

Bernardo Coutinho Camilo dos Santos

**Dinâmica de Vórtices Ópticos em Osciladores Paramétricos
Ópticos**

Dissertação apresentada ao Curso de
Pós-Graduação em Física, como re-
quisito parcial para obtenção do título
de Mestre em Físicas.

Universidade Federal Fluminense

Instituto de Física

Orientador: **Antonio Zelaquett Khoury**

Niteroi - R.J.

Outubro de 2004

Aos meus pais, Severino e Nelma.

"Quando não podemos fazer tudo que se deve,
devemos fazer tudo o que se pode."

Santo Agostinho

Agradeço:

Ao meu orientador Antonio Zelaquett Khoury pela paciência e dedicação em minha escalada científica.

Aos professores, que muito me ensinaram, Roberto Toscano, Kaled Dechoum, Daniel Jonathan, Daniel Rangel, Disney Pomodoro, Paulo Murilo C. de Oliveira, Nivaldo Agostinho Lemos, Murray Kenneth Olsen, Fábio David A. Aarão Reis, Maria Teresa C. dos S. Thomaz.

Ao meu pai, uma das pessoas mais sábias que eu já encontrei em minha vida, e a minha mãe, o "maior coração que já vi", agradeço pelo carinho, amor e dedicação. Ainda não conheci pessoas mais belas.

À minha irmã Andréa e meu cunhado Marcelo pelo apoio e incentivo constantes ao longo desta jornada.

À minha sobrinha Anna Letícia, pela inspiração que somente uma criança é capaz de nos dar.

À Renata Zocatelli, uma pessoa singular, que torna meus dias mais felizes com o seu amor e carinho. Sua espontaneidade também é uma fonte de inspiração.

Ao amigo Marcus Moldes pelas conversas de altíssimo nível dentro e fora do âmbito acadêmico.

Aos amigos José Augusto e Felipe Dimer, que mesmo à distância torcem por mim.

Aos amigos Bernardo Nepomuceno, Carla Carvalho, Christiano Timbó, Claudia da Rocha, Fabio L. Guimaraes, Luciana Rios, Luis Paulo Linares, Sylvania Carvalho e Suenne Rigueti pelos momentos de diversão e descontração.

À Cinthya Chianca e à Klauko Mota pela ajuda providencial com o L^AT_EX.

Ao amigo Eliel pelo exemplo de perseverança, força e alegria.

Às bibliotecárias Ana Maria, Rita de Cássia, Lucia Regina e Kátia Maria, pela atenção e ajuda.

À Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

Resumo

Apresentaremos as principais características de vórtices ópticos com momento angular orbital no regime paraxial, bem como as técnicas de geração e caracterização de tais feixes.

Uma rápida descrição do processo de amplificação paramétrica, no contexto dos osciladores paramétricos ópticos, será feita, seguida pelo estudo da dinâmica de modos espaciais neste dispositivo. Apresentaremos as soluções estacionárias para esta dinâmica, para OPO's com e sem injeção de sinal, incluindo a análise de estabilidade linear das soluções estacionárias.

Mostraremos em seguida a conjugação da fase geométrica do feixe de injeção, em consequência das correlações entre os feixes gerados pelo OPO. Por fim, sugerimos um experimento para a medida deste efeito.

Abstract

We show the main features of optical vortices with orbital angular momentum in the paraxial regime, and how to produce and characterize such beams.

An outline of the parametric amplification process, in the context of an optical parametric oscillator will be done, followed by a study of spatial modes dynamics in such a device. Stationary solutions will be shown for the OPO with and without injected signal in the converted beams, including the linear stability analysis.

We show that there is a phase conjugation of the geometric phase of the injected signal, as a consequence of the correlation between the converted beams. Finally, we will propose an experiment to measure this effect.

Sumário

1	Introdução	1
2	Momento Angular da Luz	8
2.1	Momento Angular da Luz	9
2.2	Óptica Paraxial	11
2.2.1	A Equação Paraxial	13
2.2.2	O Modo Fundamental	17
2.2.3	Os Modos de Hermite-Gauss	22
2.2.4	Os Modos de Laguerre-Gauss	23
2.2.5	A Esfera de Poincaré para Modos Espaciais	27
2.3	Produção e Detecção de Modos Laguerre-Gauss	28
2.3.1	Método Holográfico	29
2.3.2	Conversor de Modos por Astigmatismo	32
2.3.3	Detecção	37
3	Amplificação e Oscilação Paramétrica	39
3.1	Amplificação Paramétrica	40

3.2	Oscilação Paramétrica	44
4	Dinâmicas de Modos Transversos	49
4.1	Dinâmicas dos Modos sem Injeção	50
4.2	Dinâmicas dos modos com Injeção	55
4.2.1	Análise de Estabilidade Linear	64
4.3	Conjugação de Fase Geométrica	66
5	Conclusões	71
A	Solução da Equação Paraxial	73
A.1	Os Modos de Laguerre-Gauss	73
A.2	$\psi_p^l(\vec{r})$ é solução da equação Paraxial?	76
A.2.1	Operadores Radiais	77
A.2.2	Operadores Azimutais	78
A.2.3	Operador Axial	78
A.2.4	A equação Paraxial nas novas variáveis	79
A.2.5	As Parcelas da Equação Paraxial	79
B	Como Gerar as Máscaras	85
B.0.6	A Rotina	85

Lista de Figuras

1.1	<i>(a) Intensidade dos feixes signal (direita) e idler (esquerda). (b) padrão de auto-interferência mostrando a presença (ou não) de singularidade de fase nos feixes.</i>	7
2.1	<i>Em (a) vemos frentes e os vetores de onda de uma onda plana. Em (b) vemos a frente de onda de um modo de Laguerre-Gauss.</i>	10
2.2	<i>Plano focal do feixe Gaussiano [28].</i>	19
2.3	<i>Onda esférica [39].</i>	20
2.4	<i>Perfil de intensidade Gaussiano.</i>	21
2.5	<i>Perfis de intensidade dos modos de Hermite-Gauss. Em (a) vemos o modo fundamental $(n, m) = (0, 0)$, em (b) e (c) os modos de primeira ordem, $(n, m) = (1, 0)$ e $(n, m) = (0, 1)$, respectivamente. Em (d), (e) e (f) os modos de segunda ordem, $(n, m) = (2, 0)$, $(n, m) = (1, 1)$ e $(n, m) = (0, 2)$, respectivamente.</i>	23
2.6	<i>Perfis de intensidade dos modos de Laguerre-Gauss. Em (a) vemos o modo fundamental, $(p, l) = (0, 0)$. Em (b) e (c) os modos de primeira ordem, $(p, l) = (0, 1)$ e $(p, l) = (0, -1)$, respectivamente. E em (d), (e) e (f) os modos de segunda ordem, $(p, l) = (0, 2)$, $(p, l) = (1, 0)$ e $(p, l) = (0, -2)$, respectivamente.</i>	25

2.7	<i>Relação entre os modos HG e os modos LG de primeira ordem.</i>	26
2.8	<i>Esfera de Poincaré para os estados de polarização e para os modos transversos de 1ª ordem.</i>	28
2.9	<i>Máscaras usadas para gerar os modos LG. Em (a) uma placa zonal de Fresnel. Em (b) e em (c) temos duas placas zonais espirais (PZE) com helicidade +1 e +2, respectivamente. Em (d) o arranjo experimental básico para produção do modo LG. Assim como as placas zonais de Fresnel, as PZE também focalizam o feixe, sendo necessário recolima-lo após a passagem pela máscara.</i>	30
2.10	<i>Rede de difração bifurcada. Em (a) a rede de difração com defeito topológico gerada por computador. Em (b) um desenho esquemático do funcionamento da rede, onde m é a vorticidade do feixe.</i>	31
2.11	<i>Conversor de modos com lentes cilíndricas.</i>	32
2.12	<i>Efeito produzido pelos conversores de modo. No topo vemos o efeito produzido por um conversor π em um modo HG_{135°. ao meio o efeito do mesmo conversor sobre um modo LG_{-1}, e na base o efeito de um conversor $\pi/2$ sobre um modo HG_{135°.</i>	34
2.13	<i>(a) Conversor $\pi/2$, e (b) Conversor π [5].</i>	35
2.14	<i>Prisma de Dove</i>	35
2.15	<i>Arranjo experimental para produção de modos LG de primeira ordem. O ajuste da fase relativa entre os feixes é feito pelo BS2.</i>	36
2.16	<i>Em (a) vemos o padrão gerado pela interferência, (c), entre modos LG, o número de bifurcações é igual ao módulo da helicidade. Em (b) temos interferências, (d), do modo com uma onda esférica, o módulo da helicidade dos feixes é igual ao número de espirais claras ou escuras.</i>	38

- 3.1 *Cavidade do OPO. $r_{1(2)}$ e $t_{1(2)}$ são, respectivamente, os coeficientes de reflexão e transmissão do espelho 1(2). 45*
- 3.2 *Simulação dos picos de ressonância intracavidade em função do comprimento da cavidade em unidades arbitrárias. Os picos maiores são as ressonâncias dos modos pares e os picos menores as ressonâncias dos modos ímpares. Note que há ressonâncias pares do feixe de bombeio (verde) coincidindo com ressonâncias ímpares dos feixes convertidos (vermelho). 48*
- 4.1 *Correlação entre signal e idler na esfera de Poincaré. A igualdade de p_1 e p_2 faz com que a integral de recobrimento seja máxima. 54*
- 4.2 *A interseção entre o polinômio $p_5(x_p)$ e a reta $-b^2x_p$ fornece a solução estacionária para pump no caso injetado. Em (a) temos $a = 0,5$ (abaixo do limiar), em (b) temos $a = 1$ (no limiar) e em (c) temos $a = 2$ (acima do limiar). 59*
- 4.3 *Em (a) a aproximação linear para $p_5(x_p)$, abaixo do limiar do caso não-injetado, com $a = 0,5$ e $b = 0,25$. A aproximação de primeira ordem (em rosa) acorda satisfatoriamente com a solução exata (numérica). Em (b) o erro relativo entre a solução numérica exata e a aproximada. 60*
- 4.4 *Em (a) vemos uma representação gráfica da aproximação quadrática para $p_5(x)$ na região próxima ao limiar (curva cinza), e a aproximação linear próxima a $x_p = a$ (curva rosa). Em (b) e em (c) os erros percentuais entre as soluções aproximadas e as soluções exatas, calculados numericamente. 62*

4.5	<i>Estado estacionário do feixe de bombeio (x_p) em função do parâmetro de bombeio (a). Comparação das aproximações linear e quadrática com a solução numérica. O parâmetro de injeção é $b = 0,2$.</i>	63
4.6	<i>Conjugação de fase geométrica no OPO.</i>	67
4.7	<i>Arranjo experimental para produção uma fase geométrica variável. $R(\theta)$ é um par de prismas de Dove responsáveis pela transformação dos modos.</i>	68
4.8	<i>Variando-se a abertura da curva ABCDA sobre a esfera de Poincaré, variamos a fase geométrica dos feixes convertidos.</i>	69
4.9	<i>Efeito produzido pela conjugação da fase geométrica dos feixes convertidos.</i>	70

Capítulo 1

Introdução

"Nem todos contentam-se com a própria aparência, mas todos
contentam-se com o próprio cérebro."
(provérbio ídiche)

A natureza da Luz encanta a humanidade desde o início dos tempos¹. Vemos registros desse fascínio na mitologia grega e na mitologia judaico-cristã. Não é nenhuma surpresa essa mistificação da luz, o homem tem por hábito mistificar aquilo que não conhece ou não entende bem. Aos poucos fomos aprendendo como a luz se comporta e começamos a tirar proveito disso. Em 1990 A. C. os egípcios fabricavam espelhos, o livro do Êxodo 38:8 (1200 A. C.), possui um passagem onde os espelhos são citados. Os filósofos gregos em 300 A. C. desenvolveram inúmeras teorias sobre a natureza da luz e suas propriedades. Nessa época a propagação retilínea da luz já era conhecida por Euclides, assim como a lei da reflexão. Nos séculos seguintes a óptica geométrica foi estudada pela antiga civilização Romana. Do Oriente também surgiram contribuições para melhor entender a natureza da luz, há registros de descobertas feitas por Muçulmanos por volta de 642 D. C. [17].

¹Se é que houve um início.

Os séculos XVII e XVIII foram ricos em descobertas em diversas áreas da Física. Kepler, Descartes, Newton, Huygens, e muitos outros, observaram e explicaram os fenômenos da interferência, difração e absorção. Foi também nessa época que descobriu-se o carácter vetorial da luz e que alguns tipos de materiais podiam mudar a sua polarização. O mistério da finitude da velocidade da luz começou a ser desvendado pelo dinamarquês Christensen Romer (1644-1710). Estudando Io, uma das luas de Júpiter, Romer encontrou evidências de que a luz propaga com velocidade finita.

No século XIX Thomas Young (1773-1821), em suas apresentações a Royal Society, explicou o fenômeno da interferência com base na teoria ondulatória de Huygens. Augustin Jean Fresnel (1788-1827) unificou os conceitos inerentes à descrição ondulatória de Huygens ao princípio de interferência. Fresnel modelou a propagação de uma onda primária em termos de sucessivas ondas esféricas secundárias, que se sobrepõem e interferem para, alguns instantes mais tarde, reconstruir uma onda idêntica à primeira. Também foram realizações de Fresnel a formulação matemática para calcular os padrões de difração devidos à vários obstáculos e aberturas, assim como uma explicação satisfatória para a propagação retilínea da luz. Armand Hippolyte Fizeau (1819-1896), em 1849, fez a primeira medida, sobre a Terra, à encontrar um resultado finito para velocidade da luz, o valor de sua medida foi de 315300 km/s.

O estudo da eletricidade e do magnetismo estava sendo feito em paralelo com a óptica, neste período. Em 1845, Michael Faraday (1791-1867) estabeleceu uma relação entre o eletromagnetismo e a luz, ao descobrir que a polarização de um feixe podia ser alterada por um campo magnético em um meio. James Clerk Maxwell (1831-1879) aglutinou, brilhantemente, todos os conceitos experimentais conhecidos até então, em um conjunto conciso de equações matemáticas. Com base nestas equações, Maxwell foi capaz de deduzir a velocidade de propagação da luz em ter-

mos de propriedades elétricas e magnéticas do meio. Quando Maxwell substituiu os valores experimentais conhecidos na época, chegou a um resultado igual ao determinado experimentalmente para a velocidade da luz. Com isto Maxwell unificou o eletromagnetismo e a óptica. Passamos então a tratar a luz como uma onda eletromagnética que se propagava em um meio com propriedades físicas muito peculiares. O éter, como era chamado, precisava ser muito tenue para não afetar o movimento dos corpos celestes, mas também devia suportar vibrações com frequências ópticas da ordem de 10^{15} Hz, que viajavam a 299274 km/s. Infelizmente, Maxwell morreu cedo demais para ver a confirmação de sua teoria por Heirich Rudolf Hertz (1857-1894). Hertz produziu e detetou ondas eletromagnéticas em uma série de experiências publicadas em 1888.

No último ano de sua vida, Maxwell escreveu uma carta à D. P. Todd do U. S. Nautical Almanac Office sugerindo a medida da velocidade do sistema solar em relação ao éter. O físico estado-unidense Albert Abraham Michelson (1852-1931), com 26 anos, desenvolveu a idéia. Levando em conta a velocidade de translação da Terra, Michelson publicou seu primeiro resultado em 1881, onde não detetava nenhum movimento da Terra em relação ao éter. Devido a um erro de cálculo encontrado por Lorentz, Michelson repetiu a medida em 1887, juntamente com o físico Edward Willian Morley (1838-1923). Os resultados, mais uma vez, foram negativos.

O século XX, ainda "criança", sacudiu os alicerces da Física com as teorias da relatividade e a quântica. Jules Henri Poincaré (1854-1912) talvez tenha sido o primeiro a compreender todas as implicações da inexistência do éter. Em 1900, ele afirmou:

"O éter existirá na verdade? Não acredito que observações mais precisas possam revelar algo mais do que movimentos **relativos**."

Em 1905, Albert Einstein (1879-1955) apresentou ao mundo sua teoria da relatividade restrita [11], com a qual também rejeitava a hipótese do éter:

"A introdução de um "éter" será supérflua, uma vez que o ponto de vista aqui desenvolvido não requer sequer um espaço em repouso absoluto."

No mesmo trabalho, Einstein acrescenta:

"(..) a luz se propaga no vazio com uma velocidade c bem definida, independente do estado de movimento de sua fonte."

As experiências de Michelson e Morley foram perfeitamente explicadas dentro da cinemática relativística de Einstein.

Em 14 de dezembro de 1900, numa reunião da Sociedade Alemã de Física, em Berlim, Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858-1947) apresentou à Physikalische Gesellschaft o trabalho "Sobre a Teoria da Lei de Distribuição de Energia do Espectro Normal". Neste trabalho, Planck introduz um das idéias mais revolucionárias daquele século, o quantum de energia. Em 1905, Einstein apresentava uma nova teoria corpuscular para a luz. O quantum de energia, mais tarde batizado de fóton por G. N. Lewis [24], estava relacionado com a frequência da luz, através da célebre equação $E = h\nu$, onde h é a famosa constante de Planck. No final dos anos vinte, Bohr, Born, Heisenberg, Schrödinger, De Broglie, Pauli, Dirac transformaram a teoria quântica de Planck em uma Mecânica Quântica bem fundamentada. Nesta época o momento angular da luz começou a ser estudado, o experimento de Beth [7] mostra com primor que luz circularmente polarizada possui momento angular diferente de zero.

Os anos seguintes foram recheados de feitos memoráveis, na espectroscopia as raias espectrais foram explicadas de maneira satisfatória, o conceito de frequência espacial surgiu nos anos cinquenta e a análise de Fourier deixou de ser uma ferramenta exclusiva das telecomunicações e ganhou espaço na óptica.

Juntamente com a construção do primeiro laser [34], em 1958, nascia a óptica não-linear. A utilização de fontes coerentes de alta potência permitiu a descoberta de novos efeitos como a geração de segundo harmônico, por M. Bass *et al* [4], e a mistura de ondas, por J. A. Armstrong *et al* [3], ambos em 1962. Com o aprimoramento das técnicas de construção dos ressoadores ópticos, para a construção de cavidades ópticas para os lasers, foi possível gerar luz que também possuía momento angular orbital.

Apesar da conexão feita por Einstein entre a óptica e a teoria quântica, a primeira foi desenvolvida mais ou menos independente da segunda. Com a Eletrodinâmica Quântica, a Óptica Física sofreu uma mudança revolucionária. Com a união destes ramos da Física surgiu a Óptica Quântica, que fornecia uma outra visão das propriedades de coerência da luz, e deu origem a teorias sobre a estatística de fótons, ao estudo e a produção de estados comprimidos e ao estudo do ruído quântico. Muitas das técnicas desenvolvidas nesta área foram, e ainda são, usadas para construir aparatos de medida ultra-sensíveis, e para testar aspectos fundamentais da teoria quântica e da filosofia. Muita coisa foi descoberta desde os trabalhos dos pensadores gregos. No final do século XX a Óptica Quântica, juntamente com outras áreas da Física, deu origem a uma nova revolução científica, a teoria da Informação e a Computação foram estendidas, e coisas como o teletransporte e o computador quântico², antes assuntos de histórias de ficção científica, passaram a ser encarados como possibilidades concretas de realização.

²Sem falar na criptografia quântica, que hoje é de extremo interesse de governos e bancos em todo o mundo.

O tema da dissertação foi inspirado no trabalho de Martinelli *et al* [27]. Neste trabalho os autores fazem um estudo, teórico e experimental, da transferência de momento angular orbital do feixe de bombeio para os feixes convertidos de um oscilador paramétrico óptico OPO com casamento de fase tipo II. O experimento realizado por Martinelli *et al*, consistia em bombear, com um modo de Laguerre-Gauss, um cristal de KTP, com casamento de fase tipo II para $532nm$ e $1064nm$, em um cavidade de espelhos esféricos na configuração confocal.

A transferência de momento angular orbital é fortemente afetada pela cavidade e pela anisotropia do meio não-linear. Na figura 1.1 podemos ver o perfil de intensidade e o padrão de interferência dos feixes gerados pelo OPO em quatro regimes distintos de operação.

O momento angular orbital é transferido total (imagens 1 e 4) ou parcialmente (imagem 2) do feixe de bombeio para o feixe idler, que possui a mesma polarização que o bombeio. Contudo, o momento angular orbital não é transferido para o feixe signal (imagem 3), cuja polarização é ortogonal à do bombeio. Este efeito é explicado, por Martinelli *et al*, em termos do astigmatismo provocado pelo cristal.

Nesta dissertação estudamos a dinâmica de feixes com momento angular orbital em um OPO com sinal injetado. No capítulo 2 falaremos sobre o momento angular orbital da luz, como ele se enquadra no contexto da óptica paraxial e como produzir vórtices ópticos, isto é, feixes com momento angular orbital. No capítulo 3 descreveremos as principais características de um OPO e de sua dinâmica. No capítulo 4 mostraremos como estudar a dinâmica de modos transversais num OPO e os resultados obtidos no estudo da dinâmica não-linear de cinco modos transversais com injeção de sinal, assim como a conjugação da fase geométrica dos feixes gerados em um OPO. Finalmente, no capítulo 5 apresentaremos nossas conclusões sobre o trabalho.

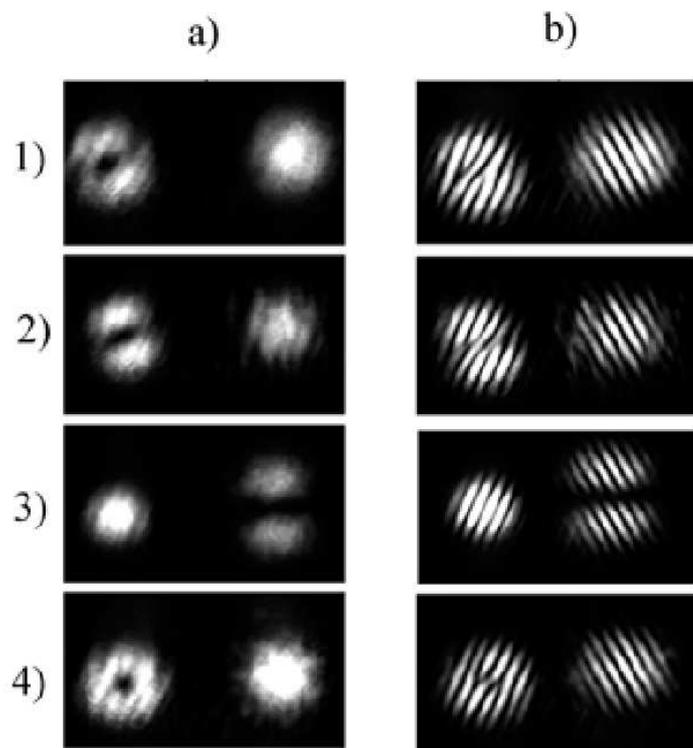


Figura 1.1: (a) Intensidade dos feixes signal (direita) e idler (esquerda). (b) padrão de auto-interferência mostrando a presença (ou não) de singularidade de fase nos feixes.

Capítulo 2

Momento Angular da Luz

"C'est véritablement utile puisque c'est joli"

Antoine de Saint-Exupéry

Contents

2.1	Momento Angular da Luz	9
2.2	Óptica Paraxial	11
2.2.1	A Equação Paraxial	13
2.2.2	O Modo Fundamental	17
2.2.3	Os Modos de Hermite-Gauss	22
2.2.4	Os Modos de Laguerre-Gauss	23
2.2.5	A Esfera de Poincaré para Modos Espaciais	27
2.3	Produção e Detecção de Modos Laguerre-Gauss	28
2.3.1	Método Holográfico	29
2.3.2	Conversor de Modos por Astigmatismo	32
2.3.3	Detecção	37

2.1 Momento Angular da Luz

Sabemos, do eletromagnetismo de Maxwell, que o campo eletromagnético carrega energia. Entretanto, é mais comum falarmos em fluxo de energia eletromagnética. Este fluxo de energia é dado pelo vetor de Poynting [17], que pode ser expresso em termos dos campos elétrico e magnético. No sistema de unidades internacional (SI), ele tem a forma

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = c^2 \epsilon_0 \left[\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right] . \quad (2.1)$$

Em meios isotrópicos o vetor de Poynting é paralelo ao vetor de onda, porém isto deixa de ser verdade em meios anisotrópicos. Nestes meios o fenômeno conhecido como "walk off" [27], faz com que o fluxo de energia não seja paralelo à direção de propagação da onda eletromagnética.

Além da energia, o campo eletromagnético também carrega momento linear e momento angular. A densidade de momento linear $\vec{p}(\vec{r}, t)$ do campo eletromagnético, em meios isotrópicos, é proporcional ao vetor de Poynting [26]:

$$\vec{p}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{S}(\vec{r}, t)}{c^2} = \epsilon_0 \left[\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right] . \quad (2.2)$$

O momento linear total do campo é dado pela integral volumétrica de $\vec{p}(\vec{r}, t)$.

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \int_V \epsilon_0 \left[\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right] dv . \quad (2.3)$$

A densidade de momento angular do campo eletromagnético, assim como na Mecânica Clássica, é dada por,

$$\vec{l}(\vec{r}, t) = \vec{r} \times \vec{p}(\vec{r}, t) = \vec{r} \times \epsilon_0 \left[\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right] . \quad (2.4)$$

O momento angular total é obtido da integral volumétrica de $\vec{l}(\vec{r}, t)$. A decomposição do momento angular do campo eletromagnético, também pode ser feita de maneira

análoga ao momento angular de um sistema de \mathbf{N} -partículas [26, 21]

$$\vec{L} = \epsilon_0 \int_V \vec{r} \times [\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t)] dv = \vec{L}_s + \vec{L}_o \quad . \quad (2.5)$$

Se escrevermos o campo magnético em termos do seu potencial vetor $\vec{A}(\vec{r}, t)$, as componentes \vec{L}_s e \vec{L}_o tomam a seguinte forma

$$\vec{L}_s = \epsilon_0 \int_V \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{A}(\vec{r}, t) dv \quad (2.6)$$

e

$$\vec{L}_o = \epsilon_0 \int_V E_i(\vec{r}, t) [\vec{r} \times \vec{\nabla}] A_i(\vec{r}, t) dv \quad . \quad (2.7)$$

A componente \vec{L}_s é independente da escolha de uma origem, e por esse motivo representa o momento angular intrínseco, ou de spin, do campo eletromagnético. Esta componente é associada ao estado de polarização do fóton, e ao seu spin [7]. Devido ao aparecimento do operador $\vec{r} \times \vec{\nabla}$, a componente \vec{L}_o é associada ao momento angular orbital do campo. Repare que \vec{L}_o depende da distribuição transversal do campo, ou seja, depende da sua estrutura¹. Uma onda plana como a da figura 2.1(a) não possui momento angular orbital, ao passo que a onda da figura 2.1(b) possui momento angular orbital diferente de zero. Em ambos os casos a estrutura das frentes de onda é o fator determinante para que haja momento angular orbital.

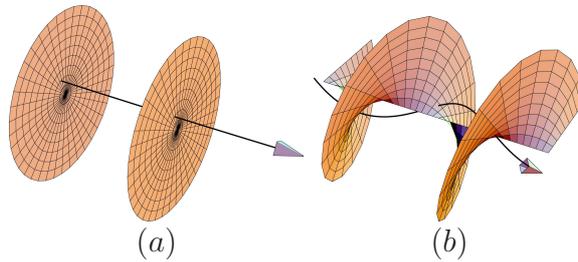


Figura 2.1: Em (a) vemos frentes e os vetores de onda de uma onda plana. Em (b) vemos a frente de onda de um modo de Laguerre-Gauss.

¹Na Mecânica Clássica essa dependência se dá através do tensor de inércia.

Com o advento do Laser [34] foi possível gerar feixes de luz com características bem diferentes das lâmpadas incandescentes e a gás, no que se refere à sua monocromaticidade, direcionalidade, intensidade, propriedades estatísticas e coerência. Esta última desempenha um papel central na detecção da vorticidade e da polarização de um feixe. Sem ela não se definir um estado de polarização para o feixe, nem se pode estudar a estrutura da frente de onda do mesmo. Além disso, o estudo do momento angular orbital da luz só foi possível depois do desenvolvimento de cavidades ópticas de boa qualidade.

Descreveremos agora os modos de Laguerre-Gauss [36] e como estes satisfazem a equação de onda na aproximação paraxial, antes porém faremos uma pequena digressão e falaremos um pouco sobre a aproximação paraxial.

2.2 Óptica Paraxial

Quando o primeiro laser foi posto a funcionar no fim da década de 50, muitos diziam que era apenas mais uma ferramenta de valor apenas acadêmico. Hoje podemos dizer que o laser foi uma das maiores invenções do século XX. Ele nunca deixou de ser um grande ferramenta acadêmica para o estudo das leis fundamentais da natureza. Além disso, resultou em inúmeras aplicações em prazos extremamente curtos em diversas áreas como a metrologia (relógios atômicos e medidas interferométricas), topografia (medidas de distância), telecomunicações (fibras ópticas), medicina (cirurgias de correção visual), computação (mídias laser e circuitos ópticos), indústria (controle de qualidade), eletrodomésticos (disc laser) e até na indústria bélica (sistemas de posicionamento e sistemas de direcionamento de mísseis).

Na óptica o laser é largamente utilizado como fonte de feixes "bem comportados", ou seja, produz luz coerente com uma freqüência bem definida. Sendo uma radiação

eletromagnética, a equação de onda é quem governa o sua dinâmica [17]

$$\nabla^2 E(\vec{r}, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0 \quad . \quad (2.8)$$

Um laser é constituído de três partes básicas: 1) um meio de ganho; 2) um sistema de bombeio de energia e 3) uma cavidade ressonante. Na primeira delas o fenômeno conhecido como emissão estimulada é o responsável pela coerência da luz laser. O sistema de bombeio fornece a energia necessária para a inversão de população dentro do meio de ganho. A inversão de população em um meio de ganho se dá quando o número de átomos² excitados passa a ser maior que o número de átomos no estado desexcitados. A última parte, a cavidade ressonante, impõe condições de contorno sobre a equação de onda. Estas condições impõem vínculos sobre as frequências de oscilação do laser dando origem aos modos longitudinais, que correspondem a ondas estacionárias ao longo da cavidade. Este é um dos fatores responsáveis pela sua monocromaticidade. Além dos modos longitudinais, a cavidade sustenta no seu interior modos transversais ou modos TEM (*Transversal Eletromagnetic*), configurações do campo perpendiculares³ ao eixo de propagação. Em linhas gerais, a óptica paraxial se aplica quando as dimensões transversais do feixe são muito menores do que as distâncias longitudinais típicas sobre as quais o campo muda significativamente o valor da sua amplitude. A equação paraxial rege a propagação da luz no regime de validade desta aproximação. A seguir estudaremos este regime de validade e as conseqüências desta aproximação na óptica física.

²Moléculas no caso de lasers gasosos, e elétrons e buracos no caso de lasers de estado sólido.

³ $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$

2.2.1 A Equação Paraxial

A óptica paraxial, também conhecida como óptica Gaussiana, é a maneira mais simples de descrever a óptica física. Um grande número de livros texto contém capítulos inteiros sobre este tema [17, 36, 40]. Contudo a abordagem dada por eles leva a uma inconsistência com as equações de Maxwell. Mostraremos esta inconsistência nas linhas seguintes e em seguida mostraremos uma abordagem alternativa que acorda integralmente com as leis do eletromagnetismo.

Partimos das equações de Maxwell do campo eletromagnético no vácuo,

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \quad (2.9)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad , \quad (2.10)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad , \quad (2.11)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad , \quad (2.12)$$

onde $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}) \exp[i(kz - \omega t)]$ e $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r}) \exp[i(kz - \omega t)]$. Se quisermos os campos físicos, basta tomarmos as partes reais.

Se tomarmos o rotacional da equação (2.9), num meio isotrópico, obtemos

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \vec{E} \quad . \quad (2.13)$$

Esta é conhecida como equação de Helmholtz, obtida a partir da equação (2.11). Se analisarmos soluções do tipo $\vec{E} = (E_x, 0, 0)$, a equação (2.10) impõe que

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} = \frac{\partial B_x}{\partial y} = 0 \quad , \quad (2.14)$$

logo E_x deve ser independente de x . Soluções do tipo onda plana estão em pleno acordo com este resultado. Contudo o *ansatz* usado para soluções propagantes na direção z é

$$E_x = \psi(x, y, z) e^{ikz} \quad . \quad (2.15)$$

Note que $\partial_x E_x \neq 0$ é proibido pela divergência de \vec{E} , equação (2.11). Ignorando este problema a dedução da equação paraxial segue calculando-se o laplaciano de E_x .

Lembrando que $k = \omega/c$,

$$\nabla^2[\psi(\vec{r})e^{ikz}] = \left[\nabla^2\psi(\vec{r}) + 2ik\frac{\partial\psi(\vec{r})}{\partial z} - k^2\psi(\vec{r}) \right] e^{ikz} . \quad (2.16)$$

Neste ponto costuma-se fazer a aproximação

$$\left| \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \right| \ll 2k \left| \frac{\partial\psi}{\partial z} \right|, \left| \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \right|, \left| \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \right|, \quad (2.17)$$

que é conhecida como aproximação paraxial. A equação obtida com esta aproximação é a equação paraxial,

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + 2ik\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0 . \quad (2.18)$$

A solução fundamental⁴ desta equação é uma gaussiana nas coordenadas transversais (x, y) . Apesar da aparente inconsistência com a equação (2.11), este resultado está, curiosamente, de acordo com o que é observado experimentalmente. Para evitar as passagens conflitantes com as equações de Maxwell, vamos deduzir a aproximação paraxial de uma maneira alternativa, seguindo de perto a referência [22].

Vamos partir novamente das equações de Maxwell, separando o campo elétrico e o operador nabla em componentes transversal, $\rho = (x, y)$, e longitudinal, \hat{z} .

$$\vec{E} = \left[\vec{\psi}_\perp(\vec{r}) + \hat{z}\psi_z(\vec{r}) \right] e^{i(kz - \omega t)} \quad (2.19)$$

$$\vec{\nabla} = \vec{\nabla}_\perp + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} , \quad (2.20)$$

onde t indica a componente transversal. Usando as expressões anteriores, calculamos o rotacional da equação (2.9) e obtemos duas equações, uma para a

⁴Esta equação é muito parecida com a equação de Schrödinger para uma partícula livre. Esta nomenclatura se baseia nesta semelhança, que será explorada mais adiante.

componente transversal e outra para a componente longitudinal.

$$\vec{\nabla}_\perp \left[\vec{\nabla}_\perp \cdot \vec{\psi}_\perp + \frac{\partial \psi_z}{\partial z} + ik\psi_z \right] - \nabla_\perp^2 \vec{\psi}_\perp - \frac{\partial^2 \vec{\psi}_\perp}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial \vec{\psi}_\perp}{\partial z} = 0 \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial(\vec{\nabla}_\perp \cdot \vec{\psi}_\perp)}{\partial z} - \nabla_\perp^2 \psi_z + ik \vec{\nabla}_\perp \cdot \vec{\psi}_\perp - k^2 \psi_z = 0 \quad . \quad (2.22)$$

Como estamos interessados apenas em feixes Gaussianos, vamos usar a cintura do feixe⁵, w_0 , para reescalonar as coordenadas transversais e a distância de Rayleigh⁶, $z_R = kw_0^2/2$, para reescalonar a coordenada longitudinal.

$$x = w_0 \xi, \quad y = w_0 \eta \quad e \quad z = z_R \zeta \quad . \quad (2.23)$$

Após efetuarmos o reescalonamento, multiplicamos a equação para as componentes transversais por w_0^3/z_R e a equação para a componente longitudinal por w_0^4/z_R^2 . Feito isto, as novas equações em termos das coordenadas adimensionais (ξ, η, ζ) são

$$\vec{\nabla}_\tau \left[h \vec{\nabla}_\tau \cdot \vec{\psi}_\tau + h^2 \frac{\partial \psi_\zeta}{\partial \zeta} + 2i\psi_\zeta \right] - h \nabla_\tau^2 \vec{\psi}_\tau - h^3 \frac{\partial^2 \vec{\psi}_\tau}{\partial \zeta^2} - 4ih \frac{\partial \vec{\psi}_\tau}{\partial \zeta} = 0 \quad (2.24)$$

$$h^3 \frac{\partial(\vec{\nabla}_\tau \cdot \vec{\psi}_\tau)}{\partial \zeta} - h^2 \nabla_\tau^2 \psi_\zeta + 2ih \vec{\nabla}_\tau \cdot \vec{\psi}_\tau - 4\psi_\zeta = 0 \quad . \quad (2.25)$$

onde $h = w_0/z_R$ e

$$\vec{\nabla}_\tau \equiv \hat{x} \frac{\partial}{\partial \xi} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (2.26)$$

Estamos interessados em regimes onde o feixe está bem colimado, ou seja,

$$w_0 \ll z_R \quad \therefore \quad w_0 \ll \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad \therefore \quad \lambda \ll w_0 \quad , \quad (2.27)$$

neste regime h torna-se, naturalmente, um parâmetro de expansão

$$\vec{\psi}_\tau = \sum_{n=0}^{\infty} h^n \vec{\psi}_\tau^{(n)} \quad (2.28)$$

$$\psi_\zeta = \sum_{m=0}^{\infty} h^m \psi_\zeta^{(m)} \quad . \quad (2.29)$$

⁵Do inglês "*beam waist*".

⁶ z_R é um comprimento característico associado à difração do feixe, ou seja, z_R é o comprimento que o feixe deve propagar para que o seu diâmetro aumente de um fator $\sqrt{2}$.

Substituindo as expressões (2.28) e (2.29) nas equações (2.24) e (2.25), veremos que podemos manter apenas os termos pares da expansão de $\vec{\psi}_\tau$ e apenas os termos ímpares da expansão de ψ_ζ .

Após este procedimento reunimos os termos proporcionais à h e obtemos,

$$\nabla_\tau^2 \vec{\psi}_\tau^{(0)} + 4i \frac{\partial \vec{\psi}_\tau^{(0)}}{\partial \zeta} = 0 \quad (2.30)$$

$$\psi_\zeta^{(1)} = \frac{i}{2} \vec{\nabla}_\tau \cdot \vec{\psi}_\tau^{(0)} \quad . \quad (2.31)$$

Comparando a eq. (2.30), de ordem zero, com a eq. (2.18) podemos ver que chegamos à equação paraxial, por um processo que obedece as imposições feitas pelas equações de Maxwell. Note que a solução de ordem zero, $\vec{\psi}_\tau^{(0)}$, fornece um campo transversal dependente das coordenadas transversais. A primeira correção, $\psi_\zeta^{(1)}$, mostra que há uma componente na direção de propagação do feixe. O termo seguinte da série leva em conta efeitos de difração maiores,

$$\nabla_\tau^2 \vec{\psi}_\tau^{(2)} + 4i \frac{\partial \vec{\psi}_\tau^{(2)}}{\partial \zeta} = -\frac{\partial^2 \vec{\psi}_\tau^{(0)}}{\partial \zeta^2} \quad (2.32)$$

$$\psi_\zeta^{(3)} = \frac{i}{2} \vec{\nabla}_\tau \cdot \vec{\psi}_\tau^{(2)} + \frac{i}{2} \frac{\partial \psi_\zeta^{(1)}}{\partial \zeta} \quad . \quad (2.33)$$

A equação (2.30) é invariante sob rotações em torno do eixo z , portanto soluções circularmente, elipticamente e linearmente polarizadas são igualmente permitidas. Por simplicidade vamos considerar uma solução linearmente polarizada

$$\vec{\psi}_\tau^{(0)} = \vec{A} e^{iS} \quad , \quad (2.34)$$

onde \vec{A} e S são reais. Substituindo a expressão (2.34) na (2.30) obtemos uma equação complexa onde as partes real e imaginária devem ser satisfeitas separadamente

$$\nabla_\tau^2 \vec{A} - (\vec{\nabla}_\tau S)^2 \vec{A} - 4 \left(\frac{\partial S}{\partial \zeta} \right) \vec{A} = 0 \quad (2.35)$$

e

$$2(\vec{\nabla}_\tau S \cdot \vec{\nabla}_\tau) \vec{A} + \nabla_\tau^2 S \vec{A} + 4 \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial \zeta} \right) = 0 \quad . \quad (2.36)$$

Fazendo o produto escalar destas equações com \vec{A} , podemos reescrevê-las como

$$(\vec{\nabla}_\tau S)^2 + 4 \left(\frac{\partial S}{\partial \zeta} \right) = (\vec{A} \cdot \nabla_\tau^2 \vec{A}) A^{-2} \quad (2.37)$$

e

$$\vec{\nabla}_\tau \cdot (A^2 \vec{\nabla}_\tau S) + 2 \left(\frac{\partial A^2}{\partial \zeta} \right) = 0 \quad . \quad (2.38)$$

A equação (2.37) é análoga a *equação eikonal* [15] da óptica geométrica com um termo de difração, e a equação (2.38) é uma equação de transporte que representa a conservação da densidade de energia eletromagnética.

A equação (2.37) tem a mesma forma funcional da equação de Hamilton-Jacobi para uma partícula livre [23]. As analogias entre a óptica geométrica e a mecânica clássica levaram Schrödinger a formular a sua Mecânica Ondulatória em analogia com a óptica física. Posteriormente, junto com os trabalhos de Heisenberg, Born, Jordan e Dirac, a Mecânica Ondulatória de Schrödinger deu origem à Mecânica Quântica como a conhecemos hoje. No limite clássico ($\hbar \rightarrow 0$) a equação de Schrödinger se reduz à equação de Hamilton-Jacobi, com a fase da função de onda coincidindo com a ação clássica [23]. Desta forma é de se esperar que as soluções de ambas as equações tenham a mesma forma funcional. Baseado nisso olharemos para as soluções da equação (2.30) semelhantes às da equação de Schrödinger para uma partícula livre⁷.

2.2.2 O Modo Fundamental

Destacamos anteriormente a semelhança entre a equação paraxial e a equação de Schrödinger para uma partícula livre. Com isto em mente, construímos um "*ansatz*" para a solução da equação (2.18).

⁷Numa visão bastante simplista, o quantum de energia eletromagnética pode ser representado por uma partícula de Schrödinger com massa de repouso nula. Nesta visão o campo eletromagnético pode ser interpretado como sendo a função de onda do fóton

Suponhamos que a solução seja

$$\psi(\vec{r}) = A \exp \left\{ i \left[\frac{kr^2}{2q(z)} + P(z) \right] \right\} , \quad (2.39)$$

onde A é uma constante e $q(z)$ e $P(z)$ serão determinados a posteriori. Substituindo esta expressão na equação paraxial, obtemos

$$\left\{ \frac{k^2}{q^2(z)} \left[\frac{dq(z)}{dz} - 1 \right] r^2 - 2k \left[\frac{dP(z)}{dz} - \frac{i}{q(z)} \right] \right\} = 0 . \quad (2.40)$$

Para que (2.39) seja solução da (2.18), $q(z)$ e $P(z)$ devem satisfazer as seguintes equações diferenciais ordinárias

$$\frac{dq(z)}{dz} = 1 \quad (2.41)$$

e

$$\frac{dP(z)}{dz} = \frac{i}{q(z)} . \quad (2.42)$$

Resolvendo a eq. (2.41) vemos que $q(z)$ deve ter a seguinte forma,

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{z - iz_R} = \frac{z}{z^2 + z_R^2} + i \frac{z_R}{z^2 + z_R^2} = \frac{1}{R(z)} + i \frac{2}{kw^2(z)} . \quad (2.43)$$

As funções

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2} \quad (2.44)$$

e

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_R}{z} \right)^2 \right] \quad (2.45)$$

são, respectivamente, o raio do feixe e o raio da curvatura da frente de onda, ambos no plano z , w_0 é a cintura do feixe e $z_R = kw_0^2/2$ é a distância de Rayleigh⁸.

Uma vez de posse de $q(z)$ podemos determinar $P(z)$,

$$P(z) = i \ln \left[1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2 \right] - \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right) \quad (2.46)$$

⁸O fato de z_R ser real esta relacionado com a finitude das soluções da equação paraxial. Isto ficará evidente quando encontrarmos a solução para o modo fundamental.p

Vemos que a fase do campo próximo ao eixo z comporta-se da seguinte maneira

$$E \sim \frac{1}{R} \exp(ikz) \exp\left(i\frac{kr^2}{2R}\right) . \quad (2.47)$$

Nos feixes Gaussianos a origem de R varia com a propagação conforme a equação (2.45). Repare que apenas quando $z \gg z_R$ o feixe parece ter a sua origem em $z = 0$. Quando caminhamos na direção de $z = 0$ o raio de curvatura passa por um mínimo em $z = z_R$ e em seguida diverge quando nos aproximamos ainda mais de $z = 0$, onde ele se torna infinito e a frente de onda se torna plana, figura(2.2).

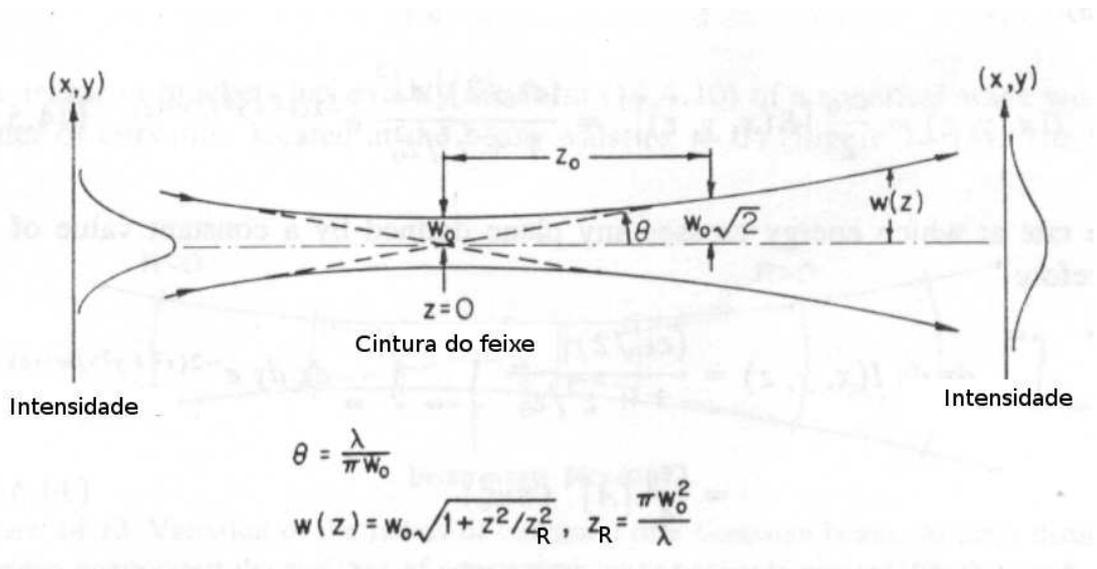


Figura 2.2: Plano focal do feixe Gaussiano [28].

Note que a origem do raio de curvatura muda com a propagação da onda, em $z = 0$ e $z \rightarrow \infty$ ele tende ao infinito, nestes dois regimes as frentes de onda são planas. A expressão para $R(z)$ mostra que entre esses dois extremos a frente de onda é aproximadamente esférica. Vejamos, o campo elétrico de uma onda esférica, figura(2.3) pode ser representado como

$$E \sim \frac{1}{R} \exp(ikR) \quad (2.48)$$

onde $R^2 = r^2 + z^2$. Para distâncias grandes, $R \sim z \gg r$, podemos fazer uma expansão binomial de R

$$R = z \left(1 + \frac{r^2}{z^2} \right)^{1/2} \approx z + \frac{1}{2} \frac{r^2}{z} \approx z + \frac{1}{2} \frac{r^2}{R} . \quad (2.49)$$

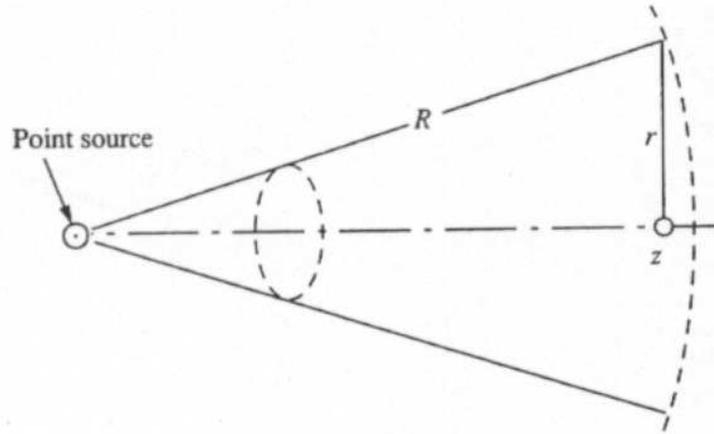


Figura 2.3: Onda esférica [39].

Determinados os parâmetros $q(z)$ e $P(z)$, determinamos "o modo fundamental"⁹ da equação paraxial. A solução da equação paraxial é [36]

$$E_x(\vec{r}) = \underbrace{E_0 \frac{w_0}{w(z)} \exp \left[\frac{-r^2}{w(z)} \right]}_{\text{fator de amplitude}} \exp \left\{ i \left[\underbrace{kz - \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right)}_{\text{fase longitudinal}} + \underbrace{\frac{kr^2}{2R(z)}}_{\text{fase radial}} \right] \right\} , \quad (2.50)$$

que tem a distribuição de intensidade mostrada na figura 2.4.

O fator de amplitude garante que a energia que atravessa um dado plano z arbitrário seja constante. Em particular, quando $z \gg z_R$, o fator $w_0/w(z)$ tende para o valor assintótico de z_R/z (limite de onda esférica), figura(2.2), o que nos leva

⁹Veremos adiante que essa nomenclatura se deve a uma analogia com o problema da partícula livre de Schrödinger.



Figura 2.4: *Perfil de intensidade Gaussiano.*

à

$$\theta \simeq \tan(\theta) = \frac{dw(z)}{dz} = \frac{w_0}{z_R} = \frac{\lambda}{\pi w_0} . \quad (2.51)$$

Onde θ é o coeficiente angular da assíntota que define o diâmetro do feixe para $z \gg z_R$. Este diâmetro mínimo do feixe, $2w_0$, pode ser interpretado como uma consequência do princípio de incerteza de Heisenberg para a posição e o momento linear do fóton. Voltando à analogia com o problema da partícula livre de Schrödinger[10], percebemos que os dois sistemas são completamente análogos¹⁰, segundo a seguinte regra de correspondência.

$$\begin{aligned} \psi_{M.Q.}(\vec{r}, t) &\longleftrightarrow E(\vec{r}, t) \\ |\psi_{M.Q.}(\vec{r}, t)|^2 &\longleftrightarrow |E(\vec{r}, t)|^2 \\ z &\longleftrightarrow t \\ w(z) &\longleftrightarrow \Delta x(t) \end{aligned}$$

Agora que já estamos de posse do modo fundamental da equação paraxial, pode-

¹⁰Cohen-Tannoudji, *Quantum Mechanics*, vol. 1, complemento GI, página 61.

mos passar para os modos de ordem superior, conhecidos como modos de Hermite-Gauss e modos de Laguerre-Gauss.

2.2.3 Os Modos de Hermite-Gauss

Já que há uma grande semelhança da equação paraxial com a equação de Schrödinger, podemos esperar que a solução encontrada na seção anterior não seja a única solução para a equação paraxial. De fato, assim como na equação de Schrödinger, existe um conjunto completo de soluções ortogonais para equação paraxial.

Para obter este conjunto de soluções vamos usar o *ansatz* a seguir

$$\psi(\vec{r}) = A g\left(\frac{x}{w(z)}\right) h\left(\frac{y}{w(z)}\right) \exp\left\{i\left[\frac{kr^2}{2q(z)} + P(z)\right]\right\}, \quad (2.52)$$

onde $w(z)$ e $q(z)$ já são conhecidos, ou seja, o raio de curvatura e o diâmetro do feixe são os mesmos¹¹. O fato de g e h serem, respectivamente, funções de $x/w(z)$ e $y/w(z)$ significa que o padrão de intensidade de (2.52) escala com o diâmetro do feixe.

Seguindo o mesmo procedimento da seção anterior, chegamos às expressões de g e h

$$g\left(\frac{x}{w(z)}\right) = H_n\left(\sqrt{2}\frac{x}{w(z)}\right). \quad (2.53)$$

$$h\left(\frac{y}{w(z)}\right) = H_m\left(\sqrt{2}\frac{y}{w(z)}\right). \quad (2.54)$$

Onde $H_n(x)$ e $H_m(y)$ são os polinômios de Hermite [2].

A função $P(z)$ agora depende da ordem dos modos

$$P(z) = i \ln\left(\sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}\right) - (n + m + 1) \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right). \quad (2.55)$$

¹¹Na verdade w_0 define um conjunto de soluções ortogonais da equação paraxial.

A solução geral da equação paraxial, em coordenadas cartesianas, é então

$$\psi_{n,m} = \frac{A_{n,m}}{w(z)} H_n \left(\sqrt{2} \frac{x}{w(z)} \right) H_m \left(\sqrt{2} \frac{y}{w(z)} \right) \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} \right] \exp \left\{ i \left[\frac{k(x^2 + y^2)}{2R(z)} - (n + m + 1) \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right) \right] \right\}, \quad (2.56)$$

$A_{n,m}$ é uma constante de normalização.

Note que se fizermos $n = m = 0$ na expressão anterior, nós recuperamos a solução dada pela equação (2.50), portanto aquela solução é de fato o modo fundamental. Na figura 2.5 podemos ver os padrões de intensidade gerados por alguns destes modos.

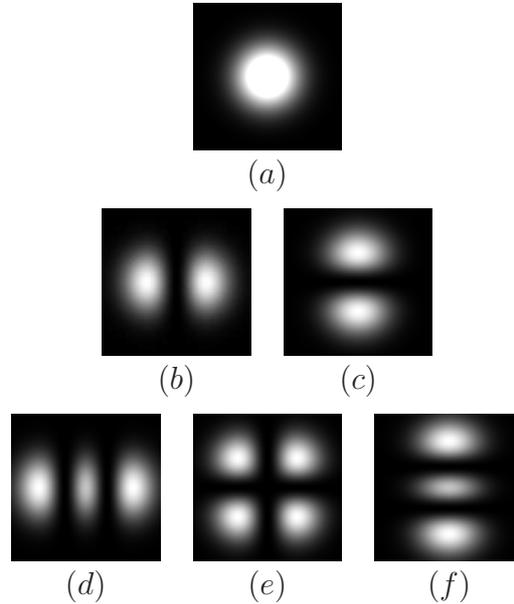


Figura 2.5: *Perfis de intensidade dos modos de Hermite-Gauss. Em (a) vemos o modo fundamental $(n, m) = (0, 0)$, em (b) e (c) os modos de primeira ordem, $(n, m) = (1, 0)$ e $(n, m) = (0, 1)$, respectivamente. Em (d), (e) e (f) os modos de segunda ordem, $(n, m) = (2, 0)$, $(n, m) = (1, 1)$ e $(n, m) = (0, 2)$, respectivamente.*

2.2.4 Os Modos de Laguerre-Gauss

A equação (2.30) admite soluções em coordenadas cilíndricas, estas soluções são conhecidas como os modos de Laguerre-Gauss, os quais passaremos a descrever

agora.

Nas coordenadas cilíndricas, a equação paraxial tem a seguinte forma

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad . \quad (2.57)$$

Partindo do *ansatz*

$$\psi(\vec{r}) = \chi \left(\frac{2r^2}{w^2(z)} \right) \exp \left\{ i \left[\frac{kr^2}{2R(z)} + P(z) + l\phi \right] \right\} \quad , \quad (2.58)$$

e seguindo o procedimento das duas seções anteriores, encontramos

$$\chi_p^l \left(\frac{2r^2}{w^2(z)} \right) = \left[\frac{\sqrt{2}r}{w(z)} \right]^{|l|} \exp \left[-\frac{r^2}{w^2(z)} \right] L_p^{|l|} \left(\frac{2r^2}{w^2(z)} \right) \quad (2.59)$$

e

$$P(z) = i \ln \left(\sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}} \right) - (2p + |l| + 1) \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right) \quad , \quad (2.60)$$

onde $L_p^{|l|}$ são os polinômios associados de Laguerre. No apêndice A mostramos de forma detalhada que 2.58 é solução da equação paraxial em coordenadas cilíndricas.

Com estes resultados podemos escrever as soluções da equação paraxial em coordenadas cilíndricas

$$\begin{aligned} E_x &= \sqrt{\frac{2p!}{\pi w^2(z)(p + |l|)!}} \left[\frac{\sqrt{2}r}{w(z)} \right]^{|l|} \exp \left[-\frac{r^2}{w^2(z)} \right] L_p^{|l|} \left(\frac{2r^2}{w^2(z)} \right) \times \\ &\times \exp \left\{ i \left[kz - (2p + |l| + 1) \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right) + \frac{kr^2}{2R(z)} + l\phi \right] \right\} \quad (2.61) \end{aligned}$$

A figura 2.6 mostra a distribuição de intensidade de algumas ordens dos modos de Laguerre-Gauss. O modo fundamental dado pela equação (2.50) também é contemplado nesta solução, basta fazer $p = 0$ e $l = 0$.

Assim como os modos de Hermite-Gauss (HG), os modos de Laguerre-Gauss (LG) são ortonormais entre si e também formam um conjunto completo de soluções da equação de paraxial. Estas duas características são suficientes para que qualquer

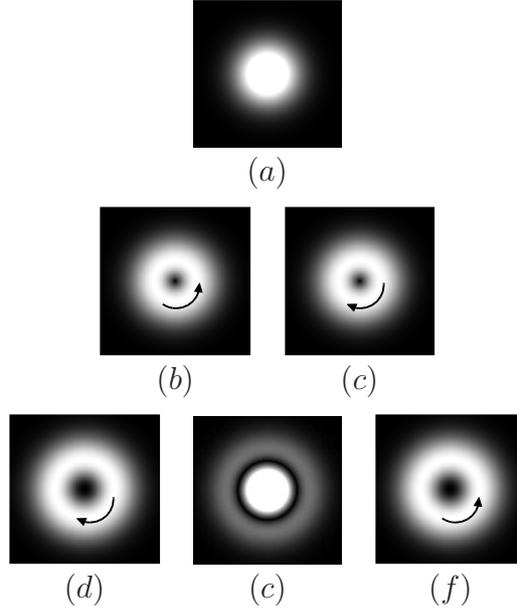


Figura 2.6: Perfis de intensidade dos modos de Laguerre-Gauss. Em (a) vemos o modo fundamental, $(p, l) = (0, 0)$. Em (b) e (c) os modos de primeira ordem, $(p, l) = (0, 1)$ e $(p, l) = (0, -1)$, respectivamente. E em (d), (e) e (f) os modos de segunda ordem, $(p, l) = (0, 2)$, $(p, l) = (1, 0)$ e $(p, l) = (0, -2)$, respectivamente.

combinação linear destes modos também seja solução da equação paraxial ¹². De fato, existe uma combinação linear de polinômios de Hermite que gera um polinômio de Laguerre [1].

$$\sum_{k=0}^{n+m} (2i)^k P_k^{n-k, m-k}(0) H_{n+m-k}(x) H_k(y) = 2^{n+m} \times \begin{cases} (-1)^m m! (x + iy)^{n-m} L_n^{n-m}(x^2 + y^2) & \text{para } n \geq m \\ (-1)^n n! (x - iy)^{m-n} L_n^{m-n}(x^2 + y^2) & \text{para } m > n \end{cases}, \quad (2.62)$$

onde

$$P_k^{n-k, m-k}(0) = \frac{(-1)^k}{2^k k!} \frac{d^k}{dt^k} [(1-t)^m (1+t)^n] \Big|_{t=0} \quad (2.63)$$

são os polinômios de Jacobi.

¹²Isto caracteriza a base de um espaço vetorial. Indicando que os modos LG também formam uma base de soluções da equação paraxial.

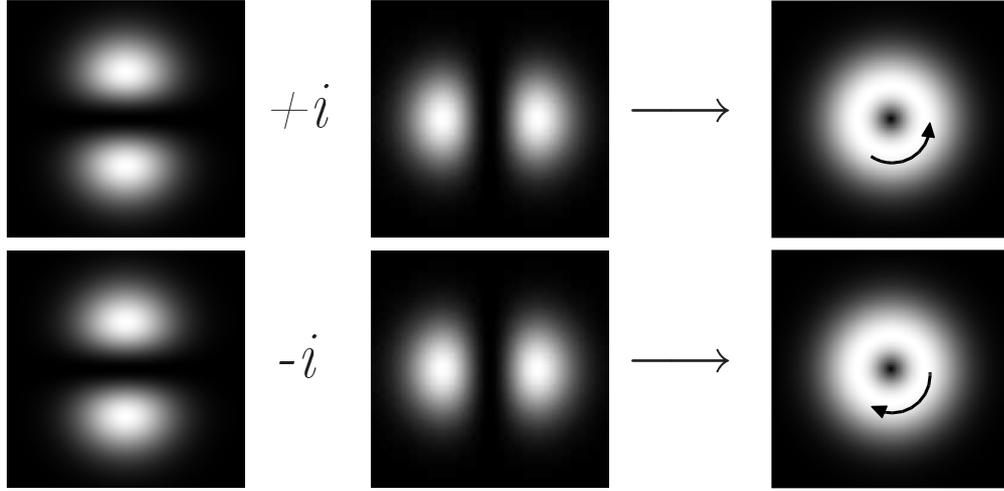


Figura 2.7: Relação entre os modos HG e os modos LG de primeira ordem.

Para os modos de primeira ordem¹³ a relação entre as bases HG e LG, é bastante simples.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (HG_{1,0} \pm i HG_{0,1}) = LG_0^{\pm 1} \quad (2.64)$$

A figura 2.7 ilustra o significado da equação anterior.

Também podemos escrever modos HG de 1ª ordem rodados de um ângulo θ , em termos dos modos $HG_{0,1}$ e $HG_{1,0}$ [1]. Em particular, quando $\theta=45^\circ(135^\circ)$, temos

$$HG_{0,1}^{45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} (HG_{0,1} + HG_{1,0}) \quad (2.65)$$

$$HG_{0,1}^{135^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} (HG_{0,1} - HG_{1,0}) \quad (2.66)$$

¹³A ordem de um modo é dada por $n+m$, onde m e n são os índices dos polinômios de Hermite.

2.2.5 A Esfera de Poincaré para Modos Espaciais

O estado de polarização de um feixe monocromático pode ser totalmente caracterizado pelos parâmetros de Stokes [17].

$$s_1 = \frac{I_{0^\circ} - I_{90^\circ}}{I_{0^\circ} + I_{90^\circ}} \quad (2.67)$$

$$s_2 = \frac{I_{45^\circ} - I_{135^\circ}}{I_{45^\circ} + I_{135^\circ}} \quad (2.68)$$

$$s_3 = \frac{I_{\circlearrowleft} - I_{\circlearrowright}}{I_{\circlearrowleft} + I_{\circlearrowright}}, \quad (2.69)$$

onde I_{0° , I_{90° , I_{45° e I_{135° são, respectivamente, as intensidades das componentes de polarização do feixe medidas segundo as direções 0° , 90° , 45° e 135° .

Para feixes totalmente polarizados, os parâmetros de Stokes se relacionam da seguinte maneira

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1 \quad (2.70)$$

Esta equação bastante familiar sugere que os parâmetros de Stokes podem ser interpretados como as coordenadas Cartesianas de uma superfície esférica de raio unitário, onde cada ponto da superfície representa um dado estado de polarização de feixe. Esta esfera é conhecida como a esfera de Poincaré [8], figura 2.8(a).

Os pólos norte e sul da esfera de Poincaré são análogos aos autoestados do momento angular de spin, luz circularmente polarizada à esquerda e luz circularmente polarizada à direita. Qualquer estado de polarização de um feixe totalmente polarizado, e portanto qualquer ponto na esfera de Poincaré, pode ser entendido como uma superposição de polarizações circulares à esquerda e à direita. Os pontos no equador da esfera representam os estados de polarização linear, a orientação da polarização é determinada pela fase relativa entre os estados de polarização circulares superpostos para gerar o estado de polarização linear.

Os modos transversais (HG e LG) de primeira ordem são isomorfos aos estados de polarização, onde os modos HG fazem o papel da polarização linear e os modos LG

o da polarização circular. Assim sendo é possível construir uma esfera de Poincaré para estes modos [30], figura 2.8(b).

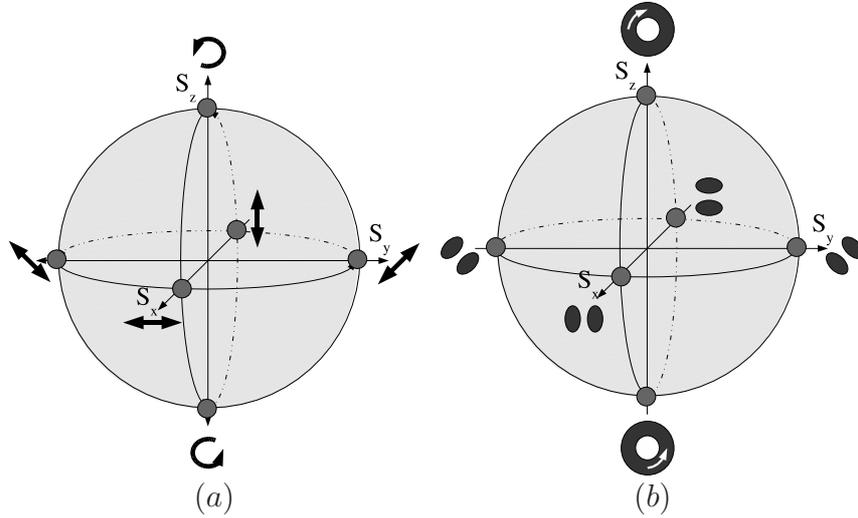


Figura 2.8: *Esfera de Poincaré para os estados de polarização e para os modos transversos de 1ª ordem.*

As coordenadas Cartesianas desta esfera também podem ser interpretadas como parâmetros de Stokes.

$$p_1 = \frac{I_{HG_{1,0}^{0^\circ}} - I_{HG_{1,0}^{90^\circ}}}{I_{HG_{1,0}^{0^\circ}} + I_{HG_{1,0}^{90^\circ}}} \quad (2.71)$$

$$p_2 = \frac{I_{HG_{1,0}^{45^\circ}} - I_{HG_{1,0}^{135^\circ}}}{I_{HG_{1,0}^{45^\circ}} + I_{HG_{1,0}^{135^\circ}}} \quad (2.72)$$

$$p_3 = \frac{I_{LG_0^1} - I_{LG_0^{-1}}}{I_{LG_0^1} + I_{LG_0^{-1}}} \quad (2.73)$$

2.3 Produção e Detecção de Modos Laguerre-Gauss

A figura 2.7 mostra como construir os modos $LG_0^{\pm 1}$ a partir dos modos HG de primeira ordem. Porém, a grande maioria dos lasers comerciais são construídos para funcionarem no modo fundamental. Então, como gerar um modo de Laguerre-Gauss?

A seguir vamos descrever dois destes métodos, um holográfico e outro que utiliza componentes ópticos astigmáticos para fazer a conversão. Veremos que este último muito assemelha-se com o método utilizado para mudar o estado de polarização de um feixe através de placas de retardo.

2.3.1 Método Holográfico

Um dos métodos mais simples para gerar feixes com momento angular orbital é o método holográfico, que utiliza placas zonais espirais (PZE) como as da figura 2.9, que são uma variação das placas zonais de Fresnel [18, 20], figura(2.9).

Para a fabricação das PZE seguimos a seguinte receita. Primeiro geramos num computador as figuras (2.9(b) e 2.9(c)), depois as imprimimos em uma impressora com uma boa resolução e em seguida fotografamos as impressões. Após revelarmos o filme, usamos os próprios negativos como máscaras para gerar os modos LG.

A geração das espirais é feita através de um programa de computador (Apêndice B) que calcula os pontos onde a função

$$|1 + e^{i(\alpha r^2 + l\theta)}| \propto \cos\left(\frac{\alpha r^2 + l\theta}{2}\right) \quad (2.74)$$

é igual a zero. Fisicamente, esta equação representa o padrão de interferência entre uma onda esférica e um feixe de Laguerre-Gauss, os pontos onde ela tem valor nulo representam as regiões a intensidade é nula. Estes pontos são dados por

$$\frac{\alpha r^2 + l\theta}{2} = (n + \frac{1}{2})\pi \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{(2n + 1)\pi - l\theta}{\alpha}}, \quad n = 0 \dots (2l - 1) \quad . \quad (2.75)$$

Nas equações acima r e θ são as coordenadas polares da figura, α é a escala radial da figura, l é a helicidade do feixe que queremos gerar e n é um inteiro que varia de zero até o número de regiões claras e escuras.

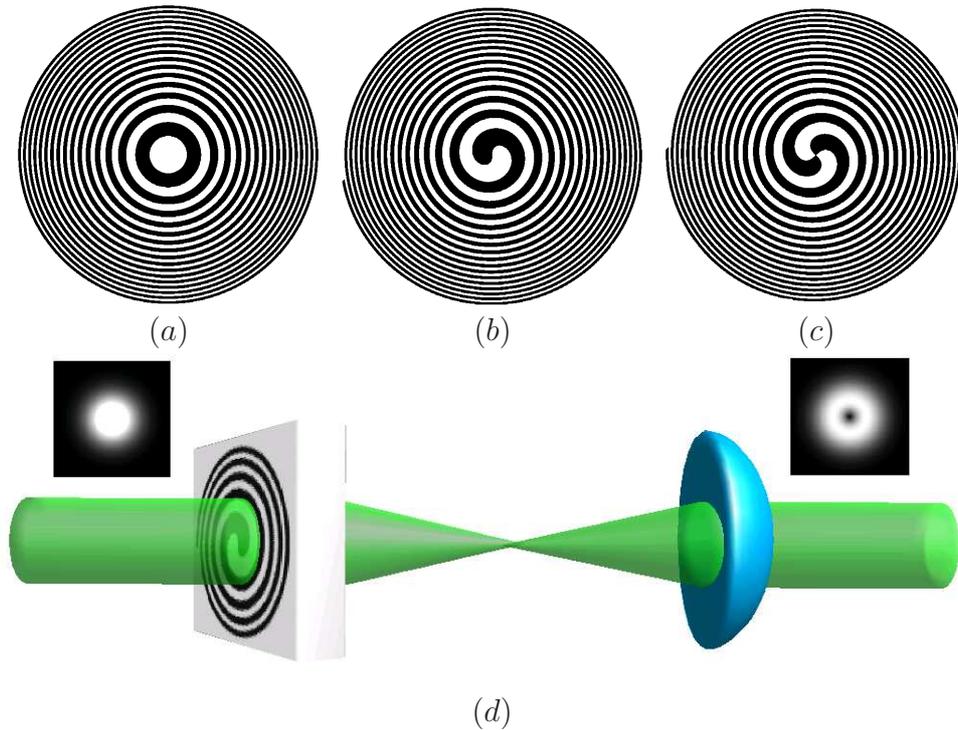


Figura 2.9: Máscaras usadas para gerar os modos LG. Em (a) uma placa zonal de Fresnel. Em (b) e em (c) temos duas placas zonais espirais (PZE) com helicidade $+1$ e $+2$, respectivamente. Em (d) o arranjo experimental básico para produção do modo LG. Assim como as placas zonais de Fresnel, as PZE também focalizam o feixe, sendo necessário recolima-lo após a passagem pela máscara.

O programa grafica as curvas dadas pela equação anterior, para o valor de l desejado, e então pinta de preto as regiões necessárias. O produto final desta rotina é um arquivo *Postscript* pronto para ser impresso e fotografado.

A figura(2.10(a)) mostra outro tipo de holograma capaz de gerar modos com momento angular. Este holograma funciona como uma rede de difração, figura(2.10(b)), onde a ordem zero da rede é o modo Gaussiano fundamental, e as ordens laterais são os modos LG [18]. Este holograma é gerado por computador através do gráfico

de densidades¹⁴ da seguinte função¹⁵

$$|1 + e^{i[\alpha(r^2+r\sin\beta)+l\theta]}| \propto \cos\left(\frac{\alpha r^2 + l\theta}{2}\right) . \quad (2.76)$$

A helicidade das ordens de difração deste tipo de máscara diferem do módulo de l entre si, como mostra a figura(2.10(b)).

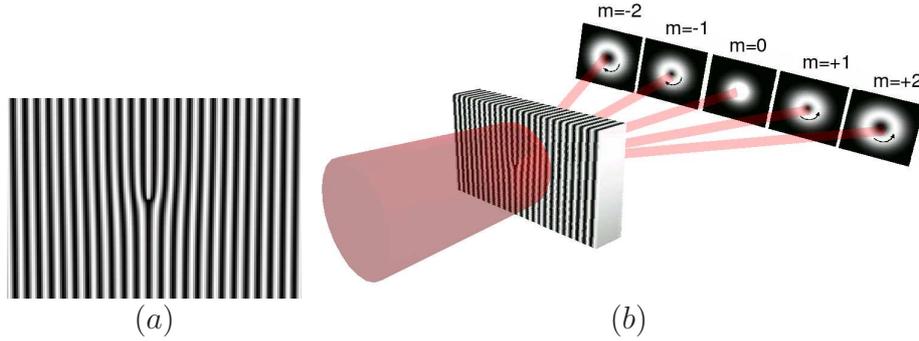


Figura 2.10: *Rede de difração bifurcada. Em (a) a rede de difração com defeito topológico gerada por computador. Em (b) um desenho esquemático do funcionamento da rede, onde m é a vorticidade do feixe.*

Este método é bastante vantajoso devido ao custo e praticidade. Porém, quando trabalhamos num regime de alta intensidade não é mais possível utilizá-lo, pois o plástico do filme derrete. Isto restringe a utilização das máscaras a experimentos onde o regime de intensidade é baixo. Há uma outra desvantagem na utilização das máscaras. Como estas são uma variação da placa zonal de fresnel, desperdiçam uma quantidade considerável de luz. Além disso para que o feixe gerado seja de boa qualidade precisamos iluminar a máscara com uma onda plana, e para isso temos que expandir o feixe que nela incide desperdiçando ainda mais potência. Uma possível solução para estes problemas é a confecção de placas zonais de fase¹⁶ [29], estas não

¹⁴Em programas como *Maple* e *Mathematica* os gráficos podem ser feitos escrevendo-se

$r = |x + iy|$ e $\theta = \arg(x + iy)$.

¹⁵Note que as PZE também podem ser geradas por este processo, basta fazer $\beta = 0$

¹⁶Placas zonais de fase podem ser encontradas em aparelhos de retroprojeção. A placa zonal destes aparelhos é a superfície onde colocamos as transparências.

desperdiçariam tanta luz quanto as placas zonais de amplitude apresentadas aqui, porém o custo de confecção deste tipo de máscara é alto comparado as máscaras apresentadas aqui.

2.3.2 Conversor de Modos por Astigmatismo

Para contornarmos as desvantagens do método holográfico de produção de modos LG num regime de altas intensidades podemos usar, além das placas zonais de fase, um método alternativo que utiliza lentes cilíndricas para transformar um modo $HG_{0,1}$ em um modo $LG_{0,1}$.

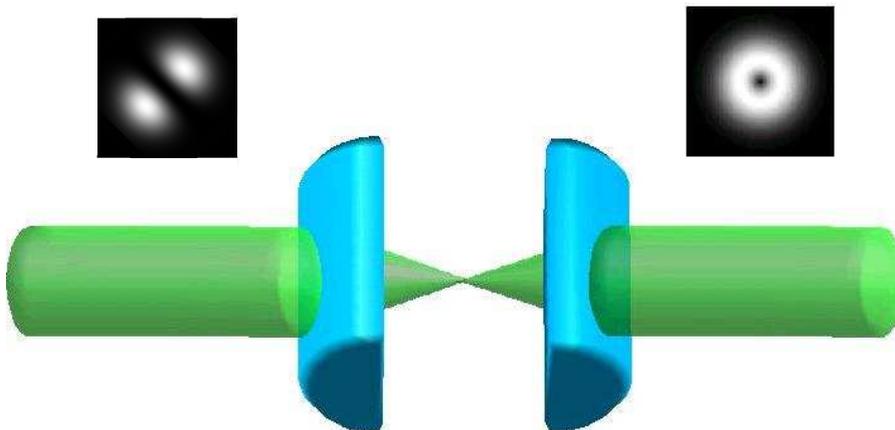


Figura 2.11: *Conversor de modos com lentes cilíndricas.*

As equações (2.62) e (2.64) mostram como as duas bases se relacionam, e o que deve ser feito para se obter um modo através do outro. A fase relativa introduzida entre os componentes da decomposição pode ser obtida explorando-se a fase de Gouy¹⁷, $\varphi(z)$.

¹⁷Em 1890 Gouy mostrou que um onda eletromagnética focalizada adquire uma fase axial adicional de π em relação a onda plana, quando passa pelo foco, porém até hoje não foi feita uma interpretação física satisfatória da fase de Gouy. Na introdução do trabalho de A. B. Ruffin *et al* [33] podem ser encontradas referências sobre o assunto.

Para um feixe Gaussiano isotrópico (não astigmático) a fase de Gouy é dada por [5]

$$(n + m + 1)\varphi(z) \quad , \quad (2.77)$$

onde $\varphi(z) = \arctan(z/z_R)$. Para um feixe astigmático a situação é um pouco diferente. Considere um modo HG astigmático, com as linhas nodais paralelas ao eixo de astigmatismo (um feixe Hermite-Gaussiano que passou por uma lente cilíndrica). A amplitude deste feixe pode ser considerada separadamente em dois planos de propagação perpendiculares (x, z) e (y, z) . Tal feixe tem fases de Gouy diferentes em cada plano de propagação

$$(n + m + 1) \varphi(z) \rightarrow (n + 1/2) \varphi_x(z) + (m + 1/2) \varphi_y(z) \quad , \quad (2.78)$$

onde

$$\varphi_x(z) = (n + 1/2) \arctan\left(\frac{z}{z_{R_x}}\right) \quad , \quad (2.79)$$

$$\varphi_y(z) = (m + 1/2) \arctan\left(\frac{z}{z_{R_y}}\right) \quad . \quad (2.80)$$

Nestas equações z_{R_x} e z_{R_y} são as distâncias de Rayleigh nos planos (x, z) e (y, z) , respectivamente. Os conversores de modos por astigmatismo exploram esta decomposição da fase de Gouy para transformar os campos, fazendo-o astigmático apenas em uma região confinada do espaço é isotrópico fora desta região, isto pode ser feito com lentes cilíndricas, figura 2.11. Incidimos o modo $HG_{0,1}$ em um par de lentes cilíndricas rodadas de 45° em relação a linha nodal do modo. Quando o feixe passa pela região entre as lentes, uma diferença de fase é introduzida entre as componentes do modo, equações (2.65), [5]. Se a fase introduzida entre as componentes for igual a $\pi/2$, o conversor transforma um modo HG rodado de 45° (135°) num modo $LG_0^{\pm 1}$, e vice-versa. Chamaremos este conversor de "conversor $\pi/2$ ". O conversor π introduz uma fase de π entre as componentes do modo, isto inverte a helicidade de um

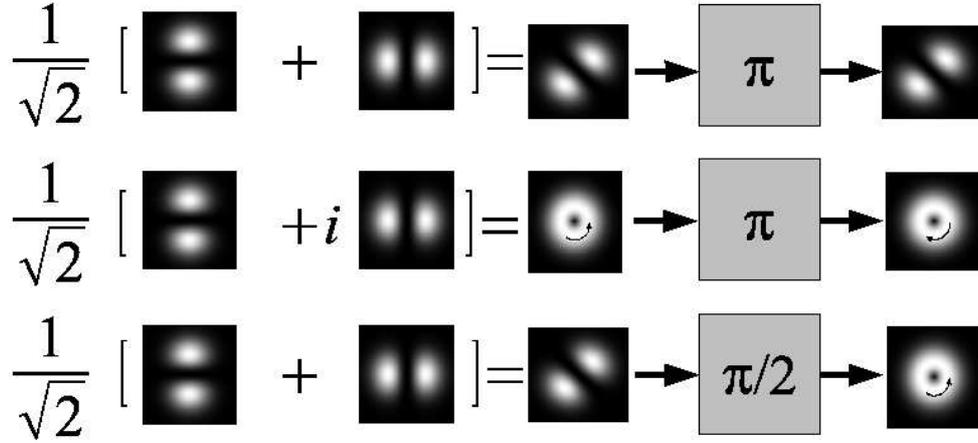


Figura 2.12: Efeito produzido pelos conversores de modo. No topo vemos o efeito produzido por um conversor π em um modo HG_{135° . ao meio o efeito do mesmo conversor sobre um modo LG_{-1} , e na base o efeito de um conversor $\pi/2$ sobre um modo HG_{135° .

modo $LG_{p,l}$ para $LG_{p,-l}$ e roda de 90° a linha nodal de um modo $HG^{45^\circ(135^\circ)}$ (de $HG_{n,m}^{45^\circ(135^\circ)}$ para $HG_{m,n}^{45^\circ(135^\circ)}$), figura (2.12).

A fase introduzida pelos conversores depende da distância d entre as lentes cilíndricas. Para um modo $HG_{0,1}^{45^\circ}$ podemos construir um conversor $\pi/2$ colocando as lentes cilíndricas a uma distância $d = f\sqrt{2}$, onde f é a distância focal das lentes, figura(2.13a). O funcionamento das lentes pressupõe uma cintura característica para o feixe incidente, portanto é preciso usar uma lente para adaptar o modo espacial do feixe ao conversor astigmático. A definição de uma w_0 para o feixe é equivalente a definição de um z_R para o mesmo, isso se deve a estreita relação existente entre essas duas grandezas representada pela equação $z_R = kw_0^2/2$.

Um conversor π pode ser construído colocando-se as lentes cilíndricas a uma distância $d = 2f$, figura(2.13b). O conversor π só funciona próximo ao limite da ótica geométrica, para contornar esta dificuldade podemos usar um prisma de Dove, que produz o mesmo efeito de um conversor π , figura 2.14.

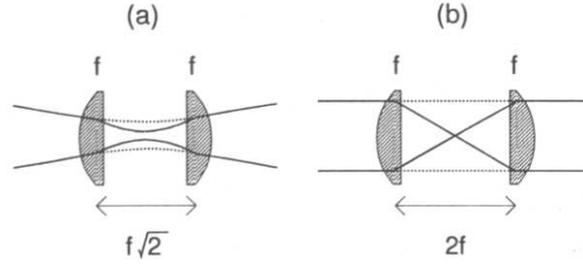


Figura 2.13: (a) *Conversor $\pi/2$* , e (b) *Conversor π* [5].

Como a polarização e os modos de ordem 1 são isomórfos, o papel dos conversores é totalmente análogo ao das placas de retardo usadas para mudar o estado de polarização da luz.

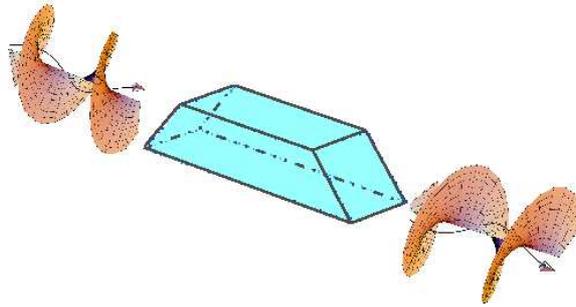


Figura 2.14: *Prisma de Dove*

Para que os conversores com lentes cilíndricas transformem um modo $HG_{0,1}^{45^\circ(135^\circ)}$ em um modo $LG_{0,\pm 1}$, precisamos de um laser que opere no modo $HG_{0,1}$. Para contornar essa dificuldade, podemos simular um modo $HG_{0,1}^{45^\circ}$, seguindo a referência [32].

Um feixe no modo $HG_{0,1}^{45^\circ}$ é equivalente a soma de um $HG_{0,1}$ com um $HG_{1,0}$

$$HG_{0,1}^{45^\circ} \propto \left[\frac{2\sqrt{2}(x+y)}{w(z)} \right] \exp \left[-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)} \right] \quad (2.81)$$

onde $w(z)$, dado pela equação (2.44), é o raio do feixe.

Usando dois feixes no modo Gaussiano fundamental, com uma diferença de fase de π entre eles, localizados, respectivamente, nos pontos de máximo e mínimo do campo da equação (2.81), obtemos

$$HG_{0,1}^{45^\circ} \sim \exp \left[-\frac{(x - w_0/\sqrt{2})^2 + (y - w_0/\sqrt{2})^2}{w_0^2} \right] - \exp \left[-\frac{(x + w_0/\sqrt{2})^2 + (y + w_0/\sqrt{2})^2}{w_0^2} \right] \quad (2.82)$$

Esta configuração é uma boa aproximação do campo descrito na equação (2.81), e pode ser obtida através do arranjo experimental mostrado na figura 2.15.

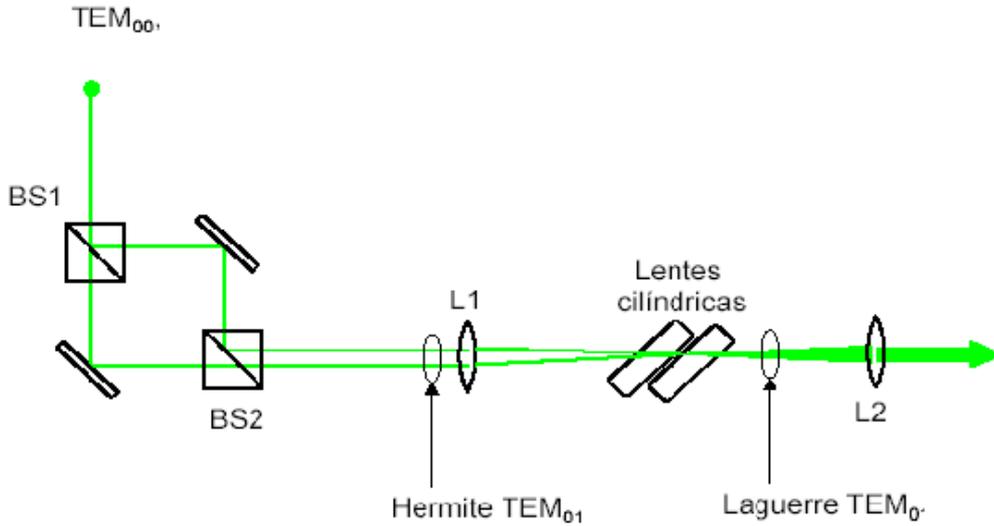


Figura 2.15: Arranjo experimental para produção de modos LG de primeira ordem. O ajuste da fase relativa entre os feixes é feito pelo $BS2$.

O interferômetro visto na figura é o responsável pela produção do modo $HG_{0,1}^{45^\circ}$. Um espelho móvel no interferômetro tem a função de ajustar a fase entre os dois "spots" Gaussianos.

2.3.3 Detecção

Após a produção de um modo LG é necessária uma averiguação do produto final. Não basta detetarmos um perfil de intensidade como os da figura 2.6, precisamos analisar a fase do campo e encontrar estruturas como as da figura 2.16. Para fazer isto, basta interferir o feixe com ele mesmo em um interferômetro de Michelson ligeiramente desalinhado, de modo a sobrepor a singularidade de fase vinda de um dos braços do interferômetro sobre o anel de intensidade vindo do outro braço, e vice-versa, figura(2.16(c)). Este procedimento produz um padrão de interferência como o das figuras (2.16(a)). Se interferirmos um modo LG colinearmente com uma onda esférica, figura(2.16(d)), obtemos os padrões de interferência das figuras (2.16(b)). Já que estes padrões são os mesmos obtidos na confecção das PZE, podemos garantir que geramos um dos modos de Laguerre-Gauss [9].

No capítulo seguinte passaremos à descrição do Oscilador Paramétrico Óptico e da dinâmica dos modos de Laguerre-Gauss neste contexto.

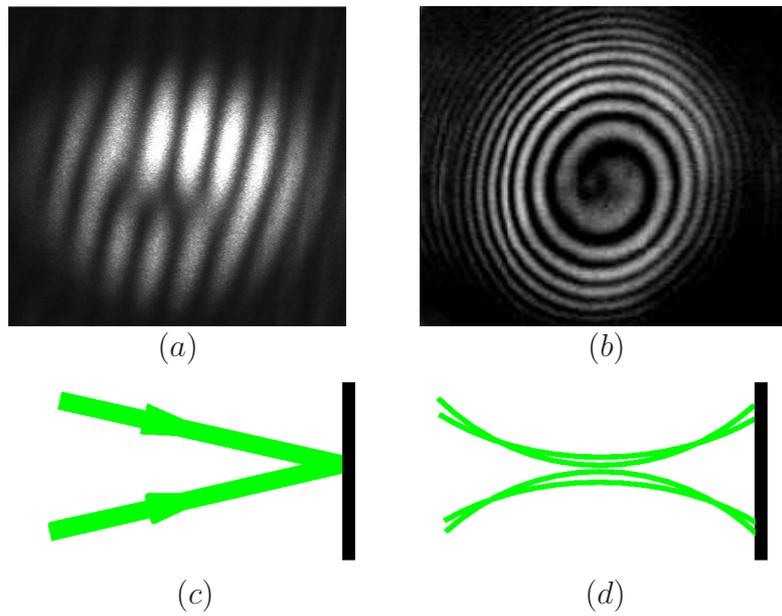


Figura 2.16: Em (a) vemos o padrão gerado pela interferência, (c), entre modos LG , o número de bifurcações é igual ao módulo da helicidade. Em (b) temos interferências, (d), do modo com uma onda esférica, o módulo da helicidade dos feixes é igual ao número de espirais claras ou escuras.

Capítulo 3

Amplificação e Oscilação Paramétrica

Contents

3.1	Amplificação Paramétrica	40
3.2	Oscilação Paramétrica	44

Quando feixes de luz interagem dentro de meios não-lineares, harmônicos e sub-harmônicos do feixe original podem ser gerados. Isto é o que acontece dentro de um oscilador paramétrico óptico (OPO). Constituído por uma cavidade óptica, responsável pela realimentação do sistema, com um cristal não-linear no seu interior, um feixe de bombeio gera os feixes signal e idler pela interação com um meio que possui uma não-linearidade do tipo χ^2 . Este processo é uma importante fonte de estados comprimidos da luz.

Neste capítulo descreveremos o funcionamento de um OPO começando pelo estudo da interação da luz com um meio não linear, seguido do comportamento da luz dentro de cavidades ópticas, encerrando o capítulo com a oscilação paramétrica.

3.1 Amplificação Paramétrica

A óptica não-linear estuda os fenômenos que ocorrem devido a modificações das propriedades ópticas dos sistemas materiais pela presença da luz. Efeitos ópticos não-lineares são aqueles em que a resposta do sistema material ao campo eletromagnético aplicado depende não-linearmente do campo. Exemplos típicos são a geração de segundo harmônico, a soma e subtração de frequências, a mistura de ondas e a amplificação paramétrica [37, 40].

Os fenômenos eletromagnéticos são governados pelas equações de Maxwell para os campos \vec{E} e \vec{B}

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (3.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (3.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (3.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad , \quad (3.4)$$

onde \vec{J} e ρ estão relacionados pela equação da continuidade

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad . \quad (3.5)$$

A densidade de corrente \vec{J} e a densidade de cargas ρ podem ser escritas como uma expansão em multipólos [21] ou em termos de uma polarização generalizada \mathbb{P} , onde

$$\vec{J} = \vec{J}_{dc} + \frac{\partial \mathbb{P}}{\partial t} \quad (3.6)$$

onde \vec{J}_{dc} é uma densidade de corrente estacionária e, pela equação da continuidade,

$$\rho = -\vec{\nabla} \cdot \mathbb{P} \quad . \quad (3.7)$$

A resposta de um meio material a campos aplicados a ele é descrita pela polarização, \mathbb{P} , do meio. Em geral, a polarização é uma função não-linear de \vec{E} . Quando

estamos num regime em que o campo elétrico é suficientemente fraco, podemos escrever a polarização como uma série de potências de \vec{E} .

$$\mathbb{P} = \vec{P}_L + \vec{P}_{NL} \quad , \quad (3.8)$$

onde

$$\left(\vec{P}_L\right)_l = \epsilon_0 \chi_{lm} E_m \quad (3.9)$$

e

$$\left(\vec{P}_{NL}\right)_l = \chi_{lmn} E_m E_n + \chi_{lmno} E_m E_n E_o + \dots \quad (3.10)$$

O caráter tensorial de χ_{lm} dá conta dos efeitos de bi-refringência e astigmatismo do meio [13].

Em particular, se estivermos lidando com meios não-lineares de segunda ordem, iluminados por campos oscilantes do tipo

$$\vec{E}^{(\omega_s)}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \left[\vec{E}^{(\omega_s)} e^{i(\omega_s t - k_s z)} + \vec{E}^{(\omega_s)*} e^{-i(\omega_s t - k_s z)} \right] \quad (3.11)$$

$$\vec{E}^{(\omega_p)}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \left[\vec{E}^{(\omega_p)} e^{i(\omega_p t - k_p z)} + \vec{E}^{(\omega_p)*} e^{-i(\omega_p t - k_p z)} \right] \quad , \quad (3.12)$$

podemos representar $(P_{NL})_l$ como

$$(P_{NL})_l = \chi_{lmn} E_m^{(\omega_s)} E_n^{(\omega_p)} \quad (3.13)$$

$$= \frac{\chi_{lmn}}{4} \left[E_m^{(\omega_s)} E_n^{(\omega_p)} e^{i[(\omega_p + \omega_s)t - (n_p k_p + n_s k_s)z]} \right] \quad (3.14)$$

$$+ E_m^{(\omega_s)*} E_n^{(\omega_p)*} e^{-i[(\omega_p + \omega_s)t - (n_p k_p + n_s k_s)z]} \quad (3.15)$$

$$+ E_m^{(\omega_s)} E_n^{(\omega_p)*} e^{-i[(\omega_p - \omega_s)t - (n_p k_p - n_s k_s)z]} \quad (3.16)$$

$$+ E_m^{(\omega_s)*} E_n^{(\omega_p)*} e^{i[(\omega_p - \omega_s)t - (n_p k_p - n_s k_s)z]} \quad , \quad (3.17)$$

onde n_j ($j = p, s, i$) são os respectivos índices de refração do meio para os campos.

Esta polarização não-linear serve de fonte para novos campos¹ gerados no material, com frequências $\omega = \omega_s + \omega_p$ e $\omega = \omega_s - \omega_p$. Para que o processo ocorra

¹Ao longo do texto adotaremos a nomenclatura Signal (s), Idler (i) e Bombeio (p) para representar os campos envolvidos no processo estudado aqui.

eficientemente, é necessário que o campo gerado numa dada posição do cristal interfira construtivamente com o campo gerado nas posições subsequentes. Quando isto ocorre, dizemos que há "casamento de fase". A relação de dispersão no material desempenha um papel fundamental para a observância desta condição. Por exemplo, para que a geração de diferença de frequência seja eficiente, é necessário que as frequências envolvidas satisfaçam a

$$n(\omega_p)\omega_p - n(\omega_s)\omega_s = n(\omega_p - \omega_s)(\omega_p - \omega_s) \quad (3.18)$$

ou ainda,

$$n_p k_p - n_s k_s = n_i k_i \quad , \quad (3.19)$$

onde $k_i = \omega_i/c$, $n_i = n(\omega_i)$ e $\omega_i = \omega_p - \omega_s$. Normalmente esta condição não é satisfeita quando os campos envolvidos no processo possuem todos a mesma polarização. Contudo é possível contornar esta dificuldade valendo-se do efeito de birrefringência. Na prática, para cristais não-lineares, podemos escolher o tipo de efeito, soma ou diferença de frequências, usando um cristal com o corte desejado².

Nesta tese estaremos interessados na geração de diferença de frequência, também chamada de "conversão paramétrica descendente".

O método desenvolvido na seção 2.2.1 do capítulo 2, para a dedução da equação paraxial também pode ser feito quando lidamos com meios não-lineares [22]. Seguindo aquele método para meios não condutores, e escrevendo as componentes do campo elétrico gerado no cristal como $\mathfrak{E}_l^{(\omega_i)} = E_l^{(\omega_i)}(\vec{r}) \exp[i(\omega_i t - n_i k_i z)]$, chegamos a

$$\nabla_t^2 E_l^{(\omega_i)} - 2in_i k_i \frac{\partial E_l^{(\omega_i)}}{\partial z} = -\mu_0 \omega_i^2 \chi_{lmn} E_m^{(\omega_s)*} E_n^{(\omega_p)} e^{-i\Delta k z} \quad (3.20)$$

que é a mesma equação paraxial obtida na seção 2.2.1, mas agora com um termo de fonte quadrático no campo. Nesta equação $\Delta k = n_p k_p - n_s k_s - n_i k_i$ é o desacordo de fase entre os campos e ∇_t^2 é o operador laplaciano transversal.

²O corte segundo uma dada direção em relação aos planos cristalográficos determina que tipo de casamento de fase o cristal terá.

Como dissemos no capítulo anterior, os modos normais de propagação de um feixe eletromagnético formam uma base ortogonal de soluções da equação paraxial, isso nos permite decompor o campo em termos de suas componentes nestas bases [35]. No entanto, devemos lembrar que agora estamos lidando com a propagação do campo dentro de um meio não-linear. Tal meio atua como um mediador nas trocas de energia entre os campos envolvidos no processo em questão. Sendo assim devemos considerar o efeito destas trocas de energia entre os campos através de mudanças nas suas amplitudes a medida em que se propagam dentro do meio não-linear. Desta forma, escreveremos o campo elétrico como uma superposição de seus modos de propagação.

$$E(\vec{r}) = \sum_{\beta} \psi_{\beta}(\vec{\rho}, z) A_{\beta}(z) \quad , \quad (3.21)$$

onde $\vec{\rho} = (x, y)$, β é um conjunto de índices que identificam um dado modo e $\psi_{\beta}(\vec{\rho}, z)$ pode representar tanto um modo de Hermite-Gauss (2.56) quanto um modo de Laguerre-Gauss (2.61).

Sendo assim, basta calcularmos as derivadas parciais da equação (3.20) e projetar o campo em uma base HG ou LG, levando em conta a ortogonalidade das funções $\psi_{n,m}$. Este procedimento nos leva à seguinte equação para $A_{\beta}(z)$

$$\frac{dA_{\beta}}{dz} = -i\Gamma_{\beta} \sum_{\gamma, \sigma} \Lambda_{\beta, \gamma, \sigma}(z) A_{\gamma}^* A_{\sigma} e^{-i\Delta k z} \quad , \quad (3.22)$$

onde

$$\Gamma_j = \frac{\mu_0 \omega_j c \chi_j}{2n_j} \quad , \quad (j = \beta, \gamma, \sigma) \quad , \quad (3.23)$$

é a constante de acoplamento definida pelo cristal, e a integral de recobrimento

$$\Lambda_{\beta, \gamma, \sigma}(z) = \int d^2 \rho \psi_{\beta}^*(\vec{\rho}, z) \psi_{\gamma}^*(\vec{\rho}, z) \psi_{\sigma}(\vec{\rho}, z) \quad (3.24)$$

determina o acoplamento entre os modos de propagação.

Neste trabalho estamos interessados em efeitos não-lineares de segunda ordem, nos quais apenas três campos participam do processo. Sendo assim, devemos resolver

três equações idênticas a (3.22) para cada campo correspondente às frequências ω_β , ω_γ e ω_σ . Isso pode ser feito muito facilmente se estivermos trabalhando com meios não-lineares em que o acoplamento entre os campos seja fraco. Neste regime de acoplamento fraco, podemos admitir que, ao passar pelo meio não-linear, as amplitudes dos campos não sofrem mudanças significativas. Sendo assim, podemos aproximar a integração da equação (3.22) para

$$A_\beta(l_c) = A_\beta(0) - i\xi_{\beta,\gamma,\sigma}A_\gamma^*(0)A_\sigma(0) \quad (3.25)$$

$$A_\gamma(l_c) = A_\gamma(0) - i\xi_{\gamma,\beta,\sigma}A_\beta^*(0)A_\sigma(0) \quad (3.26)$$

$$A_\sigma(l_c) = A_\sigma(0) - i(\xi_{\sigma,\beta,\gamma})^*A_\beta(0)A_\gamma(0) \quad . \quad (3.27)$$

Onde supomos um comprimento l_c para o meio não-linear e $\xi_{\beta,\gamma,\sigma}$ são os acoplamentos dos campos, dadas por

$$\xi_{\beta,\gamma,\sigma} = \frac{\mu_0\omega_\beta c\chi}{2n_\beta} \int_0^{l_c} dz \Lambda_{\beta,\gamma,\sigma}(z)e^{-i\Delta kz} \quad . \quad (3.28)$$

3.2 Oscilação Paramétrica

Queremos modelar a dinâmica dos campos intracavidade através de equações de movimento construídas a partir da interação não linear descrita na seção anterior. Isso pode ser feito contabilizando as mudanças sofridas pelos campos em uma volta completa numa cavidade de comprimento óptico $L_o = L + (n - 1)l_c$, figura 3.1.

Mantendo apenas os termos lineares na constante de acoplamento, obtemos

$$A_\beta(2L_o) = \left[r_1^\beta r_2^\beta A_\beta(2L_o) - ir_1^\beta r_2^\beta \xi_{\beta,\gamma,\sigma} A_\gamma^*(0) A_\sigma(0) e^{-i\Delta ka} \right. \\ \left. - ir_1^\beta r_2^\gamma r_2^\sigma \xi_{\beta,\gamma,\sigma} A_\gamma^*(0) A_\sigma(0) e^{-i\Delta kl_c + \Delta k_0(a+2b)} \right] e^{-2ik_\beta[(a+b)+n_\beta l_c]} \quad (3.29)$$

$$A_\gamma(2L_o) = \left[r_1^\gamma r_2^\gamma A_\gamma(2L_o) - ir_1^\gamma r_2^\gamma \xi_{\gamma,\beta,\sigma} A_\beta^*(0) A_\sigma(0) e^{-i\Delta ka} \right. \\ \left. - ir_1^\gamma r_2^\beta r_2^\sigma \xi_{\gamma,\beta,\sigma} A_\beta^*(0) A_\sigma(0) e^{-i\Delta kl_c + \Delta k_0(a+2b)} \right] e^{-2ik_\gamma[(a+b)+n_\gamma l_c]} \quad (3.30)$$

$$A_\sigma(2L_o) = \left[r_1^\sigma r_2^\sigma A_\sigma(2L_o) - ir_1^\sigma r_2^\sigma (\xi_{\sigma,\beta,\gamma})^* A_\gamma(0) A_\beta(0) e^{-i\Delta ka} \right. \\ \left. - ir_1^\sigma r_2^\sigma r_2^\sigma (\xi_{\sigma,\beta,\gamma})^* A_\gamma(0) A_\beta(0) e^{-i\Delta kl_c + \Delta k_0(a+2b)} \right] e^{-2ik_\sigma[(a+b)+n_\sigma l_c]} \quad (3.31)$$

onde $r_{1(2)}^j$ é a refletividade dos espelhos de entrada e saída da cavidade, figura 3.1, para $j = \beta, \gamma, \sigma$.

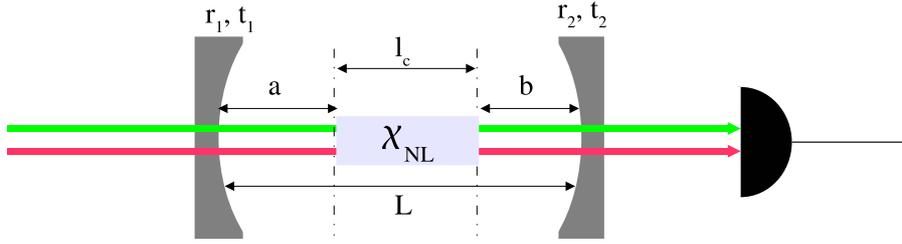


Figura 3.1: Cavidade do OPO. $r_{1(2)}$ e $t_{1(2)}$ são, respectivamente, os coeficientes de reflexão e transmissão do espelho 1(2).

Se a cavidade for de alta qualidade, os espelhos que a compõem tem um coeficiente de reflexão muito próximo da unidade. Isso nos permite fazer a seguinte aproximação

$$r = \sqrt{1 - t^2} \approx 1 - \frac{t^2}{2} \Rightarrow r_1 r_2 \approx \left(1 - \frac{t_1^2}{2} \right) \left(1 - \frac{t_2^2}{2} \right) \approx 1 - \frac{T_1 + T_2}{2} \quad (3.32)$$

onde $t_{1(2)}$ é o coeficiente de transmissão e $T_{1(2)}$ é a transmitância dos espelhos.

Uma cavidade óptica, como dissemos anteriormente, impõe restrições às frequências que podem ressoar dentro dela. A frequência característica, ω_c , da cavidade, é

dada em termos do tempo de percurso de ida e volta por $\omega_c = 2\pi m/\tau$, onde m é inteiro. Então, para um campo quase ressonante com a cavidade, nós temos

$$2kL_o = 2m\pi + \Delta\phi \quad \Rightarrow \quad \Delta\phi = (\omega - \omega_c)\tau \quad . \quad (3.33)$$

onde ω é a frequência angular do campo.

O último passo na construção das equações dinâmicas do OPO é efetuar a derivada "coarse grain", que consiste em subtrair o campo inicial do campo após uma volta completa na cavidade, dividindo o resultado pelo tempo de percurso, τ , dos campos dentro da cavidade, isto é

$$\frac{dA}{dt} \approx \frac{A(2L_o) - A(0)}{\tau} \quad . \quad (3.34)$$

Feito isso obtemos as equações para os modos dentro da cavidade.

$$\frac{dA_\beta}{dt} = -(\kappa_\beta + i\Delta_\beta)A_\beta - i\zeta_{\beta,\gamma,\sigma}A_\gamma^*A_\sigma \quad (3.35)$$

$$\frac{dA_\gamma}{dt} = -(\kappa_\gamma + i\Delta_\gamma)A_\gamma - i\zeta_{\gamma,\beta,\sigma}A_\beta^*A_\sigma \quad (3.36)$$

$$\frac{dA_\sigma}{dt} = -(\kappa_\sigma + i\Delta_\sigma)A_\sigma - i\zeta_{\sigma,\beta,\gamma}^*A_\beta A_\gamma \quad (3.37)$$

com κ_j e Δ_j dados por

$$\kappa_j = \frac{T_{1j} + T_{2j}}{2\tau} \quad (3.38)$$

$$\Delta_j = \omega_j - \omega_c \quad (3.39)$$

para $j = \beta, \gamma$ e σ , respectivamente, são as taxas de decaimento dos campos dentro da cavidade e as dessintonias entre os campos e a cavidade. A nova constante de acoplamento é dada por

$$\zeta_{\beta,\gamma,\sigma} = \frac{2}{\tau_\beta} \xi_{\beta,\gamma,\sigma} e^{-i[\Delta k_0(a+b) + \Delta k l_c/2]} \cos(\Delta k_0 b + \Delta k l_c/2) \quad (j = \beta, \gamma, \sigma) \quad . \quad (3.40)$$

As equações anteriores tomam uma forma mais simples quando as re-escrevemos em termos de amplitudes de número de fótons, $\alpha_\beta = |\alpha_\beta|e^{-i\theta_\beta}$, que se relacionam

com as amplitudes lentamente variáveis, A_β , através de

$$\alpha_\beta = -i\sqrt{\frac{2n_\beta\epsilon_0c\tau_\beta}{\hbar\omega_\beta}}A_\beta \quad , \quad (3.41)$$

onde $|\alpha_\beta|^2$ é *numericamente* igual ao número de fótons no modo β . Nestas variáveis, a constante de acoplamento é dado por

$$\begin{aligned} \chi_{\beta,\gamma,\sigma}^{ef} &= \chi\sqrt{\frac{\hbar\omega_\sigma\omega_\gamma\omega_\beta}{2\epsilon_0cn_\sigma n_\gamma n_{beta}\tau_\sigma\tau_\gamma\tau_\beta}}\left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0}\right) \\ &\times e^{-i[\Delta k_0(a+b)+\Delta kl_c/2]}\cos(\Delta k_0b + \Delta kl_c/2) \\ &\times \int_0^{l_c}\Lambda_{\beta,\gamma,\sigma}(z)e^{-i\Delta kz}dz \quad . \end{aligned} \quad (3.42)$$

As equações de movimento nas novas variáveis são

$$\frac{d\alpha_\sigma}{dt} = -(\kappa_\sigma + i\Delta_\sigma)\alpha_\sigma + \chi_{\sigma,\beta,\gamma}\alpha_\gamma\alpha_\beta \quad (3.43)$$

$$\frac{d\alpha_\gamma}{dt} = -(\kappa_\gamma + i\Delta_\gamma)\alpha_\gamma - \chi_{\gamma,\beta,\sigma}\alpha_\beta^*\alpha_\sigma \quad (3.44)$$

$$\frac{d\alpha_\beta}{dt} = -(\kappa_\beta + i\Delta_\beta)\alpha_\beta - \chi_{\beta,\gamma,\sigma}\alpha_\gamma^*\alpha_\sigma \quad . \quad (3.45)$$

No próximo capítulo faremos um estudo teórico da dinâmica de modos em uma cavidade OPO confocal. Neste regime de operação, as ressonâncias dos campos intracavidade estão dispostos como na figura 3.2. Repare que na figura 3.2 os campos estão triplamente ressonantes, os picos de ressonância pares do feixe de bombeio coincidem com os picos de ressonância ímpares³ dos feixes convertidos. Além disto, em primeira ordem no acoplamento entre os modos, a integral de recobrimento (3.24) impõe uma regra de seleção de paridade para os campos ressonantes, o produto de funções $\psi_\beta(\vec{\rho}, z)\psi_\gamma^*(\vec{\rho}, z)\psi_\sigma^*(\vec{\rho}, z)$ deve ser uma função par, para que $\Lambda_{\beta,\gamma,\sigma}(z)$ seja diferente de zero, por exemplo, $\psi_{l=-1}(\vec{\rho}, z)\psi_{l=+1}^*(\vec{\rho}, z)\psi_{l=0}^*(\vec{\rho}, z)$.

Quando colocamos o cristal dentro da cavidade, a posição dos picos de ressonância sofre um pequeno deslocamento devido à anisotropia do cristal. Este efeito pode

³A paridade de um pico é dada pela paridade da ordem do seu modo. No caso dos modos HG a paridade do modo é dada por, $m + n$, e no caso dos modos LG por, $2p + l$.

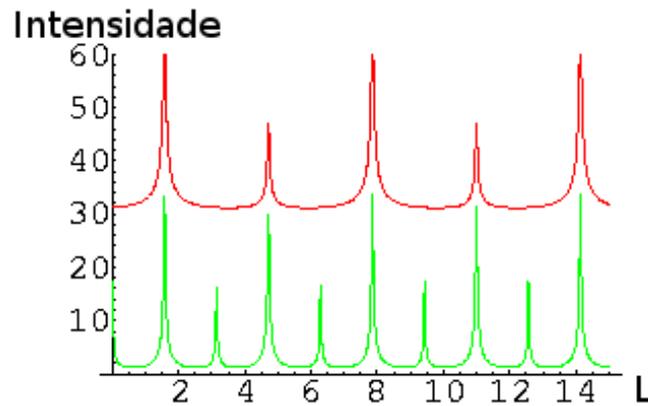


Figura 3.2: *Simulação dos picos de ressonância intracavidade em função do comprimento da cavidade em unidades arbitrárias. Os picos maiores são as ressonâncias dos modos pares e os picos menores as ressonâncias dos modos ímpares. Note que há ressonâncias pares do feixe de bombeio (verde) coincidindo com ressonâncias ímpares dos feixes convertidos (vermelho).*

ser compensado mudando-se o casamento de fase do cristal, através de um sistema que regula a sua temperatura. Portanto o estudo da dinâmica de modos será feito supondo um regime triplamente ressonante, com o feixe de bombeio no modo fundamental e os feixes convertidos nos modos LG de primeira ordem.

Capítulo 4

Dinâmicas de Modos Transversos

"O que torna uma resolução tão difícil é não sabermos o que
queremos e o quanto queremos."

Nilton Bonder, rabino.

Contents

4.1	Dinâmicas dos Modos sem Injeção	50
4.2	Dinâmicas dos modos com Injeção	55
4.2.1	Análise de Estabilidade Linear	64
4.3	Conjugação de Fase Geométrica	66

Neste capítulo descreveremos, classicamente, a dinâmica dos modos dentro da cavidade OPO em dois regimes. O primeiro apenas com injeção do feixe de bombeio (p), onde veremos como se comportam as soluções estacionárias dos campos convertidos, a existência de um limiar de oscilação bem definido, e como interpretar as soluções obtidas a partir dos parâmetros de Stokes e da esfera de Poincaré. No segundo regime faremos o mesmo estudo da dinâmica do OPO, porém agora com uma injeção no feixe signal (s).

4.1 Dinâmicas dos Modos sem Injeção

Vamos supor uma cavidade OPO, bombeada por um modo $TEM_{0,0}$, e considerar um regime de operação no qual os modos convertidos oscilem em modos de 1ª ordem. Neste caso, descreveremos a dinâmica dos campos convertidos na base LG. Isso faz com que tenhamos cinco equações dinâmicas para o OPO, onde os termos de acoplamento são todos do tipo

$$\begin{aligned} \chi_{ef} = \chi_{-1,+1,0}^{ef} &= \chi \sqrt{\frac{\hbar \omega_\sigma \omega_\gamma \omega_\beta}{2\epsilon_0 c n_\sigma n_\gamma n_{beta} \tau_\sigma \tau_\gamma \tau_\beta}} \left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \right) \\ &\times e^{-i[\Delta k_0(a+b) + \Delta k l_c/2]} \cos(\Delta k_0 b + \Delta k l_c/2) \\ &\times \int_0^{l_c} \Lambda_{-1,+1,0}(z) e^{-i\Delta k z} dz \quad . \end{aligned} \quad (4.1)$$

o que nos permite omitir os índices na constante de acoplamento dos modos. A escolha dos modos espaciais têm conseqüências diretas sobre o limiar de oscilação. Quanto maior a diferença entre a ordem dos modos, menor é o valor da integral de recobrimento (3.24), diminuindo o acoplamento entre os campos dentro do cristal. Além disso estamos interessados em estudar o regime de frequências degeneradas, em que $\omega_s = \omega_i = \omega$ e $\kappa_s = \kappa_i = \kappa$. As equações dinâmicas do OPO são então,

$$\frac{d\alpha_0^p}{dt} = -(\kappa_p + i\Delta_p)\alpha_0^p + \chi_{ef}^* (\alpha_{+1}^s \alpha_{-1}^i + \alpha_{-1}^s \alpha_{+1}^i) + \eta_p \alpha_{in}^p \quad (4.2)$$

$$\frac{d\alpha_{+1}^s}{dt} = -(\kappa + i\Delta)\alpha_{+1}^s - \chi_{ef} \alpha_{-1}^{i*} \alpha_0^p \quad (4.3)$$

$$\frac{d\alpha_{-1}^s}{dt} = -(\kappa + i\Delta)\alpha_{-1}^s - \chi_{ef} \alpha_{+1}^{i*} \alpha_0^p \quad (4.4)$$

$$\frac{d\alpha_{+1}^i}{dt} = -(\kappa + i\Delta)\alpha_{+1}^i - \chi_{ef} \alpha_{-1}^{s*} \alpha_0^p \quad (4.5)$$

$$\frac{d\alpha_{-1}^i}{dt} = -(\kappa + i\Delta)\alpha_{-1}^i - \chi_{ef} \alpha_{+1}^{s*} \alpha_0^p \quad (4.6)$$

onde $\eta_p = \sqrt{T_{P1}}/\tau_p$ é o acoplamento do campo injetado com o espelho de entrada.

Para estudarmos o comportamento estacionário dos modos, podemos supor, em primeira aproximação, um regime ressonante, onde todos os campos estão em sintonia

nia com a cavidade, ou seja, $\Delta = \Delta_p = 0$. Os valores estacionários dos campos são dados pelas soluções do sistema de equações algébricas não-linear a seguir.

$$\alpha_0^p = \frac{\chi_{ef}}{\kappa_p} [\alpha_+^s \alpha_-^i + \alpha_-^s \alpha_+^i] + \frac{\eta_p}{\kappa_p} \alpha_{in}^p \quad (4.7)$$

$$\alpha_+^s = -\frac{\chi_{ef}}{\kappa} [\alpha_-^{i*} \alpha_0^p] \quad (4.8)$$

$$\alpha_-^s = -\frac{\chi_{ef}}{\kappa} [\alpha_+^{i*} \alpha_0^p] \quad (4.9)$$

$$\alpha_+^i = -\frac{\chi_{ef}}{\kappa} [\alpha_-^{s*} \alpha_0^p] \quad (4.10)$$

$$\alpha_-^i = -\frac{\chi_{ef}}{\kappa} [\alpha_+^{s*} \alpha_0^p] \quad , \quad (4.11)$$

mais os complexos conjugados das equações. Os índices ± 1 foram substituídos simplesmente por \pm .

Se analisarmos as fases destas equações, fazendo $\theta_{in}^p = 0$, veremos que

$$\theta^p = \theta_{in}^p = 0 \quad (4.12)$$

$$\theta_+^s + \theta_-^i = \varphi \quad (4.13)$$

$$\theta_-^s + \theta_+^i = \varphi \quad , \quad (4.14)$$

onde φ é a fase de χ_{ef} .

Multiplicando a equação para α_+^s por α_-^i e a equação para α_-^s por α_+^i e subtraindo os resultados, veremos que

$$|\alpha_+^s| = |\alpha_-^i| = A \quad (4.15)$$

$$|\alpha_-^s| = |\alpha_+^i| = B \quad , \quad (4.16)$$

e portanto

$$\alpha_+^s = A e^{i\theta_+^s} \quad (4.17)$$

$$\alpha_-^s = B e^{i\theta_-^s} \quad (4.18)$$

$$\alpha_+^i = A e^{i(\theta_+^i + \varphi)} \quad (4.19)$$

$$\alpha_-^i = B e^{i(\theta_-^i + \varphi)} \quad . \quad (4.20)$$

Substituindo estes resultados na equação para α_0^p , lembrando que no regime ressonante α_0^p está em fase com a injeção, obtemos a solução estacionária para o bombeio

$$|\alpha_0^p| = \frac{\kappa}{|\chi_{ef}|} \quad . \quad (4.21)$$

Usando esta solução para o bombeio chegamos a

$$A^2 + B^2 = \frac{|\chi_{ef}|}{\kappa_p} \left(\frac{\eta_p}{\kappa_p} |\alpha_{in}^p| - \frac{\kappa}{|\chi_{ef}|} \right) \quad , \quad (4.22)$$

ou seja, é impossível determinar A e B individualmente. Uma possível explicação para o que ocorreria nesta situação é que, devido à simetria do processo, os fótons convertidos têm probabilidades iguais de popular os modos $LG_{0,\pm 1}$ ou qualquer combinação linear destes modos, e assim estariam igualmente distribuídos na esfera de Poincaré para os modos de 1ª ordem, descrita na seção 2.2.5 do capítulo 2. Nesta abordagem simplificada do processo de conversão, podemos esperar que o momento angular orbital se conserve, e que esta conservação restrinja as combinações de pares convertidos. De fato, esta conservação aparece quando analisamos os parâmetros de Stokes destes modos.

$$p_1 = \frac{I_{HG_{1,0}^{0^\circ}} - I_{HG_{1,0}^{90^\circ}}}{I_{HG_{1,0}^{0^\circ}} + I_{HG_{1,0}^{90^\circ}}} \quad (4.23)$$

$$p_2 = \frac{I_{HG_{1,0}^{45^\circ}} - I_{HG_{1,0}^{135^\circ}}}{I_{HG_{1,0}^{45^\circ}} + I_{HG_{1,0}^{135^\circ}}} \quad (4.24)$$

$$p_3 = \frac{I_{LG_0^1} - I_{LG_0^{-1}}}{I_{LG_0^1} + I_{LG_0^{-1}}} \quad . \quad (4.25)$$

Na base de Laguerre-Gauss, os campos convertidos são escritos da seguinte forma

$$E_s = A\psi_{+1}^{LG} e^{i\theta_+^s} + B\psi_{-1}^{LG} e^{i\theta_-^s} \quad (4.26)$$

$$E_i = B\psi_{+1}^{LG} e^{i\theta_+^i} + A\psi_{-1}^{LG} e^{i\theta_-^i} \quad , \quad (4.27)$$

onde θ_\pm^s e θ_\pm^i são dados pelas (4.13 e 4.14), respectivamente. Usandos as relações

estremas as bases LG e HG

$$\psi_{\pm}^{LG} = \frac{\psi_V^{HG} \pm i\psi_H^{HG}}{\sqrt{2}} \quad (4.28)$$

$$\psi_{45^\circ(135^\circ)}^{HG} = \frac{\psi_V^{HG} \pm \psi_H^{HG}}{\sqrt{2}} \quad , \quad (4.29)$$

dadas na seção 2.2.4 do capítulo 2, encontramos os seguintes parâmetros de Stokes para os modos convertidos.

$$p_1^s = \frac{-2AB}{A^2 + B^2} \cos(\theta_+^s - \theta_-^s) \quad (4.30)$$

$$p_2^s = \frac{-2AB}{A^2 + B^2} \sin(\theta_+^s - \theta_-^s) \quad (4.31)$$

$$p_3^s = \frac{A^2 - B^2}{A^2 + B^2} \quad , \quad (4.32)$$

para o sinal, e

$$p_1^i = \frac{-2AB}{A^2 + B^2} \cos(\theta_+^i - \theta_-^i) \quad (4.33)$$

$$p_2^i = \frac{-2AB}{A^2 + B^2} \sin(\theta_+^i - \theta_-^i) \quad (4.34)$$

$$p_3^i = \frac{B^2 - A^2}{A^2 + B^2} \quad , \quad (4.35)$$

para o idler. Note que pelas eqs. (4.13) e (4.14), temos $\theta_+^s - \theta_-^s = \theta_+^i - \theta_-^i$. Portanto,

$$p_1^s = p_1^i \quad (4.36)$$

$$p_2^s = p_2^i \quad (4.37)$$

$$p_3^s = -p_3^i \quad . \quad (4.38)$$

O sinal trocado de p_3 mostra que, apesar da distribuição uniforme dos campos convertidos na esfera de Poincaré, existe uma correlação entre eles em consequência da conservação do momento angular orbital. Esta correlação indica que as conversões devem estar dispostas em pontos simétricos ao equador da esfera. Sinal e idler devem possuir o mesmo perfil de intensidade, de modo a maximizar o recobrimento dos modos, porém helicidades opostas, garantindo a conservação de momento angular orbital.

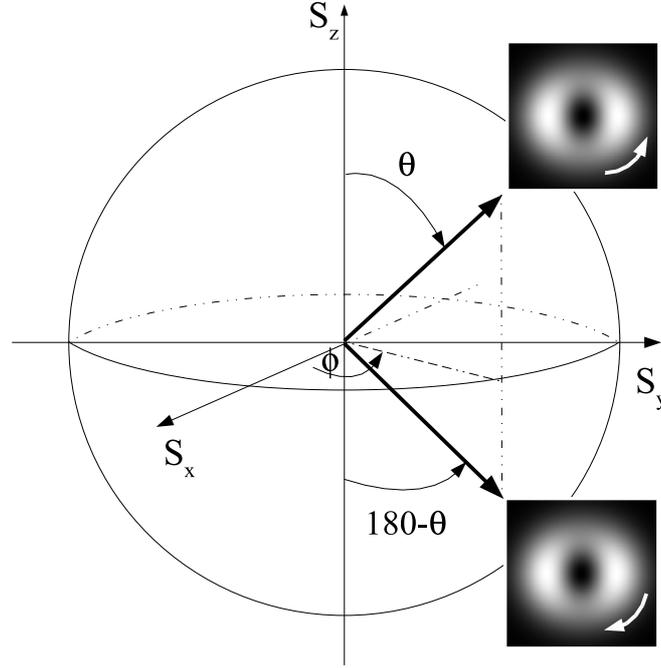


Figura 4.1: *Correlação entre signal e idler na esfera de Poincaré. A igualdade de p_1 e p_2 faz com que a integral de recobrimento seja máxima.*

Sabemos que o processo de conversão páramétrica descendente (CPD), que ocorre dentro do cristal, conserva a helicidade do feixe de bombeio. Isto foi demonstrado por Mair *et al* [25] na conversão paramétrica descendente espontânea, e por Caetano *et al* [9] na conversão paramétrica descendente estimulada. Ou seja, no regime de contagem de fótons (CPD espontânea) as coincidências só eram observadas entre os canais de deteção para os quais

$$l_s + l_i = l_p \quad , \quad (4.39)$$

onde l_j ($j = p, s, i$) é a helicidade do feixe correspondente. Na CPD estimulada, mostramos que a mesma relação entre as helicidades é observada no regime macroscópico.

O limiar de oscilação dos modos convertidos pode ser obtido a partir da equação

(4.22), igualando-a a zero

$$|\alpha_{in}^p|_{lim} = \frac{\kappa\kappa_p}{\eta_p|\chi_{ef}|} . \quad (4.40)$$

4.2 Dinâmicas dos modos com Injeção

Na seção anterior vimos que a conservação do momento angular orbital na dinâmica do OPO se traduz em uma correlação entre os parâmetros de Stokes dos campos convertidos. Nesta seção vamos mostrar os resultados obtidos quando quebramos a simetria do sistema, injetando um campo dentro da cavidade OPO.

As equações para o OPO com sinal injetado são as seguintes

$$\frac{d\alpha_0^p}{dt} = -(\kappa_p + i\Delta_p)\alpha_0^p + \chi_{ef}^* (\alpha_{+1}^s \alpha_{-1}^i + \alpha_{-1}^s \alpha_{+1}^i) + \eta_p \alpha_{in}^p \quad (4.41)$$

$$\frac{d\alpha_{+1}^s}{dt} = -(\kappa + i\Delta)\alpha_{+1}^s - \chi_{ef}\alpha_{-1}^{i*}\alpha_0^p + \eta_s \alpha_+^{Sin} \quad (4.42)$$

$$\frac{d\alpha_{-1}^s}{dt} = -(\kappa + i\Delta)\alpha_{-1}^s - \chi_{ef}\alpha_{+1}^{i*}\alpha_0^p + \eta_s \alpha_-^{Sin} \quad (4.43)$$

$$\frac{d\alpha_{+1}^i}{dt} = -(\kappa + i\Delta)\alpha_{+1}^i - \chi_{ef}\alpha_{-1}^{s*}\alpha_0^p \quad (4.44)$$

$$\frac{d\alpha_{-1}^i}{dt} = -(\kappa + i\Delta)\alpha_{-1}^i - \chi_{ef}\alpha_{+1}^{s*}\alpha_0^p \quad (4.45)$$

onde $\eta_s = \sqrt{T_s}/\tau_s$ representa a transmissão do campo signal injetado na cavidade.

Antes de resolvermos o estado estacionário destas equações, vamos fazer uma mudança de variáveis, cuidadosamente escolhida para tirar proveito da correlação entre signal e idler.

Suponhamos que o campo signal injetado na cavidade seja preparado em um modo de 1ª ordem, representado pelos ângulos polar θ e azimutal ϕ na esfera de Poincaré. Em analogia com a esfera de Bloch para uma partícula de spin 1/2, o campo injetado pode ser representado como

$$E_s^{in} = |\alpha_s^{in}| \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\frac{\phi}{2}} \psi_+^{LG} + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\phi}{2}} \psi_-^{LG} \right] . \quad (4.46)$$

Usando esta representação, podemos efetuar a seguinte mudança de variáveis,

$$\alpha_s = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\phi}{2}} \alpha_+^s + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\frac{\phi}{2}} \alpha_-^s \quad (4.47)$$

$$\alpha_i = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\phi}{2}} \alpha_+^i + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\frac{\phi}{2}} \alpha_-^i \quad (4.48)$$

$$\alpha'_s = -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\phi}{2}} \alpha_+^s + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\frac{\phi}{2}} \alpha_-^s \quad (4.49)$$

$$\alpha'_i = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\phi}{2}} \alpha_+^i - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\frac{\phi}{2}} \alpha_-^i \quad , \quad (4.50)$$

e obter as equações dinâmicas para as novas variáveis

$$\frac{d\alpha_p}{dt} = -(\kappa_p + i\Delta_p)\alpha_p + \chi_{ef}^* (\alpha_s \alpha_i - \alpha'_s \alpha'_i) + \eta_p \alpha_p^{in} \quad (4.51)$$

$$\frac{d\alpha_s}{dt} = -(\kappa + i\Delta)\alpha_s - \chi_{ef} \alpha_i^* \alpha_p + \eta_s |\alpha_s^{in}| \quad (4.52)$$

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = -(\kappa + i\Delta)\alpha_i - \chi_{ef} \alpha_s^* \alpha_p \quad (4.53)$$

$$\frac{d\alpha'_s}{dt} = -(\kappa + i\Delta)\alpha'_s - \chi_{ef} \alpha_i'^* \alpha_p \quad (4.54)$$

$$\frac{d\alpha'_i}{dt} = -(\kappa + i\Delta)\alpha'_i - \chi_{ef} \alpha_s'^* \alpha_p \quad . \quad (4.55)$$

Note que com a mudança de variáveis das equações (4.47-4.50), passamos a ter apenas 2 termos de fonte nas equações dinâmicas. No regime estacionário temos

$$\alpha_p = \frac{\chi_{ef}^*}{\rho_p} e^{-i\gamma_p} (\alpha_s \alpha_i - \alpha'_s \alpha'_i) + \frac{\eta_p}{\rho_p} \alpha_p^{in} e^{-i\gamma_p} \quad (4.56)$$

$$\alpha_s = -\frac{\chi_{ef}}{\rho} e^{-i\gamma} \alpha_i^* \alpha_p + \frac{\eta_s}{\rho} |\alpha_s^{in}| e^{-i\gamma} \quad (4.57)$$

$$\alpha_i = -\frac{\chi_{ef}}{\rho} e^{-i\gamma} \alpha_s^* \alpha_p \quad (4.58)$$

$$\alpha'_s = -\frac{\chi_{ef}}{\rho} e^{-i\gamma} \alpha_i'^* \alpha_p \quad (4.59)$$

$$\alpha'_i = -\frac{\chi_{ef}}{\rho} e^{-i\gamma} \alpha_s'^* \alpha_p \quad , \quad (4.60)$$

com $\rho_p = |(\kappa_p + i\Delta_p)|$, $\rho = |(\kappa + i\Delta)|$, $\gamma_p = \arg(\kappa_p + i\Delta_p)$ e $\gamma = \arg(\kappa + i\Delta)$.

Se substituirmos o complexo conjugado da equação (4.60) na (4.59), obtemos

$$\alpha'_s \left(1 - \frac{|\chi_{ef}|^2}{\rho^2} |\alpha_p|^2 \right) = 0 \quad . \quad (4.61)$$

Uma das soluções desta equação, $|\alpha'_s|^2 = \frac{\rho^2}{|\chi_{ef}|^2}$, é a solução do caso não injetado. A outra, $\alpha'_s = 0$, mostra que os modos α'_s e α'_i não são amplificados quando há injeção de sinal.

Este resultado revela o papel da injeção na quebra de simetria do sistema, conforme o comentário que segue a equação (4.22). A injeção favorece o seu modo convertido e o seu par, em detrimento dos outros modos. Isto faz com que o OPO opere apenas com três modos, mantendo as correlações entre signal e idler na esfera de Poincaré. Portanto, o sistemas de cinco equações anteriores se transforma em sistemas de três equações efetivas

$$\frac{d\alpha_p}{dt} = -(\kappa_p + i\Delta_p)\alpha_p + \chi_{ef}^*\alpha_s\alpha_i + \eta_p\alpha_p^{in} \quad (4.62)$$

$$\frac{d\alpha_s}{dt} = -(\kappa + i\Delta)\alpha_s - \chi_{ef}\alpha_i^*\alpha_p + \eta_s|\alpha_s^{in}| \quad (4.63)$$

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = -(\kappa + i\Delta)\alpha_i - \chi_{ef}\alpha_s^*\alpha_p \quad , \quad (4.64)$$

para as equações dinâmicas, o que leva a

$$\alpha_p = \frac{\chi_{ef}^*}{\rho_p}e^{-i\gamma_p}\alpha_s\alpha_i + \frac{\eta_p}{\rho_p}\alpha_p^{in}e^{-i\gamma_p} \quad (4.65)$$

$$\alpha_s = -\frac{\chi_{ef}}{\rho}e^{-i\gamma}\alpha_i^*\alpha_p + \frac{\eta_s}{\rho}|\alpha_s^{in}|e^{-i\gamma} \quad (4.66)$$

$$\alpha_i = -\frac{\chi_{ef}}{\rho}e^{-i\gamma}\alpha_s^*\alpha_p \quad , \quad (4.67)$$

para o estado estacionário.

Tomando o complexo conjugado da equação (4.67) e substituindo na equação (4.66), encontramos α_s e α_i em função de α_p

$$\alpha_s = \frac{\eta_s\rho|\alpha_s^{in}|e^{-i\gamma}}{(\rho^2 - |\chi_{ef}|^2|\alpha_p|^2)} \quad (4.68)$$

$$\alpha_i = \frac{-\eta_s\chi_{ef}|\alpha_s^{in}|\alpha_p}{(\rho^2 - |\chi_{ef}|^2|\alpha_p|^2)} \quad , \quad (4.69)$$

analisando as fases destas equações concluímos que

$$\theta_s = -\gamma \quad (4.70)$$

$$\theta_p - \theta_I = -\varphi - \pi \quad , \quad (4.71)$$

ou seja, o campo signal tem a sua fase deslocada, em relação à sua injeção, devido à dessintonia da cavidade. Se aplicarmos estes resultados à equação (4.65) encontramos uma equação complexa que define α_p

$$\begin{aligned} |\alpha_p|^5 - \frac{\eta_p |\alpha_p^{in}| e^{i(\theta_p^{in} - \theta_p - \gamma_p)}}{\rho_p} |\alpha_p|^4 - \frac{2\rho^2}{|\chi_{ef}|^2} |\alpha_p|^3 + \frac{2\eta_p \rho^2 |\alpha_p^{in}| e^{i(\theta_p^{in} - \theta_p - \gamma_p)}}{\rho_p |\chi_{ef}|^2} |\alpha_p|^2 + \\ + \left[\frac{\rho^4}{|\chi_{ef}|^4} + \frac{\eta_s^2 |\alpha_s^{in}|^2 e^{-i(\gamma + \gamma_p)}}{|\chi|^2} \right] |\alpha_p| - \frac{\eta_p \rho^4 e^{i(\theta_p^{in} - \theta_p - \gamma_p)}}{\rho_p |\chi_{ef}|^4} = 0 \end{aligned} \quad (4.72)$$

No regime em que as dessintonias do bombeio e dos convertidos satisfazem a

$$\frac{\Delta}{\kappa} + \frac{\Delta_p}{\kappa_p} = 0 \quad , \quad (4.73)$$

de modo que $\gamma = \gamma_p$, a fase do feixe pump pode ser determinada facilmente¹, $\theta_p = \theta_p^{in} - \gamma_p$. A fase do pump se comporta como a fase do feixe signal, ficando deslocada em relação à fase da injeção pela ação da dessintonia. Neste regime, fase e amplitude se desacoplam, restando apenas a amplitude de α_p para ser determinada.

Multiplicando a equação resultante por $|\chi_{ef}|^5/\rho^5$, e fazendo uma mudança de variáveis do tipo

$$x_j = \frac{|\chi_{ef}|}{\rho} |\alpha_j| \quad j = p, s, i \quad (4.74)$$

$$a = \frac{\eta_p |\alpha_p^{in}| |\chi_{ef}|}{\rho \rho_p} \quad (4.75)$$

$$b = \frac{\eta_s |\alpha_s^{in}| |\chi_{ef}|}{\rho \sqrt{\rho \rho_p}} \quad , \quad (4.76)$$

para lidarmos apenas com quantidades adimensionais, chegamos a uma equação de quinta ordem na variável x .

$$p_5(x_p) = (x_p - a)(x_p - 1)^2(x_p + 1)^2 = -b^2 x_p \quad (4.77)$$

¹A solução $\theta_p = \theta_p^{in} - \gamma_p + \pi$ leva a uma solução não física, onde a amplitude da α_p é negativa.

As soluções desta equação são os estados estacionários do feixe de bombeio. Note que recaímos no caso sem injeção quando fazemos $b = 0$. As soluções para o pump para este caso são

$$x_p = a \quad (4.78)$$

$$x_p = \pm 1 \quad . \quad (4.79)$$

A solução $x_p = -1$ não é uma solução física, as soluções $x_p = a$ e $x_p = 1$ correspondem, respectivamente, às soluções estacionárias abaixo e acima do limiar para o caso não injetado.

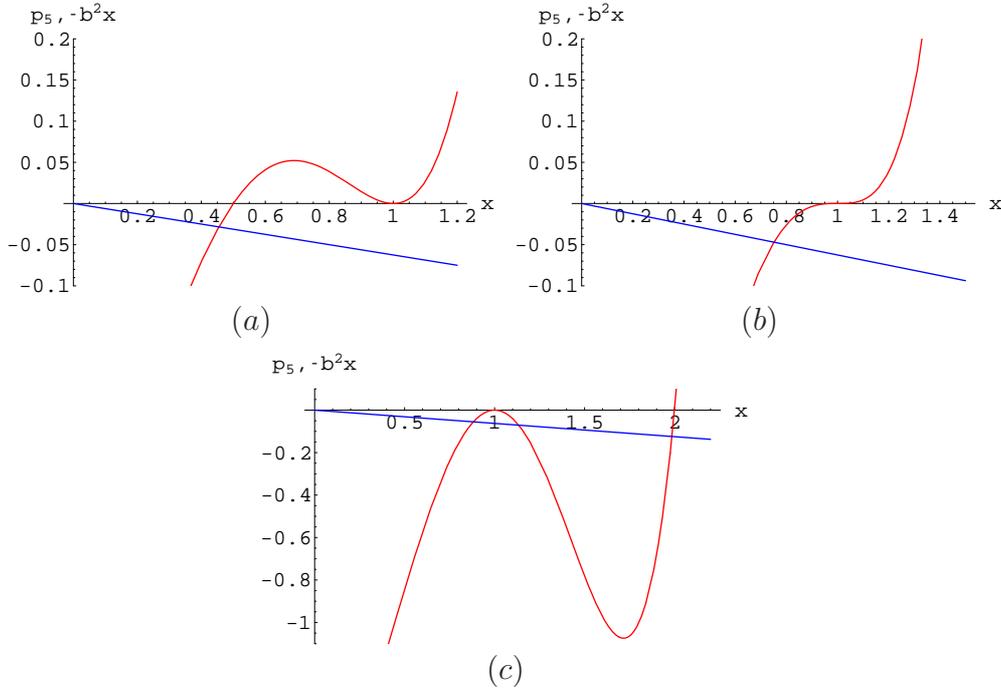


Figura 4.2: A interseção entre o polinômio $p_5(x_p)$ e a reta $-b^2 x_p$ fornece a solução estacionária para pump no caso injetado. Em (a) temos $a = 0,5$ (abaixo do limiar), em (b) temos $a = 1$ (no limiar) e em (c) temos $a = 2$ (acima do limiar).

Não há na literatura um algoritmo para encontrar, analiticamente, raízes de equações de quinto grau, por isso vamos buscar soluções aproximadas para o problema em questão levando em conta a forma do polinômio $p_5(x_p)$ mostrado na figura

4.2. As soluções exatas da equação $p_5(x_p) = -b^2 x_p$ são as interseções mostradas na figura 4.2. Através do gráfico vemos que, para um bombeio abaixo do limiar do caso não injetado ($a < 1$), existe apenas uma solução possível, ao passo que para um bombeio acima do limiar do caso não injetado ($a > 1$) existem três soluções possíveis.

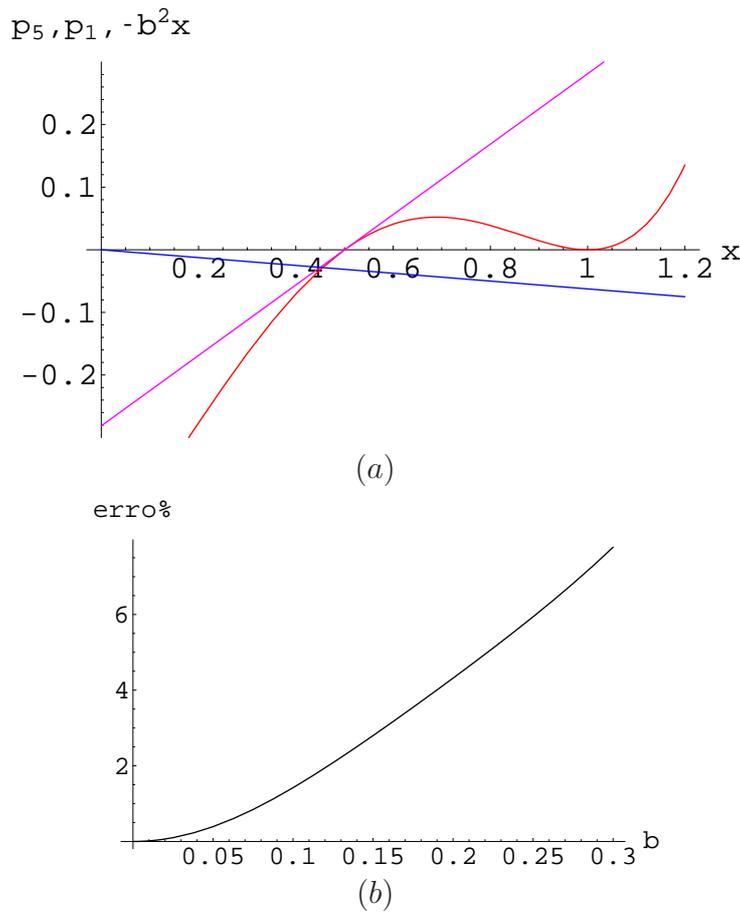


Figura 4.3: Em (a) a aproximação linear para $p_5(x_p)$, abaixo do limiar do caso não-injetado, com $a = 0,5$ e $b = 0,25$. A aproximação de primeira ordem (em rosa) acorda satisfatoriamente com a solução exata (numérica). Em (b) o erro relativo entre a solução numérica exata e a aproximada.

Segundo a figura 4.3, a solução da equação (4.77) pode ser aproximada à solução

da equação

$$p_1(x_p) = (x_p - a)(a^2 - 1)^2 = -b^2 x_p \quad , \quad (4.80)$$

onde aproximamos $p_5(x)$ à reta $p_1(x_p)$, nos pontos próximos a $x_p = a$. A solução desta equação é

$$x_p = \frac{a}{1 + \frac{b^2}{(a^2-1)^2}} \quad . \quad (4.81)$$

Note que se fizermos $b = 0$, nós recuperamos a solução do caso não injetado ($x = a$). Esta solução é uma boa aproximação para a solução exata quando estamos num regime em que $a < 0,5$ e $b < 0.25$.

Este resultado indica que o pump é levemente depletado quando injetamos um campo na cavidade.

Segundo a figura 4.4, no regime $a > 1$, podemos aproximar o polinômio $p_5(x_p)$, nos pontos próximos à $x_p = 1$, à uma parábola, e buscar as soluções aproximadas para os valores estacionários do pump nas intercessões entre ela e a reta $-b^2 x_p$, ou seja,

$$p_2(x_p) = 4(1 - a)(x_p - 1)^2 = -b^2 x_p \quad . \quad (4.82)$$

As soluções desta equação do segundo grau são,

$$x_p = \frac{8(a - 1) + b^2}{8(a - 1)} \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \left[\frac{8(a - 1)}{8(a - 1) + b^2} \right]^2} \right\} \quad (4.83)$$

Novamente se fizermos $b = 0$, nós recuperamos a solução do caso não injetado ($x_p = 1$). O regime de validade desta aproximação esta restrito à $b < 25\%$ de a . Na figura 4.5 podemos comparar as regiões de validade das soluções aproximadas com a solução numérica completa.

Vamos agora às soluções estacionárias dos feixes convertidos, substituindo as soluções encontradas para o pump nas equações (4.68) e (4.69), escritas nas novas

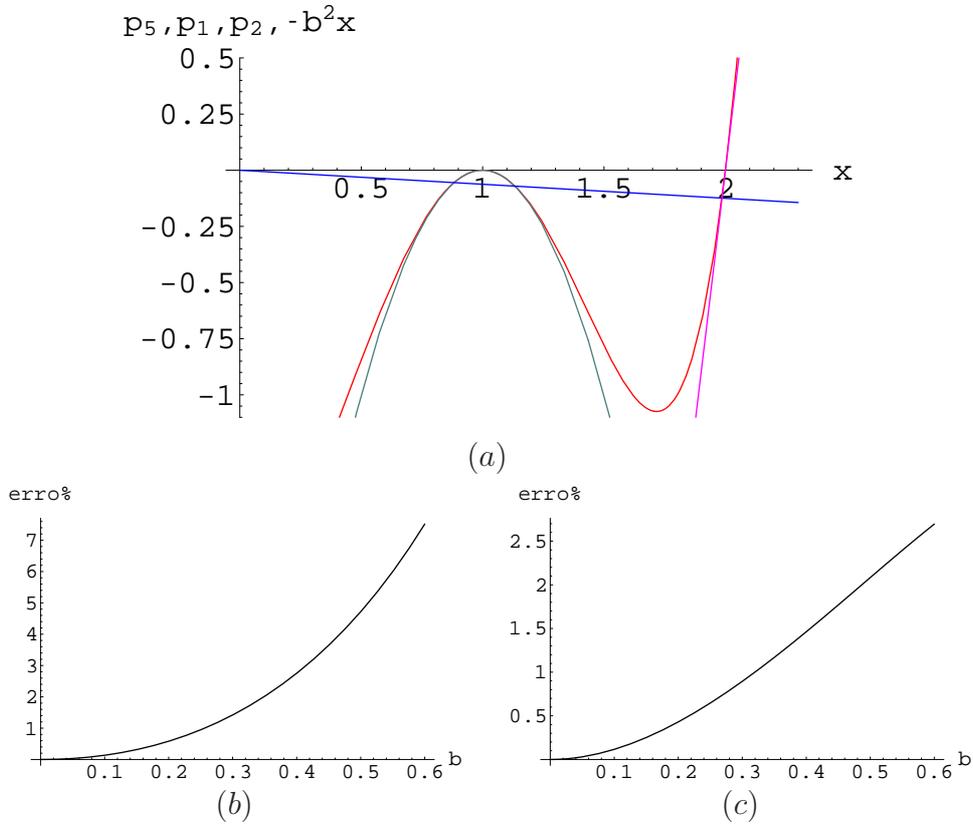


Figura 4.4: Em (a) vemos uma representação gráfica da aproximação quadrática para $p_5(x)$ na região próxima ao limiar (curva cinza), e a aproximação linear próxima a $x_p = a$ (curva rosa). Em (b) e em (c) os erros percentuais entre as soluções aproximadas e as soluções exatas, calculados numericamente.

variáveis adimensionais,

$$x_s = \sqrt{\frac{\rho_p}{\rho}} \frac{b}{1 - x_p^2} \quad (4.84)$$

$$x_i = \sqrt{\frac{\rho_p}{\rho}} \frac{bx_p}{1 - x_p^2} \quad (4.85)$$

Para as soluções em torno de $x_p = a$, com $a \ll 1$, encontramos

$$x_s = \frac{b \left[(a^2 - 1)^2 + \frac{\rho_p}{\rho} b^2 \right]}{(1 - a)(a^2 - 1)^2 + b^2} \sqrt{\frac{\rho_p}{\rho}} \quad (4.86)$$

$$x_i = \frac{ba(a^2 - 1)^2}{(1 - a)(a^2 - 1)^2 + b^2} \sqrt{\frac{\rho_p}{\rho}} \quad (4.87)$$

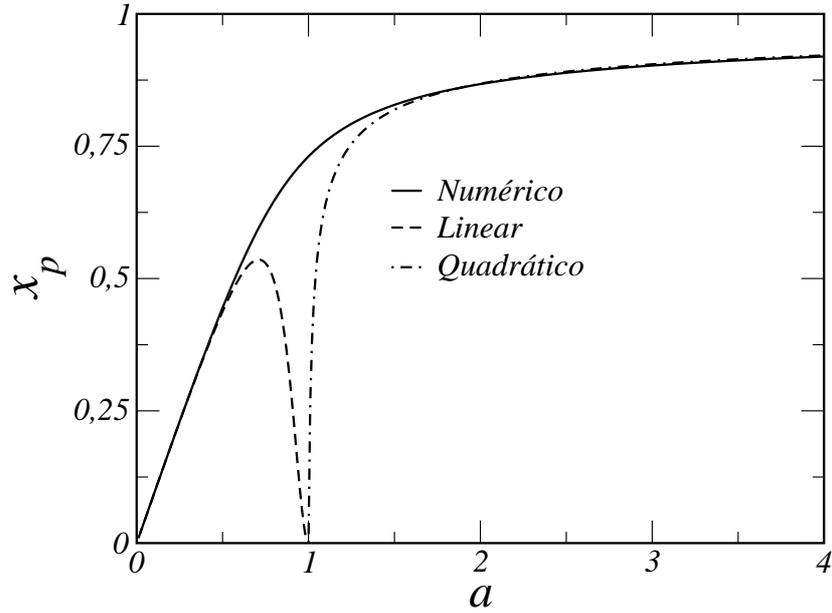


Figura 4.5: Estado estacionário do feixe de bombeio (x_p) em função do parâmetro de bombeio (a). Comparação das aproximações linear e quadrática com a solução numérica. O parâmetro de injeção é $b = 0,2$.

Para as soluções acima do limiar em torno de $x_p = 1$, encontramos

$$x_s = \sqrt{\frac{\rho_p}{\rho}} \left[\frac{bD^2}{D^2 - (1 \pm \sqrt{1 - D^2})^2} \right] \quad (4.88)$$

$$x_i = \sqrt{\frac{\rho_p}{\rho}} \left[\frac{bD(1 \pm \sqrt{1 - D^2})}{D^2 - (1 \pm \sqrt{1 - D^2})^2} \right] \quad , \quad (4.89)$$

com

$$D = \frac{8(a - 1)}{8(a - 1) + b^2} \quad . \quad (4.90)$$

No limite $b \rightarrow 0$, $x_s - x_i \rightarrow 0$, com era de se esperar, pois no caso não injetado a energia do bombeio é repartida igualmente entre os feixes convertidos.

O método baseado na análise gráfica do polinômio $p_5(x_p)$ nos permite inferir qual é a solução estacionária para os campos em um regime de operação próximo ao limiar do caso não injetado. Primeiramente tentamos uma aproximação de terceiro grau para $p_5(x_p)$, porém a aproximação de quarto grau em torno do ponto $x_p =$

$a = 1$ (limiar do caso não injetado), além de mais acurada, forneceu um resultado surpreendentemente simples.

$$x_p^{lim} = 1 - \left(\frac{b}{2}\right)^{2/3}. \quad (4.91)$$

No limiar os feixes convertidos têm as soluções estacionárias aproximadas dadas por

$$x_s^{lim} = \frac{b^{1/3}}{2^{1/3} - 2^{-4/3}b^{2/3}} \sqrt{\frac{\rho_p}{\rho}} \quad (4.92)$$

$$x_i^{lim} = \left(\frac{b^{1/3}}{2^{1/3} - 2^{-4/3}b^{2/3}} - \frac{b}{2 - 2^{-2/3}b^{2/3}} \right) \sqrt{\frac{\rho_p}{\rho}}. \quad (4.93)$$

4.2.1 Análise de Estabilidade Linear

Para podermos fazer a análise de estabilidade das soluções apresentadas neste capítulo, é necessário primeiro uma linearização das equações. Isso é feito da seguinte forma:

1. Supomos que estamos próximos à estacionariedade, onde $\alpha_j = \alpha_j^{est} + \delta\alpha_j$ ($j = p, s, i$), com α_j^{est} sendo a solução estacionária em questão e $\delta\alpha_j = e^{i\theta_j^{est}} (\delta|\alpha_j| + i|\alpha_j^{est}|\delta\theta_j)$ uma pequena perturbação.
2. Substituímos os α_j nas equações dinâmicas do OPO com sinal injetado, equações (4.62), e descartamos os termos com grau maior que 1 nas variáveis $\delta\alpha_j$.

Este procedimento resulta no seguinte sistema de equações diferenciais lineares acoplado².

$$\delta|\dot{\alpha}_p| = -\kappa_p|\delta\alpha_p| - |\chi_{ef}|(|\alpha_s^0|\delta|\alpha_i| + |\alpha_i^0|\delta|\alpha_s|) \quad (4.94)$$

$$\delta|\dot{\alpha}_s| = -\kappa|\delta\alpha_s| + |\chi_{ef}|(|\alpha_i^0|\delta|\alpha_p| + |\alpha_p^0|\delta|\alpha_i|) \quad (4.95)$$

$$\delta|\dot{\alpha}_i| = -\kappa|\delta\alpha_i| + |\chi_{ef}|(|\alpha_s^0|\delta|\alpha_p| + |\alpha_p^0|\delta|\alpha_s|) \quad , \quad (4.96)$$

²Analisaremos apenas o caso ressonante, pois neste regime há um desacoplamento entre as fases e as amplitudes.

para as amplitudes, e

$$\delta\dot{\theta}_p = -\kappa_p\delta\theta_p - |\chi_{ef}|\frac{|\alpha_s^0||\alpha_i^0|}{|\alpha_p^0|}(\delta\theta_s + \delta\theta_i) \quad (4.97)$$

$$\delta\dot{\theta}_s = -\kappa\delta\theta_s + |\chi_{ef}|\frac{|\alpha_i^0||\alpha_p^0|}{|\alpha_s^0|}(\delta\theta_p - \delta\theta_i) \quad (4.98)$$

$$\delta\dot{\theta}_i = -\kappa\delta\theta_i + |\chi_{ef}|\frac{|\alpha_s^0||\alpha_p^0|}{|\alpha_i^0|}(\delta\theta_p - \delta\theta_s) \quad , \quad (4.99)$$

para as fases.

A análise de estabilidade das soluções estacionárias se dá através da análise dos autovalores do problema. Uma solução é estável se todos os autovalores associados a ela têm a parte real negativa. O teorema de Routh-Hurwitz [12, 19] nos permite verificar o sinal da parte real de um autovalor sem precisar calculá-lo. Este teorema nos diz que, dada a equação característica da matriz $\mathbb{A}_{n \times n}$.

$$|\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}| = \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + \dots + b_{n-1}\lambda + b_n = 0 \quad (4.100)$$

Os autovalores λ terão as partes reais negativas se, e somente se,

$$b_k > 0 \quad (4.101)$$

e

$$\Delta_k > 0 \quad , \quad (4.102)$$

onde $k = 1, 2, \dots, n$ e

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} b_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{2k-1} & b_{2k-2} & b_{2k-3} & b_{2k-4} & b_{2k-5} & b_{2k-6} & \dots & b_k \end{vmatrix} . \quad (4.103)$$

Analisando as equações linearizadas, chegamos a quatro condições de estabilidade para as soluções estacionárias. As condições advindas das equações linearizadas

para as amplitudes são,

$$2 [(K + 1)^2 - x_p^2] (1 - x_p^2)^2 + b^2 [1 - x_p^2 + K(1 + x_p^2)] > 0 \quad (4.104)$$

$$K(1 - x_p^2)^3 + b^2(1 + 3x_p^2) > 0 \quad , \quad (4.105)$$

onde $K = \kappa_p/\kappa$, e as condições advindas das equações linearizadas para as fases são,

$$2 [(K + 1)^2 - x_p^2] (1 - x_p^2)^2 + b^2 [(K + 3)x_p^2 + K + 1] > 0 \quad (4.106)$$

$$[K(1 - x_p^2)^2 + b^2] (1 - x_p^2) > 0 \quad . \quad (4.107)$$

Para que a solução seja estável, as quatro condições anteriores devem ser satisfeitas simultaneamente. Para $x_p < 1$ todas as 4 desigualdades são satisfeitas. para $x_p > 1$ a última delas, equação (4.107), é violada. Isto mostra que apenas as soluções com $x_p < 1$, são soluções estáveis.

4.3 Conjugação de Fase Geométrica

Alguns sistemas físicos quando submetidos a transformações cíclicas adiabáticas, adquirem uma fase conhecida como fase geométrica [6, 16]. Esta fase está relacionada com a trajetória descrita pelo sistema no seu espaço de parâmetros.

A primeira discussão sobre fases geométricas surgiu em 1956 no trabalho de S. Pancharatnam [31]. A fase de Pancharatnam surge quando fazemos mudanças cíclicas na polarização de uma onda plana que se propaga em uma direção fixa. O espaço de parâmetros para a polarização é a esfera de Poincaré, e a fase ganha pelo feixe é igual à metade do ângulo sólido definido pela curva, que representa as transformações cíclicas.

Na referência [38], van Enk propõe o surgimento de uma fase geométrica para modos transversais, quando estes sofrem mudanças cíclicas, enquanto a polarização

e a direção de propagação não são afetadas. No mesmo trabalho van Enk propõe que, para modos de 1ª ordem, esta fase está ligada à troca de momento angular orbital entre o feixe e os elementos ópticos usados para efetuar as mudanças cíclicas. Este efeito foi confirmado experimentalmente para modos de 1ª ordem por Galvez *et al* em [14], em analogia com a fase de Pancharatnam.

Se efetuarmos mudanças cíclicas no campo de injeção que equivalem a variar θ e ϕ na equação(4.46), este feixe ganhará uma fase geométrica. O processo não-linear que ocorre dentro do cristal do OPO transfere esta informação de fase para os feixes gerados dentro do cristal. Enquanto o feixe signal carrega a mesma fase geométrica da injeção, o feixe idler carrega esta fase geométrica conjugada. Isto acontece graças à correlação entre os parâmetros de Stokes dos campos convertidos conforme as equações (4.33), (4.34) e (4.35). Enquanto o feixe signal descreve uma curva em um dado sentido na esfera de Poincaré, o feixe idler percorre uma curva semelhante em sentido contrário, figura 4.6. Esta é mais uma consequência da conservação do momento angular orbital.

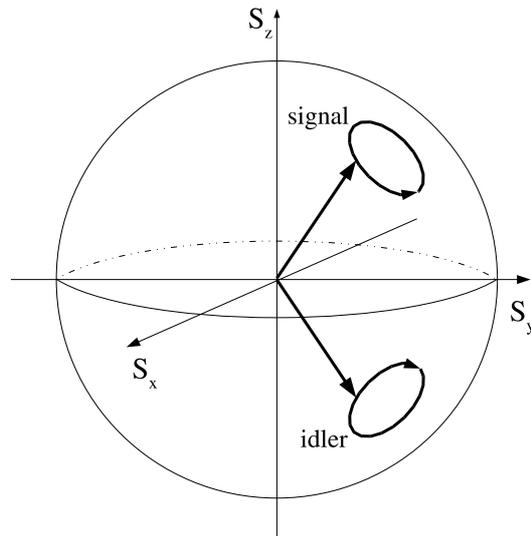


Figura 4.6: *Conjugação de fase geométrica no OPO.*

Em futuro próximo, tentaremos medir esta conjugação de fase, com o experimento mostrado na figura 4.7, no OPO que está sendo montado Laboratório de Óptica Quântica da UFF. Este OPO será bombeado por um laser, da marca *Innolight* modelo Diabolo 1000. Este laser de NdYAG, operando na faixa do infravermelho com o comprimento de onda de $1064nm$, possui uma cavidade de dobramento interna, onde é produzido um feixe com comprimento de onda de $532nm$. Uma parte do feixe infravermelho é separada e acoplado para fora, fornecendo assim dois feixes que possuem uma relação de fase entre si. Usaremos o feixe verde ($532nm$) como bombeio e o feixe infravermelho como injeção. Faremos com que o feixe de injeção percorra o caminho ABCDA mostrado na figura 4.8, usando um par de prismas de Dove.

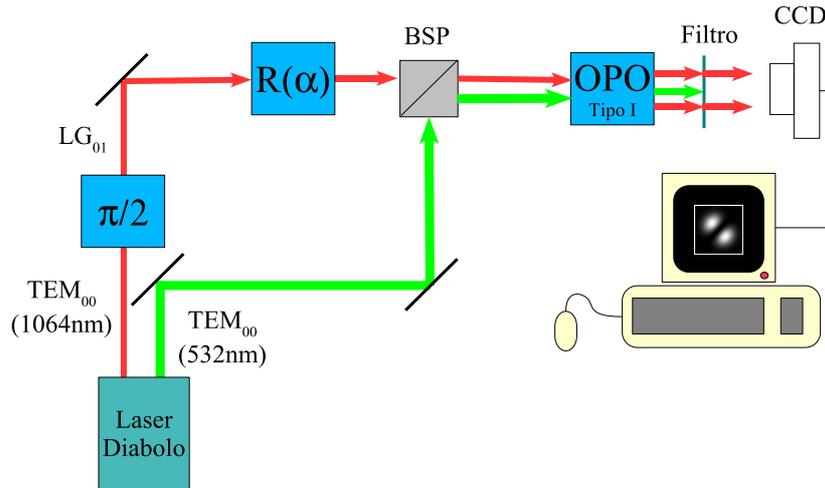


Figura 4.7: Arranjo experimental para produção uma fase geométrica variável. $R(\theta)$ é um par de prismas de Dove responsáveis pela transformação dos modos.

Como foi dito anteriormente, ao passar por um prisma de Dove, um modo LG de 1ª ordem tem a sua vorticidade é invertida, ou seja, um modo $LG_{0,+1}$, localizado no pólo norte da esfera, é transformado em um modo $LG_{0,-1}$, localizado no pólo sul da esfera. Esta transformação se dá através de um dado meridiano (ABC). Se em

seguida passarmos este feixe por um segundo prisma de Dove rodado de um ângulo $\alpha/4$, o caminho descrito pelo feixe será um outro meridiano da esfera (CDA), rodado em relação ao primeiro de α radianos.

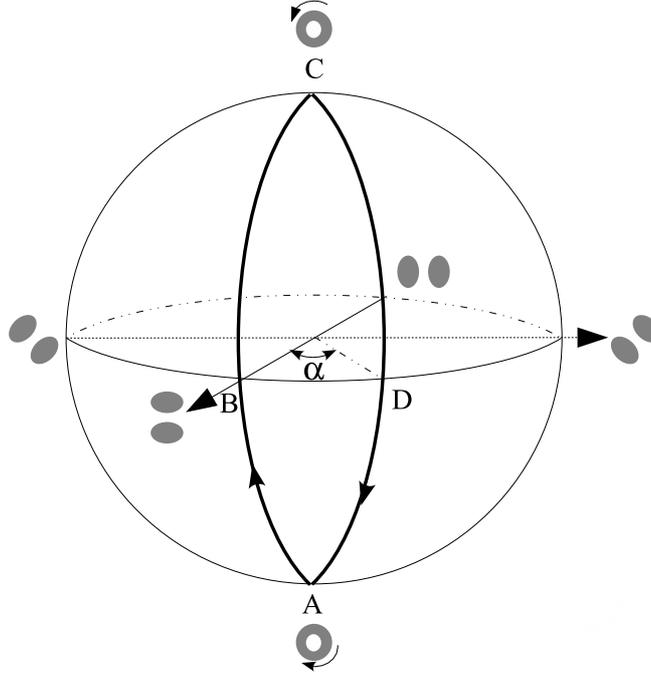


Figura 4.8: Variando-se a abertura da curva ABCDA sobre a esfera de Poincaré, variamos a fase geométrica dos feixes convertidos.

Após esta sequência de transformações cíclicas, o feixe de injeção será enviado ao OPO para estimular a geração dos feixes gêmeos. A saída deste OPO injetado, com casamento de fase tipo I³, será um modo de Hermite-Gauss. A orientação deste modo HG dependerá da fase relativa entre os feixes convertidos. A conjugação da fase geométrica será confirmada se, dada uma fase geométrica, ϕ_g , produzida pelos prismas de Dove, a orientação do modo HG na saída do OPO for rodada de $2\phi_g$ em relação a orientação original, figura 4.9.

³Em um OPO com casamento de fase tipo I os feixes gerados têm as suas polarizações ortogonais ao feixe de bombeio. No OPO com casamento de fase tipo II, um dos feixes gerados tem a mesma polarização do bombeio, enquanto o outro tem a sua polarização ortogonal ao feixe de bombeio.

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{array}{c} s \\ \text{[Beam Profile]} \end{array} + \begin{array}{c} i \\ \text{[Beam Profile]} \end{array} \right] = \text{[Beam Profile]} \\
 & \quad \downarrow \\
 & \quad \text{R}(\alpha) \\
 & \quad \downarrow \\
 & \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{array}{c} s \\ \text{[Beam Profile]} \end{array} e^{i\phi_g} + \begin{array}{c} i \\ \text{[Beam Profile]} \end{array} e^{-i\phi_g} \right] = \text{[Beam Profile]} \overset{2\phi_g}{\curvearrowright}
 \end{aligned}$$

Figura 4.9: Efeito produzido pela conjugação da fase geométrica dos feixes convertidos.

Capítulo 5

Conclusões

"L'essentiel est invisible pour les yeux."

Antoine de Saint-Exupéry

Nesta dissertação descrevemos as principais características de vórtices ópticos com momento angular orbital, no regime paraxial, assim como técnicas de baixo custo para a produção e caracterização de tais feixes.

Fizemos um estudo teórico da dinâmica de vórtices ópticos em osciladores paramétricos ópticos. Apresentamos as soluções estacionárias para os campos pump, signal e idler, em um OPO sem injeção nos modos convertidos. Para um OPO com injeção em um dos sinais convertidos, obtivemos expressões aproximadas (com as respectivas avaliações de erro) para as soluções estacionárias nos regimes abaixo e acima do limiar. A análise de estabilidade linear das soluções mostrou que apenas a solução estacionária de mais baixa intensidade é estável, sendo instáveis as demais.

Mostramos também, que as correlações entre os campos gerados dentro de um OPO com sinal injetado sugerem uma conjugação da fase geométrica do feixe de injeção.

Sugerimos, ainda, um experimento para a medida desta conjugação da fase geométrica, como uma proposta para o início do doutorado.

Apêndice A

Solução da Equação Paraxial

A.1 Os Modos de Laguerre-Gauss

Os modos de propagação formam um conjunto completo de soluções da equação paraxial. Neste conjunto estão incluídos o modo fundamental e os modos de ordem superior.

Os modos de Laguerre-Gauss são soluções da equação paraxial em sistemas com geometria cilíndrica. Em tal sistema de coordenadas, a equação paraxial toma a seguinte forma.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.1})$$

E suas soluções são.

$$\psi_p^l(\vec{r}) = \frac{A_p^l}{w(z)} \left[\frac{\sqrt{2}r}{w(z)} \right]^{|l|} L_p^l \left(\frac{2r^2}{w^2(z)} \right) \exp \left(-\frac{r^2}{w^2(z)} \right) \quad (\text{A.2})$$

$$\exp \left\{ i \left[\frac{kr^2}{2R(z)} - (2p + |l| + 1) \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right) + l\phi \right] \right\} \quad (\text{A.3})$$

Onde

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}} \quad , \quad (\text{A.4})$$

$$z_R = \frac{kw_0}{2} \quad (\text{A.5})$$

é a distância de Rayleigh, uma espécie de medida da escala de divergência do feixe, k é o número de onda,

$$R(z) = z \left[1 + \frac{z_R^2}{z^2} \right] \quad (\text{A.6})$$

é o raio de curvatura e

$$A_p^l = \sqrt{\frac{2p!}{\pi(p + |l|)!}} \quad (\text{A.7})$$

uma constante de normalização.

Dividindo (A.6) por (A.4) obtemos a seguinte relação.

$$\frac{kw^2(z)}{2R(z)} = \frac{z}{z_R} \quad (\text{A.8})$$

Na equação paraxial (eq.A.2), o termo $L_p^{|l|} \left(\frac{2r^2}{w(z)} \right)$ é um polinômio associado de Laguerre. Esses polinômios são soluções de equação associada de Laguerre.

$$x \frac{d^2}{dx^2} L_p^{|l|}(x) + (|l| + 1 - x) \frac{d}{dx} L_p^{|l|}(x) + p L_p^{|l|}(x) = 0 \quad (\text{A.9})$$

Podemos colocar a equação acima numa forma auto-adjunta utilizando uma função peso na definição do produto escalar dos polinômios associados de Laguerre.

$$\langle L_p^{|l|}(x) | L_q^{|l|}(x) \rangle = \int_0^\infty e^{-x} x^{|l|} L_p^{|l|}(x) L_q^{|l|}(x) dx = \frac{(p+|l|)!}{p!} \delta_{pq} \quad (\text{A.10})$$

A utilização desta desta função peso equivale a definição do que chamaremos de *funções de Laguerre*

$$\chi_p^{|l|}(x) = e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{|l|}{2}} L_p^{|l|}(x) \quad (\text{A.11})$$

que são soluções da seguinte equação auto-adjunta.

$$x \frac{d^2}{dx^2} \chi_p^{|l|}(x) + \frac{d}{dx} \chi_p^{|l|}(x) + \left(\frac{-x}{4} + \frac{2p+|l|+1}{2} - \frac{l^2}{4x} \right) \chi_p^{|l|}(x) = 0 \quad (\text{A.12})$$

Definidas as funções de Laguerre, podemos re-escrever os modos de propagação $\psi_p^l(\vec{r})$ de uma forma onde ficam explícitos sua amplitude e fase.

$$\psi_p^l(\vec{r}) = \frac{1}{w(z)} \chi_p^{|l|} \left(\frac{2r^2}{w^2(z)} \right) \Phi_p^l(\vec{r}) \quad (\text{A.13})$$

ou seja

$$\chi_p^{|l|} \left(\frac{2r^2}{w^2(z)} \right) = \left[\frac{\sqrt{2}r}{w(z)} \right]^{\frac{|l|}{2}} \exp \left[-\frac{r^2}{w^2(z)} \right] L_p^{|l|} \left(\frac{2r^2}{w^2(z)} \right) \quad (\text{A.14})$$

e

$$\Phi_p^l(\vec{r}) = \exp \left\{ i \left[\frac{kr^2}{2R(z)} - (2p+|l|+1) \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right) + l\phi \right] \right\} \quad (\text{A.15})$$

A.2 $\psi_p^l(\vec{r})$ é solução da equação Paraxial?

Antes de substituirmos (A.13) equação paraxial para constatar sua validade como solução desta equação, olhemos para as eqs. (A.11) e (A.12). Podemos ver que as funções de Laguerre são definidas para apenas uma variável. Isso sugere que efetuemos uma mudança de variáveis da seguinte maneira.

$$\rho = \frac{2r^2}{w^2(z)}, \quad \varphi = \phi, \quad \eta = z$$

Desta forma a eq.(A.14) recupera o formato "original" das funções de Laguerre.

$$\chi_p^{|l|}(\rho) = \rho^{\frac{|l|}{2}} \exp\left(-\frac{\rho^2}{2}\right) L_p^{|l|}(\rho) \quad (\text{A.16})$$

a fase $\Phi_p^l(\vec{r})$ também passa a ter uma aparência diferente da eq. (A.15).

$$\Phi_p^l(\vec{r}) = \exp\left\{i \left[\frac{k}{2R(\eta)} \frac{\rho w^2(\eta)}{2} - (2p + |l| + 1) \arctan\left(\frac{\eta}{z_R}\right) + l\varphi \right]\right\}$$

Usando a relação (A.7) eliminamos o termo $\frac{w^2(\eta)}{R(\eta)}$, e finalmente obtemos.

$$\Phi_p^l(\vec{r}) = \exp\left\{i \left[\frac{\rho\eta}{2z_R} - (2p + |l| + 1) \arctan\left(\frac{\eta}{z_R}\right) + l\varphi \right]\right\} \quad (\text{A.17})$$

As relações entre os novos e os antigos operadores diferenciais estão expostas abaixo.

A.2.1 Operadores Radiais

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial r} &= \frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \rho} + \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial r}}_{=0} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial r}}_{=0} \frac{\partial}{\partial \eta} \\
 &= \frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \rho} \\
 &= \underbrace{\frac{4r}{w^2(z)}}_{=\frac{\partial \rho}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial \rho} \\
 &= \frac{4}{w^2(z)} \underbrace{w(z) \sqrt{\frac{\rho}{2}}}_{=r} \frac{\partial}{\partial \rho} \\
 &= \frac{2\sqrt{2\rho}}{w(\eta)} \frac{\partial}{\partial \rho}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{2\sqrt{2\rho}}{w(\eta)} \frac{\partial}{\partial \rho} \tag{A.18}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2}{\partial r^2} &= \frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \\
 &= \frac{2\sqrt{2\rho}}{w(\eta)} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{2\sqrt{2\rho}}{w(\eta)} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) \\
 &= \frac{2\sqrt{2\rho}}{w(\eta)} \left[\frac{2}{w(\eta)} \frac{1}{\sqrt{2\rho}} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{2\sqrt{2\rho}}{w(\eta)} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \right]
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} = \frac{4}{w^2(\eta)} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{8\rho}{w^2(\eta)} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \tag{A.19}$$

A.2.2 Operadores Azimutais

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \phi} &= \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial \phi}}_{=0} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial \phi}}_{=0} \frac{\partial}{\partial \eta} \\
 &= \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial \phi}}_{=1} \frac{\partial}{\partial \varphi} \\
 &= \frac{\partial}{\partial \varphi}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} = \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \tag{A.20}$$

A.2.3 Operador Axial

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} + \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial z}}_{=0} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial \eta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \eta} \\
 &= \frac{\partial \rho}{\partial w(\eta)} \frac{dw(\eta)}{d\eta} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial}{\partial \eta} \\
 &= -\frac{2\rho}{w(\eta)} \frac{d}{d\eta} \left(w_0 \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{z_R^2}} \right) \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \eta} \\
 &= -\frac{2\rho}{w(\eta)} w_0 \frac{1}{2} \underbrace{\frac{w_0}{w_0 \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{z_R^2}}}}_{=w(\eta)} \frac{\eta}{z_R^2} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial}{\partial \eta}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = -\frac{2w_0^2 \rho \eta}{z_R^2 w^2(\eta)} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial}{\partial \eta} \tag{A.21}$$

A.2.4 A equação Paraxial nas novas variáveis

Escrevendo a eq. (A.1) por extenso temos

$$\frac{\partial^2 \psi_p^l}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_p^l}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_p^l}{\partial \phi^2} + 2ik \frac{\partial \psi_p^l}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.22})$$

Os operadores que aparecem na equação acima foram calculados anteriormente, portanto se substituirmos esses operadores antigos pelos novos obtemos.

$$\begin{aligned} \frac{8\rho}{w^2(\eta)} \frac{\partial^2 \psi_p^l}{\partial \rho^2} + \frac{4}{w^2(\eta)} \frac{\partial \psi_p^l}{\partial \rho} + \frac{1}{w(\eta)} \sqrt{\frac{2}{\rho}} \frac{2\sqrt{2\rho}}{w(\eta)} \frac{\partial \psi_p^l}{\partial \rho} + \frac{1}{w^2(\eta)} \frac{2}{\rho} \frac{\partial^2 \psi_p^l}{\partial \varphi^2} \\ + 2ik \left[\frac{-2w_0^2 \rho \eta}{z_R^2 w^2(\eta)} \frac{\partial \psi_p^l}{\partial \rho} + \frac{\partial \psi_p^l}{\partial \eta} \right] = 0 \end{aligned}$$

Usando a eq.(A.5) na quinta parcela da equação acima e um pouco de algebra, chegamos facilmente a

$$\frac{8\rho}{w^2(\eta)} \frac{\partial^2 \psi_p^l}{\partial \rho^2} + \frac{8}{w^2(\eta)} \frac{\partial \psi_p^l}{\partial \rho} + \frac{2}{\rho w^2(\eta)} \frac{\partial^2 \psi_p^l}{\partial \varphi^2} - i \frac{8\rho \eta}{z_R w^2(\eta)} \frac{\partial \psi_p^l}{\partial \rho} + i2k \frac{\partial \psi_p^l}{\partial \eta} = 0 \quad (\text{A.23})$$

Esta é a equação paraxial nas novas variáveis ρ , φ e η .

A.2.5 As Parcelas da Equação Paraxial

As derivadas de ψ_p^l

$$\frac{\partial \psi_p^l(\vec{r})}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{w(\eta)} \chi_p^{|\ell|}(\rho) \Phi_p^l(\vec{r}) \right] = \frac{1}{w(\eta)} \left[\frac{d\chi_p^{|\ell|}(\rho)}{d\rho} \Phi_p^l(\vec{r}) + \chi_p^{|\ell|}(\rho) \frac{\partial \Phi_p^l(\vec{r})}{\partial \rho} \right]$$

onde,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Phi_p^l(\vec{r})}{\partial \rho} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \exp \left[i \left(\frac{\rho \eta}{2z_R} - (2p + |l| + 1) \arctan \left(\frac{\eta}{z_R} \right) + l\varphi \right) \right] \right\} \\
 &= i \frac{\eta}{2z_R} \exp \left\{ i \left[\frac{\rho \eta}{2z_R} - (2p + |l| + 1) \arctan \left(\frac{\eta}{z_R} \right) + l\varphi \right] \right\} \\
 &= i \frac{\eta}{2z_R} \underbrace{\Phi_p^l(\vec{r})}_{=\Phi_p^l(\vec{r})} \\
 &= i \frac{\eta}{2z_R} \Phi_p^l(\vec{r})
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial \psi_p^l(\vec{r})}{\partial \rho} = \frac{1}{w(\eta)} \left[\frac{d\chi_p^{|l|}(\rho)}{d\rho} + i \frac{\eta}{2z_R} \chi_p^{|l|}(\vec{r}) \right] \Phi_p^l(\vec{r})} \quad (\text{A.24})$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \psi_p^l(\vec{r})}{\partial \rho^2} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{1}{w(\eta)} \frac{d\chi_p^{|l|}(\vec{r})}{d\rho} \Phi_p^l(\vec{r}) + \frac{1}{w(\eta)} \chi_p^{|l|}(\vec{r}) \frac{\partial \Phi_p^l(\vec{r})}{\partial \rho} \right] \\
 &= \frac{1}{w(\eta)} \frac{d^2 \chi_p^{|l|}}{d\rho^2} \Phi_p^l(\vec{r}) + \frac{2}{w(\eta)} \frac{d\chi_p^{|l|}(\vec{r})}{d\rho} \frac{\partial \Phi_p^l(\vec{r})}{\partial \rho} + \frac{1}{w(\eta)} \chi_p^{|l|}(\vec{r}) \frac{\partial^2 \Phi_p^l(\vec{r})}{\partial \rho^2}
 \end{aligned}$$

onde,

$$\frac{\partial^2 \Phi_p^l(\vec{r})}{\partial \rho^2} = \frac{\partial}{\partial \rho} \left[i \frac{\eta}{2z_R} \Phi_p^l(\vec{r}) \right] = -\frac{\eta^2}{4z_R^2} \Phi_p^l$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi_p^l(\vec{r})}{\partial \rho^2} = \frac{1}{w(\eta)} \left[\frac{d^2 \chi_p^{|l|}}{d\rho^2} \Phi_p^l(\vec{r}) + i \frac{\eta}{z_R} \frac{d\chi_p^{|l|}(\vec{r})}{d\rho} - \frac{\eta^2}{4z_R^2} \chi_p^{|l|}(\vec{r}) \right] \Phi_p^l} \quad (\text{A.25})$$

$$\frac{\partial \psi_p^l(\vec{r})}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\frac{1}{w(\eta)} \chi_p^{|\mathit{l}|}(\vec{r}) \Phi_p^l(\vec{r}) \right] = \frac{1}{w(\eta)} \chi_p^{|\mathit{l}|}(\vec{r}) \frac{\partial \Phi_p^l(\vec{r})}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_p^l(\vec{r})}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{w(\eta)} \chi_p^{|\mathit{l}|}(\vec{r}) \frac{\partial^2 \Phi_p^l(\vec{r})}{\partial \varphi^2}$$

onde,

$$\frac{\partial^2 \Phi_p^l(\vec{r})}{\partial \varphi^2} = -l^2 \Phi_p^l(\vec{r})$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi_p^l(\vec{r})}{\partial \varphi^2} = -l^2 \frac{1}{w(\eta)} \chi_p^{|\mathit{l}|}(\vec{r}) \Phi_p^l(\vec{r})} \quad (\text{A.26})$$

$$\frac{\partial \psi_p^l}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{1}{w(\eta)} \chi_p^{|\mathit{l}|}(\rho) \Phi_p^l(\vec{r}) \right] = -\frac{\chi_p^{|\mathit{l}|}(\rho)}{w^2(\eta)} \frac{dw(\eta)}{d\eta} \Phi_p^l(\vec{r}) + \frac{\chi_p^{|\mathit{l}|}(\rho)}{w(\eta)} \frac{\partial \Phi_p^l(\vec{r})}{\partial \eta}$$

onde,

$$\frac{dw(\eta)}{d\eta} = \frac{d}{d\eta} \left[w_0 \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{z_R^2}} \right] = w_0 \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\eta^2}{z_R^2}}} \frac{2\eta}{z_R} \frac{w_0}{w_0} = \frac{w_0^2 \eta}{z_R^2 w(\eta)}$$

e

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Phi_p^l(\vec{r})}{\partial \eta} &= \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ \exp \left[i \left(\frac{\rho \eta}{2z_R} - (2p + |l| + 1) \arctan \left(\frac{\eta}{z_R} \right) + l\varphi \right) \right] \right\} \\
 &= i \left[\frac{\rho}{2z_R} - (2p + |l| + 1) \frac{1}{1 + \frac{\eta^2}{z_R^2}} \frac{1}{z_R} \frac{w_0^2}{w_0^2} \right] \Phi_p^l(\vec{r}) \\
 &= i \left[\frac{\rho}{2z_R} - \frac{(2p + |l| + 1)w_0^2}{z_R w^2(\eta)} \right] \Phi_p^l(\vec{r})
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial \psi_p^l(\vec{r})}{\partial \eta} = \frac{\Phi_p^l(\vec{r}) \chi_p^{||l|}(\rho)}{w(\eta)} \left[i \frac{\rho}{2z_R} - i \frac{(2p + |l| + 1)w_0^2}{z_R w^2(\eta)} - \frac{w_0^2 \eta}{z_R^2 w^2(\eta)} \right]} \quad (\text{A.27})$$

As parcelas da equação Paraxial

Calculadas as derivadas de $\psi_p^l(\vec{r})$ em relação as suas novas variáveis, podemos escrever cada parcela da equação (A.23) multiplicando cada uma das equações (A.24)–(A.27) pelos seus respectivos "coeficientes".

- 1ª PARCELA

$$\frac{8\rho}{w^2(\eta)} \frac{\partial^2 \psi_p^l}{\partial \rho^2} = \frac{8}{w^3(\eta)} \left[\rho \frac{d^2 \chi_p^{||l|}}{d\rho^2} + i \frac{\rho \eta}{z_R} \frac{d\chi_p^{||l|}}{d\rho} - \frac{\rho \eta^2}{4z_R^2} \chi_p^{||l|} \right] \Phi_p^l \quad (\text{A.28})$$

• 2ª PARCELA

$$\frac{8}{w^2(\eta)} \frac{\partial \psi_p^l}{\partial \rho} = \frac{8}{w^3(\eta)} \left[\frac{d\chi_p^{|l|}}{d\rho} + i \frac{\eta}{2z_R} \chi_p^{|l|} \right] \Phi_p^l \quad (\text{A.29})$$

• 3ª PARCELA

$$\frac{2}{\rho w^2(\eta)} \frac{\partial^2 \psi_p^l}{\partial \varphi^2} = \frac{8}{w^3(\eta)} \left[-\frac{l^2}{4\rho} \chi_p^{|l|} \right] \Phi_p^l \quad (\text{A.30})$$

• 4ª PARCELA

$$-i \frac{8\rho\eta}{z_R w^2(\eta)} \frac{\partial \psi_p^l}{\partial \rho} = \frac{8}{w^3(\eta)} \left[-i \frac{\rho\eta}{z_R} \frac{d\chi_p^{|l|}}{d\rho} + \frac{\rho\eta^2}{2z_R^2} \chi_p^{|l|} \right] \Phi_p^l \quad (\text{A.31})$$

• 5ª PARCELA

$$\begin{aligned} 2ik \frac{\partial \psi_p^l}{\partial \eta} &= 2ik \frac{\Phi_p^l}{1(\eta)} \left[\frac{i\rho}{2z_R} \chi_p^{|l|} - i \frac{(2p + |l| + 1)w_0^2}{z_R w^2(\eta)} \chi_p^{|l|} - \frac{w_0^2 \eta}{z_R^2 w^2(\eta)} \chi_p^{|l|} \right] \\ &= \frac{\chi_p^{|l|}}{w(\eta)} \left[-\frac{k\rho}{z_R} + \frac{\overbrace{2kw_0^2}^{2z_R} (2p + |l| + 1)}{z_R w^2(\eta)} - i \frac{\overbrace{2kw_0^2}^{2z_R} \eta}{z_R^2 w^2(\eta)} \right] \Phi_p^l \\ 2ik \frac{\partial \psi_p^l}{\partial \eta} &= \frac{8}{w^3(\eta)} \left[-\frac{k w^2(\eta) \rho}{8z_R} + \frac{(2p + |l| + 1)}{2} - i \frac{\eta}{2z_R} \right] \chi_p^{|l|} \Phi_p^l \quad (\text{A.32}) \end{aligned}$$

Onde usamos a equação (A.5).

Somando as 5 parcelas contidas nas equações (A.28)–(A.32), obtemos:

$$\begin{aligned}
 & \frac{8}{w^3(\eta)} \left[\rho \frac{d^2 \chi_p^{||l|}}{d\rho^2} + i \frac{\rho \eta}{z_R} \frac{d\chi_p^{||l|}}{d\rho} - \frac{\rho \eta^2}{4z_R^2} \chi_p^{||l|} \right] \Phi_p^l + \frac{8}{w^3(\eta)} \left[\frac{d\chi_p^{||l|}}{d\rho} + i \frac{\eta}{2z_R} \chi_p^{||l|} \right] \Phi_p^l \\
 & + \frac{8}{w^3(\eta)} \left[-\frac{l^2}{4\rho} \chi_p^{||l|} \right] \Phi_p^l + \frac{8}{w^3(\eta)} \left[-i \frac{\rho \eta}{z_R} \frac{d\chi_p^{||l|}}{d\rho} + \frac{\rho \eta^2}{2z_R^2} \chi_p^{||l|} \right] \Phi_p^l \\
 & + \frac{8}{w^3(\eta)} \left[-\frac{k w^2(\eta) \rho}{8z_R} \chi_p^{||l|} + \frac{(2p + |l| + 1)}{2} \chi_p^{||l|} - i \frac{\eta}{2z_R} \chi_p^{||l|} \right] \Phi_p^l = \\
 & = \frac{8\Phi_p^l}{w^3(\eta)} \left[\rho \frac{d^2 \chi_p^{||l|}}{d\rho^2} - \frac{\rho \eta^2}{4z_R^2} \chi_p^{||l|} + \frac{d\chi_p^{||l|}}{d\rho} - \frac{l^2}{4\rho} \chi_p^{||l|} + \frac{\rho \eta^2}{2z_R^2} \chi_p^{||l|} - \frac{k \overbrace{w^2(\eta)}^{w_0^2 \left(1 + \frac{\eta^2}{z_R^2}\right)}}{8z_R} \rho \chi_p^{||l|} + \frac{(2p + |l| + 1)}{2} \chi_p^{||l|} \right] \\
 & = \frac{8\Phi_p^l}{w^3(\eta)} \left[\rho \frac{d^2 \chi_p^{||l|}}{d\rho^2} + \frac{d\chi_p^{||l|}}{d\rho} - \frac{l^2}{4\rho} \chi_p^{||l|} + \frac{(2p + |l| + 1)}{2} \chi_p^{||l|} + \frac{\rho \eta^2}{4z_R^2} \chi_p^{||l|} - \frac{\rho k w_0^2}{8z_R} \left(1 + \frac{\eta^2}{z_R^2}\right) \chi_p^{||l|} \right] \\
 & = \frac{8\Phi_p^l}{w^3(\eta)} \left[\rho \frac{d^2 \chi_p^{||l|}}{d\rho^2} + \frac{d\chi_p^{||l|}}{d\rho} + \left(\frac{(2p + |l| + 1)}{2} - \frac{l^2}{4\rho} \right) \chi_p^{||l|} + \frac{\rho \eta^2}{4z_R^2} \chi_p^{||l|} - \frac{2z_R \rho}{8z_R} \chi_p^{||l|} - \frac{2z_R \rho \eta^2}{8z_R^3} \chi_p^{||l|} \right] \\
 & = \frac{8\Phi_p^l}{w^3(\eta)} \left[\rho \frac{d^2 \chi_p^{||l|}}{d\rho^2} + \frac{d\chi_p^{||l|}}{d\rho} + \left(\frac{(2p + |l| + 1)}{2} - \frac{l^2}{4\rho} \right) \chi_p^{||l|} + \frac{\rho \eta^2}{4z_R^2} \chi_p^{||l|} - \frac{\rho}{4} \chi_p^{||l|} - \frac{\rho \eta^2}{4z_R^2} \chi_p^{||l|} \right] \\
 & = \frac{8\Phi_p^l}{w^3(\eta)} \left[\underbrace{\rho \frac{d^2 \chi_p^{||l|}}{d\rho^2} + \frac{d\chi_p^{||l|}}{d\rho} + \left(-\frac{\rho}{4} + \frac{(2p + |l| + 1)}{2} - \frac{l^2}{4\rho} \right) \chi_p^{||l|}}_{\text{eq.deLaguerre}} \right] = 0
 \end{aligned}$$

E assim mostramos que o $\psi_p^l(\vec{r})$ é, de fato, solução da equação paraxial.

Apêndice B

Como Gerar as Máscaras

Nós usamos três rotinas para gerar as máscaras espirais, duas delas devem escritas para serem executadas sobre a plataforma de matemática *Maple*TM e uma delas deve ser executada sobre a plataforma matemática *Mathematica*TM.

B.0.6 A Rotina

```
#####parametros da mascara#####  
#  
p:=2: #carga topologica (> 0):  
n:=5: #numero de voltas das zonas escuras:  
step:=0.1: #passo  
arq:='D:L-G1.ps': #nome do arquivo de saida  
c1:="%!":  
c2:="%":  
c3:"300 500 translate": # origem no centro do papel  
c4:"0.00002 setlinewidth stroke": # espessura da linha  
c5:"0 0 moveto":
```

```

c6:="fill":
#
#
#####
fopen(arq,WRITE):
fprintf(arq,"%s\n",c1):
fprintf(arq,"%s\n",c2):
fprintf(arq,"%s\n",c3):
fprintf(arq,"%s\n",c4):
fprintf(arq,"%s\n",c5):
s := p/Pi:
rmax := evalf(Re(sqrt(s * 2 * n * Pi - 1))):
for j from 1 to p do
phi := Pi/p:
res := -1:
while res < 0 do
r := evalf(Re(sqrt(s * phi - 1)))/rmax:
Lx := evalf(r * cos(phi + j * 2/s)):
Ly := evalf(r * sin(phi + j * 2/s)):
fprintf(arq,"%f %f lineto \n",Lx * 200, Ly * 200):
#lprint(phi, r * delta, Lx, Ly);
delta := evalf(step/sqrt(s4/(4 * (r2 + 0.0000001)) + r2)):
phi := evalf(phi + delta):
res := evalf(phi - 2 * n * Pi):
od:
while phi > 0 do
delta := evalf(step/sqrt(s4/(4 * (r2 + 0.0000001)) + r2)):

```

```
phi := evalf(phi - delta) :  
r := evalf(Re(sqrt(s * phi)))/rmax :  
Lx := evalf(r * cos(phi + j * 2/s)) :  
Ly := evalf(r * sin(phi + j * 2/s)) :  
fprintf(arq, "%f %f\n", Lx * 200, Ly * 200) :  
#lprint(phi, r * delta, Lx, Ly);  
od :  
fprintf(arq, "%s\n", c6) :  
fprintf(arq, "%s\n", c5) :  
od :  
fprintf(arq, "stroke\n") :  
fprintf(arq, "showpage") :  
fclose(arq) :  
fclose(arq) :
```

Referências Bibliográficas

- [1] Allen, M. W., *et al*, *Phys. Rev. A*, **45**, 8185 (1992).
- [2] Arfken, G. B., Weber, H. J., *Mathematical Methods for Physicists*, ed. Academic Press, 4ª edição, EUA, 1995.
- [3] Armstrong, J. A., Bloembergen, N., Ducuing, J., e Pershan, P. S., *Phys. Rev.*, **127**, 1918 (1962).
- [4] Bass, M., Franken, P. A., Hill, A. E., Peters, C. W., e Weinreich, G., *Phys. Rev. Lett.*, **8**, 18 (1962).
- [5] Beijersbergen, M. W., *et al*, *Opt. Commun* **96**, 123 (1993).
- [6] Berry, M. V., *Proc. R. Soc. Lond. A*, **392**, 45 (1984).
- [7] Beth, R. A., *Phys. Rev* **50**, 115 (1936).
- [8] Born, M., Wolf, E., *Principles of Optics*, Pergamon, EUA, 1980.
- [9] Caetano, D. P., *et al*, *Phys Rev A*, 041801 (Rapid Comm.) (2002).
- [10] Cohen-Tannoudji, C., Diu, B., Laloë, F., *Quantum Mechanics*, vol. 1, ed. John Wiley & Sons, 1ª edição, França, 1977.
- [11] Einstein, A., *Ann. Phys.*, **17**, 891 (1905).

- [12] Fontenelle, M. T., Davidovich, L., *Phys. Rev. A*, **51**, 2560 (1995).
- [13] Fowles, G. R. *Introduction of Modern Optics*, Dover, EUA, 1989.
- [14] Galvez, E. J., *et al*, *Phys. Rev. Lett.*, **90**, 203901 (2003).
- [15] Guenther, R. D., *Modern Optics*, John Wiley & Sons, 1ª edição, EUA, 1990.
- [16] Hannay, J. H., *J. Phys. A: Math. Gen.*, **18**, 221 (1985).
- [17] Hecht, Eugene, *Optics*, Addison-Wesley Longman, 3ª edição, EUA, 1998.
- [18] Heckenberg, N. R., *et al*, *Optics Letters*, **17**, 221 (1992).
- [19] <http://mathworld.wolfram.com/Routh-HurwitzTheorem.html>
- [20] Huguenin, J. A. O., *et al*, *J. Opt. Soc. Am. A*, **20**, 1883 (2003).
- [21] Jackson, J. D., *Classical Eletrodynamics*, Wiley, 3ª edição, EUA, 1999.
- [22] Lax, M., Lousiell, W. H., McKnight, W. B., *Phys. Rev. A*, **11**, 1365 (1975).
- [23] Lemos, Nivaldo A., *Mecânica Analítica*, ed. Livraria da Física, 1ª edição, São Paulo, 2004.
- [24] Lewis, G. N., *Nature*, **118**, 874 (1926).
- [25] Mair, A., *et al*, *Nature* **412**, 313 (2001).
- [26] Mandel, Leonard, *Optical coherence and quantum optics*, Cambridge University Press, EUA, 1995.
- [27] Martinelli, M., *et al*, *Phys. Rev. A*, **70**, 0138121365 (2004).
- [28] Milonni, P. W., Eberly, J. H., *Lasers*, Wiley-Interscience, 1edição, 1988.
- [29] Oemrawsingh, S. S. R., *et al*, *Applied Optics*, **43**, 688 (2004).

- [30] Padgett, M. J., Courtial, J., *Optics Letters*, **24**, 430 (1999).
- [31] Pancharatnam, S., *Proc. Ind. Acad. Sci.*, **44**, 247 (1956).
- [32] Petrov, D. V., Canal, F., Torner, L., *Opt. Commun* **143**, 265 (1997).
- [33] Ruffin, A. B., *et al*, *Phys. Rev. Lett.*, **83**, 3410 (1999).
- [34] Schalow, A. L., e Townes, C. H., *Phys. Rev.*, **112**, 1940 (1958).
- [35] Schwob, C., *et al.*, *Appl. Phys. B*, **66**, 685 (1998).
- [36] Siegman, A. E., *Lasers*, University Science Books, Mill Valley, CA, EUA, 1986.
- [37] Shen, Y., R., *The Principles of Nonlinear Optics*, John Wiley & Sons, 1ª edição, 1984.
- [38] van Enk, S. J., *Opt. Commun*, **102**, 59 (1993).
- [39] Verdyen, J. T., *Lasers Electronics*, Prentice Hall, 3ª edição, 1994.
- [40] Yariv, A., *Quantum Electronics*, John Wiley & Sons, 3ª edição, 1988.