

Universidade Federal Fluminense

Instituto de Física

Análise crítica da dinâmica de uma cavidade pendular quântica

Andrea Barroso Melo

Orientadores: Prof. Dr. Murray Keneth Olsen e Prof. Dr. Kaled Dechoum

Banca examinadora:

Prof. Dr.Kaled Dechoum (IF-UFF)

Prof. Dr.Daniel Jonathan (IF-UFF)

Prof. Dr.Marcos César de Oliveira (UNICAMP)

Dissertação submetida ao Instituto de Física da Universidade Federal Fluminense como parte dos requisitos para obtenção do grau de mestre em ciências.

À memória do meu pai Antônio e
à minha mãe Wanda.

Agradecimentos

A Deus.

Aos meus pais que sempre me apoiaram e torceram para que este trabalho se concretizasse mesmo sem entendê-lo. Obrigada por tudo. Obrigada por esperarem pacientemente por um momento da minha atenção, por uma palavra ou um simples olhar.

À minha irmã, peço desculpas pelos momentos difíceis que passou e não pude te ouvir. Suas palavras de incentivo estão presentes em cada linha desta dissertação.

Ao André Felipe, que eu conheci ao longo deste caminho, e que com tanto amor soube pacientemente esperar por um momento de carinho ou um pouco de atenção. Obrigada pelo carinho, incentivo e palavras de coragem. Agradeço profundamente por ter encontrado você.

À Lorena, minha gatinha que me acompanhou durante várias noites sem dormir.

A todos os meus familiares, desculpem-me pelos aniversários e comemorações que não pudemos compartilhar. Meu coração sempre está com vocês.

Ao Murray e ao Kaled, meus orientadores, pelo exemplo e dedicação.

A todos os meus amigos do Inmetro, não vou citar nomes, vocês sabem quem são. Obrigada pelo incentivo e apoio. Muito obrigada.

Aos meus amigos da UFRJ e da UFF que sempre me incentivaram e me apoiaram em momentos muito difíceis.

À CAPES que me acolheu e proporcionou um apoio fundamental no início deste trabalho.

Sumário

1	Introdução	1
2	O acoplamento optomecânico	5
2.1	Descrição do sistema	5
2.2	A finesse \mathcal{F} e o fator de qualidade Q da cavidade	9
2.3	Pressão de Radiação num espelho móvel	11
2.4	O feixe luminoso	12
2.5	O limite quântico padrão Δ_{LQP}	12
2.6	O hamiltoniano do sistema	13
3	Métodos Estocásticos em Mecânica Quântica	16
3.1	Equação de Von Neumann	16
3.1.1	Sistemas acoplados a um reservatório	17
3.2	Representação clássica no espaço de fase	18
3.2.1	O método de espaço de fase	18
3.2.2	Representação de Wigner	19
3.2.3	Utilizando a representação de Wigner	20
3.2.4	Representação P de Glauber-Sudarshan	25
3.2.5	Representação P positiva	32
3.2.6	Algumas considerações	33
4	O método de espaço de fase para a cavidade pendular	35
4.1	Aplicação do método de espaço de fase	35
4.1.1	Representação de Wigner e P de Glauber-Sudarshan em termos dos estados corentes do espelho	37
4.1.2	Representação P Positiva	41
4.1.3	Equações estocásticas	42
4.1.4	Análise Clássica	43
4.1.5	Análise da condição de biestabilidade	47
4.2	Integração estocástica e previsões quânticas	49
4.2.1	Condições Iniciais	49
4.2.2	Medidas de Posição	53
4.2.3	Preparação de estados não clássicos	57

5	Conclusão e perspectivas	62
5.1	Perspectivas	62
5.1.1	Refriamento através da reação	62
5.2	Conclusão	63
A	Teorema de Bakker-Hausdorff	66
A.1	Teorema de Bakker-Hausdorff	66
A.1.1	Corolários	67
B	Cálculo utilizando os operadores \hat{x} e \hat{p}	68
B.1	Aplicação do método de espaço de fase	68
B.1.1	Equações Estocásticas	70
B.1.2	Linearização das equações	71

Lista de Figuras

2.1	Modelo esquemático constituído por uma cavidade de Fabry-Perot.	6
2.2	Inteferômetro utilizado por Caves [4]. Observamos uma dispositivo ligado aos espelhos e ao separador de feixes. Este dispositivo possui massa $M \gg m$ que permite considerar o separador e os espelhos internos em repouso.	7
2.3	Interferômetro do "LIGO" [8]	8
2.4	Modelo utilizado por Pace, Collet e Walls [5]	9
2.5	Relação da Fineza \mathcal{F} com a fase do campo e com o comprimento de onda do feixe incidente λ	10
3.1	Representação gráfica de um estado coerente e um estado comprimido no espaço de fase. As coordenadas p e q representam o momento e a posição, respectivamente. As incertezas no momento e na posição são Δp e Δq , respectivamente.	27
4.1	Convergência obtida com a expansão iterativa.	44
4.2	Comportamento de x em função do número de iterações.	44
4.3	Variação da intensidade da luz em função do tempo. Observamos um comportamento oscilatório, típico de pulsos próprios.	45
4.4	Variação da posição do espelho em função do tempo. Observamos um comportamento oscilatório, típico de pulsos próprios.	45
4.5	Variação do momento do espelho em função do tempo, da mesma forma que a posição apresenta um comportamento de pulsos próprios.	46
4.6	Valores médios para x em $T = 4.2K$ e $T = 70K$ para um estado coerente inicial do espelho e sem bombeio ótico. Estes resultados são as médias de 7.6×10^3 e 2.7×10^4 trajetórias, respectivamente.	51
4.7	Desvios padrões para x em $T = 4.2K$ e $T = 70K$ para um estado coerente inicial do espelho e sem bombeio ótico.	52
4.8	As variâncias do campo eletromagnético no interior da cavidade. A linha sólida é $V(\hat{X}_a)$, a linha pontilhada e tracejada é $V(\hat{Y}_a)$, e a linha pontilhada é o fator de Fano. Note que a escala vertical é logarítmica	53
4.9	Os desvios padrões na posição e no momento do espelho para um laser de potência $5mW$. Utilizamos as unidades do padrão S.I. para a posição e o momento.	55

-
-
- 4.10 Funções de correlação intracavidade, $\rho(xX_a)$ (linha sólida), $\rho(xY_a)$ (linha pontilhada e tracejada) e $\rho(xN_a)$ (linha pontilhada), para uma potência de $5mW$ 56
- 4.11 Incertezas inferidas na posição do espelho, $A\sqrt{V^{inf}(\hat{X}_b)}$, calculada conforme a equação 4.2.37. A linha sólida é estimada usando \hat{Y}_a , a linha tracejada utiliza \hat{X}_a e a linha pontilhada utiliza N_a 58

Lista de Tabelas

4.1	Parâmetros utilizados	40
4.2	Autovalores	40
4.3	Autovalores	41

Resumo

Desenvolvemos uma análise quântica de uma cavidade pendular, utilizando a representação P positiva, mostrando que o estado quântico do movimento de um espelho, um objeto macroscópico, tem efeitos notáveis na dinâmica deste sistema. Este foi proposto anteriormente como um candidato para medidas quanticamente limitadas de pequenos deslocamentos do espelho devido à pressão de radiação, para a produção de estados com emaranhamento entre espelho e o campo e também para estados de superposição do espelho. Contudo, quando tratamos o espelho oscilante como um oscilador quântico encontramos que este sistema sempre oscila, não possui estados estacionários e exibe incertezas na posição e no momento que são tipicamente maiores que os valores médios. Isto significa que a análise linearizada das flutuações realizadas predominantemente para prever estes estados quânticos são de uso limitado. Acharmos que a acuracidade alcançável na realização das medidas é muito pior do que o limite quântico padrão, devido ao ruído térmico, que para parâmetros experimentais típicos é enorme mesmo em $2mK$.

Abstract

We perform a quantum mechanical analysis of a pendular cavity, using the positive-P representation, showing that the quantum state of the moving mirror, a microscopic object, has noticeable effects on the dynamics. This system was previously been proposed as a candidate for the quantum-limited measurement of small displacements of the mirror due to radiation pressure, for the production of states with entanglement between the mirror and the field, and even for superposition states of the mirror. However, when we treat the oscillating mirror quantum mechanically, we find that it always oscillates, has no stationary steady-state, and exhibits uncertainties in position and momentum which are typically large than the mean values. This means that previous linearised fluctuation analyses which have been used to predict these highly quantum states are of limited use. We find that achievable accuracy in measurement is far worse than the standard quantum limit due to thermal noise, which, for typical experimental parameters, is overwhelming even at $2mK$.

Capítulo 1

Introdução

Até o final do século XIX todos estavam acostumados com o determinismo da natureza e compreendiam sua descrição através da física clássica. A não ser pela falta de compreensão de poucos fenômenos, como por exemplo a radiação de corpo negro e a estabilidade da matéria, grande parte dos cientistas da época acreditavam que a física conhecida até então era uma ciência completa, ou seja, todos os fenômenos da natureza poderiam ser descritos e previstos pela física desenvolvida até aquela época.

Estes "poucos fenômenos" escondiam algo surpreendente que, não tardaria, seria motivo de muita discussão, presente até os dias de hoje. Por volta do início do século *XX*, surgiu uma física nova cuja abordagem conceitual era completamente diferente da física clássica: a física quântica. Ela atravessa os domínios do mundo macroscópico e penetra no universo microscópico da matéria. Surgem novos fenômenos, como por exemplo, o efeito fotoelétrico, bem descrito por Einstein, a dualidade onda-partícula do fóton, evidente na experiência de Young, o princípio de incerteza de Heisenberg, culminando no comportamento probabilístico da natureza. Esta nova física introduziu uma mudança de paradigma na ciência e foi alvo de calorosas discussões no passado de tal forma que até hoje existem tentativas de descrever o mundo microscópico de modo determinístico.

Atualmente existem muitos pesquisadores que utilizam certos tipos de sistemas quânticos para encontrar fenômenos não clássicos, tais como estados de gato de Schrödinger, emaranhamento e teletransporte. Analisamos a dinâmica de um sistema específico com o objetivo de iden-

tificar fenômenos quânticos, em particular o emaranhamento. Estes fenômenos são muito importantes para a compreensão da mecânica quântica. Este tipo de sistema foi investigado tanto por experimentais [1] quanto por teóricos [2], para prever a supressão do ruído quântico [1] e calcular o ruído de fase no campo da cavidade [3].

Estudar qualquer fenômeno quântico implica em ter muito cuidado com o que será observado e com o que será encontrado. Os resultados podem conduzir muito facilmente a erros de interpretação, uma vez que temos de considerar que este é um ramo da física que exige uma nova abordagem conceitual.

Sabemos que, na teoria quântica, o princípio de incerteza de Heisenberg impõe um limite inferior no conhecimento de duas propriedades que não comutam. Além disso, quando queremos realizar experimentos que possam de fato ser executados, precisamos considerar outros fatores que aumentam essa limitação, tais como as fontes de ruído de um sistema. Ou seja, há um Limite Quântico Padrão (LQP), que estabelece um limite para o erro no valor medido de alguma variável do sistema, durante um certo tempo de duração da medida.

Dessa forma, estamos certos de que por mais acuracidade que possamos obter ao realizar uma medida, sempre haverá um valor limite devido à natureza quântica do sistema, ao material e à tecnologia utilizados.

Como é conhecido na literatura, desde os primórdios do desenvolvimento da mecânica quântica até hoje, existem muitas propostas para tentar descrevê-la. Neste sentido os experimentos podem fornecer resultados que ajudem a definir um caminho a seguir. Além disso, estes experimentos podem ser utilizados para observar e realizar medidas de fenômenos de nosso interesse, já previstos em outras teorias, tais como a detecção de ondas gravitacionais.

Historicamente têm-se registro de que o primeiro interferômetro com o objetivo de detectar ondas gravitacionais foi construído nos Laboratórios de Pesquisas Hughes, na Califórnia [4].

Caves [4] propôs a utilização do conceito de estado comprimido¹ da

¹Estado comprimido significa um estado do campo eletromagnético cujas flutuações em uma das quadraturas da fase são menores do que as flutuações do ponto zero e cujas as flutuações na outra fase são maiores do que àquelas do ponto zero.

luz que penetra na cavidade de um interferômetro. Em seu trabalho foi analisada a sensibilidade de um interferômetro e relacionou-se três fontes que poderiam ser tratadas como a origem das incertezas nas medidas realizadas através deste sistema. No entanto, utilizando o fato de que tais fontes representavam incertezas bem conhecidas na mecânica quântica, os espelhos que compõem o interferômetro foram tratados como objetos clássicos.

Pace et. al. [5] trataram os espelhos como osciladores harmônicos quânticos. Com o objetivo de determinar a amplitude mínima possível de onda gravitacional que este sistema pode detectar, foram utilizadas duas técnicas diferentes para a determinação de expressões para o sinal e a variância do interferômetro: a primeira foi a técnica de geração de estados comprimidos¹ para a luz que entra na cavidade e a segunda foi considerar a existência de um meio Kerr² no interior da cavidade. Em ambos os casos foi feita uma análise linearizada para pequenas flutuações em torno dos estados estacionários do sistema. Veremos mais adiante porque em sistemas deste tipo esta análise não pode ser feita.

Samphire et. al. [6] descreveram um tratamento teórico para as flutuações da pressão de radiação no espelho devido a um feixe de luz não clássico. A partir da quantização do campo eletromagnético foram desenvolvidos operadores, os quais chamaram de operadores de pressão de radiação. Esta análise foi feita para três tipos de feixes de luz: coerente³, caótico⁴ e estados de número (estado de Fock).⁵ No entanto, os espelhos foram considerados no estado estacionário, ao contrário da maioria dos sistemas utilizados na literatura.

Com o objetivo de descrever a dinâmica de um sistema quântico, utilizando um mapeamento de funções, estruturamos este trabalho de modo a seguir uma sequência de passos para obtermos as equações estocásticas. Deste modo podemos pensar em quatro etapas: escrever uma equação mestra para o sistema, realizar seu mapeamento em

²O índice de refração de um meio Kerr (meio não linear) depende da intensidade.

³A definição de um estado coerente foi desenvolvida por dois pesquisadores - Glauber e Sudarshan - concomitantemente, porém em trabalhos diferentes. Mais adiante escrevemos sobre a definição e as propriedades destes estados.

⁴Este tipo de luz é representado por um estado de mistura estatística do campo de radiação.

⁵São autoestados do hamiltoniano e são representados por um estado puro e definido em função de um certo número de fótons.

funções ordinárias, a partir deste resultado obter uma equação do tipo Fokker-Planck e, finalmente obter as equações estocásticas.

No Capítulo 2 veremos uma descrição mais detalhada destes sistemas e apresentaremos nosso modelo, com um esquema físico e seu hamiltoniano.

No Capítulo 3 veremos os métodos que estão disponíveis na literatura para tratar este problema. Utilizaremos a abordagem do método de espaço de fase e trabalharemos com as representações P de Glauber-Sudarshan, Wigner e P positiva.

No Capítulo 4 escreveremos a equação mestra da matriz densidade do nosso sistema, e através do método de espaço de fase encontraremos uma equação de Fokker-Planck que nos permitirá escrever as equações estocásticas do sistema. Analisaremos criticamente os resultados obtidos utilizando parâmetros experimentais conhecidos na literatura e presentes nos laboratórios atuais. Veremos alguns resultados surpreendentes e identificaremos quais fenômenos não clássicos podem aparecer neste tipo de sistema.

No Capítulo 5 apresentaremos uma conclusão com base em nossa análise e veremos o que é possível fazer daqui em diante para obtermos resultados com maior acurácia.

Capítulo 2

O acoplamento optomecânico

2.1 Descrição do sistema

A interação entre a luz e a matéria produz fenômenos físicos muito importantes para a compreensão da teoria da mecânica quântica. O estudo de tais fenômenos é de suma relevância visto que a realização de medidas em sistemas quânticos é limitada pelo princípio de incerteza e pela própria construção de um sistema físico que possa produzir um tipo de saída detetável. Como exemplo, citamos o caso dos interferômetros. Além da indeterminação característica de sua natureza, temos de identificar os ruídos presentes e de que forma influenciam no sinal de saída. Em geral os ruídos que interferem no valor medido são provenientes das flutuações da pressão de radiação, das flutuações térmicas e do erro dos detetores do sinal de saída. Uma vez identificado o comportamento dos ruídos pode-se tentar reduzir sua influência para obter maior acuracidade na medida.

Consideramos um sistema como mostrado na figura esquemática (2.1). Os dois espelhos formam uma cavidade de Fabry-Perot [41]. Em geral, interferômetros utilizam duas ou mais cavidades deste tipo.

Uma fonte de laser produz um feixe de luz, de intensidade I_{inc} , que penetra na cavidade, através do primeiro espelho, o que implica que o mesmo deve ser constituído por um material parcialmente refletor.

O segundo espelho é totalmente refletor e devido à pressão de radiação, exercida pelo feixe de luz há uma transferência de momento, causando variações em sua posição. Isto é possível de ser verificado se o espelho for conectado a algum dispositivo que funcione como uma

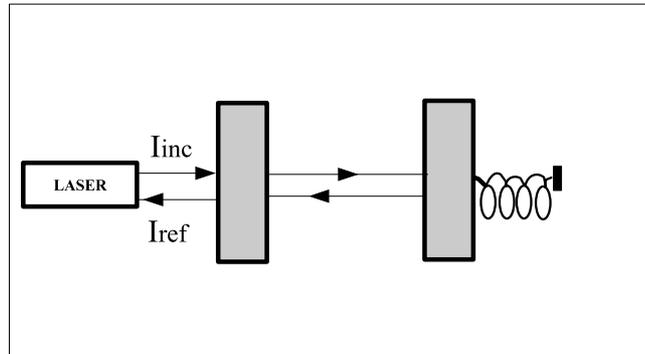


Figura 2.1: Modelo esquemático constituído por uma cavidade de Fabry-Perot.

mola. Na prática o segundo espelho é melhor descrito como sendo um pêndulo.

O feixe de luz refletido que atravessa o primeiro espelho e sai da cavidade possui intensidade I_{ref} . Na prática devemos introduzir separadores de feixes e fotodetetores para medir o feixe de saída.

Esperamos que a passagem de ondas gravitacionais nas cavidades de Fabry-Perot induza um deslocamento no espelho, detetado através da luz (laser) que incide na cavidade. No entanto as vibrações do espelho são uma fonte de ruído e podem se sobrepor às ondas gravitacionais.

O interferômetro utilizado por Caves [4], figura (2.2) é um aparato típico para a deteção de ondas gravitacionais. É formado por espelhos de massa m , que constituem dois braços de comprimento l (interferômetro de Michelson). Um laser bombeia este sistema atingindo um separador de feixes (massa M), que divide em dois o feixe de luz oriundo do laser. Os espelhos das extremidades são perfeitamente refletivos e os espelhos internos são parcialmente refletivos, de modo que os feixes que atingem estes espelhos sofrem múltiplas reflexões antes de se recombinarem no separador de feixes. O número de reflexões é denotado por b , que neste exemplo é igual a 2. Os espelhos internos e o separador de feixes estão ligados rigidamente por uma massa M . Para simplificar os cálculos assume-se $M \gg m$, de modo que o movimento do separador de feixes e dos espelhos internos, devido à pressão de radiação possa ser ignorado, ou seja consideram-se que o separador

de feixes e os espelhos internos estão em repouso. Os espelhos externos podem mover-se devido à pressão de radiação, registrando deslocamentos z_1 e z_2 . A intensidade dos feixes nos orifícios de saída é medida pelos fotodetetores, de modo que é possível obter o valor da diferença $z \equiv z_2 - z_1$. Neste modelo de interferômetro foram consideradas duas situações ideais: os espelhos não apresentam perdas e os fotodetetores possuem eficiência quântica igual a um, que são parâmetros distantes de serem encontrados na maioria dos laboratórios.

O trabalho de Gillespie e Raab [8] utiliza o modelo esquemático do

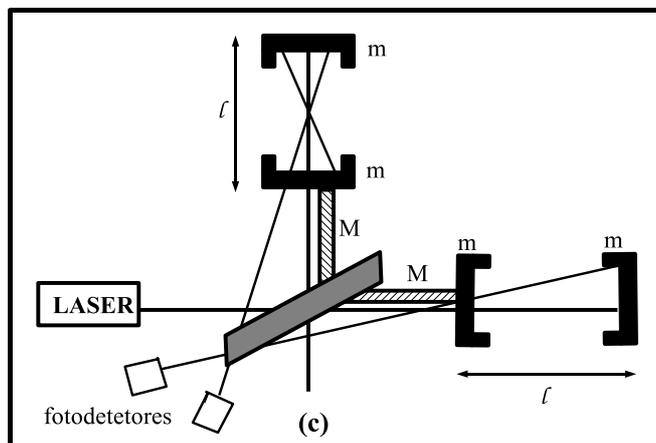


Figura 2.2: Interferômetro utilizado por Caves [4]. Observamos um dispositivo ligado aos espelhos e ao separador de feixes. Este dispositivo possui massa $M \gg m$ que permite considerar o separador e os espelhos internos em repouso.

interferômetro desenvolvido pelo "Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory (LIGO)", que é constituído por duas cavidades de Fabry-Perot. O objetivo deste aparato é a detecção de ondas gravitacionais. Para que seja possível detetar deslocamentos levando-se em conta as vibrações do espelho, Gillespie e Raab (figura 2.3) consideram a interação entre os modos mecânicos de vibração das massas teste e os modos óticos do campo eletromagnético ressonante nas cavidades. Um detalhe de construção experimental que é citado neste trabalho relaciona-se com a forma geométrica dos espelhos. Numa situação mais próxima dos dispositivos presentes nos laboratórios são considerados espelhos cuja superfície é levemente curvada (não é um cilindro sólido ideal). Além disso existem dispositivos que devem ser presos aos espel-

hos para que os mesmos possam ser tratados como pêndulos. A fim de controlar a orientação dos espelhos ou manter um determinado modo ótico em ressonância são introduzidos magnetos atachados à superfície. Todos estes recursos são tratados como perturbações da forma original dos espelhos (cilindros sólidos). Mas deve-se ter o cuidado em manter uma faixa de parâmetros experimentais para que estas perturbações não interfiram nos resultados de modo que este tratamento forneça uma boa aproximação.

No artigo de Pace *et. al* [5] utiliza-se um interferômetro de Fabry-

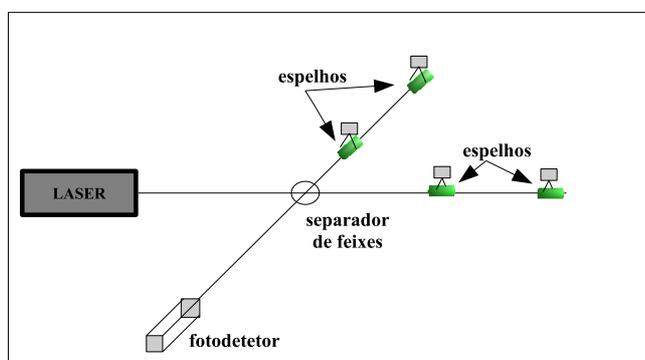


Figura 2.3: Interferômetro do "LIGO" [8]

Perot (figura (2.4)) com o mesmo objetivo - a detetação de ondas gravitacionais.

Os detalhes experimentais de construção do interferômetro não são bem explorados. Procurou-se focar no tratamento teórico mais adequado para atingir o objetivo final. Os espelhos são tratados como osciladores harmônicos quantizados. Pace *et.al.* apresentaram um hamiltoniano que introduz um termo específico, que representa considerando o acoplamento entre a onda gravitacional clássica e o modo do espelho.

Apesar da apresentação dos sistemas usuais acima ainda permanecem algumas questões importantes a serem respondidas: como saber se o sinal de saída detectado reproduz uma medida realmente oriunda de uma radiação de onda gravitacional? Ou como é possível determinar se o sinal detectado corresponde à observação de algum fenômeno não clássico?

Antes de tentarmos responder estas questões vamos descrever este

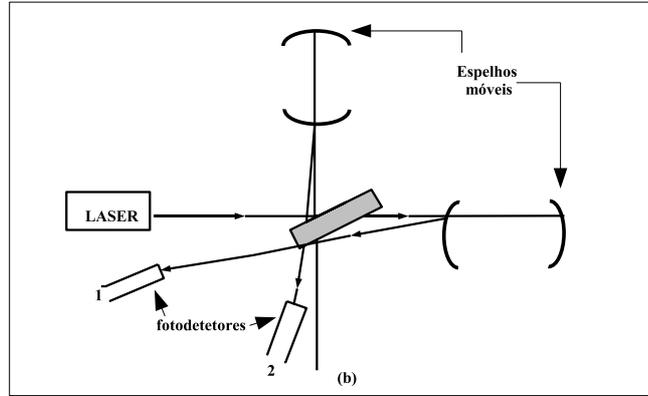


Figura 2.4: Modelo utilizado por Pace, Collet e Walls [5]

sistema, identificando as interações presentes, as variáveis que quantificam a característica do material utilizado e as variáveis que podem ser medidas num sinal de saída.

2.2 A finesse \mathcal{F} e o fator de qualidade Q da cavidade

Dentro de uma cavidade a luz efetua um certo número de reflexões nos espelhos. Desprezando as perdas no interior da cavidade, a intensidade média incidente é igual a intensidade média refletida. Em contrapartida, a cavidade apresenta ressonância, de forma que as ondas do campo em seu interior interferem construtivamente, tal que a defasagem da luz é um múltiplo de 2π e o comprimento da cavidade é um múltiplo inteiro da metade do comprimento de onda ($\lambda/2$) do feixe de laser incidente. A intensidade no interior da cavidade em função do comprimento da cavidade reproduz uma lorentziana, cujo pico de ressonância é conhecido como pico de Airy, como mostrado na figura (2.5).

Uma característica importante é a finesse \mathcal{F} da cavidade. Vemos que está relacionada com a largura da Lorentziana. A finesse determina a amplificação da intensidade média incidente \bar{I}_{inc} :

$$\bar{I} = \frac{2}{\pi} \mathcal{F} \bar{I}_{inc}. \quad (2.2.1)$$

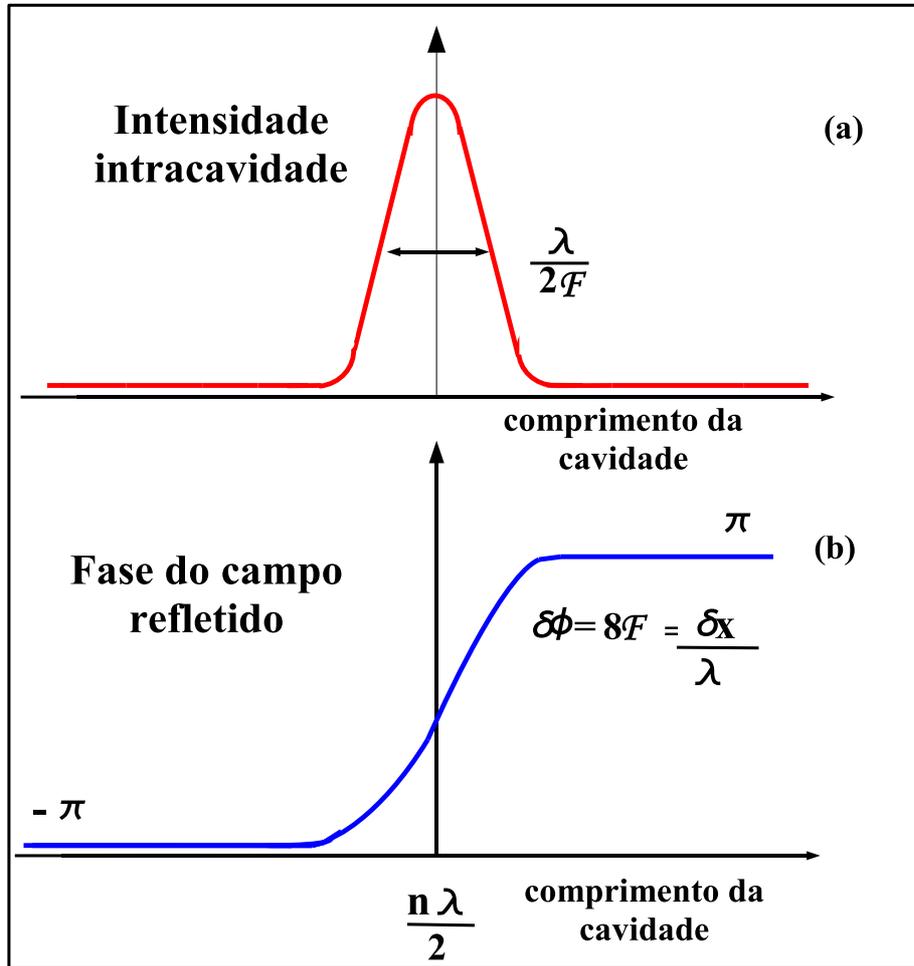


Figura 2.5: Relação da Fineza \mathcal{F} com a fase do campo e com o comprimento de onda do feixe incidente λ .

Observamos que do ponto de vista experimental a finesse está relacionada com o comprimento L e com a taxa de decaimento γ da cavidade [9]:

$$\mathcal{F} = \frac{\pi c}{(2L\gamma)}, \quad (2.2.2)$$

onde c é a velocidade da luz.

Portanto, é necessário escolher o tipo de espelho (plano, côncavo, etc.) de forma a obter uma alta finesse. Introduzindo uma dessintonia devido à variação do tamanho da cavidade, implica que no interior da cavidade não há número inteiro de comprimento de onda. Veremos mais adiante que isto é necessário para estabelecer uma região onde há

biestabilidade no sistema.

Outro parâmetro importante é o chamado fator de qualidade \mathcal{Q} do espelho oscilante. Este fator também relaciona-se com a taxa de decaimento do espelho e com sua frequência de oscilação ω_m [10, 9]. Seu valor pode ser ajustado em função da característica dos equipamentos para a montagem experimental, uma vez que depende de parâmetros que podem variar em função das características do espelho utilizado:

$$\mathcal{Q} = \frac{\omega_m}{\gamma_m} \quad (2.2.3)$$

Veremos no capítulo três quando discutirmos os resultados que, do ponto de vista experimental, o fator de qualidade \mathcal{Q} pode depender da temperatura.

2.3 Pressão de Radiação num espelho móvel

De acordo com a natureza corpuscular da luz, cada fóton refletido transfere para o espelho móvel uma quantidade de movimento igual a $2\hbar\vec{k}$, sendo \hbar a constante de Planck e \vec{k} o vetor de onda da luz. Esta transferência produz uma força $\vec{F}_{rad}(t)$ devido à pressão de radiação exercida sobre o espelho. Em módulo, esta força é igual a quantidade de movimento trocada entre o fóton e o espelho vezes o número de fótons refletidos por segundo (intensidade $I(t)$):

$$F_{rad}(t) = 2\hbar k I(t) \quad (2.3.4)$$

A força $\vec{F}_{rad}(t)$ produz um deslocamento no espelho tal que sua posição está correlacionada com a intensidade luminosa. Quando o fluxo de fótons atinge o espelho, este tende a entrar em movimento e quando o fluxo de fótons diminui o espelho tende a retornar a sua posição de equilíbrio. Dessa forma a variação da posição do espelho reproduz as flutuações da intensidade incidente, através de uma resposta mecânica do espelho. A existência de funções de correlação é o que nos permite obter, de fato, alguma informação com relação ao deslocamento do espelho.

2.4 O feixe luminoso

O feixe incidente na cavidade provém de uma fonte de laser coerente, caracterizado por uma distribuição aleatória dos fótons no tempo. A natureza corpuscular da luz permite que cada fóton seja considerado como um evento discreto, localizado no tempo e a intensidade da luz é a taxa de contagem desses eventos, cuja forma é:

$$I(t) = \sum_n \delta(t - t_n), \quad (2.4.5)$$

onde t_n corresponde ao instante de chegada do n ésimo fóton no espelho.

Podemos caracterizar a estatística dos fótons de um feixe coerente considerando que um número de fótons N contados durante um certo tempo T é uma variável aleatória, cuja distribuição de probabilidade $P(N)$ obedece à distribuição de Poisson:

$$P(N) = \frac{\bar{N}^N}{N!} e^{-\bar{N}}, \quad (2.4.6)$$

onde \bar{N} é o número médio de fótons contados durante um intervalo de tempo T , cuja relação com a intensidade média é:

$$\bar{N} = \bar{I}T. \quad (2.4.7)$$

A variância é dada por

$$\Delta N^2 = \bar{N}. \quad (2.4.8)$$

Estas flutuações dão origem a um ruído na medida de intensidade do feixe luminoso. Heidmann et.al. fizeram uma simulação de Monte Carlo deste comportamento para o feixe incidente, o feixe refletido, a posição e a velocidade do espelho em função do tempo [7] e mostraram que o movimento do espelho é sensível às flutuações da intensidade do feixe de fótons incidente.

2.5 O limite quântico padrão Δ_{LQP}

De acordo com o princípio de incerteza de Heisenberg, as medidas de posição e momento estão relacionadas de tal forma que uma medição

da posição acarreta numa incerteza na medida do momento e vice-versa,

$$(\Delta x)(\Delta p) \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (2.5.9)$$

Portanto, na mecânica quântica estamos trabalhando com uma indeterminação inerente à natureza.

Isto significa que há uma limitação na realização de medidas quânticas. Por exemplo, do ponto de vista experimental uma medida da posição de um ressonador de uma precisão Δx_0 induz uma incerteza na quantidade de movimento $\Delta p_0 \geq \hbar/(2\Delta x_0)$. Após uma evolução livre, durante um certo tempo τ , a posição do ressonador apresenta uma dispersão $\Delta x_1 = \tau\Delta p_0/m \geq (\hbar\tau)/(2m\Delta x_0)$, onde m é a massa do ressonador.

Uma combinação destas medidas $(\Delta x_0)(\Delta x_1)$ produz uma incerteza chamada limite quântico padrão Δx_{LQP} ,

$$\Delta x_{LQP} = \sqrt{\frac{\hbar\tau}{2m}}. \quad (2.5.10)$$

Na prática isto quer dizer que nenhum aparato experimental pode realizar medida com erro inferior ao valor deste limite, ou seja, uma medida mais acurada deve ser próxima ou igual a este limite.

É interessante notar que estamos falando de deslocamentos muito pequenos, da ordem de $10^{-21}cm$ (comprimento de onda gravitacional), de modo que é necessário um ajuste muito rigoroso nos parâmetros experimentais se quisermos medir realmente efeitos que produzem sensibilidade tão pequena.

2.6 O hamiltoniano do sistema

O sistema é constituído de uma cavidade de Fabry-Perot conforme a figura (2.1) imersa num banho térmico. De acordo com um procedimento usual [11, 12], modelamos o reservatório como um grande número de osciladores. Assumimos que os efeitos do retardo dos fótons devido à mudança de caminho ótico em função da variação do comprimento da cavidade é desprezível. O efeito Doppler também pode ser desprezado pois a correção que deveria ser feita envolve um fator $\sim v/v_c$, sendo v

a velocidade do espelho e v_c a velocidade da luz.

Dessa forma, o amortecimento do espelho oscilante será devido somente ao acoplamento com o reservatório térmico.

Consideramos a oscilação do espelho como um movimento harmônico, caracterizado por uma frequência ω_m . O Hamiltoniano deste sistema pode ser escrito como

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_{livre} + \hat{\mathcal{H}}_{int} + \hat{\mathcal{H}}_{bomb} + \hat{\mathcal{H}}_{banho}, \quad (2.6.11)$$

onde,

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_{livre} &= \hbar\omega_0\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega_m^2\hat{x}^2, \\ \hat{\mathcal{H}}_{int} &= -\hbar g\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{x}, \\ \hat{\mathcal{H}}_{bomb} &= i\hbar\epsilon(\hat{a}^\dagger e^{i\omega_0 t} - \hat{a}e^{-i\omega_0 t}), \\ \hat{\mathcal{H}}_{banho} &= \hat{\Gamma}\hat{a}^\dagger + \hat{\Gamma}^\dagger\hat{a}. \end{aligned} \quad (2.6.12)$$

O primeiro termo ($\hat{\mathcal{H}}_{livre}$) corresponde ao oscilador harmônico eletromagnético (modo do campo) e ao oscilador mecânico (espelho). Os operadores \hat{a}^\dagger e \hat{a} são os operadores de criação e aniquilação do campo, respectivamente. A frequência ω_0 corresponde à oscilação do modo do campo. Os operadores \hat{x} e \hat{p} são os operadores de posição e momento do espelho, respectivamente. A massa e a frequência de oscilação do espelho estão representadas por m e ω_m , respectivamente.

O hamiltoniano de $\hat{\mathcal{H}}_{int}$ representa a interação entre um modo da cavidade e o espelho oscilante, sendo $g = \omega_0/L$ a constante de acoplamento desta interação, onde L é o comprimento da cavidade.

O hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}_{bomb}$ corresponde à interação do bombeio de fótons na cavidade e o campo, sendo ϵ a amplitude do campo de bombeio, tomado como clássico, definido como a raiz quadrada do número de fótons por segundo.

O acoplamento do sistema com o reservatório é representado pelo termo $\hat{\mathcal{H}}_{banho}$, onde $\hat{\Gamma}^\dagger$ e $\hat{\Gamma}$ são operadores do reservatório.

As oscilações do espelho serão tratadas como um processo estocástico Markoviano [11], cujo amortecimento será incluído no próximo passo.

Neste capítulo abordamos o limite quântico padrão e dois parâmetros experimentais muito importantes para a detecção de pequenos deslocamentos, no entanto, nos capítulos subsequentes veremos que existem

outros fatores que influenciam na acuracidade das medidas quânticas.

Chamamos a atenção para o fato de que há um acoplamento entre a variação da posição do espelho e a intensidade do feixe luminoso incidente, através da força de pressão da radiação.

Capítulo 3

Métodos Estocásticos em Mecânica Quântica

3.1 Equação de Von Neumann

O comportamento de um sistema quântico pode ser estudado através de sua matriz densidade. Este tipo de abordagem é útil quando há uma incerteza na determinação de algumas quantidades devido à insuficiência de informação para determinar o estado do sistema (a função de onda exata). A dinâmica deste sistema deve ser identificada pela equação de movimento da matriz densidade.

Seja um sistema preparado em vários estados $|\Psi_\phi\rangle$ com probabilidades $P(\phi)$, independentes do tempo, definimos sua matriz densidade como

$$\rho = \sum_{\phi} P(\phi) |\Psi_\phi\rangle \langle \Psi_\phi|. \quad (3.1.1)$$

Observamos que o operador densidade ρ contém toda a informação que pode ser medida a partir do vetor de estado do sistema. Derivando ρ em relação ao tempo, encontramos

$$\dot{\rho} = \sum_{\phi} P(\phi) (|\dot{\Psi}_\phi\rangle \langle \Psi_\phi| + |\Psi_\phi\rangle \langle \dot{\Psi}_\phi|). \quad (3.1.2)$$

A equação de Schrödinger para o estado $|\Psi_\phi\rangle$ é dada por

$$|\dot{\Psi}_\phi\rangle = -\frac{i}{\hbar} \mathcal{H} |\Psi_\phi\rangle. \quad (3.1.3)$$

Utilizando o resultado acima na equação (3.1.2) obtemos a equação de movimento para a matriz densidade

$$\dot{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho(t)]. \quad (3.1.4)$$

A equação acima é conhecida como equação de Von Neumann e é mais geral do que a equação de Schrödinger pois, utiliza o operador densidade ao invés de um vetor de estado específico $|\Psi_\phi\rangle$, ou seja, podemos obter informações estatísticas da mecânica quântica envolvida no sistema.

3.1.1 Sistemas acoplados a um reservatório

Existem sistemas quânticos abertos dissipativos cuja energia não se conserva. O estudo do comportamento de tais sistemas torna-se demasiadamente complexo, de modo que não é possível retirar alguma informação diretamente de suas equações dinâmicas.

Uma alternativa para realizar estudos destes sistemas é considerar seu acoplamento a um reservatório térmico onde a energia dissipada é armazenada, de modo que o sistema mais o reservatório passam a ter a energia conservada.

Utilizamos a equação apresentada por Diósi [13], referente a um dado modelo de interação entre partícula e reservatório, para o operador estatístico ρ de uma partícula browniana

$$\dot{\hat{\rho}} = -\frac{i}{\hbar}[H, \hat{\rho}] - \frac{i}{\hbar}[\hat{x}, \{\hat{p}, \hat{\rho}\}] - \frac{1}{2}\gamma\lambda_{dB}^{-2}[\hat{x}, [\hat{x}, \hat{\rho}]] - \frac{1}{2}\kappa\gamma\lambda_{dB}^2\hbar^{-2}[\hat{p}, [\hat{p}, \hat{\rho}]]. \quad (3.1.5)$$

A equação mestra para a matriz densidade, obtida através dos hamiltonianos (2.6.12), para nosso sistema combinado $\mathcal{S} \oplus \mathcal{R}$ (sistema \mathcal{S} mais reservatório \mathcal{R}) num referencial girante à frequência ω_0 [14] é

$$i\hbar\frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{\mathcal{H}}, \hat{\rho}] + \mathcal{L}\hat{\rho}. \quad (3.1.6)$$

Nosso sistema é representado pelo modelo esquemático da figura 1, cuja dinâmica da matriz densidade é dada pela equação (3.1.5), onde o

hamiltoniano é dado pelas equações (2.6.12),

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = & -i\hbar \left[\frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} m \omega_m^2 \hat{x}^2 - \hbar g \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{x} - i\hbar \epsilon (\hat{a} - \hat{a}^\dagger), \hat{\rho} \right] + \\ & \gamma (2\hat{a} \hat{\rho} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho} - \hat{\rho} \hat{a}^\dagger \hat{a}) - i\hbar \hat{D}_m \hat{\rho}, \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

onde $\hat{D}_m \hat{\rho}$ representa o amortecimento do espelho.

$$\hat{D}_m \hat{\rho} = \gamma_m [\hat{x}, \{\hat{p}, \hat{\rho}\}] - \frac{i\hbar \gamma_m}{2\lambda_{dB}} [\hat{x}, [\hat{x}, \hat{\rho}]] - \frac{2i}{3} \gamma_m \lambda_{dB}^2 \hbar^{-1} [\hat{p}, [\hat{p}, \hat{\rho}]], \quad (3.1.8)$$

onde γ representa a taxa de perda através do espelho fixo, $\lambda_{dB} = \hbar / \sqrt{4mkT}$ é o comprimento de onda de de Broglie do espelho (comprimento térmico), sendo k a constante de Boltzman e T a temperatura e γ_m é a taxa de amortecimento do espelho. O restante dos termos foi apresentado no capítulo anterior.

3.2 Representação clássica no espaço de fase

A equação mestra para o operador densidade de um sistema dissipativo é dada por

$$\dot{\rho} = \mathcal{L}\rho, \quad (3.2.9)$$

onde \mathcal{L} é o operador Liouvillianiano.

Observamos que não conseguimos obter diretamente a solução para $\rho(t)$ pois, trata-se de uma equação não linear para operadores. Nesse caso podemos utilizar métodos alternativos de análise para encontrarmos, por exemplo, as funções de correlação.

3.2.1 O método de espaço de fase

As equações dinâmicas de um problema quântico são bem descritas pelas equações de Heseinberg. No entanto, existem maneiras alternativas de tratar alguns problemas da mecânica quântica, as quais dão origem a outras equações, equivalentes às de Heseinberg. O objetivo principal destes métodos é tornar mais fácil a solução das equações

dinâmicas do problema. Podemos perguntar de que forma isto é possível? A resposta está na utilização do chamado método de espaço de fase. Este método permite transformar equações para operadores em equações clássicas estocásticas.

Através deste método podemos realizar o mapeamento das equações de movimento de Heisenberg em equações ordinárias equivalentes. Dessa forma torna-se possível calcular quantidades observáveis tais como a variância nas quadraturas e flutuações na fase de um modo mais fácil do que se estivéssemos trabalhando com as equações de Heisenberg.

A vantagem de utilizar esta abordagem é a possibilidade de encontrar resultados de medidas quânticas de nosso interesse, através da física estatística clássica.

O método de espaço de fase estabelece uma correspondência entre os operadores da mecânica quântica e as funções ordinárias (clássicas). A equação obtida com esta aplicação é uma equação diferencial parcial para uma função de quasideistribuição,¹ caso trabalhemos com a função de Wigner, ou é uma equação diferencial parcial em termos de uma função que seja positiva definida, caso trabalhemos com a representação P positiva.

Nas próximas seções descreveremos três métodos conhecidos de representação no espaço de fase - a representação de Wigner, a representação P de Glauber-Sudarshan e a P positiva.

3.2.2 Representação de Wigner

A representação de Wigner é definida em termos de uma função característica que fornece a média sobre operadores em ordem simétrica. Foi a primeira função de quasiprobabilidade desenvolvida e apresentada por Wigner em 1932 [15]. Neste trabalho Wigner formulou uma função de quasiprobabilidade para a posição e o momento de uma partícula. Utilizando os operadores de criação e aniquilação \hat{a}^\dagger e \hat{a} , respectivamente, sua função característica $\chi_W(\lambda, \lambda^*)$ é definida por

$$\chi_W(Z, Z^*) = Tr\{\rho e^{(Za^\dagger - Z^*a)}\}. \quad (3.2.10)$$

¹Estas funções são classificadas como quasideistribuição devido ao fato de que podem assumir valores negativos, portanto não podem representar uma distribuição de probabilidade.

Utilizando o teorema de Baker-Hausdorff (apêndice A) temos

$$\chi_W(Z, Z^*) = e^{(-\frac{1}{2}|Z|^2)} Tr\{\rho e^{Za^\dagger} e^{-Z^*a}\}. \quad (3.2.11)$$

A transformada de Fourier desta função é a função de Wigner

$$W(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2 Z e^{(-Z\alpha^{*\dagger} + Z^*\alpha)} \chi_W(Z, Z^*). \quad (3.2.12)$$

3.2.3 Utilizando a representação de Wigner

Para entendermos como a utilização da função de distribuição de Wigner permite um mapeamento de funções cujas variáveis são operadores para a função de Wigner, vamos exemplificar com a equação mestra para um oscilador harmônico amortecido.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = & -i\omega_0[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{\rho}] + \frac{\gamma}{2}(2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger \hat{a}) \\ & + \gamma\bar{n}(\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger \hat{\rho}\hat{a} - \hat{a}^\dagger \hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}\hat{a}^\dagger), \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

onde, $\bar{n} = 1/e^{\hbar\omega/KT} - 1$, sendo K a constante de Boltzman e T a temperatura.

Para simplificar nossos cálculos consideremos o caso em que $T = 0$, logo $\bar{n} \rightarrow 0$. A equação mestra fica

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -i\omega_0[\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{\rho}] + \frac{\gamma}{2}(2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger \hat{a}) \quad (3.2.14)$$

Derivando a função característica $\chi_W(Z, Z^*)$ (3.2.2) em relação ao tempo encontramos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi_W}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} tr(\rho e^{iZ^*a^\dagger + iZa}) \\ &= tr(\dot{\rho} e^{iZ^*a^\dagger + iZa}) \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

$$(3.2.16)$$

Usando a equação mestra em $\dot{\rho}$ encontramos,

$$\frac{\partial \chi_W}{\partial t} = tr[(\gamma(2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger \hat{a})e^{iZ^*a^\dagger} e^{iZa}] \quad (3.2.17)$$

Queremos expressar cada termo acima em termos de χ_W e derivadas em relação a (iZ^*) e (iZ) . Utilizando a propriedade cíclica do traço vamos calcular cada termo separadamente,

1.

$$\begin{aligned}
tr(a^\dagger a \rho e^{iZ^* a^\dagger + iZ a}) &= tr(\rho e^{iZ^* a^\dagger + iZ a} a^\dagger a), \\
&= tr(\rho e^{iZ^* a^\dagger} e^{iZ a} e^{-|Z|^2/2} a^\dagger a), \\
&= tr(\rho e^{iZ^* a^\dagger} e^{iZ a} a^\dagger a e^{-|Z|^2/2}), \\
&= tr[\rho e^{iZ^* a^\dagger} (a^\dagger e^{iZ a} + iZ e^{iZ a}) a e^{-|Z|^2/2}], \\
&= tr \left[\rho \left(\frac{\partial}{\partial(iZ^*)} e^{iZ^* a^\dagger} \right) \left(\frac{\partial}{\partial(iZ)} e^{iZ a} \right) e^{-|Z|^2/2} \right] + \\
&\quad + tr \left[\rho e^{iZ^* a^\dagger} \left(iZ \frac{\partial}{\partial(iZ)} e^{iZ a} \right) e^{-|Z|^2/2} \right], \\
&= tr \left[e^{-|Z|^2/2} \left(\frac{\partial^2}{\partial(iZ^*) \partial(iZ)} \right) \rho e^{iZ^* a^\dagger + iZ a} \right] + \\
&\quad + tr \left[e^{-|Z|^2/2} \left(\frac{\partial}{\partial(iZ)} \right) \rho e^{iZ^* a^\dagger + iZ a} \right], \\
&= e^{-|Z|^2/2} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial(iZ^*) \partial(iZ)} + iZ \frac{\partial}{\partial(iZ)} \right) \right] tr(\rho e^{iZ^* a^\dagger} e^{iZ a}), \\
&= e^{-|Z|^2/2} \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial(iZ^*) \partial(iZ)} + iZ \frac{\partial}{\partial(iZ)} \right) \right] \chi_W. \quad (3.2.18)
\end{aligned}$$

onde utilizamos a fórmula de Baker-Hausdorff para dois operadores A e B que satisfazem a condição $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$

$$\begin{aligned}
e^{A+B} &= e^{-[A+B]/2} e^A e^B \\
e^{iZ^* a^\dagger + iZ a} &= e^{-|Z|^2/2} e^{iZ^* a^\dagger} e^{iZ a}.
\end{aligned}$$

Esses operadores comutam com seus próprios comutadores [16], portanto, para os operadores A e B temos,

$$[e^{At}, B] = t[A, B]e^{At}.$$

Logo,

$$[e^{iZ a}, a^\dagger] = iZ \underbrace{[a, a^\dagger]}_1 e^{iZ a} = iZ e^{iZ a} a,$$

Mas,

$$[e^{iZ a}, a^\dagger] = e^{iZ a} a^\dagger - a^\dagger e^{iZ a},$$

Logo,

$$\begin{aligned} iZae^{iZa} &= e^{iZa}a^\dagger - a^\dagger e^{iZa}, \\ iZae^{iZa} + a^\dagger e^{iZa} &= e^{iZa}a^\dagger. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} tr(\rho a^\dagger a e^{iZ^* a^\dagger} e^{iZa} e^{-|Z|^2/2}) &= tr[\rho a^\dagger (e^{iZ^* a^\dagger} a + iZ^* e^{iZ^* a^\dagger}) e^{iZa} e^{-|Z|^2/2}] \\ &= tr[\rho (a^\dagger e^{iZ^* a^\dagger} e^{iZa} a + iZ^* a^\dagger e^{iZ^* a^\dagger} e^{iZa}) e^{-|Z|^2/2}] \\ &= tr \left[\rho \left(\frac{\partial}{\partial(iZ^*)} e^{iZ^* a^\dagger} \frac{\partial}{\partial(iZ)} e^{iZa} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + iZ^* \frac{\partial}{\partial(iZ^*)} e^{iZ^* a^\dagger} e^{iZa} \right) e^{-|Z|^2/2} \right] \\ &= e^{-|Z|^2/2} tr \left[\rho \left(\frac{\partial^2}{\partial(iZ^*)\partial(iZ)} e^{iZ^* a^\dagger} e^{iZa} \right) \right. \\ &\quad \left. + iZ^* \frac{\partial}{\partial(iZ^*)} e^{iZ^* a^\dagger} e^{iZa} \right] \\ &= e^{-|Z|^2/2} \left(\frac{\partial^2}{\partial(iZ^*)\partial(iZ)} + iZ^* \frac{\partial}{\partial(iZ^*)} \right) \\ &\quad \times tr(\rho e^{iZ^* a^\dagger} e^{iZa}) \\ &= e^{-|Z|^2/2} \left(\frac{\partial^2}{\partial(iZ^*)\partial(iZ)} + iZ^* \frac{\partial}{\partial(iZ^*)} \right) \chi_W. \end{aligned} \tag{3.2.19}$$

3.

$$\begin{aligned} tr(\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger e^{iZ^* a^\dagger} e^{iZa}) &= tr[\rho(\hat{a}^\dagger e^{iZ^*}) (\hat{a} e^{iZa}) e^{|Z|^2/2}] \\ &= tr \left[\rho \left(\frac{\partial}{\partial(iZ^*)} + \frac{Z}{2i} \right) \left(\frac{\partial}{\partial(iZ)} + \frac{Z}{2i} \right) e^{iZ^* + iZa} \right] \\ &= tr \left(\frac{\partial}{\partial(iZ^*)} + \frac{Z}{2i} \right) \left(\frac{\partial}{\partial(iZ)} + \frac{Z}{2i} \right) \chi_W. \end{aligned} \tag{3.2.20}$$

Portanto, podemos escrever os termos $\gamma(-\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a} + 2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger)$ em termos da função característica χ_W da representação de Wigner,

$$tr(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} e^{iZ^* \hat{a}^\dagger + iZ\hat{a}}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial(iZ^*)\partial(iZ)} + iZ \frac{\partial}{\partial(iZ)} \right) \chi_W,$$

$$\begin{aligned}
tr(\hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}e^{iZ^*\hat{a}^\dagger+iZ\hat{a}}) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial(iZ^*)\partial(iZ)} + \frac{\partial}{\partial(iZ^*)}\right)\chi_W, \\
tr(\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger e^{iZ^*\hat{a}^\dagger+iZ\hat{a}}) &= tr\left(\frac{\partial}{\partial(iZ^*)} + \frac{Z}{2i}\right)\left(\frac{\partial}{\partial(iZ)} + \frac{Z}{2i}\right)\chi_W.
\end{aligned} \tag{3.2.21}$$

Logo a equação dinâmica deste sistema pode ser escrita da seguinte forma,

$$\frac{\partial\chi_W}{\partial t} = \left[-\left(\frac{\gamma}{2} + i\omega_0\right)Z\frac{\partial}{\partial Z} - \left(\frac{\gamma}{2} - i\omega_0\right)Z^*\frac{\partial}{\partial Z^*} + Z^*Z\right]\chi_W \tag{3.2.22}$$

Esta é a equação de Fokker-Planck do oscilador harmônico amortecido em $T = 0$, cuja difusão é zero. Escrevendo a função característica χ_W como uma transformada de Fourier da função de Wigner 3.2.12 temos,

$$\chi_W(Z, Z^*) = \int d\alpha^2 W(\alpha, \alpha^*, t) e^{iZ^*\alpha^*} e^{iZ\alpha}. \tag{3.2.23}$$

Derivando esta equação com relação ao tempo encontramos,

$$\frac{\partial\chi_W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int d\alpha^2 W(\alpha, \alpha^*, t) e^{iZ^*\alpha^*} e^{iZ\alpha}. \tag{3.2.24}$$

Substituindo esta transformada na equação de Fokker-Planck para χ_W temos,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \int d\alpha^2 W(\alpha, \alpha^*, t) e^{iZ^*\alpha^*} e^{iZ\alpha} &= \left[-\left(\frac{\gamma}{2} + i\omega_0\right)Z\frac{\partial}{\partial Z} - \left(\frac{\gamma}{2} - i\omega_0\right)Z^*\frac{\partial}{\partial Z^*} \right. \\
&\quad \left. + Z^*Z\right] \times \int d\alpha^2 W(\alpha, \alpha^*, t) e^{iZ^*\alpha^*} e^{iZ\alpha}
\end{aligned} \tag{3.2.25}$$

Fazendo a mudança de variáveis

$$\begin{aligned}
iZ^* &= \frac{\partial}{\partial\alpha^*} \\
iZ &= \frac{\partial}{\partial\alpha} \\
\frac{\partial}{\partial(iZ)} &= \alpha \\
\frac{\partial}{\partial(iZ^*)} &= \alpha^*,
\end{aligned} \tag{3.2.26}$$

encontramos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int d\alpha^2 W(\alpha, \alpha^*, t) e^{iZ^* \alpha^*} e^{iZ\alpha} &= \left[-\left(\frac{\gamma}{2} + i\omega_0\right) \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha - \left(\frac{\gamma}{2} - i\omega_0\right) \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \alpha^* \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} \right] \int d\alpha^2 W(\alpha, \alpha^*, t) e^{iZ^* \alpha^*} e^{iZ\alpha}. \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

Sabemos que

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (\alpha e^{iZ\alpha}) = e^{iZ\alpha} + \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} e^{iZ\alpha} = \left(1 + \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}\right) e^{iZ\alpha}. \quad (3.2.28)$$

integrando por partes obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(\alpha, \alpha^*, t)}{\partial t} &= \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\gamma}{2} + i\omega_0\right) \alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \left(\frac{\gamma}{2} - i\omega_0\right) \alpha^* \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma}{2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^* \partial \alpha} \right] W(\alpha, \alpha^*, t). \end{aligned} \quad (3.2.29)$$

Esta é a equação de Fokker-Planck para o oscilador harmônico amortecido em termos da representação de Wigner. Observamos a presença do termo de difusão devido às flutuações do vácuo.

Notamos que este procedimento requer uma álgebra que pode nos tomar muito tempo de cálculo. Podemos utilizar um outro meio para obter a mesma equação mapeada em termos das funções de Wigner: as relações de correspondências, [11] descritas abaixo,

$$\begin{aligned} a\rho &\longleftrightarrow \left(\alpha + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha^*}\right) W(\alpha, \alpha^*), \\ a^\dagger \rho &\longleftrightarrow \left(\alpha^* - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha}\right) W(\alpha, \alpha^*), \\ \rho a &\longleftrightarrow \left(\alpha - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha^*}\right) W(\alpha, \alpha^*), \\ \rho a^\dagger &\longleftrightarrow \left(\alpha^* + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \alpha}\right) W(\alpha, \alpha^*). \end{aligned} \quad (3.2.30)$$

onde \hat{a}^\dagger e \hat{a} são os operadores de criação e aniquilação, respectivamente e $\bar{W}(\alpha, \alpha^*)$ é a função de Wigner em termos das variáveis α^* e α .

Para os operadores de posição e momento temos,

$$\begin{aligned}
 \hat{x}\rho &\longleftrightarrow \left(x + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p}\right) \bar{W}(x, p), \\
 \rho\hat{x} &\longleftrightarrow \left(x - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p}\right) \bar{W}(x, p), \\
 \hat{p}\rho &\longleftrightarrow \left(p - \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial x}\right) \bar{W}(x, p), \\
 \rho\hat{p} &\longleftrightarrow \left(p + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial x}\right) \bar{W}(x, p).
 \end{aligned}
 \tag{3.2.31}$$

onde \hat{x} e \hat{p} são os operadores de posição e momento, respectivamente e $\bar{W}(x, p)$ é a função de Wigner em termos das variáveis posição x e momento p . Na equação mestra onde aparece $\hat{x}\hat{p}$ na equação de Von Neumann teremos termos como $\left(x + \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial}{\partial p}\right) W$ na equação clássica para a função de distribuição W .

3.2.4 Representação P de Glauber-Sudarshan

Antes de utilizarmos a representação P de Glauber-Sudarshan é conveniente começarmos pela base utilizada para o desenvolvimento desta representação.

A seguir apresentamos um conjunto que é a base desta representação e tem grande importância na ótica quântica: o conjunto dos estados coerentes do campo eletromagnético.

Estados Coerentes do Campo Eletromagnético

Os estados coerentes foram descobertos por Schödinger em 1926. Mais tarde, em 1960, Klauder [17] e em 1963, Sudarshan [18] descreveram algumas de suas propriedades. No entanto, este nome foi dado por Glauber, que estudou e desenvolveu vários trabalhos a respeito dos estados coerentes [19].

A principal característica dos estados coerentes foi apresentada por Glauber: a construção de autoestados do operador de aniquilação do oscilador harmônico para estudar as funções de correlação do campo

eletromagnético. Veremos mais adiante porque estas funções são tão importantes para a ótica quântica [20].

Existem várias definições para os estados coerentes, mas por conveniência vamos trabalhar com as definições dadas por Glauber. Estes estados podem ser construídos a partir de três definições matemáticas [19], que descrevemos abaixo.

1. *Definição 1:* Os estados coerentes $|\alpha\rangle$ são autoestados do operador de aniquilação a do oscilador harmônico,

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \quad (3.2.32)$$

onde α é um número complexo

2. *Definição 2:* Os estados coerentes $|\alpha\rangle$ podem ser obtidos aplicando-se um operador deslocamento $D(\alpha)$ no estado de vácuo do oscilador harmônico,

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle. \quad (3.2.33)$$

onde $D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}$.

3. *Definição 3:* Os estados coerentes $|\alpha\rangle$ são estados quânticos cuja relação de incerteza entre a posição q e o momento p é mínima,

$$(\Delta q)(\Delta p) = \frac{\hbar}{2}. \quad (3.2.34)$$

onde os operadores \hat{q} e \hat{p} são definidos como,

$$\hat{q} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad (3.2.35)$$

$$\hat{p} = \frac{1}{i\sqrt{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger). \quad (3.2.36)$$

Para um operador f temos

$$(\Delta f)^2 \equiv \langle \alpha | (\hat{f} - \langle \hat{f} \rangle)^2 | \alpha \rangle, \quad (3.2.37)$$

$$\langle \hat{f} \rangle \equiv \langle \alpha | \hat{f} | \alpha \rangle. \quad (3.2.38)$$

Observamos que a definição 3 não fornece uma solução única, pois podem haver combinações de incertezas que conduzem a mesma relação,

por exemplo, como está ilustrado na figura (3.1). Graficamente esta situação é representada por um círculo de incerteza tal que $\Delta q = \Delta p$, indicando uma característica de estados coerentes. Quando uma das quadraturas q ou p é comprimida, a outra passa a ter uma incerteza maior e vice-versa. É o caso dos chamados estados comprimidos. Nem todos os sistemas físicos podem ser descritos em termos de osciladores harmônicos, contudo a representação de Glauber, utilizando os estados coerentes é muito útil para tratar várias situações na ótica quântica.

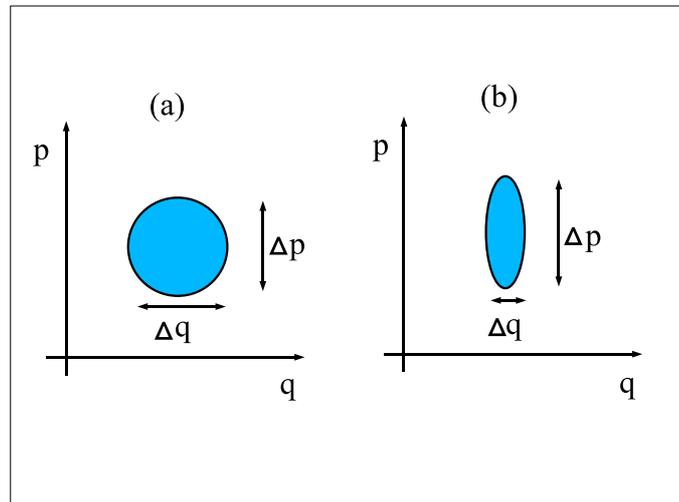


Figura 3.1: Representação gráfica de um estado coerente e um estado comprimido no espaço de fase. As coordenadas p e q representam o momento e a posição, respectivamente. As incertezas no momento e na posição são Δp e Δq , respectivamente.

A representação P

Esta representação foi desenvolvida paralelamente por Glauber [19] e por Sudarshan [21]. O operador densidade para um estado puro $|\alpha\rangle$ é o operador de projeção,

$$\rho = |\alpha\rangle\langle\alpha|. \quad (3.2.39)$$

Uma das propriedades dos estados coerentes é que eles formam uma base supercompleta (não são ortogonais) e, conseqüentemente podemos expandir o operador densidade ρ como uma soma diagonal sobre todos

os estados coerentes,

$$\rho = \int d^2\alpha P(\alpha, \alpha^*) |\alpha\rangle\langle\alpha|. \quad (3.2.40)$$

A propriedade de normalização do operador densidade fornece imediatamente,

$$\text{tr}\rho = \int P(\alpha, \alpha^*) d^2\alpha = 1. \quad (3.2.41)$$

Observamos que a função $P(\alpha)$ parece exercer o papel de uma distribuição de probabilidade, no entanto, como os operadores de projeção $|\alpha\rangle\langle\alpha|$ com os quais $P(\alpha)$ está associada não são ortogonais para diferentes valores de α , a função $P(\alpha)$ não pode ser interpretada como uma função de probabilidade.

Considerando o fato dos estados coerentes $|\alpha\rangle$ e $\langle\alpha|$ serem autoestados dos operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger (*Definição 1*), respectivamente, temos,

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (3.2.42)$$

$$\langle\alpha|a^\dagger = \alpha^*\langle\alpha|. \quad (3.2.43)$$

Em termos de estados coerentes $|\alpha\rangle$, na representação P o operador densidade é dado por (3.2.40). Com o uso da função característica $\chi_N(Z, Z^*)$, normal ordenada, vamos inverter a expressão para o operador densidade

$$\begin{aligned} \chi_N(Z, Z^*) &= \text{tr}(\rho e^{iZ^*a^\dagger} e^{iZa}) \\ &= \text{tr} \left[\left(\int d^2\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| P(\alpha) \right) e^{iZ^*a^\dagger} e^{iZa} \right] \\ &= \int d^2\alpha P(\alpha) \langle\alpha| e^{iZ^*a^\dagger} e^{iZa} |\alpha\rangle \\ &= \int d^2\alpha P(\alpha) \langle\alpha| \left(1 + iZ^*a^\dagger + \frac{(iZ^*a^\dagger)^2}{2!} + \dots \right) \\ &\quad \times \left(1 + iZa + \frac{(iZa)^2}{2!} + \dots \right) |\alpha\rangle \\ &= \int d^2\alpha P(\alpha) \left(1 + iZ^*a^* + \frac{(iZ^*a^*)^2}{2!} + \dots \right) \langle\alpha|\alpha\rangle \\ &\quad \times \left(1 + iZ\alpha + \frac{(iZ\alpha)^2}{2!} + \dots \right) \\ &= \int d^2\alpha P(\alpha) e^{iZ^*a^*} e^{iZ\alpha}. \end{aligned} \quad (3.2.44)$$

Portanto,

$$\chi_N(Z, Z^*) = \text{tr}(\rho e^{iZ^* a^\dagger} e^{iZa}) = \int d^2\alpha P(\alpha) e^{iZ^* \alpha^*} e^{iZ\alpha}. \quad (3.2.45)$$

Esta expressão representa uma transformada de Fourier em duas dimensões, com elemento de superfície $d^2\alpha = d(\text{Re}\alpha)d(\text{Im}\alpha)$. A função $P(\alpha)$ pode ser obtida a partir da transformada de Fourier da função característica $\chi_N(Z, Z^*)$,

$$P(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int d^2 Z \text{tr}(\rho e^{iZ^* \alpha^\dagger} e^{iZ\alpha}) e^{-iZ^* \alpha^*} e^{-iZ\alpha}. \quad (3.2.46)$$

Derivando a função característica $\chi_N(Z, Z^*)$ encontramos,

$$\frac{\partial \chi_N(Z, Z^*)}{\partial t} = \text{tr}(\dot{\rho} e^{iZ^* a^\dagger} e^{iZa}). \quad (3.2.47)$$

Para que fique mais claro como obtemos uma equação para a função P a partir da equação para operadores, da mesma forma que fizemos para a função de Wigner vamos desenvolver como exemplo a equação mestra para a matriz densidade do oscilador harmônico amortecido (3.2.14). Queremos expressar cada termo desta equação em termos de χ_N e derivadas em relação a (iZ^*) e (iZ) . Utilizando a propriedade cíclica do traço calculamos,

1.

$$\begin{aligned} \text{tr}(a \rho a^\dagger e^{iZ^*} e^{iZa}) &= \text{tr}(\rho a^\dagger e^{iZ^* a^\dagger} e^{iZa} a), \\ &= \text{tr} \left(\rho \frac{\partial}{\partial(iZ^*)} e^{iZ^*} \frac{\partial}{\partial(iZ)} e^{iZa} \right), \\ &= \text{tr} \left(\frac{\partial^2}{\partial(iZ^*) \partial(iZ)} \rho e^{iZ^*} e^{iZa} \right), \\ &= \frac{\partial^2}{\partial(iZ^*) \partial(iZ)} \chi_N. \end{aligned} \quad (3.2.48)$$

2.

$$\begin{aligned} \text{tr}(a^\dagger a \rho e^{iZ^* a^\dagger} e^{iZa}) &= \text{tr}(\rho e^{iZ^* a^\dagger} e^{iZa}), \\ &= \text{tr}[\rho e^{iZ^* a^\dagger} (iZ e^{iZa} + a^\dagger e^{iZa}) a], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \text{tr}(\rho e^{iZ^* a^\dagger} iZ e^{iZ a} a) + \text{tr}(\rho e^{iZ^* a^\dagger} a^\dagger e^{iZ a} a), \\
 &= iZ \frac{\partial}{\partial(iZ)} \text{tr}(\rho e^{iZ^*} e^{iZ a}) + \frac{\partial^2}{\partial(iZ)\partial(iZ^*)} \text{tr}(\rho e^{iZ^*} e^{iZ a}), \\
 &= iZ \frac{\partial}{\partial(iZ)} \chi_N + \frac{\partial^2}{\partial(iZ)\partial(iZ^*)} \chi_N. \tag{3.2.49}
 \end{aligned}$$

Utilizamos os resultados $[a, a^\dagger] = 1$ e $[e^{iZ a}, a^\dagger] = iZ e^{iZ a}$.

3.

$$\begin{aligned}
 \text{tr}(\rho a^\dagger a e^{iZ^* a^\dagger} e^{iZ a}) &= \text{tr}[\rho a^\dagger (iZ^* e^{iZ^* a^\dagger} + e^{iZ^* a^\dagger} a) e^{iZ a}], \\
 &= \text{tr}(\rho a^\dagger iZ^* e^{iZ^* a^\dagger} iZ e^{iZ a}) + \text{tr}(\rho a^\dagger e^{iZ^* a^\dagger} a^\dagger e^{iZ a}), \\
 &= iZ^* \frac{\partial}{\partial(iZ^*)} \text{tr}(\rho e^{iZ^*} e^{iZ a}) + \frac{\partial^2}{\partial(iZ)\partial(iZ^*)} \text{tr}(\rho e^{iZ^*} e^{iZ a}), \\
 &= iZ^* \frac{\partial}{\partial(iZ)} \chi_N + \frac{\partial^2}{\partial(iZ)\partial(iZ^*)} \chi_N. \tag{3.2.50}
 \end{aligned}$$

Utilizamos o resultado $[a, e^{iZ^* a^\dagger}] = iZ^* e^{iZ^* a^\dagger}$.

Agora temos uma equação escrita em termos da função característica χ_N ,

$$\frac{\partial \chi_N}{\partial t} = \left[- \left(\frac{\gamma}{2} + i\omega_0 \right) Z \frac{\partial}{\partial(Z)} - \left(\frac{\gamma}{2} - i\omega_0 \right) Z^* \frac{\partial}{\partial(Z^*)} \right] \chi_N. \tag{3.2.51}$$

Para passar para a equação em $P(\alpha, \alpha^*, t)$ usamos a transformada de Fourier da função χ_N ,

$$\chi_N(Z, Z^*) = \int d^2\alpha P(\alpha, \alpha^*, t) e^{iZ^* \alpha^*} e^{iZ \alpha}. \tag{3.2.52}$$

Substituindo esta transformada na equação (3.2.51) temos,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} \int d^2\alpha P(\alpha, \alpha^*, t) e^{iZ^* \alpha^*} e^{iZ \alpha} &= \left[- \left(\frac{\gamma}{2} + i\omega_0 \right) Z \frac{\partial}{\partial(Z)} - \left(\frac{\gamma}{2} - i\omega_0 \right) Z^* \frac{\partial}{\partial(Z^*)} \right] \\
 &\quad \times \int d^2\alpha P(\alpha, \alpha^*, t) e^{iZ^* \alpha^*} e^{iZ \alpha}, \\
 \int d^2\alpha \frac{\partial P(\alpha, \alpha^*, t)}{\partial t} e^{iZ^* \alpha^*} e^{iZ \alpha} &= \int d^2\alpha P(\alpha, \alpha^*, t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left[- \left(\frac{\gamma}{2} + i\omega_0 \right) Z \frac{\partial}{\partial(Z)} e^{iZ^* \alpha^*} e^{iZ\alpha} \right. \\ & \left. - \left(\frac{\gamma}{2} - i\omega_0 \right) Z^* \frac{\partial}{\partial(Z^*)} e^{iZ^* \alpha^*} e^{iZ\alpha} \right]. \end{aligned}$$

Calculando as derivadas parciais e observando que $Z = \partial/\partial(iZ)$ e $Z^* = \partial/\partial(iZ^*)$ temos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int d^2\alpha P(\alpha, \alpha^*, t) e^{iZ^* \alpha^*} e^{iZ\alpha} &= \int d^2\alpha P(\alpha, \alpha^*, t) \\ & \times \left[- \left(\frac{\gamma}{2} + i\omega_0 \right) \alpha \frac{\partial}{\partial(\alpha)} e^{iZ^* \alpha^*} e^{iZ\alpha} \right. \\ & \left. - \left(\frac{\gamma}{2} - i\omega_0 \right) \alpha^* \frac{\partial}{\partial(\alpha^*)} e^{iZ^* \alpha^*} e^{iZ\alpha} \right]. \end{aligned} \quad (3.2.53)$$

Integrando por partes obtemos

$$\frac{\partial P(\alpha, \alpha^*, t)}{\partial t} = \left[\frac{\partial}{\partial\alpha} \left(\frac{\gamma}{2} + i\omega_0 \right) \alpha + \frac{\partial}{\partial\alpha^*} \left(\frac{\gamma}{2} - i\omega_0 \right) \alpha^* \right] P(\alpha, \alpha^*, t). \quad (3.2.54)$$

Finalmente encontramos a equação de Fokker-Planck do oscilador harmônico amortecido, de difusão zero, na representação P de Glauber-Sudarshan (3.2.54). Esta mesma equação pode ser obtida utilizando-se as correspondências entre os operadores e as variáveis α e α^* , conforme consta na literatura [11]. A vantagem de utilizarmos este procedimento é ganhar tempo poupando a realização do algebrismo desenvolvido nesta seção. Abaixo estão relacionadas estas correspondências:

$$\begin{aligned} a\rho &\longleftrightarrow \alpha P(\alpha, \alpha^*), \\ a^\dagger\rho &\longleftrightarrow \left(\alpha^* - \frac{\partial}{\partial\alpha} \right) P(\alpha, \alpha^*), \\ \rho a &\longleftrightarrow \left(\alpha - \frac{\partial}{\partial\alpha^*} \right) P(\alpha, \alpha^*), \\ \rho a^\dagger &\longleftrightarrow \alpha^* P(\alpha, \alpha^*). \end{aligned} \quad (3.2.55)$$

Nossos cálculos daqui por diante seguirão as correspondências (3.2.31, 3.2.30 e 3.2.55), que equivalem a um mapeamento das equações para operadores em equações para funções ordinárias.

3.2.5 Representação P positiva

Esta representação surgiu como uma alternativa às representações de Glauber-Sudarshan e Wigner, uma vez que ela pode ser tratada como uma distribuição de probabilidade, pois é positiva definida e além disto sua aplicação não apresenta termos de derivada de ordem superior a dois, que veremos mais adiante porque não nos interessa.

Vimos que as funções P de Glauber-Sudarshan e Wigner introduziram uma representação para operadores. No entanto, existem outras representações que não trataremos aqui, tais como R e Q [11]. É possível escrever uma em função da outra, através da definição da função característica. As soluções que elas reproduzem são as mesmas, mas a escolha entre uma ou outra depende, por exemplo, das implicações matemáticas que podem conduzir a uma situação física que não existe. Por exemplo, as funções P e de Wigner não podem sempre representar funções de probabilidade, uma vez que ambas não são positivas definidas e podem representar uma distribuição negativa. Na tentativa de expressar uma classe de representações P generalizadas, Drummond e Gardiner [22] introduziram uma função em termos da expansão dos operadores de projeção de estados coerentes não diagonais:

$$\rho = \int \int \Lambda(\alpha, \beta) P(\alpha, \beta) d^{2N} \alpha d^{2N} \beta. \quad (3.2.56)$$

onde o operador de projeção $\Lambda(\alpha, \beta)$ é dado por

$$\Lambda(\alpha, \beta) = \frac{|\alpha\rangle\langle\beta^*|}{\langle\beta^*|\alpha\rangle} \quad (3.2.57)$$

Da mesma forma que a P de Glauber-Sudarshan e a Wigner, esta representação pode ser definida em termos de uma função característica $\chi(\lambda, \lambda^*)_P$

$$\chi(\lambda, \lambda^*)_P \equiv \int \int P(\alpha, \beta) e^{(\lambda\beta - \lambda^*\alpha)} d^2 \alpha d^2 \beta, \quad (3.2.58)$$

onde $|\alpha\rangle$ são os N estados coerentes do espaço de fase dobrado, nos N modos dos operadores $\hat{a}_1 \dots \hat{a}_N$. Estes estados apresentam a propriedade,

$$\hat{a}_k |\alpha\rangle = \alpha_k |\alpha\rangle, \quad (3.2.59)$$

e $\alpha = \alpha_x + i\alpha_y$ e $\beta = \beta_x + i\beta_y$ são variáveis distintas do espaço de fase, ou seja elas variam independentemente no plano complexo.

Por definição os momentos em ordem normal são dados por,

$$\langle (a^\dagger)^m a^n \rangle = \int_{\mathcal{D}} d^2\alpha d^2\beta \beta^m \alpha^n P(\alpha, \beta). \quad (3.2.60)$$

3.2.6 Algumas considerações

Após a apresentação das representações é importante destacar que nosso objetivo é encontrar uma equação do tipo Fokker-Planck, através do mapeamento da equação mestra para uma determinada representação. A forma da equação de Fokker-Planck de várias variáveis para uma função de probabilidade F de transição de um estado x_0 para um estado x num tempo Δt é

$$\frac{\partial F(\vec{x}, t|x_0, 0)}{\partial t} = \left(- \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} A_i(x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} D_{ij} \right) F(\vec{x}, t|x_0, 0), \quad (3.2.61)$$

onde, \vec{x} é um vetor de n variáveis aleatórias x_1, \dots, x_n , A é conhecida como matriz de arraste e D como matriz de difusão.

Veremos mais adiante que podemos obter equações de Fokker-Planck diferentes para as representações utilizadas (Wigner e P positiva). Os termos de difusão e de arraste podem ser diferentes em geral, mas os observáveis serão os mesmos, pois as equações dinâmicas estocásticas devem ser as mesmas para produzir a mesma solução do sistema, independente da representação utilizada.

A equação de Fokker-Planck permite que calculemos quantidades médias, mas os mesmos resultados podem ser obtidos a partir de equações diferenciais estocásticas. No próximo capítulo veremos como obter estas equações a partir da equação de Fokker-Planck do nosso sistema.

A equação obtida através da aplicação da representação de Wigner pode apresentar termos de derivada de ordem três, eliminando a possibilidade de encontrarmos uma genuína equação de Fokker-Planck. Neste caso muitos autores utilizam o artifício de desconsiderar o termo de ordem três, chamando este procedimento de Wigner truncada. No entanto ao desprezarmos algum termo estamos introduzindo um erro nos resultados que pode ser significativo para a clareza e compreensão do resultado final. Neste caso é possível utilizarmos a representação P de Glauber-Sudarshan e obteremos uma equação de Fokker-Planck

do tipo apresentado acima. Porém nem sempre será uma equação genuína, uma vez que a função P pode apresentar valores negativos, descaracterizando-a como uma densidade de probabilidade. O recurso que nos restará será a representação P positiva. Sua característica positiva-definida assegura-nos que trabalharemos com uma equação de Fokker-Planck genuína. Todavia este tipo de mapeamento introduz variáveis não físicas devido ao espaço de fase dobrado.

Cada uma das representações traz consigo vantagens e desvantagens que devem ser discutidas e analisadas em função do sistema em que serão aplicadas.

No próximo capítulo veremos os resultados destes mapeamentos e explicaremos porque escolhemos trabalhar com uma das representações para abordar nosso sistema de interesse, a cavidade pendular, e dessa forma extrair resultados (médias, variâncias, etc...) quânticos.

Capítulo 4

O método de espaço de fase para a cavidade pendular

Vimos no capítulo anterior uma técnica muito útil para utilizar uma descrição estocástica do sistema, com o objetivo de solucionar as equações dinâmicas. Apresentamos as representações de Wigner e P positiva e verificamos como utilizá-las aplicando o método do espaço de fase em um exemplo real. Neste capítulo desenvolvemos uma análise quântica da cavidade pendular apresentada no capítulo I, mostrando que o estado quântico do espelho em movimento, um objeto macroscópico, possui efeitos notáveis na dinâmica.

4.1 Aplicação do método de espaço de fase

A informação completa sobre um sistema está contida em sua matriz densidade ρ [11]. Nesse caso estamos interessados em obter informações sobre um sistema específico \mathcal{S} , acoplado a um reservatório \mathcal{R} . Nosso objetivo é encontrar uma equação mestra para a matriz densidade ρ de modo que as informações pertinentes ao reservatório \mathcal{R} possam ser tratadas como um parâmetro.

A equação mestra apresenta operadores como variáveis, portanto, para encontrar as equações dinâmicas de cada operador devemos desenvolver as equações de Heisenberg. Contudo, não podemos fazer uma extensão da álgebra das funções usuais para funções cujas variáveis são operadores. Para solucionar esse problema utilizaremos o método de espaço de fase apresentado no capítulo anterior.

Inicialmente realizamos o mapeamento diretamente na equação mestra (3.1.7), conforme consta no apêndice (B), no entanto, convém reescrever o hamiltoniano do sistema (2.6) em termos de operadores de criação e aniquilação do oscilador mecânico (espelho móvel).

Ao invés de considerarmos os operadores de posição (\hat{x}) e momento (\hat{p}) do espelho vamos utilizar seus operadores de criação e aniquilação dos fônons, \hat{b}^\dagger e \hat{b} respectivamente,

$$\begin{aligned}\hat{x} &= A(\hat{b} + \hat{b}^\dagger), \\ \hat{p} &= B(\hat{b} - \hat{b}^\dagger),\end{aligned}\tag{4.1.1}$$

onde,

$$\begin{aligned}A &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_m}}, \\ B &= -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega_m}{2}}.\end{aligned}\tag{4.1.2}$$

A vantagem de escrevermos as equações em termos dos operadores de criação e aniquilação dos fônons do oscilador mecânico (espelho) consiste na possibilidade de obtermos diretamente as representações P e Wigner da matriz densidade em termos da expansão em estados coerentes.

A equação mestra pode ser escrita como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}[\mathcal{H}, \rho] + \mathcal{L}\rho + \mathcal{D}'_m \rho,\tag{4.1.3}$$

onde, \mathcal{H}_{int} é o hamiltoniano de interação, \mathcal{L} é o Liouvilliano, que representa o acoplamento dos modos internos da cavidade com o resto do universo e se manifesta como flutuação e dissipação, \mathcal{D}'_m representa o Liouvilliano mecânico em analogia ao Liouvilliano eletromagnético L ,

$$\mathcal{H} = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{B^2}{2m}(\hat{b} - \hat{b}^\dagger)^2 + \frac{m\omega_m^2 A^2}{2}(\hat{b} + \hat{b}^\dagger)^2 - \hbar g\hat{a}^\dagger\hat{a}A(\hat{b} + \hat{b}^\dagger),\tag{4.1.4}$$

$$\mathcal{L}\rho = i\hbar\gamma(2\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\rho - \rho\hat{a}^\dagger\hat{a}) - i\hbar\epsilon(\hat{a} - \hat{a}^\dagger),\tag{4.1.5}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}'_m &= \gamma_m AB[\hat{b} + \hat{b}^\dagger, \{\hat{b} - \hat{b}^\dagger, \rho\}] - \frac{i\hbar\gamma_m A^2}{2\lambda_{dB}}[\hat{b} + \hat{b}^\dagger, [\hat{b} + \hat{b}^\dagger, \rho]] \\ &\quad - \frac{2}{3}i\gamma_m \lambda_{dB}^2 \hbar^{-1} B^2[\hat{b} - \hat{b}^\dagger, [\hat{b} - \hat{b}^\dagger, \rho]].\end{aligned}\tag{4.1.6}$$

4.1.1 Representação de Wigner e P de Glauber-Sudarshan em termos dos estados coerentes do espelho

Inicialmente vamos tratar o caso em que o campo eletromagnético é ressonante com a cavidade vazia. A generalização para o campo com uma dessintonia qualquer Δ será feita para identificarmos uma região de biestabilidade.

Aplicamos o método de espaço de fase, mapeando a equação mestra em termos da função de Wigner. Utilizando as correspondências (3.2.30) e (3.2.31) nos termos da equação mestra (4.1.3) temos,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W(\alpha, \alpha^*, \beta, \beta^*)}{\partial t} = & \left\{ -\frac{\partial}{\partial \alpha} [igA(\beta + \beta^*)\alpha + \epsilon - \gamma\alpha] \right. \\
& -\frac{\partial}{\partial \alpha^*} [gB(\beta + \beta^*)\alpha^* + \epsilon - \gamma\alpha^*] \\
& -\frac{\partial}{\partial \beta} [-i\omega_m\beta + ig|\alpha|^2A + \gamma_m(-\beta + \beta^*)] \\
& -\frac{\partial}{\partial \beta^*} [i\omega_m\beta^* - ig|\alpha|^2A + \gamma_m(-\beta^* + \beta)] \\
& +\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \alpha^*} (2\gamma) - \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \left(\frac{\gamma_m A^2}{\lambda_{dB}} \right) - \frac{\partial^2}{\partial \beta^{*2}} \left(\frac{\gamma_m A^2}{\lambda_{dB}} \right) \right. \\
& \left. + \frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \beta^*} \left(\frac{2\gamma_m A^2}{\lambda_{dB}} \right) \right] \\
& \left. + \frac{1}{4} \left[\frac{\partial^3}{\partial \beta \partial \alpha \partial \alpha^*} - \frac{\partial^3}{\partial \beta^* \partial \alpha \partial \alpha^*} \right] \right\} W(\alpha, \alpha^*, \beta, \beta^*).
\end{aligned} \tag{4.1.7}$$

A equação mestra foi mapeada em termos da representação de Wigner e obtemos uma equação diferencial parcial para a função de Wigner. O procedimento usual do cálculo diz que devemos integrar a equação acima para obtermos o valor da função de Wigner $W(\alpha, \alpha^*, \beta, \beta^*)$ que nos permite calcular médias e variâncias. Mas como já dissemos as funções de correlações que nos interessam podem ser encontradas a partir da equação de Fokker-Planck. No entanto, observamos que devido à presença dos termos de derivada de ordem três, a aplicação da representação de Wigner não nos fornece uma equação de Fokker-Planck genuína. Uma possibilidade nesses casos seria descartar o termo

de derivada de ordem três (Wigner truncada) para certos limites e obter resultados aproximados. Ao invés de trabalharmos com a Wigner truncada vamos escrever a equação mestra em termos da representação P de Glauber-Sudarshan, pois desta forma consideraremos todos os termos da equação obtida.

Para os termos da equação mestra (4.1.3) encontramos as seguintes correspondências na representação P de Glauber-Sudarshan:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{i\hbar} \left[\frac{B^2}{2m} (\hat{b} - \hat{b}^\dagger)^2, \rho \right] &\longleftrightarrow \frac{i\omega_m}{2} \left(\frac{\partial}{\partial\beta} \beta - \frac{\partial}{\partial\beta^*} \beta^* - \frac{\partial}{\partial\beta} \beta^* + \frac{\partial}{\partial\beta^*} \beta \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial\beta^{*2}} \right) \\
 \frac{1}{i\hbar} \left[\frac{m\omega_m^2 A^2}{2} (\hat{b} + \hat{b}^\dagger)^2, \rho \right] &\longleftrightarrow -\frac{i\omega_m}{2} \left(\frac{\partial}{\partial\beta^*} \beta - \frac{\partial}{\partial\beta} \beta^* - \frac{\partial}{\partial\beta} \beta + \frac{\partial}{\partial\beta^*} \beta^* \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial\beta^{*2}} \right) \\
 \frac{1}{i\hbar} [\hbar g \hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b} + \hat{b}^\dagger), \rho] &\longleftrightarrow -igA \left[\frac{\partial}{\partial\alpha} (-\beta - \beta^*) \alpha \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial\alpha^*} (\beta + \beta^*) \alpha^* - \frac{\partial}{\partial\beta} |\alpha|^2 + \frac{\partial}{\partial\beta^*} |\alpha|^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial^2}{\partial\beta\partial\alpha} \alpha - \frac{\partial^2}{\partial\beta^*\partial\alpha^*} \alpha^* \right] \\
 \frac{1}{i\hbar} [i\hbar\epsilon(\hat{a} - \hat{a}^\dagger), \rho] &\longleftrightarrow \epsilon \left(\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\alpha^*} \right) \\
 \gamma(2\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\rho - \rho\hat{a}^\dagger\hat{a}) &\longleftrightarrow \gamma \left(\frac{\partial}{\partial\alpha} \alpha + \frac{\partial}{\partial\alpha^*} \alpha^* \right) \\
 \frac{1}{i\hbar} \gamma_m AB [\hat{b} + \hat{b}^\dagger, \{\hat{b} - \hat{b}^\dagger, \rho\}] &\longleftrightarrow -\gamma_m \left[\frac{\partial}{\partial\beta} (-\beta + \beta^*) + \frac{\partial}{\partial\beta^*} (-\beta^* + \beta) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial\beta^{*2}} + \frac{\partial^2}{\partial\beta\partial\beta^*} \right] \\
 \frac{\gamma_m A^2}{2\lambda_{dB}^2} [\hat{b} + \hat{b}^\dagger, [\hat{b} + \hat{b}^\dagger, \rho]] &\longleftrightarrow -\frac{\gamma_m kT}{\hbar\omega_m} \left(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + \frac{\partial^2}{\partial\beta^{*2}} - 2 \frac{\partial^2}{\partial\beta\partial\beta^*} \right) \\
 \frac{2}{3} i\gamma_m \lambda_{dB}^2 \hbar^{-1} B^2 [\hat{b} - \hat{b}^\dagger, [\hat{b} - \hat{b}^\dagger, \rho]] &\longleftrightarrow \frac{\kappa\hbar\omega_m}{8kT} \left(\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} + \frac{\partial^2}{\partial\beta^{*2}} + 2 \frac{\partial^2}{\partial\beta\partial\beta^*} \right) \quad (4.1.8)
 \end{aligned}$$

Utilizando as correspondências (4.1.8) podemos escrever a equação para a matriz densidade (4.1.3) na representação P como:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P(\alpha, \alpha^*, \beta, \beta^*)}{\partial t} = & \left\{ -\frac{\partial}{\partial \alpha} [igA(\beta + \beta^*)\alpha + \epsilon - \gamma\alpha] \right. \\
& -\frac{\partial}{\partial \alpha^*} [-igA(\beta + \beta^*)\alpha^* + \epsilon - \gamma\alpha^*] \\
& -\frac{\partial}{\partial \beta} [-i\omega_m\beta + ig|\alpha|^2A + \gamma_m(-\beta + \beta^*)] \\
& -\frac{\partial}{\partial \beta^*} [i\omega_m\beta^* - ig|\alpha|^2A + \gamma_m(-\beta^* + \beta)] \\
& +\frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \gamma_m \left(1 - \frac{2kT}{\hbar\omega_m} + \frac{2}{3}i\lambda_{dB}^2 m\omega_m \right) \right. \\
& +\frac{\partial^2}{\partial \beta^{*2}} \gamma_m \left(1 + \frac{2kT}{\hbar\omega_m} + \frac{2}{3}i\lambda_{dB}^2 m\omega_m \right) \\
& +\frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \beta^*} \gamma_m \left(-1 + \frac{2\gamma_m kT}{\hbar\omega_m} + \frac{1}{3}i\lambda_{dB}^2 m\omega_m \right) \\
& +\frac{\partial^2}{\partial \beta^* \partial \beta} \gamma_m \left(-1 + \frac{2\gamma_m kT}{\hbar\omega_m} + \frac{1}{3}i\lambda_{dB}^2 m\omega_m \right) \\
& +\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \beta} \alpha igA + \frac{\partial^2}{\partial \beta \partial \alpha} \alpha igA \\
& \left. -\frac{\partial^2}{\partial \alpha^* \partial \beta^*} \alpha^* igA - \frac{\partial^2}{\partial \beta^* \partial \alpha^*} \alpha^* igA \right\} P(\alpha, \alpha^*, \beta, \beta^*).
\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

A matriz de difusão da equação acima é:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -igA\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & igA\alpha^* \\ -igA\alpha & 0 & \gamma_m \left(1 - \frac{2kT}{\hbar\omega_m} + \frac{\kappa\hbar\omega_m}{4kT} \right) & -\gamma_m \left(1 - \frac{2kT}{\hbar\omega_m} - \frac{\kappa\hbar\omega_m}{4kT} \right) \\ 0 & igA\alpha^* & -\gamma_m \left(1 - \frac{2kT}{\hbar\omega_m} - \frac{\kappa\hbar\omega_m}{4kT} \right) & \gamma_m \left(1 - \frac{2kT}{\hbar\omega_m} + \frac{\kappa\hbar\omega_m}{4kT} \right) \end{pmatrix}$$

onde $A = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega_m}}$, $B = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega_m}{2}}$, $\kappa = 2/3$ e k é a constante de Boltz-
man.

Para que possamos considerar a (4.1.9) como uma genuína equação

de Fokker-Planck é necessário que os autovalores da matriz de difusão D sejam positivos. Para verificar esta condição faremos uma análise numérica, utilizando valores experimentais publicados [23]. Uti-

Tabela 4.1: Parâmetros utilizados

<i>Parâmetros</i>	<i>Descrição</i>	<i>Valores</i>
m	massa	$10^{-5}kg$
L	comprimento da cavidade	$10^{-2}m$
$\mathcal{Q} = \omega_m/\gamma_m$	fator de qualidade	4×10^6 para $T = 4K$ e $2,25 \times 10^6$ para $T = 70K$
$\mathcal{F} = (\pi c)/(2L\gamma_c)$	finesse	10^{-5}
$g = \omega_0/L$	constante de acoplamento	$1,77 \times 10^{17}m^{-1}s^{-1}$
λ	comprimento de onda do laser	$1064 \times 10^{-9}m$
ω_m	frequência de oscilação do espelho	$2\pi \times 10^3s^{-1}$
$\gamma_c = (\pi c)(2\mathcal{F}L)$	taxa de decaimento da cavidade	$3,14 \times 10^6s^{-1}$
$\omega_0 = (2\pi c)(\lambda)$	frequência do campo	$1,77 \times 10^{15}s^{-1}$
$\gamma_m = (\omega_m)(\mathcal{Q})$	constante de amortecimento do espelho	$20,41 \times 10^{-3}s^{-1}$ para $T = 4.2K$ $36,28 \times 10^{-3}s^{-1}$ para $T = 70K$

lizando os valores da tabela (4.1), calculamos os autovalores da matriz D e encontramos os resultados apresentados nas tabelas (4.2) e (4.3). Como os autovalores apresentam valores negativos não podemos obter uma equação de Fokker-Planck genuína. Nossa saída é a aplicação da representação P positiva.

Tabela 4.2: Autovalores

Autovalores da matriz de difusão D com temperatura $T = 4.2K$	
Parte real	Parte imaginária
$-4,88 \times 10^5$	$-5,32 \times 10^{-14}$
$3,20 \times 10^{-4}$	$1,31 \times 10^4$
$3,20 \times 10^{-4}$	$-1,31 \times 10^4$
$-3,54 \times 10^2$	$-9,84 \times 10^{-17}$

Tabela 4.3: Autovalores

Autovalores da matriz de difusão D com temperatura $T = 70K$	
Parte real	Parte imaginária
$-8,15 \times 10^6$	$2,64 \times 10^{-13}$
$1,92 \times 10^{-5}$	$1,31 \times 10^4$
$1,92 \times 10^{-5}$	$-1,31 \times 10^4$
$-2,12 \times 10^1$	$6,59 \times 10^{-17}$

4.1.2 Representação P Positiva

A equação de Fokker-Planck desse sistema poderá ser escrita se utilizarmos a representação P positiva. As equações no espaço de fase dobrado, podem ser encontradas fazendo-se a mudança de variáveis $\alpha^* \rightarrow \alpha^+$, $\beta^* \rightarrow \beta^+$ na equação (4.1.9), sendo que a média é tal que $\overline{\alpha^+} = \overline{\alpha^*}$ e $\overline{\beta^+} = \overline{\beta^*}$. Agora estamos trabalhando com quatro variáveis estocásticas independentes. Isto permite escrever as equações estocásticas para o caso em que a equação mestra na representação P de Glauber tem matriz de difusão negativa. Para encontrar as equações estocásticas é necessário fatorar a matriz de difusão $D = NN^T$.

A fim de obtermos as equações diferenciais estocásticas, fatoramos a matriz de difusão, $D = NN^T$,

$$N = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{-igA\alpha}{2}} & \sqrt{\frac{igA\alpha}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{\frac{igA\alpha^+}{2}} & -\sqrt{\frac{-igA\alpha^+}{2}} \\ -\sqrt{\gamma_m \left(1 - \frac{2k_B T}{\hbar\omega_m}\right)} & \sqrt{\frac{-igA\alpha}{2}} & -\sqrt{\frac{igA\alpha}{2}} & 0 & 0 \\ \sqrt{\gamma_m \left(1 - \frac{2k_B T}{\hbar\omega_m}\right)} & 0 & 0 & \sqrt{\frac{igA\alpha^+}{2}} & \sqrt{\frac{-igA\alpha^+}{2}} \end{pmatrix} \quad (4.1.10)$$

Observamos que esta não é a única matriz possível, na verdade existem outras matrizes N que satisfazem a equação $D = NN^T$.

4.1.3 Equações estocásticas

Notamos que a equação (4.1.9) pode ser escrita de modo que possamos identificar os termos que constituem as equações dinâmicas para cada variável α , α^* , β e β^* , sendo que no caso dos termos que acompanham as derivadas de ordem dois haverá uma contribuição a qual chamaremos de ruído, identificada pela letra η . A matriz de difusão fatorada (4.1.10) nos permite escrever as equações diferenciais estocásticas,

$$\begin{aligned}
 \frac{d\alpha}{dt} &= \epsilon - \gamma\alpha + igA\alpha(\beta + \beta^+) + \sqrt{\frac{-igA\alpha}{2}}(\eta_2 + i\eta_3), \\
 \frac{d\alpha^+}{dt} &= \epsilon - \gamma\alpha^+ - igA\alpha^+(\beta + \beta^+) + \sqrt{\frac{igA\alpha^+}{2}}(\eta_4 - i\eta_5), \\
 \frac{d\beta}{dt} &= -i\omega\beta - \gamma_m(\beta - \beta^+) + igA\alpha^+\alpha - \\
 &\quad \sqrt{\gamma_m\left(1 - \frac{2k_B T}{\hbar\omega_m}\right)}\eta_1 + \sqrt{\frac{-igA\alpha}{2}}(\eta_2 - i\eta_3), \\
 \frac{d\beta^+}{dt} &= i\omega\beta^+ + \gamma_m(\beta - \beta^+) - igA\alpha^+\alpha \\
 &\quad + \sqrt{\gamma_m\left(1 - \frac{2k_B T}{\hbar\omega_m}\right)}\eta_1 + \sqrt{\frac{igA\alpha^+}{2}}(\eta_4 - i\eta_5). \quad (4.1.11)
 \end{aligned}$$

Nas equações acima os termos reais de ruído gaussiano têm as seguintes correlações,

$$\begin{aligned}
 \overline{\eta_i(t)} &= 0, \\
 \overline{\eta_i(t)\eta_j(t')} &= \delta_{ij}\delta(t - t'). \quad (4.1.12)
 \end{aligned}$$

Para que possamos realizar o cálculo dos valores esperados dos operadores em ordem normal desejados, o conjunto de equações (4.1.11) deve ser integrado numericamente, e as médias devem ser tomadas sobre um grande número de trajetórias estocásticas. Como por exemplo, com N trajetórias, temos,

$$\langle : \hat{a}^{\dagger m} \hat{a}^n : \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \alpha^{+m} \alpha^n. \quad (4.1.13)$$

onde o índice j denota a j -ésima trajetória.

4.1.4 Análise Clássica

Antes de realizar a integração estocástica vamos investigar as propriedades clássicas do sistema. Da parte de arraste da equação (4.1.9) podemos escrever imediatamente as equações de campo médio, utilizando a notação \bar{z} para indicar o valor de campo médio clássico de z ,

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{\alpha}}{dt} &= \epsilon - \gamma\bar{\alpha} + igA\bar{\alpha}(\bar{\beta} + \bar{\beta}^*), \\ \frac{d\bar{\beta}}{dt} &= -i\omega_m\bar{\beta} - \gamma_m(\bar{\beta} - \bar{\beta}^*) + igA|\bar{\alpha}|^2,\end{aligned}\quad (4.1.14)$$

das quais devemos encontrar as soluções de estados estacionários clássicos.

Resolvendo as equações (4.1.14), encontramos, no estado estacionário, que β_{EE} é real, o que significa que o estado estacionário de momento é zero, pois $p = \beta - \beta^*$. Para a integração estocástica consideraremos as equações completas.

As soluções estacionárias de $\bar{\beta}$ e $\bar{\alpha}$ são

$$\begin{aligned}\beta_{EE} &= \beta_{EE}^* = \frac{gA}{\omega_m}|\alpha|^2, \\ \alpha_{EE} &= \frac{\epsilon}{\gamma - 2igA\beta_{EE}}.\end{aligned}\quad (4.1.15)$$

Observamos que as soluções acima são dependentes uma da outra e podemos fazer uma expansão iterativa, partindo do resultado para espelhos fixos,

$$\alpha_{EE}^0 = \frac{\epsilon}{\gamma}, \quad (4.1.16)$$

e substituímos este resultado na solução para β_{EE} . O próximo resultado é substituído na solução para α_{EE} . Este processo é repetido até ser atingido um grau de convergência, conforme mostram as figuras (4.1) e (4.2).

Notamos que para alguns parâmetros esta expansão não converge e, existem regiões onde não é possível encontrar soluções clássicas de estados estacionários, em vez disso ocorre um comportamento chamado de pulsos próprios [24] conforme demonstram as figuras (4.3, 4.4 e 4.5).

Demonstramos abaixo que as soluções clássicas de estado esta-

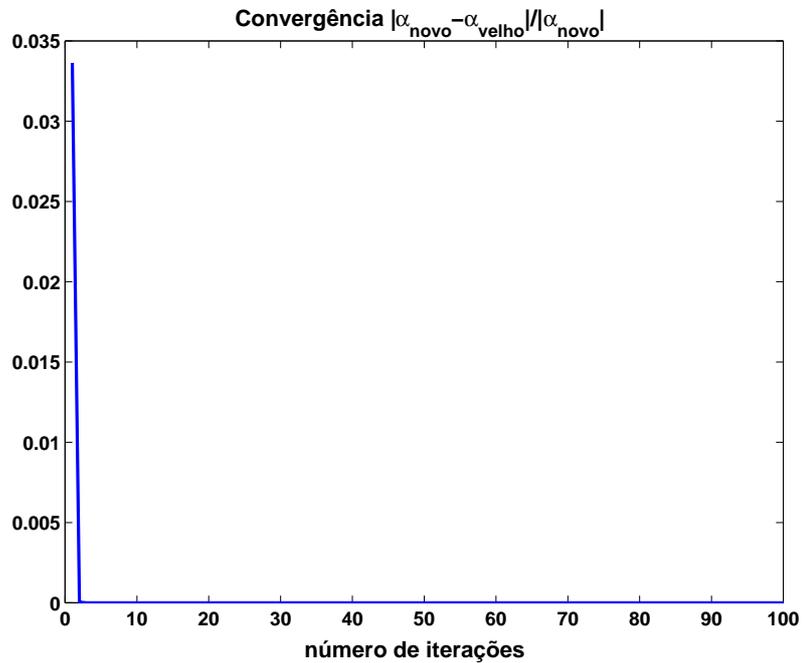


Figura 4.1: Convergência obtida com a expansão iterativa.

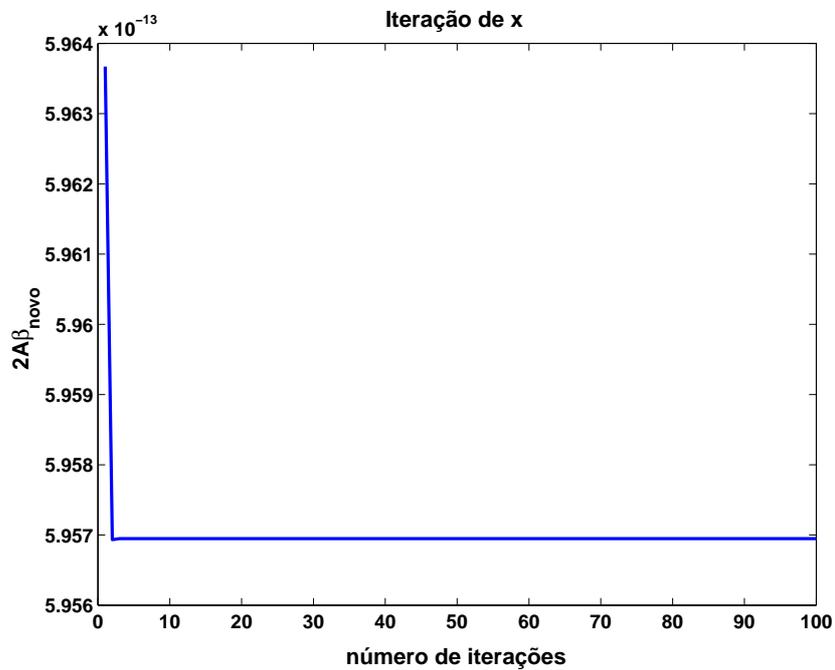


Figura 4.2: Comportamento de x em função do número de iterações.

cionário, especialmente x e p , não possuem acurácia em nenhum regime de parâmetro. Estas soluções possibilitam, por "insight", a inferência

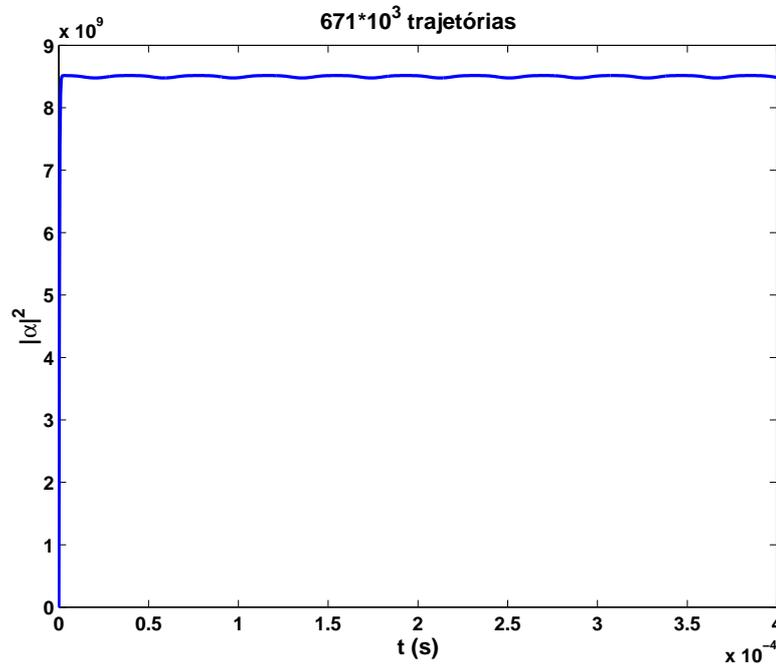


Figura 4.3: Variação da intensidade da luz em função do tempo. Observamos um comportamento oscilatório, típico de pulsos próprios.

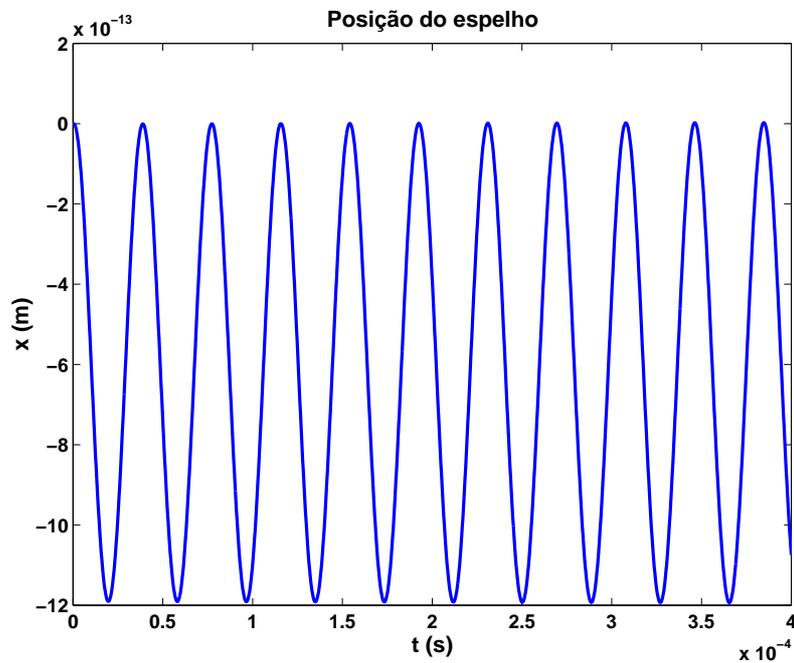


Figura 4.4: Variação da posição do espelho em função do tempo. Observamos um comportamento oscilatório, típico de pulsos próprios.

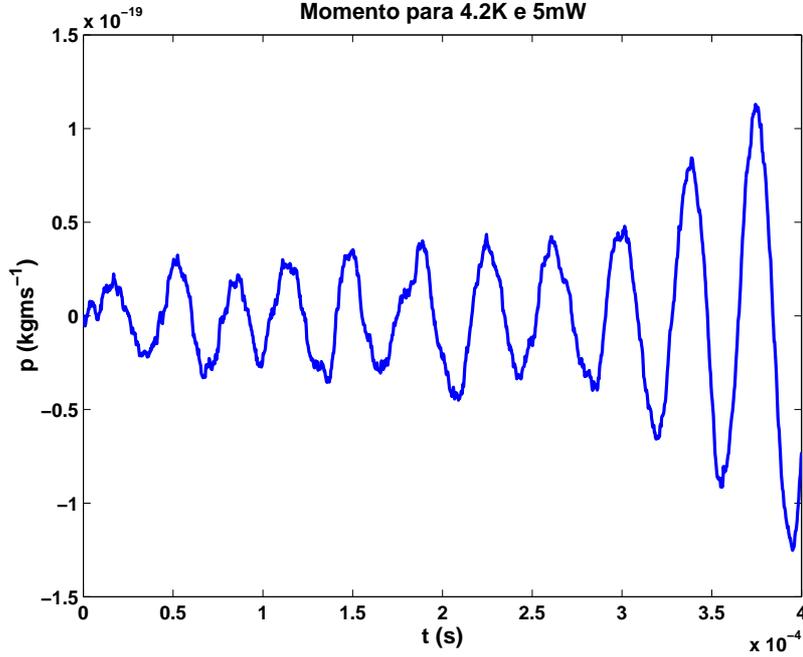


Figura 4.5: Variação do momento do espelho em função do tempo, da mesma forma que a posição apresenta um comportamento de pulsos próprios.

da posição do espelho a partir da medida de algumas quantidades. As candidatas usuais são a intensidade, que pode ser medida utilizando fotodeteção e as quadraturas, as quais são medidas através da deteção homodina.

Definindo as quadraturas intracavidade como $\hat{X}_a = \hat{a} + \hat{a}^\dagger$ e $\hat{Y}_a = -i(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$, com suas equivalentes clássicas escritas em termos de α_{EE} e α_{EE}^* , encontramos,

$$\begin{aligned} X_a &= \frac{2\epsilon\gamma}{\gamma^2 + g^2x^2}, \\ Y_a &= \frac{2g\epsilon\gamma x}{\gamma^2 + g^2x^2}, \\ |\alpha|^2 &= \frac{\epsilon^2}{\gamma^2 + g^2x^2}, \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

onde ϵ é real e $x = 2A\beta$, sendo β real. Como γ^2 é tipicamente muito maior do que g^2x^2 , devemos fazer uma expansão em série destas ex-

pressões. Encontramos,

$$\begin{aligned} X_a &\approx \frac{2\epsilon}{\gamma^2} \left(1 - \frac{g^2 x^2}{\gamma^2}\right), \\ Y_a &\approx \frac{2g\epsilon x}{\gamma^2} \left(1 - \frac{g^2 x^2}{\gamma^2}\right), \\ |\alpha|^2 &\approx \frac{\epsilon^2}{\gamma^2} \left(1 - \frac{g^2 x^2}{\gamma^2}\right). \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

Observamos de imediato que Y_a depende de x em primeira ordem, enquanto que X_a e $|\alpha|^2$ exibem uma dependência somente em segunda ordem. Isto mostra que medidas homodinas da quadratura Y_a são mais sensíveis às variações da posição do espelho do que as outras duas medidas (X_a e $|\alpha|^2$), como foi verificado anteriormente por Vitali *at al.* [25].

4.1.5 Análise da condição de biestabilidade

Podemos generalizar nosso sistema para considerar uma frequência de dessintonia (Δ) entre o campo e a cavidade. As equações da parte de arraste da equação mestra (4.1.9) para o campo médio podem ser escritas como:

$$\frac{d\bar{\alpha}}{dt} = \epsilon - (\gamma + i\Delta)\bar{\alpha} + igA\bar{\alpha}(\bar{\beta} + \bar{\beta}^*), \quad (4.1.19)$$

$$\frac{d\bar{\alpha}^*}{dt} = \epsilon - (\gamma + i\Delta)\bar{\alpha}^* + igA\bar{\alpha}^*(\bar{\beta} + \bar{\beta}^*), \quad (4.1.20)$$

$$\frac{d\bar{\beta}}{dt} = -i\omega_m\bar{\beta} - \gamma_m(\bar{\beta} - \bar{\beta}^*) + igA|\bar{\alpha}|^2, \quad (4.1.21)$$

$$\frac{d\bar{\beta}^*}{dt} = i\omega_m\bar{\beta}^* - \gamma_m(\bar{\beta}^* - \bar{\beta}) - igA|\bar{\alpha}|^2. \quad (4.1.22)$$

Os estados estacionários do sistema com dessintonia são:

$$\begin{aligned} \overline{\alpha_{EE}} &= \frac{\epsilon}{\gamma + i[\Delta - gA(\overline{\beta_{EE}} + \overline{\beta_{EE}^*})]}, \\ \overline{\alpha_{EE}^*} &= \frac{\epsilon}{\gamma - i[\Delta - gA(\overline{\beta_{EE}^*} + \overline{\beta_{EE}})]}, \\ \overline{|\alpha|^2} &= \frac{\epsilon^2}{\gamma^2 + [\Delta - gA(\overline{\beta_{EE}} + \overline{\beta_{EE}^*})]^2}, \end{aligned}$$

$$\overline{\beta_{EE}} = \overline{\beta_{EE}^*} = \frac{gA\overline{|\alpha_{EE}|^2}}{\omega_m}. \quad (4.1.23)$$

Observamos que β é real, o que significa que o estado de momento é zero.

Para encontrar a condição de biestabilidade escrevemos uma equação para $|\alpha|^2$ a partir dos estados estacionários. Fazendo $|\alpha|^2 \equiv I$ temos,

$$\frac{4g^4A^4}{\omega_m^2}I^3 - \frac{4\Delta g^2A^2}{\omega_m}I^2 + (\gamma^2 + \Delta^2)I - \epsilon^2 = 0. \quad (4.1.24)$$

Observamos que a equação (4.1.24) possui três soluções reais e determina valores máximos e mínimos de uma função do tipo:

$$V(I) = aI^4 + bI^3 + cI^2 + d. \quad (4.1.25)$$

onde a, b, c e d são constantes.

Mas $I' = 0$ possui duas raízes. Seguindo o mesmo procedimento utilizado por Tombesi e Mancini [10] derivamos a equação (4.1.24) em relação a I

$$\frac{12g^4A^4}{\omega_m^2}I^2 - \frac{8\Delta g^2A^2}{\omega_m}I + (\gamma^2 + \Delta^2) = 0. \quad (4.1.26)$$

A condição de biestabilidade consiste no fato das raízes da equação quadrática acima serem reais e positivas. As raízes desta equação são

$$r_{\pm} = \frac{1}{2} \left[\frac{2\Delta\omega_m}{3g^2A^2} \pm \sqrt{\frac{4\Delta^2\omega_m^2}{9g^4A^4} - \frac{4\omega_m^2}{12g^4A^4}(\gamma^2 + \Delta^2)} \right]. \quad (4.1.27)$$

Simplificando temos

$$r_{\pm} = \frac{\Delta\omega_m}{3g^2A^2} \pm \frac{\omega_m}{6g^2A^2} \sqrt{\Delta^2 - 3\gamma^2}. \quad (4.1.28)$$

Para que as raízes sejam reais e positivas necessitamos ter

$$\Delta \pm \frac{1}{2} \sqrt{\Delta^2 - 3\gamma^2} > 0. \quad (4.1.29)$$

Uma condição necessária, mas não suficiente é que Δ deve ser positiva, pois I deve ser positiva. Este resultado contradiz a condição dada por Tombesi [10], $|\Delta| > \sqrt{3}\gamma$, permitindo valores negativos para a intensidade I . Como I deve ser real, encontramos que a condição para a região de biestabilidade é $\Delta > \sqrt{3}\gamma$ [40].

4.2 Integração estocástica e previsões quânticas

4.2.1 Condições Iniciais

Para integrar numericamente a equação (4.1.11), utilizaremos as definições e os parâmetros experimentais publicados [23], conforme consta na tabela (4.1) e faremos comparações com suas previsões teóricas.

O espelho oscilante é considerado um refletor perfeito, com massa $m = 10^{-5}kg$, fator de qualidade $\mathcal{Q} = 4 \times 10^6$, em $T = 4.2K$, decrescendo a 2.25×10^6 , em $T = 70K$, com frequência de ressonância $\omega_m \pi = 26kHz$. A taxa de amortecimento do espelho é $\gamma_m = 0.5\omega_m/\mathcal{Q}$, em $T = 4.2K$. Consideramos uma cavidade de comprimento $L = 1cm$, com finesse $\mathcal{F} = 15 \times 10^3$, o que dá $\gamma = \pi c/2\mathcal{F}L = 3.14 \times 10^6 s^{-1}$. Consideramos o comprimento ótico $\lambda = 1064nm$, o que dá $\omega_0 = 1.77 \times 10^{15} s^{-1}$, e o acoplamento entre a luz e o espelho é $g = \omega_0/L = 1.77 \times 10^{17} m^{-1} s^{-1}$. O bombeio ótico da cavidade é $\epsilon = \sqrt{\gamma\mathcal{P}/\hbar\omega_0}$, sendo \mathcal{P} a potência em Watts.

Na integração estocástica das equações que descrevem um sistema ótico intracavidade, a abordagem padrão é começar com um estado de vácuo dentro da cavidade, com um bombeio contínuo. Após poucos ciclos o sistema entra no regime de estado estacionário ou em seu comportamento de pulsos próprios. Neste caso a situação é diferente pois, não só o campo eletromagnético como também o espelho oscilante, têm de alcançar o estado estacionário. O tempo de relaxação do espelho pode ser da ordem de magnitude muito maior do que o tempo de relaxação para o campo intracavidade, e necessitamos tomar a média sobre um grande número de trajetórias para obtermos resultados em que possamos confiar. Portanto, não é prático iniciar a integração com uma condição inicial arbitrária para o espelho. Começando ingenuamente com o estado fundamental do espelho, $\beta(0) = \beta^+(0) = 0$, há um tempo transiente extremamente duradouro, longe do estado de equilíbrio, à temperatura finita. Como por exemplo, na temperatura $T = 4.2K$, que talvez seja temperatura mais baixa disponível, o número médio de quanta torna-se $|\beta|^2 = k_B T/\hbar\omega_m = 3.36 \times 10^6$. Com o objetivo de comparação, escolheremos então, o estado inicial do espelho em tipos diferentes e integraremos as equações sem nenhum bombeio na cavi-

dade. O primeiro é o estado coerente (real), que possui incerteza na posição e no momento no limite quântico padrão (LQP), com a função P,

$$P(\beta) = \delta(\beta - \sqrt{k_B T / \hbar \omega_m}), \quad (4.2.30)$$

o segundo é o estado de distribuição térmica,

$$P(\beta) = \frac{1}{\pi \bar{n}} e^{-|\beta|^2 / \bar{n}}, \quad (4.2.31)$$

onde $\bar{n} = k_B T / \hbar \omega_m$. Notamos que, no início de cada trajetória, $\beta = (\beta^+)^*$ e a fase é completamente aleatória para a distribuição térmica. Enfatizamos que a variância no número de fônons do espelho para um estado térmico é $V(n) = \bar{n}^2 + \bar{n}$, que é muito maior do \bar{n} .

Utilizando a distribuição de Planck,

$$\bar{n} = (e^{\hbar \omega_m / k_B T} - 1)^{-1}, \quad (4.2.32)$$

encontramos que para atingir $\bar{n} = 1$, necessitaríamos de $T = 1.8 \mu K$, e a variância deveria ser igual a 2, ou duas vezes o valor médio.

Uma observação importante que notamos aqui é que o número de fônons não aparece nas equações, mas aparece nas quadraturas \hat{X}_b e \hat{Y}_b . Numa abordagem linearizada, utilizando nossas equações, as incertezas nestas quadraturas são importantes. Podemos calculá-las para um estado térmico do espelho com uma cavidade sem bombeio. Uma integração simples utilizando a distribuição térmica (4.2.31) produz

$$V(\hat{X}_b) = V(\hat{Y}_b) = 1 + 2\sqrt{\pi} \left(\frac{k_B T}{\hbar \omega_m} \right)^{3/2}, \quad (4.2.33)$$

que é igual a 2.2×10^{10} em $T = 4.2 K$ para nosso sistema. Este resultado está em contraste com o estado coerente do espelho, às vezes usado para facilitar a matemática da análise linearizada, e para o qual $V(\hat{X}_b) = V(\hat{Y}_b) = 1$.

Na figura 4.6 mostramos os resultados para a posição $x = 2A\beta$, do espelho sem nenhum bombeio ótico para um estado coerente, às temperaturas $4.2 K$ e $70 K$.

Imediatamente observamos que não só a amplitude média do es-

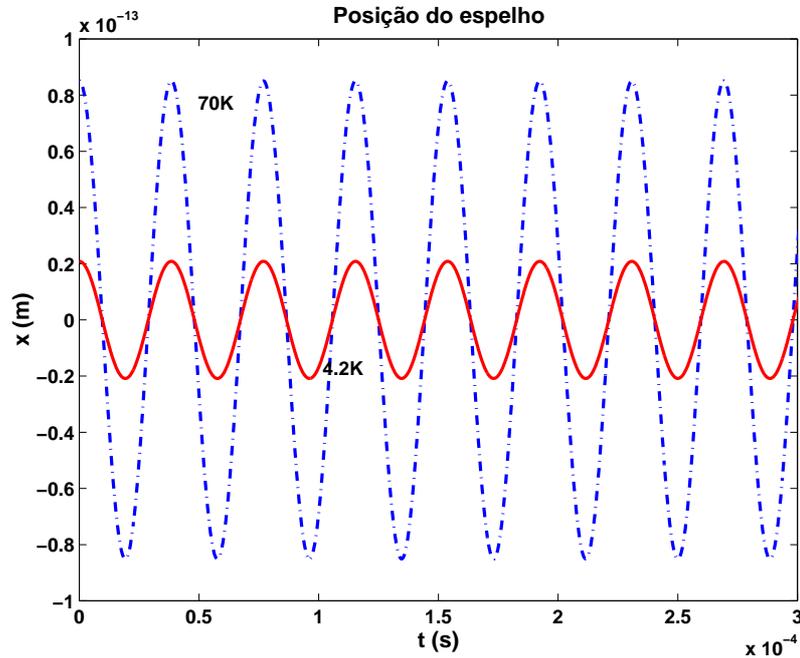


Figura 4.6: Valores médios para x em $T = 4.2K$ e $T = 70K$ para um estado coerente inicial do espelho e sem bombeio óptico. Estes resultados são as médias de 7.6×10^3 e 2.7×10^4 trajetórias, respectivamente.

pelho cresce com a temperatura como esperado, como também as oscilações são muito maiores para o estado coerente. Considerando somente os valores médios poderíamos ter a impressão errada de que o espelho está num estado estacionário para estes estados quânticos iniciais, mas podemos ver imediatamente que não é esse o caso quando olhamos a figura 4.7, que mostra o desvio padrão $\sigma(x)$ para os mesmos parâmetros e para um estado coerente.

Alguns pesquisadores utilizam, numa análise teórica, o estado inicial coerente [26], mas não é tão óbvio como este estado particular pode ser construído experimentalmente. De forma natural surge um estado térmico que será igual a um estado coerente para uma temperatura $T = 0K$, isso significa atingir o zero absoluto que, experimentalmente não pode ser alcançado.

Na ótica, um estado coerente pode ser descrito teoricamente como um deslocamento do vácuo através do operador deslocamento, $D(\alpha) = e^{(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})}$, como vimos no capítulo anterior. Identificamos que estes estados têm alguma relação com o termo de bombeio ótico do Hamil-

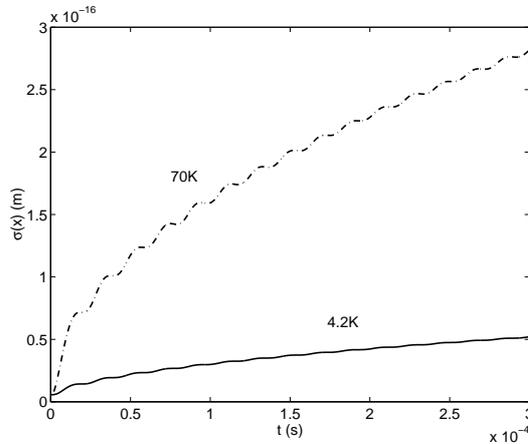


Figura 4.7: Desvios padrões para x em $T = 4.2K$ e $T = 70K$ para um estado coerente inicial do espelho e sem bombeio ótico.

toniano \mathcal{H}_{bomb} . Portanto, uma cavidade vazia ideal (com este tipo de bombeio) naturalmente desenvolverá um estado coerente em seu interior.

Não temos ciência de que haja algum tipo de espelho que possa constituir uma cavidade para começar num estado de vácuo em $T = 0K$. Portanto, em nossas investigações, usaremos como estado inicial o estado térmico.

Quando examinamos os resultados estocásticos para a intensidade do campo no interior da cavidade, para uma potência de entrada $\mathcal{P} = 5mW$, encontramos que o campo exibe um comportamento de pulsos próprios numa frequência aproximada da ressonância do espelho, como previsto por Fabre et al. [24]. Contudo, as oscilações têm amplitudes relativas pequenas, em torno de 0.2% da intensidade média. À medida que a potência de entrada aumenta, as oscilações tornam-se maiores. Por exemplo, para uma potência de $100mW$, elas atingem mais da metade da intensidade média. Em potências mais baixas, o movimento médio do espelho oscila entre 0 e $1.2 \times 10^{-12}m$, enquanto que, para altas potências a oscilação fica em entre -1 e $3 \times 10^{-11}m$. Estes deslocamentos são verdadeiramente microscópicos e apresentam um efeito notável na intensidade média, a qual deveria ser facilmente detetável. É interessante notar que estes resultados são quase idênticos àqueles que encontramos pela integração numérica

das equações clássicas (4.1.14), porém estes resultados não podem nos ajudar em nada nos cálculos das correlações quânticas que desejamos investigar. Estas correlações quânticas são variâncias do campo ($V(\hat{X}_a)$ e $V(\hat{Y}_a)$) no interior da cavidade e o fator de Fano, definido como $F(N_a) = V(N_a)/N_a$. Estes resultados são calculados numa média sobre 6.71×10^5 trajetórias e estão mostrados na figura 4.8. Para um estado coerente, todos os três ($V(\hat{X}_a)$, $V(\hat{Y}_a)$ e $F(N_a)$) são 1, os quais deveriam ser zero na escala logarítmica vertical, utilizada aqui. Todas as três correlações são muito maiores ou igual a um. Não vimos nenhuma compressão do campo no domínio do tempo, mas vimos excesso de ruído nas três quantidades. Como é comum no meio Kerr, existe mais excesso no ruído na quadratura \hat{Y}_a do que na quadratura \hat{X}_a ou na intensidade.

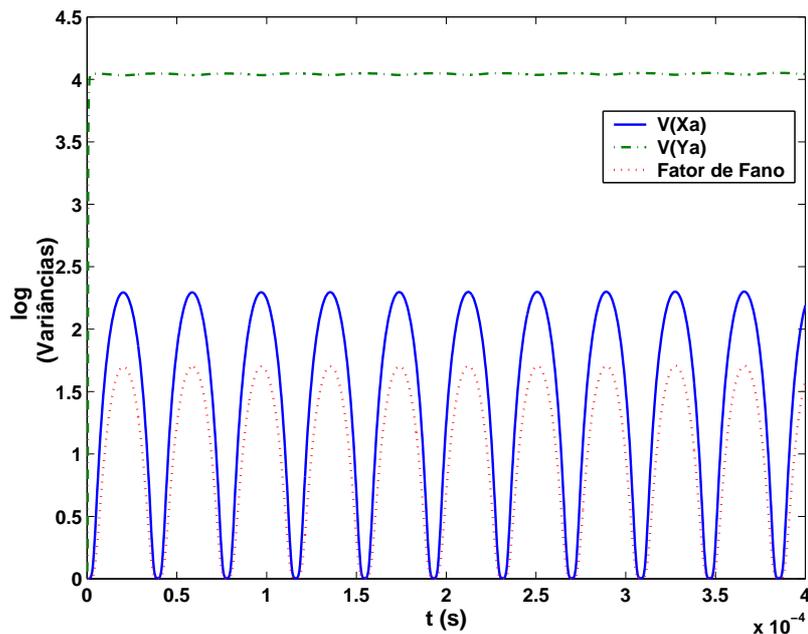


Figura 4.8: As variâncias do campo eletromagnético no interior da cavidade. A linha sólida é $V(\hat{X}_a)$, a linha pontilhada e tracejada é $V(\hat{Y}_a)$, e a linha pontilhada é o fator de Fano. Note que a escala vertical é logarítmica

4.2.2 Medidas de Posição

Grande parte do interesse neste sistema, tanto teórico quanto experimental, consiste na medida de pequenos deslocamentos ou forças que

atuam no espelho oscilante, através de medidas no campo ótico. Geralmente os resultados teóricos são apresentados em termos de espectro de saída, que permite inferir valores da posição do espelho em várias frequências. Estes espectros são simples de calcular numa análise linearizada que trata o sistema como um processo de Ornstein-Uhlenbeck [27], mas não consideramos esta análise válida aqui, conforme havíamos esclarecido anteriormente. É possível, em muitos casos, calcular o espectro através dos resultados da integração estocástica, mas nesse caso é mais difícil devido à complexidade de nossas equações, onde o campo e o espelho oscilam em diferentes escalas de tempo. A duração de tempo necessária para integrar um número grande o bastante de trajetórias sobre um tempo suficiente para fornecer resultados confiáveis sobre transformadas de Fourier é proibitiva. Portanto mostraremos nossos resultados no domínio do tempo.

Os primeiros resultados, mostrados na figura (4.9), são as incertezas na posição e no momento do espelho, definidas como $\sigma(x) = A\sqrt{V(X_b)}$ e $\sigma(p) = |B|\sqrt{V(Y_b)}$. A interação com o campo não alterou notavelmente estas quantidades em relação aos valores encontrados, através da integração estocástica, no caso do estado térmico para a cavidade sem bombeio. Mas esta interação conduz a um valor médio de momento que oscila, aproximadamente, entre $\pm 1 \times 10^{-19} \text{kgms}^{-1}$. Vemos de imediato que as flutuações no momento são muito maiores do que o valor médio, em várias ordens de magnitude. Observamos também que as incertezas mostradas são certamente subestimadas, devido às dificuldades de simulação envolvendo grandes valores de β com pequenas probabilidades nas condições iniciais. Este resultado também mostra que, quando o estado térmico do espelho é utilizado o ruído de "back-action" do campo no espelho tem efeitos muito pequenos, utilizando os valores de potência considerados aqui. A uma potência de 100mW os desvios padrões, tanto na posição quanto no momento, crescem devido ao ruído de "back-action", atingindo valores oscilatórios em torno de aproximadamente 1×10^{-13} , enquanto que o momento médio oscila entre $\pm 3 \times 10^{-17} \text{kgms}^{-1}$.

Nossas próximas investigações são o grau de correlação entre a posição e o momento do espelho, a intensidade no interior da cavidade

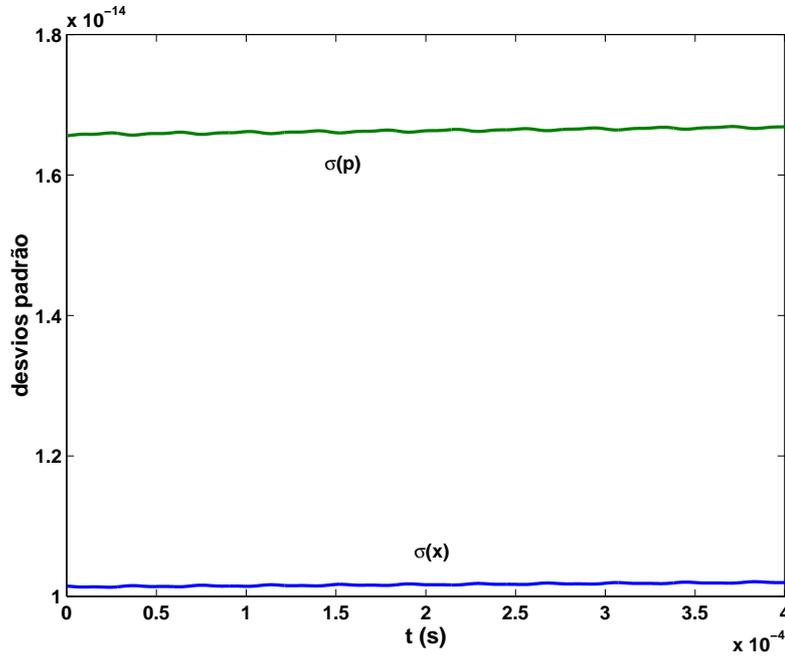


Figura 4.9: Os desvios padrões na posição e no momento do espelho para um laser de potência $5mW$. Utilizamos as unidades do padrão S.I. para a posição e o momento.

e as quadraturas \hat{X}_a e \hat{Y}_b .

A função de correlação entre duas quantidades w e z é definida como

$$\rho(wz) = \frac{\langle wz \rangle - \langle w \rangle \langle z \rangle}{\sqrt{V(w)V(z)}}, \quad (4.2.34)$$

onde uma correlção perfeita é igual a 1 e uma anticorrelação perfeita dá o valor -1 e zero significa que não há correlação. Na figura 4.10 vemos que, conforme previsto na equação 4.1.18, a correlação mais forte é entre \hat{Y}_a e a posição do espelho, sendo quase perfeitamente correlacionada. As funções de correlação $\rho(X_b X_a)$ e $\rho(X_b N_a)$ oscilam na frequência ω_m entre um valor próximo de -1 e aproximadamente zero, apresentando característica de uma anticorrelação quase perfeita e quase perfeitamente não correlacionadas, respectivamente.

Este comportamento é completamente diferente do que foi mostrado na análise linearizada das flutuações, onde encontramos que todas as três funções apresentam anticorrelação em torno da frequência do espelho e possuem valor zero para outras frequências.

A diferença entre nossos resultados completamente quântico não

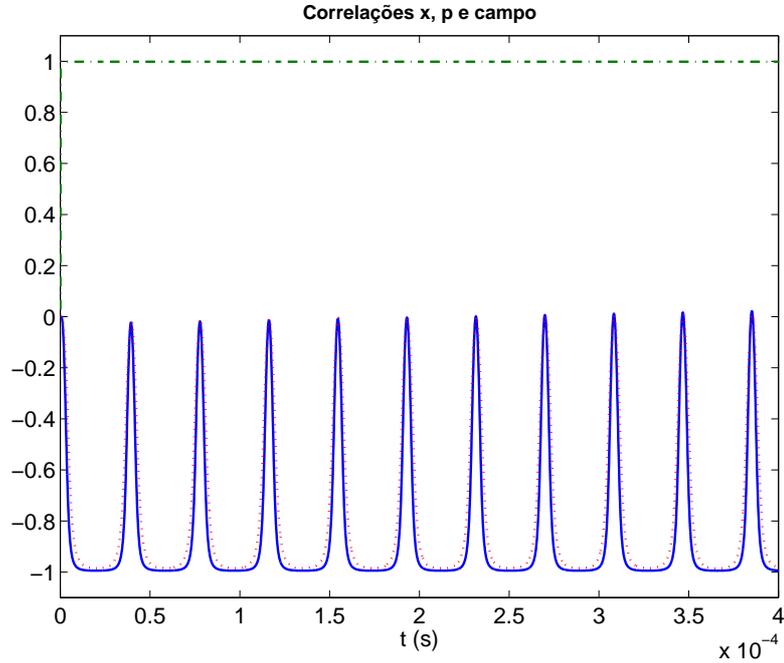


Figura 4.10: Funções de correlação intracavidade, $\rho(xX_a)$ (linha sólida), $\rho(xY_a)$ (linha pontilhada e tracejada) e $\rho(xN_a)$ (linha pontilhada), para uma potência de $5mW$.

lineares e as predições da análise linearizada está bem evidente quando consideramos $|\rho(X_a Y_b)|^2$, utilizada para uma possível análise de uma medida quântica de não demolição feita por Jacobs *et al.* [28]. A predição destes autores (veja eq. 4.2.35) é um valor máximo espectral de 0.9757 para os parâmetros que usamos neste trabalho, enquanto que em nosso tratamento estocástico, no domínio do tempo, o valor máximo oscila entre 0 e 6×10^{-3} , mostrando que quase não há correlação. Inicialmente pensamos que esta diferença se devesse ao fato de realizarmos medidas espectrais no domínio do tempo, mas na verdade deve-se à utilização inapropriada do tratamento linearizado para este sistema.

Outra maneira de inferir a posição do espelho é através da estimativa linear em conjunto com as medidas do campo ótico. Seguimos o método proposto por Reid [29] na tentativa de demonstrar o paradoxo de Einstein-Poldosky-Rosen e o método proposto por Dechoum *et al.* [30]. Assumimos que a medida da quadratura \hat{Y}_a permite uma estimativa linear de $\hat{X}_b, \hat{X}_b^{est} = c\hat{Y}_a + d$. Isto é consistente com a expansão de \hat{Y}_a dada acima na equação 4.1.18. Antes de realizar uma otimização

para d , o RMS nesta estimativa é dado por

$$V^{inf}(\hat{X}_b) = \langle (\hat{X}_b - c\hat{Y}_a)^2 \rangle - \langle \hat{X}_b - c\hat{Y}_a \rangle^2, \quad (4.2.35)$$

o qual deve ser minimizado como uma função de c ,

$$c = \frac{V(\hat{X}_b, \hat{Y}_a)}{V(\hat{Y}_a)}. \quad (4.2.36)$$

Devemos escrever

$$V^{inf}(\hat{X}_b) = V(\hat{X}_b) - \frac{[V(\hat{X}_b, \hat{Y}_a)]^2}{V(\hat{Y}_a)}, \quad (4.2.37)$$

que deve ser calculado via integração estocástica.

A incerteza inferida na medida de \hat{x} será então $\sigma^{inf}(x) = A\sqrt{V^{inf}(\hat{X}_b)}$, que será igual ao limite quântico padrão quando o espelho está num estado de incerteza mínima. Calculamos também a incerteza inferida na posição, utilizando as medidas de \hat{X}_a e N_a da mesma forma.

Conforme esperado das discussões anteriores e mostrado na figura 4.11, utilizando a quadratura \hat{Y}_a obtemos melhores resultados do que utilizar \hat{X}_a ou N_a , que dão inferências oscilatórias. Todas estas medidas dão incertezas inferidas bem acima do LQP de $A = 5.68 \times 10^{-18}m$ para os parâmetros utilizados.

Notamos aqui que o valor atual calculado de $\sigma(x)$, que oscila entre $1.025 \times 10^{-14}m$ e 1.03×10^{-14} , é bem maior do que o valor inferido através da quadratura \hat{Y}_a , que tem um estado estacionário de valor aproximadamente $5 \times 10^{-16}m$. Este também é o mesmo comportamento verificado por Reid com as medidas inferidas [29], e deve-se à correlação quase perfeita entre a posição do espelho e a quadratura \hat{Y}_a .

4.2.3 Preparação de estados não clássicos

A cavidade pendular e suas variações do tema são costumeiramente propostas como um aparato capaz de preparar estados não clássicos para o campo da cavidade e para o espelho.

Nesta seção daremos uma breve revisão de algumas destas propostas, em ordem cronológica, e explicaremos porque nossos resultados

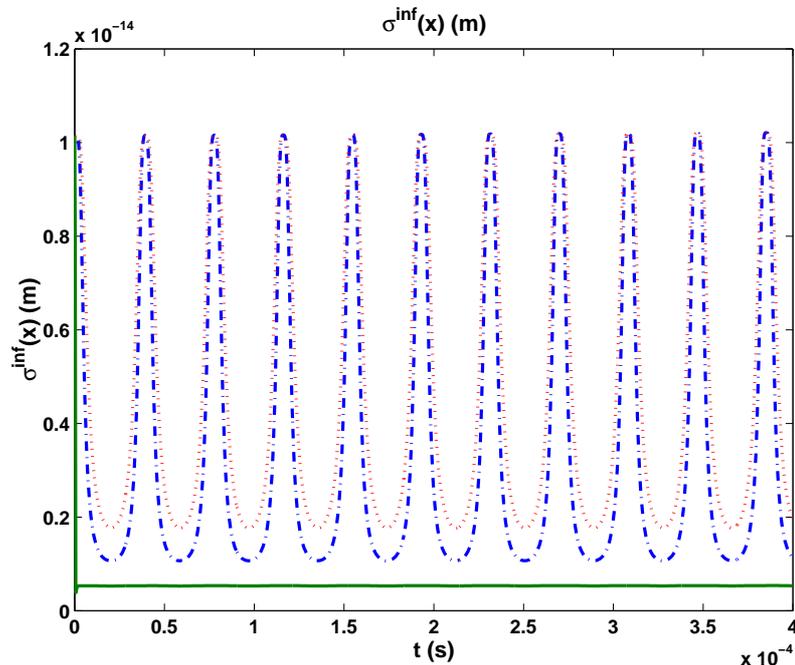


Figura 4.11: Incertezas inferidas na posição do espelho, $A\sqrt{V^{inf}(\hat{X}_b)}$, calculada conforme a equação 4.2.37. A linha sólida é estimada usando \hat{Y}_a , a linha tracejada utiliza \hat{X}_a e a linha pontilhada utiliza N_a

nos levam a acreditar que estes aparatos não são tão práticos quanto sugerem alguns autores.

Bose *et al.* [26] sugerem que este sistema deve ser usado para preparar multi-componentes de estados de gato de Schrödinger do campo, próximo do estados de número, e estados emaranhados quando dois ou mais modos interagem com o espelho, tão bem quanto estados de gato de Schrödinger do espelho, preparados, via medidas da quadratura do campo.

Começando com um hamiltoniano simples, sem nenhum termo de bombeio ou dissipação, eles desenvolveram um operador temporal que deve ser tratado como um termo Kerr, que conduz os autores a acreditar que aquele sistema deve exibir algumas características não clássicas de uma interação Kerr. Então eles assumem que ambos o campo da cavidade e o espelho estão em estados iniciais coerentes. Enquanto isto simplifica a matemática envolvida, e possui uma acurácia razoável para o campo, nossos cálculos mostraram que um estado coerente não é uma boa condição inicial para o espelho. Como as características não

clássicas previstas dependem desta condição inicial, que num determinado cálculo do artigo é um estado de vácuo (por simplicidade), e a interação do espelho com o ambiente é considerada equivalente à interação do campo da cavidade com um reservatório a uma temperatura zero, nossos resultados nos levam a crer que estes estados não clássicos são, no mínimo, extremamente difíceis de observar.

Num artigo subsequente [31], os mesmos autores propõe que a cavidade pendular deve ser usada para provar a decoerência de um objeto macroscópico - o espelho. Neste trabalho os autores aceitam que o espelho possa iniciar num estado térmico e notam que a mistura de estados de gato de Schrödinger do espelho pode ser produzida através da interação com o campo. Assume-se que a superposição dos estados de Fock $|0\rangle$ e $|n\rangle$ pode ser preparada dentro da cavidade, com o valor mais simples preparado de $n = 1$. Utilizando a representação P para expandir o operador da matriz densidade em termos de estados coerentes, encontra-se uma expressão para o desenvolvimento temporal da matriz densidade. O campo pode ser medido através da interação com um estado fundamental de um átomo de dois níveis que passa através da cavidade. A probabilidade do átomo estar excitado pode estar relacionada com a taxa de decoerência da superposição dos estados coerentes do movimento do espelho, separados espacialmente. Examinando este esquema com nossos parâmetros, encontramos com $n = 1$, a separação espacial entre dois estados coerentes da superposição tem um valor máximo $\delta x_{max} = 1.4 \times 10^{-22}m$, que é menor do que o comprimento de onda térmico de de Broglie, $\lambda_{dB} = 2.19 \times 10^{-21}m$, tal que torna-se difícil exigir que se tenha uma superposição espacialmente separada. Quando levamos em consideração que a decomposição do estado térmico incluirá um número enorme de estados coerentes, todos com diferentes fases, parece que a realização prática deste esquema envolve uma demanda tecnológica mais desenvolvida do que os autores supuseram.

Outras propostas utilizam a pressão de radiação para emaranhar dois espelhos macroscópicos [32], mas contam com as equações de Langevin que são linearizadas em torno das soluções clássicas dos estados estacionários. Como mostrado acima, este processo possui uma validade

duvidosa quando os espelhos são acoplados a reservatórios térmicos.

Uma idéia posterior foi produzir um estado de Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) na posição e no momento de dois espelhos oscilantes, espacialmente separados, utilizando a saída de um oscilador ótico paramétrico (OPO) [33]. Notamos que os autores chamam o oscilador de amplificador ótico paramétrico, o cristal não linear está dentro da cavidade bombeada, tal que esta será a terminologia usual utilizada. Diferente da maioria dos tratamentos este trabalho usa um acoplamento linear efetivo entre a luz e o espelho. Como na maioria dos casos estudados, estes autores linearizaram as equações de Langevin em torno das suas soluções estacionárias. O OPO é tratado via equações de dois modos, as quais não descrevem o comportamento normal bem conhecido do limiar e conduzem a predição de estado emaranhado de duas quadraturas combinadas, as quais são utilizadas para demonstrar uma correlação EPR. Os dois campos de saída do OPO são usados para impulsionar os dois espelhos em um estado EPR da posição e do momento. O amortecimento mecânico dos espelhos introduz um termo de ruído $V_b = 1 + 2n_T$, onde $n_T = \coth(\hbar\omega_m/2k_B T)$ é o número médio de fônons. Este termo de ruído é estranho e parece ser a variância da quadratura, assumindo um estado de número $|n_T\rangle$ do espelho. Para os parâmetros que utilizamos, esta expressão dá o valor $V_b = 6.7 \times 10^6$, ou seja, várias ordens de magnitude mais baixo do que nossa estimativa na equação (4.2.33), a qual dá $V_b = 2.2 \times 10^{10}$. Devido às discussões que provocamos acreditamos que o estado EPR de dois espelhos não deve ser fácil de demonstrar como indicam estes autores.

Mancini *et al.* [34] propõem emaranhar dois espelhos móveis que formam parte de uma cavidade de anel, formada por quatro espelhos. Este trabalho tem a vantagem de uma descrição para o movimento Browniano que é consistente com a mecânica quântica em todas as temperaturas, mas os resultados apresentados são obtidos através do processo de linearização, que mostramos não ser válido para temperaturas razoáveis. A última proposta que consideramos aqui é dada por Marshall *et al.* [35], que trata a criação de estados de superposição de um espelho macroscópico ($\approx 10^{14}$ átomos), através da interação com somente um fóton. Este trabalho usa uma abordagem hamiltoniana,

sem dissipação e assume que o espelho pode ser preparado em seu estado fundamental $|0\rangle$, que permite soluções analíticas. A inclusão da decoerência e de temperatura finita segue a abordagem dada na referência [31] e, portanto temos as mesmas dúvidas a respeito da viabilidade física desta proposta.

Capítulo 5

Conclusão e perspectivas

5.1 Perspectivas

5.1.1 Refriamento através da reação

Evidenciamos que o ruído térmico do espelho é uma fonte que contribui para o aumento das incertezas nas medidas quânticas, como por exemplo, posição e momento do espelho.

Existe um método que vem sendo utilizado para reduzir este ruído. Este método chama-se resfriamento através da reação, do inglês "cooling by feedback". Alguns autores sugerem que trabalhando com baixas temperaturas é possível obter uma redução no ruído térmico da ordem 10^3 [36, 37]. Para nosso sistema, utilizando a equação (4.2.33), uma redução desta ordem conduz a $V(\hat{X}_b) = V(\hat{Y}_b) \approx 10^7$, que está ainda acima do nível do estado coerente, onde esperamos que a linearização das equações deve funcionar. Marshall *et. al* [35] sugerem que o espelho deva ser resfriado em torno de uma temperatura de $2mK$ pela diluição de refrigeração, o que dá $V(\hat{X}_b) = V(\hat{Y}_b) \approx 2.27 \times 10^5$. Nesse caso se assumirmos que o resfriamento através da reação desta temperatura é tão eficiente quanto a temperatura ambiente permitiria uma redução na variância da ordem de 10^2 . Este valor é realmente muito menor do que o número médio de quanta $|\beta|^2$, igual a 1.6×10^3 , e a variância no número será da ordem de 10^6 , tal que a linearização ainda não será confiável.

O resfriamento por reação depende da interação do campo eletromagnético com os fônons do espelho. Esta interação é proporcional a

$\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{X}_b$, e não conduz o espelho a um estado coerente. Um termo de acoplamento proporcional a $\hat{a}^\dagger \hat{b} - \hat{a} \hat{b}^\dagger$ deve produzir esta interação, enquanto que a compressão da posição do espelho seria possível com um acoplamento do tipo $\hat{a}^{\dagger 2} \hat{b} - \hat{a}^2 \hat{b}^\dagger$ ou $\hat{b}^{\dagger 2} \hat{a} - \hat{b}^2 \hat{a}^\dagger$.

É interessante notar que o acoplamento efetivo do tipo requerido para conduzir o espelho a um estado coerente foi usado por Zhang *et al.* [33], porém os parâmetros físicos utilizados para o desenvolvimento dos acoplamento hamiltoniano estão longe daqueles que nós usamos em nossa análise. Como por exemplo, eles consideraram $\omega_m \gg \gamma$, enquanto que usamos os valores $\omega_m = 1.63 \times 10^5 s^{-1}$ e $\gamma = 3.14 \times 10^6 s^{-1}$. Zhang *et al.* também consideraram que o amortecimento do espelho é devido à forma da amplitude, que não é o que encontramos utilizando a equação mestra de Diósi.

Mancini *et al.* [38] apresentaram realmente um esquema de reação baseado em um hamiltoniano que acopla a quadratura da luz com \hat{X}_b , propondo que este método, que eles chamam de resfriamento estocástico, poderia ser usado para atingir o valor do LPQ através da obtenção da compressão da posição do estado estacionário do espelho [25]. O acoplamento efetivo usado, mais uma vez depende da linearização das equações de movimento.

Identificamos que o resfriamento por reação pode ser utilizado para resfriar um oscilador macroscópico quase no LPQ, mas ainda é uma questão em aberto e deve estar sujeita a investigações.

5.2 Conclusão

Desenvolvemos uma análise inteiramente quântica de uma cavidade pendular bombeada, utilizando a representação P positiva, mostrando que o estado quântico do espelho móvel, um objeto macroscópico, tem efeitos notáveis na dinâmica do sistema.

Vimos que este sistema é de suma importância para a compreensão de muitos fenômenos físicos e tem sido proposto como um candidato para medir pequenos deslocamentos quântico-limitados de um espelho, devido à pressão de radiação, com o objetivo de produzir estados de superposição do espelho e estados emaranhados entre o espelho e o

campo.

Contudo quando tratamos o espelho oscilante quântico mecânico, encontramos que ele sempre oscila, ou seja, não possui estados estacionários e exibe incertezas na posição e no momento que são muito maiores do que os valores médios. Isto significa que as análises prévias de flutuações linearizadas, que prevêm os estados quânticos citados acima, têm seu uso limitado.

Mostramos que o ruído térmico do espelho é predominante para as temperaturas e parâmetros típicos. Isto significa que o procedimento de linearização, comumente usado, apresenta dúvida quanto a sua validade.

A menos que haja uma mudança no estado quântico do espelho, com relação às excitações térmicas, esperamos que estados não clássicos previstos em várias análises teóricas não são possíveis de serem observados experimentalmente.

As técnicas de resfriamento através de reação que permitem abaixar a temperatura efetiva servem meramente para produzir outro estado térmico do espelho a baixas temperaturas. O ruído, nesse caso, é ainda predominante se quisermos atingir o LPQ, que é necessário para detecção de ondas gravitacionais.

O mesmo acontece se desejarmos observar algumas superposições quânticas e emaranhamento, também previstos teoricamente.

Após a realização da análise crítica da dinâmica deste sistema concluimos que apesar de existir uma grande quantidade de literatura sobre este assunto, identificamos que não são muito bem definidos os tipos de ruído presentes neste caso, qual a sua influência na detecção das medidas que geram o espectro de intensidade e como podemos reduzir esta influência para obter mais acurácia no valor medido, de modo que é necessário que sejam realizadas mais investigações no sentido de apurar a validade dos resultados obtidos com os diversos tratamentos abordados na literatura.

Vimos que precisamos ter sempre em mente que devemos buscar o tratamento teórico mais adequado observando sempre as condições em que sistemas deste tipo possam ser construídos em laboratórios, pois desta forma podemos identificar um caminho para um método de

solução das equações dinâmicas do sistema.

Nossos resultados [40] mostraram que é necessário avaliar com muito cuidado o comportamento de alguns parâmetros, como por exemplo, a variação na posição e no momento para certos valores experimentais, pois após realizar uma verificação numérica deste comportamento concluímos que o tipo de análise linearizada utilizada por muitos autores não é válida para alguns valores experimentais mais usuais.

Apêndice A

Teorema de Bakker-Hausdorff

A.1 Teorema de Bakker-Hausdorff

Consideremos de forma geral dois operadores $A(t)$ e $B(t)$, tais que para todo t e t'

$$[A(t), A(t')] = [B(t), B(t')] = 0, \quad (\text{A.1.1})$$

$$[A(t), B(t')] = f(t, t'), \quad (\text{A.1.2})$$

sendo que a função $f(t, t')$ comuta com $A(t'')$ e $B(t'')$ para todo t, t' e t'' .

Suponhamos que um operador $V(t)$ obedeça à equação

$$\frac{dV(t)}{dt} = \{A(t) + B(t)\}V(t), \quad V(0) = 1. \quad (\text{A.1.3})$$

Podemos escrever,

$$U(t) = e^{-\int_0^t B(t')dt'} V(t). \quad (\text{A.1.4})$$

Utilizando (A.1.1) encontramos,

$$\frac{dU(t)}{dt} = e^{-\int_0^t B(t')dt'} A(t)V(t), \quad (\text{A.1.5})$$

$$= A(t)U(t) + \int_0^t f(t, t')U(t), \quad (\text{A.1.6})$$

onde utilizamos a fórmula

$$e^{-F}Ge^F = \sum_n \frac{(-1)^n}{n!} [F, G]_n, \quad (\text{A.1.7})$$

onde o comutador iterado é definido por

$$[F, G]_n = [F, [F, G]_{n-1}], \quad (\text{A.1.8})$$

e

$$[F, G]_1 = [F, G], \quad (\text{A.1.9})$$

utilizamos o fato de que o primeiro comutador $f(t, t')$ comuta com $B(t'')$ para todo t'' , tal que na expansão (A.1.7) somente os dois primeiros termos sobrevivem. Usando o fato de que $f(t, t')$ comuta com com todo $A(t'')$, podemos resolver (A.1.6) e substituir em (A.1.4) para obtermos $V(t)$

$$V(t) = e^{\int_0^t B(s)ds} e^{\int_0^t A(s)ds} e^{-\int_0^t ds \int_0^s ds' f(s, s')}. \quad (\text{A.1.10})$$

A.1.1 Corolários

a) Fórmula de Baker-Hausdorff: Se $A(t)$ e $B(t)$ são constantes A e B , respectivamente, então (A.1.3) pode ser resolvida diretamente integrando $V(t)$, partindo de $t=1$,

$$V(t) = e^{(A+B)t} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A, B]t}, \quad (\text{A.1.11})$$

que é a fórmula de Baker-Hausdorff.

b) Generalização da Fórmula de Baker-Hausdorff: se substituirmos na (A.1.11)

$$A \rightarrow \int_0^t ds A(s), \quad B \rightarrow \int_0^t ds B(s), \quad (\text{A.1.12})$$

a (A.1.11) torna-se

$$V(t) = e^{\int_0^t ds \{A(s)+B(s)\}} e^{\{-\frac{1}{2} \int_0^t ds \int_0^s ds' \epsilon(s-s') f(s, s')\}}. \quad (\text{A.1.13})$$

onde $\epsilon(x)$ é a função degrau antissimétrica

$$\epsilon(x) = \begin{cases} +1 & \text{para } x > 0, \\ -1 & \text{para } x < 0. \end{cases} \quad (\text{A.1.14})$$

Apêndice B

Cálculo utilizando os operadores \hat{x} e \hat{p}

B.1 Aplicação do método de espaço de fase

Reservamos este apêndice para mostrar a evolução do nosso trabalho. Aplicamos o método do espaço de fase, utilizando a representação de Wigner. Após mapear a equação mestra obtivemos uma equação na representação de Wigner. Adotamos um procedimento usual, encontrado na literatura - a linearização das equações estocásticas. Após realizar algumas investigações observamos o aparecimento de um comportamento de pulsos próprios, o que nos fez mudar de idéia e, ao invés de fazer a linearização, integramos as equações estocásticas. A seguir apresentamos estes procedimentos.

Aplicando as correspondências (3.2.31) e (3.2.30) em cada termo da equação mestra (3.1.7) realizamos o seu mapeamento em termos de variáveis comuns e encontramos as seguintes correspondências relacionadas a cada termo:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\hat{p}^2}{2m}, \rho \right] &\longleftrightarrow -\frac{\partial}{\partial x} \frac{i\hbar}{m} p \\ \left[\frac{1}{2} m \omega_m^2 \hat{x}^2, \rho \right] &\longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial p} i\hbar m \omega_m^2 x \\ [\hbar g \hat{a}^\dagger \hat{a} x, \rho] &\longleftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial p} i\hbar |\alpha|^2 + \frac{\partial}{\partial \alpha^*} \alpha^* x - \frac{\partial}{\partial \alpha} \alpha x - \frac{\partial^3}{\partial \alpha \partial \alpha^* \partial p} \right) \hbar g \\ [i\hbar \epsilon (\hat{a} - \hat{a}^\dagger), \rho] &\longleftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial \alpha^*} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) i\hbar \epsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i\hbar(2\hat{a}\rho\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\rho - \rho\hat{a}^\dagger\hat{a}) &\longleftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial\alpha}\alpha + \frac{\partial}{\partial\alpha^*}\alpha^* + \frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\alpha^*} \right) i\hbar\gamma \\
\gamma_m [\hat{x}, \{\hat{p}, \rho\}] &\longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial p} 2i\hbar\gamma_m p \\
\frac{i\hbar\gamma_m}{2\lambda_{dB}} [\hat{x}, [\hat{x}, \rho]] &\longleftrightarrow \frac{\partial^2}{\partial p^2} \left(\frac{i\hbar^3\gamma_m}{2\lambda_{dB}} \right)
\end{aligned} \tag{B.1.1}$$

Reescrevendo a equação mestra(3.1.7) em termos das correspondências(B.1.1)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W(x, p, \alpha, \alpha^*)}{\partial t} = &\left\{ - \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{p}{m} + \frac{\partial}{\partial p} (\hbar g |\alpha|^2 - m\omega_m^2 x - 2\gamma_m p) \right. \right. \\
&+ \frac{\partial}{\partial\alpha} (i\alpha x g + \epsilon - \gamma\alpha) + \left. \left. + \frac{\partial}{\partial\alpha^*} (-i\alpha^* x g + \epsilon - \gamma\alpha^*) \right] \right. \\
&+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\alpha^*} \gamma + \frac{\partial^2}{\partial\alpha^*\partial\alpha} \gamma - \frac{\partial^2}{\partial p^2} \frac{\gamma_m \hbar^2}{\lambda_{dB}} \right) \\
&\left. - \frac{\partial^3}{\partial\alpha\partial\alpha^*\partial p} \frac{\hbar g}{4} \right\} W(x, p, \alpha, \alpha^*).
\end{aligned} \tag{B.1.2}$$

O mapeamento da equação mestra (3.1.7) conduziu-nos à equação cujas variáveis não são operadores. No entanto, observamos o termo de derivada de ordem 3 na equação (B.1.2), caracterizando que não é uma equação de Fokker -Planck portanto não podemos obter as equações estocásticas diretamente de (B.1.2).

A alternativa utilizada nesse tipo de situação é trabalhar com a representação de Wigner truncada, pois dessa forma eliminamos o termo de derivada de ordem superior a dois e a equação mestra (B.1.2) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial W(x, p, \alpha, \alpha^*)}{\partial t} = &\left\{ - \left[\frac{\partial}{\partial x} \frac{p}{m} + \frac{\partial}{\partial p} (\hbar g |\alpha|^2 - m\omega_m^2 x - 2\gamma_m p) \right. \right. \\
&+ \frac{\partial}{\partial\alpha} (i\alpha x g + \epsilon - \gamma\alpha) + \left. \left. + \frac{\partial}{\partial\alpha^*} (-i\alpha^* x g + \epsilon - \gamma\alpha^*) \right] \right. \\
&+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\alpha^*} \gamma + \frac{\partial^2}{\partial\alpha^*\partial\alpha} \gamma - \frac{\partial^2}{\partial p^2} \frac{\gamma_m \hbar^2}{\lambda_{dB}} \right) \\
&\left. \right\} W(x, p, \alpha, \alpha^*).
\end{aligned} \tag{B.1.3}$$

A equação obtida acima é a equação de Fokker-Planck para a função $W(x, p, \alpha, \alpha^*)$, logo podemos identificar as equações estocásticas e determinísticas do sistema.

B.1.1 Equações Estocásticas

Inicialmente escrevemos as equações sem desintonia, ou seja, o campo elétrico é ressonante com a cavidade vazia. Contudo podemos generalizar as equações, facilmente, adicionando uma frequência de sintonia Δ para obter uma condição de biestabilidade para o sistema.

As equações estocásticas são obtidas diretamente da equação de Fokker-Planck (B.1.3)::

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}, \quad (\text{B.1.4})$$

$$\frac{dp}{dt} = -m\omega_m^2 x + \hbar g |\alpha|^2 - 2\gamma_m p + \sqrt{2\hbar\gamma_m \sqrt{mKT}} \eta_1(t), \quad (\text{B.1.5})$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = (igx - \gamma)\alpha + \epsilon + \sqrt{\frac{\gamma}{2}}(\eta_2(t) + i\eta_3(t)), \quad (\text{B.1.6})$$

$$\frac{d\alpha^*}{dt} = (-igx - \gamma)\alpha^* + \epsilon + \sqrt{\frac{\gamma}{2}}(\eta_2(t) - i\eta_3(t)). \quad (\text{B.1.7})$$

onde η_i representa o ruído gaussiano de modo que

$$\overline{\eta_i(t)\eta_j(t')} = \delta_{ij}\delta(t-t'), \quad (\text{B.1.8})$$

$$\overline{\eta_j(t)} = 0. \quad (\text{B.1.9})$$

Se tomarmos o valor médio das equações estocásticas (B.1.5) a (B.1.7), podemos escrever as equações determinísticas sem desintonia:

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{\bar{p}}{m}, \quad (\text{B.1.10})$$

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = -m\omega_m^2 \bar{x} + \hbar g |\bar{\alpha}|^2 - 2\gamma_m \bar{p}, \quad (\text{B.1.11})$$

$$\frac{d\bar{\alpha}}{dt} = (ig\bar{x} - \gamma)\bar{\alpha} + \epsilon, \quad (\text{B.1.12})$$

$$\frac{d\bar{\alpha}^*}{dt} = (-ig\bar{x} - \gamma)\bar{\alpha}^* + \epsilon. \quad (\text{B.1.13})$$

Resolvendo as equações determinísticas para encontrar os estados estacionários(EE) do sistema temos:

$$p_{EE} = 0, \quad (\text{B.1.14})$$

$$x_{EE} = \frac{\hbar g |\alpha|^2}{m \omega_m^2}, \quad (\text{B.1.15})$$

$$\alpha_{EE} = \frac{\epsilon}{\gamma - igx_{EE}}, \quad (\text{B.1.16})$$

$$|\alpha|^2 = \frac{\epsilon^2}{\gamma^2 + g^2}. \quad (\text{B.1.17})$$

B.1.2 Linearização das equações

Não usaremos a integração estocástica, mas faremos uma linearização das variáveis considerando que haja pequenas flutuações em torno dos estados estacionários: $x \rightarrow x_{EE} + \delta x$, $p \rightarrow p + \delta p$, $\alpha \rightarrow \alpha_{EE} + \delta \alpha$ e $\alpha^* \rightarrow \alpha_{EE}^* + \delta \alpha^*$, encontramos uma equação para as flutuações em primeira ordem:

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \underline{A}\vec{X} + \underline{B}\vec{\eta}, \quad (\text{B.1.18})$$

onde,

$$\vec{X} = (\delta x \quad \delta p \quad \delta \alpha \quad \delta \alpha^*)^T$$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 0 & 0 \\ -m\omega_m^2 & -2\gamma_m & \hbar g \alpha_{EE}^* & \hbar g \alpha_{EE} \\ ig\alpha_{EE} & 0 & -\gamma + igx_{EE} & 0 \\ -ig\alpha_{EE}^* & 0 & 0 & -\gamma - igx_{EE} \end{pmatrix}$$

$$\underline{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2\hbar\gamma_m}\sqrt{mKT} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\gamma/2} & i\sqrt{\gamma/2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\gamma/2} & -i\sqrt{\gamma/2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\eta}(t) = (\eta_1(t) \quad \eta_2(t) \quad \eta_3(t) \quad 0)^T$$

Como o ruído é gaussiano o seu valor médio é nulo portanto as equações para as flutuações são:

$$\frac{d(\delta\bar{x})}{dt} = \frac{\delta\bar{p}}{m}, \quad (\text{B.1.19})$$

$$\frac{d(\delta\bar{p})}{dt} = -m\omega_m^2\delta\bar{x} - 2\gamma\delta\bar{p} + \hbar(\bar{\alpha}_{EE}\delta\bar{\alpha}^* + \bar{\alpha}_{EE}^*\delta\bar{\alpha}), \quad (\text{B.1.20})$$

$$\frac{d(\delta\bar{\alpha})}{dt} = (-\gamma + ig\bar{x}_{EE})\delta\bar{\alpha} + ig\bar{\alpha}_{EE}\delta\bar{x}, \quad (\text{B.1.21})$$

$$\frac{d(\delta\bar{\alpha}^*)}{dt} = (-\gamma - ig\bar{x}_{EE})\delta\bar{\alpha}^* - ig\bar{\alpha}_{EE}^*\delta\bar{x}. \quad (\text{B.1.22})$$

A equação matricial é

$$\frac{d\vec{X}}{dt} = \underline{A}\vec{X}, \quad (\text{B.1.23})$$

cuja solução é

$$\vec{X}(t) = \vec{X}(0)e^{\underline{A}t}. \quad (\text{B.1.24})$$

A parte real dos autovalores da matriz de arraste \underline{A} deve ser negativa para que as soluções desse sistema sejam convergentes.

Para encontrar os autovalores escrevemos a solução não trivial do sistema de equações (B.1.19) a (B.1.22)

$$\det|\underline{A} - \Lambda I| = 0, \quad (\text{B.1.25})$$

onde $\Lambda = (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4)$ é o vetor dos autovalores e I é a matriz identidade, produz a equação secular para a matriz \underline{A} , de quarta ordem

$$\lambda^4 + a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0, \quad (\text{B.1.26})$$

onde os coeficientes são

$$\begin{aligned} a_0 &= \gamma^2\omega_m^2 + g^2x_{EE}^2\omega_m^2 + \frac{2\hbar g^3|\alpha_{EE}|^2x_{EE}}{m}, \\ a_1 &= 2(\gamma^2\gamma_m + \gamma\omega_m^2 + g^2x_{EE}^2\gamma_m), \\ a_2 &= \gamma^2 + 4\gamma\gamma_m + g^2x_{EE}^2 + \omega_m^2, \\ a_3 &= 2(\gamma + \gamma_m). \end{aligned} \quad (\text{B.1.27})$$

As raízes da equação secular (B.1.2) podem ser obtidas analiticamente, no entanto, esse cálculo irá nos fornecer resultados em função de variáveis e a verificação do sinal da parte real dos autovalores não é imediata. Como nosso objetivo é identificar uma região onde as soluções do sistema sejam convergentes, realizamos o mesmo procedimento adotado no capítulo três para encontrar os autovalores da matriz de difusão D , ou seja utilizamos os parâmetros da tabela (4.1). Encontramos autovalores com a parte real positiva. A conclusão imediata a que chegamos foi a de que este sistema não funcionava muito bem com estes parâmetros, uma vez que não convergia. Após uma segunda análise identificamos o comportamento de pulsos próprios e chegamos a conclusão de que teríamos de esquecer a linearização das equações e partir para sua integração estocástica.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Dorsel, J. D. McCullen, P. Meystre, E. Vignes e H. Walther, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1550, (1983).
- [2] C. Fabre, M. Pinard, S. Bourzeix, A. Heidman, E. Giacobino e S. Reynaud, *Phys.Rev.A* **49**, 1337, (1994).
- [3] V. Giovannetti e D. Vitali, *Phys. Rev. A* **63**, 023812, (2001).
- [4] C. M. Caves, *Phys. Rev. D* **23**, 1693, (1981).
- [5] A. F. Pace, M. J. Collett e D. F. Walls, *Phys. Rev. A* **47**, 3173, (1993).
- [6] P. Samphire, R. Loudon e M. Babiker, *Phys. Rev. A* **51**, 2726, (1995).
- [7] A. Heidmann e S. Reynaud, *Phys. Rev. A* **50**, 4237, (1994).
- [8] A. Gillespie e F. Raab *Phys. Rev. D* **52**, 577, (1995).
- [9] K. Jacobs, I. Tittonen, H. M. Wiseman e S. Schiller, *Phys. Rev. A* **60**, 538, (1999).
- [10] S. Mancini e P. Tombesi, *Phys. Rev. A* **49**, 4055, (1994).
- [11] C. W. Gardiner e P. Zoller, *Quantum Noise*, Second Enlarged Edition, Springer
- [12] A. O. Caldeira e A. J. Leggett, *Phys.Rev.A* **31**, 1059, (1985).
- [13] L. Diósi, *Europhys. Lett.* **22**, 1, (1993).

- [14] H. J. Carmichael, *Statistical Methods in Quantum Optics 1 - Master Equations and Fokker-Planck Equations*, First Edition, Springer
- [15] E. P. Wigner, *Phys. Rev.* **40**, 749, (1932).
- [16] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu e F. Laloë, *Quantum Mechanics*, Wiley-Interscience.
- [17] J. R. Klauder *Ann. of Phys.* **11**, 123 (1960).
- [18] E. C. G. Sudarshan *Phys. Rev. Lett.*, **10**, 277, (1963).
- [19] R. J. Glauber, *Phys. Rev.* **131**, 2766, (1963).
- [20] W. M. Zhang, D. H. Feng e R. Gilmore, *Rev. Mod. Phys.* **62**, 867, (1990).
- [21] E. C. G. Sudarshan, *Phys. Rev. Lett.* **10**, 277, (1963).
- [22] P. D. Drummond e C. W. Gardiner, *J. Phys. A* **13**, 2353, (1980).
- [23] I. Tuttonen, G. Breitenbach, T. Kalkbrenner, T. Müller, R. Conradt, S. Sciller, *Phys. Rev. A* **59**, 1038, (1999)
- [24] C. Fabre, M. Pinard, S. Bourzeix, A. Heidmann, E. Giacobino e S. Reynaud, *Phys. Rev. A*, **49**, 1337, (1994).
- [25] D. Vitali, S. Mancini, L. Ribichini e P. Tombesi *Phys. Rev. A* **65**, 063803, (2002).
- [26] S. Bose, K. Jacobs e P. L. Knight, *Phys. Rev. A* **56**, 4175, (1997).
- [27] D. F. Walls e G. J. Milburn, *Quantum Optics*, Springer-Verlag, Berlin, (1995).
- [28] K. Jacobs, P. Tombesi, M. J. Collett e D. F. Walls, *Phys. Rev. A* **49**, 1961, (1994).
- [29] M. D. Reid, *Phys. Rev. A* **40**, 913, (1989).
- [30] K. Dechoum, P. D. Drummond, S. Chaturvedi e M. D. Reid, *quant-ph/0310129* (2003).

-
- [31] S. Bose, K. Jacobs e P. L. Knight, *Phys. Rev. A* **59**, 3204, (1999).
- [32] S. Mancini, V. Giovannetti, D. Vitali e P. Tombesi, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 120401, (2002).
- [33] J. Zhang, K. Peng e S. L. Braustein, *Phys. Rev. A* **68**, 013808, (2003).
- [34] S. Mancini, D. Vitali, V. Giovannetti e P. Tombesi, *Eur. Phys. J. D* **22**, 417, (2003).
- [35] W. Marshall, C. Simon, R. Penrose e D. Bouwmeester, *Phys. Rev. Lett.*, **91**, 130401, (2003).
- [36] M. Pinard, P. F. Cohadon, T. Briant e A. Heidmann, *Phys. Rev. A* **63**, 013808, (2000).
- [37] P. F. Cohadon, A. Heidmann e M. Pinard, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3174, (1999).
- [38] S. Mancini, D. Vitali e P. Tombesi, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 688, (1998).
- [39] C. K. Law, *Phys. Rev. A* **51**, 2537, (1995).
- [40] M. K. Olsen, A. B. Melo, K. Dechoum e A. Z. Khoury, *Phys. Rev. A* **70**, 043815, (2004).
- [41] A. Yariv *Quantum Eletronics*, John Wiley & Sons, 3^a ed.