

Universidade Federal Fluminense
Instituto de Física
Curso de de Pós-Graduação em Física



INSTITUTO DE FÍSICA
Universidade Federal Fluminense

Carlos Eduardo Rodrigues de Souza

**Aplicações do Momento Angular
Orbital da luz à Computação e
Informação Quântica**

Niterói - R.J.

27 de setembro de 2010

Carlos Eduardo Rodrigues de Souza

Aplicações do Momento Angular Orbital da luz à Computação e Informação Quântica

Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do título de doutor em Física.
Área de concentração: Ótica Quântica

Orientador: Professor Dr. **Antonio Zelaquett Khoury**

Niterói - R.J.

27 de setembro de 2010

S729a Souza, Carlos Eduardo Rodrigues de.
Aplicações do momento angular orbital da luz à computação
e informação quântica / Carlos Eduardo Rodrigues de Souza ;
orientador: Antonio Zelaquett Khoury. -- Niterói, 2010.
135 f. : il.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal Fluminense,
Instituto de Física, 2010.
Bibliografia: f. 123-129.

1.MOMENTO ANGULAR ORBITAL DA LUZ. 2.COMPUTAÇÃO QUÂNTICA.
3.INFORMAÇÃO QUÂNTICA. 4.FASE GEOMÉTRICA. 5.OSCILAÇÃO
PARAMÉTRICA. I.Khoury, Antonio Zelaquett, Orientador.
II.Universidade Federal Fluminense. Instituto de Física,
Instituição responsável. III.Título.

CDD 535.15



INSTITUTO DE FÍSICA

Universidade Federal Fluminense

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

RUA GAL MILTON TAVARES DE SOUZA, SN

24210-346 – NITERÓI - RIO DE JANEIRO

TEL: (21)2629-5878 - FAX: 2629-5887

E-MAIL: cpg@if.uff.br

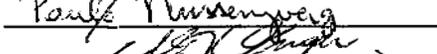
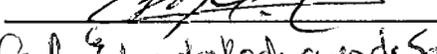
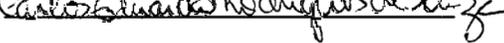
Ata dos trabalhos finais da Comissão Examinadora da tese apresentada por Carlos Eduardo Rodrigues de Souza. Aos vinte e quatro dias do mês de agosto de dois mil e dez, às 09 horas, reuniram-se no Instituto de Física da Universidade Federal Fluminense os membros da Comissão Examinadora constituída pelos professores doutores Antonio Zelaquett Khoury (UFF), Paulo Henrique Souto Ribeiro (UFRJ), Ivan dos Santos Oliveira Júnior (CBPF), Paulo Alberto Nussenzveig (USP) e Luis Esteban Oxman (UFF), sob a presidência do primeiro, para prova pública de apresentação de tese intitulada "Aplicações do Momento Angular Orbital da luz à Computação e Informação Quântica", tendo em vista as exigências do Regulamento Específico do curso de Física relacionadas com a conclusão do doutorado em Física pela Universidade Federal Fluminense. A tese foi elaborada sob a orientação do professor Antonio Zelaquett Khoury. Após a exposição do trabalho, o aluno respondeu às questões formuladas pelos integrantes da Comissão Examinadora, que apresentou parecer no sentido de aprová-lo. Para constar, foi lavrada a presente ata, que vai assinada por mim, secretário da Pós-graduação em Física em exercício, pelos membros da Comissão Examinadora e pelo doutorando.

Niterói, vinte e quatro de agosto de dois mil e dez.

Rafael Ângelo Nobuyuki Sano
Dr. Antonio Zelaquett Khoury
Dr. Paulo Henrique Souto Ribeiro
Dr. Ivan dos Santos Oliveira Júnior
Dr. Paulo Alberto Nussenzveig
Dr. Luis Esteban Oxman
Carlos Eduardo Rodrigues de Souza





*À minha mãe Alvina, minhas irmãs Rafaela e Neuma e em
memória a Luiz Rodrigues dos Santos, meu pai.*

“Uma mente que se abre a novos pensamentos
nunca retorna ao tamanho original”

Albert Einstein.

Agradecimentos:

Escrever essa parte da tese foi uma tarefa prazerosa porém muito difícil. Prazerosa pois lembrar da convivência com algumas pessoas tão sensacionais que participaram ativamente ou influenciaram positivamente minha vida foi muito bom. Difícil pois depois de mais de 125 meses convivendo neste instituto, certamente esquecerei de citar aqui alguém que foi muito importante ao longo deste período em que me formei profissionalmente.

Por falar em pessoas tão sensacionais, eu gostaria de agradecer ao meu orientador Zelaquett que teve muita paciência e dedicação na orientação deste autor desde a iniciação científica. Fico sem palavras para descrever a convivência ao lado de uma pessoa que, com muita simplicidade, geralmente consegue desarmar e resolver rapidamente um problema encarando-o de maneira simplificada e em geral formulando novas questões que quando atacadas produzem ótimos resultados. Uma pessoa que este autor tem como referência a ser seguida!

Aos velhos companheiros do lab: Doutores José Augusto Huguenin (Zé) e Bernardo Coutinho que participaram ora como colaboradores, ora como co-orientadores e sempre como amigos, muito obrigado! As meninas Carolina Vannier (Carol) e Dra Malena Hormeyll que me aturam constantemente nas profundezas do lab, também muito obrigado. Recentemente, a Malena tem me orientado e colaborado constantemente na estabilização do OPO. Valeu Malena!!!

À professora Maria Teresa Thomaz, minha primeira orientadora, também norteia a visão deste autor para o exemplo de uma ótima pesquisadora. Me sinto um cara de muita sorte por ter tido a oportunidade de dar os primeiros passos na pesquisa com ela. Muito obrigado!

Bom, amigos??? “Caraca”, nestes dez anos foram muitos!!! Muito provavelmente vou esquecer de vários. De ante-mão: Mil desculpas aos que eu deixar de citar. Mas, em especial eu não poderia deixar de citar Odilon Lourenço e Mariana Dutra que participam comigo dessa grande jornada aqui na UFF desde 2000. Exemplo de amigos e ótimos profissionais. Valeu pessoal!!! Muito bom ser amigo de vocês.

Não poderia deixar de citar também os amigos que hoje estão estudando em outras universidades mas que conviveram durante muito tempo comigo: Silvânia Alves, Rodrigo

Picanço, Barbara Kelly e Edésio Barbosa. Com esses eu passei momentos agradabilíssimos resolvendo, listas de exercícios (Mecânica Quântica, Eletro...), churrascos movidos aos “*aceleradores de partículas*” (caipirinha), trabalhos do curso de licenciatura... Valeu Negada!!!

Carlos Ritter, esse aí é o cara! Sempre promovendo altas discussões acerca de qualquer tema. Muito obrigado Carlitos!

Nos últimos anos eu tive o prazer de conhecer pessoas fabulosas e que contribuem muito para minha vida. Dentre elas eu destaco os colombianos Francisco Culchac, Victor Fernandez e os conterrâneos Danieli Freitas, Eliel Eleutério, Orahcio Canavieiras, Thiago José, Luciano Fonseca. Valeu pessoal!!!

A oportunidade de realizar uma parte do trabalho de doutoramento em São Paulo me fez conhecer pessoas muito importantes naquela terra. Em especial eu gostaria de agradecer à Professora Lucila Cescato do laboratório do Óptica Difractiva da UNICAMP que me acolheu em seu laboratório discutindo e fornecendo todos os meios necessários para a produção das máscaras de fase. Gostaria de agradecer também aos então alunos Luiz de Ávila e Jacson Menezes pela ajuda fundamental na realização de todo o trabalho realizado lá.

Já na capital paulista, sou deveras agradecido ao Professor Marcelo Martinelli que me orientou em todo o processo de estabilização do OPO montado aqui na UFF. Também não tenho palavras para agradecer aos alunos Felipe Barbosa e Antônio Coelho que me auxiliaram muito no período que estive por lá. Desculpem-me por fazê-los desmontar o sistema de estabilização do vosso experimento. Muito Obrigado à todos vocês.

Um obrigado especial aos professores Lucia de Almeida, Ruth Bruno (Não esqueço as aulas complementares de sobre ondas mecânicas) e João Carlos Fernandes.

Um obrigado especial às minhas queridas bibliotecarias Ana Maria, Lucia Regina e Danieli Brabo. Não esqueço também dos amigos Kátia Maria, Irani, Stephanie Maia, Leia Luiz, Luci Porto e Emílio Vaz. Valeu pessoal!

Aos funcionários da secretaria de pós-graduação Valéria e Raphael o meu muito obrigado e parabéns excelente pelo serviço executado! Obrigado também aos funcionários da oficina mecânica Sérgio, Nelson e Edmilson que construíram e ajustaram muitas peças

indispensáveis no trabalho.

A realização deste trabalho só foi possível com apoio substancial dado pelas agências de fomento Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) e Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (Faperj) que disponibilizaram grande parte da infra-estrutura e me apoiaram com bolsas de estudo.

Resumo

Realiza-se um estudo detalhado acerca do Momento Angular Orbital (MAO) da luz. A descrição teórica, a produção experimental de feixes com MAO e o procedimento de medida desse MAO serão apresentados. Associou-se os momentos angulares de spin e orbital de forma a produzir-se estados descritos por dois graus de liberdade, que descrevem os sistemas de dois bits quânticos (q-bits). Essa associação permitiu a descrição dos vários experimentos destinados à Computação e Informação Quântica realizados como contribuições originais no doutorado. A saber, foram realizados: um experimento que evidenciou pela primeira vez uma fase genuinamente topológica associada aos dois tipos de trajetórias cíclicas no espaço representado pelo grupo das rotações $SO[3]$ e que pode ser útil para computação quântica robusta às perturbações; uma porta quântica lógica Não-Controlado (CNOT) que utiliza a polarização como q-bit alvo e o modo transversal como q-bit de controle; e um seletor de modos transversos. Esses dois últimos foram baseados em um conversor de modos de lentes únicas, originalmente proposto nesta tese. Foi feito ainda um experimento que pode implementar o protocolo de criptografia quântica BB84 sem o alinhamento remoto dos referenciais. Finalmente, apresentam-se os procedimentos adotados para a estabilização do Oscilador Paramétrico Ótico (OPO) que constitui uma fonte de feixes gêmeos destinada ao estudo do emaranhamento em variáveis contínuas na UFF. Uma proposta para a medida desse emaranhamento entre os feixes também é apresentada.

Abstract

It presents a detailed study about the Orbital Angular Momentum of the light. Its theoretical description, the experimental method for the production of the beams carrying OAM and the procedure to measure the OAM will be presented. The spin and orbital angular momentum were associated to produce states described by two degrees of freedom representing two-qubit systems. This association enabled the description of original Quantum Information and Computation experiments, namely: an experiment that showed for the first time the topological phase associated to two cyclical paths in the space represented by $SO[3]$ rotation group, a new design of a CNOT quantum logic gate that uses polarization as the control qubit and the transverses modes as the target qubit, and a mode sorter. These last two experiments were based on a Single Lense Mode Converter, originally proposed in this thesis. Besides, a device that implements the BB84 quantum key distribution protocol without the need of a shared referencial frame was conceived. Finally, we present the procedure to stabilize the Optical Parametric Oscillator, that constitutes a source of twin beams to study continuous variable entanglement at UFF. A proposal to measure this entanglement is discussed as well.

Sumário

Introdução	p. 1
1 O Momento angular da Luz	p. 9
1.1 Propagação paraxial da luz	p. 9
1.2 Modos paraxiais	p. 15
1.2.1 Coordenadas retangulares: os modos hermite-gaussianos	p. 16
1.2.2 Coordenadas cilíndricas: os modos laguerre-gaussianos	p. 16
1.3 Momento angular orbital para C&IQ	p. 18
1.4 Conversão de modos	p. 20
1.4.1 O conversor com duas lentes cilíndricas	p. 22
1.4.2 O conversor de lente única	p. 23
1.5 Representação geométrica	p. 30
1.6 Produção e detecção de feixes com momento angular orbital	p. 32
2 Fase Topológica para feixes com Momento Angular Orbital	p. 45
2.1 Fases geométricas em sistemas de dois níveis	p. 46
2.1.1 Fase de Pancharatnam para evoluções cíclicas da polarização	p. 46
2.1.2 Fase de Berry para sistemas com simetria SU[2]: q-bits	p. 48
2.1.3 Fase geométrica para evoluções cíclicas de modos paraxiais	p. 49
2.2 Fase topológica para estados emaranhados de dois q-bits	p. 52
2.2.1 Representação geométrica do espaço de estados de dois q-bits	p. 53

2.2.2	Mapeamento dos estados maximamente emaranhados de dois q-bits na esfera do SO[3]	p. 55
2.3	Modos spin-órbita da luz	p. 58
2.4	Fase topológica para transformações spin-órbita de feixes luminosos . .	p. 62
2.4.1	Outras Trajetórias no SO[3]	p. 70
3	Dispositivos de computação quântica com o momento angular orbital da luz	p. 75
3.1	A porta lógica <i>NÃO-Controlado</i> (CNOT)	p. 76
3.2	A porta CNOT em um interferômetro de Michelson	p. 79
3.3	Seletores de modos transversos	p. 82
4	Criptografia quântica com modos spin-órbita da luz	p. 85
4.1	O protocolo BB84 de criptografia quântica	p. 86
4.2	Estados protegidos de descoerência	p. 91
4.3	Protocolo BB84 sem alinhamento remoto	p. 95
5	Perspectivas de estudo do Momento Angular Orbital no Oscilador Paramétrico Ótico	p. 103
5.1	Oscilador Paramétrico Óptico	p. 104
5.2	O Método Pound-Drever-Hall para estabilização de cavidades	p. 106
5.3	Transferência do momento angular orbital na oscilação paramétrica . .	p. 110
6	Conclusões e Perspectivas	p. 113
	Apêndice 1- A propagação do feixe paraxial no conversor astigmático	p. 115
	Apêndice 1- Cálculo do padrão de difração da Máscara	p. 121
	Referências Bibliográficas	p. 123

Introdução

A natureza eletromagnética da luz, conjecturada por Maxwell [1] no século XIX, descreve a radiação como uma onda clássica e prevê que a luz pode carregar momento angular. A explicação de fenômenos luminosos como difração, interferência, formação de imagens e a imediata aplicação no desenvolvimento tecnológico contribuíram fortemente para o grande sucesso da teoria ondulatória de Maxwell. O surgimento da teoria quântica afetou profundamente nossa visão sobre a natureza da luz, explicando outra gama de fenômenos relacionados à interação da radiação com a matéria. Porém, a teoria eletromagnética clássica ainda é largamente aplicada a problemas que dispensam a quantização do campo [2].

Segundo a teoria eletromagnética clássica, a luz é uma perturbação que se propaga no espaço. Essa perturbação é descrita por meio da oscilação dos *vetores campo Elétrico* (\vec{E}) e *campo Magnético* (\vec{H})¹ e apresenta polarização bem definida quando esses campos descrevem uma trajetória específica numa dada região do espaço no intervalo de tempo de um período de oscilação. No espaço livre, os campos devem ser transversais à direção de propagação representada pelo *vetor de onda* \vec{k} como ilustrado na Figura 1. Quando os campos descrevem trajetórias contidas em um plano que contém o vetor de onda, diz-se que a luz é linearmente polarizada. Caso essas trajetórias sejam helicoidais, a luz é dita circularmente polarizada. Neste caso, os campos podem rodar no sentido horário ou no sentido anti-horário. Observa-se que a interação da luz circularmente polarizada com a matéria produz um torque no material, que pode ser medido. Esse torque é associado ao Momento Angular da luz que é calculado e descrito na literatura básica de eletromagnetismo[3, 4]. Historicamente, o primeiro trabalho a reportar uma medida experimental do momento angular da luz com polarização circular foi feito por *Richard A.*

¹No vácuo, o campo magnético é dado por $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, com μ_0 sendo a permeabilidade magnética do vácuo.

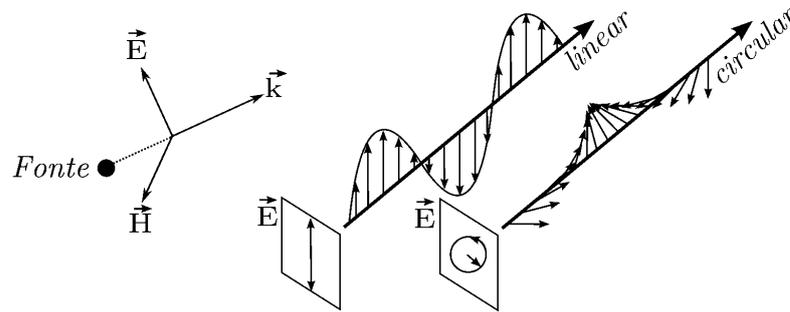


Figura 1: À esquerda, uma fonte pontual de luz e a representação dos campos elétrico e magnético num dado ponto. À direita, a representação da dinâmica dos campos elétricos para ondas linearmente e circularmente polarizadas.

Beth [5] em 1936. Ele verificou esta propriedade medindo o torque produzido por um feixe de luz circularmente polarizado incidindo numa lâmina birefringente suspensa por um fio.

Na maior parte das vezes, a luz não apresenta uma polarização bem definida e a descrição dos vetores é mais complicada. Isso acontece, por exemplo na descrição da propagação em um guia de ondas ou numa fibra óptica. Todavia, o momento angular transportado pela luz, de forma análoga ao momento angular de um corpo rígido, pode ser decomposto em duas componentes [6]: (a) o *Momento Angular de Spin* que é associado com o estado de polarização e (b) o *Momento Angular Orbital* que é associado à geometria da frente de onda do feixe de luz. Na Figura 2 são ilustradas as frentes de onda de feixes luminosos com e sem momento angular orbital. Em 1992 surgiu a primeira proposta para a medida do momento angular orbital da luz. *L. Allen et al* [7, 8] propuseram um arranjo utilizando lentes cilíndricas que funcionaria de forma análoga ao experimento de Beth e que mostraria que um feixe com polarização linear, consequentemente sem momento angular de spin, pode possuir momento angular orbital. Até os dias atuais essa proposta ainda não havia sido implementada. Entretanto, em 1997 *N. B. Simpson et al.* [9] verificaram a transferência do momento angular orbital da luz para partículas aprisionadas em pinças ópticas, mostrando experimentalmente a existência desta propriedade. Recentemente foram propostos alguns dispositivos [10, 11] que permitem a medida do Momento Angular Orbital no regime em que a luz é descrita pela teoria quântica. O momento angular da luz foi o principal objeto de estudo desta tese e

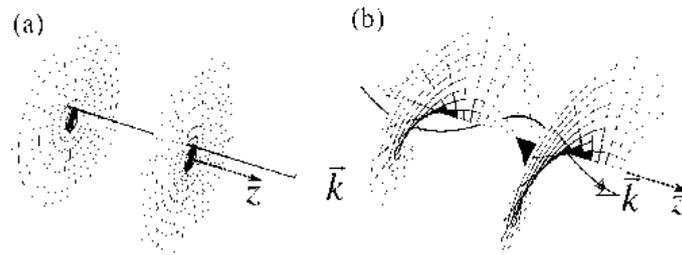


Figura 2: (a) Frente de onda plana de um feixe sem momento angular orbital se propagando ao longo da direção z com vetor de onda \vec{k} sempre paralelo à z ; (b) Frente de onda helicoidal de um feixe com momento angular orbital se propagando ao longo da direção z e com \vec{k} espiralando em torno de z .

será discutido no primeiro capítulo com mais detalhes.

A teoria quântica da luz nasceu em 1900 com o trabalho de Max Planck [12] que explica matematicamente a radiação emitida ou absorvida por um *corpo negro*². Planck propôs que a energia da radiação eletromagnética não pode assumir qualquer valor, mas quantidades finitas $\varepsilon = h\nu$ proporcionais à frequência da luz, onde $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ m}^2 \text{ kg/s}$ é a constante de Planck. Baseado nesta proposição, Einstein em 1905 assume uma propriedade corpuscular para a luz, esta existe em quantidades elementares de energia, chamadas de *fótons*, com energias dadas pela expressão de Planck. Com isso explica o Efeito Fotoelétrico [13]. Posteriormente verificou-se que os fótons também possuem momento linear e momento angular quantizados. A teoria ondulatória não é satisfatória na explicação desses dois problemas, abordados por Planck e Einstein, que eram grandes desafios da Física do século XIX. As observações experimentais das propriedades corpusculares da luz, como o *Efeito Compton* [14] nos anos subsequentes consolidaram a aceitação da teoria quântica colocando-a como uma teoria igualmente aceita para a descrição da radiação, levando em conta a *dualidade partícula-onda* da luz.

Chamamos de Física Clássica ou Mecânica Clássica todas as teorias propostas e unificadas por Isaac Newton para a descrição da dinâmica de corpos macroscópicos que se movem com velocidade muito menor que a da luz e que a trata como uma onda eletromagnética. A Física Quântica ou Mecânica Quântica é a teoria utilizada para a descrição de objetos com dimensões atômicas e, geralmente, trata a luz como fótons. Pode-se ainda

²Um corpo idealizado que absorve toda a radiação que nele incide.

considerar a possibilidade de descrição da luz na mecânica quântica com a utilização de um ruído quântico adicionado ao formalismo vetorial [15].

A motivação para estudar o momento angular da luz surge da grande variedade de aplicações a que esta propriedade se presta. Só o estudo da interação da radiação com a matéria, que requer a utilização de luz com polarização bem determinada, já justificaria a motivação para este estudo. Os experimentos destinados ao estudo dessa interação radiação-matéria corroboraram e guiaram a construção da teoria quântica. A área da ciência que se dedica a esse estudo é a espectroscopia, que atualmente tem contribuído muito para o desenvolvimento da nanotecnologia como pode-se verificar no artigo de revisão [16] onde os autores descrevem todo o processo de caracterização de um nanotubo de carbono por meio da Espectroscopia Raman. Uma discussão detalhada acerca da espectroscopia e da nanotecnologia não serão contempladas nesta tese. O foco aqui será o estudo do momento angular da luz para aplicações em computação e informação quântica e no estudo de propriedades fundamentais da natureza quântica da luz.

Gordon Moore, um dos fundadores da INTEL, em meados da década de 60 percebeu que o tamanho dos componentes eletrônicos nos chips dos computadores se reduziam à metade a aproximadamente cada 18 meses sem um aumento efetivo no custo do chip que mantém as mesmas dimensões até os dias atuais([17, 18, 19, 20]). Esse comportamento percebido por Moore ficou conhecido como a *Lei de Moore* e tem se verificado até os dias atuais como podemos ver na Figura 3 que fornece o número de transistores dentro do chip. Extrapolando os resultados dessa lei, pode-se prever que em 2020 cada átomo do chip representará um único transistor! Essa perspectiva chamou a atenção para um problema que surgirá quando os transistores forem compostos por poucos átomos: a física que descreverá o funcionamento dos componentes em escala atômica. Atualmente o funcionamento dos componentes eletrônicos nos chips compostos por bilhões de átomos é descrito pela Física Clássica.

A computação quântica é uma área da ciência muito nova que surgiu no início dos anos 80 com a proposta de uma computação realizada por um sistema quântico ao invés dos sistemas descritos pela física clássica. A grande novidade na computação quântica é que ela pode ser muito mais rápida do que a clássica para algumas tarefas. A fatoração de números é uma dessas tarefas e é muito importante para a segurança nos atuais pro-

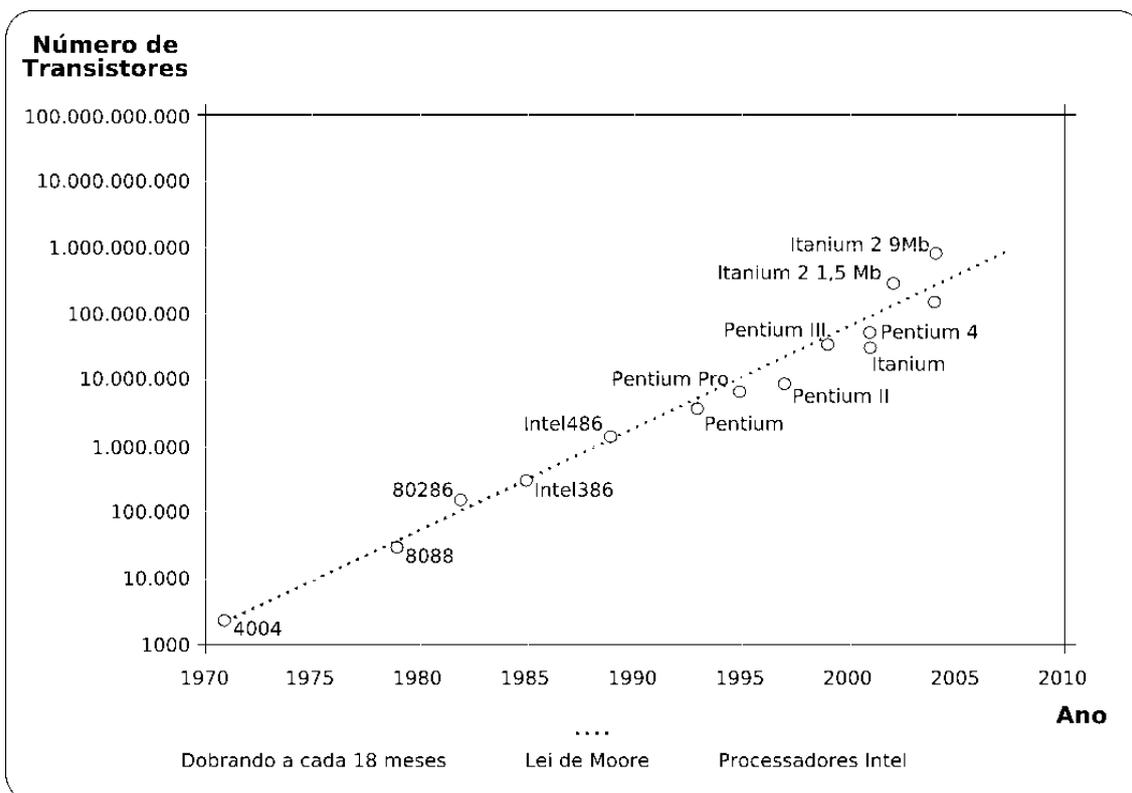


Figura 3: Lei de Moore[18].

cessos de transmissão de mensagens privadas como em transações bancárias. Atualmente a segurança nessa forma de transmissão é baseada no tempo gasto para um computador conseguir fatorar um número muito grande. Uma outra vertente da computação quântica seria a eficiência na simulação de sistemas quânticos, o que atualmente é feito apenas para sistemas pequenos e compostos por poucos átomos nos computadores clássicos. Esta área tem revolucionado a forma de pensar em computação contribuindo para o desenvolvimento da teoria da informação assim como o desenvolvimento da teoria quântica. O entendimento de propriedades da mecânica quântica como o *emaranhamento* que eram vistas apenas como mera curiosidade e assunto de discussões filosóficas se mostraram indispensáveis para essa nova forma de computação.

Tanto a computação clássica como a computação quântica são baseadas em bits. O bit é um conceito abstrato e meramente matemático com algumas propriedades específicas que permitem a construção de uma teoria de computação³ [17]. Na verdade, a computação

³Entendemos por computação como a busca da solução de um problema que é codificado em bits que

quântica é construída a partir do conceito de bits quânticos ou abreviadamente, *q-bits*, que também são objetos matemáticos abstratos que não dependem do sistema físico onde estão armazenados. Nos computadores clássicos, como neste que utilizo para escrever a tese, os bits são representados por níveis de potencial elétrico dentro dos componentes de memória e podem assumir dois valores, por exemplo 0 para componente com potencial abaixo de um certo nível e 1 para potencial acima deste nível. Ainda na computação clássica, outros sistemas, como a polarização da luz ou a magnetização, podem representar fisicamente os bits. Vários sistemas quânticos estão sendo estudados para serem utilizados na implementação da computação quântica. Os níveis de energia de um elétron aprisionado num poço quântico [21], a direção do spin nuclear [22], os níveis de energia de átomos [23], os estados de polarização e momento angular orbital de fótons [24, 25] são sistemas muito estudados hoje em dia. Nesta linha, propõe-se aqui apresentar um estudo do momento angular da luz e discutir a aplicação desta propriedade na implementação de algumas propostas de dispositivos ópticos para a Computação e Informação Quântica (C&IQ).

A tese está estruturada na forma descrita a seguir:

No primeiro capítulo, o momento angular da luz é abordado de forma geral segundo as teorias clássica e quântica. Inicialmente a propagação paraxial será apresentada, culminando no modo fundamental que descreve a luz laser. Em seguida, as soluções mais gerais da equação paraxial, ou modos transversos de propagação da luz, que dão conta dos feixes portadores de momento angular orbital (MAO) também serão apresentadas. Na sequência, uma discussão acerca da propagação desses feixes no regime quântico será feita. Para finalizar, a produção e manipulação experimental de tais feixes serão abordadas na seguinte sequência: conversão de feixes paraxiais com os conversores astigmáticos e a obtenção experimental de tais feixes. A produção das máscaras de fase para obtenção dos feixes paraxiais não rendeu publicação mas foi um avanço tecnológico crucial para a realização dos outros trabalhos do corpo da tese. As representações geométricas para os estados de polarização e modos transversos em termos dos parâmetros de Stokes também serão apresentadas na parte final do primeiro capítulo.

O segundo capítulo trata do estudo das fases adquiridas por um sistema emaranhado

serão manipulados seguindo um algoritmo que no final, quando decodificados, produzem a solução desejada.

de 2 q-bits. Assunto esse que tem atraído bastante atenção nos últimos anos devido às recentes demonstrações experimentais de portas lógicas quânticas de fase em vários sistemas físicos e ao seu potencial de utilização na C&IQ. Em particular, a fase topológica em feixes com MAO será demonstrada experimentalmente. Inicialmente, abordaremos as fases geométricas para evoluções cíclicas nos estados de polarização e os modos paraxiais de primeira ordem. Em seguida, abordaremos a fase topológica em sistemas emaranhados de 2 q-bits. Esse capítulo termina com a apresentação dos resultados da medida da fase topológica para transformações spin-órbita de feixes paraxiais. Os resultados desse capítulo foram publicados na revista *Physical Review Letters* [26].

O terceiro capítulo descreve o funcionamento das propostas de dispositivos para C&IQ. Uma porta CNOT e um seletor de modos transversos foram os aparatos propostos. Inicialmente, será feita uma descrição do funcionamento das portas lógicas ópticas CNOT. O funcionamento dos dispositivos para C&IQ propostos serão descritos na sequência. Os resultados desse capítulo estão publicados na revista *Optics Express* [27].

No quarto capítulo será apresentada uma proposta de criptografia quântica para envio seguro de uma chave lógica sem a necessidade do compartilhamento remoto dos referenciais dos interlocutores. Na primeira parte deste capítulo, o protocolo original BB84 de criptografia quântica, que é a base da proposta acima, será apresentado. Em seguida, uma discussão sobre os estados protegidos de descoerência será feita. Por fim, serão apresentados os resultados experimentais da proposta de criptografia quântica implementadas com a polarização e o modo transversal da luz. Os resultados desse capítulo foram publicados na revista *Physical Review A* [28].

O quinto capítulo trata das perspectivas de estudo do emaranhamento em variáveis contínuas (“Squeezing”) aqui no LOQ-IFUFF. Em particular o procedimento adotado para a estabilização eletrônica do Oscilador Paramétrico Óptico (OPO) via o método Pound-Drever-Hall é apresentado. Esse capítulo completa a tese com a apresentação de uma proposta experimental que está sendo implementada aqui na UFF para medida de squeezing em feixes gêmeos portadores de MAO.

No Capítulo seis as conclusões e perspectivas serão apresentadas.

A tese será finalizada com o apêndice 1, as referências bibliográficas e o índice remissivo.

1 O Momento angular da Luz

Basicamente serão feitas uma descrição formal da propagação da luz laser e uma apresentação dos procedimentos experimentais realizados para a produção dos feixes laser que carregam o Momento Angular Orbital, também chamados de vórtices óticos. Inicialmente, será apresentada uma descrição matemática do feixe de luz laser por meio do formalismo da propagação de modos gaussianos, que são soluções da equação paraxial em meios isotrópicos e livres de cargas. Ver-se-á que existem expressões que descrevem a propagação de feixe de luz proveniente de um laser. Em particular, serão apresentados os modos Hermite-Gaussianos (HG) e os modos Laguerre-Gaussianos (LG), expressões que caracterizam diretamente a luz com Momento Angular Orbital. Em seguida, será feita uma discussão sobre a utilização do MAO da luz em experimentos de Computação e Informação Quântica (C&IQ). A conversão de um modo LG em um HG, e vice-versa é apresentada na sequência. Essa conversão será abordada formalmente, com a apresentação das relações matemáticas entre os modos LG e HG, e experimentalmente, com a apresentação dos tradicionais conversores astigmáticos de lentes cilíndricas e do Conversor de Lente Única, uma proposta original desta tese. Na sequência, serão apresentadas as representações dos modos LG e HG de primeira ordem em termos dos Parâmetros de Stokes e em termos da Esfera dos Modos. Por fim, será apresentado o procedimento para produção experimental dos modos LG e HG a partir de um feixe gaussiano típico de um laser comercial.

1.1 Propagação paraxial da luz

A dinâmica da radiação eletromagnética é descrita pelas equações de Maxwell. Em meios homogêneos livres de cargas e correntes e no sistema gaussiano de unidades essas

equações são escritas como:

$$\nabla \cdot \vec{E}(x, y, z) = 0; \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \vec{E}(x, y, z) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}(x, y, z); \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(x, y, z) = 0; \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \vec{B}(x, y, z) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(x, y, z). \quad (1.4)$$

Elas constituem um conjunto de quatro equações diferenciais parciais acopladas de primeira ordem para os vetores campo elétrico \vec{E} e indução magnética \vec{B} .

Essas equações podem ser desacopladas em duas equações diferenciais de segunda ordem. Calculando o rotacional na Equação 1.2 obtemos:

$$\nabla^2 \vec{E} - \left(\frac{1}{c}\right)^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (1.5)$$

a equação que descreve a dinâmica do campo elétrico durante a propagação da luz em meios homogêneos.

A fim de obter uma equação que descreve a propagação de um feixe monocromático e pouco divergente (análogo ao feixe produzido por um laser), o campo elétrico será escrito na forma: $\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{\epsilon} u(\vec{r}) e^{-i\omega t}$, onde $\hat{\epsilon}$ é o vetor de polarização, $u(\vec{r})$ é a amplitude da onda e $e^{-i\omega t}$ é a fase temporal. Substituindo na equação acima, obtém-se a equação de Helmholtz

$$\nabla^2 u(\vec{r}) + k^2 u(\vec{r}) = 0, \quad (1.6)$$

onde $k = \omega/c$.

Admitindo agora que o feixe se propaga ao longo da direção do eixo z , pode-se escrever,

$$u(\vec{r}) = \psi(x, y, z) e^{ikz}, \quad (1.7)$$

onde e^{ikz} é a dependência espacial “rápida” e tem um período de um comprimento de onda $\lambda = 2\pi/k$ na direção de propagação.

A função $\psi(x, y, z)$ especifica a estrutura transversa do feixe. Esta estrutura transversa muda lentamente ao longo de z devido à difração. Para um feixe razoavelmente colimado, esta variação é lenta quando comparada ao termo e^{ikz} . Isto é, a função que descreve a

variação transversa à propagação muda pouco em distâncias da ordem do comprimento de onda.

A substituição da equação (1.7) na equação de Helmholtz (1.6) produz:

$$\nabla^2 \psi(x, y, z) + 2ik\hat{z} \cdot \nabla \psi(x, y, z) = 0. \quad (1.8)$$

A equação paraxial

Pode-se expressar matematicamente a variação lenta de $\psi(x, y, z)$ por meio da *aproximação paraxial*

$$\left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right| \ll \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right| e 2k \left| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|. \quad (1.9)$$

Em que o primeiro termo da equação acima é desprezado. Com essa aproximação, a equação de Helmholtz se reduz a:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0. \quad (1.10)$$

Essa equação é conhecida como a *equação paraxial*.

O modo fundamental

Essa equação pode ser resolvida por diversas formas. No caso mais simples, ela admite soluções com simetria cilíndrica em torno do eixo de propagação z . Na dissertação [29] este caso é resolvido seguindo a referência [30].

Esta solução, conhecida como *feixe gaussiano* ou *modo fundamental*, descreve o feixe de luz produzido por um laser e é dada por:

$$\psi(x, y, z) = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{w(z)} e^{-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}} e^{i(-kz + \arctan(\frac{z}{z_R}) - k\frac{x^2+y^2}{2R(z)})}, \quad (1.11)$$

onde,

$$R(z) = z \left(1 + \frac{z_R^2}{z^2} \right) \quad (1.12)$$

é o raio de curvatura e

$$w(z) = \sqrt{w_0^2 \left(1 + \frac{z^2}{z_R^2} \right)}, \quad (1.13)$$

é a largura do feixe, isto é, a distância onde a irradiância cai por um fator $1/e$ do valor da irradiância máxima medida em z . O parâmetro w_0 é a cintura do feixe e será apresentado a seguir. A irradiância do feixe acima é calculada tomando o módulo quadrado do campo elétrico e pode ser escrita simplificadamente como

$$I(x, y, z) = \left(\frac{2P_0}{\pi w(z)^2} \right) e^{-2\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}}, \quad (1.14)$$

com P_0 sendo a potência total do feixe. Seguindo as definições dos livros-texto de ótica, essa potência radiante (ou irradiância) é medida em Watts. As propriedades do feixe gaussiano são ilustradas na figura 1.1. Observa-se no diagrama, que o modo fundamental apresenta uma largura mínima w_0 , onde por simplicidade define-se em $z = 0$, conhecida como a *cintura do feixe* e que corresponde ao foco físico. Neste ponto, a frente de onda é plana e o raio de curvatura é infinito. Ao longo do eixo de propagação, se afastando da cintura, a largura do feixe $w(z)$ aumenta, a frente de onda se curva e a intensidade no eixo diminui. Por isso é conveniente utilizarmos o parâmetro z_R conhecido como *comprimento de Rayleigh*,

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}, \quad (1.15)$$

que fornece uma medida da divergência do feixe. Ele dá a distância ao longo de z onde a irradiância do laser cai à metade do valor da cintura, $I(x = 0, y = 0, z = z_R) = I_{max}/2$. A expressão (1.11) só é válida na região $(-z_R, z_R)$. A largura $2z_R$ é o *parâmetro confocal*. Fora desta região, o feixe gaussiano se comporta como uma onda esférica originária da cintura do feixe.

Vale frisar que o padrão do campo ao longo de todo feixe gaussiano é inteiramente caracterizado pelos parâmetros w_0 e λ . A determinação experimental desses parâmetros do laser é muito importante para escolha dos componentes óticos como lentes e espelhos utilizados nos experimentos.

Agora, o procedimento utilizado no laboratório para a determinação do comprimento de Rayleigh e da cintura do laser será descrito. Este método é vulgarmente chamado de *Método da Faca*.

Medida experimental de w_0

Neste método, utiliza-se uma lâmina metálica presa num estágio de translação e um

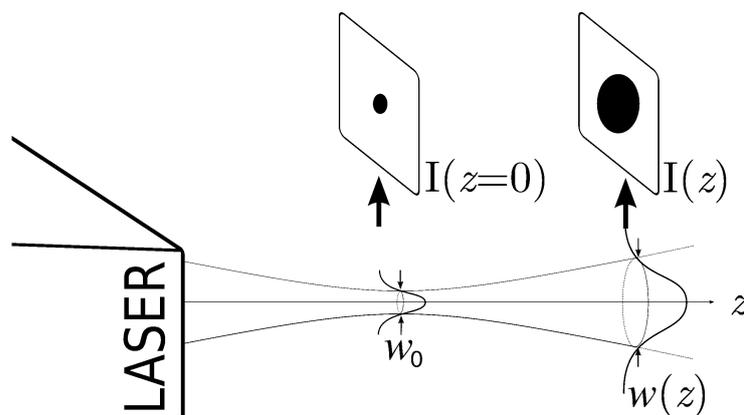


Figura 1.1: *Propriedades do feixe gaussino.*

medidor de potência para medidas de intensidade como ilustrados na Figura 1.2 (a). Inicialmente a lâmina é fixada ao longo de uma posição na direção z e movida gradativamente ao longo da direção x com deslocamentos conhecidos. Um gráfico que relaciona a posição da lâmina com a intensidade medida é gerado. O valor de $w(z)$ é obtido após uma análise do gráfico obtido. Essa análise se baseia simplesmente em um ajuste dos pontos experimentais com uma equação teórica, desenvolvida logo abaixo, que possui a largura do feixe como um dos parâmetros a serem ajustados.

Afim de obter uma expressão que forneça a intensidade medida no fotodetector, devemos integrar as irradiâncias em todos os pontos de um plano perpendicular ao plano de propagação. Esse procedimento que simula a intensidade da luz medida no detector é feito matematicamente integrando-se a Equação 1.14 como segue:

$$I_{det}(z) = \left(\frac{I_0}{w^2(z)} \right) \iint_{-\infty}^{+\infty} dx dy e^{-2\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}} = I_0. \quad (1.16)$$

Note que integrando em todo o plano, a intensidade calculada será a intensidade total do feixe. Porém, na medida em que o feixe é bloqueado com a lâmina, essa intensidade começa a diminuir até que caia a zero quando o feixe estiver totalmente bloqueado como ilustrado na Figura 1.2 (b). Assim, a intensidade medida de acordo com a posição da

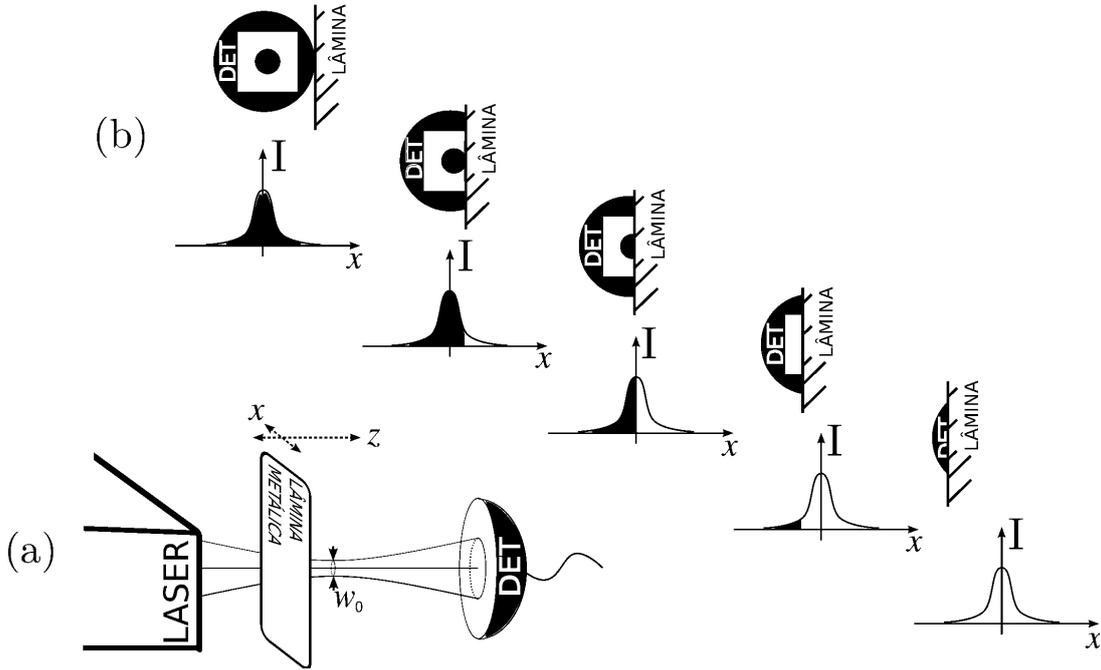


Figura 1.2: (a) Esquema experimental para determinação do parâmetro de Rayleigh. (b) Intensidades medidas no detector para diversas posições da lâmina metálica.

lâmina pode ser calculada fixando um dos limites de integração como segue:

$$I_{det}(z, x_0) = \frac{I_0 w(z)}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{-2\frac{y^2}{w^2(z)}} \int_{-\infty}^{x_0} dx e^{-2\frac{x^2}{w^2(z)}}. \quad (1.17)$$

A expressão acima pode ser reescrita utilizando a definição da *função erro* (F_{erro}) e toma a seguinte forma:

$$I_{det}(z, x_0) = \frac{I_0 \sqrt{w(z)}}{\sqrt{2\pi}} F_{erro} \left(\frac{\sqrt{2}}{w(z)} x_0 \right). \quad (1.18)$$

A expressão acima relaciona a intensidade detectada com a posição da lâmina e fornece diretamente $w(z)$ quando é ajustada com os dados experimentais.

A obtenção da cintura e da distância de Rayleigh de um feixe é um procedimento importante em experimentos que requerem o *casamento de modos*, explicado na Seção 1.4, como a construção do Oscilador Paramétrico Ótico (OPO), que será reportada no Capítulo 5 desta tese. A fim de exemplificar esse procedimento, a Figura 1.3(a) ilustra a dependência da intensidade em função da posição da lâmina metálica no experimento

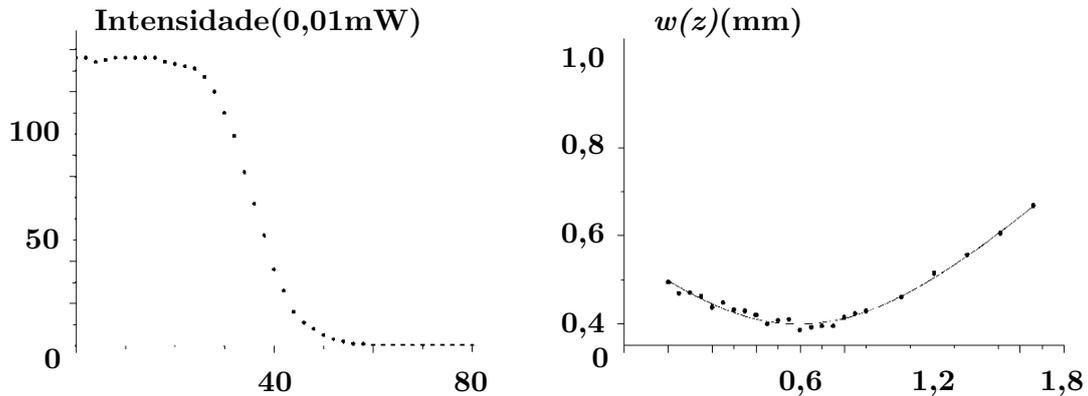


Figura 1.3: (a) *Intensidade detectada versus posição da lâmina para um z fixo.* (b) *Gráfico que relaciona a largura experimental do feixe em função de z . O ajuste desses pontos fornece a cintura do feixe.*

ilustrado no esquema da Figura 1.2. Observa-se que a intensidade detectada diminui a medida que a lâmina bloqueia o feixe. Esses pontos foram ajustados pela equação 1.18 fornecendo $w(z)$. Esse procedimento foi repetido para outras posições ao longo do eixo (z) de propagação fornecendo os valores de $w(z)$ apresentados na Figura 1.3(b). Um ajuste dos pontos mostrados em tal gráfico com a Equação 1.13 fornece $w_0 \approx 0,4\text{mm}$ e, conseqüentemente, $z_R \approx 0,8\text{m}$.

1.2 Modos paraxiais

A equação paraxial (1.10) não admite somente o feixe gaussiano como solução. Ver-se-á aqui dois conjuntos particulares de soluções para a equação paraxial que atraíram muito a atenção dos cientistas nos últimos anos devido às suas potenciais aplicações na computação quântica. Essas soluções são conhecidas como modos transversos de propagação da luz. Uma demonstração completa destas soluções pode ser encontrada na referência [30].

1.2.1 Coordenadas retangulares: os modos hermite-gaussianos

A solução mais geral da equação paraxial (1.10) em coordenadas retangulares produz os *modos de Hermite-Gauss* dados por:

$$\begin{aligned} \Psi_{n,m}(\vec{r}) = & \frac{A_{mn}}{w(z)} H_n \left(\sqrt{2} \frac{x}{w(z)} \right) H_m \left(\sqrt{2} \frac{y}{w(z)} \right) \times \\ & \times \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2}{w(z)^2} \right\} \exp \left\{ -i \left(k \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} - \frac{n+m+1}{2} \arctan \frac{z}{z_R} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Na expressão acima, A_{mn} é uma constante de normalização, H_m e H_n são os polinômios de Hermite [31], $w(z)$ e $R(z)$ são dados por (1.12) e (1.13), respectivamente. Defini-se ainda $N = m + n$ como sendo a ordem do modo¹.

Note que fazendo-se $m = n = 0$ na expressão acima, obtém-se a solução do modo fundamental (Equação 1.11), geralmente abreviado por HG_{00} ou LG_0^0 . Os modos de HG formam uma base infinita que é capaz de descrever qualquer feixe luminoso. Os perfis de intensidade dos modos de HG de mais baixa ordem foram calculados no programa comercial MATHEMATICA[®] e são ilustrados na Figura 1.4.

1.2.2 Coordenadas cilíndricas: os modos laguerre-gaussianos

Uma solução alternativa é obtida ao resolver a equação paraxial em coordenadas cilíndricas

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} + 2ik \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0. \quad (1.20)$$

Os *modos de Laguerre-Gauss* são as soluções da equação 1.20 e são escritos da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Psi_p^l(\vec{r}) = & \frac{A_p^l}{w(z)} \left[\frac{\sqrt{2}r}{w(z)} \right]^{|l|} L_p^l \left(\frac{2r^2}{w^2(z)} \right) \exp \left\{ -\frac{r^2}{w^2(z)} \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ -i \left(\frac{kr^2}{2R(z)} + (2p + |l| + 1) \arctan \frac{z}{z_R} + l\phi \right) \right\}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

O parâmetro $p \geq 0$ é o índice radial (número de anéis que aparecem na distribuição de

¹Por simplicidade, os modos transversos de propagação serão apenas chamados de modos.

Hermite-Gauss		Laguerre-Gauss
● $m=n=0$	1ª ordem	● $l=p=0$
●● ●● $m=0 \ m=1$ $n=1 \ n=0$	2ª ordem	●● ●● $l=1 \ l=-1$ $p=0 \ p=0$
●●● ●●● ●●● $m=0 \ m=1 \ m=2$ $n=2 \ n=1 \ n=0$	3ª ordem	●●● ●●● ●●● $l=2 \ l=0 \ l=-2$ $p=0 \ p=1 \ p=0$

Figura 1.4: Distribuição de energia no plano transversal à propagação (imagem do feixe). As setas nos modos Laguerre-Gaussianos indicam o sentido de variação da fase azimutal.

intensidade) e o l é o índice azimutal² do modo. Este índice descreve a dependência azimutal da fase do feixe. A ordem do modo é definida como: $N = 2p + |l|$ com p e l sendo inteiros; L_p^l é o polinômio generalizado de Laguerre [31] e as outras quantidades têm exatamente as mesmas definições feitas no modo fundamental. Os perfis de intensidades de mais baixas ordens também são ilustrados na Figura 1.4.

O termo $l\phi$ não é bem definido na origem do plano. Ele está relacionado com a direção do vetor de onda do feixe que apresentará uma singularidade de fase sempre que l for diferente de zero. A Figura 2-(b) ilustra a frente de onda de um modo LG de primeira ordem que possui singularidade de fase ao longo do eixo de propagação. Esta singularidade se apresentará como uma região sem luz como observado nos modos Laguerre-gaussianos com $l \neq 0$ ³ ilustrados na Figura 1.4.

²Na literatura o índice azimutal também é conhecido como *helicidade* ou *carga topológica*.

³Nesta tese foi convencionado que os resultados de intensidades calculados numericamente serão mostrados com cores invertidas. Assim, como na Figura 1.4, a região preta representa a região iluminada enquanto a região branca representa a região sem luz.

1.3 Momento angular orbital para C&IQ

A luz constitui um sistema físico disponível para a realização do processamento e da transmissão de informação. O momento angular carregado por ela é a propriedade fundamental que habilita sua utilização nessas tarefas de processamento e transmissão. Isto se deve ao fato desse momento poder ser descrito por meio da polarização que, como foi apresentado na introdução desta tese, pode codificar bits lógicos. Após o início da década de 1990, a questão da utilização do momento angular da luz na recém criada área da Computação e Informação Quântica (C&IQ) foi muito abordada após os resultados obtidos por Allen *et al* [7, 8] apontando que os fótons podem carregar o MAO além do momento angular de spin. De acordo com os autores, seus resultados podem ser corroborados por meio da analogia da óptica paraxial descrita em termos dos modos HG e LG com o Oscilador Harmônico quântico em 2 dimensões. Eles sugerem que os modos de propagação são autoestados do operador de momento angular L_z e carregam $l\hbar$ unidades do momento angular por fóton. Essa analogia surge do fato do Oscilador Harmônico bi-dimensional [32, 33] possuir soluções dependentes dos polinômios de Laguerre com energias $(n + m + 1)\hbar\omega$ e autovalores do operador de MAO dados por $(n - m)\hbar$. Essa analogia fica clara quando a expressão 1.21 é reescrita em função dos índices n e m utilizados nos modos HG como $l = n - m$ e $p = \min(n, m)$, respectivamente. Posteriormente, verificou-se que esse MAO constitui uma propriedade potencialmente útil para a realização de experimentos que simulam a Computação Quântica que utilizam muitos estados ortogonais [25], ou a Computação Quântica com N q-bits como será explicado em seguida. Existe ainda a possibilidade de utilização do momento linear associado ao fóton como grau de liberdade na C&IQ [35, 36].

De uma maneira geral, o momento angular total por fóton de um feixe qualquer, calculado por Simpson [9] *et al*, é dado por:

$$\left[l + \sigma_z + \sigma_z \left(\frac{2kz_R}{2p + l + 1} + 1 \right)^{-1} \right] \hbar, \quad (1.22)$$

onde $\sigma_z = 0(\pm 1)$ para luz linearmente polarizada (para a luz circularmente polarizada com o sinal + para polarização destrógira e - para a levógira). As grandezas k e z_R são o número de onda e a distância de Rayleigh definidos acima. No regime paraxial ($kz_R \gg 1$)

a expressão 1.22 se reduz a:

$$(l + \sigma_z)\hbar. \quad (1.23)$$

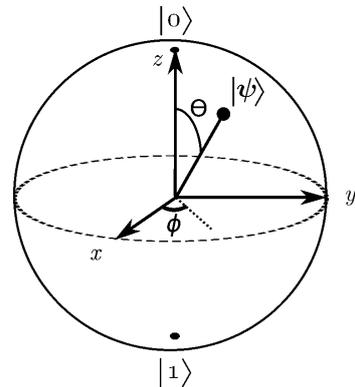
Em resumo, os modos de LG carregam MAO dados por $l\hbar$ que podem ser manipulados independentemente do momento angular de spin que são dados por $\pm\hbar$ de acordo com a orientação da polarização circular.

Q-bits

O estado de polarização e o MAO, também referido como modo transverso, constituem graus de liberdade para a realização de experimentos de Computação e Informação Quântica (C&IQ) com a luz. Os graus de liberdade podem ser os *q-bits*, que constituem o elemento fundamental da C&IQ, que podem ser representados geometricamente por um vetor de estado ($|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$) na *esfera de Bloch* [17], ilustrada na Figura 1.5. Os vetores $|0\rangle$ e $|1\rangle$ são os *estados da base computacional* e formam uma base ortonormal neste espaço vetorial representado pela esfera. $|0\rangle$ e $|1\rangle$ podem representar: os estados fundamental e excitado, respectivamente, de um sistema de dois níveis; as direções “cima” e “baixo” do spin de uma partícula; as direções ortogonais de polarização linear, etc. Tal esfera configura uma maneira muito prática de descrição da evolução sofrida pelo q-bit durante a computação e não depende do sistema físico utilizado para representar os bits quânticos. Em especial, ainda neste capítulo, será apresentada a *Esfera de Poincaré* [2] para representação geométrica do estado de polarização de um feixe luminoso. Essa representação constitui um recurso útil, análogo à esfera de Bloch, para a visualização das transformações na polarização do fóton ou nas operações sobre os q-bits de polarização. Será visto também que os modos HG e LG de primeira ordem $n+m=1$ constituem vetores de base de um espaço bi-dimensional análogo aos vetores da esfera de Poincaré.

O emaranhamento entre os graus de liberdade (q-bits) é uma propriedade genuína de sistemas quânticos e indispensável para muitos protocolos de C&IQ. Há na literatura alguns trabalhos que relatam a detecção do emaranhamento entre vários q-bits luz. Dentre eles, vale citar o trabalho de *Alois Mair et al.* [24] que foi o pioneiro na medida de tal emaranhamento em fótons gêmeos portando MAO. Recentemente, outra demonstração de emaranhamento associado ao MAO da luz foi feita no regime de pulsos intensos produzidos num Oscilador Paramétrico Ótico (OPO) [37]. O emaranhamento em feixes inten-

Figura 1.5: A Esfera de Bloch para a representação geométrica de 1 q-bit.



so, também chamado de *emaranhamento em variáveis contínuas*, foi tema de estudo no doutoramento e será abordado no quinto capítulo desta tese onde será reportada a montagem do sistema de estabilização eletrônica implementado no OPO do Laboratório de Ótica Quântica da UFF.

A computação quântica com a polarização da luz já está sendo estudada num estágio bem avançado com vários experimentos e dispositivos construídos. Recentemente a aplicação das propriedades quânticas da luz permitiram a implementação óptica do protocolo de criptografia quântica BB84 entre um transmissor e um receptor separados por aproximadamente 100km[38]. Por outro lado, empresas como *IBM*, *Toshiba*, *HP*, *MagiQ* e *ID Quantique* comercializam dispositivos de criptografia quântica e mantêm linhas de pesquisa que visam o desenvolvimento de tais aparatos. Espera-se que o MAO da luz seja uma propriedade tão (ou até mais) promissora que a polarização na C&IQ.

1.4 Conversão de modos

Voltando a tratar dos feixes no regime clássico, os modos Hermite-gaussianos e os modos Laguerre-gaussianos fornecem bases completas e gerais para descrição de qualquer feixe em meios homogêneos. Assim, um modo de LG pode ser expandido em soluções de HG e vice-versa.

De fato, usando a relação entre os polinômios de Laguerre e Hermite [8], pode-se decompor o modo LG em um conjunto de modos HG de mesma ordem $N = n + m$ como:

$$\psi_{nm}^{LG}(x, y, z) = \sum_{k=0}^n i^k b(n, m, k) \psi_{N-k, k}^{HG}(x, y, z), \quad (1.24)$$

Figure 1.6 consists of four rows of diagrams. Each row shows an equality between a mode on the left and a sum of two modes on the right, all enclosed in square boxes. The modes are represented by black dots and circles. Row (a) shows two rows: the first row has a circular mode with a central dot equal to the sum of two horizontal pairs of dots with a coefficient of $+i$, and a vertical pair of dots with a coefficient of $\frac{1}{\sqrt{2}}$; the second row has a circular mode with a central dot equal to the sum of two horizontal pairs of dots with a coefficient of $-i$, and a vertical pair of dots with a coefficient of $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Row (b) shows two rows: the first row has a 45-degree tilted mode equal to the sum of two horizontal pairs of dots with a coefficient of $-$, and a vertical pair of dots with a coefficient of $\frac{1}{\sqrt{2}}$; the second row has a 45-degree tilted mode equal to the sum of two horizontal pairs of dots with a coefficient of $+$, and a vertical pair of dots with a coefficient of $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Brackets on the right group the first two rows as (a) and the last two rows as (b).

Figura 1.6: (a) Decomposição dos modos LG na base de HG representando a Equação 1.26 e (b) Decomposição dos modos HG inclinados de 45° na base de HG representando a Equação 1.28.

com os coeficientes $b(n, m, k)$ reais dados por:

$$b(n, m, k) = \sqrt{\frac{(N-k)!k!}{2^n n! m!}} \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dt^k} [(1-t)^n (1+t)^m] \Big|_{t=0}. \quad (1.25)$$

Em particular, os modos de primeira ordem são relacionados facilmente através da relação:

$$LG_0^{\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (HG_{1,0} \pm iHG_{0,1}). \quad (1.26)$$

Vale ainda ressaltar que um modo HG inclinado de 45° com relação aos eixos coordenados pode também ser decomposto facilmente como:

$$\psi_{nm}^{HG}\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}}, z\right) = \sum_{k=0}^n b(n, m, k) \psi_{N-k, k}^{HG}(x, y, z), \quad (1.27)$$

Assim, o modo HG de primeira ordem inclinado de $\pm 45^\circ$ pode ser decomposto usando uma relação simples entre os próprios modos HG:

$$HG_{0,1}^{\pm 45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} (HG_{1,0} \pm HG_{0,1}). \quad (1.28)$$

A Figura 1.6 ilustra o significado das equações 1.26 e 1.28.

Conversores astigmáticos

Um conversor astigmático (também chamado de *conversor de modos*) consiste de um arranjo de duas lentes cilíndricas que transforma modos HG de ordem superior em modos LG que possuem singularidades de fase e vice-versa. Além da utilidade na produção dos vórtices, esses conversores de modos também são utilizados na construção de dispositivos utilizados nos experimentos de computação quântica com fótons, como a Porta lógica CNOT e o Seletor de Modos Transversos apresentados no terceiro capítulo.

O conversor explora as decomposições 1.24 entre os modos LG e HG e o fato de o feixe paraxial possuir um termo de fase que depende da divergência. No caso particular dos modos Hermite-gaussianos (equação 1.19) esse termo de fase é dado por,

$$\phi_{nm} = (n + m + 1) \arctan(z/z_R), \quad (1.29)$$

e é conhecido como *fase de Gouy*. Note que a equação acima considera que o feixe é isotrópico, isto é, possui a mesma divergência ao longo de qualquer direção perpendicular a z .

1.4.1 O conversor com duas lentes cilíndricas

O conversor consiste de um arranjo de duas lentes cilíndricas formando um telescópio como ilustrado na figura 1.7. As linhas focais das lentes são paralelas e definem a orientação do conversor. Esse aparato foi inicialmente proposto por L. Allen et al. [7] e é tratado formalmente em [8].

Como adiantado acima, a transformação realizada por um conversor astigmático pode ser descrita por meio das defasagens que as componentes HG de um modo sofrem quando o modo em questão atravessa o arranjo. A rigor, decompõe-se (por simplicidade nos cálculos) o modo em termos das componentes Hermite-Gaussianas orientadas paralela e perpendicularmente à direção de orientação do conversor. Conseqüentemente, se a defasagem entre as componentes de um dado modo, como por exemplo o $HG_{10}^{+45^\circ}$ ilustrado na Figura 1.7, for de $\pi/2$, o modo convertido será um modo Laguerre-gaussiano. Essa defasagem pode ser controlada e define a nomenclatura do conversor. Dessa forma, um conversor que defasa as componentes de ϕ é intitulado “conversor ϕ ” ou “ $C(\phi)$ ”. No caso particular da conversão HG-LG exemplificada acima, a defasagem foi de $\pi/2$ e o conversor é um $C(\pi/2)$.

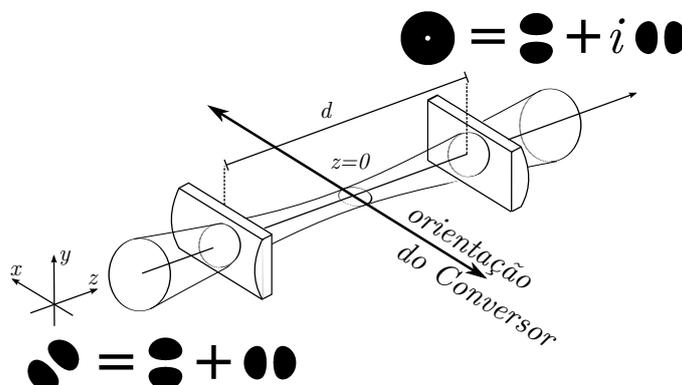


Figura 1.7: O conversor de modos funciona defasando as componentes HG do modo incidente. No exemplo ilustrado, o modo $HG_{10}^{+45^\circ}$ é convertido no modo LG_0^{-1} ao ter suas componentes HG_{10} e HG_{01} defasadas de $\pi/2$.

Os parâmetros físicos responsáveis pela defasagem nos conversores de modos são: a distância focal f das lentes cilíndricas e a distância d entre elas. No Apêndice 1, as relações entre a defasagem produzida pelos conversores e os parâmetros f e d são obtidas formalmente. Contudo, para os casos especiais de defasagem $\pi/2$ e π :

$$C(\pi/2) \longrightarrow d = f/\sqrt{2} \quad (1.30)$$

$$C(\pi) \longrightarrow d = 2f. \quad (1.31)$$

É observado ainda que o conversor $C(\pi/2)$ requer um feixe de entrada com uma divergência (z_R) específica para os parâmetros f e d . Experimentalmente, o feixe a ser convertido no $C(\pi/2)$ é focalizado por uma lente esférica que produz a divergência necessária. Tal procedimento de ajuste da divergência é chamado de *casamento de modos* e necessita da utilização de um par de lentes esféricas, como ilustrado na Figura 1.8(a), para que o feixe convertido seja colimado. O conversor $C(\pi)$ requer um feixe colimado como ilustrado na Figura 1.8. Todas essas condições são discutidas no Apêndice 1.

1.4.2 O conversor de lente única

O conversor de modos de lente única é uma proposta original desta tese e é base dos dispositivos para Comunicação e Informação Quântica (C&IQ) propostos e implemen-

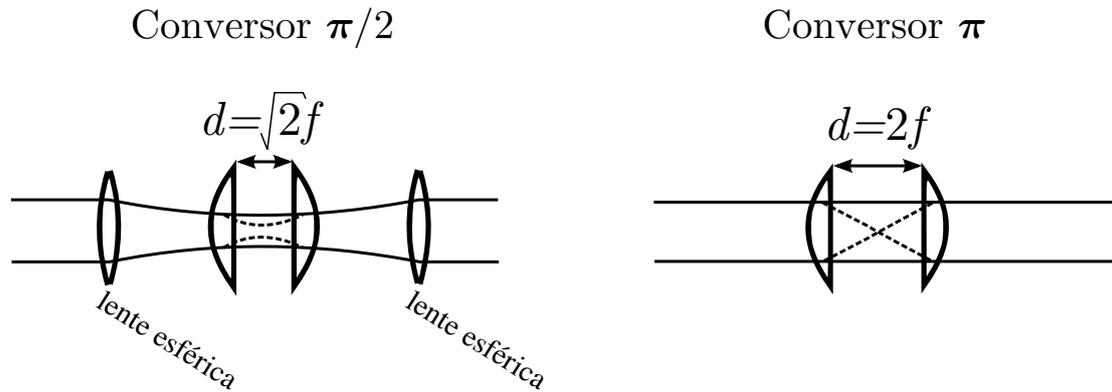


Figura 1.8: *Conversores Astigmáticos.* No conversor $\pi/2$, um par de lentes esféricas é inserido para realizar o casamento de modos.

tados que são descritos no capítulo três. Trata-se de um aparato de fácil alinhamento, baseado no conversor de duas lentes que também converte os modos transversos.

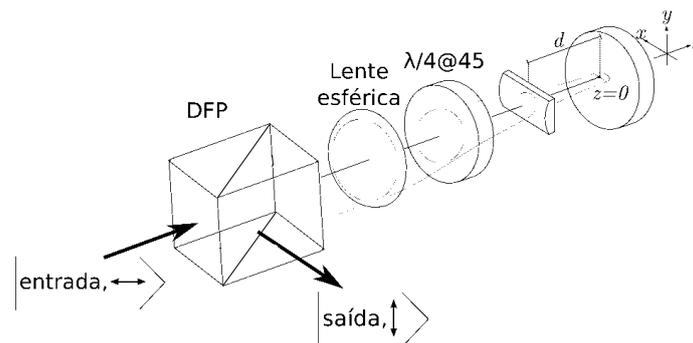


Figura 1.9: *Esquema experimental do Conversor de Modos de Lente Única.* A distância d determina a fase ϕ do conversor.

O conversor de lente única é basicamente o conversor descrito na seção anterior com um espelho plano posicionado em $z = 0$. Ele é esquematizado na Figura 1.9 e é formado por um cubo divisor de feixe polarizado (DFP)⁴, uma lâmina de quarto de onda ($\lambda/4$), um espelho e apenas uma lente cilíndrica. A lente esférica é colocada para a realização do casamento de modos no conversor $\pi/2$. O funcionamento deste é análogo ao do conversor de duas lentes cilíndricas descrito na seção 1.4.1. A idéia de construção do CMLU surgiu

⁴Um Divisor de Feixe Polarizado é um dispositivo que transmite feixes de luz linearmente polarizados na direção horizontal e reflete feixes linearmente polarizados na direção vertical.

após a verificação de que as frentes de onda dos feixes no plano de simetria (em $z = 0$ na figura 1.8) eram planas. Com isso, a introdução de tal espelho nesta posição não alteraria em nada o processo de conversão. O inconveniente de ter o modo convertido contrapropagante foi superado com a introdução da $\lambda/4$ que roda de 90° a polarização do feixe fazendo ele ser refletido pelo DFP.

Em ambos os conversores, a defasagem das componentes do feixe de entrada é controlada e é devida à contribuição da *fase de Gouy* adquirida por cada componente dentro do conversor. Somente na região entre as lentes cilíndricas (ou entre a lente cilíndrica e o espelho no CMLU) as componentes ortogonais adquirem fases diferentes. O controle da fase é feito com um ajuste preciso da distância d .

Na Figura 1.10(a), o $C(\pi/2)$ de lente única é esquematizado. Tal dispositivo foi montado no laboratório e testado com vários modos LG e HG produzidos experimentalmente por meio das máscaras de fase, que serão apresentadas na próxima seção, e por uma cavidade Fabry-Pérot⁵. Os perfis de intensidade destes modos produzidos foram fotografados por uma câmera CCD e são mostrados na Figura 1.10(b).

No experimento, o feixe horizontalmente polarizado atravessa o DFP e a $\lambda/4$ orientada a 45° com a horizontal tornando-se circularmente polarizado. Na sequência, ele passa pela lente esférica, pela lente cilíndrica orientada na direção vertical e é refletido pelo espelho posicionado no plano focal. A conversão é completada quando o feixe, agora contrapropagante, atravessa novamente a lente esférica. A partir deste ponto, o modo convertido atravessa novamente a lâmina $\lambda/4$, adquire polarização linear na direção vertical e acaba sendo totalmente refletido pelo DFP. A Figura 1.10(c) mostra o perfil de intensidade dos modos convertidos no aparato. As primeiras duas imagens em (b) mostram os modos HG e LG de primeira ordem e logo abaixo em (c) os respectivos modos convertidos. As imagens seguintes mostram os modos LG com $p=0$ e $l=2$; $p=0$ e $l=3$; $p=1$ e $l=0$; $p=2$ e $l=0$ e as respectivas imagens dos feixes convertidos.

A qualidade do conversor foi avaliada através de uma estimativa da *fidelidade* [17] do modo convertido. Conceitualmente, a fidelidade é uma medida do recobrimento entre dois estados quânticos. Quantidade esta relacionada com a diferença entre os estados a

⁵Uma cavidade Fabry-Pérot composta por dois espelhos esféricos posicionados próximos a região de confocalidade transmite feixes que podem ser descritos por modos LG com índices radiais p diferentes de zero.

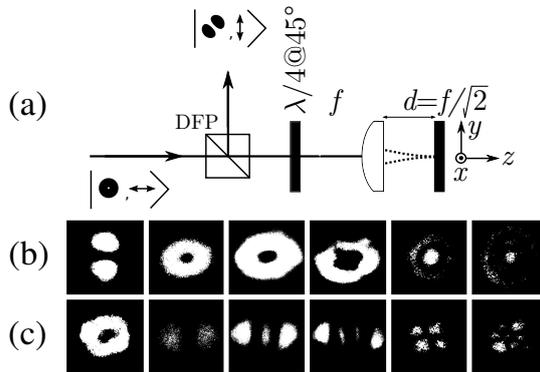


Figura 1.10: (a) O Conversor $\pi/2$ de lente única. A conversão do modo LG_0^{+1} no modo $HG_{10}^{+45^\circ}$ é ilustrada neste esquema experimental. (b) Fotografia do perfil de intensidade dos modos experimentais. (c) Fotografia do perfil de intensidade dos modos experimentais convertidos no aparato.

serem comparados numa medida da fidelidade. Se os estados em questão forem idênticos, o recobrimento será perfeito. Formalmente, a fidelidade entre um estado puro $|\psi\rangle$ e um estado arbitrário representado pela matriz densidade ρ é dada por:

$$F(|\psi\rangle, \rho) = \sqrt{\langle \psi | \rho | \psi \rangle}, \quad (1.32)$$

uma quantidade relacionada com a probabilidade de se obter o estado ψ em uma medida projetiva do estado ρ em um aparato que projeta o estado a ser medido (ρ) no estado ψ . Consequentemente, uma estimativa da fidelidade do modo convertido fornece uma maneira de quantificar a qualidade da conversão.

Para a realização de tal estimativa, utilizou-se uma outra cavidade Fabry-Pérot, agora funcionando como um filtro de modos transversos. Tal cavidade será discutida com mais detalhes no capítulo cinco, entretanto, para o entendimento desta estimativa, é suficiente saber que ela pode funcionar como um filtro de modos transversos quando corretamente alinhada. Isto quer dizer que se, por exemplo, a cavidade estiver alinhada para a transmissão de um modo LG de primeira ordem e o feixe incidente for um modo LG_0^{+1} puro, a transmissão será máxima. Caso o feixe incidente não seja um modo LG gaussiano puro, a intensidade do feixe transmitido será menor e dependerá da decomposição de tal modo nas componentes LG. Assume-se ainda que a intensidade do modo transmitido pela cavidade Fabry-Pérot e a probabilidade de transmissão de um fóton pertencente ao mesmo modo incidente são idênticas. Com isso, a determinação da razão entre a intensidade transmitida do modo convertido e a intensidade transmitida do modo puro fornece uma estimativa da fidelidade.

Essa estimativa da fidelidade é obtida experimentalmente por meio do aparato es-

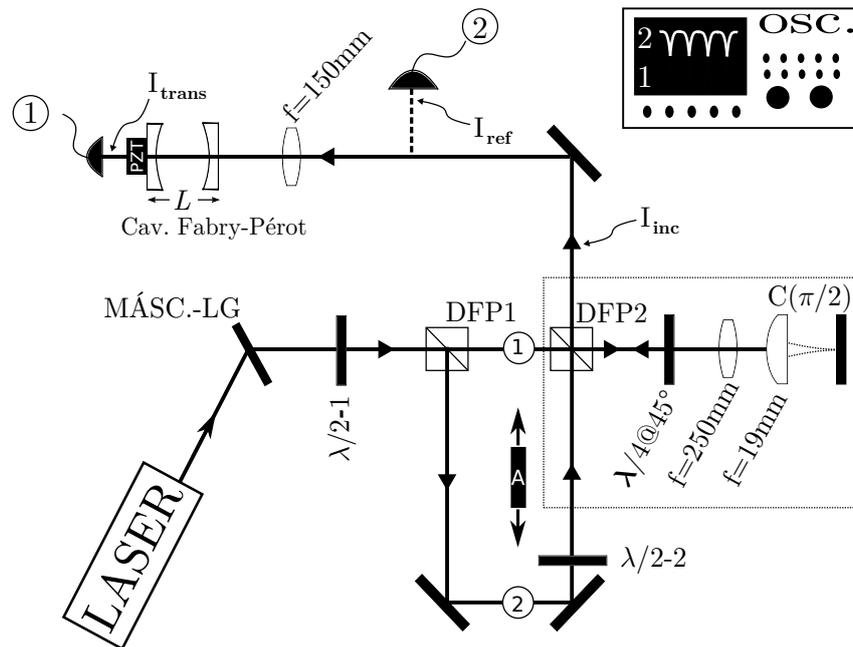


Figura 1.11: *Figura Colorida na versão online - Esquema experimental de medida para obtenção da estimativa da fidelidade do conversor de lente única. No canal 2 (amarelo) é mostrada a voltagem associada ao feixe refletido pela cavidade. No canal 1 (azul), intensidade referente ao feixe transmitido.*

quematizado na Figura 1.11 que funciona em duas etapas como se segue. Inicialmente, na etapa de calibração, o aparato funciona com o anteparo A bloqueando o feixe transmitido por DFP1 na posição 1. Nessa etapa, o modo LG produzido por uma máscara (“o modo puro”) é inserido diretamente na cavidade Fabry-Pérot após ser refletido por DFP1 e transmitido por DFP2. A intensidade medida pelo fotodetector Det-1 é a intensidade do modo puro (I_{t-puro}) que serve de intensidade de referência. I_{t-puro} contabiliza as perdas e as imperfeições da cavidade e do modo produzido. No caso ideal, onde a cavidade não admite perdas e o modo é puro, I_{t-puro} é igual a intensidade do modo incidente (I_{inc}) controlada pela lâmina de meia onda $\lambda/2-2$.

A medida de I_{t-puro} foi feita de duas maneiras: inicialmente utilizando o Det-1 acoplado ao osciloscópio enquanto a distância L entre os espelhos da cavidade era variada linearmente por meio de um PZT e posteriormente com a cavidade na ressonância. A intensidade transmitida por cavidade Fabry-Pérot depende da distância L [43]. Diz-se que ela está em ressonância quando a intensidade transmitida é máxima. É neste caso que ela

funciona como um filtro. A Figura 1.12(a) mostra a intensidade transmitida em função do tempo a medida que o PZT variava o comprimento L . Observa-se que I_{t-puro} , obtido na ressonância, está relacionado com uma voltagem de aproximadamente 10V. Isto é, picos na tela do osciloscópio com alturas da ordem de 10V. A imagem do feixe transmitido pela cavidade foi obtida com uma câmera CCD posicionada no lugar de Det-1 e é mostrada na Figura 1.13(a).

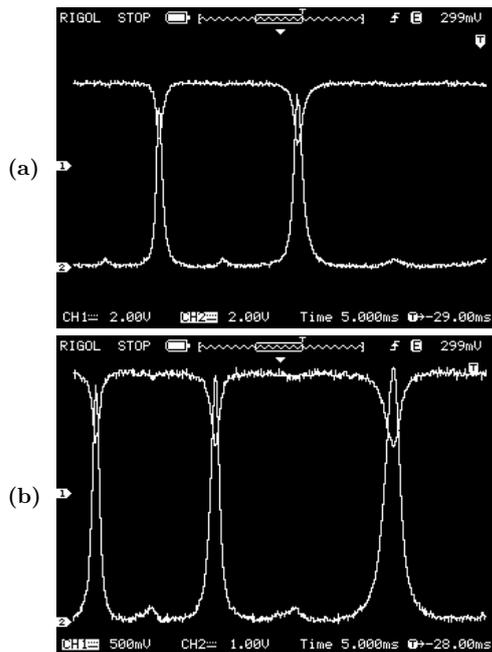


Figura 1.12: *Figura Colorida na versão online - Medidas experimentais de I_{t-puro} e I_{t-conv} obtidas no osciloscópio ilustrado na Figura 1.11. (a) resultado obtido com anteparo em 1 e (b) resultado obtido com anteparo em 2.*

Na segunda etapa do experimento, o anteparo foi posicionado em 2 e o modo LG proveniente da máscara foi convertido em $HG_{10}^{-45^\circ}$ pelo conversor de lente única e enviado à cavidade Fabry-Pérot. Neste momento, a intensidade do modo LG foi aumentada, por meio de uma rotação da lâmina de meia onda $\lambda/2-1$ de forma que o feixe convertido tivesse a mesma intensidade que I_{inc} . A cavidade foi realinhada para maximização da intensidade transmitida e os valores de I_{t-conv} , foram medidos. A Figura 1.12(b) mostra a intensidade transmitida em função do tempo a medida que o PZT variava o comprimento L . Observa-se que I_{t-conv} , obtido na ressonância, está relacionado com uma voltagem de aproximadamente 7V. A imagem do feixe transmitido pela cavidade foi obtida com uma câmera CCD posicionada no lugar de Det-1 e é mostrada na Figura 1.13(b). A observação de tal imagem permite destacar a não existencia de outros modos degenerados com $HG_{10}^{-45^\circ}$, o que mostra que toda a intensidade medida por Det-1 é devida somente a

este modo.

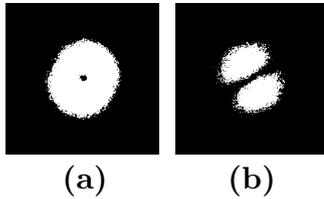


Figura 1.13: Imagem do feixe transmitido pela cavidade Fabry-Pérot em ressonância. Na imagem (a), o anteparo estava posicionado em 1. Na imagem (b), o anteparo estava posicionado em 2

Para uma conversão perfeita, as potências dos modos LG (proveniente da máscara) e HG (convertido pelo CMLU) transmitidos pela mesma cavidade Fabry-Pérot deveriam ser idênticas. Entretanto, as diferenças nas intensidades I_{t-puro} e I_{t-conv} indicam imperfeições na conversão que podem ser contabilizadas pelo balanço nas intensidades. De acordo com os resultados obtidos, $I_{t-conv}/I_{t-puro} \approx 0,7$ em ambas as formas de detecção. Os valores de I_{t-puro} e I_{t-conv} obtidos diretamente por Det-1 com a cavidade mantida em ressonância também fornecem o mesmo valor para esta razão.

Como considerado anteriormente, a intensidade do feixe transmitido é proporcional à probabilidade de um fóton do feixe incidente no estado desejado ser transmitido pela cavidade. Sendo assim, considera-se a raiz quadrada da intensidade como sendo uma estimativa da fidelidade do modo convertido. De acordo com a probabilidade de transmissão obtida, a fidelidade (Equação 1.32) da conversão CMLU foi de $F(|HG\rangle, |modo_{conv}\rangle) = \sqrt{0,7} = 0,84$. Numa conversão perfeita a fidelidade vale 1.

A utilização dos conversores astigmáticos para produção dos vórtices ópticos requer a produção prévia de um modo de ordem superior. Nos primeiros trabalhos que tratam do funcionamento dos conversores, os autores inseriam fios na cavidade do laser a fim de fazê-lo operar no regime desejado, produzindo diretamente os modos. Entretanto, essa técnica possui o grande problema de manipulação da cavidade do laser e da perda de intensidade do modo produzido. É possível também simular um modo gaussiano de primeira ordem utilizando a técnica interferométrica proposta por D.V. Petrov *et al* [40]. Tal técnica permite a produção de modos de primeira ordem com aproximadamente 50% de eficiência, mas é sujeita a instabilidade mecânica a qual o interferômetro fica sujeito. Outra possibilidade é a utilização das máscaras de fase que serão apresentadas mais adiante. Na próxima seção será apresentada uma representação geométrica para os modos de primeira ordem, análoga à esfera de Poincaré.

1.5 Representação geométrica

Já é do conhecimento básico que o estado de polarização da luz é completamente determinado pelos parâmetros de *Parâmetros de Stokes* que formam os vetores de base da *esfera de Poincaré* [2]. Nessa esfera, ilustrada na Figura 1.14(a), qualquer estado de polarização é representado como um ponto na superfície. Nesta representação, os estados de polarizações circulares são representados como pontos nos pólos e os estados de polarizações lineares são os pontos sobre o equador. Os pontos nas outras regiões da esfera representam os estados com polarizações elípticas.

Admitindo a analogia entre os estados polarização da luz e os feixes paraxiais de primeira ordem, *M. J. Padgett e J. Courtial* [41] propuseram uma representação análoga para os feixes paraxiais. De acordo com a proposta deles, novos parâmetros de Stokes (análogos aos parâmetros que definem os estados de polarização) para os feixes paraxiais foram definidos como:

$$\begin{aligned} o_1 &= \frac{I_{HG_{10}^{0^\circ}} - I_{HG_{10}^{90^\circ}}}{I_{HG_{10}^{0^\circ}} + I_{HG_{10}^{90^\circ}}}, \\ o_2 &= \frac{I_{HG_{10}^{45^\circ}} - I_{HG_{10}^{135^\circ}}}{I_{HG_{10}^{45^\circ}} + I_{HG_{10}^{135^\circ}}}, \\ o_3 &= \frac{I_{LG_0^1} - I_{LG_0^{-1}}}{I_{LG_0^1} + I_{LG_0^{-1}}}, \end{aligned} \quad (1.33)$$

com I_{HG^α} e I_{LG} sendo as intensidades dos modos HG e LG na orientação angular α indicada. Os parâmetros o_1 , o_2 e o_3 , satisfazem

$$o_1^2 + o_2^2 + o_3^2 = 1, \quad (1.34)$$

quando o feixe pode ser decomposto apenas em componentes HG ou LG de primeira ordem. Esses parâmetros são as coordenadas cartesianas de um espaço que representa os modos de primeira ordem como pontos na superfície de uma esfera análoga à esfera de Poincaré. Essa nova esfera foi denominada *Esfera do Modos* e é ilustrada na Figura 1.14(b). Os pólos norte e sul desta esfera representam os modos LG_0^1 e LG_0^{-1} e os pontos sobre o equador os modos HG_{10} em diversas orientações.

Considerando a analogia entre os estados de polarização e os modos de primeira or-

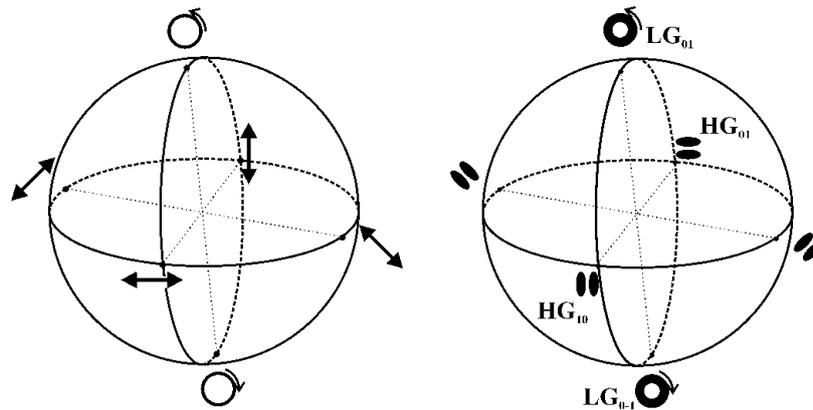


Figura 1.14: (a) *Esfera de Poincaré* e (b) *Esfera dos modos*.

dem, pode-se constatar que: da mesma forma que os estados de polarizações lineares podem ser decompostos em termos dos estados de polarizações circulares [2], os modos de primeira ordem podem ser decompostos nos modos LG_0^1 e LG_0^{-1} . Em particular, os pontos sobre o equador representam os modos HG_{10} nas diversas inclinações de acordo com a fase relativa entre LG_0^1 e LG_0^{-1} . Até então, a decomposição dos feixes paraxiais fora feita somente em termos dos modos HG pela simplicidade na descrição dos conversores de modos, entretanto, essa decomposição pode ser feita por quaisquer dois modos ortogonais de primeira ordem, de acordo com a conveniência do problema abordado.

Os conversores $\pi/2$ e π para os feixes LG e HG executam papéis equivalentes às lâminas de quarto de onda ($\lambda/4$) e de meia onda ($\lambda/2$), respectivamente. As transformações realizadas pelas lâminas de onda ou pelos conversores astigmáticos são representadas por trajetórias na superfície da esfera e constituem uma forma geométrica muito prática de visualização da evolução do estado que descreve um feixe ou um fóton[41, 42] ao passar por uma lâmina de onda ou por um conversor. Na Figura 1.15, as transformações em polarização e em modos transversos são equivalentes às mesmas trajetórias ilustradas na esfera ilustrada no lado direito da figura.

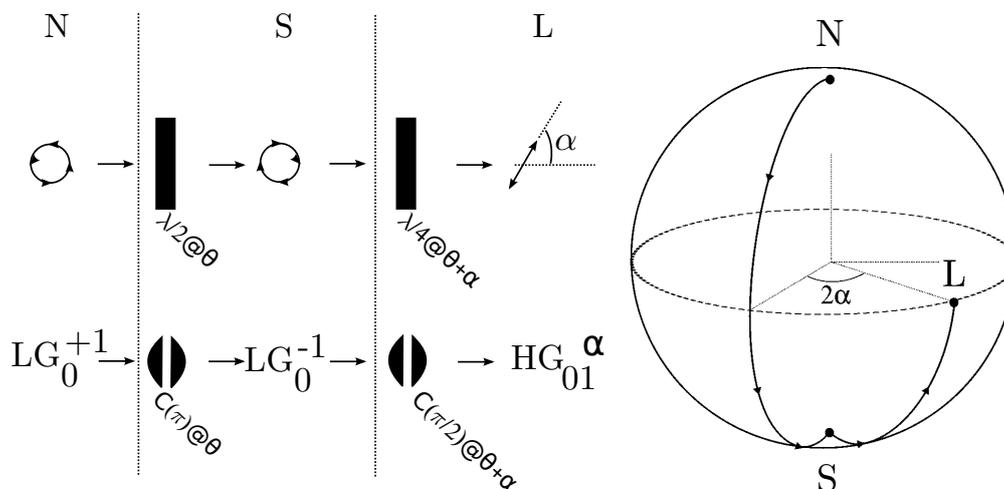


Figura 1.15: Analogia entre as lâminas de onda e os conversores astigmáticos. Acima, é representado um feixe com polarização levógira que passa por duas lâminas e tem sua polarização alterada para destrógira e linear, respectivamente. Estas transformações implementadas pelas lâminas no estado de polarização são representadas geometricamente na esfera através da trajetória que liga os pontos $N \rightarrow S \rightarrow L$. Abaixo, um modo LG_0^{+1} passa por dois conversores astigmáticos e sofre as transformações indicadas. Estas transformações implementadas pelos conversores também são representadas geometricamente na esfera pela mesma trajetória $N \rightarrow S \rightarrow L$. α e θ são ângulos que fornecem a direção de orientação das lâminas e conversores.

1.6 Produção e detecção de feixes com momento angular orbital

A maioria dos lasers comerciais produzem feixes com frentes de ondas aproximadamente planas e perfil de intensidade gaussiano que são descritos pela equação 1.11. Todavia, existe na literatura alguns métodos que permite converter o feixe gaussiano em modos de ordem superior, como os modos HG ou LG ilustrados na Figura 1.4. Nesta seção, o método holográfico para produção dos feixes com MAO utilizados em todos os experimentos desta tese será descrito. Esse método foi escolhido devido a sua praticidade de utilização e estabilidade mecânica.

Um holograma consiste de um padrão de interferência entre a luz difratada por um objeto com uma luz coerente [43]. Esse padrão de interferência contém informações sobre a amplitude e a fase da luz difundida pelo objeto. O grande interesse na holografia vem

da possibilidade de reconstrução completa do campo difundido quando um outro feixe de luz coerente incide no padrão de interferência. Para ser mais preciso, o holograma é o padrão de interferência gravado em alguma substância. Esta substância pode ser um filme fotográfico ou um material fotossensível. A rigor, uma outra onda coerente que incide no holograma é difratada dando origem a um campo com amplitude e fase relacionadas com os campos que interferiram para formar o holograma. Assim, é possível recriar um campo muito parecido com o campo difratado pelo objeto que gerou o padrão de interferência do holograma. A produção de um holograma é ilustrada na Figura 1.16(a). Neste exemplo, parte de uma onda coerente é difundida por um objeto opaco e interferida com a outra parte da onda não difundida. Como adiantado anteriormente, o holograma é formado quando o padrão de interferência entre as ondas coerente e difundida são gravados no material fotossensível. O funcionamento deste holograma recriando a imagem do objeto difusor é ilustrado na Figura 1.16(b). O grande apelo dos experimentos típicos de holografia, como o ilustrado na Figura 1.16, é a possibilidade da reconstrução da imagem de um dado objeto em 3 dimensões. Para mais detalhes acerca das diferentes técnicas de holografia e suas aplicações, o leitor deve consultar a referência [43]. Nesta tese, somente os processos utilizados para a produção experimental dos modos HG e LG serão abordados.

Produção experimental das máscaras de fase

A produção experimental dos modos HG e LG a partir dos feixes provenientes dos lasers foi a primeira atividade implementada no doutoramento. Tal etapa se baseou na construção de hologramas de fase e foi crucial para o desenvolvimento do trabalho pois, todos os experimentos realizados e apresentados nesta tese utilizou os modos produzidos por tais hologramas. A partir deste ponto, será descrito o procedimento realizado para construção dos hologramas de fase que produzem os feixes desejados por meio da difração de uma luz coerente (o laser).

O holograma produzido se baseia na produção de um padrão de interferência entre um modo fundamental e o modo desejado. Um problema que surge logo de início é que para se gerar tal holograma, precisa-se fazer interferir o feixe gaussiano com o modo desejado que ainda não existe. Contudo, maneira de solucionar este problema foi

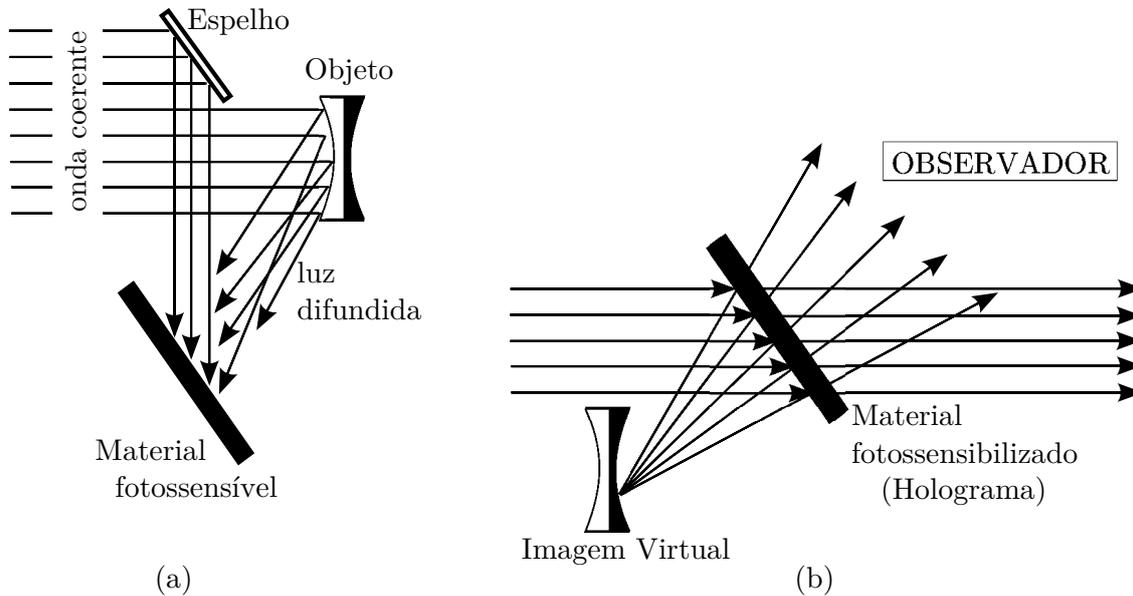


Figura 1.16: (a) A luz difundida por um objeto interfere com uma onda coerente dando origem ao holograma. (b) Um observador localizado na posição indicada vê a imagem do objeto atrás do holograma, iluminado por uma onda coerente, como se ele estivesse presente.

a simulação computacional do perfil de interferência como apresentado no Apêndice 2. Na literatura é possível encontrar várias referências [44, 45, 46] descrevendo procedimentos para produção de hologramas gerados computacionalmente. A rigor, este perfil calculado é a figura de interferência entre dois feixes. Computacionalmente, obtém-se o perfil calculando o módulo ao quadrado da soma das amplitudes que descrevem os feixes superpostos. O programa grafica os valores para cada ponto do plano onde a interferência é considerada e os associa com uma escala de cinza formando gráficos de densidade (mostrados nas Figuras 1.17(b)) que se assemelham aos padrões típicos de redes de difração. Nos casos das figuras em questão, foram simuladas as interferências entre $HG_{00} \times LG_0^1$ e $HG_{00} \times HG_{01}$, respectivamente. O padrão de interferência impresso é miniaturizado em um microfilme com regiões pretas e transparentes constituindo as *máscaras de amplitude*. Esses padrões podem ainda ser miniaturizados em películas transparentes formando as chamadas *máscaras de fase*. A partir daqui, o termo máscara será utilizado em substituição de holograma.

Na máscara de fase, o padrão é impresso em forma de relevo. O feixe refratado

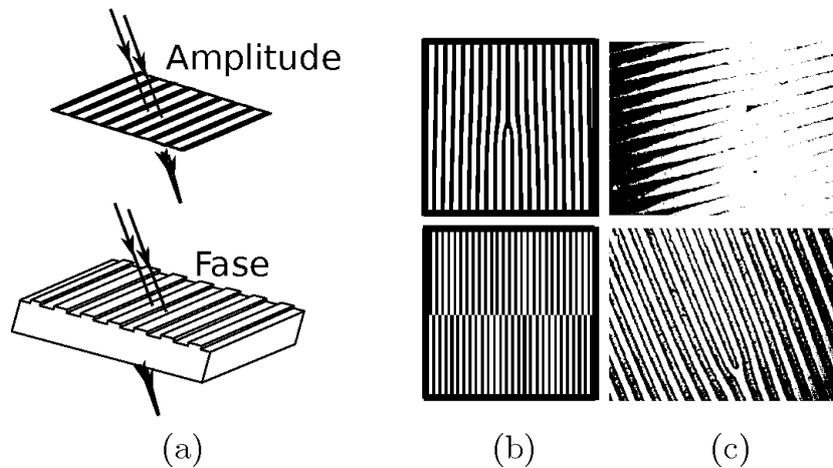


Figura 1.17: (a) Máscaras de amplitude e de fase; (b) acima: perfil de interferência calculado no MATHEMATICA[®] entre os modos HG_{00} e LG_0^{+1} e abaixo: entre os modos HG_{00} e HG_{01} ; (c) acima: foto de uma máscara de amplitude e abaixo: foto de fase.

por essa máscara é o resultado da interferência dos raios que passaram por uma dada espessura da camada de película com os que passaram por outra camada como mostra a Figura 1.17(a). O objetivo é fazer essa diferença de caminho defasar os raios de meio comprimento de onda ($\lambda/2$) quando a interferência entre os raios é máxima.

A técnica de produção das máscaras de amplitude já era dominada no laboratório de Ótica Quântica da UFF. Até então, todos os trabalhos com vórtices ópticos do grupo eram feitos com essas máscaras. O procedimento descrito na referência [46] era implementado e o padrão do holograma impresso numa folha de papel que era fotografada gerando um negativo que funcionava como máscara. Esta técnica está descrita nas teses [47, 48]. Não obstante, estas máscaras de amplitude só servem para feixes pouco intensos, com potências inferiores a 10mW, e são pouco eficientes produzindo modos com aproximadamente 5% da intensidade do laser.

A idéia foi produzir máscaras de fase imprimindo os padrões das máscaras de amplitude em relevo utilizando-se a técnica de litografia, descrita logo abaixo. O plano era produzir máscaras que suportassem feixes mais intensos (com mais de 300mW) e com grande eficiência na produção dos modos superiores para utilização em experimentos de Emaranhamento de Variáveis Contínuas no Oscilador Paramétrico Ótico montado no laboratório. Tais experimentos serão apresentados no capítulo cinco desta tese.

De posse de algumas máscaras de amplitude, produzidas através da microfilmagem no Laboratório de Microfilmagem do Núcleo de Documentação da UFF, obtiveram-se várias máscaras de fase no Laboratório de Óptica Difrativa da UNICAMP. O procedimento executado na UNICAMP é resumido nas etapas:

- 1—) Limpeza do substrato;
- 2—) Crescimento controlado do filme ou película no substrato;
- 3—) Exposição do substrato com a máscara de amplitude à luz;
- 4—) Revelação da máscara;

ilustradas na Figura 1.18.

A primeira etapa trata simplesmente da lavagem e secagem do substrato (placa de vidro) que servirá de base para o filme. A lavagem é feita primeiramente com um sabão neutro que remove as impurezas orgânicas presentes na superfície do vidro. Posteriormente, é feita outra lavagem com Acetona PA (Potencial Analítica) a fim de remover as impurezas inorgânicas. Após a lavagem do substrato, com um jato de nitrogênio retira-se o excesso de água e coloca-se o material numa estufa mantida a 70°C por pelo menos 20 minutos. Essa etapa é bem trabalhosa e requer bastante cuidado pois qualquer impureza na placa resulta em má formação do filme e perda da amostra. Além disso, todo esse procedimento é feito com luvas de borracha para evitar o contato com o material que é cancerígeno.

O crescimento do filme é feito no "Spinning": um equipamento que faz o substrato girar com velocidade controlada. O filme, inicialmente, é um material líquido. Para a produção das máscaras foi utilizada a resina AZ1518 diluída em Thinner EC11 na proporção 1:1. Com um conta-gotas, pinga-se sobre o substrato que está preso no Spinning a substância que comporá o filme. Ao ligar o equipamento a substância é espalhada sobre toda a superfície do substrato formando o filme. A velocidade e o tempo de rotação determinam a espessura. De acordo com as análises prévias feitas por outros pesquisadores do laboratório, para produzir um filme com 400nm é necessário fazer o substrato girar por 25 segundos a uma taxa de 3000rpm.

O objetivo era produzir filmes com 413nm de espessura. As máscaras com essa espessura são mais eficientes para os feixes com 532nm de comprimento de onda, utilizados

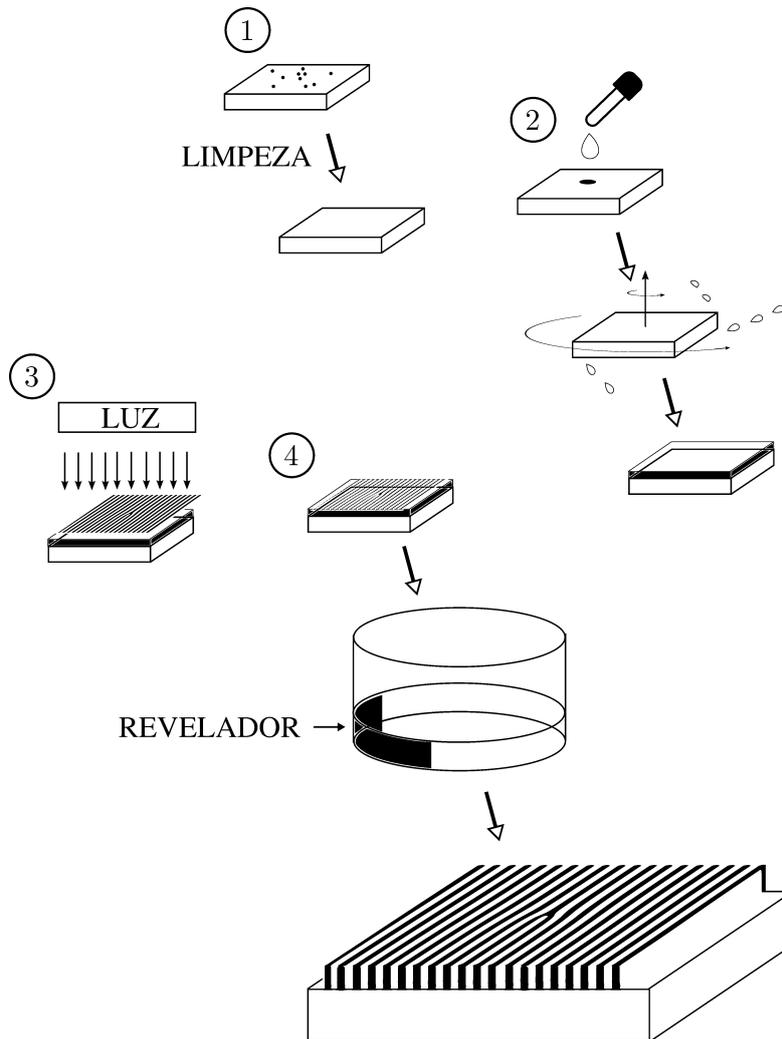


Figura 1.18: *Etapas da litografia.*

para o bombeamento dos Osciladores Paramétricos Óticos. A rigor, a diferença de fase entre dois raios de luz que percorreram diferentes caminhos óticos, como ilustrado na Figura 1.17(a) deve ser:

$$k_{filme}z - k_{ar}z = \frac{2\pi}{\lambda}h(n-1) = \pi. \quad (1.35)$$

Com isto, para $\lambda = 532nm$ e $n = 1,643 \pm 0,005$ a espessura deverá ser $h \approx 413nm$.

A espessura h do filme é o ponto de partida para a litografia. Uma vez obtido o filme com a espessura determinada, o procedimento de gravação de um dado perfil pode ser

iniciado. Antes de descrever esta técnica é preciso saber que o material que compõe o filme é fotossensível e que uma vez sensibilizado pela luz ele se desintegra facilmente ao entrar em contato com a substância Microposite 351 dissolvida em água deionizada na proporção 3:1 (3 partes de água e 1 de microposite). Essa substância diluída é o *revelador*.

O próximo estágio é a colocação da máscara de amplitude sobre o substrato com o filme e a iluminação de ambos com uma lâmpada de ultra-violeta (UV) com $5mW/cm^2$ de potência radiante na região do filme. Assim, as regiões transparentes da máscara de amplitude, que está exatamente acima do filme, deixam a luz UV passar e sensibilizá-lo. As regiões pretas absorvem a luz e as regiões abaixo dela não são sensibilizadas, formando assim um padrão de regiões que foram e que não foram sensibilizadas. Vale frisar que o tempo de exposição é controlado e que existe um tempo ótimo. Caso o tempo seja muito curto, o filme não será efetivamente sensibilizado, caso o tempo seja muito longo, toda a amostra será sensibilizada.

O último estágio é a revelação do filme. Nesta etapa, o substrato é mergulhado na substância reveladora, o Microposite 351, que desintegra as regiões fotossensibilizadas. Novamente o tempo de imersão é importante. Caso o tempo seja curto, não haverá revelação satisfatória e caso o tempo seja muito longo, toda o filme é desintegrado.

Então deve se levar em conta o jogo de tempos de Exposição e Revelação. O processo inicial foi empírico. As amostras eram expostas e reveladas para uma posterior análise no microscópio óptico. Após algumas tentativas, colocando as máscaras produzidas para serem reveladas durante intervalos de tempo que se estendiam de 5s a 90s, descobriu-se que o tempo de revelação não podia ser maior que 30s pois todo o filme era dissolvido no revelador. A Figura 1.17(c) mostra a foto de uma máscara de fase obtida por este processo. Nesta figura, observa-se uma estrutura de relevo relacionada à máscara de amplitude que foi utilizada na exposição. Todas as máscaras de fase produzidas tiveram eficiências bem superiores às de amplitude e com a vantagem de funcionarem para feixes muito mais intensos. Em média, os modos produzidos pelas máscaras de fase têm 20% da intensidade do laser enquanto que os modos produzidos pelas máscaras de amplitude possuem tipicamente 5%.

As melhores máscaras foram produzidas na última viagem à Campinas. Nesta oportunidade, foram produzidas 60 novas máscaras de fase em 15 substratos, quatro por placa

de vidro. Dessas quatro, duas eram destinadas à produção dos modos LG_0^1 e as outras duas aos modos HG_{01} . Todos os filmes foram crescidos no spinning com os mesmos parâmetros: 25s a 3000rpm e expostas durante 30s na luz UV. As melhores máscaras (que produziam modos mais intensos) foram obtidas a partir de microfilmes com padrões que apresentavam aproximadamente 220 linhas/cm. A Tabela 1.1 dispõe os parâmetros de produção das máscaras mais eficientes ($\eta = P_0/P_{modo}$) intituladas A, B, C, D e E, respectivamente. Na obtenção de η , P_0 é a potência do modo fundamental que incide na máscara e P_{modo} é a potencia do modo produzido pela máscara.

MÁSCARA	Tipo	ΔT_{rev}	η
A	LG_0^1	(10±1)s	0,22
A	HG_{01}	(10±1)s	0,22
B	LG_0^1	(13±1)s	0,22
B	HG_{01}	(13±1)s	0,23
C	LG_0^1	(15±1)s	0,19
C	HG_{01}	(15±1)s	0,21
D	LG_0^1	(17±1)s	0,16
D	HG_{01}	(17±1)s	0,22
E	LG_0^1	(17±1)s	0,20
E	HG_{01}	(17±1)s	0,24

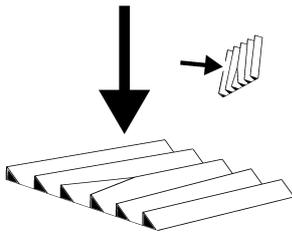
Tabela 1.1: *Parâmetros de produção das máscaras mais eficientes.*

Neste trabalho, os tempos de revelação (T_{rev}) variaram de 10s a 30s. Verificou-se que as máscaras mais eficientes foram reveladas por aproximadamente 12s. Observa-se que quanto maior o tempo de revelação, menor é a eficiência. Isso é esperado pois o tempo de revelação está ligado com a corrosão do filme, isto é, quanto maior o T_{rev} , mais o filme será corroído. Se o tempo for muito longo, o revelador corrói todo o filme depositado.

As máscaras de fase produzidas possuem transições abruptas ao longo do relevo (Figura 1.17(c)). Uma transição senoidal pode implicar em um aumento na eficiência da máscara. Isso poderia ser implementado otimizando-se todos os parâmetros de produção (tempo de exposição, concentrações do revelador, tempo de revelação, etc.) da máscara. Contudo, isso não foi implementado pois esse estudo não fazia parte do escopo do trabalho e as máscaras produzidas já funcionavam muito bem. Na literatura, o trabalho

do grupo do A. Zeilinger et al [24] retrata uma máscara com eficiência de mais de 18%.

Uma outra possibilidade para o aumento da eficiência na conversão dos modos seria a produção das máscaras tipo “biased” ilustradas na Figura 1.19. Neste tipo de máscara, a maior parte da energia é transferida para o modo desejado.



$$LG_0^0 LG_0^1 LG_0^2$$

Figura 1.19: *Máscara Biased.* O modo fundamental de um laser é difratado produzindo um modo superior bem mais intenso que os outros feixes difratados.

O funcionamento da máscara de fase (idêntico ao funcionamento da máscara de amplitude) é ilustrado na Figura 1.20. Nesta figura, também são mostrados os resultados experimentais dos modos produzidos. A seguir, será apresentada a maneira experimental de verificar as estruturas de fase e amplitude dos feixes difratados. Isso servirá como um teste para identificação do modo produzido e para classificação da máscara.

Esse não é o único método de produção experimental dos modos superiores. Existe também a possibilidade de utilização dos meios não-lineares [49], das técnicas interferométricas [40] e da manipulação da cavidade dos lasers [8]. Todavia, o emprego de cada um dos métodos acima citados apresenta vantagens e desvantagens. A utilização das máscaras de fase é vantajosa no que diz respeito à estabilidade mecânica e ao baixo custo.

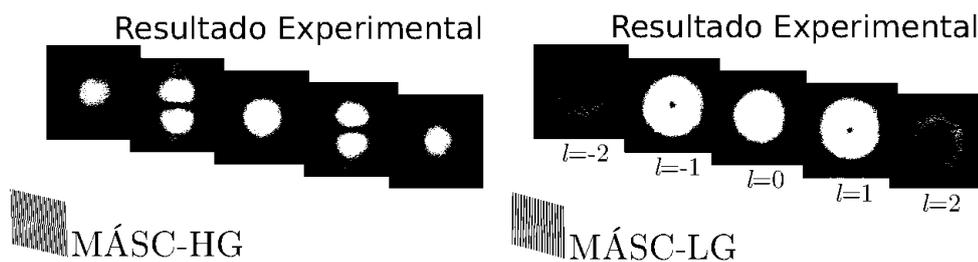


Figura 1.20: *Funcionamento das máscaras.* A máscara HG produz o modo HG_{01} ao difratar o modo fundamental proveniente de um laser. A máscara LG produz modos LG_0^l com diferentes l .

Detecção dos modos

A verificação do perfil anelar de intensidade não é suficiente para determinar se esses feixes possuem singularidade de fase, ou seja, momento angular orbital. É necessária uma análise complementar da estrutura de fase da frente de onda. Essa análise pode ser feita a partir do padrão de interferência desse feixe com um outro feixe de referência.

A Figura 1.21(a) ilustra o procedimento para obtenção do perfil de interferência com a utilização de um Interferômetro de Michelson. O feixe a ser analisado é inserido no aparato que está ligeiramente desalinhado a fim de produzir-se franjas de interferência espacial. No interferômetro, o feixe é dividido por um Divisor de Feixe Não-polarizado e é interferido formando uma distribuição de intensidade, filmada por uma câmera CCD, que caracteriza a carga topológica do feixe incidente. No caso em que o feixe analisado é um modo LG_0^l , o número de bifurcações obtidas por uma franja fornece a carga topológica l do feixe. A Figura 1.21(b) mostra as imagens obtidas por uma câmera CCD para diferentes modos produzidos por uma máscara LG. Quando $l=1$, observa-se duas bifurcações, uma para cada franja clara. Quando $l=2$, novamente duas bifurcações, agora com cada franja clara se dividindo em três. Em especial, se $l=0$ (o feixe não possui MAO), não há bifurcações. Assim, a carga topológica de um feixe é evidenciada neste aparato através do número de divisões da franja clara.

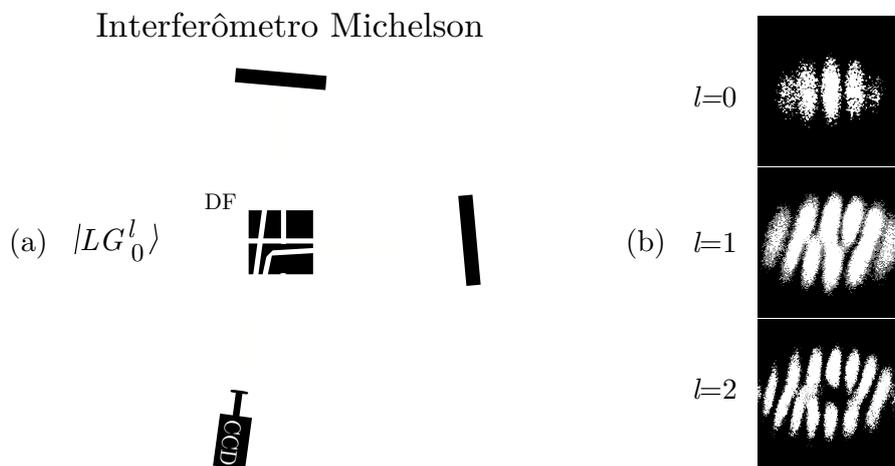


Figura 1.21: (a) Interferômetro de Michelson; (b) Padrão de interferência dos modos produzidos por uma máscara LG. O número de bifurcações em uma franja de interferência determina a carga topológica l do modo.

Pode-se ainda fazer a análise da estrutura de fase do feixe utilizando o Interferômetro de MachZender ilustrado na Figura 1.22(a). Neste interferômetro, dois feixes diferen-

tes interferem como ilustrado na figura. No caso, um modo fundamental (LG_0^0) interfere com o modo superior LG_0^l . Experimentalmente, utiliza-se dois modos produzidos pela mesma máscara para observar o perfil de interferência. Isso se deve ao fato dos modos produzidos pela máscaras serem coerentes. Na Figura 1.22(b) são mostradas as imagens da interferência entre os modos fundamental ($l=0$) e superior ($l \neq 0$) produzidos por uma mesma máscara LG. Novamente, quando $l=1$, a franja clara se bifurca em duas franjas e quando $l=2$, a franja clara se bifurca em três franjas. A bifurcação das franjas neste experimento também é uma assinatura de que o feixe carrega momento angular orbital. O mesmo aparato pode ser implementado com uma lente esférica como indicado no esquema. Neste caso, em que os feixes tem diferentes divergências, observa-se (na Figura 1.22(c)) espirais ao invés das bifurcações. Uma espiral para $l=1$, duas espirais para $l=2$ e assim sucessivamente.

Foram apresentados neste capítulo inaugural as propriedades dos feixes que carregam momento angular orbital (MAO). Em especial, apresentou-se o procedimento desenvolvido para fabricação de máscaras de fase que produzem tais feixes experimentalmente a partir de um laser convencional. Apresentou-se também o conversor de modos de lente única e de fácil alinhamento, a primeira proposta original desta tese. Nos próximos capítulos serão apresentados experimentos implementados no Laboratório de Ótica Quântica da UFF que utilizam os feixes portadores de MAO e o conversor de lente única no estudo da Computação e Informação Quântica.

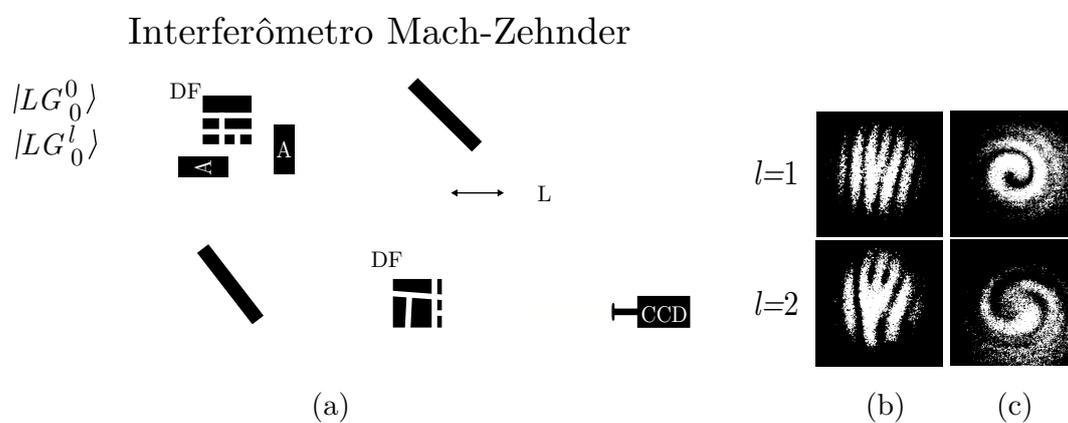


Figura 1.22: (a) Interferômetro de Mach-Zehnder; (b) Padrão de interferência entre os modos fundamental e LG_0^l produzidos por uma máscara LG. (c) Padrão de interferência entre uma onda divergente (produzida com a inserção de uma lente esférica L) com os modos LG_0^l produzidos por uma máscara LG.

2 Fase Topológica para feixes com Momento Angular Orbital

O potencial de utilização das fases dos estados quânticos em aplicações destinadas à Computação e Informação Quântica (C&IQ) tem despertado grande interesse na comunidade científica. Contudo, a manipulação precisa e controlada dessas fases constitui o grande desafio da C&IQ. Os experimentos que demonstram o funcionamento das portas lógicas quânticas de fase em sistemas manipulados por ressonância magnética nuclear [50] e em íons aprisionados [51] constituem os marcos desse recente interesse. Entretanto, as manifestações das fases em estados que descrevem sistemas físicos já eram previstas e observadas desde meados da década de 50 do século passado. Os trabalhos de S. Pancharatnam [52] em 1956 e M. V. Berry [53] em 1984 introduzem a noção de fases geométricas em sistemas clássicos e quânticos, respectivamente.

A fase topológica associada aos dois tipos de trajetórias cíclicas contidas no espaço das rotações $SO[3]$ será abordada neste capítulo. Este assunto foi objeto de trabalho e culminou com a realização de um experimento no Laboratório de Ótica Quântica da UFF (LOQ-IFUFF) cujos resultados estão publicados na referência [26]. A apresentação desses resultados se dará nas duas últimas seções deste capítulo após a apresentação dos tipos de fases adquiridas por feixes luminosos que sofrem transformações cíclicas. Inicialmente, na primeira seção, as fases geométricas de Pancharatnam e de Berry serão apresentadas antes da discussão de um experimento, reproduzido no LOQ-IFUFF, que mostrou a existência de uma fase geométrica para modos paraxiais. Em seguida, a segunda seção tratará das representações possíveis para estados quânticos de dois q-bits e da fase topológica que surge para esses estados após uma evolução cíclica. Por fim, as duas últimas seções descreverão os experimentos realizados que evidenciaram essa tal

fase topológica. Tal experimento foi realizado nos regimes de feixes intensos e fotocon-tagem.

2.1 Fases geométricas em sistemas de dois níveis

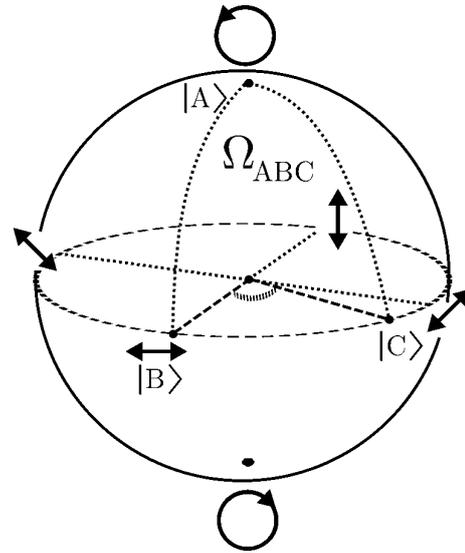
A apresentação das fases de Pancharatnam e de Berry para sistemas óticos seguirá a linha histórica de eventos.

2.1.1 Fase de Pancharatnam para evoluções cíclicas da polarização

A fase de Pancharatnam, em homenagem ao seu descobridor Shivaramakrishnan Pancharatnam, é a fase adquirida por um feixe luminoso que passou por algum elemento birefringente como uma lâmina de onda ou um polaróide e teve seu estado de polarização alterado. Essa fase é facilmente observada quando o estado de polarização do feixe sofre uma evolução cíclica, em que o estado final de polarização, após as passagens pelos elementos óticos, é igual ao estado inicial. Em particular, em seu trabalho seminal [52], Pancharatnam mostrou que a fase adquirida por um feixe que sofreu uma evolução cíclica na polarização tem uma contribuição geométrica dada por $\Omega/2$, onde Ω é o ângulo sólido gerado pelo triângulo geodésico na esfera de Poincaré (seção 1.5), cujos lados representam os estados de polarizações ao longo de toda evolução. A evolução cíclica considerada por Pancharatnam é ilustrada na Figura 2.1. No início, essa fase despertou interesse no campo da engenharia óptica para produção de diversas aplicações práticas utilizando tal fase no aprimoramento das lâminas de onda acromáticas. Atualmente, tal aprimoramento [54] e as aplicações em C&IQ acima citadas são os fatores que mais motivam o entendimento dessa fase.

Os artigos de revisão [55, 56] utilizam a notação moderna em termos dos kets ($|\cdot\rangle$) e bras ($\langle\cdot|$), e derivam as expressões e formulações de Pancharatnam mais facilmente. Em resumo, ele inicialmente propôs que uma medida da diferença de fase entre dois feixes com polarizações não ortogonais $|A\rangle$ e $|B\rangle$ pode ser realizada observando-se a intensidade resultante da interferência entre tais feixes. Basicamente, a intensidade resultante dessa

Figura 2.1: A fase de Pancharatnam na esfera de Poincaré. Um feixe que sofre uma transformação cíclica no estado de polarização adquire uma fase geométrica igual a metade do ângulo sólido determinado pela trajetória de evolução.



interferência

$$\begin{aligned}
 I \propto (\langle A| + \langle B|)(|A\rangle + |B\rangle) &= 2 + \langle A|B\rangle + \langle B|A\rangle \\
 &= 2 + 2\text{Re}\{\langle A|B\rangle\} \\
 &= 2 + 2|\langle A|B\rangle| \cos\{\text{fase}\langle A|B\rangle\} \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

é máxima quando os feixes estão em fase. Esta condição é expressa matematicamente quando produto escalar $\langle A|B\rangle$ é real e positivo.

Por fim, Pancharatnam mostrou que a conexão entre os estados é não transitiva, isto é: Se $|B\rangle$ está em fase com $|A\rangle$, e $|C\rangle$ está em fase com $|B\rangle$, o estado $|A\rangle$ não está necessariamente em fase com $|C\rangle$. Deste modo ele verificou que na evolução cíclica da polarização de um feixe, onde o estado final $|C\rangle = |A'\rangle$ é representado pelo mesmo ponto que representa o estado inicial $|A\rangle$, existe uma fase geométrica (a fase de Pancharatnam)

$$\langle A|A'\rangle = \exp\{-i\Omega_{ABC}/2\} \quad (2.2)$$

com Ω_{ABC} sendo o ângulo sólido representado na Figura 2.1.

O trabalho de Pancharatnam explicou um efeito observado nas transformações de polarização em feixes intensos. Posteriormente, M. Berry revisitou o trabalho de Pancharatnam em [55] com a teoria quântica explicando essa fase como uma particularidade dos fótons. Até onde vai o conhecimento deste autor, esta foi a primeira evidência de uma

fase que não depende da trajetória dos feixes, somente do tipo de transformação cíclica representada na esfera de Poincaré.

2.1.2 Fase de Berry para sistemas com simetria SU[2]: q-bits

A fase de Berry também é uma fase associada a um ângulo sólido e foi descoberta por Michael V. Berry [53] quando estudava as transformações adiabáticas em sistemas quânticos. Basicamente, M. Berry chegou a esse resultado estudando a dinâmica da equação não relativística de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = \hat{H}(\mathbf{R}(t))|\psi(t)\rangle \quad (2.3)$$

de um sistema quântico cujo hamiltoniano \hat{H} depende de um conjunto de N parâmetros $\mathbf{R}(t) = (X(t), Y(t), \dots)$ lentamente variáveis.

Berry considerou [56] o caso em que o hamiltoniano $\hat{H}(\mathbf{R}(t))$ não é degenerado, chegando à seguinte expressão para o estado quântico evoluído:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-(i/\hbar) \int_0^t dt' E_n(t') + i\gamma_n(t)} |E_n(\mathbf{R}(t))\rangle. \quad (2.4)$$

com

$$\gamma_n(t) = \int_{\mathbf{R}(0)}^{\mathbf{R}(t)} d\mathbf{R}' \cdot \langle n; \mathbf{R}' | i\nabla_{\mathbf{R}'} | n; \mathbf{R}' \rangle \quad (2.5)$$

e $\nabla_{\mathbf{R}'}$ sendo o operador gradiente que atua no espaço dos parâmetros \mathbf{R} .

Berry observou que, para o caso do transporte adiabático ao longo de uma trajetória fechada no espaço dos parâmetros, o fator de fase $e^{i\gamma(t)}$ que ficou conhecido como fase de Berry, não é integrável, isto é, em geral não pode ser escrito como uma função de \mathbf{R} , e em particular não é unívoco ao longo da curva fechada: $e^{i\gamma(T)} \neq e^{i\gamma(0)}$.

A fase de Berry também é representada geometricamente por um ângulo sólido. Entretanto, isso só é possível para sistemas de dois níveis (simetria SU[2]) que são representados na Esfera de Bloch (Seção 1.3). Neste caso, a fase também é dada pela metade do ângulo sólido compreendido pela trajetória que descreve a evolução do estado quântico, como mostrado para uma evolução em particular na Figura 2.2

A fase de Pancharatnam observada no regime clássico (de feixes intensos) pode ser

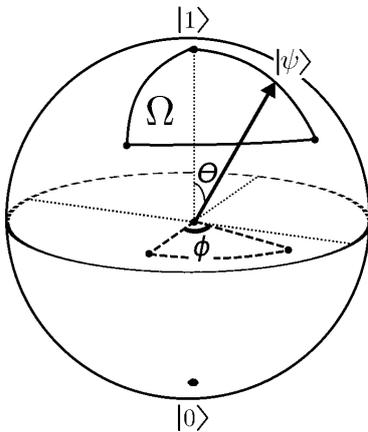


Figura 2.2: *Fase de Berry na esfera de Bloch. A fase geométrica adquirida numa transformação cíclica também é igual à metade do ângulo sólido compreendido pela trajetória que descreve a evolução do estado quântico.*

explicada à luz da teoria quântica como sugere a referência [56]. Outras manifestações dessas fases geométricas como: a fase adquirida por uma partícula de spin- s interagindo com um campo magnético, detalhada no próprio artigo seminal de Berry [53]; ou a fase observada no experimento de feixes de elétrons explicada por Aharonov-Bohm [58], fazem parte da literatura básica de Mecânica Quântica.

Todavia, alguns anos após os resultados de Berry, os feixes com MAO que já despertavam o interesse de muitos pesquisadores, se tornaram o mais novo sistema físico onde uma fase geométrica foi observada. A proposta inicial surgiu no trabalho de van Enk [59]. Dez anos depois, Galvez et al. [42] demonstraram experimentalmente essa fase para feixes clássicos como será apresentado a seguir. Tal experimento foi reproduzido aqui no LOQ-IFUFF constituindo uma atividade complementar ao tema de estudo desenvolvido nesta tese.

2.1.3 Fase geométrica para evoluções cíclicas de modos paraxiais

Foi observado no primeiro capítulo que existe uma analogia entre os estados de polarização da luz e feixes paraxiais de primeira ordem. Basicamente foi visto que a esfera dos modos é análoga à esfera de Poincaré e as transformações realizadas nos feixes paraxiais pelos conversores astigmáticos são análogas às transformações nos estados de polarização realizadas pelas lâminas de onda. Essa analogia é ilustrada na Figura 1.15 e é corroborada por meio da teoria de grupos que trata a polarização e os modos transversos como elementos do grupo $SU[2]$ [60, 61].

Como foi adiantado na seção anterior, a possibilidade da existência de uma fase geo-

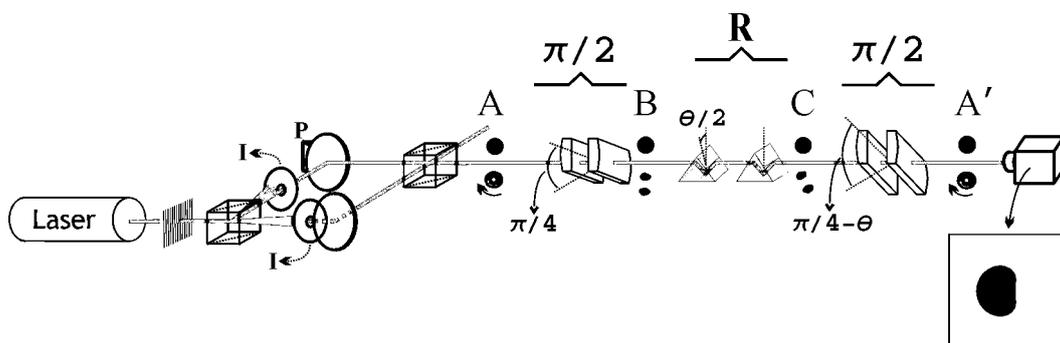


Figura 2.3: *Aparato experimental para medição da fase geométrica associada às evoluções cíclicas de modos transversos. No esquema: I- íris e P- PZT.*

métrica análoga à de Pancharatnam e associada às transformações dos modos foi levantada por van Enk [59] logo depois dos trabalhos dos conversores astigmáticos de Allen et al. [7, 8]. A implementação do experimento que evidencia essa fase foi feita inicialmente em [42]. Tal experimento, esquematizado na Figura 2.3, utiliza a analogia entre os graus de liberdade e é baseado na idéia inicial de Pancharatnam que contabiliza a fase geométrica por meio da interferência entre dois feixes.

Na experiência, os modos LG_0^{+1} e LG_0^0 provenientes da máscara MÁSC-LG (mostrada na Figura 1.20) são selecionados por íris (I) e são postos a se propagarem colinearmente como mostra a Figura 2.3. O LG_0^{+1} adquire fase geométrica quando executa a transformação cíclica ao atravessar os dois conversores $\pi/2$ e os dois Prismas de Dove [43]. O modo fundamental LG_0^0 também atravessa esses dispositivos óticos mas não adquire fase geométrica. A rigor, ele serve como feixe de referência para contabilização da fase geométrica adquirida pelo modo LG_0^{+1} .

Em resumo, inicialmente o conversor $C(\pi/2)$ executa a transformação $A \rightarrow B$, ilustrada na Figura 2.5, convertendo o modo LG_0^{+1} em um modo HG_{01} . Em seguida, os dois prismas de Dove realizam a transformação $B \rightarrow C$ rodando o modo HG_{01} de θ . Por fim, mais um conversor $C(\pi/2)$ completa a transformação fazendo $C \rightarrow A'$ completando a evolução cíclica. Todavia, o estado que descreve o modo após todas essas transformações impostas pelos conversores e Prismas de Dove difere do estado inicial apenas por um fator de fase global. Essa fase global $\phi_{Total} = \phi_{din} + \phi_{geo}$ é a soma das contribuições dinâmica (relacionada ao percurso de propagação) com a contribuição geométrica, referente a trajetória

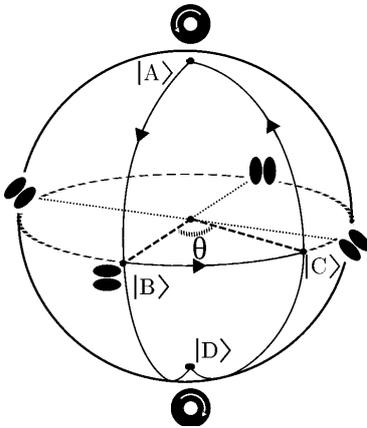


Figura 2.4: Trajetória cíclica associada à evolução implementada pelo esquema da figura 2.3.

da Figura 2.4.

A fase geométrica é evidenciada através da observação direta da inclinação do perfil de interferência (interferograma) entre os modos LG_0^{+1} e fundamental LG_0^0 . Na Figura 2.3, a imagem dentro do quadrado mostra a simulação da interferência entre os modos em questão. A fase geométrica e consequentemente a inclinação do interferograma filmado pela CCD está relacionado com o ângulo θ indicado do esquema e na Figura 2.4.

O aparato da Figura 2.3 foi implementado experimentalmente na UFF e várias imagens de interferências para diferentes valores de θ foram obtidas e são mostradas na Figura 2.5(a). Na Figura 2.5(b) o gráfico mostra a dependência do ângulo do interferograma com θ .

Um experimento análogo utilizando apenas dois conversores $C(\pi)$ foi realizado de forma a implementar a transformação cíclica $ABDCA'$ da Figura 2.4. Os resultados também dispostos na Figura 2.5(b) mostram que a inclinação da reta ou a fase geométrica é, neste caso, duas vezes maior que a fase obtida para a transformação $ABCA'$. No caso em questão, a inclinação da reta $ABDCA'$ é o dobro da reta correspondente à $ABCA'$. Estes resultados obtidos no LOQ-IFUFF reproduzem aqueles publicados na referência [42].

Em resumo, foi visto nesta seção que um sistema com um grau de liberdade com simetria $SU[2]$, que sofre uma evolução cíclica adquire uma fase ϕ_{Total} . Essa fase é composta pela soma da fase dinâmica (ϕ_{din}) com a fase geométrica (ϕ_{geo}) e se manifesta tanto no regime clássico como no regime quântico. A fase geométrica que tem atraído a atenção nos últimos anos devido ao potencial de aplicação em C&IQ também aparece nos sistemas com mais graus de liberdade, ou seja, sistemas com N q-bits. Na próxima seção será dado

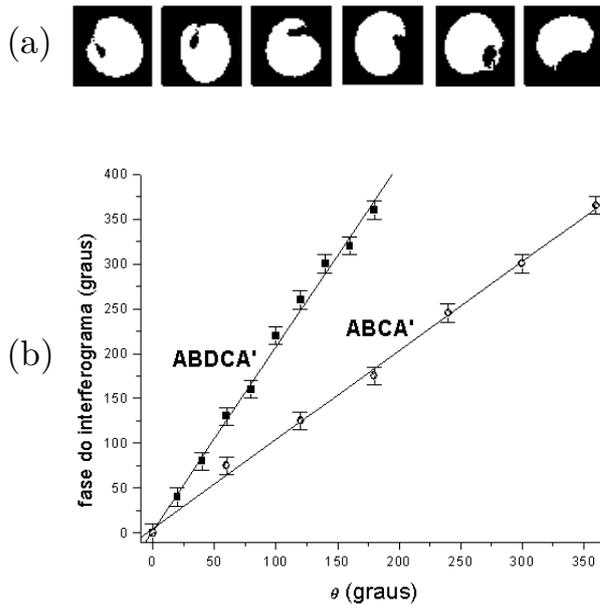


Figura 2.5: (a) Interferogramas fotografados pela CCD para diferentes valores de θ . (b) Gráfico relacionando a inclinação do interferograma com θ do aparato. Neste último são mostradas as inclinações referentes as trajetórias $ABCA'$ (esquema da Figura 2.3) e trajetória $ACDCA'$ (esquema não mostrado).

prosseguimento à descrição dos tipos de fases adquiridas por um sistema com dois q-bits.

2.2 Fase topológica para estados emaranhados de dois q-bits

A idéia de fase topológica para sistemas quânticos de 2 q-bits surgiu inicialmente no artigo [62] como resultado de um estudo realizado por Pérola Milman e Rémi Mosseri. Na ocasião, já era sabido pelos autores que os estados quânticos maximamente emaranhados possuem uma correspondência bi-unívoca com o grupo $SO[3]$, de forma que a esfera que representa o grupo das rotações $SO[3]$ [61] também pode ser utilizada para representar o espaço dos estados maximamente emaranhados de dois q-bits [63]. As propriedades do grupo $SO[3]$ puderam ser evidenciadas experimentalmente com fótons no experimento proposto e implementado aqui no LOQ-IFUFF como uma contribuição original desta tese. Essas propriedades se manifestam por meio de fases que podem ser observadas nos resultados experimentais apresentados nas seções deste capítulo. Antes disso, apresentar-se-á o procedimento de representação geométrica dos estados puros de dois q-bits seguindo as referências [62, 64, 65].

Optou-se por utilizar a nomenclatura *fase topológica*, seguindo as referências citadas

no parágrafo anterior, devido à proximidade destas com trabalho implementado. Contudo, existe uma discussão acerca da verdadeira natureza da fase observada. Discute-se se a fase observada é topológica ou apenas uma forma diferente de manifestação da fase geométrica. Um estudo mais detalhado sobre os tipos de fases adquiridas por sistemas quânticos pode ser encontrado nas referências [61, 66, 67] e nos trabalhos acima citados. Nesta tese só será apresentado o formalismo essencial, disponível em [62, 64], para apresentação do experimento implementado.

2.2.1 Representação geométrica do espaço de estados de dois q-bits

Uma tentativa de representação geométrica do estado puro mais geral de dois q-bits

$$|\psi_0\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle, \quad (2.6)$$

que possui α, β, γ e $\delta \in \mathbb{C}$, pode ser feita por meio da simplificação do estado (2.6) com a realização do traço parcial em um dos q-bits e uma representação da matriz densidade remanescente na *Bola de Bloch*, que será apresentada a seguir. Como explicado em [64], este método é muito simplificado e sofre da perda de informações sobre o estado quântico em questão. Contudo, tal procedimento pode ser aprimorado combinando-se um outro espaço onde a informação perdida pode ser reencontrada. Desta forma, consegue-se construir a representação desejada.

Tal representação é ilustrada pelas duas bolas na Figura 2.6. A Bola de Bloch com coordenadas

$$\begin{aligned} X &= \langle \sigma_x \rangle_\psi = 2\text{Re}\{\alpha^* \gamma + \beta^* \delta\} \\ Y &= \langle \sigma_y \rangle_\psi = 2\text{Im}\{\alpha^* \gamma + \beta^* \delta\} \\ Z &= \langle \sigma_z \rangle_\psi = |\alpha|^2 + |\beta|^2 - |\gamma|^2 - |\delta|^2, \end{aligned} \quad (2.7)$$

e a Bola do SO[3].

A rigor, como discutido na referência [64], a *Bola de Bloch* é uma generalização da esfera de Bloch e serve para representar geometricamente os estados mistos de um q-bit da forma

$$\hat{\rho} = a_{00}|0\rangle\langle 0| + a_{01}|0\rangle\langle 1| + a_{10}|1\rangle\langle 0| + a_{11}|1\rangle\langle 1|. \quad (2.8)$$

O raio da Bola de Bloch $r = \sqrt{1 - 2P}$ é uma função da pureza ($P = 1 - \text{Tr}\rho^2$) do estado

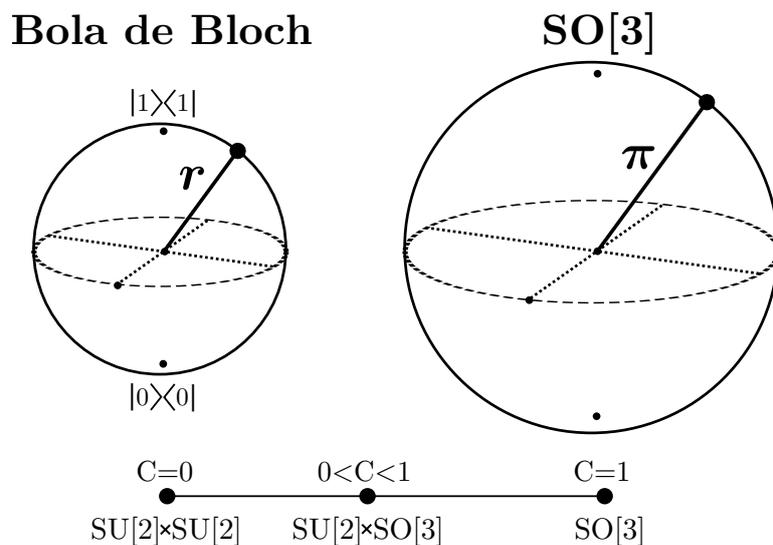


Figura 2.6: Representação geométrica de um estado de dois q -bits por meio das bolas de Bloch e do grupo $SO[3]$. Essa representação proposta em [64] depende do emaranhamento do sistema. Nos casos limites onde a concordância quântica vale $C=0$ e $C=1$, as representações se reduzem a duas esferas de Bloch ($SU[2] \times SU[2]$) e uma única bola do $SO[3]$, respectivamente. O caso geral com $0 < C < 1$ é o ilustrado na figura.

que descreve o sistema. P assume valor $1/2$ para estados completamente mistos e 1 para estados puros, de forma que a representação se colapse em um único ponto quando o estado for completamente misto ou recaia na esfera de Bloch quando o estado for puro. Para esses estados, um ponto na bola de Bloch determina completamente a matriz densidade do sistema, e a fase global adquirida numa evolução cíclica também é determinada pela soma das contribuições geométrica e dinâmica. A discussão detalhada no tocante a determinação de todas as fases envolvidas numa evolução cíclica dos estados mistos é feita em [64].

O raio da Bola de Bloch pode ser obtido por meio da relação

$$r = \sqrt{1 - C_r^2 - C_i^2}, \quad (2.9)$$

onde $C_r = 2\text{Re}\{\alpha\delta - \beta\gamma\}$ e $C_i = 2\text{Im}\{\alpha\delta - \beta\gamma\}$. Este raio está ainda relacionado com a concordância quântica (C) definida como:

$$C \equiv |C_r + iC_i| = 2|\alpha\delta - \beta\gamma|. \quad (2.10)$$

A concordância é uma grandeza utilizada na quantificação do emaranhamento do estado quântico. Ela assume o valor 1 para estados maximamente emaranhados e zero para estados separáveis.

Em especial, a bola de Bloch é reduzida a um único ponto quando $C=1$ e os estados maximamente emaranhados são caracterizados somente pela esfera do $SO[3]$, resultado este relacionado ao fato de que todos os estados maximamente emaranhados são conectados por rotações locais. Isto significa que qualquer estado maximamente emaranhado pode ser gerado a partir da realização de transformações em q-bits individuais de um dado estado maximamente emaranhado. Como a bola de Bloch fica reduzida a um ponto, não há variação da fase geométrica numa evolução e a fase global, neste caso, se deve às propriedades do $SO[3]$ (fase topológica) e à fase dinâmica. Os estados separáveis ($C=0$) são representados por duas esferas de Bloch independentes, uma para cada q-bit. Neste caso, a fase (geométrica ou dinâmica) adquirida pelos q-bits sob transformações individuais será a simples soma das fases individuais de cada q-bit.

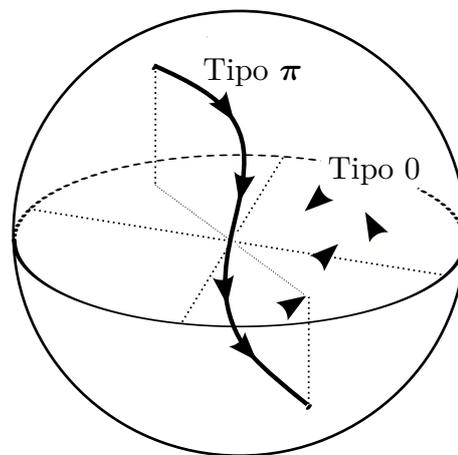
Essa análise é resumida no diagrama da figura 2.6 que mostra que o espaço de estados dos dois q-bits é representado pelo espaço de estados gerado pelo produto $SU[2] \times SU[2]$ referente às duas esferas de Bloch para estados separáveis, por apenas uma esfera do $SO[3]$ para estados maximamente emaranhados ($C=1$) e pelas bolas de Bloch e do $SO[3]$ para os casos intermediários com $0 < C < 1$.

2.2.2 Mapeamento dos estados maximamente emaranhados de dois q-bits na esfera do $SO[3]$

A esfera do $SO[3]$ possui raio fixo igual a π e tem os pontos diametralmente opostos da superfície identificados, representando o mesmo estado quântico. A construção desta esfera, que será feita logo abaixo, revela a existência de dois tipos de evoluções cíclicas como ilustrado na Figura 2.7. Em um tipo, as evoluções cíclicas não atravessam a superfície da esfera (tipo-0) e no outro, as evoluções cíclicas atravessam a superfície (tipo- π). A fase adquirida por um estado maximamente emaranhado é 0 para trajetórias tipo-0 e π para o segundo tipo. A medida desta fase sem ambiguidade representa a observação de uma propriedade genuína do $SO[3]$ e é o tema deste capítulo. Um resultado importante e muito útil para a sequência deste trabalho é que *um estado maximamente emaranhado*

que evolui sob um conjunto de transformações locais e unitárias adquire somente fase topológica. As fases dinâmica e geométrica são calculadas em tal evolução dos estados maximamente emaranhados e fornecem contribuições nulas para a fase global [62]. De forma geral, a fase global adquirida por um estado puro de dois q-bits é dividida nas contribuições: dinâmica, geométrica, e topológica assumindo valores 0 ou π dependendo do tipo de trajetória na esfera do $SO[3]$. No caso particular em que o estado é separável, a fase global é o resultado da soma das fases adquiridas por cada q-bit.

Figura 2.7: A esfera do $SO[3]$: esfera de raio π que representa o espaço dos estados maximamente emaranhados. Os pontos da superfície que são diametralmente opostos representam o mesmo estado quântico. As transformações são representadas por trajetórias no interior da esfera. Transformações tipo-0 (que não atravessam a superfície) e tipo- π (que não atravessam a superfície) são representadas na figura.



É possível obter todos os estados da esfera a partir de um único estado maximamente emaranhado que representa o centro da esfera. Esse procedimento é realizado por meio de rotações individuais nos q-bits e é apresentado na sequência de acordo com a referência [68].

Construindo a esfera com um estado maximamente emaranhado

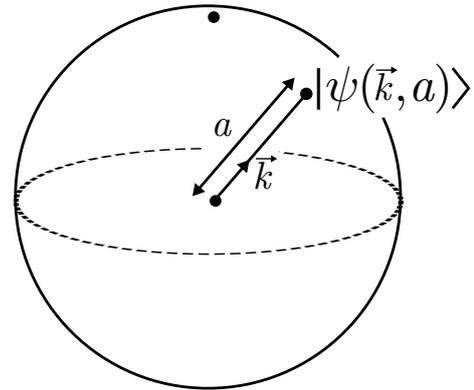
O estado quântico mais geral de um sistema de dois q-bits maximamente emaranhado pode ser escrito como

$$|\psi_0\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle - \beta^*|10\rangle + \alpha^*|11\rangle, \quad (2.11)$$

onde os coeficientes α e β são números complexos que satisfazem a condição de normalização

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = \frac{1}{2}.$$

Figura 2.8: Um estado maximamente emaranhado mapeado na esfera do $SO[3]$ em função dos parâmetros \vec{k} e a .



A Equação 2.11 é um caso particular da Equação 2.6 com $\gamma = -\beta^*$, $\delta = \alpha^*$ e consequentemente, $C=2|\alpha\delta - \beta\gamma|=1$.

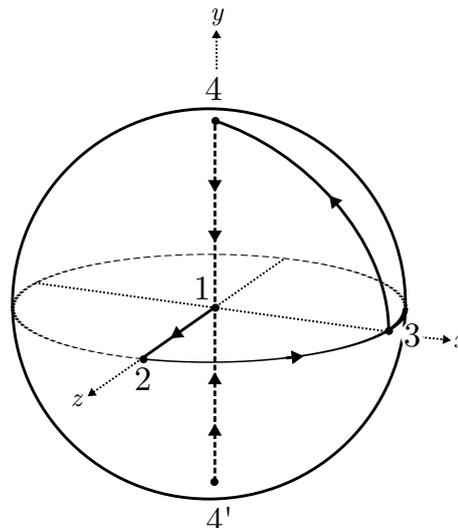
O mapeamento entre os estados maximamente emaranhados e as coordenadas da esfera do $SO[3]$ é feito através da parametrização das quantidades α e β como

$$\begin{aligned}\alpha &= \cos(a/2) - ik_z \sin(a/2) \\ \beta &= -(k_y + k_x) \sin(a/2).\end{aligned}\tag{2.12}$$

onde $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ é um vetor unitário que indica uma direção na esfera do $SO[3]$ e a é um ângulo pertencente ao intervalo $[0, \pi]$ que indica a distância de um ponto da esfera ao centro, como ilustrado na Figura 2.8. Com isso, o estado maximamente emaranhado pode ser escrito como $|\psi(\vec{k}, a)\rangle$ no espaço de parâmetros. Em especial, quando $\alpha=1$ e $\beta=0$, $a=0$ e o estado $\left(1/\sqrt{2}\right)(|00\rangle + |11\rangle)$ é representado na origem. A aplicação de uma rotação em um dos q-bits em torno de algum eixo desloca o estado descrevendo uma trajetória na esfera. Em particular, para um estado posicionado na origem, a trajetória é uma reta paralela à direção de rotação, de forma que uma rotação em torno do eixo z desloca o estado da origem para algum ponto neste eixo. A aplicação desse procedimento será detalhada a seguir para o caso do experimento realizado.

A utilização de tal parametrização configurou o início da idealização do experimento que mostrou pela primeira vez sem ambiguidades, a fase topológica associada aos dois tipos de trajetórias cíclicas do grupo $SO[3]$. Tal experimento utilizou a polarização (spin) e os modos transversos (orbital) da luz como graus de liberdade descritos matematicamente da mesma forma que os estados da equação 2.6 e aos quais se aplicam os resultados acima discutidos.

Figura 2.9: *Evolução cíclica na esfera do SO[3]. Os pontos 4 e 4' são diametralmente opostos e representam o mesmo modo spin-órbita. As transformações cíclicas são representadas pelas trajetórias 1234 e 1234'.*



2.3 Modos spin-órbita da luz

Os feixes utilizados no experimento são descritos por equações construídas através da combinação da polarização com o modo transversal de forma a produzirem uma representação geométrica análoga à do estado 2.6. A produção e manipulação desses feixes permite a observação da evolução do estado na esfera e habilita a realização do experimento nos regimes clássico e quântico. Para isso, inicialmente foi considerada a amplitude mais geral de modos de primeira ordem com polarização arbitrária

$$\vec{E}(\vec{r}) = \alpha\psi_+(\vec{r})\hat{e}_H + \beta\psi_+(\vec{r})\hat{e}_V + \gamma\psi_-(\vec{r})\hat{e}_H + \delta\psi_-(\vec{r})\hat{e}_V, \quad (2.13)$$

onde $\hat{e}_{H(V)}$ é o vetor unitário de polarização na direção horizontal H (vertical V) e $\psi_{+(-)}$ é o modo laguerre-gaussiano de primeira ordem com $l=+1$ ($l=-1$) definido na Equação 1.21. Em particular, pode-se definir duas classes de modos spin-órbita: os modos separáveis

$$\vec{E}(\vec{r}) = [\alpha_+\psi_+(\vec{r}) + \alpha_-\psi_-(\vec{r})](\beta_H\hat{e}_H + \beta_V\hat{e}_V), \quad (2.14)$$

com um estado de polarização bem definido para toda a frente de onda do feixe paraxial, e os modos não-separáveis

$$\vec{E}(\vec{r}) = \alpha\psi_+(\vec{r})\hat{e}_H + \beta\psi_+(\vec{r})\hat{e}_V - \beta^*\psi_-(\vec{r})\hat{e}_H + \alpha^*\psi_-(\vec{r})\hat{e}_V \quad (2.15)$$

que possuem a polarização variável ao longo da frente de onda.

A separabilidade do modo pode ser quantificada por uma expressão

$$C \equiv |C_r + iC_i| = 2|\alpha\delta - \beta\gamma| \quad (2.16)$$

idêntica à Equação 2.10. Neste caso, quando $C=1$, o modo em questão é maximamente não-separável e quando $C=0$, o modo é separável. Todavia, vale ressaltar que essa medida da separabilidade do modo não se aplica ao emaranhamento, pois a equação 2.13 descreve uma amplitude clássica, e não um estado quântico.

É possível construir uma representação do SO[3] utilizando-se a parametrização 2.12 para a amplitude 2.15. Para isso, é preciso definir previamente um modo que será representado por um ponto no centro da esfera. Devido à facilidade de sua produção no experimento, o modo

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_+(\vec{r})\hat{e}_H + \psi_-(\vec{r})\hat{e}_V] \quad (2.17)$$

com $\alpha=1$ e $\beta=0$ será o modo inicial representado pelo ponto 1 na Figura 2.9. Como será visto a seguir, esse modo descreve o feixe luminoso utilizado no experimento e pode ser transformado através da passagem por uma lâmina de onda ou um conversor astigmático. Essa passagem é descrita como uma rotação em um dos graus de liberdade que leva o feixe de \vec{E}_1 para um outro modo spin-órbita.

Em particular, seguindo a evolução que foi realizada experimentalmente, o feixe passou do modo \vec{E}_1 para o \vec{E}_2 com uma passagem por uma lâmina de meia onda orientada a zero grau. Matematicamente, essa transformação pode ser expressa por

$$\begin{aligned} \vec{E}_2 &= \mathbb{L}_0(\pi/2)\vec{E}_1 \\ &= \left[\hat{R}(0)\mathbb{L}_0(\pi/2)\hat{R}^\dagger(0) \right] \vec{E}_1 \\ &= \frac{-i}{\sqrt{2}} [\psi_+(\vec{r})\hat{e}_H - \psi_-(\vec{r})\hat{e}_V], \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde

$$R(2\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

é a matriz de rotação e

$$\mathbb{L}_0(\lambda) = \begin{pmatrix} \exp\{-i\lambda\} & 0 \\ 0 & \exp\{i\lambda\} \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

é a matriz que descreve a transformação realizada por uma lâmina de onda orientada a zero grau. Em particular, quando $\lambda = \pi/2$ ($\lambda = \pi/4$), essa lâmina se torna a lâmina de meia onda (quarto de onda).

Desta forma, uma transformação em um ângulo arbitrário, pode ser escrita como $\mathbb{L}_\theta(2\phi) = \hat{R}(\theta)\mathbb{L}(2\lambda)\hat{R}^\dagger(\theta)$. Assim, por exemplo, um feixe linearmente polarizado a 45° $\hat{e}^{+45} = (1/\sqrt{2})(\hat{e}_H + \hat{e}_V)$ com

$$\hat{e}_H \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{e}_V \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

que passa pela lâmina de onda também a zero grau é transformado como

$$\mathbb{L}_0(\lambda)\hat{e}^{+45} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \exp\{-i\lambda\} & 0 \\ 0 & \exp\{i\lambda\} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \quad (2.22)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \exp\{-i\lambda\} \\ \exp\{i\lambda\} \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Em particular, quando a lâmina é uma lâmina de quarto de onda ($\lambda = \pi/4$),

$$\mathbb{L}_0(\lambda)\hat{e}^{+45} \rightarrow \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e o feixe transformado tem polarização circular. O mesmo raciocínio é implementado para transformações nos modos transversos com as identificações:

$$\mathbb{C}(\zeta) \rightarrow \begin{pmatrix} \exp\{-i\zeta/2\} & 0 \\ 0 & \exp\{i\zeta/2\} \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

para os conversores astigmáticos e

$$\psi_\pm \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

para os modos Laguerre-gaussianos.

É possível localizar o modo \vec{E}_2 (2.18) utilizando-se a parametrização 2.12. Para este

modo $\alpha = -i$ e $\beta = 0$,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\alpha &= 0 : \cos\{a/2\} = 0 && \longrightarrow a = \pi \\ \operatorname{Im}\alpha &= -i : -k_z = -1 && \longrightarrow k_z = 1 \\ \operatorname{Re}\beta &= 0 && \longrightarrow k_y = 0 \\ \operatorname{Im}\beta &= 0 && \longrightarrow k_x = 0. \end{aligned}$$

Ele é representado pelo ponto 2 ilustrado na Figura 2.9. Esse ponto pertence ao eixo k_z e dista π da origem. Os cálculos analíticos considerando o ângulo de retardo (ξ) das lâminas mostram que a evolução segue uma trajetória reta entre os pontos 1 e 2. Tal afirmativa será corroborada a seguir com a apresentação dos resultados analíticos calculados computacionalmente para várias transformações executadas.

Pode-se ainda continuar realizando transformações no feixe de forma a produzir outros modos não-separáveis. Repetindo o procedimento anterior e considerando a passagem do feixe por mais duas lâminas de onda orientadas a 45° e 90° , respectivamente, obtêm-se os estados \vec{E}_3 e \vec{E}_4 formando a seguinte sequência:

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_+(\vec{r})\hat{e}_H + \psi_-(\vec{r})\hat{e}_V], \quad (2.26)$$

$$\vec{E}_2(\vec{r}) = \frac{-i}{\sqrt{2}} [\psi_+(\vec{r})\hat{e}_H - \psi_-(\vec{r})\hat{e}_V], \quad (2.27)$$

$$\vec{E}_3(\vec{r}) = \frac{-i}{\sqrt{2}} [\psi_+(\vec{r})\hat{e}_V + \psi_-(\vec{r})\hat{e}_H], \quad (2.28)$$

$$\vec{E}_4(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_+(\vec{r})\hat{e}_V + \psi_-(\vec{r})\hat{e}_H] \quad (2.29)$$

e as respectivas trajetórias ilustradas na Figura 2.9.

Uma última transformação realizada também por uma lâmina de onda completa a evolução cíclica. Essa transformação que recupera o estado inicial \vec{E}_1 pode ser realizada de duas maneiras, cada uma referente a uma trajetória fechada na esfera do SO[3]. Em um caso, uma lâmina $\lambda/2$ a -45° executa a transformação $4 \rightarrow 1$ produzindo a trajetória *tipo-0*. No outro caso, a mesma lâmina orientada a $+45^\circ$ executa $4' \rightarrow 1$ também fechando a trajetória. A fase π que surge entre essas duas trajetórias cíclicas é de origem topológica.

Esse procedimento de parametrização e a sua implementação nos feixes utilizados foi um passo muito importante para a realização do trabalho que continuará sendo apresen-

tado na próxima seção.

2.4 Fase topológica para transformações spin-órbita de feixes luminosos

A fase topológica é evidenciada com a realização de um experimento que faz interferir dois feixes, que seguem trajetórias de diferentes tipos na esfera do SO[3]. As fases contabilizadas nos perfis de interferência registrados por uma câmera CCD e por um contador de fótons constituem a primeira observação experimental da fase topológica originalmente apontada em [62]. O experimento feito para tal demonstração, esquematizado na Figura 2.10, utiliza os modos $\psi_+ = LG^{+1}$ e $\psi_- = LG^{-1}$ provenientes de uma máscara de fase MÁSC-LG (ilustrada na Figura 1.20). Os dois modos são transmitidos pelas lâminas de meia onda $\lambda/2$ -A e $\lambda/2$ -B, seguidas por dois polarizadores POL-H e POL-V orientados ortogonalmente. Finalmente, os feixes são recombinados no divisor de feixe (DF-1) completando o primeiro estágio do experimento. As lâminas $\lambda/2$ -A e $\lambda/2$ -B são orientadas de forma que os seus respectivos eixos de birrefringência (“eixos rápidos”) sejam paralelos.

Formalmente, o feixe que sai pelo DF-1 pode ser descrito como

$$\vec{E}_\varepsilon(\vec{r}) = \sqrt{\varepsilon}\psi_+(\vec{r})\hat{e}_H + \sqrt{1-\varepsilon}\psi_-(\vec{r})\hat{e}_V, \quad (2.30)$$

com $\varepsilon = \cos^2(2\theta)$. Em particular quando θ vale 0° ou 45° , o feixe que sai por DF-1 é um modo separável. Com isso, a separabilidade do modo que deixa o primeiro estágio (DF-1) é controlada de acordo com o ângulo θ das lâminas $\lambda/2$ -A e $\lambda/2$ -B, e a intensidade é mantida constante.

Experimentalmente, o modo maximamente não separável descrito pelo estado (2.26) e representado no centro da esfera é produzido quando θ vale $22,5^\circ$. Os outros modos \vec{E}_2 , \vec{E}_3 e \vec{E}_4 são produzidos por meio das transformações unitárias descritas na seção anterior. A escolha dessas transformações na polarização foi a primeira a ser implementada e se deveu à facilidade de manipulação desse grau de liberdade. Contudo, variações do experimento acima com manipulações nos modos transversos foram feitas, de forma a produzir outras trajetórias na esfera do SO[3] e serão apresentadas na próxima seção. No estágio dois do experimento, a primeira lâmina $\lambda/2$ -1 orientada a 0° faz a transformação

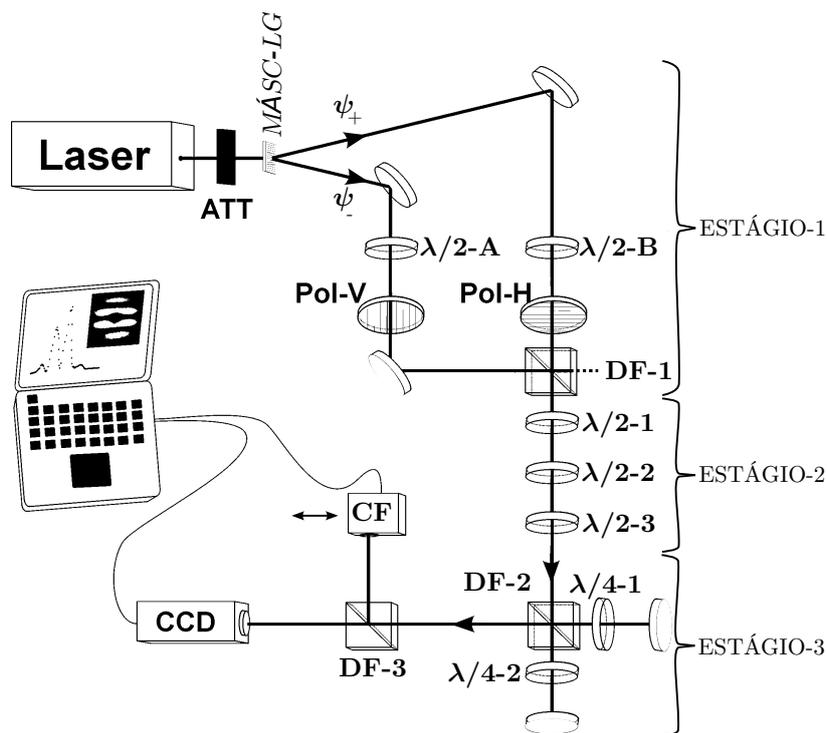


Figura 2.10: *Aparato experimental para medida da fase topológica. Estágio 1: a preparação do estado maximamente emaranhado; estágio 2: realização das transformações no estado maximamente emaranhado produzindo a trajetória 1234 na esfera de $SO[3]$; estágio 3: transformações $4 \rightarrow 1$ e $4' \rightarrow 1$ e medida da fase topológica.*

$\vec{E}_1 \rightarrow \vec{E}_2$, a segunda lâmina $\lambda/2-2$ a -45° faz $\vec{E}_2 \rightarrow \vec{E}_3$ e a terceira $\lambda/2-3$ faz $\vec{E}_3 \rightarrow \vec{E}_4$. Todas essas transformações são representadas na Figura 2.9 por meio das trajetórias que ligam os pontos 1234.

Finalmente, no estágio 3, duas transformações que representam o fechamento da trajetória são realizadas no estado \vec{E}_4 nos braços de um interferômetro de Michelson. Em um dos braços, a transformação tipo- π ($4' \rightarrow 1$) é implementada por uma dupla passagem do feixe pela lâmina da quarto de onda $\lambda/4-1$ fixa a -45° . Essa lâmina é mantida fixa e corresponde ao feixe de referência. No outro braço do interferômetro, as transformações de fechamento tipo-0 ($4 \rightarrow 1$) e tipo- π ($4' \rightarrow 1$) são realizadas também pela passagem do feixe por uma outra lâmina $\lambda/4-2$ que pode ser mantida em diferentes ângulos entre 45° (tipo-0) e -45° (tipo- π) por meio de um estágio giratório. Essas trajetórias são análogas às trajetórias obtidas em [56] para sistemas de spins que sofrem rotações em diferentes di-

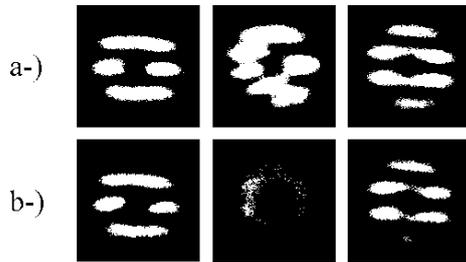


Figura 2.11: *Padrões de interferência para (a-) um feixe maximamente não-separável (estado maximamente emaranhado) e (b-) para um feixe separável. Da esquerda para direita as imagens foram obtidas com $\lambda/4$ -2 orientada a -45° , 0° e 45° , respectivamente.*

reções do espaço. Elas evidenciam as propriedades topológicas do grupo das rotações tridimensionais. O experimento ilustrado na Figura 2.10 implementou uma evolução cíclica ao longo das três direções do espaço utilizando um número mínimo de transformações unitárias com lâminas de onda. Tal experimento utilizou um interferômetro compacto que possibilitou a observação de franjas de interferência estáveis mecanicamente e foi o primeiro na literatura a mostrar uma medida genuína da fase topológica associada aos dois tipos de trajetórias no SO[3].

O interferômetro foi um pouco desalinhado para obtenção de franjas espaciais de interferência. Inicialmente foram obtidos com uma câmera CCD os padrões de interferência em regime de feixes intensos. Para este caso registrado na Figura 2.11(a), a potência do feixe na saída do DF-1 era de aproximadamente 8mW. As imagens da figura demonstram claramente uma defasagem de π entre a primeira e a terceira fotografias. A singularidade de fase característica do modo LG pode ser facilmente identificada, sendo útil para evidenciar a mudança de fase que é, neste caso, de origem topológica. Quando ambos os braços realizam trajetórias de fechamento de mesmo tipo no SO[3] (com $\lambda/4$ -1 e $\lambda/4$ -2 orientados a -45°), a franja clara cai justamente sobre a singularidade de fase. Quando $\lambda/4$ -2, as trajetórias realizadas nos dois braços do interferômetro pertencem a diferentes tipos e, neste caso, a franja escura cai sobre a singularidade, o que demonstra claramente a fase de π .

Medida quantitativa da diferença de fase dos interferogramas

A demonstração da diferença de fase π também foi feita quantitativamente por meio da análise das imagens de interferência. Para isso foi utilizado o programa de computador IMAGEJ que pode determinar com precisão a posição das franjas de interferência. Em uma de suas rotinas, o programa associa a cor de um dado ponto da imagem a um número que

pode ser 0 para a cor preta e 1 para a cor branca. Dessa forma, pode-se selecionar os pontos através de uma linha reta (que o usuário escolhe) como a linha tracejada representada na Figura 2.12 e fazer um gráfico de posição versus intensidade mostrado ao lado de cada figura. No mesmo gráfico foi mostrado uma expressão analítica (a curva contínua).

$$I = A_1 + A_2 r^2 \exp\{-r^2/\omega^2\} + A_3 r^2 \exp\{-r^2/\omega^2\} \cos\{A_4(x - x_c) + A_5\} \quad (2.31)$$

obtida a partir do cálculo da distribuição de intensidades $I = |\psi_{1+} + \psi_{2+}|^2$ referente a interferência entre dois modos LG de primeira ordem (1.20) descritos pela equação

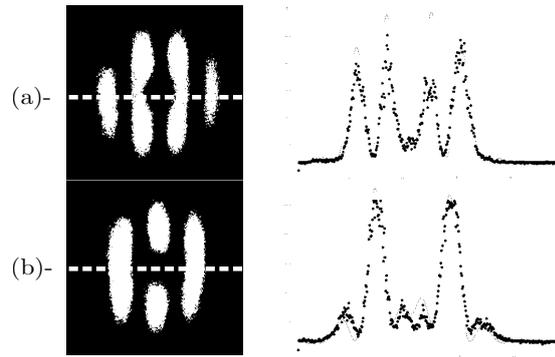
$$\begin{aligned} \psi_{1+} &= C_1 \frac{r}{\omega(z)} \exp\{-r^2/\omega^2(z)\} \exp\{i\phi_1\} \\ \psi_{2+} &= C_2 \frac{r}{\omega(z)} \exp\{-r^2/\omega^2(z)\} \exp\{i\phi\} \overbrace{\exp\{i(C_4 x + \phi_2)\}}^{xOz} \end{aligned}$$

com $r = \sqrt{y_0^2 + (x - x_c)^2}$. O termo assinalado como xOz diz que o modo ψ_{2+} se propaga ao longo de uma direção pertencente ao plano formado pelos eixos x e z e as constantes $w, y_0, x_c, A_1, \dots, A_5$ são parâmetros ajustados.

Todos os parâmetros da Equação 2.31 foram escolhidos para o gráfico da Figura 2.12(a) de forma a ajustar a curva analítica com os valores experimentais. A partir daí, o mesmo procedimento foi repetido para a Figura 2.12(b), tomando-se o cuidado de escolher uma reta igualmente posicionada na imagem, e obteve-se o gráfico ilustrado na mesma figura. A curva analítica neste caso tem todos os parâmetros idênticos à curva da letra (a), exceto a fase A_5 que é de π . Os gráficos foram feitos no MATHEMATICA[®] e o ajuste dos pontos foi feito por tentativa e erro, sem a utilização de métodos computacionais. A seguir, será apresentado o procedimento de verificação dessa fase através do ajuste computacional dos pontos experimentais obtidos no regime de fotocontagem.

A observação dessa fase de π também foi feita no regime de fotocontagem com uma atenuação da intensidade do laser. Isso foi feito com a colocação de um atenuador (ATT na Figura 2.10) que transmite parte ($43\mu W$) do feixe incidente. Este feixe entra no primeiro Estágio do aparato pela máscara MÁSC-LG e sai pelas duas saídas do DF-1 como indicado no esquema. Metade do feixe deixa o DF-1 com $1,5\mu W$ de potência e é utilizada no resto do experimento atravessando os estágios 2 e 3. Neste caso, tem-se um fluxo de

Figura 2.12: *Determinação quantitativa da fase π . Cada gráfico é obtido a partir da intensidade da imagem ao lado e o ajuste dos pontos é feito com a mesma expressão analítica defasada de π .*



aproximadamente $4,8 \times 10^8$ fótons/s, cada um com energia

$$\begin{aligned} E &= \frac{c\hbar}{\lambda} \\ &= 3,14 \times 10^{-15} J. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Isto produz uma trilha de fótons espaçados em média de 63cm que é da ordem de comprimento de todo o experimento. Isso assegura que não havia muitos fótons atravessando todo o aparato simultaneamente.

Vale lembrar que quando o modo parcialmente não-separável do tipo $\vec{E}_\varepsilon(\vec{r})$ é ocupado por um único fóton, produz-se um estado não-separável de uma única partícula da forma

$$|\varphi_\varepsilon\rangle = \sqrt{\varepsilon}|+H\rangle + \sqrt{1-\varepsilon}|-V\rangle. \quad (2.33)$$

Contudo, para a realização das medidas no regime quântico, deve-se levar em conta o comprimento de coerência [57] do laser, que geralmente é da ordem de quilômetros. Isto quer dizer que para a realização de tais medidas, deve-se atenuar o feixe utilizado de forma a garantir um afastamento médio entre os fótons maior que o comprimento de coerência.

Na observação da fase π , o contador de fótons foi ajustado de forma a somar o número de contagens no intervalo de 1s. Isso é feito computacionalmente por meio do programa comercial LabView[®] que ao receber uma ordem com o pressionamento da tecla (Enter), fornece o número de contagens por um tempo programado. O contador de fótons foi fixado num estágio de translação e deslocado transversalmente ao feixe a passos fixos de $(0,20 \pm 0,01)$ mm seguindo uma trajetória linear como ilustrado na Figura 2.10. A posição do contador ao longo do padrão de interferência era determinada por um orifício de $100\mu\text{m}$ que especificava a sua entrada.

O experimento de medida da fase no regime quântico foi realizado da seguinte forma: inicialmente, ainda no regime clássico, a fase π era observada diretamente na CCD, como forma de garantir que o aparato estava devidamente alinhado. Em seguida, o ATT era recolocado e o contador de fótons ligado para realização do procedimento de calibração que se baseava na verificação do número de contagens de fundo (aproximadamente uns 300 fótons/s) com o laser desligado e do número máximo de contagens que não podia exceder 50000 contagens/s devido ao risco de danos ao detector. Finalmente, as medidas eram feitas realizando-se o procedimento que se resumia em disparar o processo de contagem a cada passo de deslocamento espacial do contador de fótons.

Inicialmente, o experimento era realizado com as lâminas $\lambda/4-1$ e $\lambda/4-2$ orientadas a -45° de forma que as duas trajetórias de fechamento pertenciam ao mesmo tipo de trajetória. Ao fim deste processo, tinha-se uma tabela (ContagensXtempo) que correlacionava o número de contagens em um intervalo de 1s com a posição do contador de fótons. Em seguida, a lâmina $\lambda/4-2$ era posicionada a 45° e o contador recolocado na posição inicial para a repetição do processo de deslocamento e contagem, realizados anteriormente. Com isto, obtinha-se outra tabela ContagensXtempo. Os gráficos na Figura 2.13 mostram os resultados obtidos em duas realizações deste experimento. No gráfico da esquerda, a trajetória do contador de fótons não passou por nenhuma singularidade do padrão de interferência, como ilustra o diagrama acima do gráfico, e todas as franjas são completas. O ajuste computacional dos pontos experimentais, referentes a cada trajetória, foi feito no programa comercial ORIGIN utilizando a expressão 2.31 indicando uma defasagem de π entre as curvas. Na figura da direita, a trajetória do contador de fótons passou pelas singularidades e as franjas centrais foram atenuadas. Contudo, a realização do mesmo procedimento de ajuste também produziu uma defasagem de π .

Formalmente, obtém-se expressões que descrevem a dinâmica do estado quântico exibindo os termos de fase (dinâmica, geométrica e topológica) fatoráveis. Entretanto, na realidade, todas essas fases se somam formando a fase global adquirida pelo estado quântico. Contudo, o aparato experimental proposto na Figura 2.10, foi planejado de forma a contabilizar somente a fase desejada, isto é, somente a fase topológica. Isso foi feito sabendo-se que a natureza topológica do fator de fase apresentado em [62] é relacionada com a separabilidade do estado. Assim, uma vez que o modo enviado no

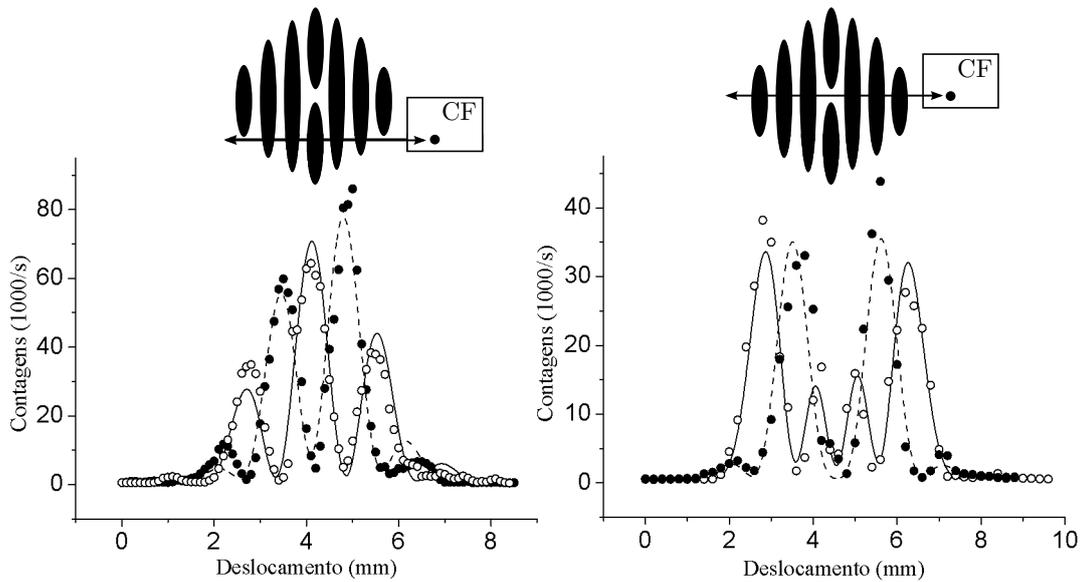


Figura 2.13: Padrão de interferência obtido no regime de fotocontagem para $\varepsilon=2$. Símbolos cheios e vazios correspondem à lâmina $\lambda/4-2$ orientada a -45° e 45° , respectivamente. A curva analítica corresponde à expressão 2.31. A diferença de fase no ajuste é de π rad. Acima de cada gráfico existe um esquema ilustrando o deslocamento do contador de fótons.

aparato é maximamente não-separável, a fase π observada é genuinamente topológica. Isto é verificado com a observação da visibilidade do perfil de interferência enquanto a lâmina $\lambda/4-2$ é rodada de -45° a $+45^\circ$. A visibilidade é sempre alta e aproximadamente constante apesar das franjas serem continuamente deformadas até o modo produzido pela lâmina voltar ao estado inicial, o que ocorre em 45° com a mudança de π na fase. Isso é ilustrado claramente pela imagem intermediária na Figura 2.11(a), onde a lâmina $\lambda/4-2$ encontra-se orientada a 0° (correspondendo a uma trajetória aberta no SO[3]). Isto significa que a separabilidade do modo está relacionada com a visibilidade do perfil de interferência, conforme discussão abaixo.

Como mencionado anteriormente, o estágio de preparação do modo pode ser ajustado de forma a produzir um modo separável. Por exemplo, quando as lâminas $\lambda/2-A$ e $\lambda/4-B$ são orientadas a 45° , o modo produzido é separável e descrito por $\psi_+(\vec{r})\hat{e}_H$. Neste caso, a mesma fase de π é observada para uma rotação de -45° a 45° da lâmina $\lambda/4-2$, mas a transição é essencialmente diferente. O padrão de interferência não é continuamente

deformado, mas a visibilidade é diminuída até zero quando $\lambda/4-2$ está a 0° , como pode ser observado na imagem intermediária da Figura 2.11(b), e volta a aumentar até ser máxima novamente quando a lâmina em questão chega a $+45^\circ$. Neste caso, a fase de π observada é puramente geométrica, visto que os modos espaciais são mantidos fixos enquanto a polarização é que sofre uma evolução cíclica representada por uma volta completa ao longo do equador na esfera de Poincaré.

Relação entre a separabilidade e a visibilidade

O cálculo analítico do padrão de interferência obtido na região onde os feixes provenientes do Interferômetro de Michelson são filmados (ou adquiridos pelo contador de fótons) fornece a relação entre a visibilidade do perfil de interferência e a separabilidade do modo. Tal relação de interferência é obtida considerando-se a propagação do feixe descrito pela Equação 2.30 através das lâminas $\lambda/2-1$, $\lambda/2-2$, $\lambda/2-3$ e através do Interferômetro com a lâmina $\lambda/4-2$ fixa e orientada a 0° . Para obtenção das franjas, considera-se também que o interferômetro esteja desalinhado de forma que os vetores de onda dos feixes também sejam desalinhados por $\delta\vec{k} = \delta k\vec{x}$, ortogonal ao eixo de propagação. Com isso, obtém-se a expressão para o perfil de interferência dada por:

$$I(\vec{r}) = 2|\psi(\vec{r})|^2 \left[1 + 2\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)} \sin(2\phi) \sin(\delta kx) \right] \quad (2.34)$$

onde $\phi = \arg\{x + iy\}$ é a coordenada angular no plano transversal à direção de propagação do laser, e $|\psi(\vec{r})|^2$ é o perfil de intensidade do modo LG. De acordo com a Equação 2.34, a visibilidade do padrão de interferência é dada por $2\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}$, expressão análoga à concordância de $\vec{E}_\varepsilon(\vec{r})$ de acordo com a equação 2.16. Portanto, a visibilidade das franjas é relacionada com a separabilidade do modo enviado no aparato. Contudo, a coincidência numérica com a concordância é restrita a modos da forma da equação 2.30. É importante salientar que a medida da visibilidade não é uma medida da concordância quântica de qualquer modo não-separável, mas pôde ser usada neste experimento que evidencia a natureza topológica da fase π observada.

A relação entre a visibilidade das franjas e a separabilidade dos modos também foi verificada experimentalmente. Isso foi feito no aparato esquematizado na Figura 2.10 com as lâminas $\lambda/4-2$ e $\lambda/4-1$ fixas a 0° e -45° , respectivamente, e com uma variação dos ân-

gulos das lâminas $\lambda/2$ -A e B por um ângulo θ de forma que $\varepsilon = \cos^2 2\theta$. De acordo com a equação 2.16, a variação do ângulo θ está relacionada com a separabilidade do modo que sai pelo DF-1. Assim, a relação entre separabilidade e visibilidade acima citada pode ser vista através dos resultados experimentais da visibilidade do perfil de interferência para vários valores de ε como mostrados na figura 2.14(a). A curva sólida corresponde à expressão analítica da concordância $C = 2\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}$ e os pontos experimentais foram obtidos a partir da visibilidade de cada perfil de interferência. O procedimento para obtenção de cada visibilidade pode ser entendido com o auxílio dos gráficos 2.14(b) que mostram o número de contagens versus a posição do contador de fótons. Foram obtidos vários gráficos como os mostrados na Figura 2.14(b) para diferentes valores de θ . A visibilidade de cada gráfico foi obtida através da expressão usual [43]

$$v = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} \quad (2.35)$$

onde I_{max} é a intensidade de uma franja clara de interferência e I_{min} é a intensidade da franja escura. Os valores I_{max} e I_{min} foram as contagens máxima e mínima de duas franjas vizinhas e centradas no meio da envoltória de intensidade, como indicadas pelos pontos sombreados nos gráficos.

2.4.1 Outras Trajetórias no SO[3]

Foram feitas ainda medidas complementares que exibem a diferença de fase π e que exploram o grau de liberdade MAO, além da polarização. Em particular, nesta nova etapa do trabalho, foram implementados: (a) um algoritmo computacional que calcula e traça na Esfera do SO[3] toda a evolução cíclica do modo não-separável, descrito pela Equação 2.17, e (b) dois experimentos que simulam duas novas evoluções cíclicas. A proposta foi obter uma evolução que fosse inteiramente contida no interior da Esfera do SO[3], atingindo sua superfície somente no momento em que a trajetória fosse completada.

O primeiro experimento implementado que descreve uma transformação cíclica, totalmente contida no interior da Esfera do SO[3], está esquematizado na figura 2.15(a) e utiliza manipulações da polarização. Em particular, o feixe não-separável (\vec{E}_1), produzido por um aparato idêntico ao ESTÁGIO-1 do esquema da Figura 2.10, atravessa sequencialmente o conjunto de lâminas: $\lambda/4@0^\circ$, $\lambda/4@45^\circ$, $\lambda/4@90^\circ$ e $\lambda/2@14^\circ$ descrevendo

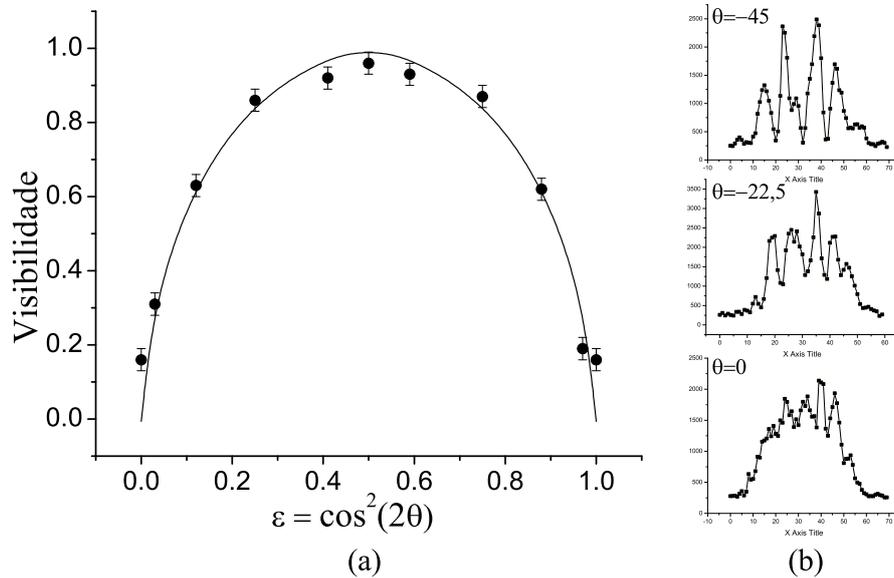


Figura 2.14: (a) *Visibilidade da franja como função de ε . A linha sólida corresponde à curva teórica $C=2\sqrt{\varepsilon(1-\varepsilon)}$. (b) gráficos que relacionam o número de fotocontagens com a posição do contador de fótons.*

a trajetória mostrada na Figura 2.15(b). Diferente do diagrama da Figura 2.9, tal trajetória é o resultado da implementação de um procedimento computacional no programa MAPLE[®]8, que calcula todas as transformações sofridas pelo modo em questão e traça no gráfico os resultados. Em seguida, o feixe entra no Interferômetro de Michelson, com ambas as lâminas $\lambda/4$ orientadas a $22,5^\circ$, que realiza as transformações $5 \rightarrow 1$ nos dois feixes provenientes da divisão no DF e produz o padrão de interferência (mostrado na Figura 2.16(a)-1) que é utilizado como referência. Posteriormente, uma das lâminas $\lambda/4$ dentro do interferômetro é orientada até $112,5^\circ$ e o feixe que passa por ela sofre a transformação de fechamento $5' \rightarrow 1$ e produz a imagem de interferência (mostrado na Figura 2.16(a)-5) exibindo uma defasagem de π com relação a primeira imagem. Os resultados intermediários mostram as imagens de interferência decorrentes de outras orientações de uma das lâminas $\lambda/4$ do interferômetro. Observa-se novamente que a visibilidade do padrão de interferência é sempre máxima. Por fim, quando o ângulo θ do estágio de preparação (Estágio 1) é mantido a 45° (estado separável), a realização do mesmo proce-

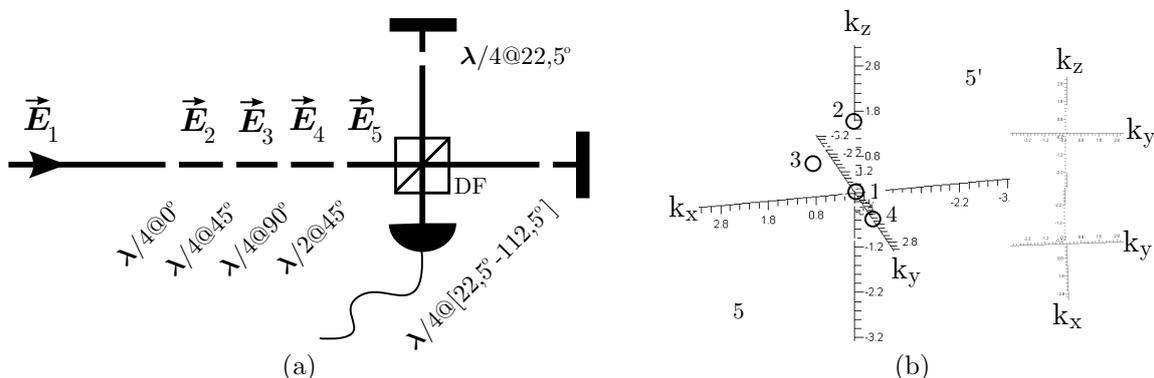
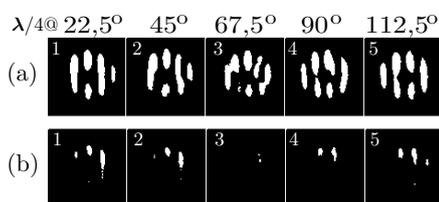


Figura 2.15: (a) Esquema experimental, (b) Gráfico referente ao cálculo analítico de toda evolução do modo maximamente não-separável no experimento ilustrado em (a).

Figura 2.16: (a) Interferência entre modos separáveis, (b) Interferência entre modos não-separáveis.



dimento de rotação de uma das lâminas $\lambda/4$ no interferômetro produz a mesma defasagem de π . Observa-se, neste caso a mesma redução na visibilidade observada anteriormente. Tais resultados corroboram as previsões anteriores que relacionam a separabilidade do modo com a visibilidade do padrão de interferência.

O segundo experimento, ilustrado na Figura 2.17, é análogo ao experimento descrito logo acima e apresenta manipulações em ambos os graus de liberdade. As lâminas de onda realizam as transformações tipo spin (na polarização) e os conversores astigmáticos (representados por $C_{45^\circ}(\pi/2)$ e $C_{-90^\circ}(\pi/2)$) as transformações tipo órbita (no MAO). Observa-se a mesma fase π para os modos: separáveis, ilustrados nas figura 2.18(a) e não-separáveis nas Figuras 2.18(b) e (c). A diferença é que nesta trajetória em particular, os estados separáveis são transformados diferentemente de acordo com sua polarização, produzindo os resultados mostrados na Figura 2.18(b) para o modo separável com polarização horizontal e 2.18(c) para o modo separável com polarização vertical. Todavia, ainda assim, o efeito da redução da visibilidade é observado.

Em resumo, foi feito um estudo que verificou pela primeira vez, sem ambiguidades, a fase topológica associada a diferentes tipos de evoluções cíclicas no espaço de estados

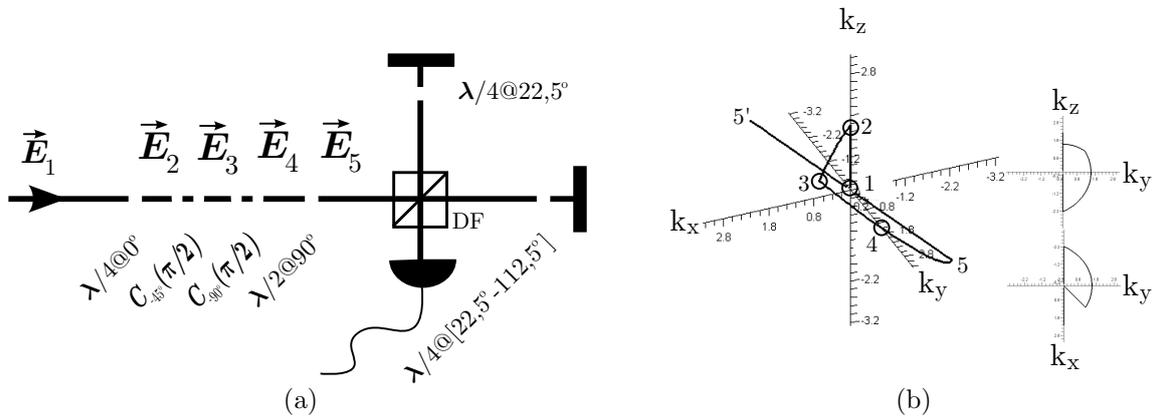
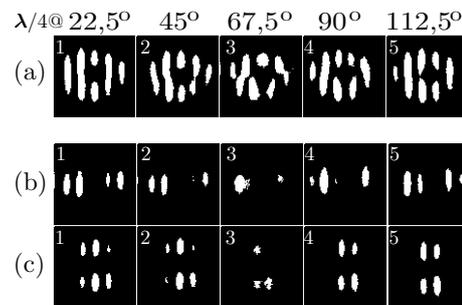


Figura 2.17: (a) Esquema experimental, (b) Gráfico referente ao cálculo analítico de toda evolução do modo maximamente não-separável no experimento ilustrado em (a).

Figura 2.18: (a) Interferência entre modos separáveis, (b) e (c) Interferência entre modos não-separáveis.



representado pelo grupo $SO[3]$. Em especial, foi proposto um experimento de interferência, que evidencia a separabilidade de um dado modo e a natureza topológica da fase adquirida. Esse trabalho é julgado pelo autor como o trabalho de natureza mais fundamental realizado no doutoramento. Em especial, estudou-se teórica e experimentalmente o emaranhamento em estados quânticos de dois níveis.

Os próximos dois capítulos serão dedicados à apresentação de dispositivos e aplicações para a Computação e Informação Quântica que utilizam o Momento Angular Orbital da luz e as propriedades já conhecidas de sistemas quânticos.

3 Dispositivos de computação quântica com o momento angular orbital da luz

Na Computação e Informação Quântica (C&IQ), os computadores são mais eficientes, desenvolvendo tarefas inimagináveis para os computadores convencionais baseados em “chips” compostos por um número muito grande de átomos [70]. O grande interesse na computação quântica vem da possibilidade de realização de cálculos que são muito demorados de serem realizados nos computadores clássicos. A possibilidade de construção de um computador quântico representa a superação de vários desafios científicos e tecnológicos e poderá colocar toda a segurança das comunicações privadas em risco. Entretanto, ao passo que um computador quântico representa o fim de um paradigma de segurança na transmissão de mensagens privadas, o desenvolvimento desta área também mostrou que a mesma Física Quântica que descreve os computadores quânticos também fornece a base para uma forma completamente segura para trocas de informações secretas - A Criptografia Quântica - que é um dos assuntos de estudo da Informação Quântica.

Tanto a Computação Quântica quanto a Informação Quântica foram objetos de estudo no período de doutoramento. Como consequência desse estudo, algumas propostas de dispositivos destinados à C&IQ foram feitas e implementadas. A apresentação desses resultados está dividida em dois capítulos como segue: neste terceiro capítulo, os dispositivos destinados aos experimentos de computação quântica serão apresentados; no quarto capítulo será apresentado um experimento de criptografia quântica.

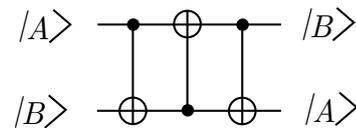
Na sequência, serão apresentados uma porta lógica quântica *NÃO-Controlado* (do inglês *Controlled-Not*) que utiliza os modos transversos e a polarização da luz como bits quânticos e um *Seletor de Modos Transversos* que serve de componente para experimen-

tos de C&IQ com fótons. Ambos os dispositivos foram publicados na referência [27].

3.1 A porta lógica NÃO-Controlado (CNOT)

A linguagem de descrição de um computador baseada em fios e portas lógicas descrevendo um circuito se aplica tanto aos computadores clássicos quanto aos quânticos [17]. Um circuito quântico é representado por *linhas e portas lógicas quânticas* dispostos num diagrama e descreve as transformações sofridas pelos bits quânticos (q-bits) que são sistemas quânticos de dois níveis (ver a seção 1.3). No diagrama, os símbolos representam as portas lógicas e as linhas não representam necessariamente objetos físicos: eles podem representar a passagem do tempo ou a propagação de um fóton de um lugar ao outro. A figura 3.1 ilustra um circuito típico que troca os estados quânticos de dois q-bits entre si o qual será descrito a seguir.

Figura 3.1: Circuito quântico que permuta os estados de dois q-bits.



Uma outra forma de representação muito importante devido à praticidade nos cálculos é feita por meio da álgebra matricial que associa cada porta lógica a uma matriz Θ e cada q-bit $|\psi\rangle$ a um vetor coluna

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

Na representação algébrica, a transformação sofrida pelo q-bit é o resultado da multiplicação da matriz pelo vetor

$$\Theta \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

A tabela 3.1 mostra as portas lógicas mais utilizadas na computação quântica. Não está no escopo desta tese fazer uma descrição detalhada acerca da finalidade e funcionamento de todas essas portas lógicas. Entretanto, o funcionamento dessas portas será descrito na medida em que o entendimento de algum resultado aqui apresentado depender das mesmas. Para uma discussão completa sobre elas, o leitor poderá consultar a referência básica de C&IQ [17].

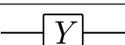
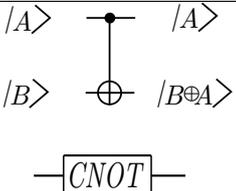
Hadamard		$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
X de Pauli		$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
Y de Pauli		$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$
Z de Pauli		$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Fase		$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$
$\pi/8$		$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix}$
NÃO-Controlado		$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Tabela 3.1: Portas lógicas mais frequentes em C&IQ.

É de grande interesse em C&IQ a construção e representação de portas lógicas quânticas que atuam em vários q-bits simultaneamente. Entretanto, de todas as portas que atuam simultaneamente em vários q-bits, a porta lógica CNOT é sem dúvida a mais importante devido ao fato dela, juntamente com as portas de um q-bit (ilustradas na tabela 3.1), poderem ser utilizadas para a construção de qualquer outra porta lógica (Seção 1.3.2 [17]). Isso confere à porta CNOT a característica de ser *universal* e de fundamental interesse na C&IQ.

A porta CNOT tem dois q-bits de entrada ($|A\rangle$ e $|B\rangle$), conhecidos como *q-bit de controle* e *q-bit alvo*, respectivamente. Suponhamos que o estado quântico de entrada na CNOT seja dado pelo produto tensorial dos q-bits $|A\rangle \otimes |B\rangle = |AB\rangle$. A CNOT funciona atuando no q-bit alvo dependendo do estado do q-bit de controle. Na base computacional $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, se o controle estiver no estado $|0\rangle$, nada acontece com o alvo. Se o controle estiver no estado $|1\rangle$, o alvo tem seu estado trocado. Em símbolos:

$$|00\rangle \rightarrow |00\rangle; |01\rangle \rightarrow |01\rangle; |10\rangle \rightarrow |11\rangle; |11\rangle \rightarrow |10\rangle. \quad (3.2)$$

A ação desta porta pode ainda ser resumida utilizando-se a aritmética modular como $|A, B\rangle \rightarrow |A, B \oplus A\rangle$, onde \oplus é a operação de adição módulo 2. Com essa aritmética, a sequência de portas no circuito da Figura 3.1 no estado da base computacional $|A, B\rangle$ corresponde à seguinte sequência de operações:

$$\begin{aligned} |A, B\rangle &\longrightarrow |A, A \oplus B\rangle \\ &\longrightarrow |A \oplus (A \oplus B), A \oplus B\rangle = |B, A \oplus B\rangle \\ &\longrightarrow |B, A \oplus (B \oplus B)\rangle = |B, A\rangle, \end{aligned} \tag{3.3}$$

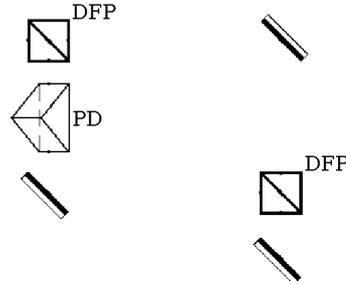
que resulta na troca dos estados dos dois q-bits. Essas três atuações sequenciais da CNOT como ilustradas na Figura representam uma porta chamada SWAP que é muito importante para C&IQ.

Os experimentos ópticos de C&IQ têm sido realizados explorando-se a *polarização*, o *momento linear* e o *momento angular orbital*. Essas propriedades da luz no contexto de C&IQ são chamadas de *graus de liberdade*, e representam os q-bits. Tais experimentos de C&IQ com fótons geralmente baseiam-se na combinação de vários q-bits (vários fótons linearmente polarizados, por exemplo) de um mesmo tipo, de forma a constituir o estado lógico a ser trabalhado. Contudo, existe a possibilidade de um único fóton representar mais de um q-bit de informação [34]. A porta lógica CNOT apresentada na próxima seção é um exemplo desta forma de representação que utiliza a polarização e o MAO como q-bits de um mesmo fóton. Experimentos deste tipo têm a vantagem de serem mais robustos quanto as perturbações do ambiente durante a realização das tarefas computacionais. Isso se deve ao fato de que, nos experimentos com fótons, o ambiente geralmente perturba o processo de computação ou transmissão de dados absorvendo os fótons. Consequentemente, quanto maior o número de fótons requeridos para a tarefa, maior será a influência do ambiente. Contudo, realizando-se detecção em coincidência [71] é possível reduzir os efeitos devido às perdas de fótons para o ambiente.

A porta lógica CNOT é um dos dispositivos mais importantes na implementação da C&IQ devido a sua universalidade e tem sido implementada com vários sistemas quânticos como: íons [72], spins nucleares [73], fótons com a utilização da polarização [74], do momento linear e da polarização [35, 36], do MAO com a polarização [75, 76], como q-bits, entre outros. Em particular, a CNOT [76] ilustrada na figura 3.2, foi utilizada como

parte do experimento de criptografia quântica apresentado no capítulo quatro. Ela foi inicialmente utilizada como parte de um circuito que implementa o *Algoritmo de Deutsch* [17, 76].

Figura 3.2: *Porta CNOT que utiliza a polarização como q-bit de controle e o modo transverso como alvo. Figura retirada da referência original [76].*



Nesta porta CNOT, os estados da base lógica são codificados nos q-bits polarização (q-bit de controle) e modo transverso de primeira ordem (q-bit alvo) da seguinte forma: as polarizações horizontal $|H\rangle$ e vertical $|V\rangle$ são associadas aos estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$ do q-bit de controle, respectivamente, e os modos $HG_{10} \rightarrow |h\rangle$ e $HG_{01} \rightarrow |v\rangle$ são associados aos outros estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$ do q-bit alvo.

No dispositivo em questão, um modo HG com polarização horizontal é transmitido pelos dois divisores de feixes polarizantes (DFP) realizando a trajetória de cima e sai do aparato sem alteração da orientação do modo HG. Caso o modo de entrada tenha polarização vertical, o modo é refletido pelos dois divisores de feixes polarizantes realizando a trajetória de baixo e atravessa o prisma de Dove orientado a 45° que roda de 90° o modo HG. Em resumo, essa alteração no modo transverso condicional à polarização é perfeitamente mapeada na operação realizada pela porta CNOT que altera o estado alvo dependendo do estado de controle.

3.2 A porta CNOT em um interferômetro de Michelson

A porta lógica quântica CNOT baseada num interferômetro de Michelson foi uma proposta original desenvolvida e implementada durante o doutoramento. Nela, os estados de polarizações lineares $|0\rangle_1 \equiv |V\rangle_1$ (horizontal) e $|1\rangle_1 \equiv |H\rangle_1$ (vertical) representam os q-bits de controle e os modos Hermite-Gaussianos de primeira ordem $|0\rangle_2 \equiv |v\rangle_2$ (HG_{10}) e $|1\rangle_2 \equiv |h\rangle_2$ (HG_{01}) representam os q-bits alvo.

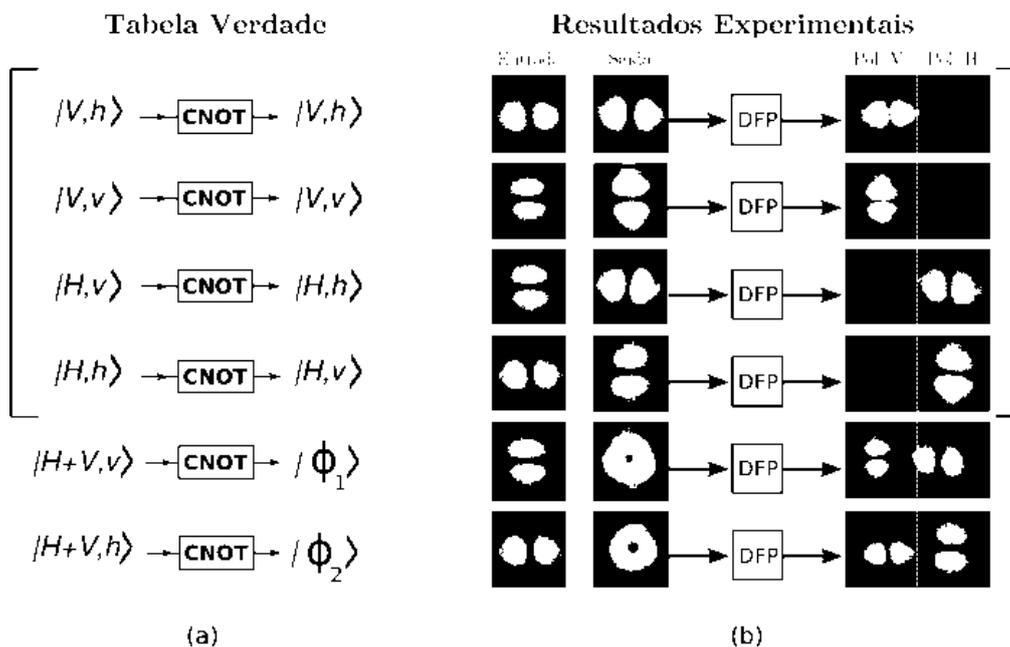


Figura 3.4: Na esquerda: representação esquemática do funcionamento da CNOT. Na direita: imagens experimentais dos feixes de entrada e saída da CNOT.

primeiras linhas mostram claramente que os modos HG são rodados quando a polarização é horizontal e permanecem inalterados quando a polarização é vertical. As duas últimas imagens mostram as saídas da CNOT quando os modos de entrada têm polarização linear a 45° . Neste último caso, o feixe de saída é não-separável do tipo *spin-órbita*

$$\begin{aligned}
 |\psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|Hh\rangle + |Vv\rangle), \\
 |\psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|Hv\rangle + |Vh\rangle).
 \end{aligned}
 \tag{3.4}$$

Esses modos são vórtices de polarização com perfis anelares de intensidade.

A última coluna de resultados experimentais da Figura 3.4 mostra os perfis de intensidades dos modos de saída da CNOT após passarem por outro DFP. Essas imagens confirmam o funcionamento do aparato no que diz respeito à polarização dos modos de saída. As duas últimas imagens nesta última coluna mostram que as orientações dos modos HG corroboram a equação 3.4 que descreve o estado do feixe após a porta.

Acredita-se que essa porta seja um bom dispositivo para a realização de experimentos de C&IQ devido à facilidade do alinhamento.

3.3 Seletores de modos transversos

O CMLU também serviu de base em mais uma proposta de dispositivo para experimentos em C&IQ - O Seletor de Modos Transversos (SMT). Um SMT divide um modo de primeira ordem em componentes HG, sendo um dispositivo análogo ao Divisor de Feixes Polarizante (DFP) que decompõe um feixe qualquer em dois feixes com polarizações lineares e ortogonais. A analogia entre os modos de primeira ordem e os estados de polarização da luz muito utilizada na CIQ com fótons foi apresentada na Seção 1.4. O Seletor de Modos transversos é esquematizado na Figura 3.5. O aparato foi montado e testado com modos HG e LG produzidos por uma máscara de fase (Seção 1.6) que difratava o laser HeNe. Mais uma vez, o modo difratado antes de entrar no SMT tinha sua polarização ajustada por meio de uma lâmina de meia onda $\lambda/2$. O modo a ser decomposto no conversor com a polarização devidamente ajustada na horizontal passa pelo DFP, pela lâmina de quarto de onda, que muda a polarização para circular, e é dividido pelo divisor de feixe simples (DF) 50%-50% que é a porta de entrada de um interferômetro de Michelson. Metade do feixe é transmitido e convertido pelo CMLU que está localizado neste braço do interferômetro. A outra metade refletida pelo DF é refletida por um espelho fixo no PZT que controla a fase relativa entre os feixes no interior do interfere-

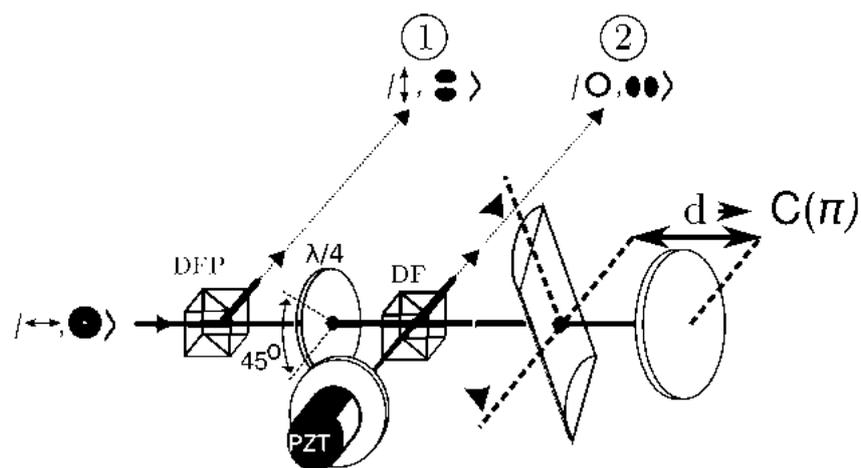


Figura 3.5: O Seletor de Modos Transversos (SMT).

rômetro. Uma saída do interferômetro é a saída 2 do SMT e o feixe resultante dessa saída

é a superposição da metade dos dois feixes que propagam nos braços do interferômetro. A outra metade sai pelo DF de forma contrapropagante ao feixe de entrada e tem sua polarização alternada para vertical ao atravessar novamente a $\lambda/4$. Esse feixe é refletido pelo DFP e constitui a saída **1** do SMT. Uma $\lambda/4$ adicional na porta **2** pode colocar o feixe dessa saída com a polarização desejada.

Quando a fase do interferômetro é devidamente ajustada, os feixes que deixam o aparato pelas saídas **1** e **2** são modos HG paralela e ortogonalmente orientados de acordo com a orientação do CMLU. Isto significa que o aparato pode ser utilizado como um instrumento de medida para os q-bits em modos transversos na base HG.

Os modos HG e LG produzidos para o teste deste aparato foram fotografados pela câmera CCD e são mostrados na primeira coluna da Figura 3.6. Primeiramente o CMLU foi orientado paralelamente, com $\theta=0^\circ$, ao modo HG_{01} (Imagem 1 da Figura 3.6) de entrada. Os resultados desse experimento são mostrados na Figura 3.6(a) e mostram simultaneamente as saídas **1** e **2**. Quando o interferômetro está devidamente balanceado, somente uma das saídas acende como mostrado pelas imagens 2 e 4. Uma defasagem de π alterna as saídas. Quando o interferômetro está desbalanceado, as duas saídas acendem como mostrado na imagem 3. Obtêm-se resultados idênticos quando o CMLU fica orientado ortogonalmente ao modo de entrada ($\theta=90^\circ$).

Para finalizar, o CMLU foi orientado com $\theta=45^\circ$ e os modos HG_{01} e LG_0^1 (mostrados em 3.6(b) e (c)) foram inseridos no SMT. Novamente, quando o interferômetro está balanceado, as saídas **1** e **2** acendem exibindo imagens dos modos $HG_{01}^{\pm 45}$ orientados paralelamente e ortogonalmente à orientação do CMLU. Uma diferença de fase de π entre os braços do interferômetro também alterna as saídas como mostrado nas imagens 2 e 4 da Figura 3.6(b). O interferômetro desbalanceado produz feixes nas saídas que são combinações dos modos HG orientados de acordo com as bases naturais do CMLU como mostrado na imagem 3 da Figura 3.6(b). O modo LG no SMT é dividido pelo DF e posteriormente recombinado, produzindo modos HG nas saídas. Estes modos são superposições de LG_0^1 e LG_0^{-1} com mesmo peso, decorrentes da conversão em um dos braços do interferômetro. A defasagem no interferômetro, neste caso, só altera a orientação dos modos na saída como mostrado nas imagens 2-4 da Figura 3.6(c). Mais uma vez, uma defasagem de π troca as imagens nas saídas **1** e **2**. Esses resultados demonstram que o

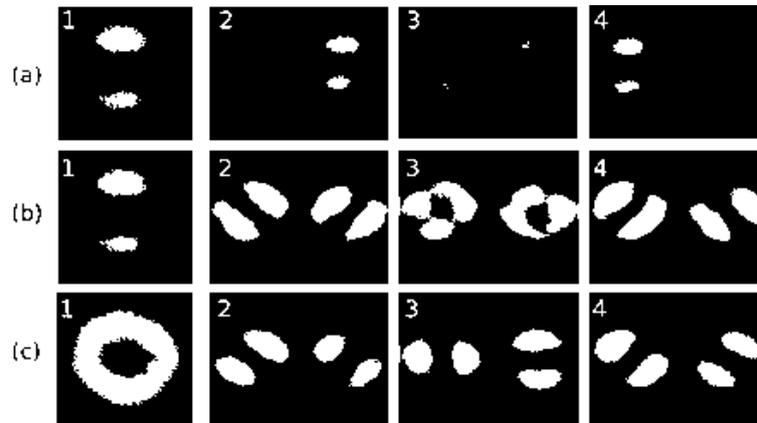


Figura 3.6: *Resultados experimentais do SMT. (a) Imagem 1 - modo HG_{01} de entrada no SMT. Imagens 2-4 - modos de saída para diferentes voltagens no PZT e θ orientado a 0° ; (b) Imagem 1 - modo HG_{01} de entrada no SMT. Imagens 2-4 - modos de saída para diferentes voltagens no PZT e θ orientado a 45° e (c) Imagem 1 - modo LG de primeira ordem de entrada no SMT. Imagens 2-4 - modos de saída para diferentes voltagens no PZT e θ orientado a 45° .*

SMT funciona como um instrumento de medida para o q-bit de modo transversal, quando a defasagem entre os dois braços do interferômetro for um múltiplo inteiro de π .

Em resumo, apresentou-se neste capítulo dois dispositivos destinados à C&IQ derivados do CMLU. Uma porta lógica CNOT que utiliza a polarização como q-bit de controle e o modo HG de primeira ordem como q-bit alvo e um Seletor de Modos Transversos com duas saídas e que separa um dado feixe em componentes Hermite-Gaussianas. Ambos dispositivos foram projetados com a utilização do CMLU em um dos braços de um Interferômetro de Michelson.

4 Criptografia quântica com modos spin-órbita da luz

Dando prosseguimento à apresentação dos dispositivos destinados à Computação e Informação Quântica (C&IQ), um experimento de criptografia quântica que permite a criação de uma chave secreta entre dois interlocutores será apresentado neste capítulo. Tal experimento se baseia num aprimoramento do protocolo BB84 de criptografia quântica e utiliza a polarização e o perfil transversal dos feixes paraxiais como graus de liberdade ou q-bits dos fótons. A grande novidade desta proposta se baseia no não compartilhamento entre os referenciais dos interlocutores. O experimento foi proposto pelos pesquisadores Dr. Mario Leandro Aolita e Dr. Stephen Patrick Walborn do Instituto de Física da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) e implementado aqui no Laboratório de Óptica Quântica. Os resultados foram publicados na referência [28]. Na ocasião, os pesquisadores Mario e Stephen já tinham publicado um trabalho [77] com propostas para codificação de estados lógicos quânticos que são protegidos contra rotações coletivas e que são fundamentais para a implementação dos protocolos de C&IQ sem compartilhamento de referenciais. A proposta implementada aqui na UFF e diversos outros experimentos encontram-se esboçados em tal trabalho.

Este capítulo inicia-se com uma exposição nas duas seções iniciais, com as apresentações do protocolo BB84 de criptografia quântica e da codificação em estados livres de descoerência discutidos na referência [77]. O entendimento dos assuntos abordados nessas seções é crucial para compreensão do experimento e dos resultados apresentados na última seção.

4.1 O protocolo BB84 de criptografia quântica

O desejo de obtenção de uma forma completamente secreta de comunicação entre dois agentes separados por alguma distância física tem incentivado a humanidade a desenvolver técnicas para codificação das mensagens pelo menos desde a Egito Antigo, como contado em “O livro dos códigos” [70]. Essas técnicas de codificações são objetos de estudo de um ramo da ciência intitulado Criptografia. A criptografia se propõe a desenvolver formas seguras e privadas para a comunicação entre usuários. O livro dos códigos, acima citado, traça uma riquíssima descrição do desenvolvimento da criptografia pela humanidade desde períodos antigos e inclui-se como uma leitura obrigatória para especialistas ou interessados neste ramo da ciência.

Os protocolos atuais de envio de mensagens secretas funcionam utilizando os canais convencionais de informação que usam as ondas eletromagnéticas numa fibra ótica ou no ar. As mensagens são criptografadas e enviadas ao receptor. A idéia é que se um espião interceptar tal mensagem ele não poderá ter acesso ao seu conteúdo. Entretanto, se o processo de criptografia ou encriptação for fraco, o espião pode deduzir a chave e decriptografar a mensagem para ter acesso ao seu conteúdo. A segurança das técnicas de codificações ou dos protocolos criptográficos atualmente é baseada no custo computacional dos computadores clássicos disponíveis. Com outras palavras, a privacidade das mensagens secretas depende da capacidade de processamento dos computadores atuais e pode ser quebrada com a utilização de um aparato como um computador quântico que seria capaz de realizar cálculos mais rapidamente que os computadores clássicos. Apesar dessa segurança controlada pelo que se conhece dos computadores atuais, existe uma técnica que garante a comunicação completamente segura entre os interlocutores. Essa técnica foi proposta em 1917 por Vernam [78] e requer uma chave numérica simétrica e aleatória compartilhada entre os interlocutores nomeados na literatura como *Alice* e *Bob*. Com essa chave, os interlocutores Alice e Bob podem codificar e decodificar as mensagens. O método de Vernam foi provado ser inquebrável por Shannon [79] em 1949 se utilizado com uma chave do tamanho da mensagem e apenas uma vez por chave. O grande desafio nesta tarefa de comunicação secreta reside no problema do compartilhamento da chave entre Alice e Bob numa situação em que eles não podem se encontrar fisicamente para realizarem a troca das chaves. O envio da chave por um canal convencional implica no

enfraquecimento na segurança podendo colocar em risco todo o protocolo se um espião, *Eva* como conhecido na literatura, adquirir a chave.

O problema da distribuição de chaves foi superado na década de 70 com a implantação do sistema RSA [80]. Nesse sistema, a chave é codificada num número muito grande que deve ser fatorado para que a mensagem seja decifrada. A segurança no envio das chaves pelo RSA é garantida com a dificuldade de fatoração desse número muito grande. Ademais, o problema da fatoração de grandes números é classificado por especialistas em ciência da computação como sendo um problema cuja solução requer um alto custo computacional¹.

O RSA para envio de mensagens secretas é seguro e pode ser ajustado na medida que o poder dos computadores aumentar. Todavia, um novo e revolucionário procedimento baseado na Física Quântica deu origem a um protocolo totalmente seguro, que não depende em nada do poder de computação de um espião. Esse protocolo foi proposto por Bennett e Brassard [81] em 1984 e ficou conhecido como o *protocolo quântico de distribuição de chaves BB84* (ou simplesmente como *protocolo BB84*) em alusão aos autores e o ano da descoberta. A seguir será descrita a implementação original de tal protocolo.

A autenticação de mensagens é muito importante para a verificação do verdadeiro emissor da mensagem e é uma outra tarefa que necessita do compartilhamento de chaves entre os interlocutores Alice e Bob.

Implementação do protocolo BB84

O cenário típico de implementação do protocolo BB84 apresenta Alice e Bob separados por alguma distância física, querendo se comunicar de forma secreta, e uma “bisbilhoteira” - a Eva - querendo interceptar a comunicação de Alice e Bob sem ser percebida. Alice e Bob possuem dois canais para comunicação: um “*canal clássico*” e autenticado, que também é utilizado para o envio de uma mensagem “cifrada” (codificada), e um “*canal quântico*”. A Eva tem acesso à todas as informações trocadas no canal clássico mas não pode alterá-lo enquanto o canal quântico pode ser manipulado a seu critério.

¹O custo computacional está ligado ao número de operações que o computador deve realizar para que a computação seja completada. Um alto custo computacional significa que o computador deve realizar muitos cálculos o que aumenta significativamente o tempo de computação.

Lembrando que toda manipulação deve ser feita com a ressalva de que sua presença não deve ser percebida nem por Alice ou por Bob.

A luz é o sistema físico mais indicado para a realização dos protocolos de criptografia quântica apesar da grande quantidade de sistemas quânticos que podem ser utilizados. Essa afirmativa é justificada pelo simples fato do protocolo só se justificar com a separação macroscópica de Alice e Bob. A luz pode ser transmitida por longas distâncias praticamente sem interagir com a matéria, diferentemente dos outros sistemas como spins e átomos. Isto significa que a luz pode “viajar” da posição de Alice para a posição de Bob sem sofrer *descoerência*, isto é, sem sofrer perturbações que alterem os estados quânticos dos fótons. Essas propriedades tornam a luz o principal candidato para realização dos protocolos quânticos de distribuições de chaves, entretanto, ela apresenta outras características como absorção e espalhamento que precisarão ser melhor controladas para uma aplicação mais eficiente dos protocolos criptográficos. O canal quântico é o meio onde a luz se propaga. Ele pode ser uma fibra ótica ou a própria atmosfera. A absorção ou o espalhamento provoca perda de fótons na transmissão e pode mascarar a presença da Eva, pondo em risco a privacidade da comunicação. Para uma leitura mais detalhada sobre a segurança e as implementações dos protocolos quânticos de criptografia, o leitor deve ler o artigo de revisão [82].

Seguindo com a descrição do protocolo BB84 ilustrado na figura 4.1: Alice possui um aparato que se baseia numa fonte de fótons com polarizações precisas e bem determinadas; Bob possui um aparato de medida composto por um polaróide e um detector de fótons. Com isso, eles procederão da seguinte forma para obtenção mútua de uma sequência numérica:

- 1-) Alice e Bob concordarão com as orientações horizontal e vertical de seus aparatos e escolhem as bases de medidas Horizontal/Vertical (+) e $+45^\circ/-45^\circ$ (\times), respectivamente;
- 2-) Após a concordância dos referenciais, eles codificam os q-bits das bases lógicas

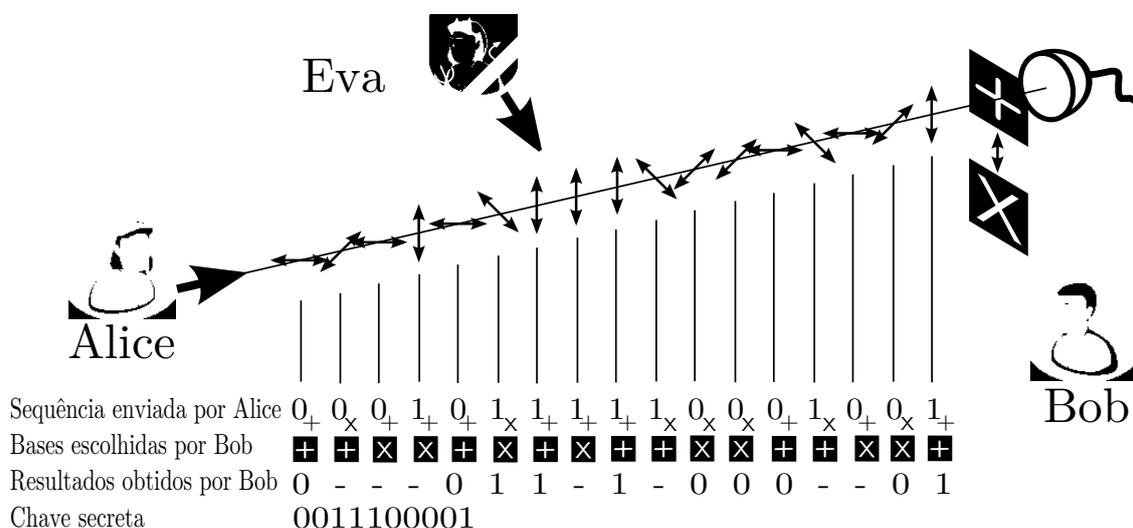


Figura 4.1: *Protocolo BB84: Alice envia bits 0s e 1s para Bob codificados como estados de polarizações dos fótons. Bob possui polaróides que podem ser ajustados para medidas nas bases + ou \times . Os resultados de ambos são descartados quando a base escolhida por Bob não coincide com a base de Alice. Por fim, a sequência de bits 0011100001 é compartilhada somente por Alice e Bob e poderá ser utilizada como uma chave para criptografia. As imagens dos bonecos que representam Alice e Bob foram retiradas do programa AMSN.*

como:

$$\begin{aligned}
 |H\rangle &\longrightarrow 0_+ \\
 |V\rangle &\longrightarrow 1_+ \\
 | +45^\circ\rangle &\longrightarrow 0_\times \\
 | -45^\circ\rangle &\longrightarrow 1_\times;
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

Assim, os valores 0 e 1 dos bits são codificados de duas formas distintas. Fótons polarizados horizontalmente (verticalmente) e a $+45^\circ$ (-45°) representam o 0 (1) lógico.

3-) Alice envia fótons através de um canal quântico para Bob nos quatro estados possíveis: $|H\rangle$, $|V\rangle$, $| +45^\circ\rangle$ e $| -45^\circ\rangle$ escolhidos aleatoriamente. Bob escolhe também aleatoriamente a orientação do seu polaróide e detecta os fótons enviados pela Alice. Após o envio de N fótons, Alice e Bob detém uma lista com *bits X bases*;

Um polaróide (P) [43] funciona como um seletor de polarização deixando os fótons

com polarizações paralelas à orientação do seu eixo de transmissão passarem e absorve ou reflete os fótons com polarizações ortogonais. Assim, se os interlocutores escolhem a mesma base, por exemplo +, Bob saberá com precisão absoluta o bit que Alice enviou. Em particular, se Alice envia um fóton 0_+ e Bob orienta seu polaróide na horizontal, seu detector acusará uma contagem. Da mesma forma, se ele posicionar o polaróide na vertical o detector não acusará contagem alguma. Caso Bob escolha a base \times , o polaróide transmitirá em média na metade das vezes, pois um fóton com polarização a $\pm 45^\circ$ em relação ao eixo do polaróide tem 50% de chance de ser transmitido.

4-) Alice se comunica com Bob através do canal clássico. Eles comparam somente as “bases” de medidas e descartam todos os resultados em que não utilizaram as mesmas bases;

Após este passo, os interlocutores deverão possuir listas idênticas com aproximadamente $N/2$ bits referentes às vezes em que eles acertaram as bases. A sequência de bits desta lista poderá formar a chave lógica após o último procedimento.

5-) Para finalizar, Alice e Bob divulgam pelo canal clássico alguns bits aleatoriamente e estimam a taxa de erro de transmissão no canal quântico. O erro significa que o bit enviado por Alice não coincide com o bit medido por Bob quando as bases eram coincidentes. Uma lista sem erros indica que Eva não obteve informação alguma durante a transmissão pelo canal quântico como será explicado no próximo parágrafo. A chave é a sequência remanescente de bits compartilhados somente por Alice e Bob após o descarte dos bits divulgados no canal clássico.

A estratégia mais óbvia para Eva, seria a interceptação e o reenvio do fóton enviado de Alice para Bob. Para isso, Eva deve proceder da mesma maneira que Bob medindo o estado do fóton enviado por Alice e depois enviando um fóton idêntico ao que ela mediu. O problema é que Eva deverá escolher sempre as mesmas bases de Alice para que ela não seja percebida ao fim do protocolo. A coincidência entre as escolhas de bases por Alice e Eva ocorrerá na metade dos casos em média e nestes casos Eva não alterará em nada os resultados das listas. Quando a base de Eva não coincidir com a de Alice, ela enviará para Bob bits com polarizações trocadas na metade das vezes, em média. Isso significa que 25% das vezes, em média, os bits de Bob e Alice não coincidirão.

A segurança do protocolo é garantida pelo *teorema da Não-clonagem* [17] de estados

quânticos. Este teorema assegura que Eva não pode clonar os estados quânticos enviados por Alice de forma a obter uma lista idêntica à de Bob. Se isso fosse possível, ela poderia clonar cada bit enviado por Alice, enviar uma cópia para Bob e realizar o procedimento descrito no parágrafo anterior de forma a obter a tal lista. Uma outra possível tática de Eva para obter informações da chave é a interceptação de apenas uma fração p dos bits enviados por Alice. Neste caso, é possível mostrar [82] que se o fator $Q = p/4 \gtrsim 17\%$, o protocolo ainda é seguro. Na figura 4.1 todo o protocolo é ilustrado para $N=17$ que gera uma chave de 10 bits.

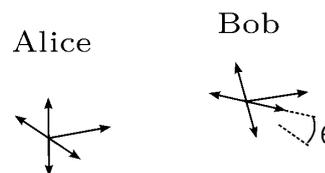
Um aspecto importante para o funcionamento do protocolo BB84 é o compartilhamento dos referenciais entre Alice e Bob. O problema é que tal compartilhamento é uma tarefa trabalhosa e requer troca de muita informação entre os interlocutores. Em teoria, para o estabelecimento do compartilhamento perfeito, uma quantidade infinita de informação deve ser trocada [83, 84]. Entretanto, existe uma maneira de codificar os q-bits de forma a realizar o protocolo sem a necessidade de compartilhamento de referenciais como será visto na próxima seção.

4.2 Estados protegidos de descoerência

A codificação de q-bits lógicos em estados de múltiplos q-bits com propriedades apropriadas de simetria é uma maneira de implementar os protocolos de Informação Quântica (IQ) sem a necessidade de compartilhamento dos referenciais pelos interlocutores. Nessa codificação, os q-bits lógicos são invariantes por rotações em torno de uma determinada direção, o que dispensa o trabalho de alinhamento nas etapas iniciais dos experimentos.

Os estados lógicos rotacionalmente invariantes formam uma base que gera um *Subespaço Livre de Descoerência* [77, 85, 86]. Esse subespaço é composto por vetores que descrevem sistemas imunes à descoerência e que são sujeitos às interações coletivas envolvendo idênticamente e simultaneamente todos os q-bits. Íons de mesma espécie aprisionados numa armadilha e fótons propagantes num canal quântico são sistemas sujeitos aproximadamente aos mesmos ruídos, que podem ser descritos por estados lógicos pertencentes ao Subespaço Livre de Descoerência. No caso fotônico em particular, o desalinhamento entre os interlocutores é equivalente a uma rotação aleatória dos q-bits (polari-

Figura 4.2: *Referenciais de Alice e Bob.*



zação, por exemplo) durante o processo de transmissão e pode ser considerado como um tipo especial de interação ou ruído coletivo. Contudo, a hipótese de uma interação idêntica e simultânea em todos os q-bits funciona muito bem em teoria, mas na prática é apenas aproximadamente satisfeita, pois todos os q-bits nunca estarão efetivamente sujeitos aos mesmos ruídos. Apesar das aproximações restritivas, encontram-se disponíveis na literatura vários protocolos e implementações com q-bits lógicos codificados em Subespaço Livre de Descoerência que exploram sistemas de muitos fótons. Em especial, as propostas [87, 88, 89] utilizam dois, [90] três e [35, 90, 91, 92] quatro fótons para a codificação dos estados lógicos. Contudo, o aspecto negativo destas técnicas que utilizam muitos fótons na codificação dos estados lógicos é o aumento na dificuldade técnica de implementação experimental, devido à perda de fótons na transmissão. Essas perdas provocam um aumento no ruído do aparato, o que pode mascarar algum outro problema mais sério como a existência de um espião num aparato de criptografia.

Como foi visto anteriormente, os fótons são os principais candidatos para implementação dos protocolos criptográficos devido à facilidade nas transmissões e no número de graus de liberdade (polarização, momento linear e MAO) facilmente manipuláveis. Contudo, nem todos os graus de liberdade são necessariamente afetados da mesma maneira. Neste caso, a noção de rotações coletivas não é válida mesmo para diferentes graus de liberdade do mesmo fóton. Não obstante, a polarização e o MAO da luz são do mesmo fóton que sofrem as mesmas rotações coletivas e não possuem sistemas de referência comuns no plano ortogonal à direção de propagação. Isto significa que é possível codificar os q-bits lógicos usando esses dois graus de liberdade, permitindo a implementação de protocolos de C&IQ que não necessitam de alinhamento.

Quando o q-bit lógico é codificado por apenas um q-bit físico como a polarização, a necessidade do compartilhamento de referenciais se torna importante pois o fóton preparado por Alice no estado $|\psi_A\rangle = \alpha|H_A\rangle + \beta|V_A\rangle$ será visto por Bob como $|\phi_B\rangle = \alpha(\cos\theta|H_B\rangle + \sin\theta|V_B\rangle) + \beta(-\sin\theta|H_B\rangle + \cos\theta|V_B\rangle)$ se o seu referencial estiver ro-

dado de θ como indica a figura 4.2. Caso $\theta \neq 0$, o mesmo q-bit será descrito de forma diferente pelos interlocutores e o protocolo não poderá ser implementado. Nas equações acima, $|H_{A(B)}\rangle$ é o estado de polarização horizontal e $|V_{A(B)}\rangle$ o estado de polarização vertical do fóton no referencial de Alice (Bob). De acordo com a analogia apresentada na seção 1.5, as mesmas análises e descrições podem ser feitas se os q-bits enviados forem modos Hermite-Gaussianos (HG) de primeira ordem. Em particular, se os modos HG forem orientados como ilustrado na figura 4.3, Alice pode enviar o mesmo q-bit $|\psi_A\rangle$ codificado como: $|\psi_A\rangle = \alpha|h_A\rangle + \beta|v_A\rangle$, onde $|h_{A(B)}\rangle$ e $|v_{A(B)}\rangle$ são os modos HG₁₀ e HG₀₁ nos referenciais de Alice e Bob, respectivamente.

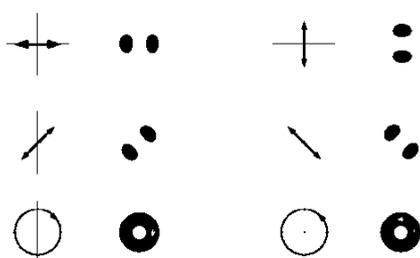


Figura 4.3: *Correspondência entre os q-bits de polarização e MAO para construção da base lógica com dois q-bits. Figura retirada da referência original [77].*

O efeito de uma rotação de θ entre os referenciais de Alice e Bob ao longo do eixo de propagação é igualmente percebido pelos dois q-bits. Isto significa que, a princípio, os dois graus de liberdade (polarização e MAO) são sujeitos às mesmas rotações. Isto configura as rotações coletivas e possibilita a construção de uma base lógica rotacionalmente invariante para experimentos de C&IQ. Diferente das outras propostas (citadas acima) onde vários fótons são utilizados para codificar um único estado lógico, aqui os q-bits pertencem ao mesmo fóton. Isto contribui para a diminuição da perda de informação no canal quântico devido à perda de fótons inerente a qualquer experimento.

De uma forma geral, o procedimento de codificação dos bits lógicos não depende do sistema físico utilizado e pode utilizar vários graus de liberdade nessa codificação. Em particular, para um sistema de dois q-bits (como o que será considerado a seguir), os estados lógicos são definidos [85] como:

$$\begin{aligned} |0_L\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1|1\rangle_2 - |1\rangle_1|0\rangle_2) \\ |1_L\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1|0\rangle_2 + |1\rangle_1|1\rangle_2), \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde os vetores rotulados por 1 e 2 são os vetores de base dos q-bits 1 e 2, respectivamente. Conforme discutido na referência [77], os estados lógicos são invariantes quando submetidos a rotações conjuntas do tipo $R^y(\theta) \otimes R^y(\theta)$, onde

$$\begin{aligned} R^y(\theta)|0\rangle &\rightarrow \cos(\theta/2)|0\rangle + \sin(\theta/2)|1\rangle \\ R^y(\theta)|1\rangle &\rightarrow \cos(\theta/2)|1\rangle - \sin(\theta/2)|0\rangle. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Com essa transformação, os estados lógicos dos q-bits evoluem como

$$\begin{aligned} |0_L\rangle &\rightarrow \cos(\theta/2)|0_L\rangle + \sin(\theta/2)|1_L\rangle \\ |1_L\rangle &\rightarrow -\sin(\theta/2)|0_L\rangle + \cos(\theta/2)|1_L\rangle. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Isto corresponde a rotação lógica $R_L^y(\theta) \equiv \exp[i\theta Y]$, onde Y é o operador de Pauli na base lógica. Os estados lógicos (equação 4.2) são autoestados de momento angular com autovalores nulos, invariantes sob rotações conjuntas na esfera de Bloch. Eles podem ser implementados experimentalmente com a polarização e o MAO fazendo-se a seguinte correspondência

$$\begin{aligned} |0_L\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|Hv\rangle - |Vh\rangle) \\ |1_L\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|Hh\rangle + |Vv\rangle). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Note que houve uma simplificação na notação dos estados quânticos, de forma que em $|A\rangle_1|a\rangle_2 \rightarrow |Aa\rangle$, $A = H, V$ e $a = h, v$ para os graus de liberdade de polarização e MAO, respectivamente.

De acordo com as equações 4.3 e 4.4, a rotação $R_L^y(\theta)$ pode ser implementada facilmente com apenas uma única rotação em um dos q-bits. Em particular, $R_L^y(\theta)$ pode ser implementada por $R^y(\theta)$ na polarização ou por $R^y(-\theta)$ no modo transversal como discutido em [77]. Essas rotações são realizadas experimentalmente na polarização por lâminas de onda e nos modos transversos pelos conversores astigmáticos.

A rotação $R^y(\theta)$ é explicitada com a utilização da notação matricial onde

$$\begin{aligned} |H\rangle &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ |V\rangle &\rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.6)$$

e

$$\widehat{\lambda/2}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

é a matriz que descreve a mudança na polarização de um feixe que atravessou uma lâmina de meia onda $\lambda/2$ orientada a α com a direção horizontal.

Com essa notação matricial, é imediata a verificação de que duas lâminas $\lambda/2$ orientadas a α e $\alpha + \theta$, respectivamente, equivalem a

$$\widehat{\lambda/2}(\alpha + \theta)\widehat{\lambda/2}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix} = R^y(4\theta). \quad (4.8)$$

Portanto, duas lâminas de meia onda podem realizar as rotações $R^y(\theta)$ na polarização, e conseqüentemente $R_L^y(\theta)$ nos bits lógicos. Ou seja, com essas rotações, Alice pode transformar $|0_L\rangle$ em $|0_L\rangle$, $|1_L\rangle$ ou $|\pm_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_L\rangle \pm |1_L\rangle)$, dependendo do valor de θ . Expressões matriciais análogas para os conversores astigmáticos [42] podem ser desenvolvidas e mostram que os conversores também executam essas mesmas rotações no q-bit de modo transversal.

Uma vez entendido o princípio de funcionamento do protocolo BB84 juntamente com a forma de codificação dos estados lógicos em estados livres de descoerência, pode-se partir para a descrição do experimento implementado durante o doutorado que constitui uma proposta original de um dispositivo para criptografia quântica.

4.3 Protocolo BB84 sem alinhamento remoto

O aparato experimental apresentado nesta última seção se propõe a distribuir chaves lógicas de forma secreta entre dois interlocutores separados fisicamente. O funcionamento do experimento é baseado no tradicional protocolo BB84 apresentado na seção

4.1 e na codificação dos q-bits lógicos em vetores pertencentes ao Subespaço Livre de Descoerência da seção 4.2.

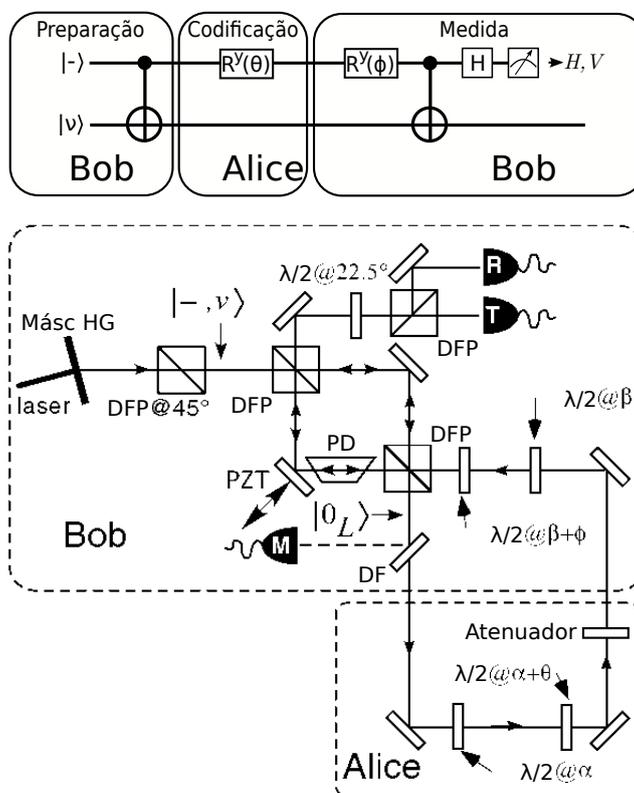


Figura 4.4: (a) Ilustração do circuito quântico do protocolo BB84 com estados lógicos. o fio superior representa a polarização e o fio inferior representa o modo transversal do mesmo fóton. (b) Esquema experimental que implementa o circuito acima. α e β são os ângulos dos referenciais de Alice e Bob, respectivamente. O detector M é utilizado para o monitoramento da fase do interferômetro de Bob.

O esquema do aparato de distribuição de chaves é ilustrado na figura 4.4 e usa q-bits lógicos codificados de acordo com a equação 4.3 utilizando a polarização e o modo transversal do mesmo fóton. O aparato é dividido em duas partes que representam as estações de Alice e Bob. O funcionamento é dividido em três etapas: inicialmente q-bits lógicos $|0_L\rangle$ são produzidos na estação de Bob e enviados para Alice que executa a segunda etapa efetuando uma rotação à sua escolha dentre as rotações $R_L^y(\theta)$ que produzem os quatro q-bits $|0_L\rangle$, $|1_L\rangle$ e $|\pm_L\rangle$ da base computacional. Por fim, na última etapa Alice anota as rotações escolhidas numa tabela e reenvia os q-bits para Bob que

realiza as medidas escolhendo também aleatoriamente suas bases. O experimento usa basicamente a mesma idéia do tradicional protocolo BB84 onde Alice escolhe de forma aleatória os q-bits que envia ao Bob que também escolhe de forma aleatória suas bases de medidas. Contudo, a grande novidade aqui é a utilização dos estados lógicos de dois q-bits do mesmo fóton que permite a implementação do protocolo sem a necessidade do alinhamento remoto das direções horizontal e vertical.

A figura 4.4(a) descreve, em linguagem de circuitos quânticos, o experimento realizado. Inicialmente, Bob cria um estado lógico de dois q-bits usando a polarização e o modo transversal, representado pelos fios de cima e de baixo, respectivamente. Isto pode ser obtido através da atuação de uma porta P-CNOT (porta CNOT com a polarização sendo o controle) no estado produto $|-\rangle|v\rangle = (|H\rangle - |V\rangle)|v\rangle/2$. Essa atuação produz o estado $|0_L\rangle$ que foi definido na equação 4.5. Com uma rotação $R_L^y(\theta)$, Alice transforma o estado $|0_L\rangle$ num dos quatro $|0_L\rangle$, $|1_L\rangle$, $|+L\rangle$ e $|-L\rangle$ dependendo do ângulo θ da rotação. A rotação lógica $R_L^y(\theta)$ pode ser implementada através da atuação de $R^y(\theta)$ no q-bit de cima ou $R^y(-\theta)$ no q-bit de baixo como foi discutido na seção anterior. Alice reenvia os fótons para Bob que realiza as medidas nas bases $+$ ou \times escolhendo o ângulo ϕ da transformação $R^y(\phi)$ no mesmo q-bit alterado por Alice. Finalmente, ele atua as portas P-CNOT e Hadamard (H) no q-bit de polarização antes de fazer a medida final.

Na implementação do aparato ilustrado na figura 4.4(b), Bob envia um feixe gaussiano proveniente de um laser HeNe com 632,8nm de comprimento de onda numa máscara de fase HG descrita na seção 1.6. A componente HG_{01} do feixe difratado é selecionada e passa por um DFP orientado a 45° produzindo um novo feixe descrito pelo estado $|-\rangle|v\rangle$. Após isso, o feixe passa pela porta P-CNOT descrita na seção 3.1 e é transformado em um outro feixe descrito pelo estado lógico $|0_L\rangle$. A fase entre os braços do interferômetro é mantida nula por meio da ação de um PZT. Uma diferença de fase diferente de zero muda a ação da P-CNOT, produzindo feixes descritos por estados que não pertencem à base lógica. O monitoramento da fase é feito pelo detector M que coleta toda a luz refletida na atenuação.

Bob envia os fótons descritos por $|0_L\rangle$ para Alice que realiza as transformações lógicas $R_L^y(\theta)$ aplicando uma rotação somente na polarização. Essa rotação é realizada na estação de Alice por duas $\lambda/2$ (equação 4.7) orientadas de α e $\alpha + \theta$, respectivamente.

Especificamente, as duas lâminas $\lambda/2$ transformam $|0_L\rangle$ em $|0_L\rangle$, $|1_L\rangle$, $|+_L\rangle$ e $|-_L\rangle$ para $\theta = 0^\circ, 45^\circ$ ou $\pm 22,5^\circ$, respectivamente.

Bob mede na base lógica $0_L/1_L$ ou na $+_L/-_L$ ao realizar as rotações $R_L^y(\phi)$ escolhendo $\phi = 0$ ou $22,5^\circ$, respectivamente. Após essa escolha de base, finalmente Bob aplica as portas P-CNOT e Hadamard antes de fazer as medidas para obtenção do bit. O aparato foi feito de modo que a saída não utilizada na CNOT de preparação era utilizada como entrada do aparato de medida. Assim, o mesmo interferômetro de Mach-Zehnder serve para produzir e medir os estados lógicos. Contudo, agora o prisma de Dove (PD) atua no feixe transmitido, isto é, com polarização horizontal. Isto significa que o interferômetro corresponde a uma porta $X_1 CNOT X_1$, que troca o modo transversal quando o estado de controle é zero. A aplicação de $X_1 CNOT X_1$ transforma o estado lógico da seguinte forma:

$$|0_L\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle - |V\rangle) |h\rangle = |- \rangle |h\rangle \quad (4.9)$$

$$|1_L\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|H\rangle + |V\rangle) |v\rangle = |+ \rangle |v\rangle. \quad (4.10)$$

Esses dois estados são facilmente distinguidos com uma medida de polarização que é realizada por uma lâmina $\lambda/2$ a $22,5^\circ$ e um divisor de feixe polarizante DFP. Assim, quando Alice envia $|0_L\rangle(|1_L\rangle)$ e Bob escolhe $\phi = 0^\circ$, o fóton é registrado pelo detector T(R). Caso Alice envie $|\pm_L\rangle$, o fóton terá 50% de chance de ser detectado em cada detector. O mesmo raciocínio pode ser utilizado para o caso em que Bob escolhe a outra base de medida com $\phi = 22,5^\circ$. Seguindo a notação apresentada, as bases lógicas serão intituladas por $0_L/1_L$ para $\phi = 0^\circ$ e $+/-$ para $\phi = 22,5^\circ$. Em resumo, todo o procedimento é análogo ao do tradicional protocolo BB84 com Alice e Bob escolhendo aleatoriamente suas bases para codificação dos q-bits.

Com a finalidade de simplificar a apresentação dos resultados, inicialmente o funcionamento do aparato será demonstrado para os laboratórios de Alice e Bob alinhados com $\alpha = \beta = 0$. A apresentação será concluída com a demonstração experimental de que os resultados independem da orientação relativa dos laboratórios usando diferentes ângulos α .

Todo o experimento foi feito em regime de feixe intenso. Contudo, uma atenuação

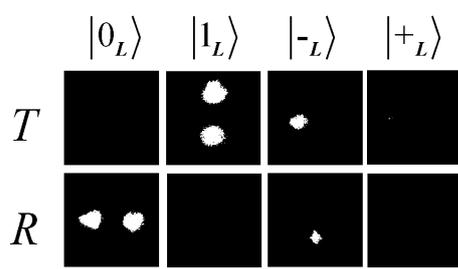


Figura 4.5: *Imagens obtidas por uma câmara CCD nas posições dos detectores R e T quando Bob escolheu medir na base $0_L/1_L$. Nas duas primeiras colunas, as bases de Alice e Bob coincidem e Bob obtém o bit enviado (somente um detector “acende”). Nas duas últimas colunas, as bases não coincidem e Bob não pode determinar o bit enviado (os dois detectores “acendem”).*

para o regime de fotocontagem não deveria alterar os resultados obtidos. Inicialmente, os referenciais de Alice e Bob foram alinhados com $\beta = \alpha = 0^\circ$ e os feixes detectados por R e T foram direcionados para um anteparo e fotografados por uma câmara CCD. Eles são reproduzidos na figura 4.5. Esta configuração corresponde à escolha da base de medida $0_L/1_L$ por Bob. Observa-se que quando Alice envia os estados $|0_L\rangle$ ou $|1_L\rangle$, somente um dos detectores “acende”, ou seja, registra a chegada de fótons. Quando Alice envia os estados $|\pm_L\rangle$, a intensidade da luz é dividida entre os detectores, o que manifestaria a probabilidade de 50% do fóton em cada detector e o bom funcionamento do protocolo. Resultados similares (mostrados na figura 4.6) são obtidos por Bob quando ele escolhe a base $+_L/-_L$ e distingue os estados $|\pm_L\rangle$, enquanto os estados $|0_L\rangle$ ou $|1_L\rangle$ são divididos randomicamente entre os detectores R e T.

A variação do ângulo α representa uma rotação do referencial de Alice em torno da direção de propagação. A figura 4.7 mostra os resultados obtidos por Bob nas bases $0_L/1_L$ e $+_L/-_L$ para diversas orientações $\{\alpha = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ\}$ do laboratório de Alice. De acordo com as figuras, o resultados obtidos por Bob não dependem da rotação global α entre o seu referencial com o de Alice. Esses resultados foram obtidos de forma mais quantitativa com as medições das intensidades nos detectores R e T. Na figura 4.7 o gráfico mostra a intensidade detectada como função do ângulo α quando Alice envia o estado $|0_L\rangle$ e Bob mede na base correta (errada) $0_L/1_L$ ($+_L/-_L$). Em todos os casos, a intensidade detectada por Bob é aproximadamente constante e independe do ângulo α . Ainda nesta figura, pode-se observar que Bob tem a probabilidade ($5/73 = 0.068$) de medir estados errados mesmo escolhendo as bases corretas. Isto se dá devido à eficiência dos componentes óticos utilizados e a pequenos desalinhamentos. Este resultado é interessante pois mostra experimentalmente o funcionamento de um aparato que pode ser utilizado para

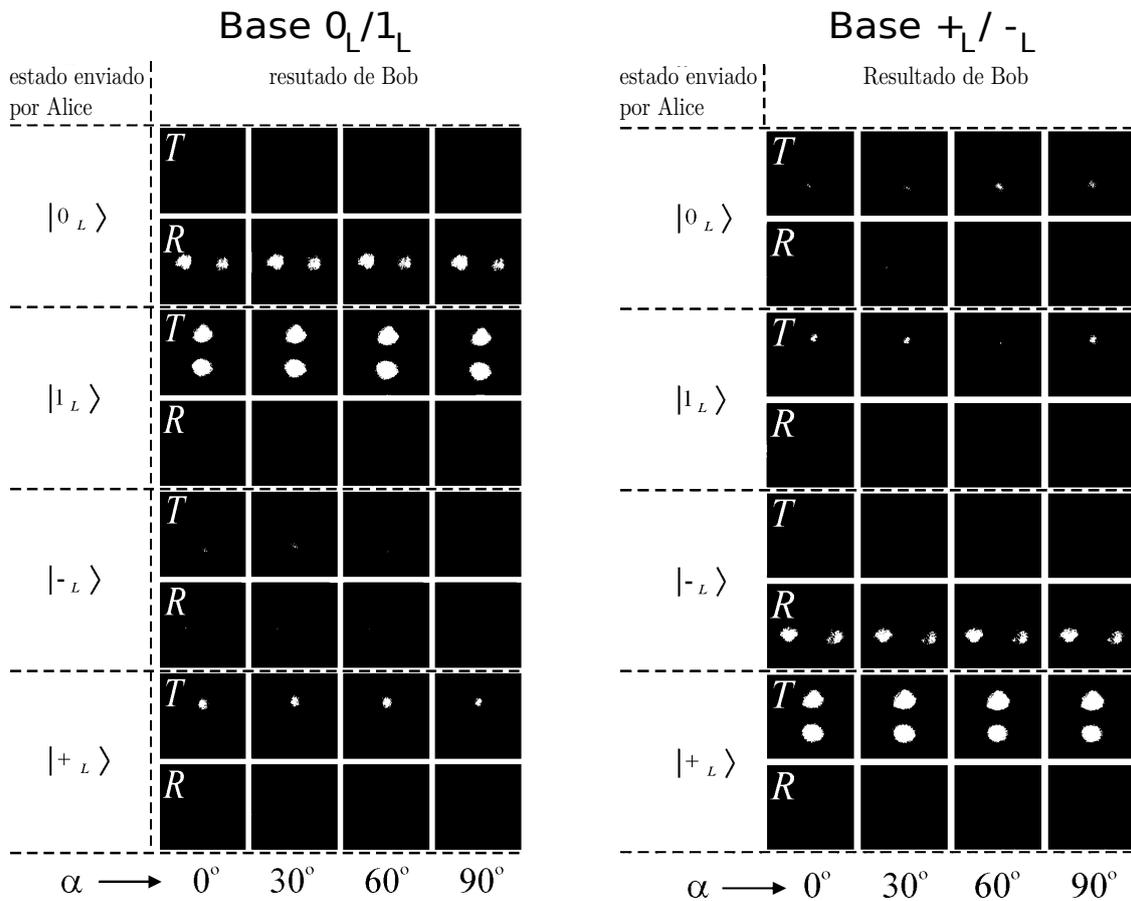


Figura 4.6: *Imagens obtidas nas posições dos detectores R e T para várias rotações α entre os referenciais de Alice e Bob. Na esquerda (direita) Bob escolhe a base $0_L/1_L$ ($+_L/-_L$).*

criptografia quântica entre dois interlocutores separados fisicamente e que compartilham somente uma direção em comum que pode ser caracterizada por um laser intenso. Isto pode ter implicações diretas na comunicação entre laboratórios localizados na Terra e em satélites por exemplo.

O laboratório de Alice realiza somente uma rotação $R^y(\theta)$ que depende exclusivamente do ângulo θ entre as duas lâminas de onda e portanto, independe da orientação α . Contudo, a equivalência entre a rotação física $R^y(\theta)$ e a rotação lógica $R_L^y(\theta)$ é válida somente para a base lógica definida pelas equações 4.2. Isto significa que a independência de alinhamento apresentada neste trabalho, só é válida nesta codificação lógica.

Como no tradicional protocolo BB84, a Eva poderia tentar obter alguma informação

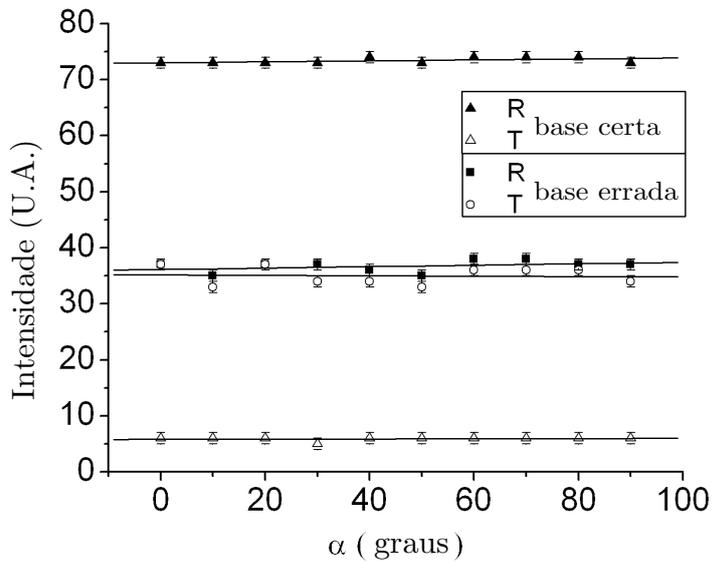


Figura 4.7: *Intensidade medida com um medidor de potência como função do ângulo α do laboratório de Alice. As curvas contínuas mostram os ajustes lineares dos pontos experimentais.*

da chave tentando capturar alguns fótons. Mas como foi visto na seção 4.1, esse procedimento produziria uma taxa de erros, o que poderia ser detectado pelos interlocutores.

De fato, esse experimento serviu como uma prova de princípio para a implementação do protocolo BB84 utilizando os graus de liberdade polarização e modos transversos do mesmo fóton. A grande novidade aqui foi que Alice e Bob não precisam compartilhar seus referenciais, o que representa uma economia muito grande de trabalho no alinhamento entre as estações dos interlocutores. Os resultados obtidos neste regime de feixes intensos não devem ser alterados com a reprodução deste experimento no regime quântico de fotcontagem, onde a segurança é garantida.

5 *Perspectivas de estudo do Momento Angular Orbital no Oscilador Paramétrico Ótico*

A construção de um Oscilador Paramétrico Ótico, para o estudo de propriedades quânticas de feixes intensos, está sendo realizada nestes últimos meses de doutorado. A montagem do OPO no LOQ-IFUFF representa a retomada de uma segunda linha de pesquisa do laboratório. Inicialmente este dispositivo foi montado sem estabilização eletrônica pelos então alunos Bernardo C. C. dos Santos e José Augusto O. Huguenin. A retomada dessa montagem foi feita com a finalidade de obtenção de um OPO estabilizado eletronicamente que produz feixes gêmeos intensos e com intensidades constantes independentemente das perturbações mecânicas e térmicas às quais o aparato sempre fica sujeito. Isso habilitará o início da realização de experimentos destinados ao estudo do *emaranhamento em variáveis contínuas* na UFF. A proposta é estudar as correlações entre os feixes gêmeos produzidos no OPO bombeado por um modo laguerre-gaussiano de primeira ordem.

Este capítulo está dividido em três seções como segue: na primeira seção é feita uma apresentação do OPO. Na segunda seção, é apresentado o procedimento de estabilização eletrônica do OPO, baseado no método Pound-Drever-Hall. A última seção finaliza o capítulo com a apresentação de uma proposta experimental que utiliza o OPO recém estabilizado para a realização da primeira medida de correlações quânticas em feixes intensos no LOQ-IFUFF.

5.1 Oscilador Paramétrico Óptico

O Oscilador Paramétrico Óptico (OPO) tem atraído muita atenção nos últimos anos devido ao seu grande potencial de utilização em aparatos destinados à Computação e Informação Quântica. Tal dispositivo é uma fonte de feixes intensos baseada na Conversão Paramétrica Descendente (CPD). A CPD consiste na conversão de parte de um feixe luminoso com frequência ω_b em dois feixes com frequências ω_s e ω_c , com os índices b , s e c referindo-se aos feixes *bombeamento*, *sinal* e *complementar*, respectivamente.

Existem dois tipos de CPD: a espontânea e a estimulada. Ambas são ilustradas na Figura 5.1. A CPD espontânea é um fenômeno descrito pela teoria quântica e é caracterizada pela produção de fótons gêmeos emaranhados. Geralmente, esse emaranhamento entre os fótons gêmeos é observado considerando-se a polarização como grau de liberdade[71], todavia, observa-se também essa propriedade considerando-se o MAO [24]. Nos experimentos realizados no regime de fotocontagem, um feixe intenso, linearmente polarizado, bombeia o cristal não-linear (geralmente BBO - Beta Borato de Bário ou LiIO_3 - Iodato de Lítio) ou uma fibra ótica [94], produzindo os fótons gêmeos que satisfazem as relações de casamento de fase

$$\omega_p = \omega_s + \omega_c \quad (5.1)$$

$$\vec{k}_p = \vec{k}_s + \vec{k}_c, \quad (5.2)$$

com ω sendo a frequência e \vec{k} sendo o vetor de onda do fóton.

O casamento de fase pode ser realizado de duas maneiras: tipo I e tipo II. Nestes tipos de casamento, os fótons podem ser linearmente polarizados como ilustrado na Figura 5.2.

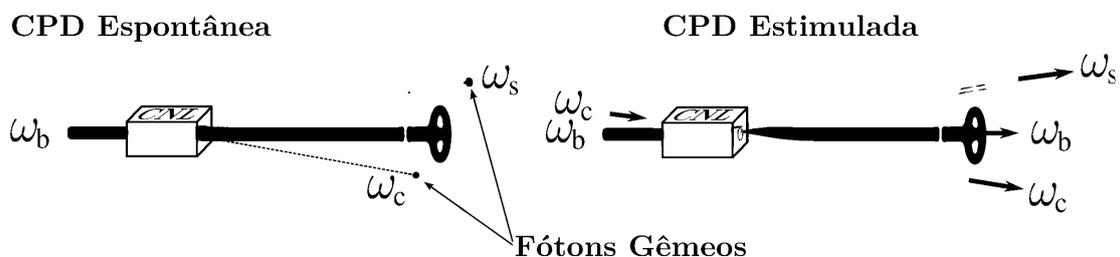
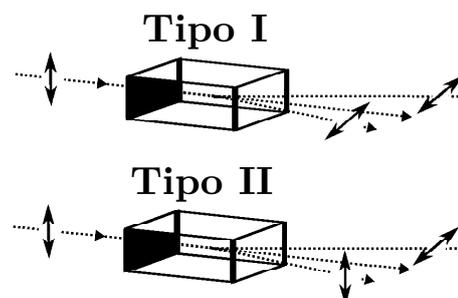


Figura 5.1: Figura colorida na versão online - Conversão Paramétrica Descendente.

Observa-se que os fótons gêmeos podem ser paralela ou ortogonalmente polarizados. No primeiro caso, quando ambos os fótons têm polarizações paralelas, diz-se que ocorreu o casamento tipo-I e no segundo caso, quando são ortogonais, diz-se que ocorreu o casamento tipo-II.

Figura 5.2: *Figura colorida na versão online - Conversão paramétrica descendente. (a) no casamento de fase tipo I, um fóton do feixe de bombeamento é aniquilado para a criação de dois fótons paralelamente polarizados; (b) no casamento de fase tipo II, os dois fótons criados têm polarizações ortogonais entre si.*



Na CPD estimulada um laser auxiliar com frequência ω_s é alinhado de forma a se propagar na direção dos fótons convertidos de mesmo comprimento de onda como ilustrado na Figura 5.1. O laser auxiliar estimula a produção dos fótons convertidos com frequências ω_s ω_c . Esse efeito também é conhecido como Amplificação Paramétrica e pode ser totalmente explicado pela Física Clássica [94, 95]. Neste tipo de experimento, as propriedades de coerência dos feixes convertidos são dependentes da intensidade do laser auxiliar. Os campos sinal e complementar são similares aos feixes coerentes quando o laser auxiliar é muito intenso.

O OPO é um dispositivo baseado na CPD e é formado pela introdução de um cristal não-linear em uma cavidade ótica, como ilustrado na Figura 5.3. Na prática, existem vários tipos de cavidades óticas que podem ser utilizadas para a construção do OPO. Cavidades em anel, lineares (como a ilustrada na Figura 5.3), etc. Cada uma com vantagens e desvantagens que devem ser ponderadas antes da construção do experimento planejado. Maiores detalhes acerca das características das cavidades óticas podem ser encontrados nas referências [96, 97].

O funcionamento do OPO pode ser dividido em dois regimes como se segue: no primeiro regime, o feixe de bombeamento possui intensidade inferior a um valor I_{lim} , denominado limiar de oscilação e não há emissão de feixes coerentes. No segundo regime, a intensidade do feixe de bombeamento é maior que I_{lim} e ocorre a produção dos feixes gêmeos com intensidades proporcionais ao feixe de bombeamento. Uma discussão muito bem elaborada que desenvolve todo o formalismo dinâmico do OPO e retrata sua mon-

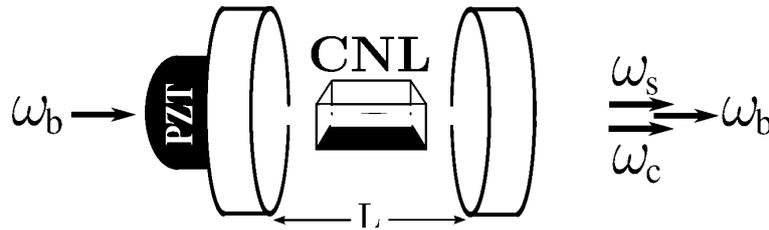


Figura 5.3: *Oscilador Paramétrico Ótico.*

tagem experimental pode ser encontrada na referência [?]. Neste dispositivo, os feixes gêmeos apresentam correlações quânticas disponíveis para experimentos de C&IQ, evidenciadas pela primeira vez por Heidmann *et al* [99]. Basicamente, a assinatura quântica destes feixes é a possibilidade de gerar compressão de ruído nas quadraturas do campo eletromagnético abaixo do ruído balístico.

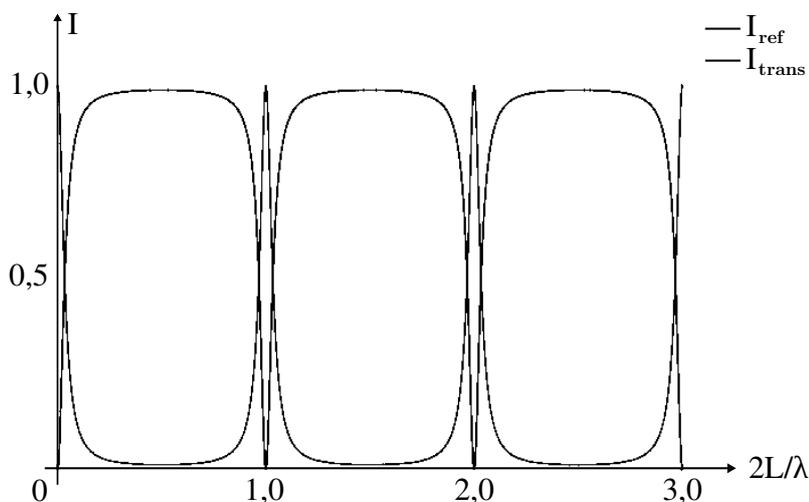
O estudo das propriedades quânticas do OPO requer a estabilização eletrônica da cavidade. Tal procedimento de estabilização foi implementado no LOQ-IFUFF como parte do trabalho de doutoramento e será discutido na próxima seção.

5.2 O Método Pound-Drever-Hall para estabilização de cavidades

O procedimento utilizado para estabilizar a cavidade que compõe o OPO é baseado no tradicional método Pound-Drever-Hall (PDH) [100]. Embora originalmente concebido para a estabilização da frequência de lasers, este método pode ser utilizado para estabilização de cavidades. Antes de partir para a descrição do método em si, vale a pena recapitular algumas características da cavidade Fabry-Perot que compõe o OPO.

Uma cavidade Fabry-Perot é um dispositivo formado pela junção de dois espelhos como esquematizado na Figura 5.3. Essa cavidade funciona como um filtro cuja transmissão depende da relação entre o comprimento de onda (λ) do feixe de bombeamento e a distância (L) entre os espelhos. A condição de ressonância ocorre quando $2L$ é um múltiplo de (λ), resultando em uma transmissão máxima e, conseqüentemente em uma reflexão mínima. O gráfico da Figura 5.4 representa a intensidade dos feixes transmitidos e refletidos em função de $2L/\lambda$.

Figura 5.4: *Figura Colorida na versão online - Cálculo das intensidades dos feixes transmitido e refletido por uma cavidade Fabry-Pérot.*



O esquema de estabilização implementado está ilustrado na Figura 5.5. No aparato experimental, o laser DIABOLO INNOLIGHT disponibiliza um feixe de 532nm de comprimento de onda modulado em fase por um sinal de 12MHz produzido por um Oscilador Local (OL) interno. O sinal de modulação é disponibilizado externamente e utilizado para a estabilização da cavidade. O feixe laser é colimado por um telescópio de lentes esféricas e atravessa um isolador ótico (ISO) que, posteriormente, reflete todo o feixe retornado pela cavidade OPO. O feixe refletido é detectado por um fotodetector que gera um sinal de tensão (V_{ref}) proporcional à intensidade (I_{ref}). Da mesma forma, O feixe transmitido é detectado por outro fotodetector que gera o sinal de tensão V_{trans} proporcional à intensidade I_{trans} . Este sinal de tensão é combinado no Demodulador com sinal do OL produzindo um outro sinal direcionado ao circuito de realimentação (CR) que produz um sinal de erro (ϵ) que atua na fonte do PZT¹ alterando a distância L de forma a manter a cavidade em ressonância.

Em condições normais de operação, o sistema de estabilização deve atuar (aumentando ou reduzindo L) para trazer a cavidade para a ressonância. Isso não poderia ser determinado apenas pela medida da intensidade refletida em torno de um pico, pois um mesmo aumento em V_{ref} não diz se o sistema se encontra acima ou abaixo da ressonância, como ilustrado no diagrama da Figura 5.6. Quando o sistema está acima da ressonância, um aumento na frequência do laser implica em um aumento de V_{ref} . Abaixo da ressonân-

¹Cerâmica vendida comercialmente que responde com variações em suas dimensões às variações de tensão elétrica aplicada sobre ela. No aparato ela é fixada ao espelho e sujeita à tensão elétrica aplicada pela fonte.

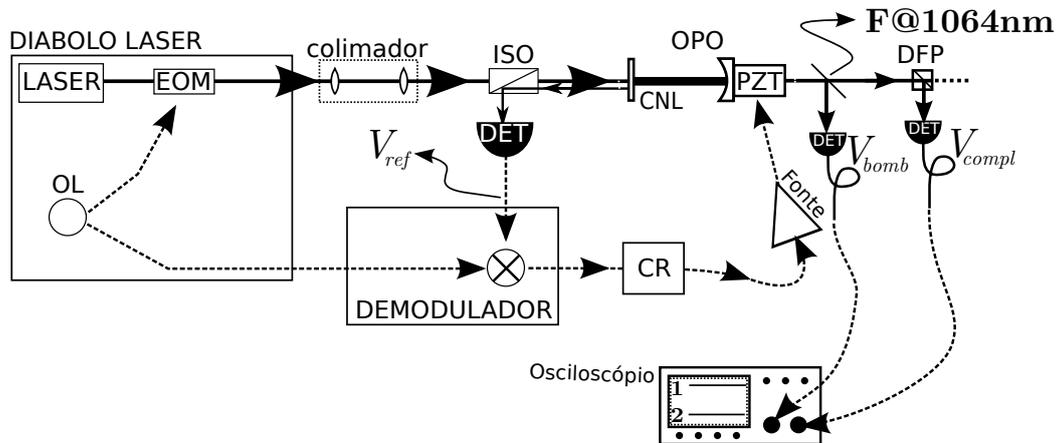
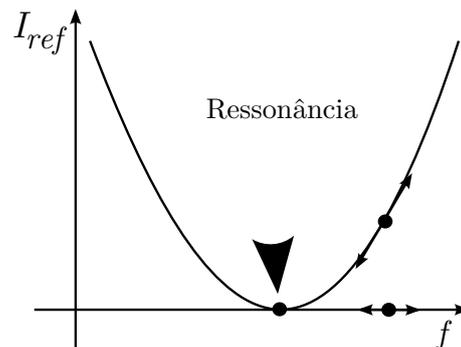


Figura 5.5: *Esquema experimental de estabilização da cavidade. Nesse esquema, as linhas contínuas indicam o caminho óptico dos feixes e as linhas tracejadas indicam os cabos utilizados para transmissão das tensões elétricas.*

cia, um aumento na frequência do laser leva a uma redução de V_{ref} . Portanto, a direção de atuação do PZT deve levar em conta a derivada da intensidade refletida. Essa derivada pode ser obtida por meio da modulação da frequência do laser incidente que ao ser refletido pela cavidade pode estar em fase com a modulação se a cavidade estiver acima da ressonância, ou defasada de 180° se a cavidade estiver abaixo da ressonância. Na ressonância, não há variação da intensidade e conseqüentemente a derivada é nula. Com

Figura 5.6: *Diagrama representando a intensidade do feixe refletido pela cavidade próxima à ressonância em função da frequência. Pode-se determinar se a cavidade está acima ou abaixo da ressonância variando a frequência do laser.*



efeito, o demodulador em conjunto com o circuito de realimentação produz o sinal ϵ proporcional à derivada conforme desejado.

Embora a discussão anterior tenha sido feita no domínio da frequência, a mesma análise pode ser feita considerando-se variações no comprimento L . Interrompendo a ligação do sinal de erro proveniente do circuito de realimentação, esse aspecto pôde ser

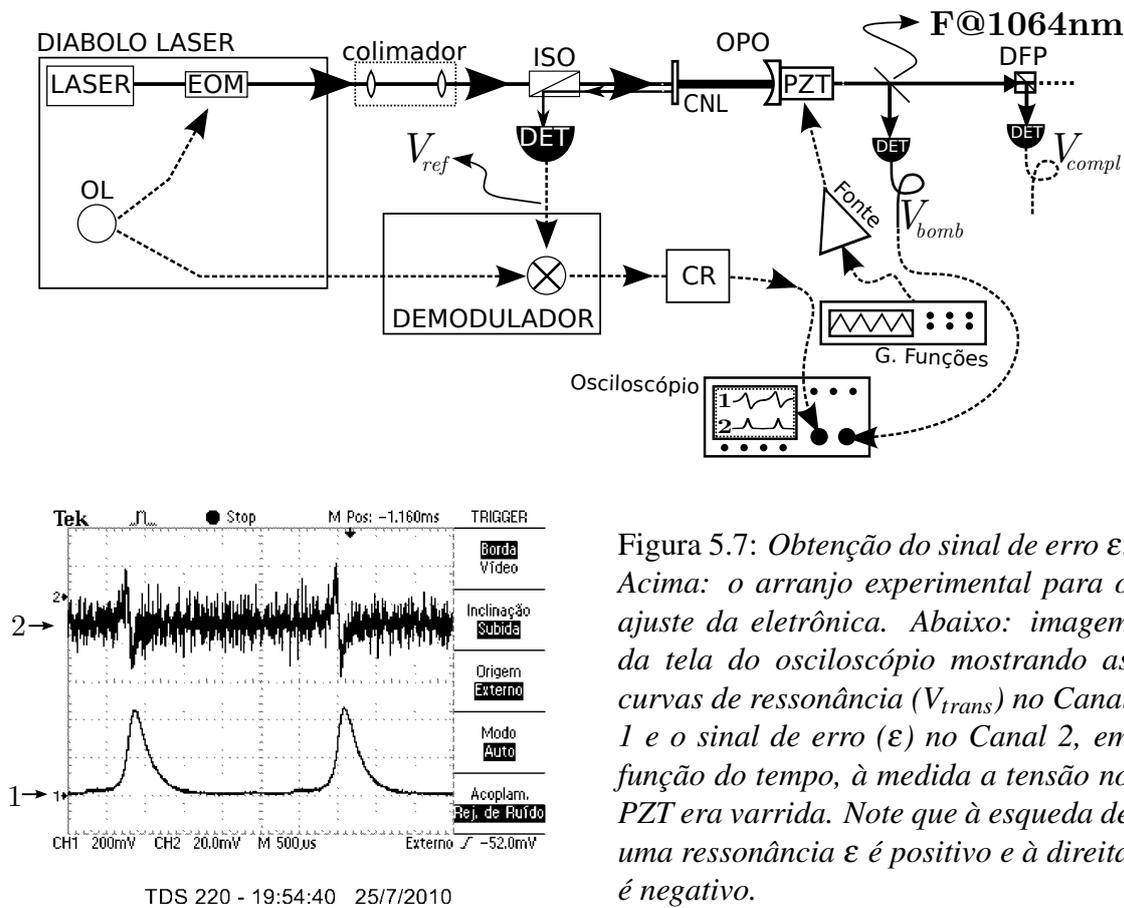


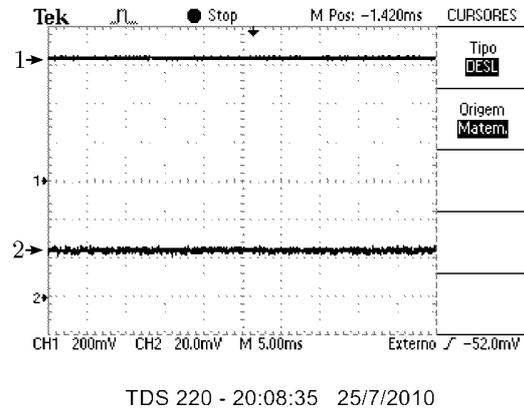
Figura 5.7: Obtenção do sinal de erro ϵ . Acima: o arranjo experimental para o ajuste da eletrônica. Abaixo: imagem da tela do osciloscópio mostrando as curvas de ressonância (V_{trans}) no Canal 1 e o sinal de erro (ϵ) no Canal 2, em função do tempo, à medida a tensão no PZT era varrida. Note que à esquerda de uma ressonância ϵ é positivo e à direita é negativo.

testado experimentalmente, varrendo-se a cavidade com a aplicação de um sinal externo tipo rampa no PZT como ilustrado na Figura 5.7. Nesta figura, a imagem da tela do osciloscópio mostra simultaneamente os sinais ϵ e V_{trans} .

Na prática, o teste do sinal de erro (ilustrado na Figura 5.7) é a primeira etapa a ser realizada no procedimento de estabilização. Uma vez testado, desliga-se o sinal tipo rampa e aciona-se o mecanismo próximo a um ponto de ressonância por meio de um ajuste manual na voltagem do PZT. A cavidade entra em ressonância transmitindo um feixe com intensidade constante, como pode ser observado no Canal-1 da tela do osciloscópio mostrada na Figura 5.8. Com isso obtém-se uma cavidade estabilizada. A descrição quantitativa do método de estabilização PDH pode ser encontrada na referência [100].

Além da estabilização mecânica baseada no método PDH descrito acima, há também a necessidade de uma estabilização eletrônica da temperatura do cristal. Para tal, aproveitou-se o sistema de um antigo laser de diodo não utilizado atualmente. Novos

Figura 5.8: *Intensidades dos feixes bombeamento e complementar com o OPO estabilizado. No Canal 1 é mostrada a intensidade do feixe bombeamento transmitido pela cavidade, no Canal 2 é mostrada a intensidade do feixe complementar (com $\lambda=1064\text{nm}$) separado do bombeio por meio de um filtro como ilustrado na Figura 5.5.*



elementos atuadores Peltier² e termistor foram fixados no suporte do cristal. Com isso, foi obtido um sistema que controla a temperatura do CNL com precisão de 0,01K. As intensidades dos feixes bombeamento e complementar após as estabilizações térmicas e mecânicas também são mostradas no Canal-2 da Figura 5.8.

Seguindo a linha de aplicação do MAO da luz em experimentos voltados à C&IQ, na próxima seção será apresentada a proposta experimental de medidas de correlações quânticas que está sendo implementada atualmente.

5.3 Transferência do momento angular orbital na oscilação paramétrica

De forma a inaugurar no IF-UFF a linha de medidas das correlações quânticas em feixes intensos, pretende-se realizar as primeiras medidas de emaranhamento em variáveis contínuas no OPO recém estabilizado. Para isso, será montado o experimento, esquematizado na Figura 5.9, que utiliza um OPO bombeado por um feixe Laguerre-Gaussiano de primeira ordem. A proposta é verificar uma taxa de ruído no sinal referente à subtração dos sinais de fotocorrente I_s e I_c abaixo da taxa de ruído balístico. I_s e I_c são sinais gerados pela detecção dos feixes sinal e complementar, respectivamente. A proposta trata de uma síntese entre os trabalhos [101, 102] que tratam de um estudo realizado em OPOs bombeados com feixes que carregam MAO e o trabalho de Heidmann *et al* que mediu

²Dispositivo vendido comercialmente que produz um gradiente de temperatura quando submetido a uma diferença de tensão elétrica.

originalmente correlações quânticas em feixes gêmeos pelo procedimento de Detecção Balanceada [99].

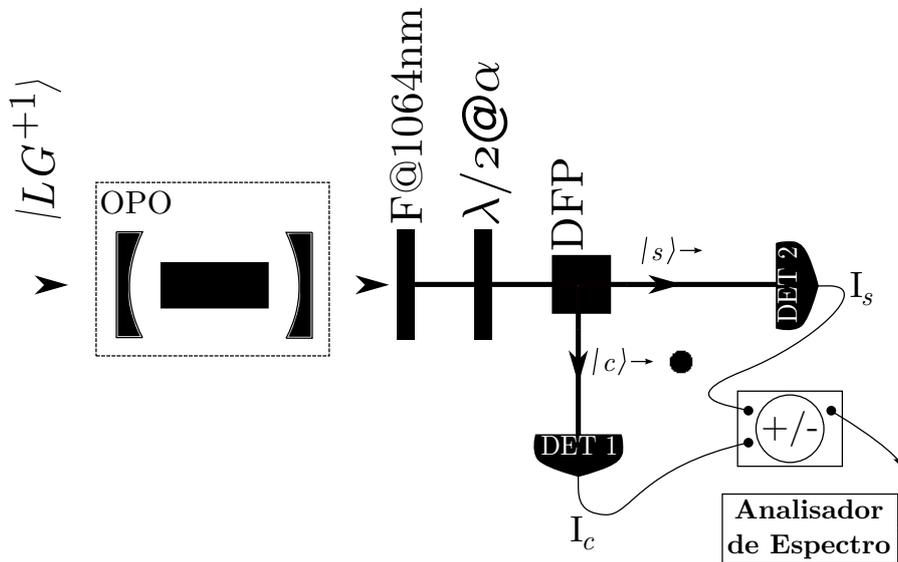


Figura 5.9: *Figura Colorida na versão online - Esquema experimental de Detecção Balanceada para a medida de correlações quânticas entre os feixes gêmeos produzidos no OPO bombeado com um modo LG, portador de MAO.*

Na implementação da proposta, um experimento de detecção balanceada, como o ilustrado na Figura 5.9, é usado para a calibração do ruído balístico e é a primeira etapa a ser realizada. Isso é feito por meio do ajuste do ângulo α da lâmina de meia onda ($\lambda/2@\alpha$). A rigor, roda-se a polarização dos feixes sinal e complementar de forma a fazer o DFP transmitir metade da intensidade de cada par dos feixes gêmeos, a serem detectados pelo Det-2. A outra metade dos feixes é refletida e detectada por Det-1. A subtração dessas intensidades caracteriza o ruído balístico. Conceitualmente, o ruído balístico é caracterizado com a obtenção de um ruído na subtração das intensidades das fotocorrentes referentes a dois feixes coerentes. Na proposta em questão, a lâmina calibra o ruído balístico quando $\alpha=22,5^\circ$. Neste caso, o ruído medido caracteriza o ruído balístico. Quando $\alpha=0^\circ$, os feixes gêmeos são separados pelo DFP. A obtenção de um ruído com $\alpha=0^\circ$ menor que o ruído com $\alpha=22,5^\circ$ em tal subtração configura a assinatura quântica do experimento.

Pretende-se, ainda, fazer uma análise mais detalhada acerca das correlações que po-

dem ser observadas entre os feixes gêmeos. Essa análise será feita, como ilustrado na Figura 5.10, após uma decomposição do feixe complementar em um interferômetro que separa modos LG em componentes Hermite-gaussianas [104].

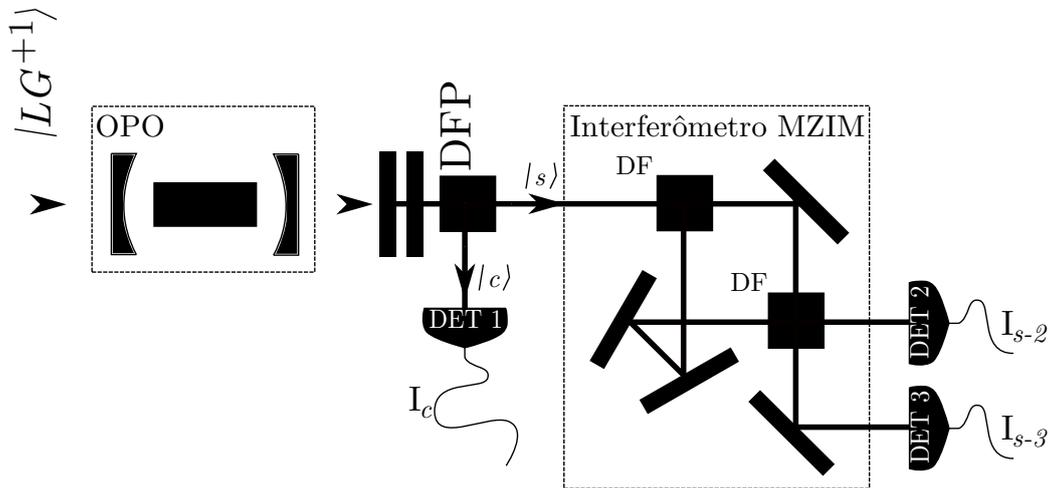


Figura 5.10: *Figura Colorida na versão online - Esquema experimental para a medida de correlações quânticas entre as componentes do feixe sinal.*

Mais especificamente, essa segunda parte da proposta prevê a obtenção da medida de ruído, abaixo do ruído balístico, na subtração I_{s-} ($I_{c-2}+I_{c-3}$) e a investigação das correlações triplas entre os sinais detectados.

Recentemente duas propostas de experimentos com potencial aplicação à informação quântica foram feitas pelo Grupo de Óptica e Informação Quântica da UFF. A primeira proposta [103], considera um OPO sendo bombeado por um feixe de bombeamento gaussiano HG_{00} e injetado com um feixe com MAO, pouco intenso, que estimula uma transformação cíclica nos modos espaciais dos feixes gêmeos. Outra proposta [105], mais recente, prevê a existência de hiperemaranhamento utilizando a polarização e o modo transversal da luz como graus de liberdade.

A partir da estabilização do OPO feita durante o período de doutoramento, o LOQ-IFUFF fica, então, habilitado a implementar técnicas mais atuais de medidas dos ruídos de quadraturas, como a detecção homodina [106] e a auto-homodinação [107], e a explorar as inúmeras possibilidades de estudo do emaranhamento em variáveis contínuas aplicadas à Computação e Informação Quântica.

6 *Conclusões e Perspectivas*

Apresenta-se um estudo detalhado acerca do momento angular orbital (MAO) da luz como resultado de um projeto que visa caracterizar esta propriedade para fins de implementação de protocolos de Computação e Informação Quântica (C&IQ). Com o objetivo inicial de dar continuidade à construção de um Oscilador Paramétrico Ótico, para medidas de correlações quânticas entre feixes gêmeos portadores de MAO, foram construídas máscaras de fase com eficiência de aproximadamente 20%, que convertem feixes típicos de lasers comerciais (modo TEM₀₀) de até 400mW em vórtices óticos. Essas máscaras se baseiam na tecnologia já existente das máscaras de amplitude, que possuem tipicamente eficiência em torno de 5%. Foram produzidos vários tipos de máscaras para gerar modos Laguerre-Gaussianos (LG) e Hermite-Gaussianos (HG) de até terceira ordem, utilizados em todos os experimentos da tese. Essas máscaras representam um aporte ao laboratório para realização de outros experimentos que utilizam os modos transversos como grau de liberdade.

O estudo da aplicação do MAO da luz à C&IQ nesta tese é dividido em duas partes. A primeira consiste em um estudo mais conceitual onde o MAO é utilizado para a primeira observação da fase topológica associada a estados maximamente emaranhados de dois q-bits. A fase topológica tem atraído muita atenção nos últimos tempos devido à sua potencial aplicação à realização de C&IQ robusta. Foi feito um experimento em ambos os regimes, clássico e quântico, que demonstrou a existência de uma diferença de fase de π de natureza topológica. Foi proposto e também observado experimentalmente um critério que associa a natureza topológica da fase à visibilidade de um padrão de interferência.

A segunda parte é genuinamente aplicada. Associando-se a polarização e os modos transversos de forma a simular estados quânticos de dois q-bits, foram concebidos aparatos úteis à C&IQ. Foi realizado um experimento alternativo para implementar o pro-

protocolo BB84 de criptografia quântica. Neste experimento, o problema do alinhamento transversal entre os referenciais dos interlocutores “Alice” e “Bob”, que pode colocar em risco o protocolo, foi superado definindo-se um *estado lógico* por meio da polarização e do modo transversal. Uma porta quântica lógica Não-Controlado (CNOT) foi proposta e implementada experimentalmente, bem como um seletor de modos transversos que separa os modos espaciais de acordo com sua paridade. Esses dois dispositivos foram baseados no Conversor de Modos de Lente Única - uma versão do tradicional conversor de modos de lentes cilíndricas. O conversor proposto foi implementado e testado na conversão de vários modos produzidos pelas máscaras de fase. Foi ainda efetuada uma estimativa da fidelidade de tal conversor por meio da utilização de um interferômetro de Fabry-Perot.

O trabalho foi completado com a montagem e estabilização eletrônica do Oscilador Paramétrico Ótico para realização das medidas das correlações quânticas nos feixes gêmeos em um aparato de Detecção Balanceada. Como perspectiva futura, prevê-se ainda a implementação de um Amplificador Paramétrico Ótico com MAO [103] e de uma medida de hiperemaranhamento [105], ambos recentemente propostos pelo grupo de Ótica Quântica da UFF.

Finalmente, espera-se que os conceitos investigados nesta tese sirvam de embasamento para a pesquisa de pós-doutorado, que consistirá na construção de uma memória quântica com íons aprisionados, a ser realizado no Laboratoire Matériaux et Phénomènes Quantiques em Paris, com supervisão do Prof. Dr. Thomas Coudreau.

Apêndice 1- A propagação do feixe paraxial no conversor astigmático

Esta seção propõe-se a apresentar uma discussão formal acerca da propagação de um feixe paraxial através do conversor astigmático ilustrado na figura 1.7. Tal apresentação seguirá os resultados obtidos na referência [8].

A transformação realizada no feixe paraxial por um conversor de modos é descrita em termos das defasagens que as componentes HG de um modo sofrem quando o modo em questão atravessa o arranjo. Por simplicidade nos cálculos, todos os feixes que atravessam o conversor são decompostos em termos das componentes HG orientadas paralela e perpendicularmente à direção de orientação do conversor. Conseqüentemente, se a defasagem entre as componentes de um dado modo, como por exemplo o $HG_{10}^{45^\circ}$ ilustrado na figura 1.7, for de $\pi/2$, o modo convertido será um modo Laguerre-gaussiano. Essa defasagem pode ser controlada experimentalmente e define a nomenclatura do conversor, como explicado na seção . Os parâmetros físicos responsáveis pela defasagem são: a distância focal f das lentes cilíndricas e a distância d entre elas.

Com a finalidade de determinação desses parâmetros para a construção de conversores que transformem modos HG em LG e vice-versa, o caso da conversão de um modo HG_{10}^{45} será analisado detalhadamente. Esse caso é bem interessante pois serve para abordar tanto o caso especial das conversões LG-HG supracitadas, como para a descrição da conversão de um feixe qualquer, visto que os modos HG formam uma base no conjunto de soluções e qualquer feixe poder ser decomposto nesta base.

O feixe paraxial possui um termo de fase de Gouy (1.29) que depende da divergência. Se o feixe em questão, for um modo HG que passou por uma lente cilíndrica como ilustrado na figura 6.1, a fase de Gouy poderá ser escrita como:

$$\phi_{nm} = (m + 1/2) \arctan(z/z_{Rx}) + (n + 1/2) \arctan(z/z_{Ry}), \quad (6.1)$$

onde $z_{RX(Y)}$ é o parâmetro de Rayleigh na direção $x(y)$. Quando o feixe é isotrópico, os parâmetros de Rayleigh são iguais e a equação 1.29 é obtida.

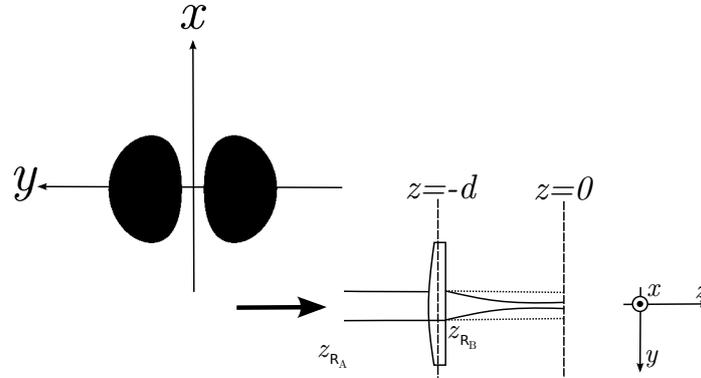


Figura 6.1: Um modo HG_{01} inicialmente isotrópico passa por uma lente cilíndrica e é focalizado em $z = 0$. As trajetórias tracejadas entre a lente e o plano $z = 0$ representam $\omega_Y(z)$ e as contínuas representam $\omega_X(z)$.

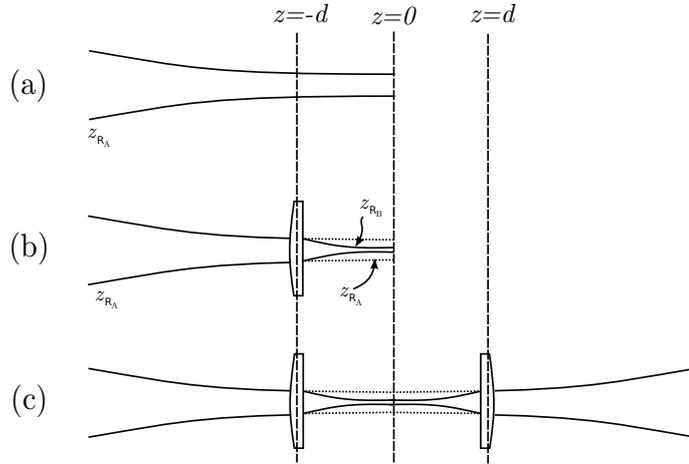
Se uma segunda lente cilíndrica for colocada formando um conversor numa posição tal que os raios de curvatura R_X e R_Y sejam ajustados novamente, o feixe voltará a ser isotrópico com o mesmo z_{RA} . Este procedimento de ajuste dos raios de curvatura é chamado de *casamento de modos* e é ilustrado na figura 6.2 para o caso em que as lentes são idênticas. Na letra (a) é ilustrada a focalização em $z = 0$ de um feixe isotrópico com divergência dada por z_{RA} . Em (b) uma lente cilíndrica faz a cintura (ainda em $z = 0$) ser astigmática. Em (c) uma outra lente cilíndrica é posicionada onde os feixes possuem novamente o mesmo raio de curvatura formando o conversor e desfazendo o astigmatismo. Neste caso onde as lentes são idênticas, a distância vale $2d$. Quando o casamento de modos é perfeito, o feixe é astigmático somente na região entre as lentes.

O feixe incidente é isotrópico e possui uma largura transversal fixa nas posições das lentes cilíndricas, assim, de acordo com a equação 1.13:

$$\frac{z_{RX}^2 + d^2}{z_{RX}} = \frac{z_{RY}^2 + d^2}{z_{RY}}. \quad (6.2)$$

Para que o feixe seja astigmático apenas entre as lentes cilíndricas, a condição de *casamento de modos* deve ser satisfeita. Para isso, a distância focal f da lente cilíndrica

Figura 6.2: O casamento de modos. Em (a) um feixe com divergência z_{RA} tem a cintura posicionada em $z = 0$; em (b) uma lente cilíndrica torna o feixe astigmático; em (c) uma segunda lente corrige o astigmatismo.



deve satisfazer [39] a equação:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{R_X(d)} - \frac{1}{R_Y(d)} = \frac{d}{Z_{RX}^2 + d^2} - \frac{d}{Z_{RY}^2 + d^2} \quad (6.3)$$

com $R_{X(Y)}$ sendo dado pela Equação 1.12. Nesta situação, o raio de curvatura da frente de onda é infinito em $z = 0$ e o feixe é astigmático somente entre as lentes.

As Equações 6.2 e 6.3 podem ser manipuladas com a finalidade de se obter:

$$Z_{RX} = dp \quad (6.4)$$

$$Z_{RY} = d/p \quad (6.5)$$

com $p = \sqrt{\frac{1-d/f}{1+d/f}}$.

Com isso, pode contabilizar a mudança na fase de Gouy que o modo HG (orientado como indicado na Figura 6.1) adquire ao atravessar o conversor. De acordo com a Equação 6.1, a variação de fase do modo HG_{mn} é

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{mn} &= \phi_{mn}(d) - \phi_{mn}(-d) \\ &= (n+m+1)(\Delta\phi_X + \Delta\phi_Y)/2 + (m-n)(\Delta\phi_X - \Delta\phi_Y)/2, \end{aligned} \quad (6.6)$$

com $\Delta\phi_{X(Y)} = \phi_{X(Y)}(d) - \phi_{X(Y)}(-d) = 2\arctan(d/z_{RX(Y)})$.

Considerando agora um caso mais geral, ilustrado na Figura 6.3 (para $N=1$), onde o feixe paraxial HG de ordem N orientado a 45° atravessa o conversor orientado na horizontal. Tal modo pode ser expandido de acordo com a expressão 1.27 em componentes HG

de mesma ordem e orientadas de acordo com a orientação do conversor, isto é, em termos de modos orientados paralela ou ortogonalmente ao conversor. Neste caso, a variação de fase nos termos sucessivos da decomposição 1.27 é:

$$\begin{aligned}\Delta\phi_{N-k-1,k+1} - \Delta\phi_{N-k,k} &= 2 \left[\arctan\left(\frac{d}{z_{Rx}}\right) - \arctan\left(\frac{d}{z_{Ry}}\right) \right] \\ &= 2 \left[\arctan\left(\frac{1}{p}\right) - \arctan(p) \right].\end{aligned}\quad (6.7)$$

A diferença de fase é, portanto, determinada pelo parâmetro p e está limitada ao intervalo $[0, \pi]$.

No conversor $\pi/2$, o sistema introduz um fator i^k na frente de cada termo da Equação 1.27, de forma que o modo HG seja convertido em um modo LG de mesma ordem. A condição $\Delta\phi_{N-k,k} = k\pi/2$ é satisfeita se $p = -1 + \sqrt{2}$, que implica em

$$d = f/\sqrt{2}.\quad (6.8)$$

O funcionamento do conversor requer o casamento de modos que implica na necessidade do feixe de entrada possuir uma divergência dada por:

$$z_R = f + d = (1 + 1/\sqrt{2})f.\quad (6.9)$$

O casamento de modos é realizado experimentalmente com a introdução de um par de lentes esféricas como é esquematizado na Figura 1.8.

Se $\phi = \pi$, tem-se o "conversor π " ($C(\pi)$) que implica em $p = 0$, e portanto:

$$d = f; \quad z_{RX}/f = 0; \quad z_{Ry}/f = \infty,\quad (6.10)$$

que corresponde à configuração confocal das lentes cilíndricas com o feixe de entrada sendo colimado como também ilustrado na Figura 1.8.

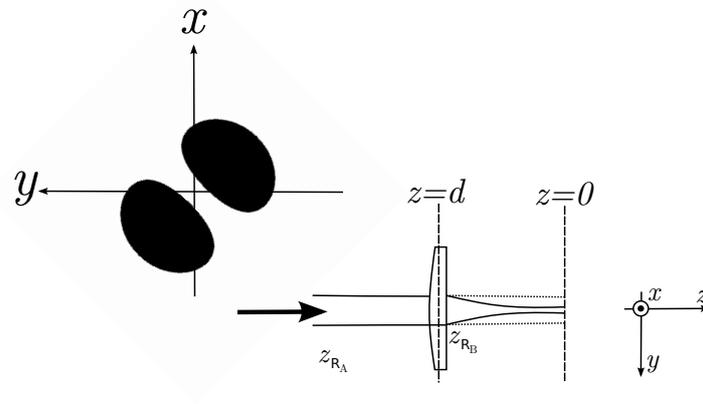


Figura 6.3: Um modo $HG_{01}^{+45^\circ}$ inicialmente isotrópico passa por uma lente cilíndrica e é focalizado em $z = 0$. As trajetórias tracejadas entre a lente e o plano $z = 0$ representam $\omega_Y(z)$ e as contínuas representam $\omega_X(z)$.

Apêndice 1- Cálculo do padrão de difração da Máscara

Comandos a serem digitados no Programa comercial MATHEMATICA[®] para obtenção da máscara:

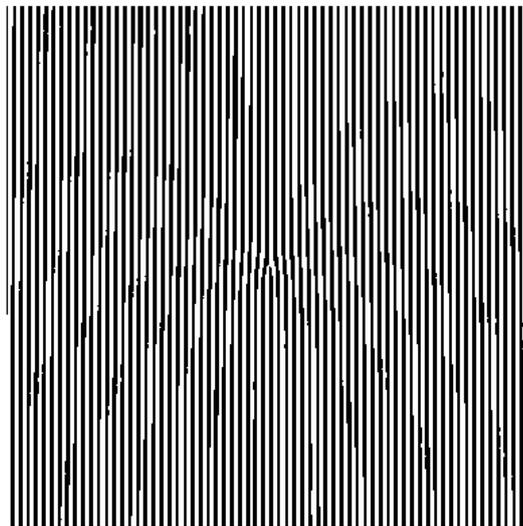
- MÁSC-LG

```

phi[x_, y_, alpha_, l_] = Exp[I * (alpha * x + l * Arg[x + I * y] + 2 * pi / 2)]
(* ... *)

DensityPlot[0.25 * Abs[phi[x, y, 35, 1] + 1]^2, {x, -6, 6},
  {y, -6, 6}, Mesh -> False, PlotPoints -> 1000, Frame -> False]
DensityPlot[0.25 * Abs[phi[x, y, 35, 2] + 1]^2, {x, -6, 6},
  {y, -6, 6}, Mesh -> False, PlotPoints -> 1000, Frame -> False]

```



```

(* ... *) - SemelhanteGraphics -

```

- MÁSC-HG

```
DensityPlot[Abs[ψ[x, y, 45, 1]], {x, -2, 2},  
{y, -2, 2}, Mesh→False, PlotPoints→{1000, 2}, Frame→False
```

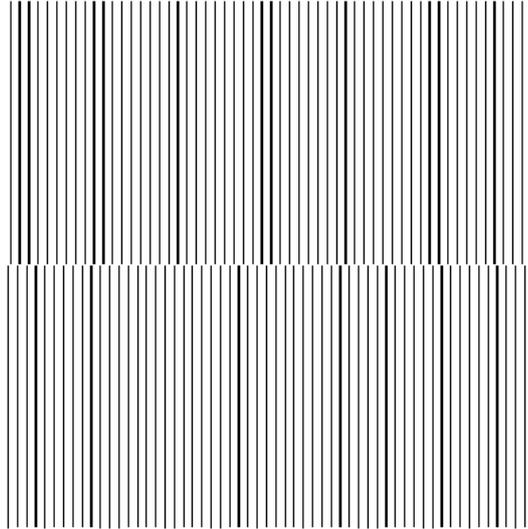


Figure 17.7 - DensityPlot[...]

Referências Bibliográficas

- [1] J. C. Maxwell, *A treatise on Electricity and Magnetism*, 2 Vols. (Oxford, 1873).
- [2] Max Born e Emil Wolf, *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation Interference and Diffraction of light*, 6ed. Pergamon Press (1985).
- [3] D. Griffiths, *Introduction to Electrodynamics*, 3ed. Prentice-Hall (1999).
- [4] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3ed. John-Wiley&Sons, Inc (1998).
- [5] Richard A. Beth, *Mechanical Detection and Measurement of the Angular Momentum of Light*, *Physical Review* **50**. 115 (1936).
- [6] H. M. Nussenzveig, *Curso de Física Básica: 1-Mecânica*, 3ed. Edgard Blücher LTDA (1981).
- [7] L. Allen, et al. *Orbital angular momentum of light and the transformation of laguerre-gaussian laser modes*, *Phys. Rev. A* **50**. 115 (1992).
- [8] M. W. Beijersbergen et al. *Astigmatic laser mode converters and transfer of Orbital Angular Momentum*, *Opt. Commun.* **93** 123 (1993).
- [9] N. B. Simpson, et al. *Mechanical equivalence of spin and orbital angular momentum of light: an optical spanner*, *Opt. Lett.* **22**. No 1 (1997).
- [10] Jonathan Leach, et al. *Measuring the orbital angular momentum of a single photon*, *Phys. Rev. Lett.* **88**. 257901 (2002).
- [11] Haiqing Wei, et al. *Simplified measurement of the orbital angular momentum of single photons*, *Opt. Commun.* **223**. 117-122 (2003).
- [12] M. Planck, *Verh. Deutsch Phys. Ges.* **2**. 202 (1900) e M. Planck, *Ann. d. Phys.* **4**. 553 (1901).
- [13] A. Einstein, *Ann. d. Phys.* **17**. 132 (1905) e A. Einstein, *Ann. d. Phys.* **20**. 199 (1906).
- [14] A. H. Compton, *A Quantum Theory of the Scattering of X-rays by Light Elements*, *Phys. Rev.* **21** 483 (1923).

- [15] A. H. Compton, *A Quantum Theory of the Scattering of X-rays by Light Elements*, Phys. Rev. **21** 483 (1923).
- [16] M.S. Dresselhaus, et al. *Raman Spectroscopy of Carbon Nanotubes*, Phys. Reports. **409** 2 47-99 (2005).
- [17] M. A. Nielsen e I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge (2000).
- [18] Disponível em: http://pt.wikipedia.org/wiki/Lei_de_Moore em 29/12/09.
- [19] I. S. Oliveira, *FÍSICA MODERNA PARA INICIADOS, INTERESSADOS E AFICIONADOS*, Livraria da Física (2005).
- [20] E. Galvão, *O que é Computação Quântica?*, ed Vieira & Lent (2007).
- [21] P. M. Platzman e M. I. Dykman, *Quantum Computing with Electrons Floating on Liquid Helium*, Science **284** 5422 1967 (1999).
- [22] B. E. Kane, *A silicon-based nuclear spin quantum computer*, Nature **393** 133 (1998).
- [23] J. I. Cirac e P. Zoller, *Quantum Computations with Cold Trapped Ions*, Phys. Rev. Lett. **74** 4091 (1995).
- [24] A. Mair, et al. *Entanglement of the Orbital Angular Momentum States of Photons*, Nature **412** 313 (2001).
- [25] G. Molina-Terriza, et al. *Twisted Photons*, Nature **3** 305 (2007).
- [26]
- [27]
- [28]
- [29] C. E. R. Souza, *Fases geométricas na produção de vórtices ópticos*, dissertação de mestrado, Inst. de Física UFF, (2006).
- [30] A. E. Siegman, *Lasers*, Univ. Sci. Books, Mill Valley, (1986).
- [31] E. Butkov, *Física Matemática*, ed LTC, (1988).
- [32] D. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*, 3ed. Prentice-Hall (1999).
- [33] Cohen Tanonudg, *MQ*, JohnWilley&Sons 3ed. (1977).

- [34] G. Molina-Terriza, J. P. Torres and L. Torner. *Twisted photons*, Nature **3**, 305-310 (2007).
- [35] M. Fiorentino, et al. *Deterministic controlled-NOT gate for single-photon two-qubit quantum logic*, Phys. Rev. Lett. **93**, 070502 (2004).
- [36] M. Fiorentino et al. *Single-photon two-qubit SWAP gate for entanglement manipulation*, Phys. Rev. A **72**, 012318 (2005).
- [37] M. Lassen et al. *Continuous Variable Entanglement and Squeezing of Orbital Angular Momentum States*, Phys. Rev. Lett. **102**, 163602 (2009).
- [38] Hoi-Kwong Lo e Norbert Lütkenhaus, *Quantum Cryptography: from Theory to Practice*, arXiv:quant-ph/0702202 (2007).
- [39] A. Yariv, *Quantum Electronics*, John Wiley & Sons, 3ed (1988).
- [40] D. V. Petrov, et al. *A simple method to generate optical beams with a screw phase dislocation*, Opt. Commun. **143**. 265-267 (1997).
- [41] M. J. Padgett e J. Courtial, *Poincaré-sphere equivalent for light beams containing orbital angular momentum*, Opt. Lett. **24** 7 430 (1999).
- [42] Galvez, et al. *Geometric Phase Associated with Mode Transformations of Optical Beams Bearing Orbital Angular Momentum*, Phys. Rev. Lett. **90**. 203901 (2003).
- [43] E. Hecht, *Optics*, Addison Wesley (2002).
- [44] M. Padgett e L. Allen, *Light with a twist in its tail*, Contemp. Phys. **41** No. 5 275 (1999).
- [45] G. F. Brand, *Phase singularities in beams*, Am. J. Phys. **67** No. 1 55 (1999).
- [46] N. R. Heckenberg et al. *Generation of optical phase singularities by computer-generated holograms*, Opt. Lett. **17** No. 3 221 (1999).
- [47] José Augusto O. Huguenin, *Correlações espaciais e temporais na amplificação e oscilação paramétrica*, Tese de Doutorado, Inst. de Física UFF, (2005).
- [48] Bernardo C. Camilo dos Santos, *Dinâmica e Ruído Quântico em Osciladores Paramétricos Óticos com Momento Angular Orbital*, Tese de Doutorado, Inst. de Física UFF, (2008) .
- [49] L. Marrucci, et al. *Optical Spin-Orbital Angular Momentum Conversion in Inhomogeneous Anisotropic Media*, Phys. Rev. Lett. **96**. 163905 (2006).
- [50] J. A. Jones, et al. *Geometric quantum computation using nuclear magnetic resonance*, Nature **403**, 869 (2000).

- [51] L.-M. Duan, et al. *Geometric Manipulation of Trapped Ions for Quantum Computation*, Science **292** No5522 1695 (2001).
- [52] S. Pancharatnam. *Generalized theory of interference, and its applications*, Proc. Indian Acad. Sci. A **44**, 247 (1956).
- [53] M. V. Berry. *Quantal phase factors accompanying adiabatic changes*, Proc. R. Soc. Lond. A Math. Phys. Sci. **392**, 45 (1984).
- [54] D. Clarke. *Interference effects in Pancharatnam wave plates*, Jour. of Opt. A: Pure Appl. Opt. **6**, 11, 1047 (2004).
- [55] M. V. Berry. *The adiabatic phase and Pancharatnam's phase for polarized light*, Jour. of Mod. Opt. **34**, 11, 1401 (1987).
- [56] J. Anandan, et al. *Geometric phases in Physics*, Am. J. Phys. **65**, 3, 180 (1997).
- [57] L. Mandel e E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*, Cambridge (1995).
- [58] Y. Aharonov e D. Bohm. *Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory*, Phys. Rev. **115**, 485 (1959).
- [59] van Enk. *Geometric phases in Physics*, Opt. Commun. **102**, 59 (1993).
- [60] G. S. Agarwal. *SU[2] structure of the Poincaré sphere for light beams with orbital angular momentum*, J. Opt. Soc. Am. A **16**, 12, 2914 (1999).
- [61] R. Gilmore. *Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications*, NY:Wiley, (1974); republished NY: Dover, (2005).
- [62] P. Milman e R. Mosseri. *Topological phase for entangled two-qubits states*, Phys. Rev. Lett. **90**. 230403 (2003).
- [63] R. Mosseri e R. Dandoloff. *Geometry of entangled states, Bloch spheres and Hopf fibrations*, Phys. Rev. A **34**. 10243 (2001).
- [64] P. Milman. *Phase dynamics of entangled qubits*, Phys. Rev. A **73**. 062118 (2006).
- [65] F. de Zela. *Topological phase for entangled two-qubit states and the representation of the SO[3] group*, J. Opt. B: Quantum Semiclass Opt. **7**. 372 (2005).
- [66] Arno Bohm. *Quantum Mechanics: Foundations and Applications*, Springer-Verlag, New York (1996).
- [67] N. Mukunda e R. Simon. *Quantum Kinematic Approach to the Geometric Phase. I. General Formalism*, Annals of Physics **228**. 205 (1993).
- [68] W. LiMing, et al. *Representation of the SO[3] group by a maximally entangled state*, Phys. Rev. A **69**. 064301 (2004).

- [69] S. Walborn, et al. *Experimental determination of entanglement with a single measurement*, Nature **440**, 1022 (2006).
- [70] Simon Singh, *O livro dos códigos: A ciência do sigilo- do antigo Egito à criptografia quântica*, 7ed. Record (2008).
- [71] Hans-A. Bachor, *A guide to experiments in quantum optics*, Wiley-VCH - Canberra (1998).
- [72] Ferdinand Schmidt-Kale et al. *Realization of the Cirac-Zoller controlled-NOT quantum gate*, Nature **422**, 408 (2003).
- [73] F. Jelezko, et al. *Observation of Coherent Oscillation of a Single Nuclear Spin and Realization of a Two-Qubit Conditional Quantum Gate*, Phys. Rev. Lett. **93**. 130501 (2004).
- [74] J. L. O'Brien et al. *Demonstration of an all-optical quantum controlled-NOT gate*, Nature **426**, 264 (2003).
- [75] Li-Ping Deng, Haibo Wang e Kaige Wang. *Quantum CNOT gates with orbital angular momentum and polarization of single-photon quantum logic*, J. Opt. Soc. Am. B **24**, 9 (2007).
- [76] A. N. de Oliveira, S. P. Walborn e C H Monken. *Implementing the Deutsch algorithm with polarization and transverse spatial modes*, J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt. **7** 288(2005).
- [77] L. Aolita and S. P. Walborn. *Quantum Communication without Alignment using Multiple-Qubit Single-Photon State*, Phys. Rev. Lett. **98**. 100501 (2007).
- [78] G. S. Vernam *Cipher Printing Telegraph Systems for Secret Wire and Radio Telegraphic Communications*, Journal AIEE, 469 (1926),
- [79] C. E. Shannon *Communication Theory of Secrecy Systems*, Bell Syst. Tech **28** 656 (1949).
- [80] R. Rivest, A. Shamir L. Adleman, *A new kind of cipher that would take millions of years to break*, Scien. Americ. **237** 120 (1977).
- [81] C. H. Bennett e G. Brassard *Proceedings IEEE Int. Conf. on Computers, Systems and Signal Processing, Bangalore, India (IEEE, New York)*, p. 175. (1984) e Bennett, C.H., G. Brassard, S. Bredibart, e S. Wiesner, IBM Technical Disclosure Bulletin 26, 4363 (1984).
- [82] V. Scarani et al, *The Security of Practical Quantum Key Distribution*, arXiv 0802.4155v3 (2007).

- [83] A. Peres e P. F. Scudo. *Entangled Quantum States as Direction Indicators*, Phys. Rev. Lett. **86**. 4160 (2001).
- [84] A. Peres e P. F. Scudo. *Transmission of a Cartesian Frame by a Quantum System*, Phys. Rev. Lett. **87**. 167901 (2001).
- [85] G. M. Palma, K. A. Suominen, e A. K. Ekert, *Titulo*, Proc. R. Soc. A 452, 567 (1996).
- [86] M. L. Aolita, *A física do emaranhamento: produção, detecção e aplicações*, Tese de Doutorado IF UFRJ (2008).
- [87] Z. Walton et al. *Quantum Communication without Alignment using Multiple-Qubit Single-Photon State*, Phys. Rev. Lett. **91**. 087901 (2003).
- [88] J. -C. Boileau et al. *Robust Quantum Communication Using a Polarization-Entangled Photon Pair*, Phys. Rev. Lett. **93**. 220501 (2004).
- [89] T. Y. Chen, et al. *Experimental Quantum Communication without a Shared Reference Frame*, Phys. Rev. Lett. **96**. 150504 (2006).
- [90] J. -C. Boileau et al. *Robust Polarization-Based Quantum Key Distribution over a Collective-Noise Channel*, Phys. Rev. Lett. **92**. 017901 (2004).
- [91] A. Cabello *Bell's Theorem without Inequalities and without Alignments*, Phys. Rev. Lett. **91**. 230403 (2007).
- [92] S. D. Bartlett et al. *Classical and Quantum Communication without a Shared Reference Frame*, Phys. Rev. Lett. **91**. 027901 (2007).
- [93] B. Coutinho dos Santos et al. *Quantum analysis of the nondegenerate optical parametric oscillator with injected signal*, Phys. Rev. A **72**. 033820 (2005).
- [94] Robert W. Boyd. *Nonlinear Optics*, Academic Press, New York (2003).
- [95] Yu Wang et al. *Experimental generation of 6dB continuous variable entanglement from a nondegenerate optical parametric amplifier*, Opt. Express. **18** 6149-6155 (2010).
- [96] A. Yariv. *Quantum Electronics*, John Wiley & Sons, 3ed, California (1988).
- [97] Didier Dangoisse et al. *Les lasers : Cours et exercices corrigés*, Dunod, 2ed.
- [98] M. Martinelli, *Compressão de ruído quântico e efeitos transversos em Osciladores Paramétricos Ópticos*, Tese de Doutorado IF USP (2002).
- [99] A. Heidmann et al. *Observation of Quantum Noise Reduction on Twin laser beams*, Phys. Rev. Lett. **59**. 22 2555 (1987).

- [100] E. Black. *An introduction to Pound-Drever-Hall laser frequency stabilization*, Am. J. Phys. **69**. 1 (2001).
- [101] M. Martinelli et al. *OAM exchange in an OPO*, Phys. Rev. A **70**. 013812 (2004).
- [102] B. Coutinho dos Santos et al. *Transfer of OAM in a multimode parametric oscillator*, Opt. Lett. **33**. 23 2803 (2008).
- [103] B. Coutinho dos Santos, C. E. R. Souza, K. Dechoum, and A. Z. Khoury. *Phase conjugation and adiabatic mode conversion in a driven optical parametric oscillator with orbital angular momentum*, Phys. Rev. A **76**. 053821 (2007).
- [104] H. Sasada and M. Okamoto. *Transverse-mode beam splitter of a light beam and its application to quantum cryptography*, Phys. Rev. A **68**. 012323 (2003).
- [105] B. Coutinho dos Santos et al. *Continuous-Variable Hyperentanglement in a Parametric Oscillator with Orbital Angular Momentum*, Phys. Rev. Lett. **100**. 230503 (2009).
- [106] G. Breitenbach et al. *Squeezed Vacuum from a monolithic optical parametric oscillator*, Phys. Rev. Lett. **100**. 230503 (2009).
- [107] A. S. Coelho et al. *Three-Color Entanglement*, Science. **326** 823 (2010).
- [108] Dr. A. Z. Khoury *Notas de aulas do curso de ótica quântica da pós-graduação*, (2006).