

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

INSTITUTO DE FÍSICA

**Simetrias, princípio de calibre e correntes de spin**

**Tiago Ribeiro da Silva Santos**

**Orientador:** Prof. Dr. Rodrigo Ferreira Sobreiro

Niterói - RJ  
Setembro, 2012

Tiago Ribeiro da Silva Santos

## Simetrias, princípio de calibre e correntes de spin

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Física.

Orientador:  
Prof. Dr. Rodrigo Ferreira Sobreiro

Niterói  
2012

# Agradecimentos

Dou graças a Deus de onde provém tudo que é bom, pela graça da vida e forças para enfrentar os desafios nesta breve caminhada. Também meu anjo da guarda, que é exemplo de humildade.

Dedico este trabalho a meus pais, Sebastião e Sônia, a quem sou grato pelo amor e a disciplina com que me educaram, a meus irmãos Sebastião, Rafael e Diego, que sempre me apoiaram nas minhas decisões e lutas, e também o membro mais jovem da família, minha sobrinha Cecília. Não poderia deixar de agradecer minha tia Terezita, que me acolheu com carinho e atenção em sua casa durante todo o período de minha graduação.

Sou grato a meu orientador Rodrigo, por me aceitar como orientando, com quem aprendi muito durante este último ano, sua paciência e atenção em me receber na sua sala várias vezes na semana para sanar minhas dúvidas, não só do tema dessa dissertação, mas também em outras áreas das teorias de campos.

Aos meus grandes amigos, que conheci ao longo da graduação, Marcelo, Daniele, Lessandro e Adriano. As aventuras e dificuldades que passamos juntos fortaleceram nossos laços e apesar da distância continuam sempre firmes.

Gostaria de agradecer a todos os professores do departamento de Física da FAFIDAM-UECE, os quais devo minha formação, que apesar das dificuldades enfrentadas por um curso recém criado, procuraram e procuram sempre o melhor para o curso e os alunos.

Ao programa de Pós-Graduação do IF-UFF pela oportunidade de fazer parte deste. A todos que contribuem para o funcionamento do IF-UFF, que é praticamente minha casa aqui em Niterói.

À CAPES pelo suporte financeiro.

# Resumo

A spintrônica é uma nova sub-área da Física da matéria condensada que explora as propriedades do spin dos elétrons. Se bem compreendida, ela pode ter um importante papel em novos dispositivos eletrônicos. Neste trabalho empregamos o formalismo da teoria de campos para estudar a natureza da corrente de spin não-conservada na spintrônica. Aqui, utilizamos uma teoria de calibre sob o grupo  $U(1)$  para o eletromagnetismo no vácuo e em meios materiais gerais. No caso de meios materiais, descrevemos as equações de Maxwell em meios materiais de maneira covariante. Introduzimos o tensor de curvatura auxiliar  $G^{\mu\nu}$  que se relaciona com o tensor de curvatura  $F_{\beta\sigma}$  através do tensor constitutivo  $\chi^{\mu\nu\beta\sigma}$ . Com base nesses campos foi usada a ação que reproduz as equações de Maxwell em meios materiais. No nosso caso, acrescentamos o campo de Dirac da maneira tradicional, ou seja, acoplado ao campo eletromagnético por meio de um acoplamento mínimo. Mostramos que as correntes de spin fermiônica no vácuo e em meios materiais não são alteradas, enquanto que no caso bosônico ocorre alteração nas correntes. Além disso, obtivemos as condições para que ambas as correntes sejam conservadas. Ainda como um teste padrão, o limite de vácuo é recuperado. Ainda, generalizamos estes estudos às teorias de Yang-Mills, e mostramos que o resultados para as correntes fermiônica e bosônica são semelhantes ao caso Abelian.

# Abstract

Spintronics is a new subdiscipline of condensed matter physics which exploits the properties of the spin of electrons. If well understood, it can play an important role in new electronic devices. In this work, we employed the formalism of field theory to study the nature of the non-conserved spin-current in spintronics. Here, we used a gauge theory under the group  $U(1)$  for the electromagnetism in vacuum and material media. In the case of material media, described by Maxwell's equations in a covariant way, we introduced the auxiliary curvature tensor  $G^{\mu\nu}$  which is related to the curvature tensor  $F_{\beta\sigma}$  through of the constitutive tensor  $\chi^{\mu\nu\beta\sigma}$ . Based on these fields, it was employed the action which reproduces the Maxwell's equations in material media. Moreover, the Dirac field was introduced in the traditional way, *i.e.*, coupled to the electromagnetic field through a minimum coupling. We showed that the fermionic spin-currents in vacuum and material media are not changed, whereas in the bosonic case a change in current occurs. Furthermore, we obtain the conditions for both the currents to be conserved. As a standard test, the ultimate vacuum equations recovered. Furthermore, a generalization of these studies to the Yang-Mills theories, are performed and it is shown that the results for the fermionic and bosonic currents are similar to the Abelian case.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Eletrodinâmica e correntes de spin</b>	<b>7</b>
1.1 Eletrodinâmica e suas simetrias . . . . .	7
1.2 O grupo de Poincaré . . . . .	11
1.3 O grupo $L(1,3)$ e as correntes de Noether . . . . .	15
1.4 Restaurando a invariância de calibre da corrente de Bargmann-Wigner . .	16
1.5 Decomposição no espaço e tempo . . . . .	20
1.5.1 Componentes do setor fermiônico . . . . .	20
1.5.2 Componentes do setor bosônico . . . . .	21
<b>2 Eletrodinâmica em meios materiais</b>	<b>23</b>
2.1 Preliminares . . . . .	23
2.2 Simetrias sob o grupo de estabilidade $L(1,3)$ . . . . .	31
2.3 Restaurando a invariância de calibre da corrente de Bargmann-Wigner . .	33
2.4 Componentes do setor bosônico na matéria . . . . .	34
2.4.1 Estudando os limites para um meio homogêneo e isotrópico . . . . .	36
2.5 Condições para conservação da corrente de Bargmann-Wigner . . . . .	38
2.5.1 Conservação da corrente do setor fermiônico . . . . .	38
2.5.2 Conservação da corrente do setor bosônico em meios dielétricos . .	38
<b>3 Teorias de Yang-Mills</b>	<b>42</b>
3.1 Teorias de calibre não-Abelianas e suas simetrias . . . . .	42
3.2 Simetrias sob o grupo de estabilidade $L(1,3)$ . . . . .	47

3.3 Restaurando a invariância de calibre da corrente de Bargmann-Wigner . .	48
<b>Conclusões</b>	<b>53</b>
<b>A Notações</b>	<b>57</b>
<b>B Efeitos físicos</b>	<b>60</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>63</b>

# Introdução

O entendimento das simetrias de sistemas físicos é uma ferramenta poderosa para a compreensão da natureza. Duas importantes simetrias na Física são as simetrias do espaço-tempo e as simetrias de calibre. Esta última simetria é indispensável para compreensão de três das quatro interações fundamentais. As simetrias do espaço-tempo estão relacionadas<sup>1</sup> ao princípio da invariância de Poincaré, no qual todas as leis da física são invariantes por transformações de simetria do grupo de Poincaré. Simetrias de calibre estão vinculadas às transformações de simetria no espaço interno dos campos ou isoespaço.

Em teorias de campos, um campo genérico  $\phi$  é denominado campo puro se ele pode sofrer transformações do espaço-tempo e transformações de calibre, misturando suas componentes. Contudo, se este campo for composto por vários outros campos  $\phi_k$  ele é chamado isospin, e os campos  $\phi_k$  só podem ser misturados por transformações de calibre, ou seja, os campos  $\phi_k$  comportam-se como coordenadas no isoespaço. A mistura desses campos representa interações ou decaimentos [1]. A descrição das interações fundamentais depende dos possíveis grupos de simetrias internas que uma ação de uma teoria de calibre pode possuir.

A teoria de calibre descrita pelo grupo  $U(1)$  local é a QED<sup>2</sup> [2, 3, 4], teoria quântica do eletromagnetismo. Nesta teoria, a interação entre partículas carregadas (elétrons e pósitrons) é mediada pelo fóton, que é o campo de calibre desta teoria. A QED é tida

---

<sup>1</sup>Nesta situação estamos considerando somente simetrias contínuas. Existem também simetrias discretas do espaço e tempo e do espaço interno dos campos. As simetrias discretas do espaço e tempo são paridade  $P$  e inversão temporal  $T$ , respectivamente. A simetria discreta do isoespaço é a simetria de carga  $C$ , esta relacionada a existência de anti-partículas. Contudo, as simetrias discretas se tratadas em separado não são boas simetrias, fato este comprovado pela quebra da simetria  $CP$  das interações fracas. Isto não ocorre com a QED e a QCD. Uma boa simetria é a simetria  $CPT$ , tal que todas as teorias físicas são invariantes por esta simetria.

<sup>2</sup>Do inglês: *Quantum Electrodynamics*.



como a teoria mais bem sucedida da Física.

Uma teoria de calibre que possui simetria sob  $SU(2)$  descreve as interações fracas. Os bósons vetoriais responsáveis por estas interações são  $W^+$ ,  $W^-$  e  $Z^0$ , massivos, e os dois primeiros carregados. A descrição da interação destes bósons vetoriais massivos com o fóton, ou seja, a teoria eletrofraca, foi feita por Glasnow-Weinberg-Salam, na qual o grupo de simetria é o  $SU(2) \times U(1)$ . A objeção teórica original para uma teoria de calibre com essa simetria local descrever as interações eletrofracas era que os bósons mediadores dessa interação deveriam ser massivos. Isto porque, os campos massivos têm curto alcance e o único bóson observado a longa distâncias era o fóton [5]. No entanto, a introdução de um termo de massa para o campo de calibre,  $MA_\mu^a A_\mu^a$  numa ação de uma teoria de calibre, quebraria a invariância de calibre da teoria. No contexto da segunda quantização, a invariância de calibre é fundamental para mostrar a renormalizabilidade de uma teoria. A solução para o problema das massas dos campos de calibre vem de uma simetria de calibre escondida, onde os bósons vetoriais das interações fracas adquirem massa pelo mecanismo de Higgs. Neste mecanismo é introduzido um bóson escalar massivo, responsável por prover massa às partículas.

No caso das interações fortes, a teoria mais aceita para descrevê-las é a QCD<sup>3</sup>. Nesta teoria os hádrons são constituídos de objetos fundamentais, os quarks, a estes são atribuídos dois números quânticos: *cor* e *sabor*. Existem três tipos de cores, são elas: *verde*, *vermelho* e *azul* e seis tipos de sabores: *up*, *down*, *charm*, *strange*, *bottom* e *top*. O número de cores está relacionado à dimensão da representação fundamental do grupo de simetria interna, que neste caso é o  $SU(3)$ . A interação entre quarks é mediada pelos glúons, estes são autointeragentes. Existem oito glúons mediadores das interações fortes. Isto está relacionado a dimensão da representação adjunta de  $SU(3)$ .

A teoria quântica do eletromagnetismo, as interações fracas e as interações fortes são unificadas numa teoria denominada Modelo Padrão. Esta teoria possui como grupo de simetria o grupo  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ . De todas as partículas previstas pelo Modelo Padrão somente o bóson de Higgs não foi detectado<sup>4</sup> [6].

---

<sup>3</sup>Do inglês: *Quantum Chromodynamics*.

<sup>4</sup>Recentemente o CERN anunciou a descoberta de uma partícula na faixa de energia prevista para o

No contexto para o tratamento das simetrias de sistemas físicos se destaca o teorema de Noether [7]. Este teorema diz que, dada uma simetria contínua de um sistema físico (ou, da ação) teremos uma grandeza conservada. O teorema de Noether é válido para qualquer grupo de Lie. O teorema de Noether independe do grupo de simetria em questão e produz diferentes leis de conservação para diferentes grupos de Lie.

Leis de conservação não são unanimidade em sistemas físicos, como exemplos, temos quebra de simetria quiral [8] em termos massivos de uma teoria de calibre e a não-conservação de correntes de spin. Estes últimos são objetos de estudo na spintrônica [9, 10]. A spintrônica é uma nova sub-área da matéria condensada que estuda o transporte de spin dos elétrons. Se bem compreendida, a spintrônica terá uma grande vantagem sobre a eletrônica no contexto de capacidade de transmitir e armazenar informação, isto devido aos dois graus de liberdade do spin do elétron. A origem da vantagem é basicamente a capacidade de manipular o spin através do campo magnético e o tempo de decoerência do spin. No caso de aplicações, pode ser útil em leitores de HD's e memória RAM, explorando o efeito de magneto-resistência gigante (GMR). Este fato poderá ser muito útil em tecnologias da informação, computação quântica e informação quântica, visto que na eletrônica, os semicondutores são baseados no controle da carga elétrica, onde esta restringi-se à partículas carregadas e só fornece um grau de liberdade. Outra propriedade do spin bastante estudada atualmente na tentativa de aplicações tecnológicas é o efeito spin-Hall [11, 12] em sistemas com acoplamento spin órbita.

A grande questão do transporte de spin é a correta definição para a corrente de spin [13, 14, 15]. O problema decorre no fato de que o spin não é uma grandeza invariante no transporte de spin, tal que, pela definição convencional, a corrente de spin não é conservada. Na definição tradicional [16], o operador densidade de corrente de spin é definido como  $\frac{1}{2}(vs + sv)$ , significa que os portadores de spin  $s$  fluem com velocidade  $v$ . Entretanto, a definição tradicional baseada em analogia com a corrente clássica não pode descrever com precisão a corrente de spin, porque o spin é uma característica intrínseca em teoria quântica [17].

---

bóson de Higgs. Resta saber se essa partícula satisfaz as propriedades do bóson de Higgs.

O problema sobre a conservação da corrente de spin é persistente. Devido a dificuldade de construir um operador de spin que comute com o Hamiltoniano de Dirac, alguns autores chegam a comentar que, pode ser impossível ter uma corrente de spin conservada [16, 18, 19]. Contudo, existem trabalhos onde a corrente spin, sob certas condições, é conservada [13, 17, 20].

O formalismo para o tratamento das correntes de spin é bastante variado. Existem vários métodos para obtenção da quebra da equação da continuidade para o spin,

$$\frac{\partial \vec{s}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \overleftarrow{\mathcal{J}} = \frac{e}{m} \vec{s} \times \vec{B}, \quad (1)$$

onde  $\vec{s} = \phi^\dagger \vec{\sigma} \phi$  é a densidade de spin,  $\phi$  é a função de onda não-relativística do elétron de duas componentes

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_\uparrow \\ \phi_\downarrow \end{pmatrix}, \quad (2)$$

com componentes de spin  $\phi_\uparrow$  e  $\phi_\downarrow$ .  $\overleftarrow{\mathcal{J}}$  é a corrente de spin, definida como

$$\overleftarrow{\mathcal{J}} = \phi^\dagger (\vec{\sigma} \otimes \vec{J}) \phi, \quad (3)$$

onde  $\vec{J} = i\hbar(\overleftarrow{\nabla} - \overrightarrow{\nabla})/(2m)$  é o operador de spin. O termo do lado direito da equação (1) é o torque de Landau-Lifshitz exercido por um campo magnético num momento de dipolo magnético de spin 1/2.

Um trabalho recente [19] descreveu covariantemente a polarização de spin através do operador de Bargmann-Wigner [21]. Nessa descrição a quebra da equação da continuidade para o spin ganha um contexto relativístico. O limite não-relativístico é recuperado, e são feitas correções até a ordem de  $c^{-2}$ .

Outros trabalhos utilizando o formalismo de teorias de calibre para a teoria não relativística de Pauli-Schrödinger, obtêm a equação (1) mais termos de correção, termos estes que descrevem o efeito spin-Hall, a partir da corrente de calibre da teoria de calibre  $SU(2)$  [22, 23]. Além disso, existem trabalhos utilizando a decomposição de Gordon da corrente  $U(1)$  [20].

Inspirados em [19], o trabalho [24], usando o formalismo de teorias de calibre, com base numa teoria de calibre para o eletromagnetismo clássico, especificamente uma teoria de Maxwell-Dirac, os autores formalizaram o trabalho [19] em termos da corrente de Bargmann-Wigner e da simetria quiral. Tal formulação baseou-se nas correntes associadas a simetria de calibre, assimetria quiral e simetria sob o grupo de estabilidade. Os geradores da corrente de Bargmann-Wigner representam um setor do grupo de Poincaré que está associado ao spin. Foi mostrado em [24] que, embora conservada, a corrente de Bargmann-Wigner não representa um observável físico, em vista de sua não invariância de calibre. Os autores restauraram sua invariância de calibre e, obtiveram a não-conservação da generalização relativística da corrente de spin. Efeito semelhante também foi obtido para o fóton.

Neste contexto se insere o propósito desta dissertação. Pretendemos generalizar o estudo de [24] para a eletrodinâmica em meios materiais. Como o tratamento de [24] foi um formalismo covariante e de uma teoria de calibre clássica, descreveremos a eletrodinâmica em meios materiais covariantemente como uma teoria de calibre, para isso, introduziremos um tensor de curvatura auxiliar  $G^{\mu\nu}$  para o campo eletromagnético em meios materiais e o campo de Dirac acoplado ao potencial eletromagnético. Além da generalização do estudo de correntes de spin para a eletrodinâmica de Maxwell em meios materiais, nos propomos a estudar as correntes de spin numa teoria de calibre não-Abeliana.

Veremos adiante que, na teoria de calibre para a eletrodinâmica em meios materiais, a corrente de spin fermiônica não sofrerá mudanças em relação a corrente de spin oriunda das simetrias da teoria eletromagnética no vácuo. Quanto a corrente bosônica, veremos que ela está intimamente relacionada às propriedades do meio que se queira estudar. Nas teorias aqui tratadas, mostraremos que as correntes de spin quebram a equação da continuidade na presença de férmions. Para resolver este problema, vamos impor que a equação da continuidade seja satisfeita. Como resultado, encontraremos vínculos entre os principais campos da teoria. A generalização para teorias de Yang-Mills apresentará resultados semelhantes ao caso da teoria Abeliana no vácuo.

Esta dissertação é organizada da seguinte forma: No capítulo 1, descreveremos de-

talhadamente o trabalho [24], isto será útil para os outros capítulos, pois muitas definições serão bastante usadas ao longo da dissertação. No capítulo 2, estudaremos a eletrodinâmica de Maxwell em meios materiais, as correntes de spin e as condições de conservação para essas correntes. No capítulo 3, generalizaremos o estudo das correntes de spin em teorias de calibre não-Abelianas e veremos se o limite Abelianas pode ser recuperado. Por fim apresentaremos nossas conclusões. Quanto a notações e definições que serão utilizadas nesta dissertação, o leitor fica remetido a consultar os apêndices A e B.

# Capítulo 1

## Eletrodinâmica e correntes de spin

Neste capítulo, descreveremos a teoria eletromagnética, onde a interação entre campos carregados é mediada pelo campo eletromagnético<sup>1</sup>, isto será útil para desenvolvimentos futuros, onde a simetria da ação da QED, sob o grupo de estabilidade  $L(1, 3) \subset SO(1, 3)$ , nos permitirá estudar as respectivas correntes geradas.

### 1.1 Eletrodinâmica e suas simetrias

A Eletrodinâmica, em particular a QED, é uma teoria de calibre Abelian, com simetria de calibre local  $U(1)$ , onde a dinâmica dos campos envolvidos nessa teoria é descrita pela seguinte ação:

$$S = S_0 + S_{int} + S_M . \quad (1.1)$$

---

<sup>1</sup>A teoria aqui tratada é quântica no sentido de primeira quantização, justamente pelo fato da equação de Dirac ser uma teoria quântica relativística, onde os férmions de Dirac são acoplados ao campo eletromagnético por meio de um acoplamento mínimo. Contudo, o campo eletromagnético aqui não está quantizado. No entanto, a ação que vamos apresentar já apresenta o ponto de partida para o esquema de uma segunda quantização, visto que o campo de Dirac só é inteiramente compreendido neste contexto.

O setor de matéria é descrito por  $S_0$ , que é ação de Dirac e  $S_{int}$  é a ação de interação. No setor de calibre temos a ação  $S_M$ , que é a ação de Maxwell:

$$\begin{aligned} S_0 &= \int d^4x \bar{\psi} (i\hbar c \gamma^\mu \partial_\mu - mc^2) \psi , \\ S_{int} &= -e \int d^4x \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi , \\ S_M &= -\frac{1}{4\mu_0} \int d^4x F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (1.2)$$

O tensor de curvatura  $F^{\mu\nu}$  e seu dual são definidos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} F^{\mu\nu} &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu , \\ \tilde{F}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta} . \end{aligned} \quad (1.3)$$

O tensor  $F^{\mu\nu}$  descreve o campo eletromagnético. Por ser um tensor, fica claro que ele é covariante de Lorentz. Já  $A^\mu$  é o campo de calibre ou potencial eletromagnético. Este segundo é o campo fundamental da teoria eletromagnética no formalismo covariante, visto que, as variações na Lagrangeana para obtenção das equações de movimento são feitas com respeito a  $A^\mu$ . Além disso, na quantização usual do campo eletromagnético o elemento quantizado é o campo de calibre, e não o campo  $F^{\mu\nu}$ . A quantidade  $e$  é a constante para o acoplamento eletromagnético, ou seja, a carga elétrica. O campo  $\psi$  é um campo espinorial que descreve as excitações dos elétrons e  $\bar{\psi}$  é a representação adjunta,  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ . As matrizes  $\gamma^\mu$  são as matrizes de Dirac (ver apêndice). É importante notar que, a ação de interação é um acoplamento mínimo entre o campo fermiônico e o campo eletromagnético: A interação entre férmions é mediada pelo campo de calibre  $A^\mu$ , que na teoria quântica representa fótons. Estes últimos, no entanto não interagem<sup>2</sup> entre si. No caso de  $e = 0$ , vemos claramente que não temos interação eletromagnética.

No acoplamento mínimo o campo eletromagnético só interage com partículas carregadas, diferentemente do acoplamento não-mínimo onde o campo eletromagnético pode ter outros tipos de interações. Como um exemplo, ele pode interagir com partículas neu-

---

<sup>2</sup>Na verdade, os fótons podem interagir por um processo de interação virtual [25]. Mas nos restringimos ao formalismo de 1ª quantização.

tras através do spin dessas partículas. Contudo, a QED com esse último acoplamento é não renormalizável e mistura a quiralidade das partículas, mas este último problema não chega a ter importância nessa teoria. Apesar das dificuldades com acoplamentos não-mínimos, estes podem ter importância em outras teorias onde o acoplamento mínimo não seria suficiente para compreensão de muitos fenômenos [26].

Para entender um pouco do comportamento dos campos mencionados acima, devemos extrair as equações de movimento para os campos da teoria a partir da ação (1.1). Para o campo espinorial, as equações são:

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu D_\mu - m_0)\psi &= 0 , \\ \bar{\psi}(i\gamma^\mu \overleftarrow{D}_\mu^\dagger + m_0) &= 0 , \end{aligned} \tag{1.4}$$

onde

$$D_\mu = \partial_\mu + \frac{ie}{\hbar c} A_\mu , \tag{1.5}$$

é a derivada covariante<sup>3</sup> e  $m_0 = mc/\hbar$ . Para o campo eletromagnético as equações são:

$$\begin{aligned} \partial_\nu F^{\nu\mu} &= \mu_0 e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi , \\ \partial_\nu \tilde{F}^{\nu\mu} &= 0 . \end{aligned} \tag{1.6}$$

A primeira equação de (1.6) nos fornece as equações de Maxwell inhomogêneas no vácuo, enquanto que, da segunda equação de (1.6) obtemos as equações homogêneas. Esta última é obtida puramente por propriedades topológicas da teoria. Dela é que se conclui a não-existência de monopólos magnéticos [27, 28] numa teoria de calibre Abelian. Numa teoria de calibre, é importante conhecer as principais transformações que mantêm sua ação invariante. Neste caso, a simetria de calibre é descrita pelo grupo  $U(1)$  local, e é

---

<sup>3</sup>A derivada covariante além de levar à invariância de calibre local de uma teoria de calibre, contém em si a prescrição do acoplamento mínimo.



caracterizada pelo conjunto de transformações infinitesimais

$$\begin{aligned}
\delta_g \psi &= -\frac{ie}{\hbar c} \alpha \psi , \\
\delta_g \bar{\psi} &= \frac{ie}{\hbar c} \bar{\psi} \alpha , \\
\delta_g A_\mu &= \partial_\mu \alpha ,
\end{aligned} \tag{1.7}$$

onde  $\alpha$  é um parâmetro dependente da posição no espaço-tempo. A invariância da ação (1.1) por transformações de simetria<sup>4</sup>  $U(1)$  nos permite obter uma corrente conservada:

$$j^\mu = e \bar{\psi} \gamma^\mu \psi , \tag{1.8}$$

onde usamos<sup>5</sup>

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^A)} \delta \phi^A - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^A)} \partial_\nu \phi^A - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right) \delta x^\nu . \tag{1.9}$$

Do teorema de Noether [25], segue-se que  $\partial_\mu j^\mu = 0$ , expressando a conservação da carga elétrica. É importante notar que, caso tivéssemos uma teoria descrita por  $S_0$ , *i.e.*, a teoria de Dirac, a corrente conservada seria  $j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ , cujas componentes temporal e espacial nos fornecem a densidade de probabilidade e a densidade de corrente de probabilidade, respectivamente. Percebe-se, de (1.8), que a 4-corrente elétrica é o produto de uma carga por uma 4-corrente de probabilidade.

Outra simetria bem conhecida da eletrodinâmica é a simetria quirais para férmions sem massa. As transformações quirais são definidas como

$$\begin{aligned}
\delta_q \psi &= -\frac{i}{\hbar c} \alpha \gamma^5 \psi , \\
\delta_q \bar{\psi} &= -\frac{i}{\hbar c} \alpha \bar{\psi} \gamma^5 , \\
\delta_q A_\mu &= 0 ,
\end{aligned} \tag{1.10}$$

onde  $\alpha$  é agora um parâmetro constante e a matriz  $\gamma^5$  é definida em (A.10). Como a ação

---

<sup>4</sup>Neste caso, a simetria é global, ou seja, o parâmetro da transformação independe da posição no espaço-tempo. Cargas só fazem sentido se definidas por uma simetria global [29].

<sup>5</sup> $\mathcal{L}$  é a Lagrangeana.  $A$  é um índice coletivo geral, caracterizando os índices dos campos, assim como a soma sobre todos os campos.

(1.1) descreve férmions massivos, a corrente quirial não-conservada é

$$S^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi , \quad (1.11)$$

de modo que sua 4-divergência é  $\partial_\mu S^\mu = 2im_0\bar{\psi}\gamma^5\psi$ .

## 1.2 O grupo de Poincaré

A ação (1.1) também possui simetria por transformações do grupo de Poincaré, *i.e.*, o grupo  $ISO(1,3)$ . Devido a importância deste grupo (e sua decomposição) nesta dissertação, dedicamos uma seção separada para ele. Os geradores do grupo de Poincaré são denotados por  $P_\mu = i\hbar\partial_\mu$  para as translações, e  $J_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} + I_{\mu\nu}$  para o setor de Lorentz, onde,  $L_{\mu\nu} = i\hbar(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu)$  é tido como a parte do momento angular, enquanto  $I_{\mu\nu}$  está associado ao momento angular interno, o spin. A álgebra de Lie associada ao grupo de Poincaré é

$$\begin{aligned} [P_\mu, P_\nu] &= 0 , \\ [J_{\mu\nu}, J_{\alpha\beta}] &= i\hbar(\eta_{\mu\alpha}J_{\beta\nu} - \eta_{\mu\beta}J_{\alpha\nu} - \eta_{\nu\alpha}J_{\beta\mu} + \eta_{\nu\beta}J_{\alpha\mu}) , \\ [J_{\mu\nu}, P_\alpha] &= i\hbar(\eta_{\alpha\nu}P_\mu - \eta_{\alpha\mu}P_\nu) . \end{aligned} \quad (1.12)$$

O primeiro termo de (1.12) nos mostra que translações no espaço-tempo são comutativas. Ainda, o grupo de Poincaré possui uma sub-álgebra Abelianana. O segundo termo de (1.12) é associado a álgebra de Lie do grupo de Lorentz,  $SO(1,3)$ . A partir do terceiro termo de (1.12), vemos que transformações de Lorentz e translações no espaço-tempo não comutam entre si. Além disso, nota-se que o grupo de Lorentz é um subgrupo de estabilidade em relação ao grupo de Poincaré.

Sabemos que as partículas são caracterizadas por sua massa, carga e spin. Estas propriedades podem ser entendidas através do ponto de vista das simetrias em teorias de campos [25]. Como vimos anteriormente na seção 1.1, a simetria de calibre nos permitiu identificar a carga das partículas, onde estas são identificadas como perturbações

nos campos. Vejamos agora como descrever massa e spin das partículas através das simetrias do espaço-tempo, *i.e.*, simetrias do grupo de Poincaré. Neste caso, precisamos construir operadores cujos autovalores nos forneçam essas informações; de fato, os autovalores dos operadores de Casimir<sup>6</sup> relacionados ao grupo de Poincaré provém massa e spin das partículas, que são representações irredutíveis do grupo de Poincaré [21, 25].

O grupo de Poincaré é um grupo não-compacto assim como o grupo de Lorentz, logo, não existem representações unitárias de dimensão finita para o grupo de Poincaré. Contudo, podem ser encontradas representações unitárias num espaço de dimensão infinita, *i.e.*, o espaço de Hilbert, onde os operadores  $P_\mu$  e  $J_{\mu\nu}$  atuam como operadores Hermitianos [30]. Definindo um operador de Casimir para o setor das translações do grupo de Poincaré

$$P^2 = P^\mu P_\mu , \quad (1.13)$$

é trivial mostrar que

$$\begin{aligned} [P^2, P_\mu] &= 0 , \\ [P^2, J_{\mu\nu}] &= 0 , \end{aligned} \quad (1.14)$$

como esperado de um operador de Casimir. Desta equação, notamos que, sob uma transformação de Lorentz infinitesimal,  $P^2$  permanece constante. Isto já era esperado, pois o operador  $P^2$  é um escalar.

Podemos definir também um operador vetorial

$$W^\mu = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} J_{\nu\alpha} P_\beta = -\frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} I_{\nu\alpha} P_\beta , \quad (1.15)$$

---

<sup>6</sup>Operador de Casimir é um operador que comuta com todos os outros geradores do grupo.

chamado de operador de Pauli-Lubanski. Vejamos agora se (1.15) define um grupo:

$$\begin{aligned}
[W^\mu, W^\nu] &= i\hbar\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}W_\alpha P_\beta, \\
[J_{\mu\nu}, W^\alpha] &= i\hbar\left(\delta_\mu^\alpha P_\nu \tilde{J}_\nu^\gamma - \delta_\nu^\alpha P_\mu \tilde{J}_\mu^\gamma\right), \\
[W^\mu, P_\alpha] &= 0,
\end{aligned} \tag{1.16}$$

onde  $\tilde{J}_\nu^\gamma = \epsilon_\nu^{\gamma\delta\sigma} J_{\delta\sigma}/2$ . A partir da primeira equação de (1.16), percebemos que as transformações geradas pelo operador de Pauli-Lubanski formam um grupo, ou seja, a álgebra fecha. Veja que o grupo gerado por (1.15) é um subgrupo do grupo de Lorentz, além disso,  $W^\mu$  transforma-se do mesmo modo que o gerador das translações. Note da última equação de (1.16) que o momento linear é invariante sob transformações geradas por (1.15). E ainda,  $W_\mu$  e  $P_\mu$  são ortogonais. Concluimos então que: o grupo gerado por  $W^\mu$  é um grupo de estabilidade, denotado aqui por  $L(1, 3)$ . Este pode ser entendido como transformações de Lorentz que mantêm o momento linear invariante, e ainda, ele é um subgrupo do grupo de Poincaré.

De posse desses resultados, podemos construir outro operador de Casimir para o grupo de Poincaré

$$W^2 = W^\mu W_\mu, \tag{1.17}$$

de modo que,

$$\begin{aligned}
[W^2, J_{\mu\nu}] &= 0, \\
[W^2, P_\mu] &= 0.
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Como já comentado, nosso objetivo era descrever representações unitárias irreduzíveis para o grupo de Poincaré. Isto agora é possível pois encontramos os operadores de Casimir do grupo. Como temos operadores invariantes no grupo, então, pelo lema de Schur [31, 32], é possível construir representações irreduzíveis para este grupo. Assim, escolhendo o operador vetorial  $P_\mu$  como base de nosso espaço vetorial, seus autoestados

serão  $|p\rangle$ . Deste modo podemos construir a equação de autovalores, tal que,

$$P_\mu |p\rangle = p_\mu |p\rangle , \quad (1.19)$$

onde  $p_\mu$  são os autovalores do operador  $P_\mu$  no autoestado  $|p\rangle$ . Agora podemos encontrar os autovalores para o operador de Casimir  $P^2$ .

$$P^\mu P_\mu |p\rangle = p^\mu p_\mu |p\rangle = m^2 c^2 |p\rangle , \quad (1.20)$$

onde foi usada a relação relativística  $p^\mu p_\mu = m^2 c^2$ . Aqui,  $m$  representa a massa de um estado de uma única partícula. Vemos que o setor das translações do grupo de Poincaré nos fornece a massa das partículas. De maneira semelhante, é possível encontrar os autovalores para o operador  $W^2$ .

$$W^\mu W_\mu |p, s\rangle = -P^2 S^2 |p, s\rangle = -m^2 c^2 \hbar^2 s(s+1) |p, s\rangle , \quad (1.21)$$

onde  $s$  é o spin da partícula. Como  $W^2$  é um invariante de Lorentz, segue imediatamente que (1.21) é satisfeita para todos os referenciais inerciais.

No caso de representações de campos não-massivas,  $W^\mu$  atuando num dado estado no espaço é proporcional ao momento  $p^\mu$ , ou seja,  $W^\mu$  terá a forma

$$W^\mu = -h p^\mu , \quad (1.22)$$

onde  $h$  é um fator de proporcionalidade. A partir de (1.15) é possível mostrar que

$$h = \frac{\vec{S} \cdot \vec{p}}{|p_0|} . \quad (1.23)$$

Este operador é denominado operador de helicidade. Ele mede a componente de spin na direção do momento.

Os operadores (1.13) e (1.17) são os únicos operadores de Casimir para o grupo de Poincaré. Isto porque, o grupo de Poincaré é um grupo de ordem 2, ou seja, a ordem de

um grupo nos informa quantos operadores de Casimir podemos construir para o respectivo grupo [33].

### 1.3 O grupo $L(1, 3)$ e as correntes de Noether

Vamos apresentar nesta seção e nas seguintes, um tratamento detalhado de [24], pois será útil para generalizações futuras em outras teorias. Para o setor fermiônico, o gerador do grupo  $L(1, 3)$ , *i.e.*, (1.15), pode ser escrito como

$$W_f^\mu = -\frac{\hbar}{4}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\sigma_{\nu\alpha}P_\beta = \frac{i\hbar}{2}\gamma^5\sigma^{\mu\nu}P_\nu, \quad (1.24)$$

onde o índice  $f$  denota o caráter fermiônico, e usamos  $I_{\mu\nu} = \hbar\sigma_{\mu\nu}/2$ , onde  $\sigma_{\mu\nu}$  é definido em (A.10). Assim, as transformações de simetria do grupo  $L(1, 3)$  para o campo fermiônico apresentam as seguintes formas.

$$\begin{aligned} \delta_L\psi &= -\frac{i}{\hbar^2}\omega_\mu W_f^\mu\psi, \\ \delta_L\bar{\psi} &= -\frac{i}{\hbar^2}\bar{\psi}\overleftarrow{W}_f^\mu\omega_\mu, \end{aligned} \quad (1.25)$$

onde  $\omega_\mu$  é um parâmetro real e constante de dimensão  $[L]^1$ . A partir do teorema de Noether, a corrente associada a essa simetria para o campo fermiônico é

$$T_f^{\mu\nu} = \frac{c}{\hbar}\bar{\psi}\gamma^\mu W_f^\nu\psi, \quad (1.26)$$

que é um tensor de segunda ordem chamado tensor de Bargmann-Wigner [25].

Para campos bosônicos, o vetor de Pauli-Lubanski é

$$W_b^{\mu\nu\alpha} = -\frac{\hbar}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}P_\beta, \quad (1.27)$$

onde o índice  $b$  caracteriza o comportamento bosônico e utilizamos  $I^{\mu\nu\alpha\beta} = \hbar(\eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta} - \eta^{\mu\beta}\eta^{\nu\alpha})$ , que é o operador associado ao momento angular interno do fóton. Assim,  $A_\alpha$  transforma-se

sob o grupo de estabilidade da seguinte forma

$$\delta_l A_\alpha = \frac{i}{\hbar^2} \omega^\nu W_{b\alpha\nu\sigma} A^\sigma = \frac{1}{2} \omega^\nu \epsilon_{\alpha\nu\sigma\beta} \partial^\beta A^\sigma . \quad (1.28)$$

Antissimetrizando

$$\delta_l A_\alpha = -\frac{1}{4} \omega^\nu \epsilon_{\alpha\nu\beta\sigma} (\partial^\beta A^\sigma - \partial^\sigma A^\beta) = -\frac{1}{2} \omega_\nu \tilde{F}_\alpha{}^\nu . \quad (1.29)$$

Usando (1.9), é simples mostrar que a corrente de Bargmann-Wigner bosônica<sup>7</sup> é

$$T_b^{\mu\nu} = \frac{1}{2\mu_0} F^{\mu\alpha} \tilde{F}_\alpha{}^\nu = \frac{1}{2\mu_0 c} T \eta^{\mu\nu} , \quad (1.30)$$

onde  $T = F^{\mu\alpha} \tilde{F}_{\alpha\mu}/4$ . Assim, do teorema de Noether, a corrente de Bargmann-Wigner conservada total é

$$T^{\mu\nu} = T_f^{\mu\nu} + T_b^{\mu\nu} \quad | \quad \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 . \quad (1.31)$$

## 1.4 Restaurando a invariância de calibre da corrente de Bargmann-Wigner

Na seção 1.2 descrevemos um pouco o grupo de Poincaré e vimos seu importante papel na descrição de partículas. O ponto fundamental é que a teoria da relatividade está contida no grupo de Poincaré. Sendo mais específico, pode ser postulado que as leis da Física são invariantes por transformações do grupo de Poincaré. Este fato torna possível extrapolar um experimento num laboratório para todo o universo, e ainda ter observáveis físicos invariantes pelo grupo de Poincaré. Contudo, o postulado da relatividade não é suficiente. Precisamos impor outro princípio, que leva em conta simetrias internas nos campos que descrevem os observáveis. Este princípio é o *princípio de calibre*, que impõe que observáveis físicos sejam invariantes por simetrias de calibre locais. Neste contexto, devemos verificar se a corrente de Bargmann-Wigner é invariante por transformações de

---

<sup>7</sup>Onde  $T = \vec{E} \cdot \vec{B}$ . O fator  $c$  foi introduzido para normalização.

calibre<sup>8</sup> do eletromagnetismo, ou seja, o grupo local  $U(1)$ . Não é difícil notar que o setor fermiônico da corrente de Bargmann-Wigner quebra a invariância de calibre,

$$\delta T_f^{\mu\nu} = -\frac{ie}{\hbar^2} \bar{\psi} \gamma^\mu (W_f^\nu \alpha) \psi, \quad (1.32)$$

e assim pelo princípio de calibre, essa corrente não pode ser associada a um observável físico. Por outro lado, no setor bosônico é trivial perceber que a corrente bosônica é invariante de calibre. Para contornar esse problema levemos a derivada ordinária  $\partial_\alpha$  do vetor de Pauli-Lubanski numa derivada covariante  $D_\alpha$  [5], de modo a termos

$$\mathcal{W}_f^\nu = -\frac{\hbar^2}{2} \gamma^5 \sigma^{\nu\alpha} D_\alpha, \quad (1.33)$$

implicando na seguinte corrente de Bargmann-Wigner para o setor fermiônico

$$\mathcal{T}_f^{\mu\nu} = \frac{\hbar c}{2} \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \sigma^{\nu\alpha} D_\alpha \psi. \quad (1.34)$$

Assim, a corrente de Bargmann-Wigner total invariante de calibre é definida como

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \frac{ie}{2} \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \sigma^{\nu\alpha} A_\alpha \psi, \quad (1.35)$$

e agora  $\delta_g \mathcal{T}^{\mu\nu} = 0$ . Em vista da restauração da invariância de calibre,  $\mathcal{T}^{\mu\nu}$  não será mais conservada. Portanto, estudemos agora separadamente a 4-divergência para o setor fermiônico e bosônico. Iniciemos com o setor fermiônico. A partir de (1.34)

$$\mathcal{T}_f^{\mu\nu} = \frac{\hbar c}{2} \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \sigma^{\nu\alpha} \partial_\alpha \psi + \frac{ie}{2} \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \sigma^{\nu\alpha} A_\alpha \psi. \quad (1.36)$$

Utilizando  $\sigma^{\nu\alpha} = i[\gamma^\nu \gamma^\alpha - \eta^{\nu\alpha}]$  e (1.4),

$$\mathcal{T}_f^{\mu\nu} = \frac{\hbar c}{2} m_0 \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \psi - \frac{i\hbar c}{2} \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \partial^\nu \psi + \frac{e}{2} \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu A^\nu \psi. \quad (1.37)$$

---

<sup>8</sup>A análise da invariância de calibre deve ser feita em relação ao grupo de calibre da teoria em questão, independente da simetria que fornece o suposto observável.



Agora, apliquemos a 4-divergência

$$\begin{aligned} \partial_\mu \mathcal{T}_f^{\mu\nu} &= -\frac{\hbar c}{2} m_0 \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \gamma^\nu \psi + \frac{\hbar c}{2} m_0 \bar{\psi} \gamma^5 (2\delta_\mu^\nu - \gamma^\nu \gamma_\mu) \partial^\mu \psi + \frac{i\hbar c}{2} \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \partial^\nu \psi + \\ &-\frac{i\hbar c}{2} \bar{\psi} \gamma^5 \partial^\nu (\gamma^\mu \partial_\mu \psi) - \frac{e}{2} \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 A^\nu \psi + \frac{e}{2} \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \partial_\mu A^\nu \psi + \frac{e}{2} \bar{\psi} \gamma^5 A^\nu \gamma^\mu \partial_\mu \psi , \end{aligned} \quad (1.38)$$

onde usamos  $\gamma_\mu \gamma^\nu = 2\delta_\mu^\nu - \gamma^\nu \gamma_\mu$ . Fazendo uso da equação (1.4)

$$\begin{aligned} \partial_\mu \mathcal{T}_f^{\mu\nu} &= -\frac{ie}{2} m_0 \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \gamma^\nu A_\mu \psi - \frac{i\hbar c}{2} m_0^2 \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\nu \psi + \hbar c m_0 \bar{\psi} \gamma^5 \partial^\nu \psi + \frac{ie}{2} m_0 c \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\nu \gamma^\mu A_\mu \psi + \\ &+ \frac{i\hbar c}{2} m_0^2 \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\nu \psi - \frac{e}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 A_\mu \partial^\nu \psi - \frac{\hbar c}{2} m_0 \bar{\psi} \gamma^5 \partial^\nu \psi - \frac{e}{2} \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \partial^\nu A_\mu \psi + \\ &- \frac{e}{2} \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu A_\mu \partial^\nu \psi - \frac{\hbar c}{2} m_0 \bar{\psi} \gamma^5 \partial^\nu \psi - \frac{ie^2}{2\hbar c} \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 A_\mu A^\nu \psi - \frac{ie}{2} m_0 \bar{\psi} \gamma^5 A^\nu \psi + \\ &+ \frac{e}{2} \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \partial_\mu A^\nu \psi - \frac{ie^2}{2\hbar c} \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu A_\mu A^\nu \psi - \frac{ie}{2} m_0 \bar{\psi} \gamma^5 A^\nu \psi . \end{aligned} \quad (1.39)$$

Utilizando a propriedade  $\gamma^5 \gamma^\mu = -\gamma^\mu \gamma^5$

$$\partial_\mu \mathcal{T}_f^{\mu\nu} = \frac{ie}{2} m_0 \bar{\psi} \gamma^5 (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) A_\mu \psi - ie m_0 \bar{\psi} \gamma^5 A^\nu \psi + \frac{e}{2} \bar{\psi} \gamma^5 \gamma_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) \psi . \quad (1.40)$$

De (A.9) e (1.11) mostra-se finalmente

$$\partial_\mu \mathcal{T}_f^{\mu\nu} = -\frac{e}{2} S_\mu F^{\mu\nu} , \quad (1.41)$$

onde  $S_\mu$  é a corrente quiral definida em (1.11).

Vejamos agora o caso do setor bosônico. Atuando a 4-divergência em (1.30)

$$\begin{aligned} \partial_\mu T_b^{\mu\nu} &= \frac{1}{2\mu_0} (\partial_\mu F^{\mu\alpha}) \tilde{F}_\alpha{}^\nu + \frac{1}{2\mu_0} F_{\mu\alpha} \partial^\mu \tilde{F}^{\alpha\nu} , \\ \partial_\mu T_b^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} j^\alpha \tilde{F}_\alpha{}^\nu + \frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\alpha} (\partial^\mu \tilde{F}^{\alpha\nu} - \partial^\alpha \tilde{F}^{\mu\nu}) , \end{aligned} \quad (1.42)$$

onde utilizamos (1.6) e antissimetrizamos o segundo termo. Definindo

$$K^{\mu\alpha\nu} = \partial^\mu \tilde{F}^{\alpha\nu} - \partial^\alpha \tilde{F}^{\mu\nu} . \quad (1.43)$$

Temos que

$$\partial_\mu T_b^{\mu\nu} = \frac{1}{2} j_\alpha \tilde{F}^{\alpha\nu} + \frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\alpha} K^{\mu\alpha\nu} . \quad (1.44)$$

A 3-forma dual de (1.43) é

$$\begin{aligned} \tilde{K}_\gamma &= \frac{1}{3!} \epsilon_{\gamma\mu\alpha\nu} K^{\mu\alpha\nu} , \\ \tilde{K}_\gamma &= \frac{1}{3!} \frac{1}{2} [\epsilon_{\gamma\mu\alpha\nu} \epsilon^{\alpha\nu\beta\sigma} \partial^\mu F_{\beta\sigma} - \epsilon_{\gamma\alpha\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu\beta\sigma} \partial^\alpha F_{\beta\sigma}] , \\ \tilde{K}_\gamma &= \frac{1}{3!} \frac{1}{2} [2 (\delta_\gamma^\beta \delta_\mu^\sigma - \delta_\mu^\beta \delta_\gamma^\sigma) \partial^\mu F_{\beta\sigma} + 2 (\delta_\gamma^\beta \delta_\alpha^\sigma - \delta_\alpha^\beta \delta_\gamma^\sigma) \partial^\alpha F_{\beta\sigma}] , \\ \tilde{K}_\gamma &= -\frac{4}{3!} \partial^\sigma F_{\sigma\gamma} , \\ \tilde{K}_\gamma &= -\frac{4}{3!} \mu_0 j_\gamma . \end{aligned} \quad (1.45)$$

Podemos ainda inverter a primeira equação de (1.45)

$$\begin{aligned} \epsilon^{\nu\beta\sigma\gamma} \tilde{K}_\gamma &= \frac{1}{3!} \epsilon^{\nu\beta\sigma\gamma} \epsilon_{\gamma\mu\alpha\delta} K^{\mu\alpha\delta} = -\frac{1}{3!} \epsilon^{\gamma\nu\beta\sigma} \epsilon_{\gamma\mu\alpha\delta} K^{\mu\alpha\delta} , \\ \epsilon^{\nu\beta\sigma\gamma} \tilde{K}_\gamma &= -\frac{1}{3!} \left( \delta_\mu^\nu \delta_\alpha^\beta \delta_\delta^\sigma - \delta_\mu^\nu \delta_\delta^\beta \delta_\alpha^\sigma - \delta_\delta^\nu \delta_\alpha^\beta \delta_\mu^\sigma + \delta_\delta^\nu \delta_\mu^\beta \delta_\alpha^\sigma + \delta_\alpha^\nu \delta_\delta^\beta \delta_\mu^\sigma - \delta_\alpha^\nu \delta_\mu^\beta \delta_\delta^\sigma \right) K^{\mu\alpha\delta} , \\ \epsilon^{\nu\beta\sigma\gamma} \tilde{K}_\gamma &= -\frac{1}{3!} (K^{\nu\beta\sigma} - K^{\nu\sigma\beta} - K^{\sigma\beta\nu} + K^{\beta\sigma\nu} + K^{\sigma\nu\beta} - K^{\beta\sigma\nu}) , \end{aligned} \quad (1.46)$$

chegando em

$$K^{\nu\mu\alpha} = -\epsilon^{\nu\mu\alpha\gamma} \tilde{K}_\gamma . \quad (1.47)$$

Assim, utilizando (1.45), é simples mostrar que

$$K^{\nu\mu\alpha} = \frac{4}{3!} \mu_0 \epsilon^{\nu\mu\alpha\gamma} j_\gamma . \quad (1.48)$$

Logo, de (1.48) em (1.44) obtemos finalmente

$$\partial_\mu \mathcal{T}_b^{\mu\nu} = \frac{1}{6} j_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} . \quad (1.49)$$

As equações (1.41) e (1.49) expressam a não-conservação da corrente de Bargmann-Wigner invariante de calibre, e mantidas separadamente desde que elas são obtidas independentemente da equação da continuidade (1.31). A equação (1.41) é de fato a versão

covariante do resultado obtido em [19], que associa a corrente de Bargmann-Wigner com a corrente de spin e efeitos de transferência de spin-torque, quando o campo eletromagnético é totalmente externo [24].

## 1.5 Decomposição no espaço e tempo

A fim de melhor compreender as equações (1.41) e (1.49), será útil decompô-las nos setores de espaço e tempo.

### 1.5.1 Componentes do setor fermiônico

A partir de (1.34),

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_f^{00} &= -\frac{i\hbar c}{2}\psi^\dagger\Sigma^i D_i\psi = -\frac{mc}{2}\mathcal{T}, \\
\mathcal{T}_f^{i0} &= -\frac{i\hbar c}{2}\psi^\dagger\alpha^i\Sigma^j D_j\psi = -\frac{m}{2}\mathcal{T}^i, \\
\mathcal{T}_f^{0i} &= \frac{mc^2}{2}\psi^\dagger\left(\beta\Sigma^i + \frac{i\hbar}{mc}\gamma^5 D^i\right)\psi = \frac{mc}{2}\mathcal{J}^i, \\
\mathcal{T}_f^{ij} &= \frac{mc^2}{2}\psi^\dagger\alpha^i\left(\beta\Sigma^j + \frac{i\hbar}{mc}\gamma^5 D^j\right)\psi = \frac{m}{2}\mathcal{J}^{ij},
\end{aligned} \tag{1.50}$$

onde foram usadas as relações padrão das matrizes- $\gamma$  (A.10) e (1.4). Então  $\partial_\mu\mathcal{T}_f^{\mu\nu} = \partial_0\mathcal{T}_f^{0\nu} + \partial_j\mathcal{T}_f^{j\nu}$  se decompõe em

$$\begin{aligned}
\partial_\mu\mathcal{T}_f^{\mu 0} &= -\frac{m}{2}\left[\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial t} + \partial_i\mathcal{T}^i\right], \\
\partial_\mu\mathcal{T}_f^{\mu i} &= \frac{m}{2}\left[\frac{\partial\mathcal{J}^i}{\partial t} + \partial_j\mathcal{J}^{ji}\right],
\end{aligned} \tag{1.51}$$

e, a partir de (1.41)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{T}}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{T}} &= -\frac{e}{mc}\vec{\mathcal{S}}\cdot\vec{E}, \\
\frac{\partial\vec{\mathcal{J}}}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{\mathcal{J}} &= \frac{e}{mc}\mathcal{S}_0\vec{E} + \frac{e}{m}\vec{\mathcal{S}}\times\vec{B},
\end{aligned} \tag{1.52}$$

onde foi usado  $\mathcal{S}^i = \psi^\dagger\Sigma^i\psi$ ,  $\mathcal{S}_0 = \psi^\dagger\gamma^5\psi$  e (A.7).

As quantidades  $\mathcal{J}^i$  e  $\mathcal{J}^{ij}$  são identificadas com a generalização relativística da densidade de spin e da corrente de spin, respectivamente. Esta identificação foi mostrada em [19]. Note que a equação (1.52) apresenta estrutura semelhante à equação (1), que é obtida através da equação de Schrödinger que inclui um termo com efeito Zeeman na forma  $-\mu_B \vec{\sigma} \cdot \vec{B}$ . No nosso caso, ganhamos mais uma equação de consistência, proveniente do setor temporal da generalização relativística para quebra da equação da continuidade da corrente de spin, que é descrita pela primeira equação de (1.52). O formalismo aqui utilizado nos levou a obter mais um termo de quebra da equação da continuidade, termo este que tem contribuição de um campo elétrico externo.

## 1.5.2 Componentes do setor bosônico

A corrente bosônica descrita por (1.30), é decomposta na seguinte maneira

$$\begin{aligned} T_b^{00} &= \frac{1}{2\mu_0 c} T , \\ T_b^{0i} &= T_b^{i0} = 0 , \\ T_b^{ij} &= -\frac{1}{2\mu_0 c} T \delta^{ij} . \end{aligned} \tag{1.53}$$

Vejamos agora (1.49). Usando  $\partial_\mu T_b^{\mu\nu} = \partial_0 T_b^{0\nu} + \partial_j T_b^{j\nu}$

$$\begin{aligned} \partial_\mu T_b^{\mu 0} &= -\frac{1}{6} j^i B^i , \\ \partial_\mu T_b^{\mu j} &= \frac{1}{6} \left[ -c\rho B^j + \frac{1}{c} \left( \vec{j} \times \vec{E} \right)^j \right] . \end{aligned} \tag{1.54}$$

De posse dessas relações é simples mostrar que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= -\frac{1}{3\varepsilon_0} \vec{j} \cdot \vec{B} , \\ \vec{\nabla} T &= -\frac{\mu_0 c}{3} \left( -c\rho \vec{B} + \frac{1}{c} \vec{j} \times \vec{E} \right) , \end{aligned} \tag{1.55}$$

onde  $\rho = j^0$ .

Para a maioria dos sistemas os campos elétrico e magnético são mutuamente orto-

gonais implicando que em geral  $T_b^{\mu\nu} = 0$ . Neste caso, teremos então,

$$\begin{aligned}\vec{j} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{B} &= \frac{1}{\rho c^2} \vec{j} \times \vec{E}.\end{aligned}\tag{1.56}$$

Sendo consistente com as relações clássicas, se  $\vec{j} = \rho \vec{v}$ , ou seja,  $\vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}$ .

Um resultado novo, como mostrado por [24] é a corrente de spin  $T_b^{\mu\nu}$  relacionada ao campo eletromagnético. Esta quantidade pode vir a dar uma medida da não-perpendicularidade entre os campos elétrico e magnético. Por outro lado,  $T$  é uma quantidade escalar que determina o fluxo de spin do fóton. O segundo termo de (1.55) é um gradiente de spin, que surge como um tipo de força de um monopólo magnético. Assim, se os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  e a corrente  $\vec{j}$  não são mutualmente ortogonais, as cargas  $\rho_m = -\rho/3\epsilon_0$  e  $\vec{j}_m = \mu_0 \vec{j}/3$ , podem ser interpretadas como um monopólo magnético efetivo [24].

# Capítulo 2

## Eletrodinâmica em meios materiais

Neste capítulo, iremos descrever a teoria eletromagnética em meios materiais no formalismo covariante. Para isso, construiremos uma ação para o campo eletromagnético na matéria acoplado a férmions de Dirac. Em seguida, estudaremos suas simetrias e suas consequências para as correntes de spin.

### 2.1 Preliminares

Apresentamos no capítulo anterior a teoria eletromagnética de Maxwell na forma covariante, isto é, as equações de Maxwell escritas em termos de um tensor antissimétrico  $F^{\mu\nu}$ . As equações de Maxwell apresentadas em (1.6) se decompõem na seguinte forma

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0,\end{aligned}\tag{2.1}$$

onde foi utilizada a relação (A.5) para desenvolver (1.6). Contudo, as equações inhomogêneas não são convenientes para descreverem o comportamento do campo eletromagnético em meios materiais. Nosso objetivo aqui é estudar correntes de spin na matéria pelo

mesmo formalismo utilizado anteriormente. Como o formalismo utilizado no capítulo anterior foi um tratamento covariante, é conveniente descrever a teoria eletromagnética na matéria do mesmo modo. Para isso, necessitamos de um tensor auxiliar para a eletrodinâmica em meios materiais, *i.e.*,  $G^{\mu\nu}$ . Este tensor é definido através da relação constitutiva linear covariante [34]:

$$G^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\chi^{\mu\nu\beta\sigma}F_{\beta\sigma} , \quad (2.2)$$

onde  $F_{\beta\sigma}$  é o tensor de curvatura eletromagnético definido em (1.6) e  $\chi^{\mu\nu\beta\sigma}$  é o chamado tensor constitutivo, também conhecido como campo estrutural. Esse campo nos informa sobre as propriedades do meio. Ele obedece às seguintes propriedades

$$\chi^{\mu\nu\beta\sigma} = \chi^{\beta\sigma\mu\nu} = -\chi^{\nu\mu\beta\sigma} = -\chi^{\mu\nu\sigma\beta} . \quad (2.3)$$

O tensor  $\chi$  nos informa como o meio material responde à aplicação de um campo eletromagnético, ou seja, devido as propriedades de  $\chi$ , o campo de resposta não terá necessariamente a mesma direção do campo aplicado no meio. O tensor  $\chi$  possui 36 componentes independentes, no entanto, as propriedades mostradas em (2.3) reduz o número de componentes independentes para 21. O tensor  $\chi$  pode satisfazer outra propriedade,  $\chi^{[\mu\nu\beta\sigma]} = 0$ , indicando uma soma alternada sobre todos os índices (alternância par de índices é acompanhada com sinal positivo e alternância ímpar com sinal negativo). Essa propriedade é denominada restrição de Post. Contudo, existem materiais onde ela não é satisfeita. A restrição de Post reduz o número de componentes independentes à 20. Este fato torna o tensor constitutivo semelhante ao tensor de curvatura Riemanniano. Devido a essa semelhança são feitos estudos em modelos análogos de gravitação [35, 36, 37, 38].

O tensor constitutivo em geral é função do espaço  $x$  e do tempo  $t$ , ou seja,  $\chi = \chi(x, t)$ . Um meio material homogêneo requer que essa dependência no espaço e tempo não ocorra, ao contrário de um meio inhomogêneo onde essa dependência deve aparecer. Ressaltando que a dependência temporal está relacionada com a dependência da frequência. Em modelos análogos de gravidade, para o espaço-tempo vazio, o tensor  $\chi$  deve ser constante se um espaço-tempo de Minkowski e coordenadas Cartesianas são prescri-

tas. Assumindo um espaço-tempo Riemanniano da relatividade geral ou uma variedade 4-dimensional diferenciável,  $\chi$  dependerá da posição no espaço-tempo [39].

A seguir, vejamos como se decompõe o tensor  $G^{\mu\nu}$  em função dos tensores  $\chi^{\mu\nu\beta\sigma}$  e  $F_{\beta\sigma}$ . Abrindo seus componentes em espaço e tempo temos

$$G^{0i} = \chi^{0i0k} F_{0k} + \frac{1}{2} \chi^{0ijk} F_{jk} . \quad (2.4)$$

Assim

$$D^i = -\frac{1}{c^2} \chi^{0i0k} E^k + \frac{1}{2c} \chi^{0ijk} \epsilon^{jkl} B^l , \quad (2.5)$$

podendo ser reescrita como

$$D^i = \varepsilon^{ik} E^k + \gamma^{il} B^l . \quad (2.6)$$

O campo  $D^i$  é o campo de deslocamento elétrico. Quando um campo elétrico é aplicado num meio, este responde com campos de polarização como um resultado das cargas de polarização das moléculas que os constituem, sejam elas polares ou não. A resposta macroscópica do efeito dos campos aplicados é o campo de deslocamento elétrico. No caso de um meio anisotrópico, como pode ser visto de (2.6), esse campo tem contribuição da resposta ao campo magnético aplicado.

Ainda na análise dos componentes do campo  $G^{\mu\nu}$ ,

$$G^{ij} = \chi^{ij0k} E^k - \frac{1}{2} \chi^{ijkl} \epsilon^{klm} B^m . \quad (2.7)$$

Abrindo  $G^{ij}$  e contraindo toda esta equação com  $\epsilon_{ijp}$

$$H_p = -\frac{1}{2c} \epsilon_{ijp} \chi^{ij0k} E^k + \frac{1}{4} \epsilon_{ijp} \epsilon^{klm} \chi^{ijkl} B^m . \quad (2.8)$$

Subindo todos os índices,

$$H^p = -\frac{1}{2c} \epsilon^{ijp} \chi^{ij0k} E^k + \frac{1}{4} \epsilon^{ijp} \epsilon^{klm} \chi^{ijkl} B^m , \quad (2.9)$$



de modo que

$$H^p = -\gamma^{pk\dagger} E^k + \zeta^{pn} B^n, \quad (2.10)$$

onde  $\zeta^{ik} = (\mu^{-1})^{ik}$  é a inversa do tensor de permeabilidade magnética.

O campo  $H^p$  é denominado campo de indução magnética. Ele é o campo resposta à aplicação de um campo magnético num meio susceptível ao campo magnético. Ele é um campo macroscópico que leva em conta as correntes de magnetização do meio. No caso de anisotropia do meio ele sofre contribuição do setor elétrico.

Nas equações (2.6) e (2.10) usamos as relações

$$\begin{aligned} \varepsilon^{ik} &= -\frac{1}{c^2} \chi^{0i0k}, \\ \gamma^{il} &= \frac{1}{2c} \chi^{0ijk} \epsilon^{jkl}, \\ \gamma^{pk\dagger} &= \frac{1}{2c} \epsilon^{ijp} \chi^{ij0k}, \\ \zeta^{pn} &= \frac{1}{4} \epsilon^{ijp} \epsilon^{kln} \chi^{ijkl}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Os índices latinos assumem valores  $i, j, k, .. = 1, 2, 3$ . A partir de (2.11) é fácil notar que (2.3) possui 21 elementos independentes, e é decomposta em quatro sub-matrizes  $3 \times 3$ .

De modo que:

$$\begin{pmatrix} D^1 \\ D^2 \\ D^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{11} & \varepsilon^{12} & \varepsilon^{13} \\ \varepsilon^{*21} & \varepsilon^{22} & \varepsilon^{23} \\ \varepsilon^{*31} & \varepsilon^{*32} & \varepsilon^{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^1 \\ E^2 \\ E^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma^{11} & \gamma^{12} & \gamma^{13} \\ \gamma^{21} & \gamma^{22} & \gamma^{23} \\ \gamma^{31} & \gamma^{32} & \gamma^{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^1 \\ B^2 \\ B^3 \end{pmatrix}, \quad (2.12)$$

$$\begin{pmatrix} H^1 \\ H^2 \\ H^3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \gamma^{*11} & \gamma^{*21} & \gamma^{*31} \\ \gamma^{*12} & \gamma^{*22} & \gamma^{*32} \\ \gamma^{*13} & \gamma^{*23} & \gamma^{*33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^1 \\ E^2 \\ E^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \zeta^{11} & \zeta^{12} & \zeta^{13} \\ \zeta^{*21} & \zeta^{22} & \zeta^{23} \\ \zeta^{*31} & \zeta^{*32} & \zeta^{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^1 \\ B^2 \\ B^3 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

As matrizes  $\varepsilon^{ij}$  e  $\zeta^{ij}$  são associadas a permissividade elétrica e a inversa da permeabilidade magnética, respectivamente. Os coeficientes reais de  $\varepsilon^{ij}$  e  $\zeta^{ij}$  são relacionados à birrefringência, já os imaginários estão associados ao efeito Faraday (dielétrico e magnético, respectivamente) [34]. As partes reais das matrizes  $\gamma^{ik}$  e  $\gamma^{*ki}$ , representam o efeito

Fresnel-Fizeau, enquanto que os coeficientes imaginários são identificados com a atividade óptica natural [34].

- Birrefringência

Um material birrefringente é caracterizado por possuir dois eixos ortogonais ao longo dos quais o índice de refração é diferente, ou seja, este efeito surge em um material anisotrópico. Um destes eixos é denominado eixo ótico, onde um feixe de luz que se propague ao longo deste eixo é denominado feixe ordinário. Enquanto o feixe que se propaga ao longo do eixo perpendicular é chamado feixe extraordinário. A diferença dos índices de refração dos dois eixos provoca uma diferença de fase entre as duas componentes do feixe. A diferença de fase é associada à diferença no tempo entre os feixes ao percorrer o material. A diferença de fase implicará na diferença entre os estados de polarização incidente e emergente [40]. Este efeito também pode aparecer num meio com simetria rotacional [34].

- Efeito Faraday

Neste efeito, a maneira que a luz se propaga num meio material é influenciada pela aplicação de um campo magnético externo. Dado um feixe linear de luz incidente em um meio, um campo magnético aplicado na direção de propagação do feixe provoca rotação do plano de vibração da luz [40]. Este é um efeito essencialmente dispersivo e não-recíproco<sup>1</sup>. Os dois efeitos Faraday podem ocorrer simultaneamente [34, 41].

- Atividade óptica natural

Outro efeito associado à anisotropia. Um material com esta característica é dito ser opticamente ativo. Este efeito consiste de uma rotação do plano de vibração de um feixe de luz linear que se propaga ao longo do eixo óptico do material. Desde que um feixe de luz possa ser representado por uma superposição de estados<sup>2</sup>  $R$  e  $L$ , ele indica que as duas formas de polarização circular da luz se propaguem com diferentes velocidades. Nesta situação a atividade óptica natural apresenta uma

---

<sup>1</sup>Um material é dito recíproco se as equações de campos possuem simetria por inversão temporal.

<sup>2</sup>Polarização circular direita (*right-handed*) e polarização circular esquerda (*left-handed*).

birrefringência circular [40]. Como a velocidade de propagação da luz no meio está relacionado com o índice de refração, então, temos índices de refração diferentes para cada tipo de polarização. Este fenômeno é essencialmente dispersivo.

- Efeito Fresnel-Fizeau

Este efeito está relacionado a propagação da luz num meio em movimento. Como os campos elétrico e magnético não são objetos covariantes, eles serão influenciados pelo movimento do meio, junto com os campos deslocamento elétrico e indução magnética.

Seguindo com a descrição tensorial da eletrodinâmica em meios materiais. Apesar da relação (2.2) ser de maior uso e utilidade, para desenvolvimentos futuros, será útil definir uma relação inversa para (2.2). Segue então que

$$F^{\alpha\gamma} = \frac{1}{2}\bar{\chi}^{\alpha\gamma\mu\nu}G_{\mu\nu} , \quad (2.14)$$

onde o tensor  $\bar{\chi}^{\mu\nu\beta\sigma}$  é o recíproco<sup>3</sup> de  $\chi^{\mu\nu\beta\sigma}$ . Onde deve ser obedecida a seguinte relação entres os campos estruturais tensoriais,  $\bar{\chi}^{\alpha\gamma\mu\nu}\chi_{\beta\sigma\mu\nu} = 2(\delta_{\beta}^{\alpha}\delta_{\sigma}^{\gamma} - \delta_{\beta}^{\gamma}\delta_{\sigma}^{\alpha})$ . Utilizando os mesmos procedimentos usados em (2.2) para abrir (2.14) em componentes temos que

$$E^i = -c^2\bar{\chi}^{0i0k}D^k + \frac{c}{2}\bar{\chi}^{0ijk}\epsilon^{jkl}H^l , \quad (2.15)$$

e, fazendo as devidas identificações, chegamos a

$$E^i = \bar{\epsilon}^{ik}D^k + \bar{\gamma}^{il}H^l . \quad (2.16)$$

---

<sup>3</sup>Em [42], ele é definido como  $\chi_{\alpha\gamma\mu\nu}$ , este é considerado como um tensor de peso  $-1$  e a relação inversa é definida como  $F_{\alpha\gamma} = \frac{1}{2}\chi_{\alpha\gamma\mu\nu}G^{\mu\nu}$ , onde na literatura  $\chi^{\alpha\gamma\mu\nu}$  é tratado sempre com índices em cima e tem peso  $+1$ . Neste trabalho, preferimos subir e baixar os índices desses tensores normalmente, independente do peso atribuído a eles. No entanto, sempre que formos abri-los em componentes do espaço-tempo manteremos os índices sempre em cima, para os tensores serem descritos num espaço Euclidiano e não haver problemas com os sinais.

A outra componente

$$B^p = -\frac{c}{2}\epsilon^{ijp}\bar{\chi}^{ij0k}D^k + \frac{1}{4}\epsilon^{ijp}\epsilon^{klm}\bar{\chi}^{ijkl}B^l. \quad (2.17)$$

Ou ainda,

$$B^p = -\bar{\gamma}^{pk\dagger}D^k + \mu^{pk}H^k. \quad (2.18)$$

Identificamos  $\bar{\epsilon}^{ik} = (\epsilon^{-1})^{ik}$ ,  $\bar{\gamma}^{il} = (\gamma^{-1})^{il}$  e  $\bar{\gamma}^{pk\dagger} = (\gamma^{-1})^{pk\dagger}$ . Nas equações (2.16) e (2.18) usamos as relações

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}^{ik} &= -c^2\bar{\chi}^{0i0k}, \\ \bar{\gamma}^{il} &= \frac{c}{2}\bar{\chi}^{0ijk}\epsilon^{jkl}, \\ \bar{\gamma}^{pk\dagger} &= \frac{c}{2}\epsilon^{ijp}\bar{\chi}^{ij0k}, \\ \mu^{pn} &= \frac{1}{4}\epsilon^{ijp}\epsilon^{klm}\bar{\chi}^{ijkl}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

De posse das definições apresentadas anteriormente, as equações de Maxwell escritas covariantemente para meios materiais apresentam as seguintes formas

$$\begin{aligned} \partial_\nu G^{\nu\mu} &= j^\mu, \\ \partial_{[\nu}F_{\beta\sigma]} &= 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Estas equações são válidas num espaço-tempo de Minkowski (em qualquer sistema de coordenadas), num espaço-tempo Riemanniano, e mesmo no espaço-tempo de Riemann-Cartan da teoria de calibre da gravitação para o grupo de Poincaré. Pode-se dizer que este formalismo para o tratamento da eletrodinâmica pode ter grande utilidade para aplicar à eletrodinâmica em referenciais acelerados [39].

É fácil notar da primeira equação de (2.20) que o tensor constitutivo deve ter unidades de inverso da permeabilidade magnética. Para abrir essas equações em componentes utilizemos as relações definidas por (A.7). Assim, seguem-se facilmente as equações de

Maxwell em meios materiais,

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho , \\
\vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} , \\
\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 , \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 ,
\end{aligned} \tag{2.21}$$

com  $\rho$  e  $\vec{j}$  representando a densidade de carga livre e densidade de corrente livre, respectivamente.

É possível construir uma ação de forma que seja possível obter a primeira equação de (2.20), tal ação é chamada de ação Minkowski-Maxwell [34]. Como também queremos trabalhar com férmions, vamos impor a seguinte ação

$$S = S_0 + S_{int} + S_{MM}, \tag{2.22}$$

onde  $S_0$  é ação de Dirac,  $S_{int}$  é a ação de interação, e a ação  $S_{MM}$  é a ação de Minkowski-Maxwell.

$$\begin{aligned}
S_0 &= \int d^4x \bar{\psi} (i\hbar c \gamma^\mu \partial_\mu - mc^2) \psi , \\
S_{int} &= -e \int d^4x \bar{\psi} \gamma^\mu A_\mu \psi , \\
S_{MM} &= -\frac{1}{4} \int d^4x G^{\mu\nu} F_{\mu\nu} .
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Neste caso, os férmions de Dirac num meio material só interagem com o campo eletromagnético, não estamos considerando interação com o meio material ou seja, eles são os férmions de condução, serão os responsáveis pela corrente elétrica. De posse dessa ação, podemos obter as seguintes equações do movimento para o campo espinorial

$$\begin{aligned}
(i\gamma^\mu D_\mu - m_0)\psi &= 0 , \\
\bar{\psi}(i\gamma^\mu \overleftarrow{D}_\mu^\dagger + m_0) &= 0 ,
\end{aligned} \tag{2.24}$$

a derivada covariante é definida em (1.5). Para o campo eletromagnético, as equações obtidas de (2.22) são identificadas com (2.20), onde  $j^\mu$  corresponde à equação (1.8). A simetria  $U(1)$  local é caracterizada pelo conjunto de transformações

$$\begin{aligned}\delta_g \psi &= -\frac{ie}{\hbar c} \alpha \psi , \\ \delta_g \bar{\psi} &= \frac{ie}{\hbar c} \bar{\psi} \alpha , \\ \delta_g A_\mu &= \partial_\mu \alpha ,\end{aligned}\tag{2.25}$$

onde  $\alpha$  é um parâmetro dependente da posição no espaço-tempo. Lembrando que o tensor  $\chi$  é o campo estrutural, ele não sofre transformações de calibre, enquanto que os campos  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$  e  $A_\mu$ , são campos funcionais e estão sujeitos às transformações de calibre.

As transformações quirais dos campos são as mesmas mostradas em (1.10). Então, a corrente quiral não conservada é descrita pela equação (1.11).

## 2.2 Simetrias sob o grupo de estabilidade $L(1, 3)$

As transformações de simetria dos campos só dependem dos respectivos campos e do grupo de simetria em questão, independentemente dos tipos de acoplamentos entre os campos da teoria tratada. Portanto, as transformações sob o grupo  $L(1, 3)$  para o campo de Dirac e o campo de calibre estudadas na seção 1.3 permanecem inalteradas. Deste modo, como a ação de Dirac permanece a mesma no caso de meios materiais, a corrente de Bargmann-Wigner fermiônica é descrita pela expressão (1.26).

Como a ação para o campo eletromagnético foi modificada, espera-se que a corrente de Bargmann-Wigner bosônica também seja. Então, usando as equações (1.9) e (1.29), é possível mostrar que a corrente de Bargmann-Wigner para o setor bosônico em meios materiais é descrita pela seguinte equação

$$T_{bm}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} G^{\mu\alpha} \tilde{F}_\alpha{}^\nu ,\tag{2.26}$$

onde o índice  $m$  caracteriza a corrente em meios materiais. Logo, a corrente de Bargmann-

Wigner total conservada é

$$T_m^{\mu\nu} = T_f^{\mu\nu} + T_{bm}^{\mu\nu} \quad | \quad \partial_\mu T_m^{\mu\nu} = 0 . \quad (2.27)$$

Dos resultados obtidos até aqui, vemos que só existe distinção entre as correntes de spin no vácuo e na matéria no setor bosônico. Para entender isto, perceba que as transformações dos campos sob o grupo  $L(1, 3)$  não são alteradas, independente da teoria, ou seja, estas transformações são intrínsecas dos campos. A partir de (1.9), como estamos considerando só transformações nos campos, a parte que contribui para corrente de Bargmann-Wigner envolve somente transformações nos campos e suas derivadas. A partir de (2.2), nota-se a forma como o campo eletromagnético se comporta em um meio material arbitrário, ou seja, o campo  $F$  sofre uma torção através do tensor  $\chi$ . Ainda, o tensor  $\chi$  está acoplado às derivadas do campo fundamental da teoria eletromagnética, que é o campo de calibre  $A_\mu$ , como comentado no capítulo 1 desta dissertação. Este é um fato que independe de outros campos na teoria, pois isto é intrínseco da descrição covariante das equações de Maxwell em meios materiais, de forma a obtermos as equações de Maxwell corretas.

Para entender o setor fermiônico, perceba que os férmions de Dirac foram introduzidos na teoria de forma convencional, ou seja, foi feito um acoplamento mínimo com o campo eletromagnético através do potencial eletromagnético. Aqui, nos propomos a apresentar a corrente que surge nas equações de Maxwell através da introdução de campos portadores de carga elétrica, nesta situação, campos de Dirac. Como comentamos, a alteração da corrente de Bargmann-Wigner só é possível se acoplarmos termos novos nas derivadas dos campos. Para o campo eletromagnético foi possível devido as características antissimétricas dos tensores  $F$  e  $\chi$ . Para o campo de Dirac isto não é possível, perceba através de  $S_0$  que não é possível acoplar o tensor  $\chi$  com termos de derivadas de  $\psi$ . Isto pelo fato da simetria das derivadas, e ainda, se levarmos em conta as partes simétricas de  $\chi$  precisaríamos de derivadas de segunda ordem nos campos  $\psi$ , o que não é usual no formalismo das teorias de campos fermiônicos. Além disso, estaríamos fazendo outra teoria<sup>4</sup>, e não uma teoria de Dirac.

---

<sup>4</sup>A equação (2.2) é só uma forma auxiliar para o tratamento da teoria de Maxwell em meios materiais,

## 2.3 Restaurando a invariância de calibre da corrente de Bargmann-Wigner

Como a corrente de Bargmann-Wigner fermiônica é a mesma, a questão da invariância de calibre dessa corrente foi tratada na seção 1.4. Foi mostrado que a equação (1.26) não era invariante de calibre. Tal fato nos levou a obter a corrente invariante de calibre mostrada em (1.34), onde esta corrente apresentou quebra da equação da continuidade, como pode ser visto em (1.41).

A alteração da corrente de Bargmann-Wigner bosônica nos obriga a estudar a 4-divergência da equação (2.26). Então

$$\partial_\mu T_{bm}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\mu G^{\mu\alpha}) \tilde{F}_\alpha{}^\nu + \frac{1}{2} G_{\mu\alpha} \partial^\mu \tilde{F}^{\alpha\nu} , \quad (2.28)$$

$$\partial_\mu T_{bm}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} j^\alpha \tilde{F}_\alpha{}^\nu + \frac{1}{4} G_{\mu\alpha} \left( \partial^\mu \tilde{F}^{\alpha\nu} - \partial^\alpha \tilde{F}^{\mu\nu} \right) , \quad (2.29)$$

onde foi utilizada (2.20) e antissimetrizamos o segundo termo. De posse dessa equação, identificamos o segundo termo com (1.43), seguindo os mesmos passos apresentados na seção 1.3, ou seja, utilizando (1.43) e o penúltimo termo de (1.45), é possível mostrar que<sup>5</sup>

$$\partial_\mu T_{bm}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} j_\alpha \tilde{F}^{\alpha\nu} + \frac{1}{3!} G^{\mu\alpha} \epsilon^\nu{}_{\mu\alpha\gamma} \partial_\sigma F^{\sigma\gamma} . \quad (2.30)$$

Utilizando a equação (2.14), a expressão (2.30) pode ser reescrita como

$$\partial_\mu T_{bm}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} j_\alpha \tilde{F}^{\alpha\nu} + \frac{1}{12} G^{\mu\alpha} \epsilon^\nu{}_{\mu\alpha\gamma} \partial_\sigma (\bar{\chi}^{\sigma\gamma\beta\delta} G_{\beta\delta}) . \quad (2.31)$$

Aqui as derivadas atuam tanto no tensor de curvatura  $G_{\beta\delta}$  como no campo estrutural  $\bar{\chi}^{\sigma\gamma\beta\delta}$  (Neste caso, se o material for não uniforme). Num meio uniforme, as derivadas sobre  $\bar{\chi}^{\sigma\gamma\beta\delta}$  serão imediatamente nulas, mas se feitas em relação a um sistema de coordenadas Cartesiano [34].

---

não se trata de uma nova teoria eletromagnética [34].

<sup>5</sup>Esta equação poderia ser escrita como  $\partial_\mu T_{bm}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \tilde{F}^{\alpha\nu} + \frac{1}{4} \epsilon_\alpha{}^{\nu\beta\sigma} G^{\mu\alpha} \partial_\mu F_{\beta\sigma}$ . Contudo, o limite para o caso de vácuo não é fácil de visualizar imediatamente nesta equação.



## 2.4 Componentes do setor bosônico na matéria

Na seção anterior mostramos que não ocorreu alteração na corrente de Bargmann-Wigner fermiônica nem em sua 4-divergência, então segue imediatamente que as componentes no espaço e tempo dessas quantidades não são alteradas, apresentando as mesmas formas mostradas na subseção 1.5.1. Vejamos agora como é decomposta a corrente bosônica em meios materiais:

$$\begin{aligned}
T_{bm}^{00} &= \frac{c}{2} \vec{D} \cdot \vec{B} = c\mathcal{M} , \\
T_{bm}^{0i} &= -\frac{1}{2} \left( \vec{D} \times \vec{E} \right)^i = c\mathcal{N}^i , \\
T_{bm}^{i0} &= -\frac{1}{2} \left( \vec{H} \times \vec{B} \right)^i = \mathcal{M}^i , \\
T_{bm}^{ij} &= -\frac{c}{2} \left( \vec{D} \vec{B} \right)^{ij} - \frac{1}{2c} \left( \vec{E} \cdot \vec{H} \right) \delta^{ij} + \frac{1}{2c} \left( \vec{E} \vec{H} \right)^{ij} = \mathcal{N}^{ij} , \quad (2.32)
\end{aligned}$$

onde usamos na última equação de (2.32) a notação  $A^i C^j = \left( \vec{A} \vec{C} \right)^{ij}$ . Vemos claramente que no caso de um meio com anisotropia a segunda e a terceira equações de (2.32) não são imediatamente nulas. Neste caso, os campos  $\vec{D}$  e  $\vec{H}$  não são somente funções de  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , respectivamente. Ocorre uma mistura entre os campos, como vemos em (2.6) e (2.10). Nesta situação, mesmo em uma onda eletromagnética, cujos campos elétrico e magnético são mutualmente ortogonais,  $T_m^{\mu\nu}$  não será imediatamente nulo, justamente pelo fato da mistura entre os campos acima mencionados.

Vejamos agora a decomposição da 4-divergência  $\partial_\mu T_{bm}^{\mu 0} = \partial_0 T_{bm}^{00} + \partial_i T_{bm}^{i0}$ . Neste caso, a equação (2.31) se decompõe como

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t} + \partial_i \mathcal{M}^i = -\frac{1}{2} j^i B^i + \\
&-\frac{1}{3} \left[ -H^i \frac{\partial}{\partial t} \left( \bar{\chi}^{0i0k} D^k \right) - H^i \partial_l \left( c \bar{\chi}^{li0k} D^k \right) + H^i \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2c} \bar{\chi}^{0ijk} \epsilon^{jkm} H^m \right) \right] + \\
&-\frac{1}{3} H^i \partial_l \left( \frac{1}{2} \bar{\chi}^{lijk} \epsilon^{jkm} H^m \right) , \quad (2.33)
\end{aligned}$$

no último termo desta equação usemos

$$\frac{1}{2}\bar{\chi}^{lijk}\epsilon^{jkm} = \frac{1}{4}\bar{\chi}^{rsjk}\epsilon^{rst}\epsilon^{lit}\epsilon^{jkm} . \quad (2.34)$$

Fazendo uso da equação (2.19), é simples mostrar então que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t} + \partial_i \mathcal{M}^i &= -\frac{1}{2}j^i B^i + \\ &- \frac{1}{3}H^i \left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\epsilon}^{ik} D^k + \bar{\gamma}^{ik} H^k) - \epsilon^{ilp} \partial_l (-\bar{\gamma}^{pk} D^k + \mu^{pk} H^k) \right] . \end{aligned} \quad (2.35)$$

Esta equação pode ainda ser escrita de uma forma mais compacta. Usando as equações (2.16) e (2.18),

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t} + \partial_i \mathcal{M}^i = -\frac{1}{2}j^i B^i - \frac{1}{3}H^i \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial E^i}{\partial t} - \epsilon^{ilp} \partial_l B^p \right) . \quad (2.36)$$

Pela equação (2.35), além das derivadas atuarem nos campos elas também podem atuar nos coeficientes estruturais, ou seja, os coeficientes estruturais podem depender da posição no espaço-tempo.

Ainda resta-nos decompor a 4-divergência  $\partial_\mu T_{bm}^{\mu j} = \partial_0 T_{bm}^{0j} + \partial_i T_{bm}^{ij}$ . Neste caso, (2.31) é decomposta como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{N}^j}{\partial t} + \partial_i \mathcal{N}^{ij} &= -\frac{1}{2} \left[ c\rho B^j - \frac{1}{c} (\vec{j} \times \vec{E})^j \right] + \\ &+ \frac{1}{3} \left[ D^i \epsilon^{jik} \frac{\partial}{\partial t} (c\bar{\chi}^{0k0m} D^m) + D^i \epsilon^{jik} \partial_n (c^2 \bar{\chi}^{nk0m} D^m) - D^i \epsilon^{jik} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \bar{\chi}^{0klm} \epsilon^{lmp} H^p \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{3} \left[ -c D^i \epsilon^{jik} \partial_n \left( \frac{1}{2} \bar{\chi}^{nklm} \epsilon^{lmp} H^p \right) - H^j \partial_n (c\bar{\chi}^{0n0m} D^m) + H^j \partial_n \left( \frac{1}{2} \bar{\chi}^{0nlm} \epsilon^{lmp} H^p \right) \right] , \end{aligned} \quad (2.37)$$

no primeiro termo da última linha desta equação usemos

$$\frac{1}{2}\bar{\chi}^{nklm}\epsilon^{lmp} = \frac{1}{4}\bar{\chi}^{rslm}\epsilon^{rst}\epsilon^{nkt}\epsilon^{lmp} . \quad (2.38)$$

Logo, a partir de (2.19)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{N}^j}{\partial t} + \partial_i \mathcal{N}^{ij} = & -\frac{1}{2} \left[ c\rho B^j - \frac{1}{c} \left( \vec{j} \times \vec{E} \right)^j \right] + \frac{1}{3c} H^j \partial_n (\bar{\epsilon}^{mn} D^n + \bar{\gamma}^{mn} H^n) + \\ & -\frac{1}{3} c D^i \epsilon^{jik} \left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\epsilon}^{km} D^m + \bar{\gamma}^{km} H^m) - \epsilon^{knp} \partial_n (-\bar{\gamma}^{pm} D^m + \mu^{pm} H^m) \right] . \end{aligned} \quad (2.39)$$

Utilizando (2.16) e (2.18), esta equação pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{N}^j}{\partial t} + \partial_i \mathcal{N}^{ij} = & -\frac{1}{2} \left[ c\rho B^j - \frac{1}{c} \left( \vec{j} \times \vec{E} \right)^j \right] + \frac{1}{3c} H^j \partial_n E^n + \\ & -\frac{1}{3} c D^i \epsilon^{jik} \left[ \frac{1}{c^2} \frac{\partial E^k}{\partial t} - \epsilon^{knp} \partial_n B^p \right] . \end{aligned} \quad (2.40)$$

Esta é a forma mais geral para  $\partial_\mu T_b^{\mu j}$ . De posse de todas as componentes mais gerais possíveis, tanto no setor da corrente como o setor das 4-divergências, como um teste padrão, vejamos se esses resultados são consistentes, ou seja, se o limite trivial (que é o vácuo) é recuperado.

### 2.4.1 Estudando os limites para um meio homogêneo e isotrópico

Tomando um meio homogêneo como limite, a equação (2.32) pode ser posta na seguinte forma,

$$\begin{aligned} T_{bm}^{00} &= \frac{c\varepsilon}{2} \vec{E} \cdot \vec{B} = \varepsilon_r T_b^{00} , \\ T_{bm}^{0i} &= T_{bm}^{i0} = 0 , \\ T_{bm}^{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon_0 c}{\mu_r} - \frac{\varepsilon_r}{\mu_0 c} \right) \left( \vec{E} \vec{B} \right)^{ij} - \frac{\varepsilon_0 c}{2\mu_r} \left( \vec{E} \cdot \vec{B} \right) \delta^{ij} , \end{aligned} \quad (2.41)$$

onde  $\varepsilon_r = \varepsilon/\varepsilon_0$  e  $\mu_r = \mu/\mu_0$  correspondem a permissividade elétrica e permeabilidade magnética relativas, respectivamente. Quando os campos elétrico e magnético forem ortogonais entre si, diferente do caso no vácuo, temos um setor da corrente que não será imediatamente nulo, que é o caso do primeiro termo da última equação de (2.41). Note que, se  $\varepsilon_r = \mu_r = 1$ , a equação (1.53) é recuperada.

Agora trabalhemos com a condição  $\partial_\mu T_{bm}^{\mu 0}$ . Neste caso a contribuição para a divergência será

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t} + \partial_i \mathcal{M}^i = -\frac{1}{2} j^i B^i - \frac{1}{3} H^i \left( \frac{1}{c^2 \varepsilon} \frac{\partial D^i}{\partial t} - \mu \epsilon^{ilp} \partial_l H^p \right),$$

utilizando (2.21) facilmente mostra-se

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t} + \partial_i \mathcal{M}^i = -\frac{1}{6} j^i B^i - \frac{c^2}{3} (1 - \mu_r \varepsilon_r) B^i \frac{\partial E^i}{\partial t}. \quad (2.42)$$

No limite de vácuo, *i.e.*,  $\mu_r = \varepsilon_r = 1$ , a primeira equação de (1.54) é recuperada.

Agora a situação  $\partial_\mu T_{bm}^{\mu j}$ . Nesta situação os termos que contribuirão serão:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{N}^j}{\partial t} + \partial_i \mathcal{N}^{ij} &= -\frac{1}{2} \left[ c \rho B^j - \frac{1}{c} \left( \vec{j} \times \vec{E} \right)^j \right] + \frac{1}{3c\varepsilon} H^j \partial_n D^n + \\ &\quad - \frac{1}{3} c D^i \epsilon^{jik} \left[ \frac{1}{c^2 \varepsilon} \frac{\partial D^k}{\partial t} - \mu \epsilon^{knm} \partial_n H^m \right], \end{aligned} \quad (2.43)$$

logo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{N}^j}{\partial t} + \partial_i \mathcal{N}^{ij} &= -\frac{1}{2} \left[ c \rho B^j - \frac{1}{c} \left( \vec{j} \times \vec{E} \right)^j \right] - \frac{1}{3} \mu c \left( \vec{j} \times \vec{D} \right)^j + \frac{1}{3} \frac{\rho}{c\varepsilon} H^j + \\ &\quad + \frac{c\varepsilon}{3} \left( \frac{1}{c^2} - \mu \varepsilon \right) \epsilon^{jik} E^i \frac{\partial E^k}{\partial t}, \end{aligned} \quad (2.44)$$

rearranjando os termos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{N}^j}{\partial t} + \partial_i \mathcal{N}^{ij} &= \left( \frac{1}{3\mu_r \varepsilon_r} - \frac{1}{2} \right) c \rho B^j - \frac{1}{c} \left( \vec{j} \times \vec{E} \right)^j \left( \frac{\mu_r \varepsilon_r}{3} - \frac{1}{2} \right) \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{3c} (1 - \mu_r \varepsilon_r) \epsilon^{jik} E^i \frac{\partial E^k}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Assim, se  $\mu_r = \varepsilon_r = 1$ , recupera-se a segunda equação de (1.54).

## 2.5 Condições para conservação da corrente de Bargmann-Wigner

Como já tratamos anteriormente, a corrente (2.27) era uma quantidade conservada, visto que, ela é produto de uma simetria da ação (2.22). No entanto, sua não invariância de calibre obrigou-nos a definir (2.32), corrente invariante de calibre, mas não-conservada. Seria interessante que, além de grandezas invariantes de calibre, tivéssemos grandezas conservadas. Para isso, devemos impor que a 4-divergência da equação (2.32) seja nula. Analisemos separadamente o setor fermiônico e bosônico da teoria.

### 2.5.1 Conservação da corrente do setor fermiônico

Como queremos correntes conservadas, vamos impor que a segunda equação de (1.52) satisfaça a equação da continuidade. Então

$$\vec{E} = -\frac{c}{S_0} \vec{S} \times \vec{B} . \quad (2.46)$$

Assim, a solução da equação de Dirac, por exemplo, para um campo magnético perpendicular a corrente  $\vec{S}$ , nos fornece a estrutura de  $\vec{S}$ , e por sua vez, nos permitirá avaliar o campo elétrico. Deste modo, podemos impor vínculos para  $\vec{E}$ . Note que, neste caso  $\vec{E}$  e  $\vec{S}$  são mutuamente ortogonais. Assim, a primeira equação de (1.52) satisfaz imediatamente a condição de conservação, visto que  $\vec{S} \cdot \vec{E} = 0$ , mostrando consistência nos vínculos.

### 2.5.2 Conservação da corrente do setor bosônico em meios dielétricos

Mostramos anteriormente que  $\partial_\mu T_{bm}^{\mu\nu}$  quando decomposta no espaço e tempo nos fornece duas equações de continuidades violadas, são elas: (2.36) e (2.40), válidas para

meios gerais. Impondo a condição de conservação para  $\partial_\mu T_{bm}^{\mu\nu}$ , a partir da equação (2.36):

$$\frac{1}{2} \vec{j} \cdot \vec{B} + \frac{1}{3} \vec{H} \cdot \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times \vec{B} \right) = 0. \quad (2.47)$$

Um segundo vínculo pode ser extraído de (2.40):

$$-\frac{1}{2} \left[ c\rho \vec{B} - \frac{1}{c} (\vec{j} \times \vec{E}) \right] + \frac{1}{3c} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{H} - \frac{1}{3} c \vec{D} \times \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times \vec{B} \right) = 0. \quad (2.48)$$

Contudo, nos restringimos a estudar a conservação da corrente bosônica em meios dielétricos. Meios dielétricos são aqueles que possuem densidades de carga e corrente nulas, ou seja,  $\rho = 0$  e  $\vec{j} = 0$ , senão, muito próximas disso. Na teoria aqui tratada, os férmions em questão são férmions de Dirac, *i.e.*, férmions massivos e portadores de carga elétrica, cujo spinor  $\psi$  possui quatro componentes, onde este é decomposto em dois spinores de duas componentes, descrevendo elétrons e pósitrons. Então, se não temos nem densidade de carga nem corrente a teoria é livre, não existem férmions. Segue imediatamente que a corrente de spin fermiônica é nula. Então, só podemos ter vínculos oriundos da corrente bosônica. Nesta situação, não precisamos impor condições de conservação para corrente de Bargmann-Wigner, a conservação emerge naturalmente do teorema de Noether, pois a não conservação da corrente de Bargmann-Wigner total surgia pela imposição da invariância de calibre da parte fermiônica da corrente. Na condição de meios dielétricos, a partir de (2.47) teremos o seguinte vínculo.

$$\vec{H} \cdot \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times \vec{B} \right) = 0, \quad (2.49)$$

Este é o vínculo mais geral possível para (2.36). De (2.49), notamos que o campo indução magnética deve ser ortogonal a quantidade entre parênteses. A partir de (2.48), na condição de meios dielétricos, obtemos um segundo vínculo,

$$\vec{H} = \frac{c^2}{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}} \vec{D} \times \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times \vec{B} \right). \quad (2.50)$$

Mas para isso  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \neq 0$ . A quantidade  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$  não pode ser identificada como uma densidade de carga elétrica sobre a permissividade elétrica do meio pois ainda estamos num meio arbitrário com anisotropias. Conclui-se então que  $\vec{H}$ ,  $\vec{D}$  e o termo entre parênteses são todos ortogonais entre si. Ainda, caso (2.50) seja satisfeita, automaticamente o vínculo mostrado pela equação (2.49) é satisfeito, mostrando novamente consistência na imposição de vínculos para conservação das correntes bosônicas.

Os vínculos acima são válidos para meios não-lineares. Assim, devemos ter um suposto material onde as condições para este vínculos já mencionadas acima seja satisfeita, ou seja, quem são  $\epsilon^{ij}$ ,  $(\mu^{-1})^{ij}$ ,  $\gamma^{ij}$  e  $\gamma^{ij\dagger}$ ?

A seguir vejamos situações mais específicas, oriundas da conservação da corrente de Bargmann-Wigner bosônica.

### 1. Meios lineares

Impondo esta condição, podemos usar a equação (2.21) e reescrever a expressão (2.49) como

$$(1 - \mu_r \epsilon_r) \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 . \quad (2.51)$$

Agora, a partir de (2.50),

$$\vec{B} = \mu \epsilon^2 (1 - \mu_r \epsilon_r) \vec{E} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} . \quad (2.52)$$

Veja novamente que os vínculos acima são válidos simultaneamente. Caso os campos elétrico e magnético sejam ortogonais entre si, na situação de meios lineares, a corrente  $T_{bm}^{\mu j}$  será não nula e conservada.

### 2. Meios não-lineares exóticos

Caso tenhamos um material com coeficientes constitutivos  $\epsilon^{ij}$ ,  $(\mu^{-1})^{ij}$ ,  $\gamma^{ij}$  e  $\gamma^{ij\dagger}$  tal

que:

$$\begin{aligned} \vec{H} \cdot \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times \vec{B} \right) &\neq 0, \\ \vec{H} &\neq \frac{c^2}{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}} \vec{D} \times \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times \vec{B} \right), \end{aligned} \quad (2.53)$$

teremos quebra de simetria de Lorentz. Mesmo neste caso, os vínculos de certa forma têm uma relação, visto que, a quebra de simetria ocorre simultaneamente. Nesta situação não podemos descrever as propriedades de um material por um tensor constitutivo de quarta ordem,  $\chi^{\mu\nu\alpha\beta}$ .

3. Vínculo  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$

Com este vínculo, é possível obter mais um vínculo para a conservação da corrente bosônica

$$\vec{D} \times \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \vec{\nabla} \times \vec{B} \right) = 0. \quad (2.54)$$

As quantidades acima são paralelas.



# Capítulo 3

## Teorias de Yang-Mills

Apresentamos nos capítulos anteriores o estudo das simetrias de teorias de calibre Abelianas sob o grupo de estabilidade e as respectivas correntes geradas. Nada mais natural generalizarmos esses estudos às teorias de calibre não-Abelianas, sendo mais específicos, teorias de Yang-Mills. Faremos neste capítulo uma breve discussão acerca das teorias de Yang-Mills. Isto será útil para fixar notações que serão utilizadas ao longo do texto principalmente no tema central desta dissertação.

### 3.1 Teorias de calibre não-Abelianas e suas simetrias

Como já mencionamos, as teorias de calibre tratam das simetrias no espaço interno dos campos. Transformações de simetrias globais implicam numa carga conservada. A hipótese de que a simetria do isospin é uma simetria de calibre local foi primeiramente proposta por C. N. Yang e R. L. Mills em 1954 [43]. As teorias de Yang-Mills generalizam o princípio da invariância de calibre da interação entre cargas elétricas mediadas pelo campo eletromagnético para o caso de isospins interagentes, onde o responsável por esta interação seriam os campos de calibre, ou campos de Yang-Mills.

Podemos descrever uma teoria de calibre em três setores: o setor fermiônico (descrito pelos campos de matéria), o setor de interação (no qual a interação entre férmions é medida por um campo de calibre) e um setor puramente bosônico que envolve somente

os campos de Yang-Mills:

$$S = S_0 + S_{int} + S_{YM} , \quad (3.1)$$

onde  $S_0$  é ação fermiônica,  $S_{int}$  é o termo de interação e  $S_{YM}$  a ação de Yang-Mills,

$$\begin{aligned} S_0 &= \int d^4x \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi , \\ S_{int} &= -g \int d^4x \bar{\psi} \gamma^\mu \mathcal{A}_\mu \psi , \\ S_{YM} &= -\frac{1}{4} \int d^4x F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a . \end{aligned} \quad (3.2)$$

O tensor de curvatura para esta teoria e seu dual são definidos como

$$\begin{aligned} F_a^{\mu\nu} &= \partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu - g f_a^{bc} A_b^\mu A_c^\nu , \\ \tilde{\mathcal{F}}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\beta\sigma} \mathcal{F}_{\beta\sigma} , \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = F_a^{\mu\nu} t^a , \quad (3.4)$$

sendo  $t^a$  os  $N^2 - 1$  geradores das transformações infinitesimais em  $SU(N)$ , são matrizes Hermitianas de traço nulo e obedecem a álgebra de Lie usual

$$[t^a, t^b] = i f_c^{ab} t^c , \quad \{a, b, c\} = \{1, 2, \dots, (N^2 - 1)\} , \quad (3.5)$$

onde  $f_c^{ab}$  são as constantes de estrutura do grupo, reais e totalmente antissimétricas em seus índices. Se  $f_c^{ab} = 0 \forall a, b$  e  $c$ , o grupo é dito Abeliano. A condição de normalização do traço é dada por

$$Tr (t^a t^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab} . \quad (3.6)$$

Ainda, as constantes de estrutura obedecem a identidade de Jacobi.

$$f^{abp} f_p{}^{cq} + f^{cap} f_p{}^{bq} + f^{bcp} f_p{}^{aq} = 0 . \quad (3.7)$$

Como sempre, o termo de interação deve conter um campo de calibre, pois ele

é responsável pela conexão entre os campos. Os campos  $\psi$  são férmions de Dirac<sup>1</sup>. A quantidade  $g$  é a constante de acoplamento dos campos espinoriais com os campos de Yang-Mills. Os campos  $\mathcal{A}^\mu = A_a^\mu t^a$  são os campos de Yang-Mills, escritos como uma combinação linear de  $N^2 - 1$  geradores. Os termos  $A_a^\mu$  descrevem  $N^2 - 1$  campos de calibre envolvidos na teoria.

A partir da ação (3.1) podemos extrair as equações do campo espinorial.

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi &= 0, \\ \bar{\psi}(i\gamma^\mu \overleftarrow{D}_\mu + m) &= 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde a derivada covariante é uma matriz  $D_\mu = \partial_\mu + ig\mathcal{A}_\mu$ . Para o campo de calibre as equações são

$$\begin{aligned} \partial_\nu F^{a\nu\mu} &= g\bar{\psi}\gamma^\mu t^a \psi + gf^{abc} A_{b\nu} F_c^{\nu\mu}, \\ D_\mu \tilde{\mathcal{F}}^{\mu\nu} &= 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

A ação (3.1) é obtida pela imposição da invariância de calibre local para uma teoria de campo [5], ou seja, impondo que  $S_0$  seja invariante por transformações do grupo  $SU(N)$  local, os campos fermiônicos transformam-se da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \psi' &= e^{-ig\alpha_a t^a} \psi, \\ \bar{\psi}' &= \bar{\psi} e^{ig\alpha_a t^a}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Estas transformações podem ser postas na forma infinitesimal,

$$\begin{aligned} \delta_g \psi &= -ig\alpha_a t^a \psi, \\ \delta_g \bar{\psi} &= ig\bar{\psi} \alpha_a t^a, \end{aligned} \quad (3.11)$$

---

<sup>1</sup>Na verdade, nesta teoria os campos de Dirac possuem índices na representação fundamental, *i.e.*,  $\psi_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, \dim R$ , onde  $k$  é um índice de simetria interna e  $\dim R$  é a dimensão da representação do grupo de simetria interna  $G$ . Na teoria de calibre que estamos tratando este grupo é o  $SU(N)$  e  $\dim R = N$ .

onde o operador unitário é definido por  $U = e^{-ig\alpha_a t^a}$  e  $\alpha_a$  é um parâmetro dependente da posição no espaço-tempo. Contudo, para deixar  $S_0$  invariante de calibre a derivada ordinária  $\partial_\mu$  deve ser substituída pela derivada covariante  $D_\mu$ , e esta deve se transformar como matéria,  $D'_\mu \psi' = \exp(-ig\alpha_a t^a) D_\mu \psi$ . Isto leva à seguinte transformação de calibre para o campo de Yang-Mills,

$$\mathcal{A}'_\mu = U \mathcal{A}_\mu U^{-1} + \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^{-1} , \quad (3.12)$$

que, de forma infinitesimal, se reduz a

$$\delta A_\mu^a = D_\mu^{ac} \alpha_c , \quad (3.13)$$

onde  $D_\mu^{ac} = \partial_\mu \delta^{ac} - gf^{abc} A_\mu^b$  é a derivada covariante na representação adjunta. Contudo, o campo  $\mathcal{A}_\mu$  não possui dinâmica própria. Isto é resolvido pela introdução de um termo "cinético", *i.e.*,  $S_{YM}$ . A partir das equações (3.3) e (3.13), é possível mostrar que o tensor de curvatura transforma-se como

$$\mathcal{F}'_{\mu\nu} = U \mathcal{F}_{\mu\nu} U^{-1} , \quad (3.14)$$

ou, infinitesimalmente

$$\delta F_{a\mu\nu} = gf_a^{bc} \alpha_b F_{c\mu\nu} . \quad (3.15)$$

Note que estas transformações deixam  $S_{YM}$  invariante. Percebemos então que a ação (3.1) é construída através das transformações locais dos campos da teoria e a parte do acoplamento entre os campos de matéria e os campos de calibre é contida na derivada covariante. Perceba ainda que  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$  transforma-se covariantemente sob transformações de calibre. Isto não acontece para  $\mathcal{A}_\mu$ , cuja transformação é inhomogênea.

A partir de (3.9) vemos que a corrente  $\bar{g}\psi\gamma^{\mu t^a}\psi$  não é estritamente conservada<sup>2</sup>, a

---

<sup>2</sup>Apesar dessa corrente não ser estritamente conservada, é possível mostrar que ela é conservada covariantemente.

corrente conservada agora é

$$j^{a\mu} = g\bar{\psi}\gamma^\mu t^a\psi + gf^{abc}A_{b\nu}F_c^{\nu\mu} . \quad (3.16)$$

Esta corrente pode ser obtida a partir das transformações globais dos campos da ação (3.1) e fazendo uso de (1.9).

A razão de  $g\bar{\psi}\gamma^\mu t^a\psi$  não ser conservada reside no fato de que, sob uma transformação global, os campos de calibre são não invariantes. Em outras palavras, eles são campos carregados com respeito à simetria de calibre. No contexto da QCD, podemos entender porque a corrente  $g\bar{\psi}\gamma^\mu t^a\psi$  não é conservada. Esta é uma corrente de cor, ou seja, os quarks podem emitir e absorver carga de cor através da emissão e absorção de glúons que também carregam carga de cor. Logo, a carga de cor é conservada levando em conta as cargas dos quarks e dos glúons [44]. Diferentemente do eletromagnetismo, os campos de Yang-Mills são campos carregados e autointeragentes. A autointeração pode ser vista a partir do tensor de curvatura para os campos de Yang-Mills, onde aparece um termo não linear.

Assim como numa teoria de calibre Abelian, podemos definir as transformações quirais para uma teoria de calibre não-Abelian. São elas

$$\begin{aligned} \delta_q\psi &= -i\alpha_a\gamma^5 t^a\psi , \\ \delta_q\bar{\psi} &= -\alpha_a\bar{\psi}t^a\gamma^5 , \\ \delta_q A_{a\mu} &= 0 , \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde  $\alpha_a$  é agora um parâmetro constante. A corrente quiral não-Abelian [8] não conservada é

$$S^{a\mu} = \bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5 t^a\psi , \quad (3.18)$$

de modo que  $D_\mu^{ac}S^{c\mu} = 2im\bar{\psi}\gamma^5 t^a\psi$ . Notamos que a corrente quiral não-Abelian, no caso de férmions não massivos, só é conservada covariantemente.

Depois de uma breve introdução às teorias de Yang-Mills, generalizemos o estudo

das seções 1.3 e 1.4 para teorias de Yang-Mills, vejamos suas consequências e se o limite Abeliano pode ser recuperado.

### 3.2 Simetrias sob o grupo de estabilidade $L(1, 3)$

Usando (1.24), os campos de matéria transformam-se sob o grupo de estabilidade da seguinte forma

$$\begin{aligned}\delta_l \psi &= -i\omega_\mu W_F^\mu \psi , \\ \delta_l \bar{\psi} &= -i\bar{\psi} \overleftarrow{W}_F^\mu \omega_\mu ,\end{aligned}\tag{3.19}$$

onde  $\omega_\mu$  é um parâmetro real e constante e o índice<sup>3</sup> F denota o caráter fermiônico. A partir do teorema de Noether (1.9), a corrente associada a essa simetria é

$$T_F^{\mu\nu} = \bar{\psi} \gamma^\mu W_F^\nu \psi .\tag{3.20}$$

Esta é a corrente de Bargmann-Wigner, lembrando que neste caso temos  $N$  campos  $\psi$ .

Para campos bosônicos devemos usar (1.27). Assim, as transformações sob o grupo de estabilidade para  $A_\alpha^a$  são

$$\delta_l A_\alpha^a = i\omega^\nu W_{B\alpha\nu\sigma} A^{a\sigma} ,\tag{3.21}$$

onde o índice B caracteriza o comportamento bosônico.

$$\delta_l A_\alpha^a = \frac{1}{2} \omega_\nu \epsilon_\alpha^{\nu\sigma\beta} \partial_\beta A_\sigma^a .\tag{3.22}$$

Então, para o campo de calibre a corrente de Bargmann-Wigner é

$$T_B^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_\alpha^{\nu\beta\sigma} F_a^{\mu\alpha} \partial_\beta A_\sigma^a .\tag{3.23}$$

---

<sup>3</sup>Neste capítulo os índices que especificam as correntes para cada tipo de campo serão escritos em letras maiúsculas, a fim de evitar confusão com os índices de grupo.

Logo, do teorema de Noether, a corrente de Bargmann-Wigner total conservada é

$$T^{\mu\nu} = T_F^{\mu\nu} + T_B^{\mu\nu} \quad | \quad \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 . \quad (3.24)$$

### 3.3 Restaurando a invariância de calibre da corrente de Bargmann-Wigner

Apesar da corrente  $T^{\mu\nu}$  ser conservada, ela não é uma quantidade invariante de calibre. O setor fermiônico, como no caso Abelian, quebra a simetria de calibre da corrente de Bargmann-Wigner. Agora até o setor bosônico contribui para a quebra de simetria de calibre, ou seja

$$\delta_g T^{\mu\nu} = \delta_g T_F^{\mu\nu} + \delta_g T_B^{\mu\nu} \neq 0 , \quad (3.25)$$

e assim, a partir do princípio de calibre, ela não pode ser associada a um observável físico. A seguir, iremos mostrar que a quebra da simetria de calibre ocorre nos dois setores, e restaurar a simetria da corrente de Bargmann-Wigner. Iniciemos com o setor fermiônico

$$\begin{aligned} \delta_g T_F^{\mu\nu} &= ig\bar{\psi}\alpha_a t^a W^\nu \psi + \bar{\psi}\gamma^\mu W^\nu (-ig\alpha_a t^a \psi) , \\ \delta_g T_B^{\mu\nu} &= -ig\bar{\psi}\gamma^\mu (W^\nu \alpha_a) t^a \psi . \end{aligned} \quad (3.26)$$

Utilizemos o mesmo método usado nas seções 1.4 e 2.3, ou seja, levemos a derivada ordinária  $\partial_\alpha$  do vetor de Pauli-Lubanski numa derivada covariante  $D_\alpha$ , de modo a termos

$$\mathcal{W}_F^\nu = -\frac{1}{2}\gamma^5\sigma^{\nu\alpha}D_\alpha , \quad (3.27)$$

implicando na seguinte corrente de Bargmann-Wigner para o setor fermiônico

$$\mathcal{T}_F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\sigma^{\nu\alpha}D_\alpha\psi , \quad (3.28)$$

ou então

$$\mathcal{T}_F^{\mu\nu} = T_F^{\mu\nu} + \frac{ig}{2}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\sigma^{\nu\alpha}\mathcal{A}_\alpha\psi, \quad (3.29)$$

A fim de mostrar a invariância de calibre local dessa quantidade, efetuemos uma transformação de calibre

$$\delta_g\mathcal{T}_F^{\mu\nu} = \delta T_F^{\mu\nu} + \frac{ig}{2}\delta\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\sigma^{\nu\alpha}\mathcal{A}_\alpha\psi + \frac{ig}{2}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\sigma^{\nu\alpha}\delta\mathcal{A}_\alpha\psi + \frac{ig}{2}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\sigma^{\nu\alpha}\mathcal{A}_\alpha\delta\psi, \quad (3.30)$$

fazendo uso das equações (3.11) e (3.13)

$$\begin{aligned} \delta_g\mathcal{T}_F^{\mu\nu} &= \frac{ig}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\sigma^{\nu\alpha}(\partial_\alpha\alpha_b)t^b\psi - \frac{g^2}{2}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\sigma^{\nu\alpha}\alpha_b t^b\mathcal{A}_\alpha\psi + \\ &+ \frac{ig}{2}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\sigma^{\nu\alpha}(gf_a^{bc}\alpha_b A_{c\alpha} + \partial_\alpha\alpha_a)t^a\psi + \frac{g^2}{2}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\sigma^{\nu\alpha}\mathcal{A}_\alpha\alpha_b t^b\psi \\ \delta_g\mathcal{T}_F^{\mu\nu} &= -\frac{g^2}{2}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\sigma^{\nu\alpha}[\alpha_b t^b, \mathcal{A}_\alpha]\psi + \frac{ig^2}{2}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\sigma^{\nu\alpha}f_a^{bc}\alpha_b A_{c\alpha}t^a\psi, \end{aligned} \quad (3.31)$$

segue imediatamente que

$$\delta_g\mathcal{T}_F^{\mu\nu} = 0. \quad (3.32)$$

Vejamos agora o setor bosônico. Efetuando uma transformação de calibre na expressão (3.23)

$$\begin{aligned} \delta_g T_B^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\epsilon_\alpha^{\nu\beta\sigma} (g\alpha_b f_a^{bc} F_c^{\mu\alpha}) \partial_\beta A_\sigma^a + \frac{1}{2}\epsilon_\alpha^{\nu\beta\sigma} F_a^{\mu\alpha} \partial_\beta (gf^{abc}\alpha_b A_{c\sigma} + \partial_\sigma\alpha^a), \\ \delta_g T_B^{\mu\nu} &= \frac{g}{2}\epsilon_\alpha^{\nu\beta\sigma} \alpha_b f_a^{bc} F_c^{\mu\alpha} \partial_\beta A_\sigma^a + \frac{g}{2}\epsilon_\alpha^{\nu\beta\sigma} f^{abc} F_a^{\mu\alpha} (\partial_\beta\alpha_b) A_{c\sigma} + \\ &+ \frac{g}{2}\epsilon_\alpha^{\nu\beta\sigma} f^{abc} \alpha_b F_a^{\mu\alpha} \partial_\beta A_{c\sigma} + \frac{1}{2}\epsilon_\alpha^{\nu\beta\sigma} F_a^{\mu\alpha} \partial_\beta \partial_\sigma \alpha^a. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Fazendo a troca de índices  $c \leftrightarrow a$  no terceiro termo desta equação e usando a antissimetria das constantes de estrutura, e ainda, utilizando o fato de que a contração de termos antissimétricos com termos simétricos é nula, obtém-se

$$\delta_g T_B^{\mu\nu} = \frac{g}{2}\epsilon_\alpha^{\nu\beta\sigma} f^{abc} F_a^{\mu\alpha} (\partial_\beta\alpha_b) A_{c\sigma}. \quad (3.34)$$



Como já havíamos comentado, diferentemente do caso Abelian, a corrente bosônica não é invariante de calibre. Antissimetrizando a equação (3.23)

$$T_B^{\mu\nu} = \frac{1}{4} \epsilon_\alpha^{\nu\beta\sigma} F_a^{\mu\alpha} (\partial_\beta A_\sigma^a - \partial_\sigma A_\beta^a) . \quad (3.35)$$

Perceba que, mesmo que substituíssemos a derivada ordinária por uma derivada covariante como no caso férmionico, não obteríamos uma quantidade invariante de calibre. Entretanto, vamos introduzir a quantidade  $-gf^{abc}A_\beta^b A_\sigma^c$  no termo entre parênteses da equação (3.35),

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_B^{\mu\nu} &= \frac{1}{4} \epsilon_\alpha^{\nu\beta\sigma} F_a^{\mu\alpha} (\partial_\beta A_\sigma^a - \partial_\sigma A_\beta^a - gf^{abc}A_\beta^b A_\sigma^c) = \frac{1}{4} \epsilon_\alpha^{\nu\beta\sigma} F_a^{\mu\alpha} F_\alpha^{a\nu} , \\ \mathcal{T}_B^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} F_a^{\mu\alpha} \tilde{F}_\alpha^{a\nu} , \end{aligned} \quad (3.36)$$

onde usamos a equação (3.3). Nota-se facilmente que essa corrente é invariante de calibre. No entanto, mostremos isto.

A corrente (3.36) sob uma transformação de calibre pode ser escrita como

$$\mathcal{T}'_B{}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_\alpha^{\nu\beta\sigma} Tr \left( \mathcal{F}'^{\mu\alpha} \mathcal{F}'_{\beta\sigma} \right) = \frac{1}{2} \epsilon_\alpha^{\nu\beta\sigma} Tr \left( U \mathcal{F}^{\mu\alpha} U^{-1} U \mathcal{F}_{\beta\sigma} U^{-1} \right) , \quad (3.37)$$

onde usamos (3.14). Utilizando o fato que  $U^{-1}U = 1$  e a ciclicidade do traço, é simples mostrar que

$$\mathcal{T}'_B{}^{\mu\nu} = \mathcal{T}_B^{\mu\nu} , \quad (3.38)$$

como queríamos demonstrar. Assim, a corrente de Bargmann-Wigner invariante de calibre pode ser escrita como

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \mathcal{T}_F^{\mu\nu} + \mathcal{T}_B^{\mu\nu} . \quad (3.39)$$

O preço que se paga por restaurar a invariância de calibre da corrente de Bargmann-Wigner total é que, a corrente  $\mathcal{T}^{\mu\nu}$  não é fruto de uma simetria da ação (3.1), ou seja,  $\mathcal{T}^{\mu\nu}$  não é conservada. Vejamos como se comporta a 4-divergência separadamente, para o setor fermiônico e também para o bosônico. Iniciemos com o setor fermiônico. Reescrevendo

(3.29) como

$$\mathcal{T}_F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\sigma^{\nu\alpha}\partial_\alpha\psi + \frac{ig}{2}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\sigma^{\nu\alpha}\mathcal{A}_\alpha\psi, \quad (3.40)$$

utilizando  $\sigma^{\nu\alpha} = i[\gamma^\nu\gamma^\alpha - \eta^{\nu\alpha}]$  e (3.8)

$$\mathcal{T}_F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}m\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\nu\psi - \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\partial^\nu\psi + \frac{g}{2}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\mathcal{A}^\nu\psi, \quad (3.41)$$

atuando a 4-divergência nesta equação

$$\begin{aligned} \partial_\mu\mathcal{T}_F^{\mu\nu} &= -\frac{1}{2}m\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\gamma^\nu\psi + \frac{1}{2}m\bar{\psi}\gamma^5(2\delta_\mu^\nu - \gamma^\nu\gamma_\mu)\partial^\mu\psi + \frac{i}{2}\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\partial^\nu\psi + \\ &-\frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^5\partial^\nu(\gamma^\mu\partial_\mu\psi) - \frac{g}{2}\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\mathcal{A}^\nu\psi + \frac{g}{2}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\partial_\mu\mathcal{A}^\nu\psi + \frac{g}{2}\bar{\psi}\gamma^5\mathcal{A}^\nu\gamma^\mu\partial_\mu\psi, \end{aligned} \quad (3.42)$$

onde usamos  $\gamma_\mu\gamma^\nu = 2\delta_\mu^\nu - \gamma^\nu\gamma_\mu$ . Utilizando (3.8)

$$\begin{aligned} \partial_\mu\mathcal{T}_F^{\mu\nu} &= -\frac{ig}{2}m\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\gamma^\nu\mathcal{A}_\mu\psi - \frac{i}{2}m^2\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\nu\psi + m\bar{\psi}\gamma^5\partial^\nu\psi + \frac{ig}{2}m\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\nu\gamma^\mu\mathcal{A}_\mu\psi + \\ &+ \frac{i}{2}m^2\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\nu\psi - \frac{g}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\mathcal{A}_\mu\partial^\nu\psi - \frac{1}{2}m\bar{\psi}\gamma^5\partial^\nu\psi - \frac{g}{2}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\partial^\nu\mathcal{A}_\mu\psi + \\ &- \frac{g}{2}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\mathcal{A}_\mu\partial^\nu\psi - \frac{1}{2}m\bar{\psi}\gamma^5\partial^\nu\psi - \frac{ig^2}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\mathcal{A}_\mu\mathcal{A}^\nu\psi - \frac{ig}{2}m\bar{\psi}\gamma^5\mathcal{A}^\nu\psi + \\ &+ \frac{g}{2}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\partial_\mu\mathcal{A}^\nu\psi - \frac{ig^2}{2}\bar{\psi}\gamma^5\gamma^\mu\mathcal{A}^\nu\mathcal{A}_\mu\psi - \frac{ig}{2}m\bar{\psi}\gamma^5\mathcal{A}^\nu\psi. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Utilizando a propriedade  $\gamma^5\gamma^\mu = -\gamma^\mu\gamma^5$

$$\begin{aligned} \partial_\mu\mathcal{T}_F^{\mu\nu} &= \frac{ig}{2}m\bar{\psi}\gamma^5(\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu)\mathcal{A}_\mu\psi - igm\bar{\psi}\gamma^5\mathcal{A}^\nu\psi \\ &+ \frac{g}{2}\bar{\psi}\gamma^5\gamma_\mu(\partial^\mu\mathcal{A}^\nu - \partial^\nu\mathcal{A}^\mu + ig[\mathcal{A}^\mu, \mathcal{A}^\nu])\psi. \end{aligned} \quad (3.44)$$

De (A.9), (3.3), (3.5) e (3.18), é possível mostrar que

$$\partial_\mu\mathcal{T}_F^{\mu\nu} = -\frac{g}{2}S_\mu^a F_a^{\mu\nu}, \quad (3.45)$$

onde  $S_\mu^a$  é descrita pela equação (3.18).

Vejamos agora o caso do setor bosônico. Atuando a 4-divergência em (3.36)

$$\begin{aligned}\partial_\mu T_B^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu F_a^{\mu\alpha}) \tilde{F}_\alpha^{a\nu} + \frac{1}{2} F_{\mu\alpha}^a \partial^\mu \tilde{F}_a^{\alpha\nu} , \\ \partial_\mu T_B^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} j_a^\alpha \tilde{F}_\alpha^{a\nu} + \frac{1}{4} F_{\mu\alpha}^a \left( \partial^\mu \tilde{F}_a^{\alpha\nu} - \partial^\alpha \tilde{F}_a^{\mu\nu} \right) ,\end{aligned}\tag{3.46}$$

onde utilizamos (3.9) e antissimetrizamos o segundo termo. Definindo

$$K_a^{\mu\alpha\nu} = \partial^\mu \tilde{F}_a^{\alpha\nu} - \partial^\alpha \tilde{F}_a^{\mu\nu} .\tag{3.47}$$

Temos que

$$\partial_\mu T_b^{\mu\nu} = \frac{1}{2} j_\alpha^a \tilde{F}_a^{\alpha\nu} + \frac{1}{4} F_{\mu\alpha}^a K_a^{\mu\alpha\nu} .\tag{3.48}$$

Seguindo os mesmos passos utilizados na seção 1.4 encontra-se

$$K_a^{\nu\mu\alpha} = \frac{4}{3!} \epsilon^{\nu\mu\alpha\gamma} j_{a\gamma} .\tag{3.49}$$

Logo, de (3.49) em (3.48) obtemos finalmente

$$\partial_\mu \mathcal{T}_B^{\mu\nu} = \frac{1}{6} j_\mu^a \tilde{F}_a^{\mu\nu} .\tag{3.50}$$

As equações (3.45) e (3.50) expressam a não conservação da corrente de Bargmann-Wigner invariante de calibre, e mantidas separadamente desde que elas são obtidas independentemente da equação da continuidade (3.25). Nota-se que o resultado para as 4-divergências do setor fermiônico e bosônico é semelhante ao caso Abelian. Vemos ainda que a teoria aqui tratada possui como limite a teoria Abelian.

# Conclusões

Por considerarmos um tratamento com base em teorias de calibre, as correntes de spin surgem como algo fundamental da teoria, pela análise das simetrias do espaço-tempo e simetrias de calibre das teorias de calibre aqui abordadas. Em vez de uma abordagem com a mecânica quântica relativística, o tratamento por teorias de calibre nos mostra que as generalizações covariantes das correntes de spin podem ter aplicações no contexto das interações fundamentais.

O fato de descrevermos generalizações relativísticas das correntes de spin pelo formalismo covariante, não se limita na procura da descrição dos observáveis físicos de maneira mais formal, mas também na procura de correções na teoria. Sabemos que uma teoria relativística quando tomada no limite não relativístico, nos permite fazer correções numa teoria não-relativística, a número de ordens de  $c^{-1}$  quantas forem necessárias. Um exemplo bastante conhecido é a previsão correta para o fator giromagnético do elétron, tomando o limite não-relativístico da equação de Dirac. Num esquema de segunda quantização, mais correções quânticas podem surgir para esse fator. Foi mostrado nesta dissertação e em [24] que a não-conservação da corrente de spin (ver (1.41)) surge como uma imposição da invariância de calibre dos observáveis físicos. Este fato levou-nos a escolher objetos invariantes de calibre ao invés de objetos conservados, mostrando assim a importância do princípio de calibre não só nas teorias de calibre, mas em outras áreas da Física. Não foi resolvido aqui o problema da não-conservação da corrente de spin, no sentido da conservação surgir como algo fundamental da teoria. Tal conservação só foi possível sob certas condições. Isto é algo que aparece nos trabalhos onde a corrente de spin é conservada [13, 17, 20]. Contudo, podemos compreender como essa não conservação

surge a partir do ponto de vista das teorias de campos de calibre [24].

Do ponto de vista do setor bosônico, mostramos que a corrente de Bargmann-Wigner bosônica, mostrada na equação (1.30), também apresenta quebra da equação da continuidade para o caso de uma teoria que contenha férmions, como pode ser visto em (1.49). Tal corrente pode ser usada para inferir desvios na perpendicularidade entre os campos elétrico e magnético. Caso a equação (1.49) seja diferente de zero, ela pode ser associada a um tipo de força de monopólo magnético, com densidades de carga e corrente magnéticas efetivas.

A descrição covariante da eletrodinâmica foi necessária. Isto no intuito de acoplar férmions de Dirac à teoria. Como pode ser visto no capítulo 1, o acoplamento de férmions com o campo eletromagnético é o acoplamento padrão, isto é algo intrínseco da interação entre os férmions e o campo eletromagnético, a interação de férmions com o material não foi considerada. Os possíveis acoplamentos com meio material poderão ser feitos através das matrizes  $\sigma^{\mu\nu}$ , que são os únicos objetos antissimétricos na teoria do campo de Dirac, isto torna a possibilidade para acoplamentos com o tensor antissimétrico  $\chi$ . Apesar de não termos considerado interação do campo spinorial com o material, correções quânticas podem aparecer num esquema de segunda quantização. Observe a partir da ação  $S_{MM}$ , que contém o tensor  $\chi$ . No contexto de quantização do campo eletromagnético na matéria, o campo  $\chi$  contribuirá para o propagador do fóton, que por sua vez constará em termos de auto-interação do elétron, provocando correções quânticas na massa do elétron.

No contexto da eletrodinâmica no vácuo, a corrente de Bargmann-Wigner, na maioria dos casos é nula, se não, existe uma não-perpendicularidade entre os campos elétrico e magnético. Mostramos no capítulo 2 que, a corrente de Bargmann-Wigner não pode ser considerada nula imediatamente. Mesmo sistemas que matêm a perpendicularidade entre os campos elétrico e magnético, anisotropias do material ou anisotropias induzidas acarretam numa corrente bosônica não nula. No caso de um meio material dielétrico linear, teremos conservação da corrente  $T_B^{\mu\nu}$ , e ainda, essa quantidade não será nula.

Em meios dielétricos gerais, a corrente de Bargmann-Wigner representa uma grandeza conservada. Devido a não linearidade do meio, as equações de Maxwell inhomogêneas

não podem ser postas em função dos campos elétrico e magnético. Como a corrente de Bargman-Wigner bosônica deve ser conservada, é possível obter vínculos entre os campos no meio material. Isto poderá ser útil para a obtenção das propriedades dos meios materiais.

A necessidade de conservação das correntes de spin levou-nos a impor condições de conservação. Estas condições produziram vínculos entre os campos. A questão é resolver as equações de campos para esses vínculos. Numa teoria de férmions e bósons, a combinação entre esses campos pode ser útil no controle e transporte de informação em dispositivos baseados em correntes de spin. Caso o interesse seja somente na aplicação em dispositivos baseados em fotônica, os vínculos obtidos no caso de meios dielétricos contêm relações entre os campos aplicados e os campos de resposta do material. Então podem ser estudadas as propriedades físicas dos meios em questão.

Quanto ao caso não-Abeliano, a quebra das equações da continuidade nos setores fermiônico e bosônico mostradas nas equações (3.45) e (3.50) se reduzem ao caso da teoria Abelianana no vácuo, *i.e.*, a eletrodinâmica no limite em que  $f^{abc} = 0$  e  $g \rightarrow e$ , as equações (1.41) e (1.49) são recuperadas. Perceba que, tanto no caso Abeliano quanto no não-Abeliano, as equações de continuidade da corrente de Bargmann-Wigner são satisfeitas no caso de não termos campos de calibre na teoria, isto é, as equações (1.41) e (3.45) são iguais a zero. Entretanto, a conservação das correntes de Bargmann-Wigner não será satisfeita simultaneamente na teoria Abelianana e não-Abelianana nos setores bosônicos, mesmo no caso de uma teoria sem férmions. Note que, no caso Abeliano de uma teoria livre, sem férmions, ou seja,  $j^\mu = 0$ , a corrente de Bargmann-Wigner, representada agora somente pelo setor bosônico (veja (1.49)), será conservada. No entanto, isto não acontece para uma teoria livre no caso não-Abeliano. A partir de (3.16), vemos que existe uma corrente oriunda da parte bosônica da teoria. Logo, nesta situação a equação (3.50) não será imediatamente nula. Isto já era de se esperar pois a corrente de Bargmann-Wigner bosônica mesmo obtida de uma teoria de Yang-Mills pura não é invariante de calibre. Então a restauração de sua invariância de calibre não representa uma simetria da ação (3.1), levando a não conservação dessa corrente.

Como perspectivas futuras, pretendemos estudar possíveis acoplamentos do campo espinorial com o tensor constitutivo  $\chi$ , num intuito de descrever possíveis absorções de eletrons livres pelo material. Ainda estudar acoplamento não mínimo para o caso da teoria de calibre  $U(1)$  no vácuo, afim de que possamos ver se o efeito spin-Hall pode ser obtido através desse formalismo. Também, quantizar pelo menos as teorias de calibre  $U(1)$  no vácuo e  $SU(N)$  pelo formalismo da quantização com vínculos, com objetivo de fazer correções quânticas na teoria e obtermos mais perspectivas num cenário de interações fundamentais.

# Apêndice A

## Notações

Neste trabalho usaremos o tensor métrico definido da seguinte forma

$$\eta = \text{diag} (+1, -1, -1, -1) . \quad (\text{A.1})$$

Deste modo, as coordenadas serão decompostas na seguinte forma

$$x^\mu \equiv (ct, \vec{x}) . \quad (\text{A.2})$$

As derivadas

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \equiv \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla} \right) . \quad (\text{A.3})$$

O 4-potencial e a 4-corrente

$$A^\mu \equiv \left( \frac{\phi}{c}, \vec{A} \right) , \quad J^\mu \equiv (c\rho, \vec{j}) . \quad (\text{A.4})$$

A equação (1.3) possui como componentes no espaço e tempo os campos elétrico e magnético, tal que:

$$\begin{aligned} F^{0i} &= -\frac{E^i}{c} , \\ F^{ij} &= -\epsilon^{ijk} B^k , \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$



onde  $E^i = -E_i$  e  $B^i = -B_i$ . De modo geral

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^1/c & -E^2/c & -E^3/c \\ E^1/c & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2/c & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3/c & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.6})$$

O tensor de Levi-Cevita  $\epsilon^{0123} = +1$ , tal que  $\epsilon^{0ijk} = \epsilon^{ijk} = -\epsilon_{ijk}$ . Do mesmo modo que os campos elétrico e magnético foram escritos como componentes de  $F^{\mu\nu}$ , podemos escrever os campos deslocamento elétrico e indução magnética como componentes de um tensor  $G^{\mu\nu}$ . Onde

$$\begin{aligned} G^{0i} &= -cD^i, \\ G^{ij} &= -\epsilon^{ijk}H^k, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

tal que  $D^i = -D_i$  e  $H^i = -H_i$ . E

$$G^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -cD^1 & -cD^2 & -cD^3 \\ cD^1 & 0 & -H^3 & H^2 \\ cD^2 & H^3 & 0 & -H^1 \\ cD^3 & -H^2 & H^1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

Para o tratamento de férmions será útil as seguintes relações

Da álgebra de Clifford

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}, \quad (\text{A.9})$$

ainda

$$\begin{aligned}\gamma^5 = \gamma_5 &= i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \\ \sigma^{\mu\nu} &= \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu], \\ \beta &= \gamma^0, \\ \alpha^i &= \gamma^0\gamma^i, \\ \Sigma^i &= \gamma^5\gamma^0\gamma^i.\end{aligned}\tag{A.10}$$

Para mais detalhes sobre as matrizes  $\gamma$  consultar [25].

# Apêndice B

## Efeitos físicos

Vamos apresentar aqui as matrizes associadas aos efeitos físicos apresentados na seção 2.1.

### Efeito Faraday dielétrico

$$\begin{pmatrix} D^1 \\ D^2 \\ D^3 \\ H^1 \\ H^2 \\ H^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varepsilon^{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon & -i\varepsilon^{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\varepsilon^{23} & -\varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -E^1 \\ -E^2 \\ -E^3 \\ B^1 \\ B^2 \\ B^3 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.1})$$

Campo magnético na direção  $x$ .

### Efeito Faraday magnético

$$\begin{pmatrix} D^1 \\ D^2 \\ D^3 \\ H^1 \\ H^2 \\ H^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \zeta^{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu^{-1} & i\zeta^{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i\zeta^{23} & \mu^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -E^1 \\ -E^2 \\ -E^3 \\ B^1 \\ B^2 \\ B^3 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

Campo magnético na direção  $x$ .

### Atividade óptica natural

$$\begin{pmatrix} D^1 \\ D^2 \\ D^3 \\ H^1 \\ H^2 \\ H^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 & 0 & i\gamma^{11} & 0 & 0 \\ 0 & -\varepsilon & 0 & 0 & i\gamma^{11} & 0 \\ 0 & 0 & -\varepsilon & 0 & 0 & i\gamma^{11} \\ -i\gamma^{11} & 0 & 0 & \mu^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & -i\gamma^{11} & 0 & 0 & \mu^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -i\gamma^{11} & 0 & 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -E^1 \\ -E^2 \\ -E^3 \\ B^1 \\ B^2 \\ B^3 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

Aqui a atividade óptica tem simetria rotacional.

## Efeito Fresnel-Fizeau

$$\begin{pmatrix} D^1 \\ D^2 \\ D^3 \\ H^1 \\ H^2 \\ H^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varepsilon & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon\alpha v^3 & \varepsilon\alpha v^2 \\ 0 & -\varepsilon & 0 & \varepsilon\alpha v^3 & 0 & -\varepsilon\alpha v^1 \\ 0 & 0 & -\varepsilon & -\varepsilon\alpha v^2 & \varepsilon\alpha v^1 & 0 \\ 0 & \varepsilon\alpha v^3 & -\varepsilon\alpha v^2 & \mu^{-1} & 0 & 0 \\ -\varepsilon\alpha v^1 & 0 & \varepsilon\alpha v^1 & 0 & \mu^{-1} & 0 \\ \varepsilon\alpha v^2 & -\varepsilon\alpha v^1 & 0 & 0 & 0 & \mu^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -E^1 \\ -E^2 \\ -E^3 \\ B^1 \\ B^2 \\ B^3 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.4})$$

com  $\alpha = (1 - 1/\varepsilon_r\mu_r)$  e  $\varepsilon_r$  e  $\mu_r$  a permissividade elétrica e a permeabilidade magnética relativas, respectivamente. Nesta situação o meio tem simetria rotacional em torno da direção do movimento  $(v^1, v^2, v^3)$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] C. A. Linhares, R. F. Sobreiro, *Teoria de campos, Vol. 1, Notas de aulas informais*, (2001).
- [2] J. Schwinger, *Quantum electrodynamics. I. A covariant introduction*, Phys. Rev.,**74**, 1439 (1948).
- [3] R. P. Feynman, *Space-time approach to quantum electrodynamics*, Phys. Rev.,**76**, 749 (1949).
- [4] R. P. Feynman, *Mathematical formulation of the quantum theory of electromagnetic interaction*, Phys. Rev.,**80**, 440 (1950).
- [5] L. O’Rifeartaigh, *Hidden gauge symmetry*, Rep. Prog. Phys., Vol**42**,(1979).
- [6] P. van Neieuwenhuizen, *Advanced quantum gauge field theory*.
- [7] E. Noether, *Invariant variation problems*, Gott. Nachr. **1918**, 235, (1918) [Transp. Theory Statist. Phys. **1**, 186 (1971)][physics/0503066].
- [8] R. A. Bertlmann, *Anomalies in quantum field theory*, Clarendon Press, New York, USA (1996).
- [9] S. A. Wolf, D. D. Awschalom, R. A. Buhrman, J. M. Daughton, S. von Molnar, M. L. Roukes, A. Y. Chtchelkanova and D. M. Treger, Science **294**, 1488 (2001).
- [10] I. Zutic, J. Fabian, S. Das Sarma, *Spintronics: fundamentals and applications*, Rev. Mod. Phys. **76**, 323 (2004).
- [11] S. Murakami, N. Nagaosa and S. C. Zhang, Science, **301**, 1348 (2003).

- [12] J. Sinova, S. Murakami, S. Q. Shen and M. S. Choi, *Solid State Commun*, **138**, 214 (2006).
- [13] J. Shi, P. Zhang, Di Xiao and Qian Niu, *On a proper definition of spin current*, *Phys. Rev. Lett.*, **96**,076604 (2006).
- [14] F. Schätz, P. Kopietz and M. Kollar, *Eur. Phys. J. B* 41, 557 (2004).
- [15] Xiang Zhou, Zhenyu Zhang and Cheng-Zheng Hu, *Spin continuity equation and definition of spin current*, (2009) arXiv:0904.3796v2 [cond-mat.mes-hall].
- [16] Qing-feng Sun and X. C. Xie, *Definition of the spin current: the angular spin current and its physical consequences*, *Phys. Rev.*, **B72**, 245305 (2005).
- [17] Z. An, Q. Liu, Y. Lin and C. Liu, *The universal definition of the spin current*, *Scientific Reports*, **388** , 10.1038 (2012).
- [18] J. Splettstoesser, M. Governale and U. Zülicke, *Phys. Rev.* **B68**, 165341 (2003).
- [19] A. Vernes, B. L. Györfly and P. Weinberger, *Spin currents, spin-transfer torque, and spin-Hall effects in relativistic quantum mechanics*, *Phys. Rev.*, **B76**, 012408 (2007).
- [20] R. Shen, Yan Chen and Z. D. Wang, *On the conservation of spin currents in spin-orbit coupled systems*, *Phys. Rev. B* **74**, 125313 (2005).
- [21] V. Bargmann, E. P. Wigner, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 34, 211 (1948).
- [22] C. A. Dartora and G. G. Cabrera, *Phys. Rev.*, **B78**, 012403 (2008).
- [23] C. A. Dartora and G. G. Cabrera, *Phys. Lett.* **A374**, 2596 (2010).
- [24] R. F. Sobreiro and V. J. V. Otoyá, *The role of gauge symmetry in spintronics*, *Annals Phys.* **326**, 3067 (2011) [arXiv:1107.0332 [hep-th]].
- [25] C. Itzykson and J. B. Zuber, *Quantum field theory*, Mecgraw-hill, New York, USA (1980).

- [26] M. Jefferson, *O fator giromagnético das partículas elementares e o acoplamento não-mínimo*, Dissertação de mestrado, CBPF, Brasil (2008).
- [27] V. A. Rubakov, *Classical theory of gauge fields*, Princeton University Press, New Jersey, USA (1999).
- [28] P. E. M. Dirac, *The theory of magnetic poles*, Phys. Rev., **74**, 7 (1948).
- [29] R. Aldrovandi and J. G. Pereira, *Notes for a course on classical fields*.
- [30] A. Das, *Lectures of quantum field theory*, World Scientific, USA (2008).
- [31] S. S. Schweber, *An introduction to relativistic quantum field theory*, Peterson and Company, New York, USA (1961).
- [32] H. Georgi, *Lie algebra in particle physics: from isospins to unified theories*, Westview Press, California, USA (1982).
- [33] R. Gilmore, *Lie groups-physics and geometry: an introduction for physicists, engineers and chemists*, Cambridge University Press, UK (2008).
- [34] E. J. Post, *Formal structures of electromagnetics*, Amsterdam, North Holland (1962).
- [35] U. Leonhardt, *Space-time geometry of quantum dielectrics*, Phys. Rev. A, Vol. **62**, 012111.
- [36] V. M. Red'kov, N. G. Tokarevskaya, E. M. Bychkouskaya, George J. Spix, NPCS, Vol. **12**. No 3, P. 232–250, 2009 arXiv:0709.2415 [physics.class-ph].
- [37] F. W. Hehl and Y. N. Obukhov, *On the energy momentum current of the electromagnetic field in a premetric axiomatic approach. 1*, gr-qc/0103020.
- [38] F. W. Hehl, Y. N. Obukhov and G. F. Rubilar, *On a possible new type of a T odd skewon field linked to electromagnetism*, gr-qc/0203096.
- [39] F. W. Hehl and Y. N. Obukhov, *Linear media in classical electrodynamics and the Post constraint*, Phys. Lett. A **334**, 249 (2005)[physics/0411038].



- [40] E. Hecht, *Optics*, Addison Wesley, San Francisco, USA (12002).
- [41] P. S. Epstein, *Theory of wave propagation in a gyromagnetic medium*, Reviews of Modern Physics, **28** (1956), pp 3-17
- [42] E. Montagne, *Algebraic decomposition of the electromagnetic constitutive tensor. A step towards a pre-metric based gravitation?*, Annalen der Physik (Berlin)(Leipzig) 17, No. 1, 17-27 (2008).
- [43] C. N. Yang and R. L. Mills, *Isotopic spin conservation and generalized gauge invariance*, Phys. Rev. Lett., **96**, p.191-195 (1954).
- [44] W. Greiner, B. Mueller, J. Rafelski, *Quantum electrodynamics of strong fields*, Springer-Verlag, Berlin, Germany (1985).