

$$\rho_{cc} = \sum_k p_k \Pi_k^a \otimes \Pi_k^b, \quad (3.1)$$

onde o conjunto $\{\Pi_k^I\}$ denota uma base de projetores ortogonais no espaço de Hilbert da parte I do sistema. Nesse estado é possível medir qualquer uma das partes sem perturbar o sistema. Em um estado clássico-clássico, uma medida local tanto na parte a do sistema quanto na parte b , definidas por bases de medida $\{\Pi_k^a\}$ e $\{\Pi_k^b\}$ respectivamente, deixará o sistema não perturbado. Se apenas uma das partes a ser medida pode deixar o sistema não perturbado, digamos a parte a , o estado é conhecido como clássico-quântico. Nesse cenário, a discórdia quântica vai ser uma medida de afastamento do comportamento clássico.

3.1 Discórdia quântica entrópica

Começamos com uma breve revisão da teoria da informação clássica, que fornecerá os conceitos necessários para a construção da medida da discórdia quântica entrópica.

A informação como magnitude física está relacionada com o número de configurações possíveis para o sistema. Se o sistema tem muitas configurações possíveis, a incerteza antes de conhecer a configuração do sistema é grande, e portanto a informação ganha ao conhecer a configuração do sistema é grande.

Para definir as medidas de informação, os diversos estados do sistema serão representados por uma variável aleatória X , que pode assumir os valores x correspondentes aos estados do sistema, cada um com probabilidade $p(x)$ de acontecer.

Entropia de Shannon

O problema que interessava o Shannon era a transmissão da informação clássica. Qual é o menor número de bits necessário para armazenar (ou transmitir) uma mensagem? Se temos 4 estados possíveis (00, 01, 10, 11) e igualmente prováveis, são necessários 2 bits para especificar em geral cada estado. Em geral, uma cadeia de n bits pode conter até 2^n possibilidades. Se o número de estados possíveis é M , é razoável pensar que a informação (quantidade de bits) necessária para especificar o estado vai ser

$$I = \log_2 M \tag{3.2}$$

Note-se que a informação definida assim é estritamente crescente com o número de estados. Quando todos os estados são igualmente prováveis, nossa incerteza a priori do estado do sistema é máxima, mas se a distribuição de probabilidade dos estados não é equiprovável, há um maior conhecimento a priori do sistema e portanto a informação do sistema deve ser menor. Se o estado é conhecido, $M = 1$ e $I = 0$.

A medida proposta por Shannon [27] é definida pela seguinte expressão:

$$H(X) = - \sum_x p(x) \log_2 p(x). \quad (3.3)$$

Definida assim, a unidade da informação será o bit. Se o estado do sistema é conhecido, a entropia de Shannon vai ser 0 (lembrar que $\lim_{x \rightarrow 0} x \log_2 x = 0$).

Essa medida vai ter as seguintes propriedades:

- Se $p(x) = \frac{1}{M}$ a definição reduz-se a equação 3.2.
- Se o sistema está composto por dois sub-sistemas e as distribuições de probabilidade de cada sub-sistema são independentes, então a entropia de Shannon vai ser a soma das entropias de cada sub-sistema.

Entropia conjunta

É possível generalizar a definição anterior para mais de uma variável aleatória. Se temos as variáveis aleatórias X e Y , e a probabilidade de obter os valores x e y conjuntamente é $p(x, y)$, a entropia conjunta de X e Y será dada por

$$H(X, Y) = - \sum_{x,y} p(x, y) \log_2 p(x, y). \quad (3.4)$$

Com a entropia conjunta, podemos escrever a desigualdade triangular para a entropia de Shannon

$$H(X, Y) \leq H(X) + H(Y). \quad (3.5)$$

Essa desigualdade também é chamada propriedade subaditiva da entropia de Shannon. Se X (com distribuição de probabilidade dada por $p(x)$) e Y (com distribuição de probabilidade dada por $q(y)$) são independentes (i.e. $p(x, y) = p(x) \cdot q(y)$), obtemos a igualdade.

Entropia condicional

Quando as variáveis aleatórias X e Y são dependentes, é conveniente definir uma medida de quanto diminui a incerteza sobre uma das variáveis, quando a outra variável é conhecida. Se $H(Y | X = x)$ é a entropia da variável Y dado que a variável X toma o valor x , a entropia condicional $H(Y | X)$ será definida como o média ponderada de $H(Y | X = x)$ sobre todos os x

$$H(Y | X) = \sum_x p(x)H(Y | X = x) = \sum_x p(x) \left(- \sum_y p(y | x) \log_2 p(y | x) \right), \quad (3.6)$$

onde $p(y | x)$ é a probabilidade condicional, a probabilidade de obter o valor y da variável Y dado que o valor da variável X é x . Temos que $p(y | x) = p(x, y)/p(x)$. Usando isso na anterior equação

$$\begin{aligned} \sum_x p(x) \left(- \sum_y p(y | x) \log_2 p(y | x) \right) &= - \sum_x \sum_y p(x, y) \log_2 p(y | x) = \\ - \sum_{x,y} p(x, y) [\log_2 p(x, y) - \log_2 p(x)] &= - \sum_{x,y} p(x, y) \log_2 p(x, y) + \sum_{x,y} p(x, y) \log_2 p(x) = \\ H(X, Y) - \left(- \sum_x p(x) \log_2 p(x) \right) &= H(X, Y) - H(X) \end{aligned}$$

Então, podemos escrever nossa definição de entropia condicional como

$$H(Y | X) = H(X, Y) - H(X) \quad (3.7)$$

Informação mútua

Usando as medidas anteriores, passamos a considerar o conteúdo de informação comum das variáveis X e Y . Esse conteúdo é dado pela informação mútua, a qual é definida como

$$I(A : B) = H(A) + H(B) - H(A, B) \quad (3.8)$$

Se tomarmos A e B independentemente, calculamos o conteúdo de informação total delas, depois calculamos o conteúdo de informação das variáveis juntas e o subtrai-

mos do total, o que fica (a informação mútua) pode ser interpretado como a quantidade de informação compartilhada pelas variáveis A e B . Usando a desigualdade triangular 3.5, note-se que se A e B são independentes, $I(A : B) = 0$.

Usando a equação 3.4, a informação mútua pode ser escrita como

$$I(A : B) = H(A) - H(A | B) = H(B) - H(B | A). \quad (3.9)$$

Assim, é possível uma outra interpretação: A informação mútua é a quantidade de informação associada com uma das variáveis, descontando a informação obtida pelo conhecimento da outra variável. Como a informação mútua definida acima é simétrica, não importa qual variável tomamos como referência, a informação compartilhada vai ser igual. Isso fica mais claro se observarmos a Fig. 3.1.

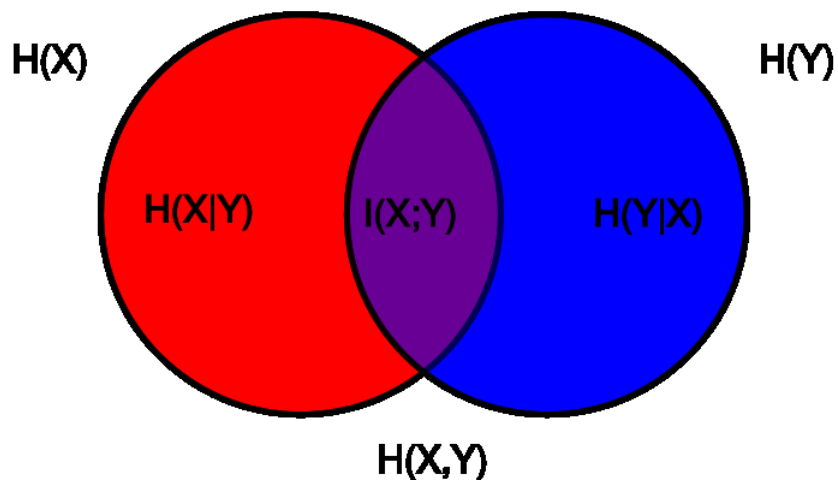


Figura 3.1: Diagrama de Venn das entropias clássicas

Entropia de Von Neumman

Para o caso quântico temos um sistema descrito por um operador densidade ρ . A entropia de Von Neumman associada a esse operador é definida como

$$S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log_2 \rho). \quad (3.10)$$

Escrevendo a matriz densidade em termos de seus autovalores λ_i podemos reescrever a entropia de Von Neumman como sendo

$$S(\rho) = -\sum_i \lambda_i \log_2 \lambda_i \quad (3.11)$$

A entropia de Von Neumman $S(\rho)$ mede a ignorância (incerteza) associada a um estado quântico caracterizado por um operador densidade ρ de um modo análogo a entropia de Shannon no caso clássico.

Algumas propriedades básicas da entropia de Von Neumman são

1. Se o espaço de Hilbert do sistema é d -dimensional, $0 \leq S(\rho) \leq \log_2 d$.
2. É zero se, e somente se, o estado ρ for um estado puro. Se o sistema estiver em um estado de mistura máxima (a probabilidade de estiver em qualquer um dos estados puros de uma base ortonormal é igual $p = \frac{1}{d}$) atinge o valor máximo.
3. Se um sistema composto AB estiver em um estado puro, $S(A) = S(B)$.

A discórdia quântica entrópica é uma medida de correlações não clássicas em um estado bipartido, proposta inicialmente por Ollivier e Zurek [28]. O ponto de partida foi notar a diferença entre as expressões para a informação mútua 3.8 e 3.9 ao tentar generalizar para o caso quântico, embora no caso clássico sejam iguais.

A expressão 3.8 para a informação mútua clássica é simétrica nas partes A e B e pode ser generalizada de forma direta para o caso quântico. Isso se faz usando a entropia de Von Neumman em vez da entropia de Shannon

$$\mathcal{I}(\rho_{A:B}) = S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}), \quad (3.12)$$

onde ρ_A e ρ_B são os operadores densidades reduzidos, cuja definição foi fornecida no capítulo anterior.

A generalização quântica da informação mútua partindo da expressão 3.9 não é tão simples quanto foi para a expressão 3.8. Isto é porque o cálculo da entropia condicional do sistema A requer o conhecimento do estado do sistema B , que pode estar correlacionado com A . Se quisermos conhecer o estado de B , é preciso fazer medidas neste sistema e o estado de um sistema quântico é tipicamente perturbado quando é medido.

Vamos considerar medidas projetivas Π_j^B sobre o sistema B . As medidas são feitas sobre o sistema global ρ_{AB} e o estado do sistema A correspondendo ao resultado j de uma medida em B vai ser

$$\rho_A^j = \frac{1}{q_j} \text{Tr}_B \{ (I_A \otimes \Pi_j^B) \rho_{AB} (I_A \otimes \Pi_j^B) \},$$

onde $q_j = \text{Tr}_{AB} \{ (I_A \otimes \Pi_j^B) \rho_{AB} \}$ é a probabilidade do sistema estar no estado j após a medida. As incertezas $S(\rho_A^j)$ distribuídas pelas probabilidades q_j fornecem a entropia condicional do sistema A dado o conjunto completo de medidas $\{\Pi_j^B\}$ no sistema B ,

$$S_{\{\Pi_j^B\}}(\rho_{A|B}) = \sum_j q_j S(\rho_A^j). \quad (3.13)$$

Com as definições anteriores, é possível generalizar a Eq. 3.9 da seguinte forma

$$\mathcal{J}(\rho_{A:B}) = S(\rho_A) - S_{\{\Pi_j^B\}}(\rho_{A|B}). \quad (3.14)$$

A Eq. 3.14 representa a informação adquirida sobre o sistema A usando as medidas $\{\Pi_j^B\}$ no sistema B . A discórdia quântica entrópica é então definida como a diferença entre as quantidades $\mathcal{I}(\rho_{A:B})$ e $\mathcal{J}(\rho_{A:B})$:

$$\mathcal{D}(\rho_{AB}) = \mathcal{I}(\rho_{AB}) - \max_{\{\Pi_j^B\}} \mathcal{J}(\rho_{AB}). \quad (3.15)$$

O máximo do conjunto de medidas $\{\Pi_j^B\}$ é usado porque procuramos pelo conjunto completo de medidas sobre o sistema B que perturba o mínimo possível o estado glo-

bal e que fornece o máximo de informação sobre o sistema A . Nesse contexto, devemos em princípio procurar pelo POVM que perturba o mínimo possível o sistema, ao invés de um conjunto de medidas projetivas. No entanto, para os estados de interesse nessa dissertação, a minimização sobre POVM's coincidirá com a minimização sobre medidas projetivas. A partir de um ponto de vista analítico, o cálculo da discórdia geométrica entrópica é uma tarefa difícil, mesmo para sistemas totais de dois q-bits (o mais simples possível), já que é necessário um procedimento de otimização sobre todas as medidas generalizadas locais.

A discórdia quântica não é necessariamente simétrica em relação a troca de índices. Isso acontece porque o cálculo da entropia condicional quântica se faz medindo um dos dois subsistemas e se os subsistemas A e B não são simétricos (simétricos significa o mesmo sistema para cada parte, um sistema total composto por dois subsistemas iguais).

A discordia quântica possui as seguintes propriedades [31]:

- É uma quantidade não negativa, $\mathcal{D}(\rho_{AB}) \geq 0$.
- Não é necessariamente simétrica sob a troca dos índices A e B .
- É limitada superiormente pela entropia do subsistema B , $\mathcal{D}(\rho_{AB}) \leq S(\rho_B)$.
- É invariante sob transformações unitárias locais, $\mathcal{D}(\rho_{AB}) = \mathcal{D}[(U_A \otimes U_B)\rho_{AB}(U_A^\dagger \otimes U_B^\dagger)]$.

Estados Bell-diagonais

Nesta dissertação, estamos interessados num sistema bipartido formado por dois q-bits. Mais especificamente, nosso foco será sobre uma operador densidade denominado estado Bell-diagonal, chamado assim pelo fato de a matriz correspondente ser diagonal na base dos estados de Bell. Assim, essa classe de estados é definida por

$$\rho_{BD} = \sum_{i=1}^4 \lambda_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i| = \frac{1}{4} [(I_A \otimes I_B + \vec{c} \cdot (\vec{\sigma}_A \otimes \vec{\sigma}_B)], \quad (3.16)$$

para a qual os estados das partes são iguais ao estado de mistura máxima, ou seja,

$$\rho_A = \rho_B = \text{Tr}_{AB} \rho_{BD} = \frac{1}{4} I_2. \quad (3.17)$$

Na Eq. 3.16, λ_i ($0 \leq \lambda_i \leq 1$) denotam os autovalores de ρ_{BD} e $|\psi_i\rangle$ representam os estados de Bell. Na base computacional, formada pelos vetores ortonormais de um q-bit $|0\rangle$ e $|1\rangle$, os estados de Bell apresentam a forma:

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \\ |\psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle), \\ |\psi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle), \\ |\psi_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle). \end{aligned} \quad (3.18)$$

A Eq. 3.16 também apresenta o operador ρ_{BD} escrito na base das matrizes de Pauli, onde $\vec{c} \cdot (\vec{\sigma}_A \otimes \vec{\sigma}_B) = \sum_{i=1}^3 c_i (\sigma_i^A \otimes \sigma_i^B)$, sendo $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ ($-1 \leq c_i \leq 1$) um vetor que especifica completamente o estado Bell-diagonal, cujas componentes são “funções de correlação qbit-qbit, ou seja, são parâmetros definidos pelos valores esperados $c_i = \langle \sigma_i^A \otimes \sigma_i^B \rangle$ ($i = 1, 2, 3$). Em termos desses parâmetros, os autovalores são dados pelas seguintes expressões

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{4}[1 - c_1 - c_2 - c_3], \\ \lambda_2 &= \frac{1}{4}[1 - c_1 + c_2 + c_3], \\ \lambda_3 &= \frac{1}{4}[1 + c_1 + c_2 + c_3], \\ \lambda_4 &= \frac{1}{4}[1 + c_1 + c_2 - c_3]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

A condição $0 \leq \lambda_i \leq 1$ garante que o operador densidade seja positivo e tenha traço 1, o que restringe o vetor \vec{c} ao tetraedro indicado na figura 3.2. Nesta ilustração, as linhas azuis representam os eixos ortogonais c_1 , c_2 e c_3 , enquanto os pontos vermelhos situados nos vértices do tetraedro representam os quatro estados de Bell.

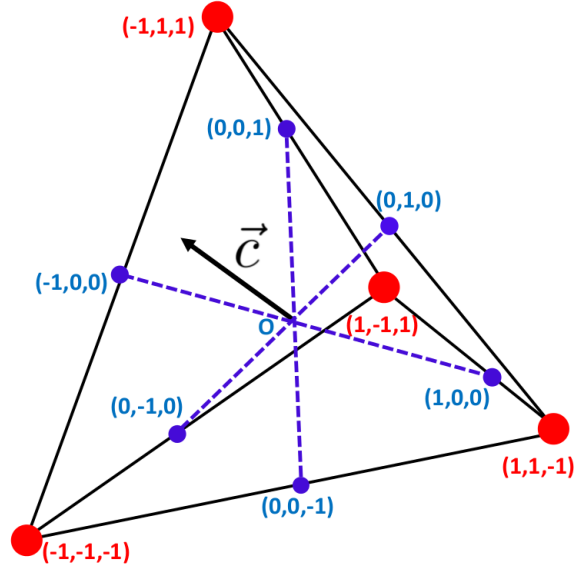


Figura 3.2: Estados Bell-diagonal, os vértices do tetraedro correspondem aos estados puros de Bell

A discórdia entrópica para os estados Bell diagonal já foi calculada analiticamente [32]. O cálculo da informação mútua quântica $\mathcal{I}(\rho_{AB}^{BD})$ é simples. As matrizes densidade reduzidas das partes são $\rho_A = \rho_B = I/2$, então substituindo em 3.12 resulta

$$\mathcal{I}(\rho_{A:B}) = 2 + \sum_{i=1}^4 \lambda_i \log_2 \lambda_i,$$

onde os λ_i são dados por 3.19.

A expressão para $\mathcal{J}(\rho_{A:B})$ pode ser calculada considerando o conjunto de bases de medida $\{V\Pi_k^a V^\dagger\}$, sendo Π_k^a os operadores de projeção da base computacional $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ e V uma matriz arbitrária $SU(2)$ de rotação que define a base de medida:

$$V = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{i\varphi} \\ -\sin \theta e^{-i\varphi} & \cos \theta \end{pmatrix},$$

Onde $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \varphi \leq \pi$. Fazendo a otimização sobre os parâmetros variando-os em toda a esfera de Bloch, obtemos[32]:

$$\mathcal{J}(\rho_{A:B}) = \frac{1+c_+}{2} \log_2(1+c_+) + \frac{1-c_+}{2} \log_2(1-c_+),$$

com c_+ representando o maior valor absoluto dos c_i : $c_+ = \max(|c_1|, |c_2|, |c_3|)$

Finalmente, substituindo $\mathcal{I}(\rho_{A:B})$ e $\mathcal{J}(\rho_{A:B})$ na Eq. 3.15 obtemos

$$\mathcal{Q} = \log_2 \frac{4\lambda_1^{\lambda_1} \lambda_2^{\lambda_2} \lambda_3^{\lambda_3} \lambda_4^{\lambda_4}}{(1 - c_+)^{\frac{1-c_+}{2}} (1 + c_+)^{\frac{1+c_+}{2}}} \quad (3.20)$$

3.2 Discórdia quântica geométrica

A dificuldade de extrair soluções analíticas para a discórdia quântica levou Dakic, Vedral e Brukner a propor uma versão geométrica [9], que quantifica as correlações quânticas de um estado em termos de sua distância de Hilbert-Schmidt mínima em relação ao conjunto de estados clássicos. O cálculo dessa medida alternativa requer um processo de minimização mais simples, que pode ser realizado analiticamente para estados bipartidos arbitrários [11]. Matematicamente, essa medida é definida pela seguinte expressão:

$$D_2(\rho) = \min_{\Omega_0} \|\rho - \rho_c\|_2^2, \quad (3.21)$$

onde $\|X\|_2 = \sqrt{\text{Tr}[XX^\dagger]}$ representa a norma de Hilbert-Schmidt (norma-2 de Schatten) e Ω_0 denota o conjunto dos estados clássico-quânticos, cuja forma geral é dada por

$$\rho_c = \sum_k p_k \Pi_k^a \otimes \rho_k^b, \quad (3.22)$$

com $\{\Pi_k^a\}$ sendo o conjunto de projetores ortogonais que atuam sobre o subsistema A e ρ_k^b representando o operador densidade reduzido do subsistema B , o qual ocorre com probabilidade $p_k \geq 0$, tal que $\sum_k p_k = 1$.

Embora seja mais computável que a discórdia entrópica, a versão geométrica como definida acima possui uma propriedade não desejável para uma medida de correlação quântica: ela pode aumentar sob operações locais sobre o subsistema não medido. É um fato conhecido que a discórdia entrópica (contrariamente ao emaranhamento) pode aumentar sob operações locais nas partes medidas. Por exemplo, definamos a

operação local Λ no sistema a , tal que seja completamente positiva e preserve o traço:

$$\begin{aligned}\Lambda |0\rangle\langle 0| &= |0\rangle\langle 0| \\ \Lambda |1\rangle\langle 1| &= |+\rangle\langle +|,\end{aligned}$$

onde $|+\rangle = (|1\rangle + |0\rangle)/\sqrt{2}$. O estado clássico-clássico $(|0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| \otimes |1\rangle\langle 1|)/2$, que tem discórdia nula, é mapeado no estado $(|0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0| + |+\rangle\langle +| \otimes |1\rangle\langle 1|)/2$ cuja discórdia é não nula. No entanto, esse aumento da discórdia vem ao custo de correlação clássica, não podendo ocorrer de forma arbitrária. Por outro lado a discórdia entrópica não aumentará sob a ação de Λ se fizermos medida em b , como foi mostrado por Piani na Ref. [18]; nesse trabalho ele também mostrou que essa conclusão não se aplica a DQG: a simples introdução de um estado auxiliar fatorizado local no subsistema não medido, modifica o valor da discórdia geométrica por um fator dado pela pureza do estado auxiliar. Vamos considerar o mapa $\Gamma^\sigma : X \rightarrow X \otimes \sigma$, que pode ser um canal que introduz um estado auxiliar ruidoso: o que Piani mostrou foi que $D_2[\Gamma_b^\sigma(\rho)] = D_2(\rho)Tr(\sigma^2)$. Isso significa que a DQG norma-2 pode aumentar sob operações locais no subsistema b se removermos o estado auxiliar, dado que $Tr[\sigma^2] \leq 1$ em geral. De fato, ao considerar o acoplamento do subsistema b com um sistema auxiliar arbitrário em um estado misto σ , obtemos que a DQG norma-2 aumenta pela simples remoção de σ . A origem deste problema é a norma de Hilbert-Schmidt (norma 2). Note-se que isso não ocorre com a discórdia entrópica. Na seguinte subseção mostraremos de forma geral que a DQG norma- p , para $p \neq 1$ não é uma escolha apropriada para a quantificação geométrica do caráter quântico das correlações.

3.2.1 Discórdia quântica geométrica (DQG) norma- p

A discórdia geométrica quântica foi definida inicialmente usando a norma-2, mas essa definição apresenta propriedades não desejáveis como quantificador rigoroso das correlações quânticas. Nesta seção vamos aprofundar na razão da escolha da norma-1 para definir nossa medida geométrica de correlações quânticas. A DQG norma-1 vai ser definida como

$$D_1(\rho) = \min_{\Omega_0} \|\rho - \rho_c\|_1, \quad (3.23)$$

onde $\|X\|_1 = \text{Tr}[\sqrt{XX^\dagger}]$ é a norma do traço.

Vamos considerar a DQG baseada em uma norma mais geral, definida por [38]

$$D_p(\rho) = \min_{\Omega_0} \|\rho - \rho_c\|_p^p, \quad (3.24)$$

onde $\|X\|_p = \text{Tr}[(X^\dagger X)^{\frac{p}{2}}]^{\frac{1}{p}}$ é a norma- p de Schatten, com p denotando um número inteiro positivo. Com essa notação a DQG norma-2 é obtida tomando $p = 2$. A norma- p é multiplicativa sob produto tensorial [39], então pode-se enxergar que $\|X\|_p \rightarrow \|\Gamma_b^\sigma[X]\|_p = \|X\|_p \|\sigma\|_p$. Deste modo,

$$D_p[\Gamma_b^\sigma(\rho)] = D_p(\rho) \|\sigma\|_p^p. \quad (3.25)$$

Note-se que $\|\sigma\|_p = 1$ se e somente se $p = 1$, já que $\|\sigma\|_1 = \text{Tr}[\sigma] = 1$ para um estado σ geral. Então, a DQG baseada na norma-1 é a única norma de Schatten capaz de quantificar consistentemente correlações não-clássicas, contornando o problema apresentado inicialmente pela norma-2. De fato, pode-se mostrar que $D_1(\rho)$ não é crescente sob operações locais gerais no subsistema b [33]. Devido às propriedades da distância do traço, a DQG norma-1 é contrativa sob canais quânticos que preservam o traço, isso é, $\|\rho - \rho_c\|_1 \geq \|\varepsilon(\rho) - \varepsilon(\rho_c)\|_1$, onde ε é operação quântica geral que preserva o traço. Agora vamos considerar uma operação quântica ε_b , que atua só no subsistema b . Denotando como $\bar{\rho}_c$ o estado clássico mais próximo de um estado quântico determinado ρ , podemos escrever $D_1(\rho) = \|\rho - \bar{\rho}_c\|_1 \geq \|\varepsilon_b(\rho) - \varepsilon_b(\bar{\rho}_c)\|_1$. Note-se que $\varepsilon_b(\bar{\rho}_c)$ é ainda um estado clássico, mas não é *necessariamente* o estado clássico mais próximo a $\varepsilon_b(\rho)$. Então $\|\varepsilon_b(\rho) - \varepsilon_b(\bar{\rho}_c)\|_1 \geq D_1(\varepsilon_b(\rho))$. Portanto resulta que $D_1(\rho) \geq D_1(\varepsilon_b(\rho))$, o que implica que $D_1(\rho)$ não pode aumentar sob operações no subsistema b .

3.2.2 DQG norma-1 para estados Bell-diagonais.

Os estados Bell-diagonais de dois q-bit já foram introduzidos nas considerações gerais, com sua expressão dada por

$$\rho_{BD} = \frac{1}{4}[(I_A \otimes I_B + \vec{c} \cdot (\vec{\sigma}_A \otimes \vec{\sigma}_B)]$$

Em forma matricial temos

$$\rho_{AB} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + c_3 & 0 & 0 & c_1 - c_2 \\ 0 & 1 - c_3 & c_1 + c_2 & 0 \\ 0 & c_1 + c_2 & 1 - c_3 & 0 \\ c_1 - c_2 & 0 & 1 + c_3 & 1 + c_3 \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

Lembrando que $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$, $-1 \leq c_i \leq 1$, $c_i = \langle \sigma_i^A \otimes \sigma_i^B \rangle$, é um vetor dentro do tetraedro mostrado no capítulo anterior, esse vetor define o estado ρ_{AB} .

A minimização para os casos norma-2 [11] e para a entropia relativa [34], já foram calculadas e pode ser demonstrado que o estado que minimiza a distância é o estado original depois da medição para alguma base de medida $\{\Pi_k^A\}$. No caso da DQG norma-1 é razoável esperar um comportamento similar. De fato, no trabalho inicial usado nesta dissertação [20] foi feita a hipótese de que o estado clássico-quântico que minimiza a equação 3.23 é um estado Bell-diagonal. Esta hipótese foi originalmente apoiada com argumentos numéricos, mas junto como os resultados da Ref. [36] pode-se obter uma prova analítica desse fato. Essa demonstração é detallada no Apêndice. A seguir, será mostrado por simplicidade o cálculo baseado na hipótese numérica.

O estado que minimiza a equação 3.23 é da forma Bell-diagonal

$$\rho_c^{BD} = \frac{1}{4} [(I_A \otimes I_B + \vec{l} \cdot (\vec{\sigma}_A \otimes \vec{\sigma}_B)],$$

onde \vec{l} representa os estados sobre as linhas ortonormais do tetraedro mostrado na Fig. 3.2.

Usando a hipótese e substituindo na equação 3.23, é possível escrever

$$D_1 = \min[\min_{n_1} f_1(l_1), \min_{n_2} f_2(l_2), \min_{n_3} f_3(l_3)], \quad (3.27)$$

onde

$$f_i(l_i) = \left\| (\vec{c} - \vec{l}_i) \cdot (\sigma_a \otimes \sigma_b) \right\|_1 = \sum_{p=0}^1 \sum_{q=0}^1 |\tau_{pq,i}|, \quad (3.28)$$

com $\tau_{pq,i} = [(-1)^p(c_i - l_i) - (-1)^{p+q}c_j + (-1)^q c_k]/4$ ($i \neq j \neq k$) representando os valores

próprios do operador $(\vec{c} - \vec{l}_i) \cdot (\sigma_a \otimes \sigma_b)/4$. Se definirmos $d_i = l_i - c_i$ e $d_{\pm} = c_k \pm c_j$, encontramos

$$f_i(d_i) = (|d_i + d_+| + |d_i - d_+| + |d_i + d_-| + |d_i - d_-|)/4.$$

A função $f_i(d_i)$ atinge seu valor mínimo quando $d_i = 0$, portanto é possível escrever

$$\min_{l_i} f_i(l_i) = \min_{d_i} f_i(d_i).$$

Como

$$f_i(0) = \frac{(|d_+| + |d_+| + |d_-| + |d_-|)}{4} = \frac{(|d_+| + |d_-|)}{2} = \frac{(|c_k + c_j| + |c_k - c_j|)}{2}.$$

e como

$$\frac{|a + b| + |a - b|}{2} = \max[|a|, |b|]. \quad (3.29)$$

Conclui-se que

$$\min_{d_i} f_i(d_i) = \max[|c_k|, |c_j|].$$

Sostituindo na Eq. 3.28, obtém-se

$$\begin{aligned} \min[\min_{n_1} f_1(n_1), \min_{n_2} f_2(n_2), \min_{n_3} f_3(n_3)] &= \min[\max[|c_2|, |c_3|], \max[|c_1|, |c_3|], \max[|c_1|, |c_2|]] \\ &= \text{int}[|c_1|, |c_2|, |c_3|], \end{aligned}$$

onde $\text{int}[|c_1|, |c_2|, |c_3|]$ descreve o valor intermediário dos valores absolutos das funções de correlação c_1 , c_2 e c_3 . Mais especificamente, para $|c_i| \leq |c_j| \leq |c_k|$, definimos $\text{int}[|c_i|, |c_j|, |c_k|] = |c_j|$.

Finalmente

$$D_1(\rho) = \text{int}[|c_1|, |c_2|, |c_3|]. \quad (3.30)$$

Notavelmente, isso é equivalente à medida *negativity of quantumness*, que é uma medida de não-classicalidade recentemente introduzida em [35, 36] e experimentalmente discutida em [37]. Portanto, se para os estados Bell-diagonais investigamos o comportamento geral da DQG-1 sob decoerência, nós estamos automaticamente investigando também o comportamento dessa medida de correlação quântica sob decoerência.

Capítulo 4

DQG norma-1 sob decoerência

Nesse capítulo, vamos considerar o comportamento da DQG norma-1 em sistemas quânticos sob o efeito da decoerência. Esses resultados constituem a principal contribuição dessa dissertação, podendo ser encontrado na Ref. [44]. Em particular, é mostrado o fenômeno de mudança súbita dupla, que é um efeito novo, e o comportamento de congelamento o qual esta associado com a robustez da medida sob decoerência.

4.1 Comportamento dinâmico dos estados Bell-diagonais sob canais Markovianos locais

Nesta seção vamos considerar a interação do sistema com o ambiente usando o formalismo do operador soma, desenvolvido no capítulo 2. Neste contexto, tomaremos a evolução do estado quântico ρ segundo a descrição da operação quântica $\varepsilon(\rho)$, que preserva o traço e é dada por

$$\varepsilon(\rho) = \sum_{i,j} (\Gamma_i \otimes \Gamma_j) \rho (\Gamma_i \otimes \Gamma_j)^\dagger, \quad (4.1)$$

onde $\{\Gamma_k\}$ é o conjunto de operadores de Kraus associado ao processo de decoerência de um único q-bit, cuja condição de preservação do traço é $\sum_k \Gamma_k \Gamma_k^\dagger = I$.

Na discussão inicial da decoerência foram apresentados os operadores de Kraus para o sistema de um q-bit, os coeficientes dos operadores de Kraus do sistema bipar-

tido de interesse devem mudar para que a equação 4.1 ainda preserve o traço. Por simplicidade, as situações consideradas vão ser inicialmente simétricas, ou seja, as taxas de decoerência são iguais no canal de cada q-bit.

Para todos os canais apresentados a seguir, a forma Bell-diagonal dos estados foi conservada após dos efeitos de decoerência.

$$\varepsilon(\rho_{AB}) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + c'_3 & 0 & 0 & c'_1 - c'_2 \\ 0 & 1 - c'_3 & c'_1 + c'_2 & 0 \\ 0 & c'_1 + c'_2 & 1 - c'_3 & 0 \\ c'_1 - c'_2 & 0 & 1 + c'_3 & 1 + c'_3 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Então, para caracterizar os efeitos da decoerência vai ser suficiente obter os coeficientes c'_i . Esses coeficientes são obtidos a seguir para os diversos canais de interesse nessa dissertação.

Inversão de fase(phase flip ou PF)

Os operadores de Kraus para cada q-bit são

$$\Gamma_0^{(k)} = \sqrt{1 - \frac{p}{2}} I_k, \quad \Gamma_1^{(k)} = \sqrt{\frac{p}{2}} \sigma_3^k. \quad (4.3)$$

Usando a eq. 4.1 com os operadores de Kraus de um q-bit, obtem-se

$$\varepsilon_{pf}(\rho_{AB}) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + c_3 & 0 & 0 & (c_1 - c_2)(1 - p)^2 \\ 0 & 1 - c_3 & (c_1 + c_2)(1 - p)^2 & 0 \\ 0 & (c_1 + c_2)(1 - p)^2 & 1 - c_3 & 0 \\ (c_1 - c_2)(1 - p)^2 & 0 & 1 + c_3 & 1 + c_3 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Como a forma Bell diagonal foi conservada, comparando com a eq. 4.2 os coeficientes resultam ser

$$\begin{aligned} c'_1 &= (1 - p)^2 c_1, \\ c'_2 &= (1 - p)^2 c_2, \\ c'_3 &= c_3. \end{aligned} \quad (4.5)$$

4.1. COMPORTAMENTO DINÂMICO DOS ESTADOS BELL-DIAGONAIS SOB CANAIS MARKOVIANOS

Inversão de bit (bit flip ou BP):

Nesse caso, os operadores de Kraus são:

$$\Gamma_0^{(k)} = \sqrt{1 - \frac{p}{2}} I_k, \quad \Gamma_1^{(k)} = \sqrt{\frac{p}{2}} \sigma_1^k. \quad (4.6)$$

A forma matricial do estado após decoerência é então:

$$\varepsilon_{bf}(\rho_{AB}) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} [1 + c_3(1-p)^2] & 0 & 0 & c_1 - c_2(1-p)^2 \\ 0 & [1 - c_3(1-p)^2] & c_1 + c_2(1-p)^2 & 0 \\ 0 & c_1 + c_2(1-p)^2 & [1 - c_3(1-p)^2] & 0 \\ c_1 - c_2(1-p)^2 & 0 & 1 + c_3 & [1 + c_3(1-p)^2] \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

a qual resulta nos coeficientes:

$$\begin{aligned} c'_1 &= c_1, \\ c'_2 &= (1-p)^2 c_2, \\ c'_3 &= (1-p)^2 c_3. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Inversão de bit e fase (bit phase flip ou BPF)

Os operadores de Kraus são:

$$\Gamma_0^{(k)} = \sqrt{1 - \frac{p}{2}} I_k, \quad \Gamma_1^{(k)} = \sqrt{\frac{p}{2}} \sigma_2^k. \quad (4.9)$$

A forma matricial obtida do estado após decoerência é:

$$\varepsilon_{bp}(\rho_{AB}) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + c_3 & 0 & 0 & c_1(1-p)^2 - c_2 \\ 0 & 1 - c_3 & (c_1 + c_2)(1-p)^2 & 0 \\ 0 & (c_1 + c_2)(1-p)^2 & 1 - c_3 & 0 \\ c_1(1-p)^2 - c_2 & 0 & 1 + c_3 & 1 + c_3 \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

o que fornece os coeficientes:

$$\begin{aligned} c'_1 &= (1-p)^2 c_1, \\ c'_2 &= (1-p)^2 c_2, \\ c'_3 &= c_3. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Atenuação de amplitude generalizada (generalized amplitude damping ou GAD)

Os operadores de Kraus a temperatura finita são:

$$\begin{aligned} \Gamma_0^{(k)} &= \sqrt{p} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} \end{pmatrix}, \quad \Gamma_1^{(k)} = \sqrt{1-p} \begin{pmatrix} \sqrt{1-\gamma} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Gamma_2^{(k)} &= \sqrt{p} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\gamma} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_3^{(k)} = \sqrt{1-p} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{\gamma} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Para que a forma Bell-diagonal seja preservada, vamos nos restringir ao caso $p = \frac{1}{2}$. A forma matricial do estado após decoerência é então:

$$\varepsilon_{GAD}(\rho_{AB}) = \frac{1-\gamma}{4} \begin{pmatrix} 1 + c_3(1-\gamma) & 0 & 0 & c_1 - c_2 \\ 0 & 1 - c_3(1-\gamma) & c_1 + c_2 & 0 \\ 0 & c_1 + c_2 & 1 - c_3(1-\gamma) & 0 \\ c_1 - c_2 & 0 & 1 + c_3 & 1 + c_3(1-\gamma) \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

E as correlações são:

$$\begin{aligned} c'_1 &= (1-\gamma)c_1, \\ c'_2 &= (1-\gamma)c_2, \\ c'_3 &= (1-\gamma)^2 c_3. \end{aligned} \quad (4.14)$$

4.2 DQG norma-1 dos estados Bell-diagonais sob decoerência

Como a forma Bell-diagonal dos estados foi preservada nos canais usados, a equação 4.2 pode ser usada diretamente para calcular a DQG norma-1. Portanto, podemos obter um padrão geral da evolução da DQG norma-1 como função dos parâmetros de decoerência. Em particular, dependendo tanto do operador densidade inicial ρ como do canal quântico, é possível ter mudanças súbitas na taxa de decaimento de $D_1(\rho)$. Isso vai ocorrer se tiver cruzamentos entre as correlações $|c'_1|$, $|c'_2|$ e $|c'_3|$ como função de p ou γ . Além disso, efeitos adicionais podem aparecer os quais correspondem *mudanças súbitas duplas* e *comportamento de congelamento*. Mais especificamente, podemos identificar os seguintes comportamentos gerais para as dinâmicas de DQG norma-1:

1. BF, PF e BPF: Para esses canais, observamos nos coeficientes obtidos que sempre existe um coeficiente constante (c'_1 para BF, c'_3 para PF e c'_2 para BPF). Mudanças súbitas múltiplas acontecem se, e somente se, a componente constante $|c'_k|$ do canal é não-nula e é a componente de menor valor absoluto do vetor de correlação inicial \vec{c} , com as outras duas componentes apresentando valores distintos. Por exemplo, tomamos um operador densidade ρ descrito por um vetor de correlação \vec{c} tal que $|c_1| > |c_2| > |c_3| \neq 0$. Passando ρ através do canal PF, teremos inicialmente $D_1[\varepsilon(\rho)] = |c'_2| = |c_2| (1-p)^2$. Após, haverá então um primeiro cruzamento entre $|c'_2|$ e a componente constante $|c'_3| = |c_3|$ para um ponto crítico $p = p_1^{SC}$, o que vai implicar $D_1[\varepsilon(\rho)] = |c_3|$. A DQG norma-1 ficará *congelada* como função de p , durante um determinado intervalo (robusta a decoerência neste intervalo), e finalmente um novo cruzamento acontecerá entre as componentes $|c'_3|$ e $|c'_1|$ num segundo ponto crítico $p = p_2^{SC}$. A partir deste ponto até o ponto final $p = 1$, o valor da DQG norma-1 será $D_1[\varepsilon(\rho)] = |c'_1| = |c_1| (1-p)^2$. Exemplos semelhantes podem ser obtidos para os canais BF e BPF substituindo c_3 por c_1 e c_2 respectivamente. Também podemos observar que na presença de simetria, o fenômeno de mudança súbita dupla pode degenerar em mudança súbita única. Um exemplo simples é o caso de estados com simetria $U(1)$, para os quais $c_1 = c_2$. Passando este estado através do canal PF, teremos no máximo uma mudança súbita única

se $|c'_3| < |c'_1| = |c'_2|$.

2. **GAD:** Mudanças súbitas duplas acontecem se, e somente se, $|c_3| > |c_1|, |c_2|$ e $|c_1| \neq |c_2| \neq 0$. Para esse caso, evoluindo ρ através do canal GAD teremos inicialmente $D_1[\varepsilon(\rho)] = \max[|c'_1|, |c'_2|] = (1 - \gamma) \max[|c_1|, |c_2|]$. Haverá então um primeiro cruzamento entre $\max[|c'_1|, |c'_2|]$ e $|c'_3|$ para um ponto crítico $p = p_1^{SC}$, o que vai implicar $D_1[\varepsilon(\rho)] = (1 - \gamma)^2 |c_3|$. Finalmente, um novo cruzamento acontecerá entre as componentes $|c'_3|$ e $\min[|c'_1|, |c'_2|]$ num segundo ponto crítico $p = p_2^{SC}$. A partir deste ponto até o ponto final $\gamma = 1$, o valor da DQG norma-1 será $D_1[\varepsilon(\rho)] = \min[|c'_1|, |c'_2|] = (1 - \gamma) \min[|c_1|, |c_2|]$. Note-se que nenhum comportamento de congelamento ocorre neste canal. A presença da simetria $U(1)$ também leva a dinâmica do sistema a ter no máximo uma mudança súbita se $|c'_3| < |c'_1| = |c'_2|$. nos cruzamentos descritos na discussão.

Os pontos críticos de mudança súbita $p = p_1^{SC}$ e $p = p_2^{SC}$ para a DQG norma-1 são analiticamente obtidos impondo a igualdade dos valores absolutos das componentes do vetor \vec{c}' nos cruzamentos descritos na discussão anterior. Os resultados são apresentados na tabela 4.1.

	p_1^{SC}	p_2^{SC}	Condições
BF	$1 - \sqrt{\frac{ c_1 }{\min(c_2 , c_3)}}$	$1 - \sqrt{\frac{ c_1 }{\max(c_2 , c_3)}}$	$ c_1 < c_2 , c_3 $ $ c_1 \neq 0$ $ c_2 \neq c_3 $
PF	$1 - \sqrt{\frac{ c_3 }{\min(c_1 , c_2)}}$	$1 - \sqrt{\frac{ c_3 }{\max(c_1 , c_2)}}$	$ c_3 < c_1 , c_2 $ $ c_3 \neq 0$ $ c_1 \neq c_2 $
BPF	$1 - \sqrt{\frac{ c_2 }{\min(c_1 , c_3)}}$	$1 - \sqrt{\frac{ c_2 }{\max(c_1 , c_3)}}$	$ c_2 < c_1 , c_3 $ $ c_2 \neq 0$ $ c_1 \neq c_3 $
GAD	$1 - \frac{\max(c_1 , c_2)}{ c_3 }$	$1 - \frac{\min(c_1 , c_2)}{ c_3 }$	$ c_3 > c_1 , c_2 $ $ c_1 , c_2 , \neq 0$ $ c_1 \neq c_2 $

Tabela 4.1: Pontos críticos p_1^{SC} e p_2^{SC} em função das componentes do vetor de correlação \vec{c} . As condições fornecidas são necessárias e suficientes para garantir mudanças súbitas duplas. Note que as mudanças súbitas duplas podem degenerar se as simetrias, expressadas como igualdades entre algumas das componentes \vec{c} , estão presentes no estado quântico.

A DQG norma-1 exibe dois novos aspectos, para estados Bell-diagonais não-triviais $[|c_i| \neq 0 (\forall i)]$ evoluindo sob canais de ruído Markovianos, em comparação com a DQG norma-2:

- Mudança súbita dupla como função das taxas de decaimento;
- Comportamento de congelamento, e portanto, robustez contra a decoerência, para um intervalo finito como função de p , para os canais BF, PF, BPF. Estas propriedades podem ser obtidas para a norma 2 só se forem considerados estados iniciais mais complexos (estados X por exemplo) ou se o sistema é sujeito a dinâmicas não-Markovianas [40, 41]. De fato, a impossibilidade de mudanças súbitas duplas e comportamento de congelamento nos canais Markovianos considerados na dissertação, pode ser provada em geral para a DQG norma-2

Proposição. Considere um estado Bell-diagonal de dois q-bits não-trivial $[|c_i| \neq 0 (\forall i)]$ evoluindo sob ruído Markoviano local que preserva a forma Bell-diagonal descrita pelos canais BF, PF, BPF ou GAD. Para tais evoluções dinâmicas individuais, a DGQ norma-2 é incapaz de exibir mudanças súbitas duplas ou comportamento de congelamento não-nulo, como função dos parâmetros de decoerência.

Prova Da referencia [23], podemos escrever a DQG norma-2 como

$$D_2 = \frac{1}{4} \left(\sum_i |c'_i|^2 - \max |c'_i|^2 \right) \quad (4.15)$$

Então para que uma mudança súbita dupla aconteça, devemos ter duas mudanças no valor máximo de $|c'_i|^2$ como função do parâmetro de decoerência (p para os canais PF, BF, BPF e γ para o canal GAD). Isto é porque $\sum_i |c'_i|^2$ é uma função suave de p ou γ . Porém, observando o comportamento dos coeficientes c'_i dos canais considerados, notamos que para qualquer um destes canais, dois coeficientes sempre têm a mesma taxa de decaimento, o que significa que eles não se cruzam quando são considerados como função de p ou γ . Então, ao máximo uma única mudança súbita é permitida para a DQG norma-2. A respeito do comportamento de congelamento, seria necessário ter D_2 constante para um intervalo fixo de p ou γ . Reescrevendo D_2 como

$D_2 = \frac{1}{4}(\min |c'_i|^2 + \max |c'_i|^2)$ e observando os coeficientes c'_i dos canais considerados, se conclui que não é possível que D_2 seja constante, porque como já foi dito, dois coeficientes sempre têm a mesma taxa de decaimento. Além disso, a possibilidade de ter dois valores não nulos para os c_i 's já foi excluída pela imposição de estado não-trivial na proposição. Portanto se conclui que uma mudança súbita dupla ou comportamento de congelamento das correlações são impossíveis para a DQG norma-2 no caso de estados Bell-diagonais não-triviais [$|c_i| \neq 0 (\forall i)$] sob os canais considerados.

Note-se que relaxando o requerimento $|c_i| \neq 0 (\forall i)$, podemos obter o comportamento de congelamento para a DQG norma-2 D_2 para estados Bell-diagonais *separáveis*. Em particular da equação $D_2 = \frac{1}{4}(\min |c'_i|^2 + \max |c'_i|^2)$ o congelamento ocorreria para os canais BF, PF e PBF tomando a componente constante $|c_k|$ como o valor absoluto intermediário das componentes de \vec{c} e $\min |c_i| = 0, i \neq k$. Porém, essa é uma solução muito restritiva, que está monotonicamente relacionada com a DQG norma-1 ($D_2 = D_G^2/4$). Em outras palavras, a DQG norma-1 permite o comportamento de congelamento a uma classe muito maior de estados Bell-diagonais. Um comportamento de congelamento similar é conhecido também para DQ entrópica, onde uma interpretação de mudança súbita entre decoerência clássica e quântica foi introduzida na Ref. [42].

4.3 Exemplos

Começamos ilustrando o fenômeno de mudança súbita dupla para o canal GAD. Definimos nosso estado físico inicial com uma matriz ρ Bell-diagonal. As restrições impostas em ρ para que seja um estado físico são: $\lambda_i \geq 0$ e $\sum_i \lambda_i = 1$, com λ_i representando os valores próprios de ρ . Sob essas condições, os estados Bell-diagonais ficam restritos ao tetraedro mostrado no capítulo anterior e são completamente definidos pelo vetor \vec{c} . Usando as condições mostradas na tabela 4.1, para o canal GAD, é possível determinar a região física no espaço de estados que está associada com mudanças súbitas duplas nas taxas de decaimento. A região vermelha mostrada na figura 4.1, representa o conjunto de estados Bell-diagonais que apresentam mudanças súbitas duplas na DQG norma-1 sob decoerência fornecida pelo canal GAD.

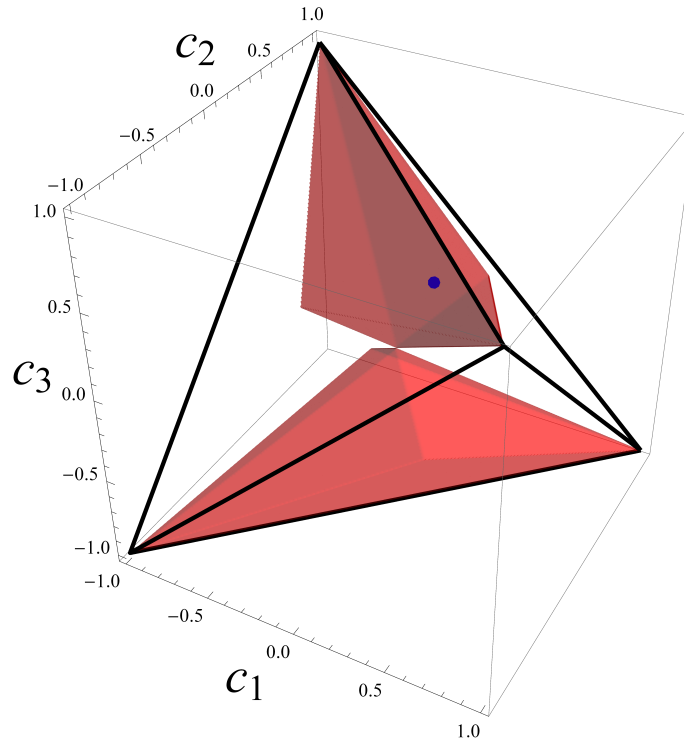


Figura 4.1: Estados Bell-diagonais que podem exibir mudanças súbitas duplas sob o canal GAD (região vermelha dentro do tetraedro). O ponto azul $\vec{c} = (0.1, 0.2, 0.3)$ representa o estado usado como estado inicial na figura 4.2.

4.3.1 Mudança súbita dupla para o canal GAD

Na figura 4.1 (anterior) o ponto azul corresponde ao estado $c_1 = 0.1$, $c_2 = 0.2$ e $c_3 = 0.3$. Na figura 4.2 ilustramos a mudança súbita dupla associada a esse estado. Os pontos críticos observados $p_1^{SC} = 1/3$ e $p_2^{SC} = 2/3$ conferem com os obtidos calculando com a expressão para o canal GAD dada na tabela 4.1.

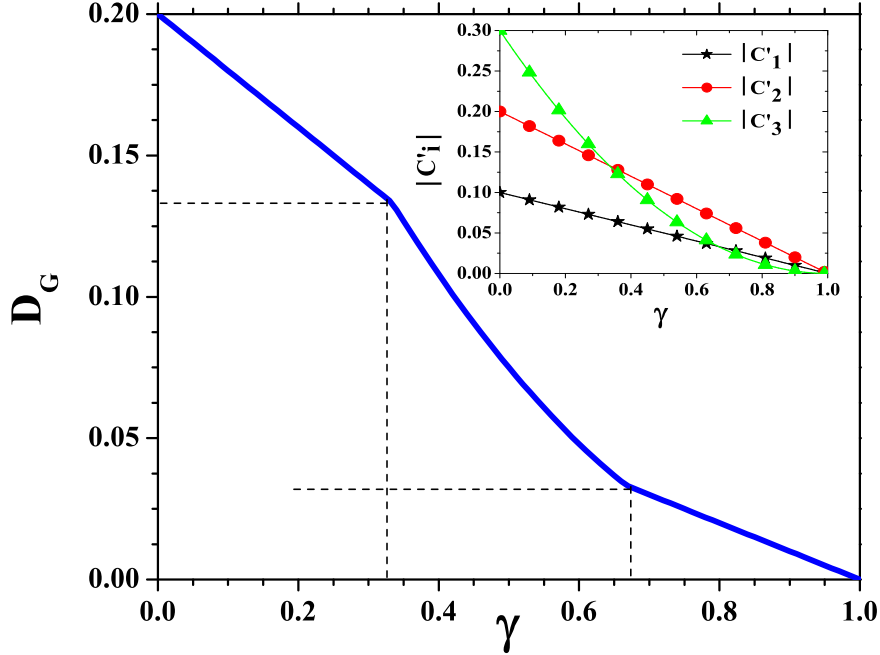


Figura 4.2: Mudança súbita dupla para o estado $\vec{c} = (0.1, 0.2, 0.3)$ sob o canal GAD, com $p_1^{SC} = 1/3$ e $p_2^{SC} = 2/3$. Gráfico inserido: Valor absoluto das correlações como função de γ .

4.3.2 Comportamento de congelamento

Agora vamos ilustrar o comportamento de congelamento usando o canal PF. O estado inicial escolhido foi $c_1 = 1$, $c_2 = -0.1$ e $c_3 = -c_2 = 0.1$. Esse estado foi discutido na Ref. [42] para a discórdia quântica entrópica. Para este estado é possível demonstrar que o comportamento de congelamento é seguido por uma mudança súbita em $p^{SC} = 1 - \sqrt{|c_3|}$, tanto para a discórdia entrópica quanto para a DQG norma-1. Note-se que DQG norma-2 não exibe congelamento para este estado, pois $|c_i| \neq 0$ ($\forall i$). Portanto, para a discórdia entrópica e a DQG norma-1, obtemos um intervalo de congelamento grande e controlável. De fato, diminuindo $|c_3|$ (e portanto a DQG norma-1), podemos aumentar o intervalo de congelamento tanto como desejemos até $p = 1$. Naturalmente, quanto maior o intervalo de congelamento, menor é a DQG norma-1

disponível. Isso é mostrado na figura 4.3 , onde $c_3 = 0.1$ foi escolhido. Observamos que é possível obter um congelamento maior em função da escolha de c_3 .

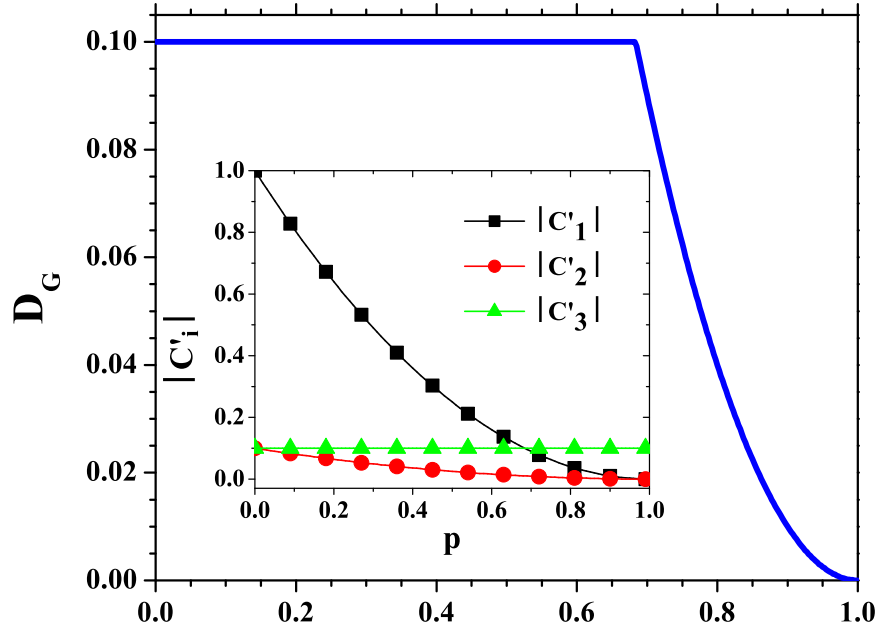


Figura 4.3: Comportamento de congelamento para o estado dado por $\vec{c} = (1, -0.1, 0.1)$ sob o canal PF. Gráfico inserido: Valor absoluto das correlações como função de p .

4.4 Proposta de implementação experimental

Os comportamentos de mudanças súbitas duplas e congelamento da DGQ norma-1 podem ser observados em q-bits realizados com spins nucleares manipulados por ressonância magnética nuclear (RMN). A RMN é uma técnica que permite a manipulação de spins nucleares, a qual tem contribuído para a realização de vários protocolos em informação quântica [25]. Esta técnica se baseia em gerar um campo magnético e orientar os spins dos núcleos (ou magnetização dos núcleos). Após isto são gerados pulsos magnéticos de radio-frequência que irão perturbar a magnetização dos spins. A informação sobre o estado do sistema é então obtida diretamente das magnetizações

transversas, as quais são os os observáveis típicos em RMN.

Tempos de relaxação O eixo de magnetização alinhado segundo o campo magnético externo é adotado como sendo o eixo z . Uma perturbação gerada nos spins dos núcleos faz com que eles se magnetizem em uma direção diferente de $+z$, mas depois eles voltam a se alinhar com o campo externo. O tempo que o spin demora para se realinhar é chamado de tempo de relaxação. Quando um pulso longitudinal, que inverte o spin em 180° , é aplicado, a magnetização que era $+M_z$ se torna $-M_z$ e o tempo de relaxação é chamado de T_1 . Este tempo é influenciado pelas interações da rede de spin. Em particular, o tempo T_1 envolve redistribuir as populações dos spins nucleares no sentido de atingir a distribuição de equilíbrio térmico (processo que envolve variações de energia do sistema). Já um pulso transversal, que muda a magnetização do spin em 90° , é denotado como M_x , M_y ou M_{xy} e o seu tempo de relaxação é chamado de T_2 . As interações que influenciam neste tempo são as interações spin-spin. O tempo de relaxação T_2 envolve decoerência de fase sem alteração de energia.

Medição experimental de correlações quânticas de estados de dois q-bits em um sistema de RMN na temperatura ambiente. Nesta configuração, a informação é armazenada nos spins nucleares, enquanto as transformações e a preparação do estado são implementadas por aplicação de pulsos com frequência de rádio altamente controlável, gradientes de campo magnético, e evoluções sob interações de spin. Por outro lado, o ambiente afeta o sistema de spin induzindo relaxações que impulsionam o sistema de volta à distribuição de equilíbrio térmico de acordo com os dois tempos característicos T_1 e T_2 . A realização experimental que iremos propor a seguir pode ser implementada usando uma amostra de clorofórmio enriquecida com carbono-13 ($CHCl_3$), em estado líquido e a temperatura ambiente, com os dois q-bits sendo codificados nos spins nucleares $1/2$ dos átomos de 1H e ^{13}C .

4.4.1 Condições gerais para a mudança súbita dupla da DQG norma-1 sob os canais de PF e GAD.

Estamos interessados em apresentar as condições gerais e um exemplo concreto factível em RMN, para a mudança súbita dupla da DQG norma-1 sob os canais PF e GAD atuando em conjunto. Consideraremos, sem perda de generalidade, os 2 q-bits do clorofórmio (carbono e hidrogênio). O estado de um sistema de dois q-bits em RMN na aproximação de alta temperatura (temperatura ambiente) é dado por

$$\rho = \frac{1}{4}I + \varepsilon\Delta\rho, \quad (4.16)$$

onde $\varepsilon = \frac{\hbar\omega_L}{4k_B T}$ é a razão entre as escalas de energia térmica e magnética, ω_L é a frequência de Larmor, k_B é a constante de Boltzmann e T é a temperatura ambiente, com $\Delta\rho$ denotando a matriz de desvio e I a identidade do espaço de dois q-bits.

O estado Bell-diagonal é então preparado como $\rho = \frac{1}{4}[(I_4 + \sum_i c_i(\vec{\sigma}_i \otimes \vec{\sigma}_i)]$, mapeando-se a matriz de correlação na matriz de desvio $\Delta\rho$.

Sob os canais PF e GAD atuando simultaneamente teremos

$$\begin{aligned} |c'_3| &= (1 - \gamma_H)(1 - \gamma_C) |c_3| \\ |c'_i| &= \sqrt{(1 - \gamma_H)(1 - \gamma_C)(1 - p_H)(1 - p_C)} |c'_i|, \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde p está associado com o processo PF e γ está associado com o processo GAD.

Em termos dos tempos característicos T_1 e T_2 , temos

$$\begin{aligned} \gamma_i &= 1 - \exp\left(-\frac{t}{T_{1i}}\right), \\ p_i &= 1 - \exp\left(-\frac{t}{T_{2i}}\right), \end{aligned} \quad (4.18)$$

Com i indicando aqui “hidrogênio” ou “carbono”.

Sabendo que $T_1 \geq \frac{T_2}{2}$ e, tipicamente $T_1 \gg T_2$, encontramos que a condição para ter a mudança súbita dupla com os canais PF+GAD será dada por

$$|c_3| < |c_1|, |c_2|, \quad |c'_i| \neq 0, \quad |c_1| \neq |c_2|. \quad (4.19)$$

Nesse caso, a correlação $|c_3|$ é a menor. Visto que ela decai mais lentamente que as

outras duas, então, durante sua evolução temporal, ela será cortada duas vezes pela evolução temporal de $|c_1|$ e $|c_2|$.

Substituindo a Eq. 4.18 na Eq. 4.17, obtem-se os seguintes tempos para a mudança súbita dupla:

$$\begin{aligned} t_1^{sc} &= \frac{2T_{1C}T_{2C}T_{1H}T_{2H}}{T_{2C}T_{2H}(T_{1C} + T_{1H}) - 2T_{1C}T_{1H}(T_{2C} + T_{2H})} \log\left[\frac{|c_3|}{\min(|c_1|, |c_2|)}\right] \\ t_2^{sc} &= \frac{2T_{1C}T_{2C}T_{1H}T_{2H}}{T_{2C}T_{2H}(T_{1C} + T_{1H}) - 2T_{1C}T_{1H}(T_{2C} + T_{2H})} \log\left[\frac{|c_3|}{\max(|c_1|, |c_2|)}\right] \end{aligned} \quad (4.20)$$

Exemplo: Escolheremos os parâmetros $\varepsilon = 10^{-5}$, $\frac{c_1}{\varepsilon} = 8$, $\frac{c_2}{\varepsilon} = 6$, $\frac{c_3}{\varepsilon} = 4$. Os tempos de relaxação para os núcleos de carbono e hidrogênio da molécula de clorofórmio são $T_{1C} = 10$ seg, $T_{2C} = 0.19$ seg, $T_{1H} = 3.57$ seg e $T_{2H} = 1.2$ seg. Segue-se então da Eq. 4.20 que a primeira mudança súbita acontecerá em $t_1^{sc} \approx 0.07$ seg e a segunda em $t_2^{sc} \approx 0.12$ seg. A figura 4.4 ilustra a predição teórica para a curva da DQG norma-1 com os parâmetros escolhidos anteriormente. Note que a mudança súbita dupla ocorre dentro do tempo de relaxação disponível para o sistema.

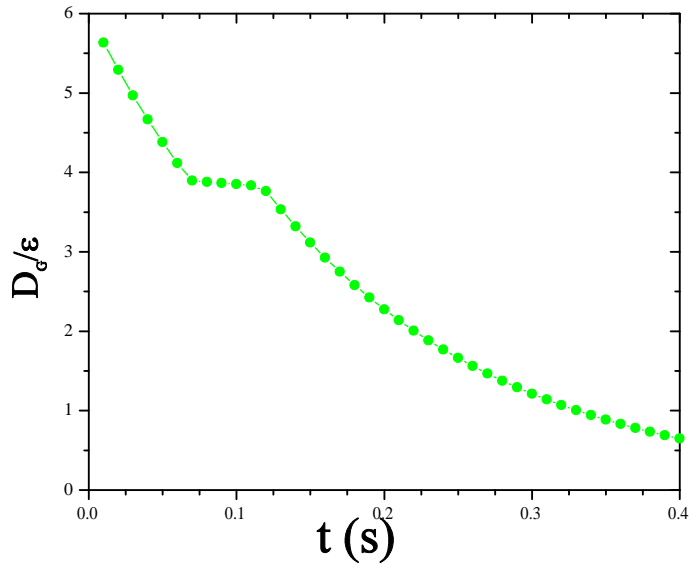


Figura 4.4: Curva teórica da DQG norma-1 sob os canais PF+GAD na implementação em RMN com os parâmetros descritos no texto.

Capítulo 5

Conclusões e perspectivas futuras

A DGQ norma-1 foi investigada analiticamente sob ruído Markoviano para os estados Bell-diagonais. Em particular, foi mostrado para estados de dois q-bits sob os canais mais simples de dinâmica Markoviana (phase flip, bit flip, phase-bit flip e atenuação de fase generalizada), que a DGQ norma-1 pode exibir mudanças súbitas duplas ou comportamento de congelamento. As condições necessárias e suficientes para tais comportamentos foram identificadas. A origem desses comportamentos é a robustez da DQ sob decoerência. Essa robustez inerente é devida a negligibilidade do conjunto de estados clássicos (estados com discórdia nula) em comparação com o espaço completo de estados [45]. Isso é um contraste forte se comparado com o conjunto de estados separáveis (não emaranhados), que exibem volume finito no espaço de estados. Isso implica, por exemplo, na possibilidade de morte súbita para o emaranhamento, enquanto apenas mudanças súbitas (tipicamente sem morte) para o caso da DQ. Especificamente, em relação a DGQ norma-1, ela ainda possui a robustez da DQ contra o ruído e manifestando-o para estados Bell diagonais simples, o qual é uma consequência das propriedades da norma do traço. Já foram feitas realizações experimentais da mudança súbita única e o comportamento de congelamento [46] através de diferentes configurações físicas, que demonstraram que tais fenômenos são bastante gerais em condições reais. Notavelmente, uma investigação recente [36] verificou experimen-

talmente a mudança súbita única e o congelamento da correlação para a *negativity of quantumness* (caráter quântico) em estados Bell-diagonais, que resulta ser equivalente à DGQ norma-1.

Os resultados apresentados nessa dissertação abrem outras perspectivas para trabalhos futuros. Um destes trabalhos é a implementação experimental da proposta feita no capítulo 4 e que está em andamento atualmente. Também é interessante estudar as correlações clássicas e totais que podem ser derivadas da DGQ norma-1, do mesmo jeito que já foi feito com a discórdia entrópica e que vai fornecer uma visão unificada das correlações envolvidas nos processos físicos. Iniciamos recentemente essa discussão na Ref. [47].

Finalmente, quando aparecem novas correlações quânticas mais gerais que o emaranhamento é válido perguntar: Que ganho pode ser obtido com as novas correlações quânticas nas tarefas computacionais e de transmissão da informação, com relação à melhor contrapartida clássica conhecida? Nesse contexto, a DGQ norma-1 tem mostrado boas perspectivas como recurso para tarefas em informação quântica, tal como em sua relação monotônica com a fidelidade no protocolo discutido na Ref.[48], a qual investiga a preparação remota de estados sob decoerência no formalismo de computação quântica baseada em medidas. Se vantagens desse tipo podem ser associadas a outros protocolos úteis é um problema aberto para motivar pesquisas futuras.

Appendix A

Cálculo alternativo analítico da DQG norma-1

Nesse apêndice mostraremos como obter analiticamente a DQG norma-1 para estados Bell-diagonais. Para isso partiremos do teorema abaixo.

Teorema Seja ρ_{AB} um estado quântico bipartito, com A representando um q-bit. Então

$$\min_{\sigma \in CQ} \|\rho_{AB} - \sigma\|_1 = \min_{b(A)} \|\rho_{AB} - \Pi_{b(A)}(\rho_{AB})\|_1. \quad (\text{A.1})$$

Isto é, fazer a minimização sobre os estados clássicos quânticos σ arbitrários é equivalente a fazer a minimização sobre medidas $\Pi_{b(A)}$ no estado ρ_{AB} .

Podemos então usar esse teorema da Ref. [36] para calcularmos diretamente a DQG norma-1 (usando uma técnica similar à que usamos recentemente na Ref. [47]). O anterior teorema permite que a minimização seja feita considerando todos os estados clássicos da forma $\rho_c = \rho'$, que podem ser representados como

$$\rho' \sum_{k=-,+} (\Pi_k^a \otimes I_b) \rho (\Pi_k^a \otimes I_b), \quad (\text{A.2})$$

com

$$\Pi_{\pm}^i = \frac{1}{2}(I_i \pm \vec{n} \cdot \vec{\sigma}), \quad (\text{A.3})$$

$\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ é um vetor unitário e os n_i são as componentes dos eixos perpendiculares clássicos que definem a direção da medida.

Os 4 possíveis autovalores do operador hermitiano $\rho - \rho'$ são dados por $\gamma_1 = \gamma_+, \gamma_2 = -\gamma_+, \gamma_3 = \gamma_-$ e $\gamma_4 = -\gamma_-$ onde definimos

$$\gamma_{\pm} = \frac{1}{4} \sqrt{c^2 - \vec{\alpha} \cdot \vec{u} \pm 2\sqrt{\vec{\beta} \cdot \vec{u}}}, \quad (\text{A.4})$$

com $\vec{\alpha} = (c_1^2, c_2^2, c_3^2)$, $\vec{\beta} = (c_2^2 c_3^2, c_1^2 c_3^2, c_1^2 c_2^2)$ e $\vec{u} = (n_1^2, n_2^2, n_3^2)$. Então, a definição original de DQG norma-1 implica que

$$D_1 = \min_{\rho'} \sum_{i=1}^4 |\gamma_i| = \min_{\vec{u}} [\gamma_-(\vec{u}) + \gamma_+(\vec{u})]. \quad (\text{A.5})$$

Definimos a função $f(u_1, u_2, u_3)$

$$f(u_1, u_2, u_3) = \gamma_-(\vec{u}) + \gamma_+(\vec{u}), \quad (\text{A.6})$$

com a minimização feita em \vec{u} sob a condição

$$g(u_1, u_2, u_3) = u_1 + u_2 + u_3 = 1, \quad (\text{A.7})$$

Agora faremos a minimização em \vec{u} usando o método de multiplicadores de Lagrange. Ele consiste em resolver o seguinte sistema de equações

$$\partial_{u_l} f = \lambda \partial_{u_l} g, \quad (l = i, j, k), \quad (\text{A.8})$$

onde $i \neq j \neq k$ e o multiplicador de Lagrange λ é uma variável real. Note-se que $\partial_{u_i} g = 1$, então $\lambda = \partial_{u_i} f$. Fixando $\lambda = \partial_{u_i} f$, a Eq. A.8 reduz-se a

$$\partial_{u_m} f - \partial_{u_i} f = 0, \quad (m = j, k) \quad (\text{A.9})$$

e, depois de calcular as derivadas parciais, obtém-se

$$(\alpha_m - \alpha_i) \left[\frac{1}{\gamma_-} \left(1 - \frac{\alpha_n}{\sqrt{\vec{\beta} \cdot \vec{u}}} \right) + \frac{1}{\gamma_+} \left(1 + \frac{\alpha_n}{\sqrt{\vec{\beta} \cdot \vec{u}}} \right) \right] = 0. \quad (\text{A.10})$$

$n = j, k. n \neq m$

Quando a Eq. A.10 é violada, significa que f não tem um extremo no intervalo aberto $u_l \in (0, 1)$ e, então, a minimização acontece para um dos vetores

$$\vec{u} = (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1). \quad (\text{A.11})$$

Primeiro, notamos que se pelo menos um dos fatores γ_+, γ_- e $\vec{\beta} \cdot \vec{u}$ se anula, a eq. A.10 pode ser satisfeita só para $\alpha_m - \alpha_i = 0$. Nesse caso, $f = \sqrt{\alpha_1}/2$ independente de \vec{u} e, como consequência, os vetores da eq. A.11 minimizam f .

Em um caso mais geral, se so duas das componentes de $\vec{\alpha}$ são iguais, então

$$f = \begin{cases} \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_i}, & \alpha_i \geq \alpha_k \\ \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_k + (\alpha_i - \alpha_k) u_k} & \alpha_i < \alpha_k \end{cases} \quad \alpha_i = \alpha_j \quad (\text{A.12})$$

Para $\alpha_i \geq \alpha_k$, qualquer \vec{u} minimiza f . Quando $\alpha_i < \alpha_k$, depende de u_k e a minimização acontece para $u_k = 1$ e, conseqüentemente $u_i = u_j = 0$. Então, a função f A.6 sempre atinge seu valor mínimo para a condição dada na Eq. A.11. Finalmente, para a situação onde $\gamma_+, \gamma_-, \vec{\beta} \cdot \vec{u}$ e $\alpha_m - \alpha_i$ são não nulos, podemos dividir a Eq. A.10 por $\alpha_m - \alpha_i$ e reescrever-a como

$$(\alpha_n \vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot \vec{u} + \alpha_n^2 - c^2 \alpha_n = 0 \quad (\text{A.13})$$

Impondo a Eq. A.7, encontramos $u_j = u_k = 0$ e $u_i = 1$. Isso completa a prova.

Referências Bibliográficas

- [1] V. Vedral, *Rev. Mod. Phys.* 74, 197 (2002).
- [2] A. Shimony, *Ann. NY Acad. Sci.* 755, 675 (1995).
- [3] H. Barnum, N. Linden, *J. Physics. A. Math. Gen.* 34, 6787 (2001).
- [4] T.C. Wei e P.M. Goldbart, *Phys. Rev. A* 68, 042307 (2003).
- [5] K. Modi, A. Brodutch, H. Cable, T. Paterek, V. Vedral, *Rev. Mod. Phys.* 84, 1655 (2012).
- [6] L.C. Céleri, J. Maziero, R.M. Serra, *Int. J. Quantum Inf.* 9, 1837 (2011).
- [7] M.S Sarandy, T.R. de Oliveira, e L. Amico, *Int. J. Phys. B* 27, 1345030 (2013).
- [8] H. Ollivier e W.H. Zurek, *Phys. Rev. Lett.* 88, 017901 (2001).
- [9] B. Dakic, V. Vedral e C. Brukner, *Phys. Rev. Lett.* 105, 190502 (2010).
- [10] A.C.S. Costa e R.M. Angelo, *Phys. Rev. A* 87, 032109 (2013).
- [11] S. Luo e S. Fu, *Phys. Rev. A* 82, 034302 (2010).
- [12] A.S.M. Hassan, B. Lari e P.S Joag, *Phys. Rev. A* 85, 024302 (2012).
- [13] S. Rana e P. Parashar, *Phys. Rev. A* 85, 024102 (2012).
- [14] B. Dakic, Y.O. Lipp, X. Ma, M. Ringbauer, S. Kropatschek, S. Barz, T. Paterek, V. Vedral, A Zeilinger, C. Brukner e P. Walther, *Nat. Phys.* 8, 666 (2012).
- [15] B. Bellomo, G. L. Georgi, F. Galve, R. Lofranco, G. Compagno, R. Zambrini, *Phys. Rev. A*, 85, 032104 (2012).

- [16] X. Hu, H. Fan, D.L. Shou, e W.M. Liu, arXiv:1203.6149 (2012).
- [17] T. Tufarelli, D. Girollami, R. Vasile, S. Bose e G. Adesso, Phys. Rev. A 86, 052326 (2012).
- [18] M. Piani, Phys. Rev. A 86, 034101 (2012).
- [19] T. Debarba, T. O. Maciel e R.O. Viana, Phys. Rev. A 86, 024302 (2012).
- [20] F.M. Paula, T.R. de Oliveira e M.S. Sarandy, Phys. Rev. A 87, 064101 (2013).
- [21] S. Rana, P. Parashar, Phys. Rev. A 87, 016301 (2013).
- [22] J. Maziero, L.C. Céleri, R.M. Serra e V. Vedral, Phys. Rev. A 80, 044102 (2009).
- [23] X.M. Lu, Z.-J. Xi, Z. Sun e X. Wang, Quantum Inform. Comput. 10, 994 (2010).
- [24] L. Mazzola, J. Piilo e S. Maniscalco, Phys. Rev. Lett. 104, 200401 (2010).
- [25] M.A. Nielsen e I.L. Chuang, “Quantum computation and quantum information” (Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2000).
- [26] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, Phys. Rev. 47 , 777 (1935).
- [27] C. Shannon, Bell Syst. Tech. J., **27**, 379; 623, (1948).
- [28] H. Ollivier e W.H. Zurek, Phys. Rev. Lett. 88, 017901 (2001)
- [29] W.H. Zurek , Rev. Mod. Phys. 75, 715 (2003).
- [30] H. Breuer e F. Petruccione. (Oxford University Press, New York, USA, 2002)
- [31] A. Datta, quant-ph 08074490.
- [32] Shunlong Luo, Phys. Rev. A 77, 042303 (2008)
- [33] X. Hu, H. Fan, D.L. Zhou e W.-M. Liu, Phys. Rev. A 87, 032340 (2013)
- [34] K. Modi, T. Paterek, W. Son, V. Vedral e M. Williamson, Phys. Rev Lett. 104, 200401 (2010)

- [35] M. Piani, S. Gharibian, G. Adesso, J. Calsamiglia, P. Horodecki e A. Winter, *Phys. Rev. Lett.* 106, 220403 (2011)
- [36] T. Nakano, M. Piani e G. Adesso, arXiv:1211.4022 (2012)
- [37] I. A. Silva, D. Girolami, R. Auccaise, R.S. Sarthour, I.S. Oliveira, T.J. Bonagamba, E.R. deAzevedo, D.O. Soares-Pinto, e G. Adesso, *Phys. Rev. Lett.* 110, 140501 (2013)
- [38] T. Debarba, T.O. Maciel e R.O. Vianna, *Phys. Rev. A* 86. 024302 (2012)
- [39] G. Aubrun e I. Nechita, *Confluentes Math.* 03. 637 (2011)
- [40] G. Karpat e Z. Gedik, *Phys. Lett. A* 375. 4166 (2011)
- [41] H. Yuan e L.-F. Wei, *Int. J. Theoretical Phys.* 52, 987 (2013)
- [42] L. Mazzola, J. Piilo e S. Maniscalco, *Phys. Rev. Lett.* 104, 200401 (2010).
- [43] I. A. Silva, D. Girolami, R. Auccaise, R. S. Sarthour, I. S. Oliveira, T. J. Bonagamba, E. R. deAzevedo, D. O. Soares-Pinto, e G. Adesso. *Phys. Rev. Lett.* 110, 140501 (2013)
- [44] J.D. Montealegre, F.M. Paula, A. Saguia e M.S. Sarandy, *Phys. Rev. A* 87, 042115 (2013)
- [45] A. Ferraro, L. Aolita, D. Cavalcanti, F.M. Cucchietti e A. Acín, *Phys. Rev. A.* 81, 052318 (2010).
- [46] R. Auccaise, L.C. Céleri, D.O. Soares Pinto, E.R. De Azevedo, J. Maziero, A.M Souza, T.J. Bonagamba, R.S. Sarthour, I.S. Oliveira e R.M. Serra, *Phys. Rev. Lett.* 107, 140403 (2011).
- [47] F. M. Paula, Thiago R. de Oliveira, M. S. Sarandy, *Phys. Rev. A* 87, 064101 (2013).
- [48] R. Chavez e F. de Melo. *Phys. Rev. A* 84 , 022324 (2011)