

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

INSTITUTO DE FÍSICA

Mapeamentos em teorias de calibre da gravidade

Anderson Alves Tomaz

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Ferreira Sobreiro

Niterói-RJ
Fevereiro, 2012

Anderson Alves Tomaz

Mapeamentos em teorias de calibre da gravidade

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Física.

Orientador:
Prof. Dr. Rodrigo Ferreira Sobreiro

Niterói
2012

Agradecimentos

Dedico esta dissertação à minha esposa Flaviane, pois ela é a maior responsável por eu ter chegado até aqui e, ainda, por sempre me encher de coragem para ir mais longe. Não esqueço da discussão que tivemos no dia que ela me expulsou de casa para fazer o vestibular da UFF e tentar uma vaga no curso de bacharel em Física. Naquele dia, o desânimo era um sinônimo para o meu nome, pois não havia mais qualquer desafio e, muito menos, algum orgulho intelectual. Afinal, eu não havia concluído nenhum de meus projetos acadêmicos e minha vida era um abismo de lamentações. Além disso, morar em Petrópolis, fazer uma graduação em Niterói e, ainda, lecionar para 17 turmas de ensino básico, realmente, parecia impossível. Porém, mesmo com tudo contra, ela conseguiu me convencer a ir em frente. Hoje, espero não tê-la decepcionado. Sem aquele impulso inicial e seu apoio incondicional, eu não teria conseguido.

Sou imensamente grato aos meus pais, Carlos Alberto e Maria Isabel, por toda a batalha que travaram para criar quatro filhos. Ao longo do tempo que vivemos sob o mesmo teto, sempre me ensinaram que desistir nunca seria uma solução, por pior que a vida estivesse. Não poderia deixar de agradecer também aos meus irmãos, Erick, Alan e Ébert(Kbeça), pelos grandes momentos em família e, também, por sempre torcerem por mim.

Ao meu orientador Rodrigo Sobreiro que foi, e continuará sendo, um grande mentor acadêmico. Sou grato a ele pelos 53 encontros durante o mestrado, onde dedicação e paciência sempre estiveram presentes. Estes encontros me ajudaram a conhecer teorias de campos e gravidade. Embora estas sejam áreas árduas a serem exploradas, a beleza e o rigor físico-matemático das mesmas faz com que a busca por compreendê-las, sempre

venha a valer a pena.

Aos meus grandes amigos, Cristiano(Jorge), Marcelo Percia, Mário, Paulinho, Ivo e Amarildo, que sempre exerceram papéis importantes em diferentes momentos da minha caminhada. Sou grato a eles não somente pela amizade, mas também pela irmandade que nos une até hoje. Isso não se perde e não se apaga.

Agradeço aos meus companheiros de IF pelo agradável cotidiano, ora com um bom papo e um cafezinho no trailer do Adriano, ora com as enriquecedoras discussões sobre Física. Ao Marlon e à Gabi, um especial agradecimento pelo grande apoio em toda minha jornada no IF. Isso sem esquecer de tantas vezes que roubei um canto pra dormir na casa deles, onde sempre fui recebido com muito carinho. Ao Pierre, outro especial agradecimento, por ser um grande amigo e parceiro de matérias que fizemos juntos desde os tempos da graduação.

Aos meus professores da graduação, Eden Vieira, Jürgen Stilck, Ruth Bruno, Roberto Toscano e Maria Emília, por serem verdadeiros educadores. Eles serão sempre exemplos de que é possível ensinar, não importando a complexidade do assunto, de forma a encorajar seus estudantes a se tornarem cada vez melhores.

Sou grato a todos os funcionários do IF pelo cotidiano sempre agradável e prestativo. Em especial, sou imensamente grato a Valéria pelas palavras amigas nas horas duras e também pela enorme competência ao cuidar da grande burocracia que cerca a vida acadêmica.

Finalmente, agradeço a todos os brasileiros, pois, sem os árduos impostos que pagam, minha formação científica não teria sido possível. Seguindo essa linha, também agradeço a Capes pela bolsa de estudos e a Proppi-UFF pelo apoio financeiro.

Resumo

O trabalho consiste em estudos sobre o mapeamento de um espaço euclidiano em um espaço curvo. Iniciando com grupos $SO(m, n)$, onde $m + n = 5$ e $m \in \{0, 1, 2\}$, chega-se a uma teoria de gravidade de primeira ordem com simetrias locais determinadas pelo grupo $SO(m! - 1, n)$. Para tal foi assumida duas propriedades das teorias de calibre não-abelianas, ou seja, a liberdade assintótica e a geração dinâmica de massa. Fazendo uma redefinição dos campos de calibre através dos parâmetros de acoplamento e de massa, é possível separar o campo de calibre em dois setores. O mesmo acontecerá para a álgebra do grupo. Utilizando uma contração de Inönü-Wigner, com o auxílio destes mesmos parâmetros, o grupo original pode ser deformado em um grupo de Poincaré, $SO(m, n) \longrightarrow ISO(m! - 1, n)$. Como a ação original não é invariante pelo grupo de Poincaré, a teoria sofre na verdade uma quebra de simetria para o grupo de Lorentz, $SO(m, n) \longrightarrow SO(m! - 1, n)$. Esta quebra de simetria faz com que um dos setores do campo de calibre passe a se comportar como matéria, agora perante o grupo $SO(m! - 1, n)$. Assim, aproveitando a definição descrita acima, este campo pode ser identificado com uma vierbein efetiva, deformando assim o espaço-tempo, antes euclidiano. Da mesma forma, o setor de Lorentz da conexão pode ser identificado com a conexão de spin. O que vai resultar em uma teoria de gravidade no formalismo de primeira ordem. É explorado então, rapidamente, as equações de movimento da gravidade, assim como a solução de vácuo mais simples. Além disso, faz-se aqui, então, a análise do mapeamento de uma teoria de calibre em uma teoria de gravidade. Em particular, é calculada explicitamente a matriz de mapeamento.

Abstract

This dissertation consists on studies on the mapping of gauge theories formulated on Euclidean space into gravity theories on curved space. Starting with groups $SO(m, n)$, where $m + n = 5$ and $m \in \{0, 1, 2\}$, we arrive at a theory of gravity on the first order with local symmetries determined by the group $SO(m! - 1, n)$. For that we assume two properties of non-Abelian gauge theories, i.e., the asymptotic freedom and dynamical mass generation. By making a rescaling of the gauge fields through the coupling and mass parameters, it is possible to separate the gauge field in two sectors. The same goes for algebra of the group. Then, using an Inönü-Wigner contraction, with the help of these same parameters, the original group can be deformed into a Poincaré group, $SO(m, n) \longrightarrow ISO(m! - 1, n)$. As the original action is not invariant under the Poincaré group, the theory actually undergoes a symmetry breaking to the Lorentz group, $SO(m, n) \longrightarrow SO(m! - 1, n)$. This symmetry breaking makes one sector of the gauge field to behave like a matter field, now, under the action of the group $SO(m! - 1, n)$. Thus, using the description described above, this field can be identified with an effective vierbein wich deforms the Euclidean space-time into a curved one. Likewise, the sector of the Lorentz connection can be identified with the spin connection. The final result in a theory of gravity in the first order formalism. We then quickly explore the equations of motion of this effective gravity in order to compute the simplest non-trivial vacuum solution. Moreover, the analysis of this mapping is explicitly computed.

Sumário

Lista de Figuras	vii
Introdução	1
1 Teorias de Yang-Mills	5
1.1 Campo de calibre e ação de Yang-Mills	5
1.2 Propriedades	9
2 Formalismo de primeira ordem para a gravidade	12
2.1 Geometria diferencial e relatividade geral	13
2.2 O formalismo da métrica	13
2.3 Formalismo de primeira ordem	17
2.3.1 A vierbein	17
2.3.2 A conexão de spin	20
2.3.3 A estrutura do formalismo de primeira ordem	21
2.3.4 Ações de gravidade	23
3 Teorias de calibre para o grupo $SO(m, n)$	25
3.1 $SO(m, n)$: Decomposição da teoria	25
3.2 A contração de Inönü-Wigner	30
3.3 Redefinição, contração e quebra de simetria	32
4 Gravidade emergente	35
4.1 Análise de Obukhov em três dimensões	35
4.2 Mapeamento em 4 dimensões	38

4.2.1	Gravidade efetiva	39
4.2.2	Equações de movimento	41
4.2.3	Alguns aspectos do mapeamento	43
	Conclusões	45
	A Formas diferenciais exteriores	49
A.1	Produto exterior	49
A.2	p-formas	50
A.3	Derivada exterior	51
A.4	Operador dual	52
A.5	Integração	52
	B Projeção estereográfica	55
	C Mapeamentos	59
C.1	0-forma	59
C.2	1-forma	60
C.3	2-forma	62
	Referências Bibliográficas	65

Lista de Figuras

- 4.1 Cada ponto $x \in \mathbb{R}^4$ é mapeado em um ponto $X \in \mathbb{M}^4$. Uma configuração (A, θ) foi identificada com uma geometria (ω, e) , tal que $A \rightarrow \omega$ e $\theta \rightarrow e$. . 43

Introdução

Publicado em Outubro de 1954, o trabalho proposto por Yang e Mills [1] trouxe à comunidade científica uma nova abordagem ao entendimento da Física das interações fundamentais, onde foram tratadas teorias de calibre não-abelianas. O tratamento era centrado nas transformações de isospin¹, as quais agem como rotações em um espaço interno de modo que os três estados de píons, π^- , π^0 e π^+ , formem um vetor, enquanto os nucleons, prótons e nêutrons, formem um espinor, ou seja, um dubleto e um tripleto, respectivamente. Em uma interação forte, tais estados, sejam de píons ou nucleons, sofrem rotações de mesmo ângulo sob o mesmo eixo no espaço de isospin. As leis físicas são observadas sem qualquer variação, antes e depois das rotações. Por exemplo, seja feita a escolha de um spin up para um próton localizado num ponto do espaço-tempo, tal que a convenção se aplique a todos os prótons em todos os outros pontos do espaço-tempo que o primeiro próton escolhido. Entretanto, deveria haver uma liberdade de escolha de fase no espaço interno de isospins em diferentes pontos do espaço-tempo e, assim, poderia-se estender o conceito de invariância de isospin global para local.

As chamadas teorias de Yang-Mills [1, 3] estenderam a abordagem das teorias de calibre abelianas, as quais se tornaram o sólido alicerce que fundamentou a eletrodinâmica quântica [4, 5], para o território das teorias não-abelianas.

As simetrias ocuparam um lugar tão importante na Física que a teoria de grupos passou a ser o arcabouço matemático fundamental para analisar simetrias e, talvez, deva-se isso principalmente à presença de grupos de Lie no tratamento algébrico das teorias de calibre. Segundo o teorema de Noether [5, 6], há sempre uma maneira de se relacionar

¹O conceito de isospin foi introduzido por W. Heisenberg quando tratava da independência de carga das interações fortes [2].

um princípio de conservação a uma simetria contínua da Natureza. O princípio de calibre se tornou a base teórica para os físicos tratarem as interações fundamentais. A palavra simetria é de origem grega e tem significado de comensurabilidade. Um simples exemplo de simetria pode ser observado quando colocamos um triângulo qualquer enconstado em um espelho plano, sua imagem terá as mesmas medidas de ângulos e de comprimentos dos lados do objeto original. Entretanto, a noção de simetria vai além da geometria de objetos euclidianos. Uma das mais belas noções de simetria mostra que a conservação da carga elétrica está relacionada à simetria de calibre no eletromagnetismo, $U(1)$, assim como a conservação da carga de sabor na teoria das interações fracas [7] descrita pelo grupo $SU(2)$. Não menos importante está a conservação da carga de cor na teoria das interações fortes [5, 8], esta baseada no grupo $SU(3)$. A noção de simetria na Física também está relacionada com degenerescência [9].

O sucesso das teorias de Yang-Mills pode ser atribuído a sua bem-sucedida intenção em explicar as interações fundamentais da Natureza, fato que foi um sucesso através do modelo padrão [5]. Por enquanto, cabe mencionar que três interações estão amparadas pelas teorias de Yang-Mills, restando, portanto, apenas a interação gravitacional a ser incluída. Assim, ergueu-se um dos maiores desafios da Física contemporânea, isto é, encontrar uma teoria para a gravidade que possa ser quantizada, possivelmente uma teoria de calibre, já que as demais interações são descritas por teorias deste tipo. Para a gravidade, a quarta interação fundamental, ainda não se conhece uma teoria que esteja inserida no modelo padrão.

Uma das maiores incompatibilidades entre a relatividade geral e o modelo padrão se encontra na descrição física das interações. Na gravitação, a geometria é unicamente usada para descrever a interação gravitacional, enquanto nas interações do modelo padrão são as teorias de calibre que as descrevem. Este é justamente o fato pelo qual a gravidade não pode ser quantizada. Uma das maneiras de tentar aproximar a gravidade de uma teoria de calibre é através do formalismo de primeira ordem [10, 11, 12, 13]. Neste formalismo, as isometrias locais do espaço-tempo são identificadas com um grupo de calibre.

O uso do formalismo de primeira ordem, além de ser facilitado pela teoria de grupos

[14], também é melhor descrito pelos métodos do cálculo exterior e formas diferenciais² [15] que se propõe a otimizar e simplificar os cálculos outrora feitos usando somente tensores. Entretanto, não se pretende aqui excluir os métodos matemáticos que adotam tensores, pois este já ocupam seu lugar em diversas teorias físicas. Somente para citar um famoso exemplo, a relatividade geral. Por outro lado, formas diferenciais podem simplificar alguns desenvolvimentos que, em um momento anterior, eram bastante árdios com o uso de uma técnica somente baseada em tensores. Os conceitos e as grandezas físicas que serão descritos aqui serão representados, em geral, por formas diferenciais.

O trabalho realizado [16] nesta dissertação será iniciado com uma simples teoria de Yang-Mills, consistente quanticamente, e caminha para um final onde uma teoria de gravidade emerja como uma teoria de campo efetiva. Durante este processo serão confrontados os formalismos de primeira e segunda ordem para a relatividade geral e, em seguida, a discussão do envolvimento de grupos de calibre na construção de uma ação que se conecte a algum tipo de teoria de gravidade. O grupo inicial, que será a base da teoria de calibre tratada aqui, é o $SO(m, n)$, onde $m \in \{0, 1, 2\}$ e $m + n = 5$. Este grupo pode ser o de de Sitter, de anti-de Sitter ou ortogonal, dependendo do valor de m . A álgebra inicial será decomposta de forma que $SO(m, n) = SO(m! - 1, n) \otimes S(4)$, onde $S(4)$ é um coset com quatro graus de liberdade, enquanto $SO(m! - 1, n)$ forma um subgrupo de estabilidade que de acordo com o valor de m será um grupo de Lorentz ou um ortogonal. Fazendo uso desta decomposição juntamente com a liberdade assintótica do modelo através do parâmetro adimensional de acoplamento κ e, também, da possível geração dinâmica de massa [17], identificada aqui pelo parâmetro γ , será feita uma redefinição dos campos de calibre de maneira que a decomposição fique mais ainda evidenciada. Para tanto, um teorema de contração aplicado ao grupo inicial será estudado, esta redução é conhecida como contração de Inönü-Wigner que, com o auxílio destes mesmos parâmetros, vai permitir que o grupo original $SO(m, n)$ pode ser deformado no grupo de Poincaré $ISO(m! - 1, n)$. Embora o grupo de Poincaré não descreva uma simetria para a ação inicial, o grupo $SO(m! - 1, n)$ deixa a ação original invariante. Sendo ainda $SO(m! - 1, n)$

²No apêndice A será feita uma breve exposição sobre o assunto.

um grupo de estabilidade, a teoria é na verdade quebrada dinamicamente de acordo com $SO(m, n) \longrightarrow SO(m! - 1, n)$. Assim, um dos setores do campo de calibre passará a se comportar como matéria, agora perante o grupo $SO(m! - 1, n)$. Com esta nova configuração, este campo pode ser identificado com uma vierbein efetiva, cuja consequência é a deformação do espaço-tempo, inicialmente euclidiano. Conseqüentemente, o setor de Lorentz da conexão será identificado com a conexão de spin. Simultaneamente, será analisado a redefinição dos campos para que haja uma conexão entre a teoria de calibre original e uma teoria de gravidade. É justamente a análise deste mapeamento o grande tema desta dissertação. Será exposto o cálculo da matriz de transformação, assim como a de sua inversa, a qual é garantia da unicidade deste mapeamento. Cabe ressaltar que a diferença entre este e outros trabalhos se encontra na forma de gerar massa. Enquanto os outros usam o mecanismo de Higgs, pretende-se neste que um parâmetro de massa emerja dinamicamente [17] da teoria e, assim, seja possível o mapeamento em uma teoria de gravidade. O propósito e a grande motivação desta dissertação é apresentar uma ação onde uma teoria de gravidade se apresente para ser quantizada, portanto, tal ação deve ter validade quando confrontada com a relatividade geral. O que se espera como resultado é uma teoria de gravidade no formalismo de primeira ordem. De forma a verificar a consistência dos resultados, a ação final servirá para a obtenção das equações de movimento da gravidade para que se mostrem de acordo com uma solução de vácuo mais simples.

Capítulo 1

Teorias de Yang-Mills

The conservation of isotopic spin is identical with the requirement of invariance of all interactions under isotopic spin rotation. This means that when electromagnetic interactions can be neglected, as we shall hereafter assume to be the case, the orientation of the isotopic spin is of no physical significance. The differentiation between a neutron and a proton is then a purely arbitrary process [1].

C. N. Yang e R. L. Mills

Teorias de calibre possuem dois campos fundamentais: Campos de matéria e campos de calibre [1, 18]. Neste capítulo serão apresentados conceitos básicos como o potencial vetor (ou, campo de calibre) e o funcional da ação de Yang-Mills, onde estão contidas informações sobre a simetria interna do sistema. Também serão apresentados a álgebra dos geradores do grupo de Lie em questão, as transformações de calibre a serem empregadas e as propriedades da ação de Yang-Mills de um modo geral que terão papel fundamental neste trabalho.

1.1 Campo de calibre e ação de Yang-Mills

Seja um conjunto de geradores λ^A associados a um grupo de Lie semi-simples G , tal que

$$[\lambda^{\mathcal{A}}, \lambda^{\mathcal{B}}] = f^{\mathcal{AB}}_{\mathcal{C}} \lambda^{\mathcal{C}}, \quad (1.1)$$

com $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}\} \in \{1, \dots, \dim G\}$. As constantes de estrutura do grupo, $f^{\mathcal{AB}}_{\mathcal{C}}$, são totalmente antissimétricas em seus índices. Caso $f^{\mathcal{AB}}_{\mathcal{C}} = 0, \forall \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$, o grupo é dito abeliano. Os geradores são representados por matrizes anti-hermitianas, ou seja, $\lambda^{\mathcal{A}\dagger} = -\lambda^{\mathcal{A}}$, tal que sua normalização é feita por

$$Tr(\lambda^{\mathcal{A}} \lambda^{\mathcal{B}}) = -\frac{1}{2} \delta^{\mathcal{AB}}. \quad (1.2)$$

Ademais, as constantes de estrutura obedecem a identidade de Jacobi,

$$f^{\mathcal{ABD}} f_{\mathcal{D}}^{\mathcal{CE}} + f^{\mathcal{BCD}} f_{\mathcal{D}}^{\mathcal{AE}} + f^{\mathcal{CAD}} f_{\mathcal{D}}^{\mathcal{BE}} = 0. \quad (1.3)$$

Agora, seja uma coleção de campos descrita por

$$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{bmatrix}, \quad (1.4)$$

que se transforma como

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = U \Psi(x), \quad (1.5)$$

onde $U = e^{\kappa \zeta}$, com $\zeta = \lambda_{\mathcal{A}} \zeta^{\mathcal{A}}$ de modo que $\zeta^{\mathcal{A}}$ sejam funções das coordenadas do espaço-tempo. Os campos Ψ são ditos campos de matéria devido à sua lei de transformação (1.5), onde fica evidente que Ψ se transforma na representação fundamental [18, 19]. Uma vez que as derivadas desses campos se transformam como

$$d\Psi(x) \rightarrow U d\Psi(x) + (dU) \Psi(x), \quad (1.6)$$

sendo d a derivada exterior¹, observa-se que $d\Psi$ não se transforma como matéria. Dessa forma é conveniente introduzir uma nova derivada que se transforme como

$$\nabla'\Psi'(x) = U\nabla\Psi(x), \quad (1.7)$$

onde ∇ é a derivada covariante,

$$\nabla = d + \kappa Y, \quad (1.8)$$

sendo κ o parâmetro adimensional de acoplamento. O campo Y é o denominado campo de calibre,

$$Y = \lambda_{\mathcal{A}} Y_{\mu}^{\mathcal{A}} dx^{\mu}. \quad (1.9)$$

Este campo representa uma 1-forma de conexão na representação adjunta [18, 19].

Através das equações (1.5) e (1.7), a transformação do potencial Y é obtida:

$$Y' = U \left(\frac{d}{\kappa} + Y \right) U^{-1}. \quad (1.10)$$

Infinitesimalmente, tem-se $U \approx 1 + \kappa\zeta$. Assim, a transformação (1.10) se reduz a

$$Y' = Y + \nabla\zeta. \quad (1.11)$$

A 2-forma intensidade de campo não-abeliana é definido por

$$F = dY + \kappa YY, \quad (1.12)$$

a qual não é invariante por transformações de calibre locais, mas é covariante de calibre, estando sujeita a transformação,

$$F' = U F U^{-1}. \quad (1.13)$$

Escrita em componentes, F apresenta-se como

¹Vide Apêndice A.

$$F'^A = dA^A + \kappa f^A_{BC} A^B A^C. \quad (1.14)$$

Utilizando F^A , torna-se simples construir uma ação invariante de calibre. Vale ressaltar ainda que os campos de Yang-Mills possuem restrições que fazem jus aos termos impostos pelos fenômenos da Natureza. Em algumas situações, vínculos ou restrições são necessários para que isso ocorra. No presente trabalho, as seguintes exigências devem ser atendidas:

- A densidade lagrangiana deve ser local, ou seja, deve depender apenas dos campos e de suas derivadas em cada ponto do espaço-tempo [20].
- A ação deve ser renormalizável por contagem de potências [5, 20].
- Os campos de Yang-Mills devem ser campos vetoriais inicialmente não-massivos, uma vez que termos de massa, em geral, corrompem a invariância de calibre se incluídos explicitamente na lagrangiana [5, 20].
- A conservação de probabilidades requer uma ação numericamente real [5].
- A ação deve levar a equações clássicas de movimento não tendo derivadas de ordem superior a segunda [5].
- A ação deve ser invariante por transformações de Poincaré nas coordenadas do espaço-tempo [21].
- Possivelmente, exige-se que a ação seja invariante sob simetrias internas. Aqui, obviamente, estas estão associadas às simetrias de calibre [5, 18].

A ação mais simples que concorda com os vínculos acima, pode ser escrita como

$$S = - \int_M \text{tr} F * F = \frac{1}{2} \int_M F^A * F_A, \quad (1.15)$$

onde o traço é tomado em relação ao grupo. Esta é a ação de Yang-Mills pura, pois não inclui campos de matéria. Por exemplo, estes podem ser descritos pela ação de

Klein-Gordon, no caso de campos escalares, ou pela ação de Dirac, no caso de campos espinoriais [5]. Como campos de matéria não serão discutidos nesta dissertação, não há necessidade de se entrar mais detalhes. Mesmo para campos de Yang-Mills puros, a densidade lagrangiana contém interações por causa dos auto-acoplamentos dos campos de calibre. Uma das propriedades da ação (1.15) para os campos de calibre se refere a simetria local que, de uma certa maneira, estabelece a forma da interação entre os campos de calibre Y e os campos de matéria $\Psi(x)$.

Todos os observáveis físicos devem ser invariantes sob transformações de calibre, assim como as respectivas ações, pois essa imposição é o principal postulado das teorias de campos de calibre [2, 18] e chama-se princípio de calibre. A descrição das interações fundamentais, a partir de uma lagrangiana que torna a ação localmente invariante por transformações de calibre, obedecem a este princípio.

1.2 Propriedades

As teorias de Yang-Mills, descritas pela ação (1.15), possuem quatro importantes propriedades que terão papel fundamental nesta dissertação.

- Renormalizabilidade

Uma teoria é renormalizável quando permite que suas divergências, no regime ultravioleta, sejam eliminadas. Este é o caso das teorias de Yang-Mills quando baseadas em um grupo de Lie semi-simples e, claro, quando condicionada à escolha do calibre [5, 20, 22].

- Liberdade assintótica

Uma quantidade a ser renormalizada é o parâmetro de acoplamento κ . O valor renormalizado de κ depende de um parâmetro de energia μ [23, 24], tal que, no caso de um grupo compacto, é dado por

$$\kappa^2(\mu) \propto \frac{1}{\ln(\frac{\mu^2}{\Lambda^2})}, \quad (1.16)$$

onde Λ é um valor estimado para um corte na escala de energia. Como pode ser observado em (1.16), no regime de altas energias, o parâmetro de energia μ aumenta e, portanto, o parâmetro de acoplamento κ diminui. Esse é o regime perturbativo, a chamada região ultravioleta. Por outro lado, a baixas energias, o parâmetro κ aumenta e o tratamento perturbativo é comprometido. Esta região é comumente chamada de região infravermelha.

- Unitariedade

Preservar o caráter unitário da matriz S , um dos vínculos fundamentais da teoria quântica de campos [5], implica na conservação das probabilidades respectivas aos estados final e inicial de um processo. Para que uma teoria seja unitária, não se pode ter estados de norma negativa. Caso possua, busca-se implementar um método para cancelá-los totalmente. Uma maneira de eliminar indejáveis graus de liberdade não-físicos, quando se quantiza uma teoria de Yang-Mills, é através do método de quantização de Faddeev-Popov [5, 25].

- Geração dinâmica de massa

Qualquer que seja o método de quantização das teorias de Yang-Mills, haverá problemas no setor infravermelho, isto é, no regime não-perturbativo, o qual está relacionado a fenômenos físicos interessantes como a geração dinâmica de massa e o confinamento de quarks e glúons [17]. O regime de baixas energias é repleto de divergências. Uma hipótese bastante considerada é a da existência de um parâmetro de massa intrínseco às teorias de calibre não-abelianas que seria responsável pela eliminação de divergências infravermelhas mantendo a invariância de calibre. Um exemplo seria o estudo da condensação de operadores de dimensão dois, especialmente os condensados de glúons no calibre de Landau, que apresenta um processo onde a massa dos glúons é gerada dinamicamente. Outro exemplo seria o parâmetro de Gribov [26, 27]. Quando se pretende quantizar consistentemente uma teoria, não basta implementar uma fixação de calibre, pois nem todos os graus de liberdade não-físicos serão eliminados. A quantização deve estar livre de ambiguidades que

surgem quando se trabalha no regime não-perturbativo. Tais ambiguidades, ou cópias de Gribov, estão relacionadas a uma simetria de calibre residual. A eliminação das ambiguidades de Gribov implica na introdução de um parâmetro. Este parâmetro é denominado parâmetro de Gribov, o qual tem dimensão de massa e é obtido através da imposição de que a energia do vácuo dependa minimamente dele [28].

Capítulo 2

Formalismo de primeira ordem para a gravidade

Não há como, por experimentos confinados em uma região infinitesimalmente pequena do espaço, distinguir um campo gravitacional uniforme e estático de um referencial uniformemente acelerado [29].

Albert Einstein

A força gravitacional, a mais antiga interação conhecida pela Física, passou a ser explicada por uma teoria que permitiu, e permite até os dias de hoje, compreender fenômenos que vão desde atração entre luas e planetas até a formação de buracos negros. Esta é a teoria da relatividade geral de Einstein [30, 31]. Entretanto, cabe mencionar a dificuldade da relatividade geral em explicar, pelo menos na sua alcinha original, fenômenos como as rotações das galáxias e a expansão acelerada do Universo. Um outro problema é o desenvolvimento de uma teoria quântica da gravidade, conforme mencionado na Introdução. Numa tentativa de resolver esse problema, desenvolveu-se o formalismo de primeira ordem da gravidade [10, 11, 12, 13], formalismo que será desenvolvido em detalhes neste capítulo. Serão introduzidos aqui conceitos básicos da teoria da relatividade geral, tais como, métrica, variedades, conexões, vierbein¹, curvatura, torção, ação de Hilbert-Einstein [32],

¹Termo que significa *quatro pernas*. Fisicamente está relacionado a uma base com 4 dimensões, a qual frequentemente será usada nesta dissertação. Quando se trata de N dimensões, o termo passa a ser vielbein.

ação de Lovelock [33] e ação de Mardones-Zanelli [34].

2.1 Geometria diferencial e relatividade geral

Durante um tempo, a geometria euclidiana foi mais do que suficiente em várias aplicações na Física. Entretanto, com os espaços curvos sendo utilizados na relatividade geral, tornou-se conveniente a busca por uma geometria mais ampla. Uma exigência que pode ser notada no próprio Princípio da Equivalência, enunciado aqui de uma maneira alternativa:

Em cada ponto do espaço-tempo com um campo gravitacional qualquer é possível escolher um sistema localmente inercial onde, em uma região suficientemente pequena, as leis da natureza sejam determinadas pela relatividade especial. [13, 35]

Quando se imagina um objeto em queda livre, intuitivamente está definido um sistema inercial local, pois o referencial do observador é uniformemente acelerado e para si está retomada a relatividade especial. Entretanto, estabelecer um critério de localidade implica em uma pergunta importante: Como mensurar o tamanho dessa vizinhança e como saber se tal medida é acurada o suficiente para se entender as leis físicas em questão? A geometria diferencial resolveu, para os físicos, o problema da acurácia sobre a localidade de um referencial quando tomou pra si o estudo das variedades e dos entes geométricos associados a estes espaços [13]. Um destes entes é a geodésica, cujo desvio está relacionado a geometria de um espaço curvo, provavelmente deformado pela presença de matéria, como será visto mais adiante na descrição das equações de Einstein.

2.2 O formalismo da métrica

Como principal protagonista da relatividade geral, o tensor métrico é responsável por descrever e caracterizar a geometria do espaço-tempo e, claro, como o campo gravitacional passaria a ser entendido. Assim, o tensor métrico se tornou o campo fundamental da

relatividade geral. Inicialmente, é necessária uma breve apresentação de alguns aspectos da geometria riemanniana envolvida na teoria de Einstein e, no decorrer desta, compreender o cenário da geometria do espaço-tempo que será empregada aqui. Uma geometria riemanniana é, exclusivamente, baseada em uma métrica [19, 36]. É o tensor métrico, ou simplesmente métrica, que uma vez definido, permite a obtenção de objetos geométricos, tais como comprimentos, ângulos, áreas e volumes sobre uma variedade diferenciável.

O tensor métrico $g_{\mu\nu}(x)$ sobre uma variedade \mathbb{M}^4 permite a determinação do elemento geométrico mais simples do espaço-tempo, isto é, a distância entre dois pontos próximos, x^μ e $x^\mu + dx^\mu$:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu, \quad (2.1)$$

onde² $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$.

Na ausência de um campo gravitacional, tem-se um sistema inercial em todo o espaço, portanto a distância infinitesimal é obtida por $ds^2 = \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$.

A derivada completa de um tensor ou, simplesmente, derivada covariante de um tensor exige a definição de uma conexão que estabeleça um elo entre o tensor que se deseja derivar e aquele que será produzido após essa operação. A conexão afim é um tipo de conexão que pode estabelecer tal ligação. Como exemplo, seja um vetor contravariante \mathcal{V}^μ em um ponto de uma variedade dotada de uma métrica $g_{\mu\nu}$. A derivada covariante deste vetor é

$$D_\beta \mathcal{V}^\mu = \partial_\beta \mathcal{V}^\mu + \Gamma^\alpha_{\beta\nu} \mathcal{V}^\nu. \quad (2.2)$$

Antes, vale lembrar que uma conexão riemanniana é definida sob duas condições:

- Condição de compatibilidade, i.e., a derivada covariante da métrica é nula, i.e., $D_\beta g_{\mu\nu} = 0$.
- A torção é nula, $T^\alpha_{\beta\nu} = \Gamma^\alpha_{\beta\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\beta} = 0$.

Partindo da primeira e da segunda condição, os símbolos de Christoffel, agora equivalente

²Daqui por diante, será adotado, por simplicidade, $g_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu}(x)$, pois fica já entendido que o tensor métrico pode depender da posição e, não mais, será necessário expor esse fato.

a conexão afim, são obtidos pela equação,

$$\Gamma^\alpha_{\beta\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\rho} (-\partial_\rho g^{\nu\beta} + \partial_\beta g^{\beta\rho} + \partial_\nu g^{\rho\beta}). \quad (2.3)$$

Na ausência de torção, os símbolos são simétricos em relação aos índices covariantes, $\Gamma^\alpha_{\beta\nu} = \Gamma^\alpha_{\nu\beta}$. Assim, a conexão relacionada aos símbolos de Christoffel é a conexão métrica adotada por Einstein. Esta atribuição contribuía de forma crucial para o ponto de vista de Einstein que considerava, em sua teoria, o tensor métrico como único campo dinamicamente independente [13].

Um outro tensor associado à conexão métrica, o tensor de Riemann-Christoffel (ou simplesmente tensor de Riemann) é aquele que estabelece a curvatura do espaço-tempo. Esse tensor é obtido pela comutação de duas derivadas covariantes $[D_\mu, D_\nu]\mathcal{V}^\alpha = R^\alpha_{\mu\nu\beta}\mathcal{V}^\beta$, onde

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\alpha_{\nu\beta} - \partial_\nu \Gamma^\alpha_{\mu\beta} + \Gamma^\alpha_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\beta} - \Gamma^\alpha_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\beta}. \quad (2.4)$$

Este tensor é antissimétrico em relação a seus 2 primeiros índices, i.e., $R^\alpha_{\beta\mu\nu} = -R^\alpha_{\nu\mu\beta}$, porém, é simétrico mediante a troca entre o primeiro e o último par de índices, $R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\nu\mu\alpha\beta}$.

Outras duas grandezas importantes relacionadas ao tensor de curvatura: o tensor de Ricci e o escalar de curvatura. Estes são calculados por simples contrações em seus índices. A primeira contração resulta no tensor de Ricci,

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha_{\mu\alpha\nu} = g^{\alpha\beta} R_{\beta\mu\alpha\nu}. \quad (2.5)$$

Enquanto isso, a segunda contração retorna o escalar de curvatura,

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.6)$$

Uma importante atribuição às grandezas (2.5) e (2.6) está na definição do tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu} R. \quad (2.7)$$

O tensor $g_{\mu\nu}$ descreve o campo gravitacional. É na presença de matéria que o espaço-tempo se curva. Portanto, o tensor métrico é fundamental para mostrar como a geometria do espaço-tempo vai indicar como atua o campo gravitacional e a maneira como a matéria está presente na região observada. Postula-se assim, através das equações de Einstein, que o tensor de Einstein (2.7) está relacionado ao tensor energia-momento $\mathcal{T}^{\mu\nu}$ da distribuição de matéria, o que define a equação fundamental da relatividade geral no formalismo da métrica,

$$G^{\mu\nu} + \Lambda g^{\mu\nu} = 8\pi G \mathcal{T}^{\mu\nu}, \quad (2.8)$$

onde G é a constante de Newton para a gravitação e Λ é a constante cosmológica ³.

Hilbert foi o primeiro a propor uma ação para as equações de Einstein [32]. Esta última é conhecida como a ação de Hilbert-Einstein,

$$S[g] = \int d^4x g^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{16\pi G} (R - 2\Lambda) + \mathcal{T}^\mu{}_\mu \right]. \quad (2.9)$$

Sendo que $g = |\det g_{\mu\nu}(x)|$ é o determinante da métrica. A ação (2.9) é invariante sob transformações gerais de coordenadas, assim como qualquer teoria de campo relativística. A ação de Hilbert-Einstein considera ainda a constante cosmológica Λ e a constante gravitacional de Newton G . Obviamente, uma vez calculadas a partir do princípio de Hamilton, as equações tensoriais de Einstein são encontradas.

As seguintes implicações decorrem das equações (2.8):

- Devido ao caráter tensorial, tais equações terão o mesmo significado físico para qualquer sistema de coordenadas, resguardando assim o princípio da covariância.
- Envolve até derivadas de segunda ordem da métrica em qualquer ponto do espaço-tempo.
- Para uma aproximação não-relativística de campo gravitacional fraco, têm como limite a gravitação de Newton.

³Originalmente no trabalho de Einstein, $\Lambda = 0$, porém, recentemente, tem-se considerado essa constante.

Baseado nas duas condições discutidas acima, isto é, $D^\alpha g_{\mu\nu} = 0$ e $T^\alpha_{\beta\nu} = 0$, a teoria de Einstein tinha apenas o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ como campo fundamental. Por outro lado, Cartan afirmava que paralelismo e metricidade seriam independentes um do outro e, assim respaldou sua teoria em uma matemática mais rigorosa no que diz respeito a suposições em relação ao espaço-tempo quando comparada a teoria formulada por Einstein. O modo como o espaço-tempo é tratado por Cartan, permite que, em cada ponto, possa ser garantida a existência de vetores, tensores e espinores. No caso deste último, não é possível incluí-lo na teoria de Einstein.

2.3 Formalismo de primeira ordem

Tratar campos espinoriais na relatividade geral é um assunto difícil, pois não se conhece um modo de fazer representações de espinores do grupo $GL(4, \mathbb{R})$ [35]. Todo e qualquer espinor é, de fato, uma representação do grupo de Lorentz. Isso fica evidenciado, por exemplo, pelo fato de que representar férmions de spin $\frac{1}{2}$, pode ser formalmente feita através da álgebra de Clifford, tal que $\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab}$. Uma maneira de introduzir férmions em espaços curvos é através do chamado espaço tangente. Define-se o espaço-tempo como uma variedade diferenciável 4-dimensional \mathbb{M}^4 . Em cada ponto $x \in \mathbb{M}^4$ existe um espaço tangente plano $T_x(\mathbb{M}^4)$ dotado de uma certa assinatura que depende da métrica. Por exemplo, uma métrica lorentziana, ou seja, a métrica do espaço de Minkowski $\eta = (-1, 1, 1, 1)$. O formalismo de primeira ordem trata justamente de descrever a gravidade nestes espaços.

2.3.1 A vierbein

Um isomorfismo relaciona a variedade \mathbb{M}^4 e o espaço tangente $T_x(\mathbb{M}^4)$. Desta forma uma transformação de coordenadas entre o espaço de Minkowski $T_x(\mathbb{M}^4)$ e o sistema de coordenadas local sobre uma vizinhança aberta de x é obtida por

$$\frac{\partial x^a}{\partial x^\mu} = e^a_\mu(x), \quad (2.10)$$

onde $x^\mu \in \mathbb{M}^4$ e $x^a \in T_x(\mathbb{M}^4)$. Uma coleção como $e^a{}_\mu(x)$, onde $a = \{0, \dots, 3\}$, denominada vierbein, define um referencial local ortonormal sobre \mathbb{M}^4 . Da mesma forma existe uma correspondência um pra um entre os tensores que pertencem a \mathbb{M}^4 e $T_x(\mathbb{M}^4)$, tal que

$$F^{a_1 \dots a_N}(x) = e^{a_1}{}_{\mu_1}(x) \dots e^{a_N}{}_{\mu_N}(x) F^{\mu_1 \dots \mu_N}(x) \quad (2.11)$$

Onde $F^{\mu_1 \dots \mu_N}(x)$ e $F^{a_1 \dots a_N}(x)$ são as componentes dos tensores F em \mathbb{M}^4 e $T_x(\mathbb{M}^4)$, respectivamente.

No espaço $T_x(\mathbb{M}^4)$, o comprimento de arco é dado por

$$ds'^2 = \eta_{ab} dx^a dx^b. \quad (2.12)$$

Preservando o comprimento de arco pelo mapeamento $ds^2 = ds'^2$, obtém-se o tensor métrico em função da vierbein⁴ $e^a{}_\mu$,

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu &= \eta_{ab} dx^a dx^b = \eta_{ab} e^a{}_\mu dx^\mu e^b{}_\nu dx^\nu \\ g_{\mu\nu} &= \eta_{ab} e^a{}_\mu e^b{}_\nu \end{aligned} \quad (2.13)$$

No espaço tangente, a ação do grupo de Lorentz sobre a vierbein é

$$e^a{}_\mu \rightarrow e'^a{}_\mu = \Lambda^a{}_b e^b{}_\mu, \quad (2.14)$$

sendo $\Lambda^a{}_b \equiv \Lambda^a{}_b(x) \in SO(1, 3)$ uma transformação local de Lorentz, pois o espaço tangente é diferente em cada ponto do espaço-tempo, tal que

$$\eta_{cd} = \Lambda^a{}_c \Lambda^b{}_d \eta_{ab}. \quad (2.15)$$

A vierbein, sendo um isomorfismo, possui inversa, a qual também pode ser obtida pela preservação do comprimento de arco. Assim, a vierbein e sua inversa estabelecem entre

⁴Por mera simplicidade, exceto quando for necessário, será usado $e^a \equiv e^a(x)$ e $\omega^a{}_b \equiv \omega^a{}_b(x)$, onde $\omega^a{}_b$ será definido na próxima subseção.

si os vínculos

$$e^a{}_\mu e^\mu{}_b = \delta^a_b, \quad (2.16)$$

$$e^a{}_\mu e^\nu{}_a = \delta^\mu{}_\nu. \quad (2.17)$$

Admitindo a inversa da vierbein e usando a equação (2.13), chega-se à relação inversa a da (2.13),

$$\eta_{ab} = g_{\mu\nu} e^\mu{}_a e^\nu{}_b. \quad (2.18)$$

Enfim, será útil para os desenvolvimentos futuros, a seguinte definição do determinante da vierbein,

$$e = |\det e^a{}_\mu| \quad (2.19)$$

Fazendo uso da (2.13), pode-se estabelecer agora uma relação entre os determinantes da métrica e da vierbein,

$$|g| = |\det g_{\mu\nu}| = |\det e^a{}_\mu|^2 \Rightarrow e = \sqrt{|g|}. \quad (2.20)$$

As seguintes relações surgem dos resultados obtidos em (2.13), (2.14) e (2.20):

- A vierbein é a uma espécie de raiz quadrada da métrica.
- Todas as propriedades métricas do espaço-tempo estão contidas na vierbein.
- Sob uma transformação de Lorentz, a vierbein se transforma de acordo com a (2.14). Aqui $SO(1,3)$ é interpretado como um grupo de calibre de maneira que o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ seja invariante de calibre.
- A diferença entre as N^2 componentes independentes da vierbein e as $(N^2 + N)/2$ componentes independentes da métrica é justamente a quantidade $(N^2 - N)/2$, que é o número de rotações em N dimensões. Aqui, obviamente, $N = 4$.

A vierbein $e^a{}_\mu$, sendo um vetor do espaço tangente, pode igualmente ser representada pelo seu dual no espaço cotangente $T_x^*(\mathbb{M}^4)$, $e^a = e^a{}_\mu dx^\mu$. Esta quantidade e^a é uma 1-forma que substitui a métrica como campo fundamental para este formalismo. A partir

de agora, será feito o uso de formas diferenciais para descrever o formalismo de primeira ordem.

2.3.2 A conexão de spin

A conexão afim da relatividade geral está relacionada ao transporte paralelo de vetores sobre uma variedade. No formalismo de primeira ordem é a conexão de spin,

$$\omega^a_b = \omega^a_{b\mu} dx^\mu, \quad (2.21)$$

que está presente no acoplamento de campos de matéria com a geometria do espaço-tempo. A conexão de spin é, por sua vez, totalmente independente da métrica e toma valores na álgebra de Lorentz. Para entender a geometria por trás da conexão de spin, sejam os pontos x e $x + dx$ onde existem os espaços cotangentes $T_x^*(\mathbb{M}^4)$ e $T_{x+dx}^*(\mathbb{M}^4)$, respectivamente, em uma variedade \mathbb{M}^4 . Seja também um campo vetorial $\psi^a(x)$ que será transportado paralelamente do ponto x ao $x + dx$. O efeito é dado por

$$\psi'^a(x) = \psi^a(x) + D\psi^a(x), \quad (2.22)$$

onde $D\psi^a(x) = d\psi^a(x) + \omega^a_b(x)\psi^b(x)$ é a derivada covariante exterior atuando sobre o campo. A derivada covariante é responsável por medir a mudança no tensor paralelamente transportado. Assim, as propriedades afins do espaço estão codificadas na 1-forma de conexão.

Uma vez que a derivada covariante, definida em (2.22), deve se transformar perante o grupo de Lorentz, a conexão de spin (2.21) deve se transformar como

$$\omega^a_{b\mu} \rightarrow \omega'^a_{b\mu} = \Lambda^a_c \omega^c_{d\mu} \Lambda_b^d + \Lambda^a_c \partial_\mu \Lambda_b^c. \quad (2.23)$$

Em cada espaço cotangente $T_x^*(\mathbb{M}^4)$ é definida a ação do grupo $SO(1,3)$. Este fato se deve pelas matrizes de transformação Λ dependerem de x . Por isso, é necessário introduzir um tipo de conexão que compense o fato do grupo agir independentemente em cada ponto

da variedade, assim como em uma teoria de calibre. Para uma determinada variedade existe uma única conexão correspondente ao sistema de coordenadas. Para todos os efeitos, o formalismo de primeira ordem é, realmente, uma teoria de calibre.

Assim como a vierbein e^a está associada a $g_{\mu\nu}$ através da (2.13), a conexão spin ω^a_b está associada a conexão afim Γ^a_b . Esta relação é obtida ao satisfazer a condição de compatibilidade $D_\alpha g_{\mu\nu} = 0$. Para tal, define-se a derivada covariante completa (é a derivada que percebe índices no espaço-tempo e do espaço tangente), e impõe-se $\tilde{D}_\alpha e^a_\mu = 0$. Esta equação explicitamente é,

$$\tilde{D}_\alpha e^a_\mu = \partial_\alpha e^a_\mu + \omega^a_{\ \alpha b} e^b_\mu - \Gamma^\beta_{\ \alpha\mu} e^a_\beta, \quad (2.24)$$

de onde se obtém

$$\Gamma^\alpha_{\ \mu\nu} = e^\alpha_a \partial_\mu e^a_\nu + \omega^a_{\ \mu b} e^\alpha_a e^b_\nu. \quad (2.25)$$

É importante chamar atenção para o fato de que pode se mostrar que a equação (2.25) pode ser escrita como o símbolo de Christoffel mais um termo associado a torção. O que mostra que no formalismo de primeira ordem a torção surge naturalmente.

2.3.3 A estrutura do formalismo de primeira ordem

A métrica de Minkowski, η_{ab} , e o pseudo-tensor de Levi-Civita, ϵ_{abcd} são tensores invariantes perante o grupo de rotações $SO(1,3)$. Ou seja, tais tensores, quando submetidos à ação do grupo de Lorentz permanecem constantes em toda a variedade \mathbb{M}^4 . Logo, $d\eta_{ab} = 0$ e $d\epsilon_{a_1, \dots, a_N} = 0$. Da mesma forma $D\eta_{ab} = 0$ e $D\epsilon_{a_1, \dots, a_N} = 0$. O que implica em

$$\begin{aligned} \eta_{ac} \omega^c_b &= -\eta_{bc} \omega^c_a \\ \epsilon_{b_1, a_2, \dots, a_N} \omega^{b_1}_{a_1} + \epsilon_{a_1, b_2, \dots, a_N} \omega^{b_2}_{a_2} + \dots + \epsilon_{a_1, a_2, \dots, b_N} \omega^{b_N}_{a_N} &= 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

A vierbein e^a e a conexão de spin ω^a_b podem descrever, direta ou indiretamente, todas as propriedades geométricas de \mathbb{M}^4 . A vierbein ocupa um papel importante tal como aquele ocupado pelo clássico tensor métrico da relatividade geral. Do mesmo modo, a conexão de

spin está relacionada, juntamente com a vierbein, com a conexão afim do espaço-tempo.

Seja um campo descrito por 0-forma ψ^a (sem que ocorra perda de generalidade), e uma derivada covariante D atuando sobre ele, isto é, $D\psi^a = d\psi^a + \omega^a_b \psi^b$. Em seguida, impõe-se que D atue novamente,

$$D^2\psi^a = D(d\psi^a + \omega^a_b \psi^b) = R^a_b \psi^b, \quad (2.27)$$

sendo utilizada a nilpotência da derivada exterior d . Sobre (2.27), é simples observar que

$$R^a_b = d\omega^a_b + \omega^a_c \omega^c_b, \quad (2.28)$$

é definido como uma 2-forma de curvatura R^a_b . De outro modo,

$$R^a_b = \frac{1}{2} R^a_{b\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.29)$$

Pode-se ver que a curvatura está relacionada ao tensor de Riemann como

$$R^a_b = \frac{1}{2} e^a_\alpha e^\beta_b R^\alpha_{\beta\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.30)$$

Agora, atuando com o operador derivada covariante na vierbein, o resultado é a 2-forma de torção,

$$T^a = De^a \equiv de^a + \omega^a_b e^b, \quad (2.31)$$

a qual, nada mais é que o acoplamento mínimo de e^a . A torção $T^\alpha_{\beta\nu}$, no formalismo da métrica, depende das conexões afins, isto está de acordo com a 2-forma (2.31), onde a derivada covariante da vierbein e^a conduz a uma dependência explícita com a conexão de spin ω^a_b ,

$$T^a = \frac{1}{2} e^a_\alpha T^\alpha_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.32)$$

onde $T^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu} - \Gamma^\alpha_{\nu\mu}$.

Mostra-se a seguir uma sequência de aplicações da derivada covariante, resultando nas

seguintes relações de hierarquia:

$$De^a = T^a \quad (2.33)$$

$$DT^a = R^a_b e^b, \quad (2.34)$$

$$DR^a_b = 0. \quad (2.35)$$

A relação entre a curvatura e a derivada covariante mostrada em (2.35) nada mais é do que a conhecida identidade de Bianchi. Como consequência dessa identidade, ao tomar derivadas covariantes sucessivas, não haverá produção de novos tensores com possíveis propriedades geométricas.

Vale ressaltar que agora [13], neste formalismo, quando comparado com a teoria de calibre, a conexão de spin se comporta como a conexão de calibre, enquanto a vierbein exerce o papel de campo de matéria. Da mesma forma, a 2-forma de curvatura está relacionada ao tensor intensidade de campo, enquanto a torção é um acoplamento mínimo da vierbein.

2.3.4 Ações de gravidade

A ação de Hilbert-Einstein (2.9), no formalismo de primeira ordem, é [13]

$$S_{HE} = \frac{1}{16\pi G} \int \epsilon_{abcd} (R^{ab} e^c e^d + \frac{\Lambda^2}{2} e^a e^b e^c e^d). \quad (2.36)$$

Contudo, de acordo com o teorema de Lovelock [13, 33], a ação de gravidade mais geral possível, contendo apenas derivadas de até ordem 2 e, dependendo apenas da curvatura, será

$$S_L = \frac{1}{16\pi G} \int \epsilon_{abcd} (\beta R^{ab} R^{cd} + R^{ab} e^c e^d + \frac{\Lambda^2}{2} e^a e^b e^c e^d), \quad (2.37)$$

onde β é um coeficiente independente.

No caso de uma gravidade que permite torção, tal como seria a forma completa no

formalismo de primeira ordem, a ação de Mardones-Zanelli [13, 34] é escrita como

$$S_{MZ} = S_L + \int (\beta_1 R^{ab} R_{ab} + \beta_2 R_{ab} e^a e^b + \beta_3 T^a T_a) . \quad (2.38)$$

Nas ações (2.36), (2.37) e (2.38), não aparece o hodge dual. Fato devido à não admissão a priori de uma métrica, uma vez que esta deve surgir espontaneamente em uma teoria efetiva. O fato de se excluir a métrica como campo fundamental implica na exclusão automática da vierbein inversa [13, 34].

Capítulo 3

Teorias de calibre para o grupo

$SO(m, n)$

Para cada simetria na natureza há uma correspondente lei de conservação e para cada lei de conservação há uma simetria [6].

Amalie Emmy Noether

Será tratada neste e no próximo capítulo, uma teoria de calibre para a gravidade de forma que se possa descrevê-la tal como as outras interações fundamentais. Será apresentada uma forma de decompor o grupo $SO(m, n)$. Em seguida, será apresentada uma maneira de redefinir os campos e uma contração do grupo para que se possa estabelecer algum tipo de conexão com uma teoria de gravidade. O conteúdo deste capítulo e também do próximo pode ser encontrado em [16].

3.1 $SO(m, n)$: Decomposição da teoria

A teoria de calibre que será tratada aqui, terá como base o grupo $SO(m, n)$ restrito a $m \in \{0, 1, 2\}$ e impondo que $m + n = 5$. Simultaneamente, o espaço-tempo será descrito por uma variedade diferenciável euclidiana com quatro dimensões, denotado por \mathbb{R}^4 . De acordo com o valor atribuído a m , o grupo será classificado da seguinte maneira:

- Quando $m=0$, será o grupo ortogonal $SO(5)$.

- Quando $m=1$, será o grupo de de Sitter $SO(1, 4)$.
- Quando $m=2$, será o grupo de anti-de Sitter $SO(2, 3)$.

O $SO(m, n)$ será chamado, geralmente, de grupo de de Sitter, exceto quando for necessário explicitar alguma distinção. O grupo $SO(m, n)$ define um espaço plano 5-dimensional, $\mathbb{R}_S^{m,n}$, cuja métrica invariante é $\eta^{AB} = \text{diag}(\epsilon, \epsilon, 1, 1, 1)$, tal que $\epsilon = (-1)^{(2-m)!}$ e $\epsilon = (-1)^{m!+1}$. É importante ressaltar que este espaço não tem qualquer relação com o espaço-tempo \mathbb{R}^4 .

A relação de comutação dos geradores do grupo obedecem a equação (1.1). Atribuindo-se para cada índice caligráfico dois índices latinos maiúsculos, $\mathcal{A} = AB$, $\mathcal{B} = CD$ e $\mathcal{C} = EF$, enquanto $\lambda \equiv J$, e lembrando que $J^{AB} = -J^{BA}$, onde J^{AB} representa os 10 geradores do grupo, obtém-se

$$[J^{AB}, J^{CD}] = f^{ABCD}_{EF} J^{EF}. \quad (3.1)$$

Esses geradores são anti-hermitianos e antissimétricos em relação aos seus índices, os quais, em letras latinas maiúsculas, rodam na ordem $\{5, 0, 1, 2, 3\}$. As constantes de estrutura são obtidas como segue:

Sejam os geradores $J^{AB} = \frac{1}{2}(\eta^{AE}\xi_E\partial^B - \eta^{BE}\xi_E\partial^A)$, onde ξ^A são as coordenadas no espaço $\mathbb{R}_S^{m,n}$. Logo,

$$\begin{aligned} J^{AB} J^{CD} &= \frac{1}{4} \left[\eta^{AE}\xi_E\eta^{CF} \underbrace{(\partial^B\xi_F)}_{=\delta_F^B} \partial^D + \eta^{AE}\xi_E\eta^{CF}\xi_F\partial^B\partial^D - \eta^{AE}\xi_E\eta^{DF} \underbrace{(\partial^B\xi_F)}_{=\delta_F^B} \partial^C + \right. \\ &\quad \left. -\eta^{AE}\xi_E\eta^{DF}\xi_F\partial^B\partial^C - \eta^{BE}\xi_E\eta^{CF} \underbrace{(\partial^A\xi_F)}_{=\delta_F^A} \partial^D - \eta^{BE}\xi_E\eta^{CF}\xi_F\partial^A\partial^D + \right. \\ &\quad \left. +\eta^{BE}\eta^{DF}\xi_E \underbrace{(\partial^A\xi_F)}_{=\delta_A^F} \partial^C + \eta^{BE}\xi_E\eta^{DF}\xi_F\partial^A\partial^C \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\eta^{CB} (\eta^{AE}\xi_E\partial^D) + \xi^A\xi^C\partial^B\partial^D - \eta^{DB} (\eta^{AE}\xi_E\partial^C) - \xi^A\xi^D\partial^B\partial^C + \right. \\ &\quad \left. -\eta^{CA} (\eta^{BE}\xi_E\partial^D) - \xi^B\xi^C\partial^A\partial^D + \eta^{DA} (\eta^{BE}\xi_E\partial^C) + \xi^B\xi^D\partial^A\partial^C \right]. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Da mesma forma,

$$J^{CD} J^{AB} = \frac{1}{4} \left[\eta^{AD} (\eta^{CF} \xi_F \partial^B) + \xi^C \xi^A \partial^D \partial^B - \eta^{BD} (\eta^{CF} \xi_F \partial^A) - \xi^C \xi^B \partial^D \partial^A + \right. \\ \left. - \eta^{AC} (\eta^{DF} \xi_F \partial^B) - \xi^D \xi^A \partial^C \partial^B + \eta^{BC} (\eta^{DF} \xi_F \partial^A) + \xi^D \xi^B \partial^C \partial^A \right] \quad (3.3)$$

Assim, chega-se a álgebra do grupo:

$$[J^{AB}, J^{CD}] = -\frac{1}{2} \{ (\eta^{AC} J^{BD} + \eta^{BD} J^{AC}) - (\eta^{AD} J^{BC} + \eta^{BC} J^{AD}) \}. \quad (3.4)$$

Um grupo pode ser decomposto como um produto direto de dois outros grupos, mas antes, é necessário levar em conta as seguintes definições [19]:

Definição 3.1 *Seja um grupo G e um subgrupo H . Um espaço coset C é definido como $C = G/H$ e $G = H \times C$. Seja h e c , respectivamente, as álgebras de H e C , enquanto $\tilde{h} = \{h, 0\}$. A álgebra se decompõe como $[h, h] \subseteq h$, $[c, c] \subseteq \tilde{h}$ e $[c, h] \subseteq c \oplus \tilde{h}$. Assim, o subgrupo H é um subgrupo de estabilidade.*

Definição 3.2 *Espaços coset são classificados como segue:*

1. *Se $[c, c] \subseteq 0$, então o espaço C também é um subgrupo de G , nesse caso, abeliano.*
2. *Se $[c, h] \subseteq c$, então C é um espaço simétrico ou invariante.*

Logo, pode-se decompor o grupo $SO(m, n)$ de acordo com

$$SO(m, n) \equiv SO(m! - 1, n) \otimes S(4), \quad (3.5)$$

tal que, $S(4)$ é um *coset* simétrico com 4 graus de liberdade,

$$S(4) = SO(m, n)/SO(m! - 1, n). \quad (3.6)$$

Esta decomposição é realizada com êxito quando o grupo original (3.4) é projetado, por exemplo, na quinta coordenada. Assim, a álgebra (3.4) se decompõe como

$$[J^{ab}, J^{cd}] = -\frac{1}{2} \{ (\eta^{ac} J^{bd} + \eta^{bd} J^{ac}) - (\eta^{ad} J^{bc} + \eta^{bc} J^{ad}) \}, \quad (3.7)$$

$$[J^a, J^b] = -\frac{\epsilon}{2} J^{ab}, \quad (3.8)$$

$$[J^{ab}, J^c] = \frac{1}{2} (\eta^{ac} J^b - \eta^{bc} J^a), \quad (3.9)$$

onde $J^a \equiv J^{5a}$. Para decompor a álgebra, considerou-se que letras latinas minúsculas, (a, b, c, d) , rodam na ordem $\{0, 1, 2, 3\}$, enquanto $\eta^{ab} = \text{diag}(\epsilon, 1, 1, 1)$, conforme é mostrado detalhadamente nos passos (1), (2) e (3) a seguir:

1. Se $A = a, B = b, C = c$ e $D = d$, obtém-se imediatamente a equação (3.7).
2. Se $A = 5, B = a, C = 5$ e $D = b$, então:

$$[J^{5a}, J^{5b}] = -\frac{1}{2} \{ (\eta^{55} J^{ab} + \eta^{ab} J^{55}) - (\eta^{5b} J^{a5} + \eta^{a5} J^{5b}) \}. \quad (3.10)$$

Com $\eta^{55} = \epsilon, \eta^{a5} = 0$ e $J^{55} = 0$, a equação (3.10) resulta na (3.8).

3. Se $A = a, B = b, C = 5$ e $D = c$, então:

$$[J^{ab}, J^{5c}] = -\frac{1}{2} \{ (\eta^{a5} J^{bc} + \eta^{bc} J^{a5}) - (\eta^{ac} J^{b5} + \eta^{b5} J^{ac}) \}. \quad (3.11)$$

E, assim, (3.11), devidamente ajustada, resulta na equação (3.9).

A equação (1.9) apresentou a 1-forma de conexão Y que será agora, então, representada pela álgebra decomposta, isto é,

$$Y = Y^A_B J^B_A = A^a_b J^b_a + \theta^a J_a. \quad (3.12)$$

Onde A^a_b e θ^a são os campos de calibre em cada setor da álgebra.

A equação (1.10) mostra como uma transformação de calibre afeta a 1-forma Y . Com $U \approx 1 + \kappa\zeta \in SO(m, n)$, a equação (1.11) fica como:

$$Y' = Y + (d + \kappa Y)\zeta. \quad (3.13)$$

Fazendo também $\zeta = \alpha^a_b J_a^b + \xi^a J_a$,

$$\begin{aligned} Y' &= A^a_b J_a^b + \theta^a J_a + d(\alpha^a_b J_a^b + \xi^a J_a) + \frac{\kappa}{2}[(A^a_b J_a^b + \theta^a J_a), (\alpha^c_d J_c^d + \xi^c J_c)] \\ &= (A^a_b + d\alpha^a_b) J_a^b + (\theta^a + d\xi^a) J_a + \frac{\kappa}{2}\{A^a_b \alpha^c_d [J_a^b, J_c^d] + \\ &+ A^a_b \xi^c [J_a^b, J_c] + \theta^a \alpha^c_d [J_a, J_c^d] + \theta^a \xi^c [J_a, J_c]\}. \end{aligned}$$

Logo, fazendo uso das equações (3.7), (3.8) e (3.9), chega-se a:

$$A^a_b \rightarrow A^a_b + D\alpha^a_b - \frac{\epsilon\kappa}{4}(\theta^a \xi_b - \theta_b \xi^a), \quad (3.14)$$

$$\theta^a \rightarrow \theta^a + D\xi^a + \kappa\alpha^a_b \theta^b. \quad (3.15)$$

Agora $D = d + \kappa A$ é a derivada covariante em relação ao setor $SO(m! - 1, n)$.

A 2-forma intensidade de campo (1.12) é decomposta como

$$\begin{aligned} F &= F^A_B J_A^B = F^a_b J_a^b + F^{5a} J_a \\ &= \left(\Omega^a_b - \frac{\epsilon\kappa}{4}\theta^a \theta_b\right) J_a^b + K^a J_a, \end{aligned} \quad (3.16)$$

onde $\Omega^a_b = dA^a_b + \kappa A^a_c A^c_b$ e $K^a = d\theta^a - \kappa A^a_b \theta^b$. De acordo com a 2-forma intensidade de campo decomposta, apresentada na equação (3.16), escreve-se a ação de Yang-Mills (1.15) como

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int (F^A_B * F_A^B) = \frac{1}{2} \int (F^a_b * F_a^b + 2F^a * F_a) \\ &= \frac{1}{2} \int \left\{ \Omega^a_b * \Omega_a^b + \frac{1}{2} K^a * K_a - \frac{\epsilon\kappa}{2} \Omega^a_b * (\theta_a \theta^b) + \frac{\kappa^2}{16} \theta^a \theta_b * (\theta_a \theta^b) \right\}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

3.2 A contração de Inönü-Wigner

A mecânica clássica é um caso limite da mecânica relativística quando $\frac{v}{c} \rightarrow 0$, ou seja, o grupo de Lorentz foi reduzido ao grupo de Galileu [37]. Este é apenas um caso onde se observa que uma álgebra pode ser transformada em outra através de um processo de contração, no qual, um determinado grupo é reduzido a outro ligado ao primeiro por um certo parâmetro. Este exemplo ilustra um processo conhecido como contração de Inönü-Wigner [37], justificado formalmente pelo teorema a seguir:

Teorema 1 *Seja um grupo de Lie G tal que exista um subgrupo não-trivial H , cuja álgebra permaneça fixa sob contração, enquanto o grupo contraído G' tenha um subgrupo abeliano invariante¹ S sobre o qual $H = G'/S$. Reciprocamente, a condição necessária para que um grupo G' seja determinado por contração, a partir de um outro grupo, é a existência, em G' , de um subgrupo abeliano invariante S e um subgrupo H tal que G' seja o produto semi-direto de H e S .*

Para ilustrar, de maneira simples, seja um outro exemplo de contração, $SO(3) \rightarrow ISO(2)$, como segue:

Seja a álgebra do grupo $SO(3)$:

$$[L_i, L_j] = i\varepsilon_{ij}^k L_k. \quad (3.18)$$

Onde $i, j, k \in \{x, y, z\}$. O grupo $SO(2)$ gerado por L_z será o subgrupo invariante H . Considere as seguintes transformações:

$$\begin{aligned} M_x &= \alpha L_x, \\ M_y &= \alpha L_y, \\ M_z &= L_z. \end{aligned} \quad (3.19)$$

¹Quando é dito que S é invariante, significa que $[s, h] \in s$, o que implica que H é um subgrupo de estabilidade.

Substituindo (3.19) em (3.18), resulta em

$$\begin{aligned}
[M_x, M_y] &= [\alpha L_x, \alpha L_y] = \alpha^2 i L_z, \\
[M_y, M_z] &= [\alpha L_y, L_z] = i(\alpha L_x) = i M_x, \\
[M_z, M_x] &= [\alpha L_z, L_x] = i(\alpha L_y) = i M_y.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Para $\alpha \rightarrow 0$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
[M_x, M_y] &= 0, \\
[M_y, M_z] &= i M_x, \\
[M_z, M_x] &= i M_y.
\end{aligned} \tag{3.21}$$

A nova álgebra (3.21) para M_a representa o grupo $ISO(2)$.

Nesta dissertação, um exemplo de maior interesse, seria o grupo de anit-de Sitter $SO(2, 3)$, devidamente projetado na quinta coordenada, conforme as equações (3.7), (3.8) e (3.9), nas quais é aplicada a transformação

$$J^a = \mathcal{R} P^a, \tag{3.22}$$

onde o parâmetro de contração \mathcal{R} é associado ao raio do universo de de Sitter relacionado a curvatura desse espaço como $R \propto \frac{1}{\mathcal{R}^2}$. Somente as equações (3.8) e (3.9) são alteradas pela inclusão do parâmetro, logo,

$$[P^a, P^b] = \frac{1}{\mathcal{R}^2} [J^a, J^b] = -\frac{\epsilon}{2\mathcal{R}^2} J^{ab}, \tag{3.23}$$

$$[J^{ab}, P^c] = \frac{1}{2} \left(\eta^{ac} \frac{J^b}{\mathcal{R}} - \eta^{bc} \frac{J^a}{\mathcal{R}} \right) = \frac{1}{2} (\eta^{ac} P^b - \eta^{bc} P^a). \tag{3.24}$$

No limite $\mathcal{R} \rightarrow \infty$, encontra-se a álgebra de Poincaré

$$[J^{ab}, J^{cd}] = -\frac{1}{2} \{ (\eta^{ac} J^{bd} + \eta^{bd} J^{ac}) - (\eta^{ad} J^{bc} + \eta^{bc} J^{ad}) \}, \quad (3.25)$$

$$[P^a, P^b] = 0, \quad (3.26)$$

$$[J^{ab}, P^c] = \frac{1}{2} (\eta^{ac} P^b - \eta^{bc} P^a). \quad (3.27)$$

E assim, por meio deste exemplo, mostra-se como, simplesmente por uma contração que dependa de um parâmetro ligado ao grupo original, o grupo de de Sitter $SO(2, 3)$ é reduzido ao grupo de Poincaré $ISO(1, 3)$.

Finalmente, pode-se afirmar que a contração de Inönü-Wigner é um dispositivo eficaz para que o grupo de de Sitter seja reduzido ao de Poincaré de modo que seja permitido a formulação de uma teoria a partir de uma ação de Yang-Mills.

3.3 Redefinição, contração e quebra de simetria

Independentemente do mecanismo físico de geração de massa [17, 28], uma escala de massa γ será assumida de modo que permita a redefinição dos campos. Para fazer contato com a gravidade, é feita a seguinte redefinição:

$$A \rightarrow \frac{1}{\kappa} A, \quad (3.28)$$

$$\theta \rightarrow \frac{\gamma}{\kappa} \theta. \quad (3.29)$$

Com essa redefinição, o campo θ^a , que anteriormente possuía componentes θ_μ^a de dimensão um, agora possuem dimensão zero. Dessa forma, a ação (3.17) passa a ser escrita como

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int \left\{ \bar{\Omega}_b^a * \bar{\Omega}_a^b + \frac{\gamma^2}{2} \bar{K}^a * \bar{K}_a - \frac{\epsilon\gamma^2}{2} \bar{\Omega}_b^a * (\theta_a \theta^b) + \frac{\gamma^4}{16} \theta^a \theta_b * (\theta_a \theta^b) \right\}. \quad (3.30)$$

Com $\bar{\Omega}_b^a = dA_b^a + A_c^a A_b^c$ e $\bar{K}^a = d\theta^a - A_b^a \theta^b$, é obtida a ação modificada com a devida inclusão dos parâmetros de acoplamento κ e de massa γ . Desse modo, o parâmetro de acoplamento κ é retirado do integrando da ação (3.30) e, portanto, será possível que a

ação modificada seja interpretada como uma ação gravitacional.

Os geradores do grupo $SO(m, n)$ devem ser reparametrizados por causa da inclusão de uma escala de massa. Desse modo uma projeção estereográfica² [38, 39] é agora permitida se o parâmetro de massa for identificado com o raio da variedade $\mathbb{R}_S^{m,n}$, ou seja,

$$J^a = -\frac{\kappa}{\gamma} P^a + \frac{\epsilon}{16} \frac{\gamma}{\kappa} (2\bar{x}_a \bar{x}^b P_b + \sigma^2 P^a), \quad (3.31)$$

onde \bar{x}^a são as coordenadas estereográficas do espaço $\mathbb{R}_S^{(m-1),n}$. Em seguida, a partir das equações (3.28) e (3.29), tem-se

$$\theta \rightarrow \frac{\gamma}{\kappa} \theta \equiv \frac{\gamma}{\kappa} \theta^a J_a = -\theta^a P_a + \frac{\gamma^2}{\kappa^2} \theta^a \left(\frac{\epsilon}{8} \bar{x}_a \bar{x}_b P^b + \frac{\epsilon \sigma^2}{16} P_a \right). \quad (3.32)$$

Após a projeção estereográfica, a nova forma da álgebra de de Sitter ou de anti-de Sitter, será

$$[J^{ab}, J^{cd}] = -\frac{1}{2} \{ (\eta^{ac} J^{bd} + \eta^{bd} J^{ac}) - (\eta^{ad} J^{bc} + \eta^{bc} J^{ad}) \}, \quad (3.33)$$

$$[J^a, J^b] = -\frac{\epsilon \gamma^2}{2\kappa^2} J^{ab}, \quad (3.34)$$

$$[J^{ab}, J^c] = \frac{1}{2} (\eta^{ac} J^b - \eta^{bc} J^a). \quad (3.35)$$

Uma vez que um parâmetro de massa foi usado, é possível agora, explorar também a liberdade assintótica do modelo [23, 24]. Isto significa que em baixas energias ocorre o aumento do parâmetro κ , possibilitando que, nesse limite, $\frac{\gamma^2}{\kappa^2} \rightarrow 0$, para algumas escalas não-perturbativas. Sob tal condição a álgebra de de Sitter (3.33), (3.34) e (3.35) é contraída para a de Poincaré, isto é,

$$[J^a, J^b] = -\frac{\epsilon \gamma^2}{2\kappa^2} J^{ab} \longrightarrow [P^a, P^b] = 0. \quad (3.36)$$

Dessa maneira, nota-se claramente como o gerador projetado se reduz ao gerador de

²Detalhes da projeção estereográfica serão discutidos no Apêndice B.

translações em $\mathbb{R}_S^{(m!-1),n}$,

$$J^a \longrightarrow -\kappa\gamma^{-1}P^a, \quad (3.37)$$

$$\theta \longrightarrow -\theta^a P_a. \quad (3.38)$$

A simetria de calibre é, portanto, dinamicamente deformada ao grupo de Poincaré, $SO(m, n) \longrightarrow ISO(m! - 1, n)$, para alguns valores do regime de acoplamento forte. Enquanto isso, a contração de Inönü-Wigner induz uma quebra de simetria da ação (3.17), a qual é invariante sob $SO(m, n)$, mas não sob $ISO(m! - 1, n)$, pois $ISO(m! - 1, n) \not\subset SO(m, n)$. Por outro lado, $ISO(m! - 1, n) \supset SO(m! - 1, n) \subset SO(m, n)$, ou seja, $SO(m! - 1, n)$ é subgrupo de ambos. Mais ainda, $SO(m! - 1, n)$ é estável. Portanto, a contração de Inönü-Wigner implica diretamente numa quebra de simetria $SO(m, n) \longrightarrow SO(m! - 1, n)$.

Sendo assim, as transformações (3.14) e (3.15) dos campos são reduzidas a

$$A^a_b \rightarrow A^a_b + D\alpha^a_b, \quad (3.39)$$

$$\theta^a \rightarrow \theta^a - \alpha^a_b \theta^b, \quad (3.40)$$

decorrentes também da redefinição assumida em (3.28) e (3.29). As equações (3.39) e (3.40) quando comparadas às (3.14) e (3.15), evidenciam a retirada do setor da álgebra que corresponde a quinta coordenada, reduzindo assim a dimensão do espaço interno $\mathbb{R}_S^{m,n}$ de 5-dimensional para 4-dimensional. Fica claro então que, a partir de agora, os campos A^a_b se comportam como campos de calibre, enquanto os campos θ^a ficam associados a campos de matéria. Tudo com relação ao grupo $SO(m! - 1, n)$.

Capítulo 4

Gravidade emergente

The concepts about time and space... Herein lies their strength. Their tendency is radical. Henceforth, space for itself, and time for itself shall completely reduce to a mere shadow, and only some sort of union of the two shall preserve independence [40].

Hermann Minkowski

Uma teoria de calibre para o $SU(2)$ é um possível caminho que permite a deformação do espaço 3-dimensional, induzindo uma geometria de Riemann-Cartan a partir da ação de Yang-Mills [41, 42]. A ideia central a ser abordada neste capítulo concentra-se em estabelecer algum tipo de relação entre as geometrias das teorias de Yang-Mills e das teorias de gravidade.

4.1 Análise de Obukhov em três dimensões

Simetrias espaço-temporais são consideradas simetrias externas, tal como a gravidade no formalismo da métrica. Simetrias internas ocorrem nas interações eletrofracas e fortes. O formalismo de primeira ordem conseguiu escrever a gravidade em termos de simetrias internas. Contudo a simetria de calibre neste formalismo nada mais é do que uma maneira de camuflar as simetrias externas. Entretanto, é possível partir de geometrias puramente internas que a priori nada tem a haver com o espaço-tempo, mostrar que ainda sim,

esta simetria pode deformar o espaço-tempo. Uma geometria métrica externa se torna emergente como uma estrutura efetiva a partir de uma estrutura de calibre do tipo Yang-Mills, onde notavelmente, esta abordagem converge para uma variedade com simetria local do tipo Lorentz.

Lunev demonstrou em [41, 42] a possibilidade de induzir uma geometria de Riemann-Cartan a partir de uma teoria de Yang-Mills no $SU(2)$. Ou seja, dada uma teoria de calibre $SU(2)$ em uma variedade $\mathbb{M}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{M}^3$, tal que \mathbb{R} cabe a parte temporal, enquanto \mathbb{M}^3 é uma variedade plana euclidiana 3-dimensional, esta teoria será capaz de deformar o espaço \mathbb{M}^3 .

De forma similar a [41, 42] será feito aqui um exemplo 3-dimensional com a finalidade de ilustrar a correspondência entre duas teorias que habitam territórios bem distintos, mas que possivelmente são relacionadas através de algum tipo de mapeamento. Para simplificar os cálculos, o parâmetro de acoplamento κ será extraído da ação. Então, considera-se a ação (1.15) para o grupo $SU(2)$ em um espaço 3-dimensional arbitrário com métrica g_{ij} , onde $i, j, k, \dots \in \{0, 1, 2\}$

$$S_{YM} = \frac{1}{2\kappa^2} \int F^i * F_i, \quad (4.1)$$

de modo que $*$ representa aqui, o Hodge dual 3-dimensional. Agora, introduzindo um campo auxiliar, a 1-forma Θ^i , devidamente identificada como $\Theta^i = *F^i$, a ação (4.1) pode ser modificada para

$$S_{YM} = \frac{1}{\kappa^2} \int \left(\Theta_i F^i - \frac{1}{2} \Theta_i * \Theta^i \right), \quad (4.2)$$

de maneira que (4.2) seja equivalente a (4.1) via as equações de movimento. Diferentemente do capítulo anterior, não há necessidade de uma escala de massa extra, pois κ possui dimensão 1/2. Como Θ tem dimensão um, analogamente a (3.29), redefine-se $\Theta \rightarrow \kappa^2 \Theta$. Logo, a ação redefinida será

$$S_{YM} = \int \left(\Theta_i F^i - \frac{\kappa^2}{2} \Theta_i * \Theta^i \right), \quad (4.3)$$

O mapeamento de Lunev [41] associa cada configuração 3-dimensional de Yang-Mills a

uma geometria efetiva de Riemann-Cartan 3-dimensional como

$$\omega^{ij} = \epsilon^{ij}_k A^k \quad \text{e} \quad e^i = \Theta^i, \quad (4.4)$$

onde ω^{ij} é uma conexão linear relacionada a geometria de Riemann-Cartan sobre \mathbb{M}^3 , sobre a qual a 2-forma de curvatura é definida, $R^{ij} = d\omega^{ij} + \omega^i_k \omega^{kj}$, enquanto e^i associa-se também a uma geometria de Riemann-Cartan através da métrica efetiva, $g_{\mu\nu} = \eta_{ij} e^i_\mu e^j_\nu$. Portanto, aplicando o mapeamento (4.4) na 2-forma R^{ij} ,

$$\begin{aligned} R^{ij} &= \epsilon^{ij}_k dA^k + \epsilon^i_{km} \epsilon^{kj}_n A^m A^n \\ &= \epsilon^{ij}_c dA^k + (\eta^{ij} \eta_{mn} - \delta^i_n \delta^j_m) A^m A^n \\ &= \epsilon^{ij}_k \underbrace{dA^k + A^i A^j}_{= F^k} = \epsilon^{ij}_k F^k. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Inversamente, (4.5) será $F^i = \epsilon^{ijk} R_{jk}$. Impondo o mapeamento (4.4) na ação (4.2), esta ação é modificada para

$$S_{YM} = \frac{1}{2} \int (\epsilon_{ijk} e^i R^{jk} - \kappa^2 e_i * e^i). \quad (4.6)$$

Reconhecida como ação de Hilbert-Einstein em três dimensões [13], onde $*e^i = \epsilon^{ijk} e_j e_k$. Usando o princípio de Hamilton na ação (4.6) em relação a e^i obtém-se as equações de movimento

$$R^{ij} = \kappa^2 \epsilon^{ijk} * e_k \quad \text{e} \quad T^i = 0. \quad (4.7)$$

Entretanto, na primeira equação das (4.7) possui um Hodge dual que se refere ainda a geometria original. Para mostrar detalhadamente a influência da geometria de fundo

sobre a geometria efetiva, seja o cálculo do Hodge dual de $e^i = e^i_\mu dx^\mu$,

$$\begin{aligned}
*e^i &= e^i_\mu * dx^\mu = \frac{1}{2} e^i_\mu \sqrt{g} \epsilon^\mu_{\nu\alpha} dx^\nu dx^\alpha, \\
&= \frac{\sqrt{g}}{2} e^i_\mu g^{\mu\beta} \epsilon_{\beta\nu\alpha} \underbrace{e^\nu_j}_{=dx^\nu} \underbrace{e^\alpha_k}_{=dx^\alpha} e^k = \left(\frac{\sqrt{g}}{2} e^i_\mu g^{\mu\beta} \epsilon_{\beta\nu\alpha} e^\nu_j e^\alpha_k \right) e^j e^k \\
&= \left(\frac{\sqrt{g}}{2} e^i_\mu g^{\mu\gamma} \underbrace{\delta^\beta_\gamma}_{=e^m_\gamma e^\beta_m} \epsilon_{\beta\nu\alpha} e^\nu_j e^\alpha_k \right) e^j e^k \\
&= \frac{\sqrt{g}}{2} \left[(e^i_\mu g^{\mu\gamma} e_\gamma^m) \underbrace{\epsilon_{\beta\nu\alpha} e^\beta_m e^\nu_j e^\alpha_k}_{=\frac{1}{e} \epsilon_{mjk}} \right] e^j e^k, \quad \text{com } g = \det g^{\mu\nu} \quad \text{e} \quad e = \det e^i_\mu = \sqrt{\tilde{g}} \\
&= \frac{1}{2} L^{im} \epsilon_{mjk} e^j e^k, \tag{4.8}
\end{aligned}$$

onde $L^{im} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\tilde{g}}} e^i_\mu e^m_\nu g^{\mu\nu}$ e $\tilde{g}^{\mu\nu}$ é a métrica efetiva. Logo, a equação (4.7) é, agora, reescrita como

$$R^{ij} = \frac{\kappa^2}{2} \epsilon^{ijk} \epsilon_{mnp} L_k^m e^n e^p. \tag{4.9}$$

Ou ainda,

$$R^{ij} = \kappa^2 [Tr(L_k^m) e^i e^j + L_k^i e^j e^k - L_k^j e^i e^k], \tag{4.10}$$

que mostra a influência da geometria de fundo do espaço-tempo sobre a geometria efetiva através do tensor L^i_k .

4.2 Mapeamento em 4 dimensões

A partir deste momento, um mapeamento em quatro dimensões será mostrado. A ação (3.30) apresentada no capítulo 3 para o grupo $SO(m! - 1, n)$, a qual foi contraída a partir da ação (3.17) para o grupo $SO(m, n)$, terá cada configuração (A, θ) mapeada em uma geometria efetiva (ω, e) . Sendo este mapeamento feito biunivocamente, tal que, cada ponto $x \in \mathbb{R}^4$ seja relacionado a outro ponto $X \in \mathbb{M}^4$. O mapeamento deve ser um isomorfismo de modo que a estrutura algébrica, prontamente definida em \mathbb{R}^4 , seja preservada.

4.2.1 Gravidade efetiva

O mapeamento começa pela identificação de cada campo de calibre em uma respectiva grandeza geométrica. As equações a seguir, de acordo com o mapeamento, fazem a correspondência entre (A, θ) e (ω, e) :

$$\omega^{\mathbf{a}}_{\mathbf{b}} = \delta^{\mathbf{a}}_a \delta^{\mathbf{b}}_b A^a_b, \quad (4.11)$$

$$e^{\mathbf{a}} = \delta^{\mathbf{a}}_a \theta^a, \quad (4.12)$$

com os índices $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots$ se referindo ao espaço $T_X^*(\mathbb{M})$. As equações (4.11) e (4.12) podem ser expandidas em componentes como

$$\omega^{\mathbf{a}}_{\mathbf{b}\mu}(X) dX^\mu = \delta^{\mathbf{a}}_a \delta^{\mathbf{b}}_b A^a_{b\mu}(x) dx^\mu, \quad (4.13)$$

$$e^{\mathbf{a}}_{\mu}(X) dX^\mu = \delta^{\mathbf{a}}_a \theta^a_{\mu}(x) dx^\mu, \quad (4.14)$$

Da mesma forma, os Hodges duais em \mathbb{R}^4 serão mapeados em seus respectivos Hodges duais em \mathbb{M}^4 .

$$\star \omega^{\mathbf{a}}_{\mathbf{b}} = \delta^{\mathbf{a}}_a \delta^{\mathbf{b}}_b \star A^a_b, \quad (4.15)$$

$$\star e^{\mathbf{a}} = \delta^{\mathbf{a}}_a \star \theta^a, \quad (4.16)$$

ou seja, em componentes,

$$\omega^{\mathbf{a}\mu}_{\mathbf{b}}(X) \sqrt{\tilde{g}} \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} dX^\alpha dX^\beta dX^\gamma = \delta^{\mathbf{a}}_a \delta^{\mathbf{b}}_b A^{a\mu}_b(x) \sqrt{g} \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} dx^\alpha dx^\beta dx^\gamma, \quad (4.17)$$

$$e^{\mathbf{a}\mu}(X) \sqrt{\tilde{g}} \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} dX^\alpha dX^\beta dX^\gamma = \delta^{\mathbf{a}}_a \theta^{a\mu}(x) \sqrt{g} \epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma} dx^\alpha dx^\beta dx^\gamma, \quad (4.18)$$

A seguir, cada termo da ação (3.30) é mapeado e simultaneamente identificado de acordo a estrutura geométrica em questão:

$$\begin{aligned}
\bar{\Omega}_b^a * \bar{\Omega}_a^b &= (dA_b^a + A_c^a A_b^c) * (dA_a^b + A_a^c A_c^b) \\
&= \underbrace{(d\omega_b^a + \omega_c^a \omega_b^c)}_{R_b^a} * \underbrace{(d\omega_a^b + \omega_a^c \omega_c^b)}_{R_a^b}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

R_b^a é a 2-forma de curvatura em \mathbb{M}^4 . Da mesma forma,

$$\begin{aligned}
\bar{K}^a * \bar{K}_a &= D\theta^a * D\theta_a \\
&= \underbrace{De^a}_{T^a} * \underbrace{De_a}_{T_a}
\end{aligned} \tag{4.20}$$

T^a é a 2-forma de torção em \mathbb{M}^4 . Os outros dois termos requerem um pouco mais de elaboração.

$$\bar{\Omega}_b^a * (\theta_a \theta^b) = (dA_b^a + A_c^a A_b^c) * (\theta_a \theta^b) = R_b^a * (e_a e^b) \tag{4.21}$$

$$(\theta^a \theta_b) * (\theta_a \theta^b) = (e^a e_b) * (e_a e^b) \tag{4.22}$$

O termo comum às duas equações acima será

$$\begin{aligned}
*(e^a e^b) &= \frac{\sqrt{\tilde{g}}}{4} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} e^{a\mu} e^{b\nu} dX^\alpha dX^\beta \\
&= \frac{1}{4} \epsilon^{abcd} e_{c\alpha} e_{d\beta} dX^\alpha dX^\beta \\
&= \frac{1}{2} \epsilon^{abcd} e_c e_d.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Portanto, pelos novos termos mapeados (4.19), (4.20), (4.21) e (4.22), levando em conta (4.23), a ação (3.30) se torna

$$S = \frac{\gamma^2}{4\kappa^2} \int \left\{ \frac{2}{\gamma^2} R_b^a * R_a^b + T^a * T_a - \frac{\epsilon}{2} \epsilon_{abcd} R^{ab} e^c e^d + \frac{\gamma^2}{16} \epsilon_{abcd} e^a e^b e^c e^d \right\}. \tag{4.24}$$

Esta ação (4.24) pode finalmente ser identificada com uma teoria de gravidade 4-dimensional através das identificações dos parâmetros κ e γ com a constante de Newton G e a constante

cosmológica Λ , respectivamente,

$$G = \frac{\kappa^2}{2\pi\gamma^2} \quad \text{e} \quad \Lambda^2 = \frac{\gamma^2}{4}. \quad (4.25)$$

E a ação que fará contato com a gravidade é encontrada:

$$S = \frac{1}{8\pi G} \int \left\{ \frac{1}{2\Lambda^2} R^a_b \star R_a^b + T^a \star T_a - \frac{\epsilon}{2} \epsilon_{abcd} R^{ab} e^c e^d + \frac{\Lambda^2}{4} \epsilon_{abcd} e^a e^b e^c e^d \right\} \quad (4.26)$$

4.2.2 Equações de movimento

Encontrar as equações de movimento implica na variação da ação (4.26) em relação a vierbein e^a e a conexão de spin ω^a_b , respectivamente:

$$\frac{\delta S}{\delta e^a} = \frac{1}{4\Lambda^2} R^{bc} \star (R_{bc} e_a) + \epsilon_{abcd} (-\epsilon R^{bc} e^d + \Lambda^2 e^b e^c e^d) + \frac{1}{2} T^b \star (T_b e^a) + D \star T_a \quad (4.27)$$

$$\frac{\delta S}{\delta \omega^a_b} = \frac{1}{2\Lambda^2} D \star R^a_b + e^b \star T^a - \epsilon \epsilon^{ab}_{cd} T^c e^d \quad (4.28)$$

Em seguida, de acordo com o princípio de Hamilton, as equações de movimento são

$$\frac{1}{4\Lambda^2} R^{bc} \star (R_{bc} e_a) + \epsilon_{abcd} (-\epsilon R^{bc} e^d + \Lambda^2 e^b e^c e^d) + \frac{1}{2} T^b \star (T_b e^a) + D \star T_a = 0 \quad (4.29)$$

e

$$\frac{1}{2\Lambda^2} D \star R^a_b + e^b \star T^a - \epsilon \epsilon^{ab}_{cd} T^c e^d = 0 \quad (4.30)$$

Através das equações (4.29) e (4.30), é possível resolver um caso simples, onde $T^a = 0$. Neste caso, a curvatura será na forma $R^{ab} = \alpha e^a e^b$, onde α é uma constante relacionada a forma da curvatura do espaço. Portanto, substituindo esta forma de R^{ab} na equação

(4.29), obtém-se:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\Lambda^2}(\alpha e^b e^c) \star (\alpha e_b e_c e_a) + \epsilon_{abcd} (-\epsilon \alpha e^b e^c e^d + \Lambda^2 e^b e^c e^d) &= 0 \\
\epsilon_{abcd} e^b e^c e^d \left(\frac{\alpha^2}{4\Lambda^2} - \epsilon \alpha + \epsilon^2 \Lambda^2 \right) &= 0 \\
\alpha^2 - 4\Lambda^2 \epsilon \alpha + 4\Lambda^4 &= 0. \tag{4.31}
\end{aligned}$$

De forma que a equação (4.31) é trivialmente calculada, resultando em $\alpha = 2\epsilon\Lambda^2$. Calculada a constante α , a seguinte solução é obtida:

$$R^{ab} = 2\epsilon\Lambda^2 e^a e^b. \tag{4.32}$$

Esse resultado mostra uma geometria efetiva como uma geometria riemanniana característica de um espaço de de Sitter ou de anti-de Sitter, dependendo do valor de ϵ e Λ^2 .

4.2.3 Alguns aspectos do mapeamento

O mapeamento assumiu um isomorfismo entre o \mathbb{R}^4 e \mathbb{M}^4 . De maneira que cada ponto $x \in \mathbb{R}^4$ é mapeado em um ponto $X \in \mathbb{M}^4$. Sobre este mesmo mapeamento, uma configuração (A, θ) foi identificada com uma geometria (ω, e) . Quando θ é associado com a vierbein e , implica que, em cada ponto $X \in \mathbb{M}^4$, o espaço cotangente $T_X(\mathbb{M}^4)$ adquire uma isometria local caracterizada pelo grupo de calibre $SO(m!-1, n)$. A figura 4.1 ilustra este processo.

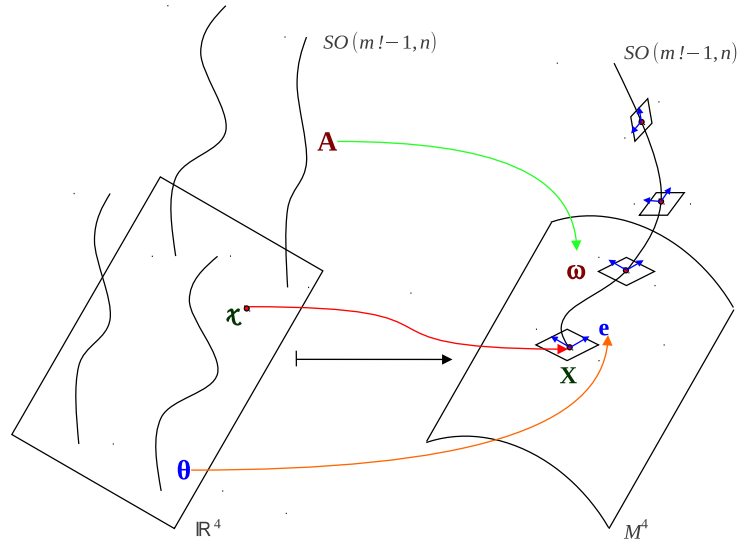


Figura 4.1: Cada ponto $x \in \mathbb{R}^4$ é mapeado em um ponto $X \in \mathbb{M}^4$. Uma configuração (A, θ) foi identificada com uma geometria (ω, e) , tal que $A \rightarrow \omega$ e $\theta \rightarrow e$.

Da mesma forma, o campo de calibre A é mapeado na conexão de spin ω . O fato do mapeamento ser um isomorfismo é imprescindível para que não haja ambiguidades entre os campos, ou seja, garante que uma configuração (A, θ) definirá um única geometria.

As relações (4.11), (4.12), (4.15) e (4.16) podem ser estendidas para formas de qualquer ordem, mapeando assim o espaço das p-formas E^p em \mathbb{R}^4 no espaço das p-formas \tilde{E}^p em

\mathbb{M}^4 . O mesmo para seus respectivos espaços duais:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^p &\rightarrow \tilde{\mathbb{E}}^p, \\ * \mathbb{E}^p &\rightarrow \star \tilde{\mathbb{E}}^p.\end{aligned}\tag{4.33}$$

De acordo com os detalhes desenvolvidos no Apêndice C, este mapeamento é descrito por

$$L^\nu{}_\mu = \left(\frac{\tilde{g}}{g}\right)^{\frac{1}{8}} \tilde{g}^{\nu\alpha} g_{\alpha\mu}.\tag{4.34}$$

onde $L^\nu{}_\mu = \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\mu}$. A inversa de $L^\nu{}_\mu$ é trivialmente calculada:

$$(L^\nu{}_\mu)^{-1} = \left(\frac{g}{\tilde{g}}\right)^{\frac{1}{8}} g^{\nu\alpha} \tilde{g}_{\alpha\mu}.\tag{4.35}$$

A unicidade é um ponto crucial neste modelo de mapeamento, caracterizando, desse modo, a sua não-degenerescência. A obtenção da inversa de $L^\nu{}_\mu$ garante que o mapeamento seja não-degenerado. A métrica efetiva é calculada pelas equações de campo, entretanto, a métrica original é escolhida. Nesta dissertação, devido ao espaço euclidiano original, tem-se

$$L^\nu{}_\mu = (\tilde{g})^{\frac{1}{8}} \tilde{g}^{\nu\alpha} \delta_{\alpha\mu}.\tag{4.36}$$

Um ponto extremamente importante se refere às isometrias locais da geometria efetiva. Este é determinado pelo valor de m . Para $m = 0$ ou $m = 1$, o grupo reduzido é o $SO(4)$, implicando assim em isometrias de um espaço euclidiano. Para $m = 2$, o grupo reduzido é o $SO(1, 3)$ caracterizando as isometrias locais em um espaço de Minkowski. Este último caso pode ser interpretado como uma espécie de dedução do princípio de equivalência. Por outro lado, $m = 0$ seria ótimo para uma teoria inicial, pois apenas no grupo $SO(4)$ está garantida a unitariedade. Uma maneira de conectar os casos $m = 2$ e $m = 0$ seria pelo método das rotações de Wick, porém, ainda sem justificativa física por causa do tempo imaginário.

Conclusões

Uma teoria de calibre para o grupo $SO(m, n)$ em um espaço-tempo euclidiano 4-dimensional foi o ponto inicial. A teoria é renormalizável, pelo menos a todas as ordens em teoria de perturbação. Como uma teoria de calibre não-abeliana, a teoria em voga tem liberdade assintótica [23, 24] e a propriedade de geração dinâmica de massa [17, 28]. Tal parâmetro de massa foi utilizado para uma redefinição dos campos e, juntamente com um parâmetro adimensional de acoplamento κ , característico a liberdade assintótica, permitiu a deformação da álgebra do grupo $SO(m, n)$ a baixas energias através de uma contração de Inönü-Wigner [37]. Essa deformação induziu uma quebra de simetria que permitiu a identificação dos campos de calibre com as quantidades geométricas presentes em uma teoria de gravidade e, assim, mostrou-se que uma teoria de calibre pode induzir uma geometria efetiva.

Uma grande motivação do trabalho foi buscar uma teoria que tornasse possível uma futura quantização [20], portanto, foi escolhida uma ação de Yang-Mills pura que atendesse a propriedades como a invariância por transformações de Poincaré, renormalizabilidade por contagem de potências, invariância de calibre, localidade e a conservação de probabilidades.

Não obstante, um grupo de Lie semi-simples seria adequado para que esta ação fosse desenvolvida de acordo com os objetivos aqui preteridos, por isso foi escolhido o grupo $SO(m, n)$ com $m \in \{0, 1, 2\}$ e $m + n = 5$ por ser aquele que, não somente é um tipo de grupo de Lie interessante para os propósitos do trabalho, mas que continha os grupos de de Sitter (para $m = 1$) e anti-de Sitter (para $m = 2$), além do grupo ortogonal (para $m = 0$). A escolha do grupo $SO(m, n)$ não foi somente por estes três grupos

estarem inclusos, mas também por ser um grupo que pode ser escrito como produto direto $SO(m, n) \equiv SO(m! - 1, n) \otimes S(4)$. Nesta decomposição, a presença do coset $S(4)$ abriu o caminho para uma projeção estereográfica da álgebra dos grupos $SO(1, 4)$, $SO(2, 3)$ e $SO(5)$. Cabe ainda ressaltar que o grupo $SO(m, n)$ definiu um espaço plano 5-dimensional $\mathbb{R}_S^{m, n}$ que, inicialmente, não estava de modo algum relacionado ao espaço-tempo \mathbb{R}^4 . A decomposição da álgebra de de Sitter permitiu ainda que os campos A e θ fossem explicitados em cada setor da álgebra.

Como o trabalho foi se basear em uma teoria de calibre clássica, tendo o princípio de calibre [18] como principal aliado, nada mais coeso do que buscar uma teoria de gravidade que fosse realmente embasada neste princípio, isto é, uma verdadeira teoria de calibre. Entretanto, o formalismo da métrica [31], baseia-se no grupo de difeomorfismos. E, ainda, a conexão métrica não é um campo fundamental neste formalismo. É justamente neste ponto que o formalismo de primeira ordem [13] para a gravidade contrasta com o formalismo da métrica. O primeiro trata o espaço-tempo através da conexão de spin e da vierbein, ambos campos fundamentais. Dessa forma, o estudo do formalismo de primeira ordem nesta dissertação apontou uma enorme vantagem, tanto física quanto matemática, na construção de uma teoria de calibre para a gravidade.

O próximo passo utilizou o teorema de Inönü-Wigner, que permite que grupos sejam contraídos em outros grupos. Com este teorema foi possível induzir uma quebra de simetria para o grupo $SO(m! - 1, n)$. Para tal, argumentos e parâmetros físicos, tais como, a redefinição dos campos e a própria contração de Inönü-Wigner foram utilizados. O fator importante sobre o grupo $SO(m! - 1, n)$ é quanto a sua participação fundamental na descrição das isometrias locais do espaço deformado.

Sobre os espaços envolvidos, cada ponto $x \in \mathbb{R}^4$ foi mapeado, um a um, em $X \in \mathbb{M}^4$. Neste segundo espaço, um espaço cotangente foi definido através de suas isometrias locais que são caracterizadas pelo grupo $SO(m! - 1, n)$ que surge pela quebra de simetria.

A geometria efetiva é determinada pelas equações de movimento, obtidas através da ação (4.26). A solução não-trivial mais simples é um espaço de (anti)-de Sitter, dependendo dos valores de Λ^2 e m .

O fato do grupo de calibre determinar as isometrias locais tem duas notáveis consequências: Caso $m \in \{0, 1\}$, o grupo reduzido é o $SO(4)$, implicando que aquelas isometrias locais são as de um espaço euclidiano. Caso $m = 2$, é o grupo de Lorentz $SO(1, 3)$ que determina as isometrias locais em um espaço minkowskiano. Como uma consequência do último caso, espaço e tempo são distintos um do outro. Então, partindo de uma teoria de calibre em uma região onde espaço e tempo são totalmente misturados, ou seja, no sentido de que não há efeito físico que possa distinguí-los. Termina-se então, em uma teoria onde uma métrica de Minkowski local aparece naturalmente. Portanto, é possível interpretar esse efeito como a ascensão do princípio da equivalência da teoria da relatividade geral.

Em relação a unitariedade, a mesma somente é garantida quando $m = 0$. Neste caso, a teoria de gravidade resultante é uma gravidade isométrica local no $SO(4)$. O caráter euclidiano local do espaço-tempo prevê de forma incompleta o princípio da equivalência porque carece da separação entre o tempo e o espaço através da métrica local com assinatura minkowskiana. Embora este não tenha sido um ponto abordado nesta dissertação, o método das rotações de Wick pode ser usado para conectar o caso $m = 0$ ao de anti-de Sitter. As rotações de Wick é um método que ainda não tem justificativa física por causa do tempo imaginário.

Embora o valor do parâmetro κ seja difícil de ser realmente calculado não-perturbativamente, considerando que ele se comportará como um parâmetro do regime de acoplamento forte das teorias de calibre em $SU(N)$, ele será grande o bastante para que a contração de Inönü-Wigner seja feita. Por outro lado, a massa gerada dinamicamente também tem um papel crucial na determinação de G . Assim, existe uma grande chance do valor de G ser pequeno, tal como se espera. Em compensação, Λ deverá ser extremamente grande.

Foi deixado para trabalhos futuros, a determinação da origem física do parâmetro γ , assim como a exploração de um tratamento perturbativo a 1-loop ou semi-perturbativo de modo a determinar as possíveis soluções para κ e γ .

Nesse momento, tudo o que pode ser afirmado é que a presente teoria é quantizável e

pode emergir numa teoria efetiva de gravidade.

Como encerramento desta dissertação, duas perspectivas são iminentes: A primeira é sobre a geração dinâmica de massa que pode ser feita pelo tratamento das ambiguidades de Gribov. A segunda perspectiva consiste em determinar explicitamente G e Λ utilizando os métodos usuais da teoria quântica de campos.

Apêndice A

Formas diferenciais exteriores

Não será feita aqui apresentação rigorosa, nem mesmo extensa, sobre formas diferenciais exteriores, mas sim uma breve exposição das definições e teoremas que estão aplicados nesta dissertação. Um estudo mais aprofundado exigirá do leitor uma consulta às referências [15, 36], entre outros.

A.1 Produto exterior

Em uma variedade n -dimensional \mathbb{M}^n , para cada curva diferenciável que passa por um ponto $x \in \mathbb{M}^n$, existe um vetor tangente. Então, o espaço tangente $T_x(\mathbb{M}^n)$ a uma variedade \mathbb{M}^n em um ponto x é o espaço de todos vetores tangentes neste ponto x . Os operadores diferenciais $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$, com $i \in \{1, \dots, n\}$, formam uma base para este espaço. Obviamente, $\dim T_x(\mathbb{M}^n) = \dim \mathbb{M}^n$. O espaço dual a $T_x(\mathbb{M}^n)$ é denominado espaço cotangente e denotado por $T_x^*(\mathbb{M}^n)$, cuja base é definida pelo conjunto $\{dx^\mu\}$, onde $\mu \in \{1, \dots, n\}$. A dualidade é definida pelo produto interno

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, dx^\nu\right) = \delta_\nu^\mu. \quad (\text{A.1})$$

Definida a uma base para $T_x^*(\mathbb{M}^n)$, define-se o produto exterior mais simples por

$$dx^\mu \wedge dx^\nu = dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu, \quad (\text{A.2})$$

onde o símbolo \wedge denota esse tipo de produto. Aqui, \otimes indica o tão conhecido produto tensorial. No decorrer do trabalho, o símbolo \wedge que representa o produto exterior não será mostrado explicitamente nas equações, exceto quando necessário. Assim, $dx^\mu \wedge dx^\nu \equiv dx^\mu dx^\nu$. De acordo com a equação (A.2),

$$dx^\mu dx^\nu = -dx^\nu dx^\mu \quad \text{e} \quad dx^\mu dx^\mu = 0, \quad (\text{A.3})$$

onde, na segunda equação em (A.2), não há somatório.

A.2 p-formas

Uma forma diferencial exterior ω de ordem p , simplesmente chamada de p -forma, é definida como

$$\omega = \frac{1}{p!} \omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}(x) dx^{\mu_1} dx^{\mu_2} \dots dx^{\mu_p}. \quad (\text{A.4})$$

Onde $\omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}(x)$ são componentes tensoriais covariantes de ordem $p \leq n$ totalmente antissimétricos em seus índices. As p -formas são situadas sobre o espaço cotangente $T_x^*(\mathbb{M}^n)$ à variedade \mathbb{M}^n . Caso $p > n$, a p -forma é nula.

Seja uma p -forma α multiplicada por uma outra q -forma β , que resulta em uma r -forma $\gamma = \alpha\beta$, tal que $r = p + q$. Esse produto somente anticomuta quando p e q são ímpares, pois

$$\alpha\beta = (-1)^{pq} \beta\alpha \quad (\text{A.5})$$

Outra propriedade é a associatividade, ou seja,

$$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma). \quad (\text{A.6})$$

Como exemplo de multiplicação entre formas, tem-se

$$\gamma = \alpha\beta = \frac{1}{(p+q)!} \alpha_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}(x) \beta_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_q}(x) dx^{\mu_1} dx^{\mu_2} \dots dx^{\mu_p} dx^{\nu_1} dx^{\nu_2} \dots dx^{\nu_q}. \quad (\text{A.7})$$

Fazendo todas as antissimetrizações,

$$\gamma = \frac{1}{r!} \gamma_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_r}(x) dx^{\lambda_1} dx^{\lambda_2} \dots dx^{\lambda_r}. \quad (\text{A.8})$$

A.3 Derivada exterior

O operador diferencial d , denominado derivada exterior, é definido por

$$d = \frac{\partial}{\partial x^\mu} dx^\mu. \quad (\text{A.9})$$

Quando aplicado a p-forma (A.4),

$$d\omega = \frac{1}{p!} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \omega_{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}(x) dx^\nu dx^{\mu_1} dx^{\mu_2} \dots dx^{\mu_p}. \quad (\text{A.10})$$

Uma propriedade da derivada exterior é a nilpotência, i.e, $d^2 = 0$. Essa propriedade é também conhecida como lema de Poincaré. A derivada exterior é uma aplicação que transforma uma p-forma em uma $(p + 1)$ -forma.

Sejam uma p-forma α e uma q-forma β . Ao ser aplicada no produto destas formas, a derivada exterior resulta em:

$$d(\alpha\beta) = (d\alpha)\beta + (-1)^p \alpha d\beta. \quad (\text{A.11})$$

Se a derivada exterior for aplicada em uma soma, então

$$d(a\alpha + b\beta) = ad\alpha + bd\beta. \quad (\text{A.12})$$

Onde $a, b \in \mathbb{R}$.

A.4 Operador dual

O operador dual $*$ transforma uma p -forma em uma $(n - p)$ -forma e sua aplicação é definida por

$$*dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_p} = \frac{\sqrt{g}}{(n - p)!} \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\mu_{p+1} \dots \mu_n} dx^{\mu_{p+1}} dx^{\mu_{p+2}} \dots dx^{\mu_n} \quad (\text{A.13})$$

onde

$$\varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\mu_{p+1} \dots \mu_n} = g^{\mu_1 \nu_1} \dots g^{\mu_p \nu_p} \varepsilon_{\nu_1 \dots \nu_p \mu_{p+1} \dots \mu_n}. \quad (\text{A.14})$$

$g^{\mu\nu}$ é o tensor métrico e $g = \det g^{\mu\nu}$. Portanto, a forma dual de uma p -forma ω_p é denotada por

$$*\omega_p = \frac{\sqrt{g}}{p!(n - p)!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_p}_{\mu_{p+1} \dots \mu_n} dx^{\mu_{p+1}} dx^{\mu_{p+2}} \dots dx^{\mu_n}. \quad (\text{A.15})$$

Sejam as p -formas ω e λ . O operador hodge dual satisfaz a propriedade

$$*(a\alpha + b\beta) = a(*\alpha) + b(*\beta), \quad (\text{A.16})$$

onde a e b são escalares.

A.5 Integração

A integração de uma forma diferencial é a operação inversa à diferenciação exterior. Integrar uma forma diferencial exige que a variedade, onde ela se encontra definida, seja orientável.

Definição 1 *Seja \mathbb{M} uma variedade coberta por uma coleção de abertos $\{U_i\}$. \mathbb{M} é orientável se, $\forall U_i$ ou $\forall U_j$, exista coordenadas locais, tal que $\{x^\alpha\} \in U_i$ e $\{y^\beta\} \in U_j$ de modo que $J = \det \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial y^\beta} \right) > 0$.*

Onde J é o jacobiano da mudança de coordenadas. Se uma variedade é orientável, então existe uma p -forma ω , um elemento de volume (ou elemento de integração), que não se

anula em nenhum ponto definido por

$$dV \equiv dx^1 dx^2 \cdots dx^n \equiv \frac{1}{n!} \varepsilon_{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} dx^{\mu_1} dx^{\mu_2} \cdots dx^{\mu_n}. \quad (\text{A.17})$$

Se f é uma função suave sobre uma variedade orientável \mathbb{M}^n , então qualquer p-forma ω pode ser escrita como $f\omega$. Define-se a integral de uma p-forma, no domínio de uma carta¹ (V_α, ϕ_α) com coordenadas (x^1, x^2, \dots, x^n) , por

$$\int_{V_\alpha} f\omega = \int_{\phi_\alpha(V_\alpha)} f(\phi_\alpha^{-1}(x)) dx^1 \cdots dx^n = \int_{R_\alpha} f(x) dV. \quad (\text{A.18})$$

A integral de uma p-forma sobre toda a variedade deve considerar o conjunto de cartas, denominado atlas, de modo que

$$\int_{\mathbb{M}^n} f\omega = \sum_\alpha \int_{V_\alpha} f_\alpha \omega, \quad (\text{A.19})$$

onde $f = \sum_\alpha f_\alpha$ com f_α definida sobre (V_α, ϕ_α) .

Para esclarecer mais a integração de formas, seguem dois exemplos:

Exemplo 1:

Seja a variedade $\mathbb{M}^1 = [a, b]$ e sua respectiva fronteira $\partial\mathbb{M}^1 = \{a, b\}$. A 1-forma $\omega \equiv \omega(x)$ definida sobre esta variedade possui derivada exterior $d\omega = \frac{d}{dx}\omega(x)dx$. Sendo assim,

$$\int_{\mathbb{M}} d\omega = \int_a^b \frac{d}{dx}\omega(x)dx = \omega(b) - \omega(a) \Rightarrow \int_{\mathbb{M}} d\omega = \int_{\partial\mathbb{M}^1} \omega. \quad (\text{A.20})$$

Exemplo 2:

¹Uma carta é um homeomorfismo ϕ_α , tal que $\phi_\alpha : V_\alpha \rightarrow R_\alpha$, onde $V_\alpha \subset \mathbb{M}^n$ e $R_\alpha \subset \mathbb{R}^n$

Seja uma 2-forma ω definida sobre a variedade 3-dimensional $\mathbb{M}^3 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ com fronteira $\partial\mathbb{M}^3 = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Para ilustrar a situação fisicamente, considere que $\omega = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}E^k dx^i dx^j$, onde $E^k \equiv E^k(x)$ é o campo elétrico na região limitada por $\partial\mathbb{M}^3$. Tomando a derivada exterior da 2-forma,

$$d\omega = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\partial_\ell E^k dx^\ell dx^i dx^j = \frac{1}{2}\partial_\ell E^k \underbrace{\varepsilon_{ijk}\varepsilon^{\ell ij}}_{=2!\delta_k^\ell} \underbrace{dx^\ell dx^i dx^j}_{=dV} = \partial_k E^k dV. \quad (\text{A.21})$$

Assumindo que $df_k = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}dx^i dx^j$, então $\omega = E^k df_k$. Logo,

$$\int_{\mathbb{M}^3} \partial_k E^k dV = \int_{\partial\mathbb{M}^3} E^k df_k \iff \int_{\mathbb{M}^3} d\omega = \int_{\partial\mathbb{M}^3} \omega. \quad (\text{A.22})$$

Os resultados (A.20) e (A.22) são casos particulares que obedecem ao teorema generalizado de Stokes sobre formas diferenciais, o qual estabelece que,

$$\int_{\mathbb{M}^{(p+1)}} d\omega = \int_{\partial\mathbb{M}^{(p+1)}} \omega, \quad (\text{A.23})$$

onde ω é uma p -forma, $\mathbb{M}^{(p+1)}$ é uma variedade $p+1$ -dimensional, orientável e compacta, enquanto $\partial\mathbb{M}^{(p+1)}$ é a fronteira não-nula desta variedade.

Apêndice B

Projeção estereográfica

Uma maneira particular de se projetar geometricamente uma esfera em um plano é conhecida em geometria diferencial como projeção estereográfica [38]. É um tipo de mapeamento descrito por funções suaves e bijetivas. Apenas ângulos são preservados e, por isso, também é um tipo de transformação conforme. Entretanto, distâncias e áreas não são preservadas. De acordo com o tipo de espaço (de Sitter ou anti-de Sitter) a curvatura pode ser definida positiva ou negativa. Espaços de de Sitter podem ser definidos como uma pseudo-esfera em um espaço plano 5-dimensional com coordenadas cartesianas $\xi^A : \{\xi^5, \xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3\}$ que satisfazem a

$$\eta_{AB}\xi^A\xi^B = \varepsilon\mathcal{R}^2 = \epsilon(\xi^5)^2 + \varepsilon(\xi^0)^2 + (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2, \quad (\text{B.1})$$

uma vez que $\eta_{AB} = \text{diag}(\epsilon, \varepsilon, 1, 1, 1)$. Os índices latinos maiúsculos $\{A, B, C, \dots\}$ rodam como $\{5, 0, 1, 2, 3\}$.

Com $\epsilon = \varepsilon = +1$, a métrica é de um espaço euclidiano. Porém, se $\epsilon = -1$ e $\varepsilon = 1$, o espaço é de de Sitter. Porém, se $\epsilon = -1$ e $\varepsilon = -1$, o espaço é de anti-de Sitter. Enquanto isso, \mathcal{R} é o raio do espaço. A métrica η_{AB} pode ser escrita de maneira que a quinta coordenada fique isolada. Logo, um forma equivalente é equacionada como

$$\eta_{ab}\xi^a\xi^b + \epsilon(\xi^5)^2 = \varepsilon\mathcal{R}^2, \quad (\text{B.2})$$

onde $\eta_{ab} = \text{diag}(\varepsilon, 1, 1, 1)$, com $a, b \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Os geradores do grupo de de Sitter podem ser obtidos por

$$J^A_B = \frac{1}{2} (\eta^{AC} \xi_C \partial_B - \eta^{BC} \xi_C \partial_A), \quad \text{sendo que} \quad \partial_A \equiv \frac{\partial}{\partial \xi^A}, \quad (\text{B.3})$$

onde ξ^A são coordenadas cartesianas em $\mathbb{R}_S^{m,n}$. De modo a obter uma transformação plana conforme, as coordenadas ξ^A são escritas como

$$\begin{aligned} \xi^a &= n \bar{x}^a, \\ \xi^5 &= (\varepsilon \varepsilon)^{\frac{1}{2}} \mathcal{R} (1 - 2n). \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Substituindo as equações (B.4) em (B.2) obtém-se

$$n^2 \eta_{ab} \bar{x}^a \bar{x}^b + \varepsilon \mathcal{R}^2 (1 - 2n)^2 = \varepsilon \mathcal{R}^2, \quad (\text{B.5})$$

a qual leva, juntamente com $\sigma^2 = \eta_{ab} \bar{x}^a \bar{x}^b$, ao fator da transformação

$$n = \frac{1}{\left(1 + \frac{\varepsilon \sigma^2}{2\mathcal{R}^2}\right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (\text{B.6})$$

É possível verificar que a métrica é conformalmente plana, tal como segue:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \eta_{ab} d\xi^a d\xi^b + \varepsilon (d\xi^5)^2 \\ &= \eta_{ab} (\bar{x}^a dn + n d\bar{x}^a) (\bar{x}^b dn + n d\bar{x}^b) + \varepsilon (4\varepsilon \mathcal{R}^2 (dn)^2) \\ &= \eta_{ab} \bar{x}^a \bar{x}^b (dn)^2 + 2\eta_{ab} \bar{x}^a d\bar{x}^b + 4\varepsilon \mathcal{R}^2 (dn)^2 + n^2 \eta_{ab} d\bar{x}^a d\bar{x}^b \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Levando em conta que

$$\sigma d\sigma = \eta_{ab} \bar{x}^a d\bar{x}^b \quad \text{e} \quad dn = -\frac{2\varepsilon n^2}{4\mathcal{R}^2} \eta_{ab} \bar{x}^a d\bar{x}^b, \quad (\text{B.8})$$

então,

$$2\eta_{ab} \bar{x}^a d\bar{x}^b = -\frac{4\varepsilon \mathcal{R}^2}{n^2} dn. \quad (\text{B.9})$$

Usando (B.9) em (B.7):

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \eta_{ab}\bar{x}^a\bar{x}^b(dn)^2 - 4\epsilon\mathcal{R}^2\frac{1}{n}(dn)^2 + 4\epsilon\mathcal{R}^2(dn)^2 + n^2\eta_{ab}d\bar{x}^a d\bar{x}^b \\
&= \underbrace{\left(\sigma^2 - 4\epsilon\mathcal{R}^2\left(1 + \frac{\epsilon\sigma^2}{4\mathcal{R}^2}\right) + 4\epsilon\mathcal{R}^2\right)}_{=0}(dn)^2 + n^2\eta_{ab}d\bar{x}^a d\bar{x}^b \\
&= \underbrace{n^2\eta_{ab}}_{=g_{ab}}d\bar{x}^a d\bar{x}^b.
\end{aligned} \tag{B.10}$$

Portanto, fica demonstrado que $ds^2 = \eta_{AB}d\xi^A d\xi^B = g_{ab}d\bar{x}^a d\bar{x}^b$, onde $g_{ab} = n^2\eta_{ab}$ e, assim, g_{ab} é uma métrica conformalmente plana e n^2 é o fator conforme.

Agora, aplicando (B.4) e (B.6) em (B.3) resulta nos geradores do grupo,

$$\begin{aligned}
J^a_b &= \frac{1}{2} \left\{ \eta^{ac}(n\bar{x}_c) \frac{1}{n} \underbrace{\frac{\partial}{\partial\bar{x}^b}}_{=P^b} - \eta^{bc}(n\bar{x}_c) \frac{1}{n} \underbrace{\frac{\partial}{\partial\bar{x}^a}}_{=P^a} \right\} \\
&= \frac{1}{2} (\bar{x}^a P^b - \bar{x}^b P^a)
\end{aligned} \tag{B.11}$$

e

$$\begin{aligned}
J^a &= \frac{1}{2} \left(\eta_{5C}\xi^C \frac{\partial}{\partial\xi^a} - \eta_{aC}\xi^C \frac{\partial}{\partial\xi^5} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\eta^{55}\xi_5 \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial\bar{x}^a} - \eta_{ac}\xi^c \frac{\partial}{\partial\xi^5} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \epsilon \frac{\xi^5}{n} P^a - n\bar{x}_a \left(\frac{\partial\xi^b}{\partial n} \frac{\partial}{\partial\xi^5} \frac{\partial}{\partial\xi^b} \right) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \epsilon (\epsilon\epsilon)^{\frac{1}{2}} \mathcal{R} \left(\frac{\epsilon\sigma^2}{4\mathcal{R}^2} - 1 \right) P^a - n\bar{x}_a \left[-\frac{1}{2n\mathcal{R}(\epsilon\epsilon)^{\frac{1}{2}}} \bar{x}^b P_b \right] \right\} \\
&= \frac{\sigma^2}{8(\epsilon\epsilon)^{\frac{1}{2}} \mathcal{R}} P^a - \frac{1}{2} \epsilon (\epsilon\epsilon)^{\frac{1}{2}} \mathcal{R} P^a + \frac{1}{4(\epsilon\epsilon)^{\frac{1}{2}} \mathcal{R}} \bar{x}_a \bar{x}^b P_b \\
&= -\frac{1}{2} \epsilon (\epsilon\epsilon)^{\frac{1}{2}} \mathcal{R} P^a + \frac{1}{8(\epsilon\epsilon)^{\frac{1}{2}} \mathcal{R}} (2\bar{x}_a \bar{x}^b P_b + \sigma^2 P^a)
\end{aligned} \tag{B.12}$$

É possível, então, impor a identificação entre $\mathbb{R}_S^{m,n}$ e $\mathbb{R}_S^{m-1,n}$ através de

$$\mathcal{R} \equiv \frac{2\epsilon}{(\epsilon\epsilon)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{\kappa}{\gamma} \right). \tag{B.13}$$

Portanto, usando (B.13) em (B.12), o gerador se torna

$$J^a = -\frac{\kappa}{\gamma} P^a + \frac{\epsilon}{16} \frac{\gamma}{\kappa} (2\bar{x}_a \bar{x}^b P_b + \sigma^2 P^a), \quad (\text{B.14})$$

conforme se pretendia demonstrar a equação (3.31).

Apêndice C

Mapeamentos

Aqui serão realizados os mapeamentos para 0-forma, 1-forma, 2-forma, 3-forma e 4-forma. O mapeamento destas formas e de seus duais será feito de acordo com (4.33). No decorrer dos cálculos, x e X serão as coordenadas usadas, sendo que $x \in \mathbb{R}^4$ e $X \in \mathbb{M}^4$. Considere g o determinante da métrica antes do mapeamento e \tilde{g} o determinante da métrica após o mapeamento.

C.1 0-forma

Neste caso, as funções são escalares. De (4.33), o operador dual seja mapeado como:

$$\begin{aligned}
 *f(x) &= \star\tilde{f}(X) \\
 \epsilon_{\alpha\beta\gamma\rho} (\sqrt{g}f dx^\alpha dx^\beta dx^\gamma dx^\rho) &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma\rho} (\sqrt{\tilde{g}}\tilde{f} dX^\alpha dX^\beta dX^\gamma dX^\rho) \\
 (\sqrt{g}f \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta \delta_\lambda^\gamma \delta_\sigma^\rho) dx^\mu dx^\nu dx^\lambda dx^\sigma &= \sqrt{\tilde{g}}\tilde{f} \underbrace{\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\mu}}_{=L^\alpha_\mu} dx^\mu \underbrace{\frac{\partial X^\beta}{\partial x^\nu}}_{=L^\beta_\nu} dx^\nu \underbrace{\frac{\partial X^\gamma}{\partial x^\lambda}}_{=L^\gamma_\lambda} dx^\lambda \underbrace{\frac{\partial X^\rho}{\partial x^\sigma}}_{=L^\rho_\sigma} dx^\sigma \\
 \sqrt{g}f \underbrace{\delta_\mu^\alpha \delta_\alpha^\mu}_{=4} \underbrace{\delta_\nu^\beta \delta_\beta^\nu}_{=4} \underbrace{\delta_\lambda^\gamma \delta_\gamma^\lambda}_{=4} \underbrace{\delta_\sigma^\rho \delta_\rho^\sigma}_{=4} &= \sqrt{\tilde{g}}\tilde{f} \underbrace{L^\alpha_\mu \delta_\alpha^\mu}_{=L} \underbrace{L^\beta_\nu \delta_\beta^\nu}_{=L} \underbrace{L^\gamma_\lambda \delta_\gamma^\lambda}_{=L} \underbrace{L^\rho_\sigma \delta_\rho^\sigma}_{=L} \\
 f(x) &= \left(\frac{\tilde{g}}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{L}{4}\right)^4 \tilde{f}(X). \tag{C.1}
 \end{aligned}$$

Da mesma forma, $f(x) = f(X)$. Comparando com (C.1), o traço deverá ser:

$$L = 4 \left(\frac{g}{\tilde{g}} \right)^{\frac{1}{8}}. \quad (\text{C.2})$$

C.2 1-forma

Seja a 1-forma f . O mapeamento (4.33) impõe a igualdade

$$\begin{aligned} f_\mu(x) dx^\mu &= \tilde{f}_\mu(X) dX^\mu \\ &= \tilde{f}_\mu(X) \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \\ f_\mu &= L^\nu_\mu \tilde{f}_\nu. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Por simplicidade, $f_\mu \equiv f_\mu(x)$ e $\tilde{f}_\mu \equiv \tilde{f}_\mu(X)$. Da mesma forma, o dual é mapeado como:

$$\begin{aligned} *f_\mu(x) &= \star \tilde{f}_\mu(X) \\ \eta^\mu_{\nu\alpha\beta} f_\mu dx^\nu dx^\alpha dx^\beta &= \eta^\mu_{\nu\alpha\beta} \tilde{f}_\mu dX^\nu dX^\alpha dX^\beta \\ \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} (\sqrt{g} f^\mu dx^\nu dx^\alpha dx^\beta) &= \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \left(\sqrt{\tilde{g}} \tilde{f}^\mu dX^\nu dX^\alpha dX^\beta \right). \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sqrt{g} f^\mu dx^\nu dx^\alpha dx^\beta &= \\ \sqrt{g} f^\mu dx^\nu dx^\alpha dx^\beta &= \sqrt{\tilde{g}} \tilde{f}^\mu \underbrace{\frac{\partial X^\nu}{\partial x^\gamma}}_{=L^\nu_\gamma} dx^\gamma \underbrace{\frac{\partial X^\alpha}{\partial x^\sigma}}_{=L^\alpha_\sigma} dx^\sigma \underbrace{\frac{\partial X^\beta}{\partial x^\rho}}_{=L^\beta_\rho} dx^\rho \\ \sqrt{g} f^\mu dx^\nu dx^\alpha dx^\beta &= \sqrt{\tilde{g}} \tilde{f}^\mu L^\nu_\gamma L^\beta_\rho L^\alpha_\sigma dx^\gamma dx^\sigma dx^\rho \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Aplica-se uma sequência de δ 's no lado direito da equação (C.5) para que os índices dos diferenciais nos dois lados fiquem iguais:

$$\begin{aligned} (\sqrt{g} f^\mu \delta_\gamma^\nu \delta_\sigma^\alpha \delta_\rho^\beta) dx^\gamma dx^\sigma dx^\rho &= \left(\sqrt{\tilde{g}} \tilde{f}^\mu L^\nu{}_\gamma L^\beta{}_\rho L^\alpha{}_\sigma \right) dx^\gamma dx^\sigma dx^\rho \\ \sqrt{g} f^\mu \underbrace{\delta_\gamma^\nu}_{=\delta_\nu^\nu} \underbrace{\delta_\sigma^\alpha}_{=\delta_\alpha^\alpha} \underbrace{\delta_\rho^\beta}_{=\delta_\beta^\beta} &= \sqrt{\tilde{g}} \tilde{f}^\mu \underbrace{L^\nu{}_\gamma}_{=L^\nu{}_\nu} \underbrace{L^\beta{}_\rho}_{=L^\beta{}_\beta} \underbrace{L^\alpha{}_\sigma}_{=L^\alpha{}_\alpha}. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Considerando que os traços $\delta_\nu^\nu = 4$ e $=L^\nu{}_\nu = L$, então:

$$f^\mu = \left(\frac{\tilde{g}}{g} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{L}{4} \right)^3 \tilde{f}^\mu. \quad (\text{C.7})$$

As componentes covariantes de \tilde{f}^μ são determinadas através da aplicação do tensor métrico em seu respectivo espaço, i.e., $\tilde{f}_\nu = \tilde{g}_{\nu\mu} \tilde{f}^\mu$. E, aplicando o tensor métrico $g_{\mu\alpha}$ em ambos os lados da equação (C.7), obtém-se

$$\begin{aligned} f^\mu g_{\mu\alpha} &= \left(\frac{\tilde{g}}{g} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{L}{4} \right)^3 \tilde{f}_\nu \tilde{g}^{\nu\mu} g_{\mu\alpha} \\ f_\mu &= \left(\frac{\tilde{g}}{g} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{L}{4} \right)^3 \tilde{f}_\nu \tilde{g}^{\nu\alpha} g_{\alpha\mu} \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Comparando (C.8) e (C.3),

$$L^\nu{}_\mu = \left(\frac{\tilde{g}}{g} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{L}{4} \right)^3 \tilde{g}^{\nu\alpha} g_{\alpha\mu} \quad (\text{C.9})$$

Substituindo (C.2) em (C.9), chega-se finalmente à expressão do mapeamento:

$$L^\nu{}_\mu = \left(\frac{\tilde{g}}{g} \right)^{\frac{1}{8}} \tilde{g}^{\nu\alpha} g_{\alpha\mu} \quad (\text{C.10})$$

Será útil para os cálculos das outras formas, o vínculo a seguir. Primeiramente, toma-

se o traço na equação (C.9):

$$\begin{aligned}
L^\nu_\mu \delta^\mu_\nu = L^\mu_\mu = L &= \left(\frac{\tilde{g}}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{L}{4}\right)^3 \tilde{g}^{\nu\alpha} g_{\mu\alpha} \delta^\mu_\nu \\
1 &= \left(\frac{\tilde{g}}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{L^2}{4^3}\right) \tilde{g}^{\mu\alpha} g_{\alpha\mu} \\
\tilde{g}^{\mu\nu} g_{\mu\nu} L^2 &= \left(\frac{g}{\tilde{g}}\right)^{\frac{1}{2}} 4^3 \\
L &= 4^{\frac{3}{2}} \left(\frac{g}{\tilde{g}}\right)^{\frac{1}{4}} (\tilde{g}^{\mu\nu} g_{\mu\nu})^{-\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{C.11}$$

Comparando (C.2) com (C.11), define-se o vínculo

$$\begin{aligned}
4 \left(\frac{g}{\tilde{g}}\right)^{\frac{1}{8}} &= 4^{\frac{3}{2}} \left(\frac{g}{\tilde{g}}\right)^{\frac{1}{4}} (\tilde{g}^{\mu\nu} g_{\mu\nu})^{-\frac{1}{2}} \\
(\tilde{g}^{\mu\nu} g_{\mu\nu})^{\frac{1}{2}} &= 2 \left(\frac{g}{\tilde{g}}\right)^{\frac{1}{8}}.
\end{aligned} \tag{C.12}$$

Neste momento, o mapeamento já está calculado, ou seja (C.9). Nos próximos cálculos, será checada a consistência para as demais formas citadas no início desta seção.

C.3 2-forma

Seja a 2-forma f . O mapeamento impõe que

$$\begin{aligned}
f_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu &= \tilde{f}_{\mu\nu}(X) dX^\mu dX^\nu \\
&= \tilde{f}_{\mu\nu}(X) \frac{\partial X^\mu}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \frac{\partial X^\nu}{\partial x^\beta} dx^\beta \\
f_{\mu\nu} &= L^\alpha_\mu L^\beta_\nu \tilde{f}_{\alpha\beta},
\end{aligned} \tag{C.13}$$

O operador dual é mapeado de forma análoga ao que foi feito para a 1-forma:

$$\begin{aligned}
*f_{\mu\nu} &= \star\tilde{f}_{\mu\nu} \\
\eta^{\mu\nu}{}_{\gamma\rho}f_{\mu\nu}dx^\gamma dx^\rho &= \eta^{\mu\nu}{}_{\gamma\rho}\tilde{f}_{\mu\nu}dX^\gamma dX^\rho \\
\epsilon_{\mu\nu\gamma\rho}(\sqrt{g}f^{\mu\nu}dx^\gamma dx^\rho) &= \epsilon_{\mu\nu\gamma\rho}\left(\sqrt{\tilde{g}}\tilde{f}^{\mu\nu}dX^\gamma dX^\rho\right) \\
\sqrt{g}f^{\mu\nu}dx^\gamma dx^\rho &= \sqrt{\tilde{g}}\tilde{f}^{\mu\nu}L^\gamma{}_\kappa L^\rho{}_\lambda dx^\kappa dx^\lambda \\
(\sqrt{g}f^{\mu\nu}\delta_\kappa^\gamma\delta_\lambda^\rho)dx^\kappa dx^\lambda &= \left(\sqrt{\tilde{g}}\tilde{f}^{\mu\nu}L^\gamma{}_\kappa L^\rho{}_\lambda\right)dx^\kappa dx^\lambda \\
\sqrt{g}f^{\mu\nu}\underbrace{\delta_\kappa^\gamma\delta_\gamma^\kappa}_{=4}\underbrace{\delta_\lambda^\rho\delta_\rho^\lambda}_{=4} &= \sqrt{\tilde{g}}\tilde{f}^{\mu\nu}\underbrace{L^\gamma{}_\kappa\delta_\gamma^\kappa}_{=L}\underbrace{L^\rho{}_\lambda\delta_\rho^\lambda}_{=L} \\
f^{\mu\nu} &= \left(\frac{\tilde{g}}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{L}{4}\right)^2\tilde{f}^{\mu\nu}. \tag{C.14}
\end{aligned}$$

Determina-se, então, as componentes covariantes aplicando os tensores métricos na equação (C.14):

$$\begin{aligned}
f_{\alpha\beta}g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} &= \left(\frac{\tilde{g}}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{L}{4}\right)^2\tilde{f}_{\alpha\beta}\tilde{g}^{\alpha\mu}\tilde{g}^{\beta\nu} \\
f_{\alpha\beta}(g^{\alpha\mu}g_{\mu\theta})(g^{\beta\nu}g_{\nu\xi}) &= \left(\frac{\tilde{g}}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{L}{4}\right)^2\tilde{f}_{\alpha\beta}\tilde{g}^{\alpha\mu}\tilde{g}^{\beta\nu}(g_{\mu\theta}g_{\nu\xi}) \\
f_{\alpha\beta}\delta_\xi^\beta\delta_\theta^\alpha &= \left(\frac{\tilde{g}}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{L}{4}\right)^2\tilde{f}_{\alpha\beta}\tilde{g}^{\alpha\mu}g_{\mu\theta}\tilde{g}^{\beta\nu}g_{\nu\xi} \\
f_{\mu\nu} &= \left(\frac{\tilde{g}}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{L}{4}\right)^2\tilde{f}_{\alpha\beta}\tilde{g}^{\alpha\theta}g_{\theta\mu}\tilde{g}^{\beta\xi}g_{\xi\nu}. \tag{C.15}
\end{aligned}$$

Comparando (C.15) e (C.13),

$$L^\alpha{}_\mu L^\beta{}_\nu = \left(\frac{\tilde{g}}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{L}{4}\right)^2\tilde{g}^{\alpha\theta}g_{\theta\mu}\tilde{g}^{\beta\xi}g_{\xi\nu} \tag{C.16}$$

Se apenas um traço é tomado em (C.16) e, em seguida, substituindo (C.2) e (C.12) nesta

mesma equação, então,

$$\begin{aligned}
L_\mu^\alpha L &= \left(\frac{\tilde{g}}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{L}{4}\right)^2 \tilde{g}^{\alpha\theta} g_{\theta\mu} \left[2 \left(\frac{g}{\tilde{g}}\right)^{\frac{1}{8}}\right]^2 \\
L_\mu^\alpha &= \left(\frac{\tilde{g}}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} \left(\frac{g}{\tilde{g}}\right)^{\frac{1}{8}} 4 \left(\frac{g}{\tilde{g}}\right)^{\frac{1}{4}} \tilde{g}^{\alpha\theta} g_{\theta\mu} \\
L_\mu^\alpha &= \left(\frac{\tilde{g}}{g}\right)^{\frac{1}{8}} \tilde{g}^{\alpha\theta} g_{\theta\mu}
\end{aligned} \tag{C.17}$$

L_ν^β é calculado de forma análoga, mas não é necessário explicitá-lo aqui, pois o resultado (C.17) é o mesmo que aquele obtido em (C.9) para 1-forma.

Para a 3-forma e a 4-forma, os cálculos são similares aos realizados para 0-forma e 1-forma, uma vez que estes últimos são os duais dos primeiros.

Referências Bibliográficas

- [1] C. N. Yang, R. L. Mills. *Isotopic spin conservation and a generalized gauge invariance*. Physical Review Letters, 96, p.191-195, (1954).
- [2] G. 't Hooft, *Under the spell of the gauge principle*, Advanced Series in Math.Phys. **19**, World Scientific Publishing Co., (1994).
- [3] G. 't Hooft., *50 Years of Yang-Mills Theory*, World Scientific Publishing Co., (2005).
- [4] J. Schwinger, *Selected Papers on Quantum Electrodynamics*, Dover Publications, New York, (1958).
- [5] C. Itzykson and J. B. Zuber, *Quantum Field Theory*, International Series In Pure and Applied Physics, Mcgraw-hill Inc., (1980).
- [6] E. Noether. *Invariant Variation Problems*. Gott. Nachr. p.235-257, (1918). [physics/0503066].
- [7] J. C. Taylor, *Gauge Theories of Weak Interactions*, Cambridge, (1976).
- [8] V. N. Gribov, Y. L. Dokshitzer, (ed.) and J. Nyiri, (ed.), *Strong interactions of hadrons at high emnergies: Gribov lectures on Theoretical Physics*, Cambridge, UK: Cambridge Univ. Pr., (2009).
- [9] W. Greiner, B. Müller, *Quantum mechanics: symmetries*, Springer, (1994).
- [10] R. Utiyama, *Invariant theoretical interpretation of interaction*, Phys. Rev. **101**, 1597 (1956).

- [11] T. W. B. Kibble, *Lorentz invariance and the gravitational field*, J. Math. Phys. **2**, 212 (1961).
- [12] D. W. Sciama, *The Physical structure of general relativity*, Rev. Mod. Phys. **36**, 463, (1964). [Erratum-ibid. **36**, 1103 (1964)].
- [13] J. Zanelli, *Lecture notes on Chern-Simons (super-)gravities*, Second edition,(February 2008), [hep-th/0502193].
- [14] J. M. F. Bassalo e M. S. D. Cattani, *Teoria de Grupos*, Editora Livraria da Física, (2008).
- [15] Flanders, H., *Differential Forms with Applications to the Physical Science*, 2nd Edition, Courier Dover Publications, (1989).
- [16] R. F. Sobreiro, A. A. Tomaz and V. J. V. Otoyá, *de Sitter gauge theories and induced gravities*, arXiv:1109.0016 [hep-th].
- [17] R. F. Sobreiro, S. P. Sorella, D. Dudal, H. Vershelde, *The Gribov parameter and the dimension two gluon condensate in Euclidean Yang-Mills theories in the Landau gauge.*, Phys. Rev. D **72**, 014016 (2005).
- [18] V. A. Rubakov, *Classical theory of gauge fields*, Princeton University Press, (2002).
- [19] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, Taylor & Francis, (2003).
- [20] O. Piguet and S. P. Sorella, *Algebraic renormalization: Perturbative renormalization, symmetries and anomalies*, Lect. Notes Phys. M **28**, 1 (1995).
- [21] A. O. Barut, *Electrodynamics and classical theory of fields and particles*, New York, USA: Dover, (1980).
- [22] J. C. Collins, *Renormalization. An Introduction To Renormalization, The Renormalization Group, And The Operator Product Expansion*, Cambridge, Uk: Univ. Pr. (1984).

- [23] D. J. Gross and F. Wilczek, *Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories*, Phys. Rev. Lett. **30**, 1343 (1973).
- [24] H. D. Politzer, *Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?*, Phys. Rev. Lett. **30**, 1346 (1973).
- [25] L. D. Faddeev, V. N. Popov, *Feynman Diagrams for the Yang-Mills Field*, Phys. Lett. **B25**, 29-30 (1967).
- [26] V. N. Gribov, *Quantization of Nonabelian Gauge Theories*, Nucl. Phys., **B139**, 1 (1978).
- [27] I. M. Singer, *Some Remarks on the Gribov Ambiguity*, Commun. Math. Phys., **60**, 7, (1978).
- [28] D. Dudal, S. P. Sorella and N. Vandersickel, *The dynamical origin of the refinement of the Gribov-Zwanziger theory*, Phys. Rev. D **84**, 065039 (2011) [arXiv:1105.3371 [hep-th]].
- [29] A. Einstein, *On the General Theory of Relativity*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) **1915**, 778-786 (1915).
- [30] A. Einstein, *The Field Equations of Gravitation*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) **1915**, 844-847 (1915).
- [31] R. M. Wald, *General Relativity*, Chicago, Usa: Univ. Pr., (1984).
- [32] D. Hilbert, *Die Grundlagen der Physik. 1.*, Gott. Nachr. **27**, 395-407 (1915).
- [33] D. Lovelock, *The Einstein tensor and its generalizations*, J. Math. Phys. **12**, 498 (1971).
- [34] A. Mardones and J. Zanelli, *Lovelock-Cartan theory of gravity*, Class. Quant. Grav. **8**, 1545 (1991).
- [35] R. A. Bertlmann, *Anomalies in quantum field theory*, International series of monographs on physics, Oxford, UK: Clarendon Press, (1996).

- [36] T. Frankel, *The geometry of physics: An introduction*, 2nd Edition, Cambridge, UK: Univ. Pr. (2004).
- [37] E. Inonu, E. P. Wigner, *On the Contraction of groups and their representations*, Proc. Nat. Acad. Sci. **39**, 510-524 (1953).
- [38] R. Aldrovandi and J. G. Pereira, *A Second Poincaré group*, [gr-qc/9809061].
- [39] V. Chiritoiu and G. Zet, *Towards a quantization of gauge fields on de Sitter group by functional integral method*, Eur. Phys. J. C **57**, 809 (2008).
- [40] H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski, H. Weyl, *The principle of relativity: a collection of original memoirs on the special and general theory of relativity*, Dover Publications, (1952).
- [41] F. A. Lunev, *Three-dimensional Yang-Mills theory in gauge invariant variables*, Phys. Lett. B **295**, 99 (1992).
- [42] Y. .N. Obukhov, *Gauge fields and space-time geometry*, Theor. Math. Phys. **117**, 1308, (1998).