

Laboratório de Óptica Quântica



INSTITUTO DE FÍSICA
Universidade Federal Fluminense

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física,
como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

Fases Geométricas na Produção de Vórtices Ópticos

Carlos Eduardo Rodrigues de Souza

Orientador: **Antonio Zelaquett Khoury**

Membros titulares da banca examinadora:

Professora **Lucila Helena D. Cescato**

Professor **Marco Moricone**

Membros suplentes da banca examinadora:

Professor **Glauco Santos Maciel**

Professor **Ernesto Fagundes Galvão**

Niterói - R.J.

Outubro de 2006

"Uma mente que se abre a novos pensamentos,
nunca retorna ao seu tamanho inicial."

Albert Einstein

Dedico este trabalho a Alvina, minha mãe, minhas irmãs Rafaela e Neuma e minha namorada Luciana, que sempre apoiaram todas as decisões, confortaram-me nos momentos difíceis e proporcionaram momentos de muita alegria e aprendizado ao vosso lado.

Agradecimentos:

Agradeço ao meu orientador Professor Antônio Zelaquett Khoury pelos ensinamentos e exemplo profissional que têm me dado ao longo desses últimos quatro anos. Exemplo que pretendo seguir.

Agradeço a professora Maria Teresa Thomaz por ter me ajudado em um momento de muita dificuldade no início da graduação. Admiro muito sua garra e grande empenho em tudo que vejo realizar.

Obrigado aos amigos Edésio Barboza e Odilon Lourenço, que conheço desde o início da graduação, por todas as discussões e aconselhamentos.

Obrigado ao meu primo Marcio Alecrin pela ajuda no início de minha vida profissional e ao meu grande amigo Fabio Bello pelo grande exemplo de luta.

Obrigado em especial aos meus amigos Ana Paula Oliveira, Bárbara Kelly, Bernardo Coutinho, José Augusto, Mariana Dutra, Rodrigo Picanço e Silvânia Alves por todos os momentos que passamos e pela oportunidade de desfrutar de vossa amizade.

Obrigado ao grupo de Óptica Quântica da UFF pelo ambiente de trabalho. Em especial ao Professor José Augusto e ao Bernardo Coutinho que têm supervisionado e contribuído muito para realização desse trabalho.

Obrigado a professora Lucia de Almeida pelos aconselhamentos. Admiro muito seu empenho em ajudar as pessoas em todas as situações.

Agradeço aos funcionários da Biblioteca do IF-UFF pelo constante empenho em oferecer sempre o melhor serviço.

Agradeço o apoio financeiro dado pelo CNPq durante a graduação e o mestrado.

Resumo

Feixes ópticos que carregam momento angular orbital (MAO) talvez possam ser utilizados na implementação da computação quântica. Isto se deve ao fato deles possuírem um grande número de estados associados à estrutura de fase. Esses estados podem adquirir fase geométrica ao sofrerem transformações. Essa fase depende da geometria da trajetória seguida no espaço dos modos. Neste trabalho, desenvolvemos um estudo sobre feixes que carregam MAO e apresentamos dois métodos para obtenção experimental destes. Apresentamos também resultados referentes às medidas das fases geométricas adquiridas pelos modos por meio da interferência de dois feixes copropagantes e construímos um dispositivo que produz modos intermediários ou elípticos. Este dispositivo funciona sem mexer no alinhamento do feixe.

Abstract

Optical beams that carry orbital angular momentum (AOM) will probably be used for doing quantum computation. This is possible because it has a large number of states associated with the phase structure of the beams. These states can acquire a geometric phase when they are submitted to transformations. This phase depends on the geometry of the path followed by the beam in the space of spacial modes. In this work, we present a study about beams that carry AOM and we present two methods to produce it experimentaly. We also present phase mensuraments done via the interference of two copropagating optical beams. We built a device that makes intermediary or elliptical beams modes. With this device we can generate any mode without misaligning the beam.

Sumário

1	Introdução Geral	1
2	Momento Angular da Luz	4
2.1	Introdução	4
2.2	Modos de Propagação da luz	5
2.3	Ondas Esféricas Gaussianas	6
2.4	Modos Gaussianos de Ordens Superiores	10
2.4.1	Representação geométrica dos modos: Esfera dos modos de primeira ordem	12
2.4.2	Produção e Detecção dos Modos	14
2.5	Conclusão	20
3	Fases Geométricas	23
3.1	Introdução	23
3.2	Fase de Pancharatnam	24
3.3	Fases geométricas na mecânica quântica	26
3.3.1	Aplicação da fase geométrica a uma partícula de spin 1/2	28
3.3.2	A descrição quântica da fase de Pancharatnam	29
3.4	Fases geométricas na conversão astigmática de feixes gaussianos	30
3.5	Conclusão	34

4	Fase Geométrica em Feixes com MAO	35
4.1	Introdução	35
4.2	Experimentos	35
4.3	Conclusão	43
5	Modos Elípticos	44
5.1	Introdução	44
5.2	Estados de polarização	44
5.3	Dispositivo para a geração de modos elípticos	46
5.3.1	O funcionamento das lâminas	47
6	Conclusões Gerais e Perspectivas	51
A	Fase dinâmica e fase geométrica	53
B	$e^{i\alpha\frac{N}{2}} z_1, z_2, \mathbf{p}\rangle = z_1e^{i\frac{\alpha}{2}}, z_2e^{i\frac{\alpha}{2}}, \mathbf{p}\rangle$	59

Capítulo 1

Introdução Geral

Computadores quânticos prometem realizar cálculos considerados impossíveis para máquinas comuns. Essa tecnologia teria grande importância no mundo contemporâneo. Por exemplo, mensagens criptografadas poderiam ser decodificadas por um computador capaz de decompor um número grande em seus fatores em um tempo razoável. Quase todos os métodos criptográficos usados para a proteção de dados são vulneráveis a algum tipo de algoritmo quântico [1].

A grande eficiência de um computador quântico se origina do fato de ele operar sobre informação representada na forma de *q-bits* (bits quânticos), em vez de bits normais. Um bit clássico comum pode valer 0 quando não há corrente elétrica no circuito ou 1 quando há, e a arquitetura padrão dos microchips determina rigorosamente essa dicotomia. Um *q-bit*, ao contrário, pode se apresentar no chamado estado de superposição ou mistura, que permite a coexistência de quantidades de 0 e 1. Podemos imaginar um estado de *q-bit* como um ponto na superfície de uma esfera. A esfera de Bloch [2]. O pólo norte representaria o 1 e o pólo sul, o 0. Todos os outros pontos intermediários são as eventuais superposições de 0 e 1. A liberdade que os *q-bits* possuem de vagar por toda a esfera ajuda a conferir aos computadores quânticos suas capacidades incomparáveis.

Muitos sistemas físicos podem ser utilizados para implementação dos *q-bits*. Por exemplo, o spin nuclear, o spin eletrônico e as duas polarizações de um fóton [3,4]. Neste último caso, no regime de baixíssimas intensidades (contagem de fótons), se um feixe linearmente polarizado a 45° com relação a direção horizontal passar através

de um cubo divisor de feixes que separa as polarizações ortogonais horizontal H e vertical V será dividido em dois feixes. Os estados dos feixes após o cubo serão descritos por estados intermediários entre H e V . Esse estado é representado como um ponto na superfície da esfera de Poincaré que será apresentada no próximo capítulo.

Os vórtices ópticos, feixes que possuem momento angular orbital (MAO) têm sido reconhecidos como sistemas potenciais para realização da computação quântica de vários q -bits [5-7]. Isto é possível porque eles podem possuir vários estados MAO em sua estrutura de fase, em contraste com os estados de polarização que são inerentemente binários. As fases geométricas adquiridas por estes estados de MAO após algumas transformações também podem ser utilizadas nesta forma de computação [8].

Neste trabalho apresentamos algumas medidas das fases geométricas adquiridas por vórtices ópticos e utilizamos estas fases para obtenção dos modos intermediários.

O capítulo 2 trata do Momento Angular Orbital da luz. Descreveremos em linhas gerais os modos transversos de propagação da luz, onde veremos que os modos de Laguerre-Gauss podem carregar MAO [9]. Apresentaremos dois métodos para obtenção experimental desses modos: o método holográfico e o método dos conversores astigmáticos que utilizam lentes cilíndricas. Veremos também que existe uma representação análoga à esfera de Poincaré [10], que representa os estados de polarização, para os modos Laguerre-Gauss e Hermite-Gauss de primeira ordem. Essa esfera é conhecida como esfera de Poincaré para os modos transversos de primeira ordem.

O capítulo 3 trata das fases geométricas em óptica. Apresentaremos o resultado obtido por S. Pancharatnam [11] em seu trabalho que trata das fases adquiridas por feixes monocromáticos clássicos que sofreram transformações cíclicas na polarização. Descreveremos em linhas gerais as fases obtidas por M. V. Berry [12] ao considerar a evolução cíclica e adiabática de um sistema quântico. Finalizaremos este capítulo discutindo matematicamente o papel dos elementos físicos responsáveis pelas transformações realizadas nos modos.

Os capítulos 4 e 5 tratam dos resultados experimentais obtidos aqui no Laboratório de Óptica Quântica do Instituto de Física da UFF. No quarto capítulo

apresentaremos as medidas das fases geométricas adquiridas pelos modos transversos de Laguerre-Gauss em evoluções cíclicas diferentes na esfera de Poincaré para os modos. No quinto capítulo apresentamos um método para obtenção controlada dos modos intermediários que são representados como pontos na esfera dos modos.

No último capítulo apresentaremos a conclusão geral destacando os principais resultados e as perspectivas futuras.

Capítulo 2

Momento Angular da Luz

2.1 Introdução

A teoria clássica da radiação eletromagnética prevê que a luz carrega energia¹, momento linear e momento angular. Esse momento angular pode ser decomposto [13] em momento angular intrínseco, que depende da polarização do feixe, e momento angular orbital, que depende da frente de onda deste. Feixes que possuem estruturas de fase singulares, podem ter o vetor de onda espiralando em torno da direção de propagação (figura 2.1), o que dá origem ao momento angular orbital.

Veremos neste capítulo as possíveis soluções da equação de onda de Maxwell no regime paraxial, de onde surgem os modos de Hermite-Gauss e os modos de Laguerre-Gauss. Uma representação para os modos Hermite-gaussianos e Laguerre-gaussianos de primeira ordem será apresentada na forma de uma esfera análoga à esfera de Poincaré. Finalmente, serão descritos dois métodos para obtenção de modos Laguerre-gaussianos e um método para verificação desses modos por interferometria.

¹O fluxo de energia é dado pelo vetor de Poynting que, em meios isotrópicos, é paralelo ao vetor de onda.

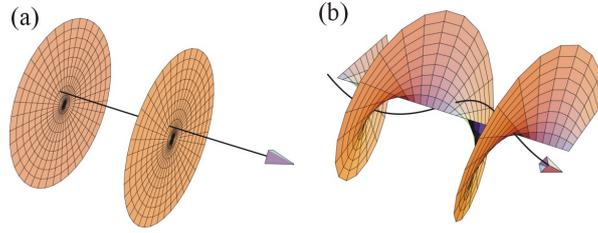


Figura 2.1: (a) Feixe com frente de onda plana e vetor de onda paralelo ao eixo de propagação. (b) Feixe com frente de onda helicoidal com vetor de onda espiralando.

2.2 A Equação Paraxial

A dinâmica dos campos eletromagnéticos em meios homogêneos livres de cargas e correntes é dada pelas equações de Maxwell no sistema gaussiano

$$\nabla \cdot \vec{E}(x, y, z) = 0; \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \vec{E}(x, y, z) = -\frac{\partial \vec{B}(x, y, z)}{\partial t}; \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(x, y, z) = 0; \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \vec{B}(x, y, z) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}(x, y, z)}{\partial t}, \quad (2.4)$$

que constituem um conjunto de quatro equações diferenciais parciais acopladas de primeira ordem para os campos elétrico \vec{E} e magnético \vec{B} .

Essas equações podem ser desacopladas em duas equações diferenciais de segunda ordem. Aplicando o rotacional na equação (2.2) obtemos:

$$\nabla^2 \vec{E} - \left(\frac{1}{c}\right)^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.5)$$

Equação que descreve a dinâmica do campo elétrico durante a propagação da luz em meios homogêneos.

Escrevendo o campo elétrico na forma $\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{e}u(\vec{r})e^{-i\omega t}$ onde \hat{e} é o vetor de polarização, $u(\vec{r})$ é a amplitude da onda e $e^{-i\omega t}$ é a fase espacial, obtemos a equação de Helmholtz

$$\nabla^2 u(\vec{r}) + k^2 u(\vec{r}) = 0. \quad (2.6)$$

Admitindo agora que o feixe se propaga ao longo da direção do eixo z , podemos escrever,

$$u(\vec{r}) = \psi(x, y, z)e^{ikz}, \quad (2.7)$$

onde e^{ikz} é a dependência espacial rápida e tem um período de um comprimento de onda $\lambda = 2\pi/k$ na direção de propagação.

A função $\psi(x, y, z)$ especifica a estrutura transversa do feixe. Esta estrutura transversa muda lentamente ao longo de z devido a difração. Para um feixe razoavelmente colimado, esta é lenta quando comparada ao termo e^{ikz} .

A substituição da equação (2.7) na equação de Helmholtz (2.6) produz:

$$\nabla^2\psi(x, y, z) + 2ik\hat{z} \cdot \nabla\psi(x, y, z) = 0. \quad (2.8)$$

Podemos matematicamente expressar a variação lenta de $\psi(x, y, z)$ por meio da *aproximação paraxial*

$$\left| \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \right| \ll \left| \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \right|, \left| \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \right| \text{ e } 2k \left| \frac{\partial\psi}{\partial z} \right|. \quad (2.9)$$

Com essa aproximação a equação de Helmholtz se reduz a:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + 2ik\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0. \quad (2.10)$$

conhecida como *equação paraxial*.

De um modo mais geral, podemos escrever a equação paraxial como

$$\nabla_t^2\psi(\vec{r}, z) + 2ik\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0. \quad (2.11)$$

Onde \vec{r} se refere às coordenadas transversas $\vec{r} = (x, y)$ ou $\vec{r} = (r, \theta)$ dependendo do sistema de coordenadas adotado (retangular ou cilíndrico), e ∇_t^2 é o operador laplaciano transversa que só envolve derivadas com relação às coordenadas transversas.

2.3 Ondas Esféricas Gaussianas

Nosso próximo passo será derivar uma equação analítica, seguindo a referência [14], para ondas esféricas gaussianas ou feixe gaussiano, uma solução que descreve os feixes da maioria dos lasers, e então mostrar que essa equação é solução da equação paraxial.

Onda Esférica Paraxial

Uma onda esférica divergindo de uma fonte pontual localizada em $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, é matematicamente descrita pela solução da equação de onda

$$E(\vec{r}; \vec{r}_0) = \frac{e^{-ikR(\vec{r}; \vec{r}_0)}}{R(\vec{r}; \vec{r}_0)},$$

onde $R(\vec{r}; \vec{r}_0) \equiv \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ é a distância da fonte ao ponto de observação e k é o número de onda dado por $k = 2\pi/\lambda$.

Utilizando a aproximação de Fresnel¹ para a teoria da difração, podemos descrever a distribuição do campo em uma posição $\vec{r} = (x, y, z)$, como mostrado na figura 2.2, tal que a distância $z - z_0$ seja muito maior que as distâncias entre as coordenadas transversas por

$$\psi(x, y, z) = \frac{C}{R(z)} \exp \left[-ik \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2R(z)} \right]. \quad (2.12)$$

C é uma constante de normalização e $R(z) = z - z_0$ é o raio de curvatura da onda esférica no plano z . Convencionamos $R > 0$ para ondas divergentes e $R < 0$ para ondas convergentes.

O raio de curvatura em \vec{r} pode ser escrito de uma forma mais geral como

$$R(z) = R_0 + z - z_0, \quad (2.13)$$

onde R_0 é o valor do raio de curvatura num plano anterior ao plano z_0 . (R_0 é nulo se a fonte estiver contida no plano anterior).

Essa variação quadrática da fase de ψ ao longo de um plano transversal representa simplesmente uma aproximação paraxial para a verdadeira superfície da esfera. Ou seja, esta aproximação serve apenas para pontos próximos ao eixo de propagação.

Coordenadas complexas para uma fonte pontual

¹A teoria de Fresnel diz que se expandirmos a distância $R(\vec{r}; \vec{r}_0)$ em uma série de potências da forma

$$R(\vec{r}; \vec{r}_0) = z - z_0 + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2(z - z_0)} + \dots,$$

então, podemos desprezar os termos de ordem maior que a quadrática nesta expressão no fator de fase de $E(\vec{r}; \vec{r}_0)$. No denominador $R(\vec{r}; \vec{r}_0)$ é trocado por $z - z_0$.

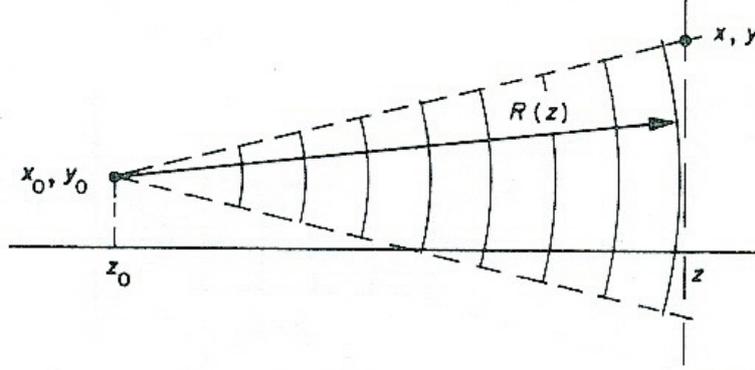


Figura 2.2: Onda esférica proveniente de uma fonte pontual [fig 16.3 [14]].

A onda esférica paraxial da equação (2.12) não descreve satisfatoriamente um feixe real porque a amplitude das ondas esféricas não decresce com a distância transversa do eixo de propagação. Isto é, os feixes, ao se estenderem para o infinito na direção transversa, carregam energia e potência infinitas através do plano z .

As coordenadas x_0, y_0, z_0 de localização da fonte são parâmetros constantes, logo a equação (2.12) satisfaz a equação paraxial independentemente da escolha destas coordenadas. Vamos considerar que as coordenadas são complexas.

Em particular, fazendo por simplicidade x_0 e y_0 ser nulos e convertendo a posição axial z_0 em um *número complexo* por subtração de uma quantidade complexa q_0 (isto é equivalente a trocar o raio de curvatura $R(z) = R_0 + z - z_0$ pela quantidade complexa $q(z) = z - (z_0 - q_0) = q_0 + z - z_0$).

Sendo assim, a onda divergente proveniente de uma fonte pontual complexa pode ser escrita, de acordo com a equação (2.12) como

$$\psi(x, y, z) = \frac{C}{z - z_0 + q_0} \exp \left[-ik \frac{x^2 + y^2}{2(z - z_0 + q_0)} \right], \quad (2.14)$$

com o raio de curvatura complexo dado por

$$q(z) = z - z_0 + q_0. \quad (2.15)$$

Separando a quantidade $1/q(z)$ em partes real e imaginária, na forma

$$\frac{1}{q(z)} \equiv \frac{1}{q_r(z)} - i \frac{1}{q_i(z)}, \quad (2.16)$$

podemos escrever a equação de ondas esféricas na forma

$$\psi(x, y, z) = \frac{C}{q(z)} \exp \left[-ik \frac{x^2 + y^2}{2q_r(z)} - k \frac{x^2 + y^2}{2q_i(z)} \right]. \quad (2.17)$$

O expoente resultante agora possui um termo imaginário correspondente a uma fase quadrática (onda esférica com raio de curvatura real); e um termo puramente real que dá o perfil gaussiano para amplitude do campo.

Feixes gaussianos esféricos

Normalizando e reescrevendo a equação (2.17) em função dos parâmetros comumente utilizados para descrever os campos de um laser, obtemos

$$\psi(x, y, z) = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{\omega(z)} \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{\omega^2(z)} \right] \exp \left[i(-kz + \arctan(\frac{z}{z_R}) - k \frac{x^2 + y^2}{2R(z)}) \right], \quad (2.18)$$

onde $R(z)$ continua sendo o raio de curvatura e $\omega(z)$ será definido logo abaixo. A equação (2.18) dá a solução de um *modo gaussiano esférico de mais baixa ordem* ou *modo fundamental* em meios homogêneos. As figuras 2.3(a-b) ilustram a distribuição de intensidade do modo fundamental.

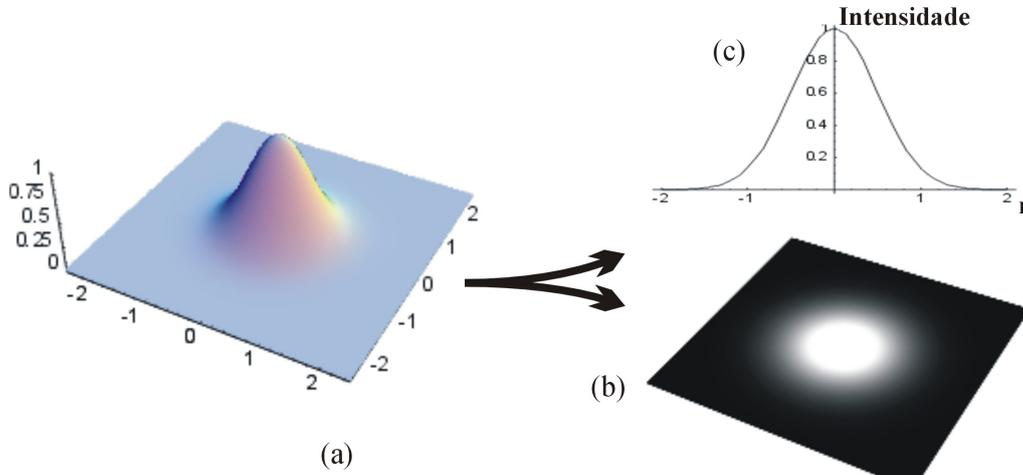


Figura 2.3: Perfil de intensidade do modo gaussiano: (a) superfície de intensidade; (b) distribuição de intensidade; (c) curva de intensidade com $y = 0$.

O raio de curvatura $R(z)$ e o parâmetro $\omega(z)$ em qualquer plano z são derivados do raio complexo $q(z)$ a partir da definição

$$\frac{1}{q(z)} \equiv \frac{1}{R(z)} - i \frac{1}{\pi \omega^2(z)}. \quad (2.19)$$

Em meios homogêneos temos

$$\omega(z) = \sqrt{\omega_0^2 \left(1 + \frac{z^2}{z_R^2}\right)}, \quad (2.20)$$

$$R(z) = z \left(1 + \frac{z^2}{z_R^2}\right). \quad (2.21)$$

O raio complexo em $z = 0$ é dado por

$$q_0 = i \frac{\pi \omega_0^2}{\lambda} = iz_R, \quad (2.22)$$

onde z_R é a distância de Rayleigh e ω_0 é a cintura do feixe.

Como podemos ver, o padrão do campo ao longo de todo feixe gaussiano é inteiramente caracterizado pelos parâmetros ω_0 e λ .

2.4 Modos Gaussianos de Ordens Superiores

A expressão do modo gaussiano que acabamos de ver é apenas a solução de mais baixa ordem de uma família infinita de soluções possíveis da equação paraxial. As soluções de ordens superiores podem ser os modos de Hermite-Gauss se resolvermos a equação paraxial em coordenadas retangulares ou os modos de Laguerre-Gauss em coordenadas cilíndricas.

Os Modos de Hermite-Gauss (HG)

A solução mais geral da equação paraxial (2.11) em coordenadas retangulares produz os *modos de Hermite-Gauss*

$$\begin{aligned} \psi_{n,m}(\vec{r}) = & \frac{A_{mn}}{\omega(z)} H_n \left(\sqrt{2} \frac{x}{\omega(z)} \right) H_m \left(\sqrt{2} \frac{y}{\omega(z)} \right) \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2}{\omega(z)^2} \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ -i \left(k \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} - \frac{n + m + 1}{2} \arctan \frac{z}{z_R} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Onde A_{mn} é uma constante de normalização, H_m e H_n são os polinômios de Hermite, $\omega(z)$ e $R(z)$ são dados por (2.20) e (2.21) respectivamente, e a ordem do modo é dada por $N = m + n$.

Note que se fizermos $m = n = 0$ na expressão acima, recaímos na solução do modo fundamental (2.18).

Os Modos de Laguerre-Gauss (LG)

Uma solução alternativa é obtida ao resolver a equação paraxial em coordenadas cilíndricas

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0. \quad (2.24)$$

Os *modos de Laguerre-Gauss* são as soluções da equação (2.24) e são escritos da seguinte forma

$$\begin{aligned} \psi_p^l(\vec{r}) = & \frac{A_p^l}{\omega(z)} \left[\frac{\sqrt{2}r}{\omega(z)} \right]^{|l|} L_p^l \left(\frac{2r^2}{\omega^2(z)} \right) \exp \left\{ -\frac{r^2}{\omega^2(z)} \right\} \times \\ & \times \exp \left\{ -i \left(\frac{kr^2}{2R(z)} + (2p + |l| + 1) \arctan \frac{z}{z_R} + l\phi \right) \right\}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

onde $p \geq 0$ é o índice radial (número de anéis) e l é o índice azimutal² do modo, este índice descreve a dependência azimutal da fase do feixe. A ordem do modo é definida como: $N = 2p + |l|$ com p e l sendo inteiros; L_p^l é o polinômio generalizado de Laguerre e as outras quantidades têm exatamente as mesmas definições feitas no modo fundamental.

Na figura 2.4 podemos ver alguns perfis de intensidade gerados pelos modos de HG e LG.

O termo $l\phi$ não é bem definido na origem do plano. Sendo assim, sempre que l for diferente de zero ocorrerá uma singularidade de fase na origem. A figura 2.1(b) ilustra a frente de onda de um feixe que possui singularidade de fase ao longo de um eixo paralelo a direção de propagação. Esta singularidade se apresentará como uma região escura.

Da mesma forma que os modos de Hermite-Gauss, os modos Laguerre-gaussianos fornecem uma base completa e geral para descrição de qualquer feixe em meios homogêneos. Assim, um modo de LG pode ser expandido em soluções de HG e vice-versa.

De fato, usando a relação entre os polinômios de Laguerre e Hermite [15] podemos decompor o modo de LG em um conjunto de modos de HG de mesma ordem como:

$$\psi_{nm}^{LG}(x, y, z) = \sum_{i=0}^n i^k b(n, m, k) \psi_{N-k, k}^{HG}(x, y, z), \quad (2.26)$$

²Na literatura o índice azimutal também é conhecido como *helicidade* ou *carga topológica*.

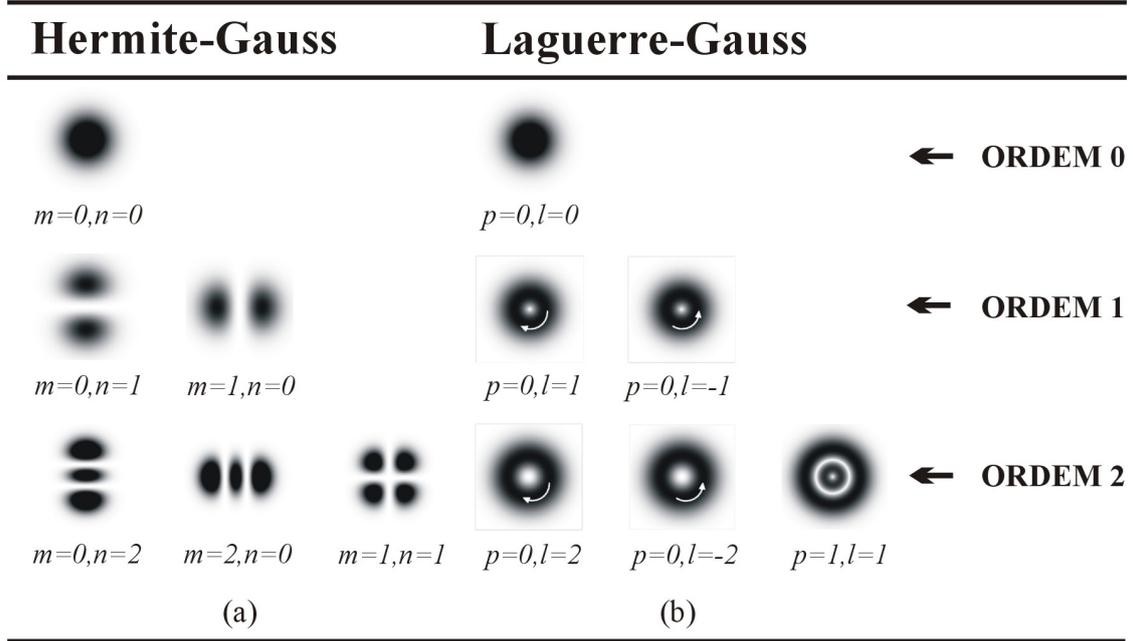


Figura 2.4: Perfis de intensidade dos modos de propagação: (a) modos de HG; (b) modos de LG.

com os coeficientes $b(n, m, k)$ reais dados por:

$$b(n, m, k) = \sqrt{\frac{(N-k)!k!}{2^n n! m!}} \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dt^k} [(1-t)^n (1+t)^m] |_{t=0}. \quad (2.27)$$

Os modos de primeira ordem são relacionados facilmente através da relação

$$LG_0^{\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (HG_{1,0} \pm iHG_{0,1}). \quad (2.28)$$

Vemos ainda que um modo de HG inclinado de $\pm 45^\circ$ pode ser decomposto usando uma relação simples entre os modos de HG:

$$HG_{0,1}^{\pm 45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} (HG_{1,0} \pm HG_{0,1}). \quad (2.29)$$

A figura 2.5 ilustra o significado das equações 2.28-29.

2.4.1 Representação geométrica dos modos: Esfera dos modos de primeira ordem

Os estados de polarização de um feixe monocromático podem ser representados em termos dos parâmetros de Stokes [16] na Esfera de Poincaré [10]. Analogamente,

$$\begin{aligned}
 & \left[\text{Mode 1} \right] = \left\{ \left[\text{Mode 2} \right] + i \left[\text{Mode 3} \right] \right\} \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 & \left[\text{Mode 1} \right] = \left\{ \left[\text{Mode 2} \right] - i \left[\text{Mode 3} \right] \right\} \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 & \left[\text{Mode 4} \right] = \left\{ \left[\text{Mode 2} \right] - \left[\text{Mode 3} \right] \right\} \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 & \left[\text{Mode 4} \right] = \left\{ \left[\text{Mode 2} \right] + \left[\text{Mode 3} \right] \right\} \frac{1}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}
 \tag{2.28} \tag{2.29}$$

Figura 2.5: *Decomposição dos modos*

podemos construir uma representação geométrica para os modos de HG, os modos LG e qualquer perfil intermediário que possa ser decomposto nesta base.

Em analogia com os parâmetros de Stokes para os estados de polarização da luz, os parâmetros dos modos são escritos como

$$\begin{aligned}
 o_1 &= \frac{I_{HG_{10}^{0^\circ}} - I_{HG_{10}^{90^\circ}}}{I_{HG_{10}^{0^\circ}} + I_{HG_{10}^{90^\circ}}}, \\
 o_2 &= \frac{I_{HG_{10}^{45^\circ}} - I_{HG_{10}^{135^\circ}}}{I_{HG_{10}^{45^\circ}} + I_{HG_{10}^{135^\circ}}}, \\
 o_3 &= \frac{I_{LG_0^1} - I_{LG_0^{-1}}}{I_{LG_0^1} + I_{LG_0^{-1}}}.
 \end{aligned}
 \tag{2.30}$$

Onde I_{HG} e I_{LG} são as intensidades dos modos na orientação angular indicada. Os parâmetros o_1 , o_2 e o_3 , que satisfazem

$$o_1^2 + o_2^2 + o_3^2 = 1,
 \tag{2.31}$$

são as coordenadas cartesianas de um espaço que representa os modos como pontos na superfície de uma esfera com raio unitário.

Os pólos norte e sul desta esfera representam os modos LG_0^1 e LG_0^{-1} que possuem termos de fase azimutal $\exp\{\pm i\phi\}$, respectivamente. Qualquer ponto sobre

esta esfera representa um modo de primeira ordem que pode ser escrito como uma superposição dos modos LG. Em particular, os pontos sobre o equador representam os modos HG_{10} nas diversas inclinações de acordo com a fase relativa entre LG_0^1 e LG_0^{-1} . A figura 2.6 ilustra a esfera de Poincaré e a esfera dos modos de primeira ordem.

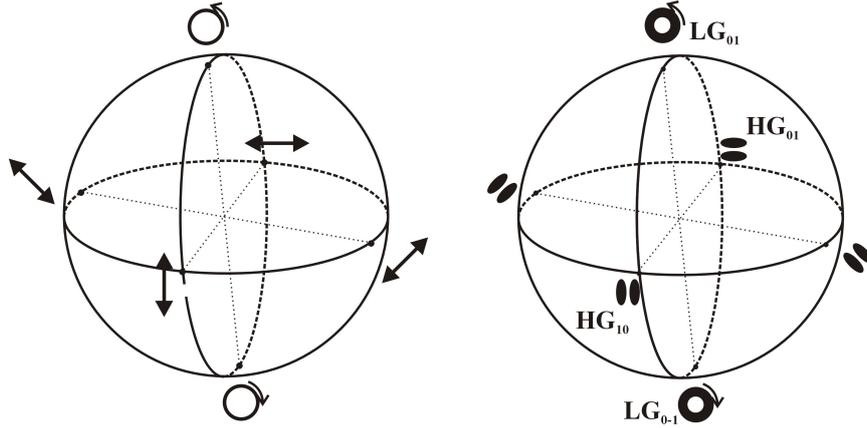


Figura 2.6: *Esfera de Poincaré para os estados de polarização e para os modos de primeira ordem.*

Essa equivalência nas representações dos estados de polarização e estados de MAO foi inicialmente proposta por Padgett et al [10]. A partir daqui, descreveremos dois métodos para obtenção experimental dos modos HG e LG de primeira ordem a partir de um laser oscilando no modo fundamental.

2.4.2 Produção e Detecção dos Modos

Método holográfico

Como sabemos, a maioria dos lasers comerciais produzem feixes com frentes de ondas aproximadamente planas e um perfil de intensidade gaussiano. O método holográfico nos permite produzir feixes com singularidades de fase (modos de LG) a partir de uma grade de difração gerada computacionalmente, as quais denominaremos *placas zonais espirais* (PZE).

Estas placas [17] são os negativos de fotografias dos padrões gerados computacionalmente e são apresentados na figura 2.7(a). Estes padrões possuem modulação

espaical do tipo $\cos\left(\frac{\alpha r^2 + l\theta}{2}\right)$, onde $\alpha = kr^2/2R$ é a escala radial e l é a helicidade do feixe. Os valores que tornam o cosseno igual a zero

$$\pm l\theta = 2(n + 1/2)\pi - \frac{kr^2}{2R}, \rightarrow (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (2.32)$$

indicam a fronteira entre as franjas claras e escuras. O programa comercial MATHEMATICA[®] pinta de preto as regiões onde o termo de modulação é negativo criando uma PZE binária. As figuras 2.7(a-c) ilustram Placas com helicidade 0, +1 e +2.

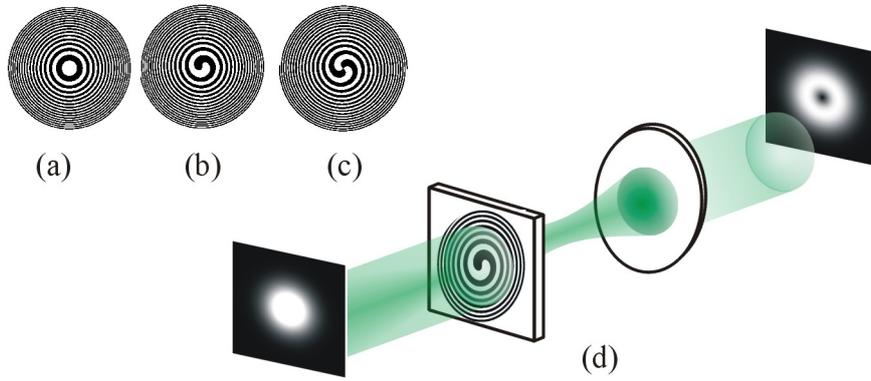


Figura 2.7: (a) Placa zonal de Fresnel; (b) e em (c) Placas Zonais Espirais com helicidade +1 e +2, respectivamente, que produzem LG_0^1 e LG_0^2 ; (d) Montagem experimental para a geração de um modo LG_0^1 .

Estas placas operam focalizando o feixe do mesmo modo que as placas zonais de Fresnel (figura 2.7(a)) e provocando a quebra de simetria azimutal da fase para placas com helicidade não nula (figura 2.7 (b,c)) , sendo necessária a recolimação do mesmo após a passagem pela PZE. A recolimação é realizada por uma lente esférica na configuração confocal com a placa. A figura 2.7 (d) ilustra o funcionamento da PZE.

Na figura 2.8 vemos um outro tipo de holograma, também chamado de máscara de amplitude, com uma modulação espacial da forma $\cos(\alpha r^2 + l\theta) = \cos(\alpha x + l\theta)$ que funciona como uma rede de difração cujas ordens de difração são os modos de LG com diferentes helicidades. Esta modulação espacial produz um defeito topológico responsável pela geração dos modos LG nas ordens de difração.

Este método de produção de feixes com singularidade de fases é muito utilizado devido a sua praticidade e ao baixo custo. Porém, ele pode apresentar inconvenientes

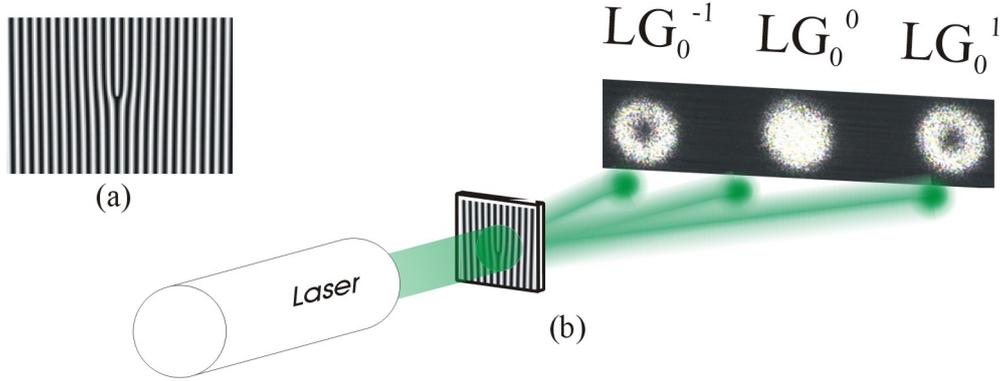


Figura 2.8: (a) Máscara bifurcada; (b) A Máscara ao difratar um laser produz modos LG nas diferentes ordens de difração.

para experimentos que necessitem de feixes intensos¹. Estas máscaras absorvem grande parte da intensidade, de modo que no regime de grande intensidade o plástico do filme derrete.

Método dos conversores astigmáticos

A inconveniência da perda de intensidade do método holográfico pode ser contornada com o uso dos conversores de modos [18]. Um conversor de modos [15] consiste de um arranjo de duas lentes cilíndricas que transforma modos HG de ordem superior em modos LG que possuem singularidades de fase.

Vimos anteriormente (equação 2.26) que um modo LG pode ser decomposto em termos dos modos de HG e vice-versa. Utilizando esta característica, o *conversor de modos* funciona defasando diferentemente os termos da decomposição. A fase relativa é obtida explorando-se a fase de *Gouy* [19]-[20], que é dada por

$$(n + m + 1) \arctan(z/z_R), \quad (2.33)$$

para um feixe gaussiano e isotrópico com a cintura em $z = 0$. Esta fase fica explícita nas equações (2.23) e (2.25) quando escrevemos $p = \min(n, m)$ e $l = n - m$. As contribuições desta fase são iguais para cada direção transversa à propagação. Isto não acontece se o feixe for astigmático, pois possui diferentes distâncias de Rayleigh

¹O feixe produzido na PZE (bifurcada) tem aproximadamente 23%(6%) da intensidade de operação do laser.

em planos ortogonais entre si ($z_{R_x} \neq z_{R_y}$) e paralelos à direção de propagação². Neste caso, a fase de Gouy contribui diferentemente para cada direção transversa.

Tomemos como exemplo as lentes cilíndricas orientadas ao longo do eixo x . A amplitude de um modo HG nas coordenadas (x, y) pode ser considerada separadamente nos planos (x, z) e (y, z) caracterizados por diferentes distâncias de Rayleigh. Deste modo, a fase de Gouy é escrita como

$$(n + 1/2) \varphi_x(z) + (m + 1/2) \varphi_y(z) \quad (2.34)$$

com

$$\varphi_x(z) = \arctan(z/z_{R_x}) \quad (2.35)$$

$$\varphi_y(z) = \arctan(z/z_{R_y}). \quad (2.36)$$

Onde z_{R_x} e z_{R_y} são as distâncias de Rayleigh nos planos (x, z) e (y, z) , respectivamente.

A operação do conversor nos modos de primeira ordem é naturalmente descrita na base HG_{10} e HG_{01} como vimos nas equações (2.28) e (2.29). Ele simplesmente introduz uma diferença de fase entre as componentes do feixe de entrada nesta base, conforme ilustrado na figura 2.9.

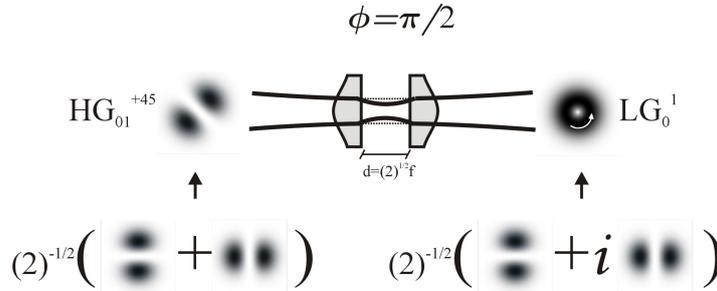


Figura 2.9: Conversão de um modo $HG_{10}^{45^\circ}$ em LG_0^1 através de um conversor $\pi/2$.

Assim, ao introduzirmos um modo $HG_{01}^{\pm 45^\circ}$ em um conversor de lentes cilíndricas orientadas ao longo do eixo x , o conversor produzirá um modo $LG_0^{\pm 1}$ se a defasagem introduzida entre as componentes HG_{01} e HG_{10} que geram $HG_{01}^{\pm 45^\circ}$ for de $\pi/2$. Introduzindo uma diferença adicional de π na fase entre as componentes do modo

²Um feixe astigmático pode ser produzido ao passar-se um feixe isotrópico por uma lente cilíndrica.

$LG_0^{\pm 1}$ ocorre uma mudança na helicidade de LG_0^{+1} para LG_0^{-1} , ou vice versa, figura 2.10.

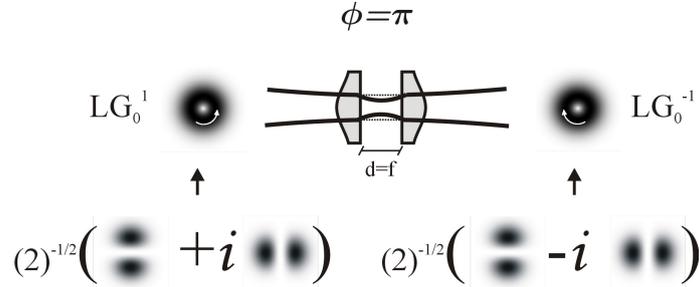


Figura 2.10: Conversão de um modo LG_0^1 em LG_0^{-1} através de um conversor π .

A fase ganha no conversor depende da distância entre as lentes cilíndricas [15]. O conversor explora a fase de Gouy fazendo o feixe ser astigmático somente em uma região confinada, de forma que ele é isotrópico fora desta região. Enquanto o feixe atravessa esta região, uma diferença de fase definida é introduzida entre as componentes HG. Num conversor $\pi/2$ de lentes idênticas com distância focal f , a distância entre as lentes vale $d = \sqrt{2}f$. Um par de lentes esféricas é necessário ajustar a cintura do feixe com a cintura característica do conversor que é determinada a partir da distância focal das lentes. Num caso particular onde um feixe astigmático com $z_{Rx} \neq z_{Ry}$ e cinturas coincidentes, uma lente cilíndrica localizada na posição onde os raios transversos do feixe são iguais torna-o isotrópico. A posição onde os raios de curvatura coincidem é modificada quando o feixe passa por uma lente esférica. Em geral, utilizamos as lentes esféricas na construção destes conversores para ajustar o raio característico do conversor com o raio do feixe. Este ajuste é conhecido como *casamento de modos*. No conversor π a distância entre as lentes vale $d = 2f$ e o feixe de entrada deve ser colimado.

Outro dispositivo importante é o prisma de ângulo reto ou prisma de Dove [21]. Trata-se de um componente óptico que inverte qualquer imagem, em particular, pode inverter a imagem de um feixe LG (figura 2.11). Logo ele produz o mesmo efeito que o conversor π com uma simples passagem.

Observando que os conversores $\pi/2$ e π para os feixes LG e HG executam papéis análogos às lâminas de quarto de onda e meia onda, respectivamente, para os estados

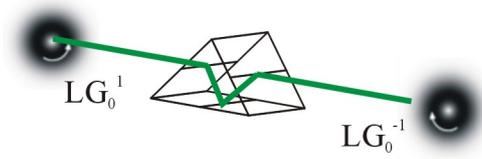


Figura 2.11: Prisma de Dove

de polarização, podemos concluir que qualquer trajetória mapeada na esfera de Poincaré com o uso de lâminas pode ser executada na esfera dos modos.

O uso dos conversores de modos requer feixes de ordem superior ao modo fundamental. Inicialmente, esses feixes eram produzidos através da introdução de fios na cavidade do laser. Essa técnica diminui a intensidade do feixe e pode danificar o laser.

Contornamos essa dificuldade seguindo a referência [18] que aproxima um modo HG_{01} por dois modos HG_{00} copropagantes, defasados de π entre si e lateralmente deslocados de uma distância igual à cintura dos feixes. Essa aproximação pode ser obtida através do arranjo experimental mostrado na figura 2.12.

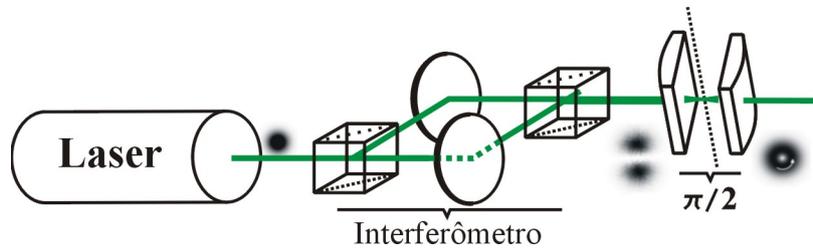


Figura 2.12: *Produção de modos de primeira ordem com aproximadamente 50% da intensidade inicial do laser.*

O interferômetro é responsável pela produção do modo HG_{01} . A defasagem e o deslocamento lateral entre os dois modos HG_{00} são controlados ao variarmos o caminho óptico entre os dois braços do interferômetro com o deslocamento de um dos espelhos fixo a um estágio móvel.

As máscaras de fase [22], que não serão discutidas neste trabalho, também produzem feixes que carregam MAO e são muito utilizadas em experimentos que necessitam de feixes intensos. Uma outra maneira realizada recentemente por L. Marrucci

et al [23] produz feixes com MAO a partir de um feixe circularmente polarizado que atravessa um meio não homogêneo e anisotrópico.

Detecção dos modos

A verificação do perfil anelar de intensidade, como os da figura 2.4, não é suficiente para determinar se esses feixes possuem singularidade de fase, ou seja, momento angular orbital. É necessária uma análise complementar da estrutura de fase da frente de onda. Essa análise pode ser feita a partir do padrão de interferência desse feixe.

A figura 2.14(a) ilustra a montagem de um interferômetro de Michelson. O interferômetro é ligeiramente desalinhado a fim de produzirmos franjas de interferência espacial. A caixa nesta figura mostra a interferência, calculada no MATHEMATICA[®], de dois feixes LG_0^1 ligeiramente desalinhados, de modo que a singularidade de fase de um seja iluminada pelo anel de intensidade do outro. Nas figuras 2.13(b,c) são mostradas as imagens correspondentes às distribuições de intensidade de vários modos LG produzidos pela PZE, com seus respectivos padrões de interferência.

Se interferimos um modo LG com uma onda esférica (figura 2.14 (a)), obtemos os padrões de interferência das figuras 2.14(b). Na figura 2.14(a) o feixe LG_0^0 proveniente da PZE é focalizado por uma lente esférica e interfere após a focalização com LG_0^l , que se propaga pelo outro braço. As l espirais observadas garantem que os modos interferidos com a onda esférica são de fato modos de Laguerre-Gauss com helicidade l .

2.5 Conclusão

Iniciamos este capítulo obtendo uma equação que descreve os feixes provenientes da maioria dos lasers comerciais. Vimos ainda que os modos de Hermite-Gauss (HG) e Laguerre-Gauss (LG) também descrevem a propagação de feixes luminosos e que é possível construir uma representação geométrica análoga à esfera de Poincaré para esses modos. Os modos de LG com helicidade diferente de zero também são conhecidos como vórtices ópticos e possuem momento angular orbital. Discutimos o método holográfico para obtenção desses modos, desde a construção das máscaras de amplitude até seu funcionamento. Vimos também que os conversores astigmáticos

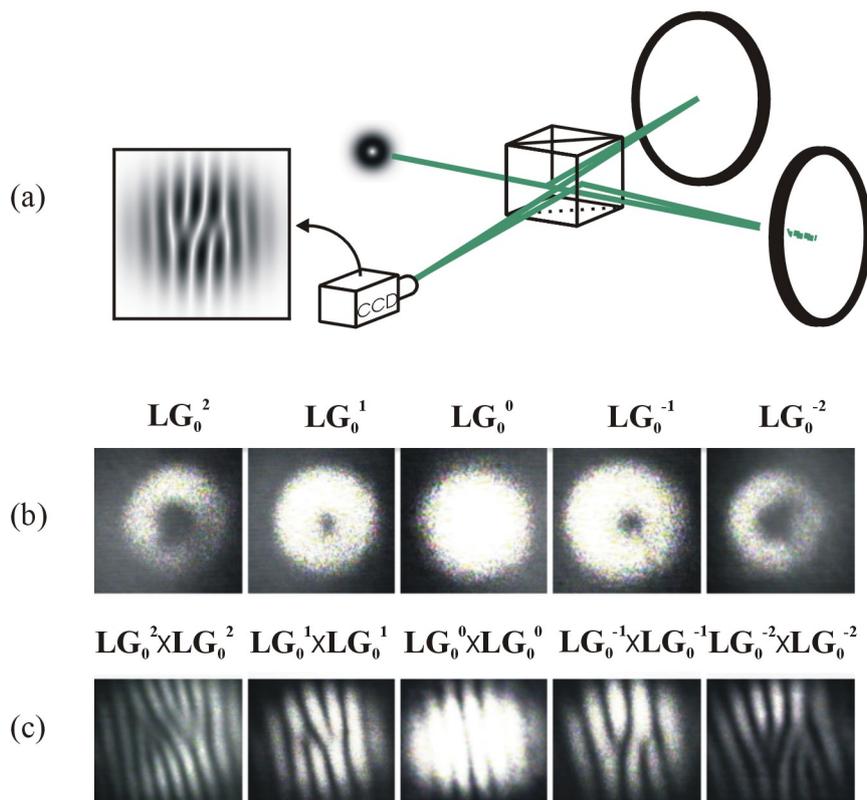


Figura 2.13: (a)interferômetro de Michelson; (b) distribuição de intensidade dos modos produzidos por uma PZE bifurcada; (c) Interferência dos modos.

podem ser utilizados para conversão entre modos LG e HG. Finalizamos esse capítulo descrevendo o método interferométrico de verificação desses modos.

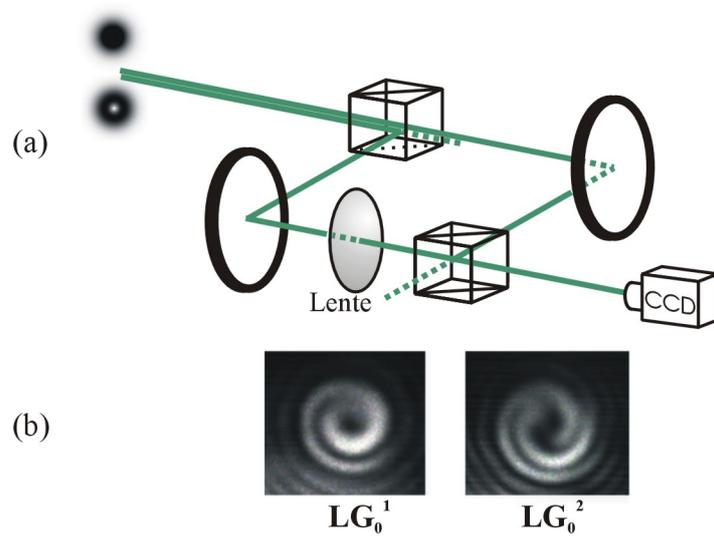


Figura 2.14: (a)interferômetro de Mach-Zehnder (no quadrado, padrão simulado);
(b) Interferência entre modos LG_0^1 e LG_0^2 com uma onda divergente.

Capítulo 3

Fases Geométricas

3.1 Introdução

No capítulo anterior obtivemos a equação para o modo fundamental que é a solução de mais baixa ordem da equação paraxial, que possui os modos de HG e LG como soluções de ordem superior em coordenadas retangulares e cilíndricas, respectivamente. Além de descrever métodos de obtenção desses modos, vimos também que eles podem ser representados como pontos da superfície da Esfera dos Modos de Primeira Ordem.

Neste capítulo, veremos que transformações como a que os conversores π e $\pi/2$ realizam em um determinado modo são representadas por trajetórias na superfície da esfera dos modos e que o modo guarda uma memória da evolução sofrida.

Em princípio, é impossível diferenciar os estados final e inicial de um sistema clássico que passou por uma evolução cíclica, ou seja, uma evolução em que o sistema retorna ao seu estado inicial após algum tempo. Entretanto, à luz da mecânica quântica, em 1984, M. V. Berry [12] atentou para um aspecto dos sistemas dinâmicos que sofrem evoluções cíclicas que até então era ignorado. Ele verificou que o cálculo do fator de fase da função de onda não depende simplesmente da evolução temporal do hamiltoniano. A função de onda desse sistema quântico retém, além do fator de fase dinâmica que depende da evolução temporal do hamiltoniano, um fator de fase conhecido como *fase geométrica* que depende da trajetória no espaço dos estados.

Assim, a fase total adquirida por um estado após uma evolução é a soma das fases geométrica e dinâmica.

Apesar da formulação inicial ter sido feita para sistemas quânticos, sua generalização para sistemas clássicos originou debates referentes a sua origem física: quântica ou clássica.

3.2 Fase de Pancharatnam

Em 1956, S. Pancharatnam [11] já havia antecipado a existência de fases geométricas ao determinar a mudança de fase observada em um feixe de luz polarizado que passou por uma sequência de polarizadores tal que sua direção de polarização final é a mesma que a inicial. Esta fase pode ser medida por interferência deste feixe com outro feixe coerente.

Ao definir a diferença de fase entre dois estados diferentes e polarizados, Pancharatnam pode descrever a mudança de fase sofrida por um feixe polarizado após passar por um polarizador. Os estados de polarização de dois feixes monocromáticos com momentos idênticos estão em fase se a superposição desses dois estados produz intensidade máxima. Assim, fazendo $|A\rangle$ e $|B\rangle$ representarem os vetores de estado de polarização de fótons em dois feixes, a intensidade fica proporcional a

$$\begin{aligned} (\langle A| + \langle B|)(|A\rangle + |B\rangle) &= 2 + \langle A|B\rangle + \langle B|A\rangle \\ &= 2 + 2|\langle A|B\rangle| \cos \{ \text{fase} \langle A|B\rangle \}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

onde a intensidade é máxima quando $\text{fase} \langle A|B\rangle = 0$. No caso de estados não-ortogonais¹ a diferença de fase entre $|A\rangle$ e $|B\rangle$ é associada com a fase do produto interno dos estados.

Pancharatnam usou esta definição de diferença de fase para analisar uma sequência de três mudanças na polarização de um feixe que passa por polarizadores. Após esta sequência de transformações, a polarização final é a mesma que a inicial, ou seja, o estado $|A\rangle$ evolui para $|B\rangle$ depois para $|C\rangle$ e retorna para $|A'\rangle$ que possui a mesma polarização inicial. A figura 3.1 ilustra estas transformações.

¹Essa definição não é válida para estados ortogonais, pois eles não interferem entre si tornando a diferença de fase indeterminada.

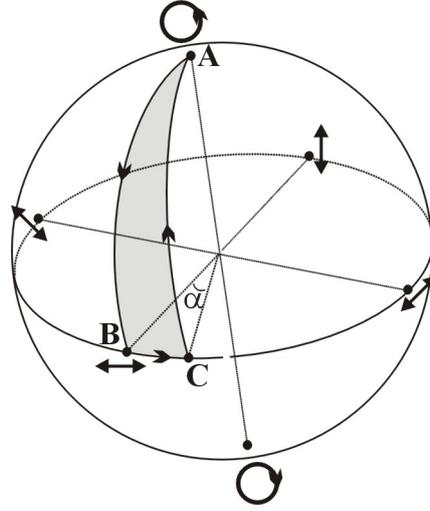


Figura 3.1: *Evolução cíclica na esfera de Poincaré.*

Considerando a natureza quântica da luz, A descreve o estado de uma onda luminosa polarizada representando o conjunto de valores necessários para descrever um estado completamente (autovalores de um Conjunto Completo de Observáveis que Comutam CCOC). Todos os valores de $|A'\rangle$ com exceção da fase de polarização são idênticos aos de $|A\rangle$. Portanto, esta não é uma evolução cíclica. Assim, a diferença de fase observada vem da diferença de fase entre os estados inicial e final de um fóton

$$\langle \psi | \psi' \rangle = e^{-\frac{i}{2} \alpha_{ABC}}. \quad (3.2)$$

onde α_{ABC} é o ângulo sólido compreendido pelo triângulo geodésico na esfera de Poincaré.

Se as trajetórias envolverem somente trajetórias geodésicas ("Grandes círculos"), então a fase é puramente geométrica. Trajetórias não geodésicas introduzem fase dinâmica que surge da birefringência do meio óptico [27]. Uma discussão acerca desta fase esta feita no apêndice A.

Através de álgebra vetorial de Jones [25] podemos descrever facilmente as transformações (transformações unitárias que preservam a intensidade) que uma lâmina de onda realiza em um feixe. Estas transformações obedecem as propriedades de simetria do grupo $SU(2)$. Todas as análises feitas por Pancharatnam podem também ser feitas através desse formalismo. Na notação de Jones os pontos na esfera

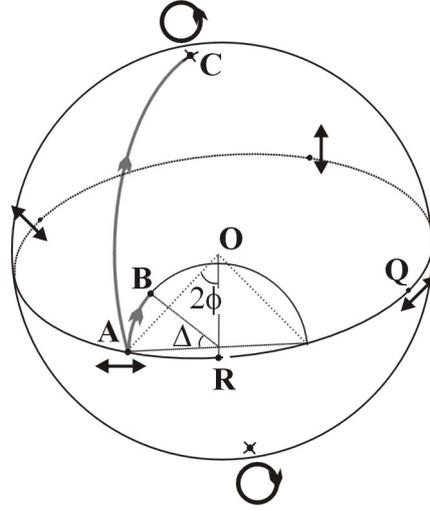


Figura 3.2: As trajetórias \widehat{AB} e \widehat{AC} ilustram as transformações realizadas por lâminas birrefringentes. Em \widehat{AB} (\widehat{AC}), a lâmina orientada a ϕ ($\pi/4$) em relação a horizontal, defasa de Δ ($\pi/2$) as componentes do feixe.

de Poincaré correspondentes a qualquer estado de polarização são dados por

$$|\Psi\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2)e^{-i\phi/2} \\ \text{sen}(\theta/2)e^{+i\phi/2} \end{bmatrix}.$$

Os pólos norte e sul representam os estados com polarizações circulares à direita $|\mathcal{D}\rangle = (i \ 0)^T$ e esquerda $|\mathcal{E}\rangle = (0 \ i)^T$, respectivamente. Os pontos ao longo do equador representam os estados de polarização linear nas diversas orientações. A convenção padrão para representação das transformações são trajetórias na superfície da esfera correspondentes a rotações em torno de um eixo que passa através do centro da esfera. A ação de duas placas de onda em um feixe luminoso polarizado na horizontal estão representadas na figura 3.2.

3.3 Fases geométricas na mecânica quântica

Ao estudar processos lentamente variáveis ("adiabáticos") na mecânica quântica, M. V. Berry verificou um outro tipo de fase análoga a (3.2) também dada por um ângulo sólido. Ele investigou a evolução temporal da equação de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = h(\mathbf{R}(t))|\psi(t)\rangle \tag{3.3}$$

de um sistema quântico cujo hamiltoniano h depende de um conjunto de N parâmetros $\mathbf{R}(t) = (X(t), Y(t), \dots)$ lentamente variáveis, com o estado inicial dado por

$$|\psi(0)\rangle = |n; \mathbf{R}(0)\rangle. \quad (3.4)$$

Este é o estado estacionário dado pela equação de autovalores de h

$$h(\mathbf{R}(0))|n; \mathbf{R}(0)\rangle = E_n(\mathbf{R}(0)) |n; \mathbf{R}(0)\rangle. \quad (3.5)$$

O estado quântico $|\psi(t)\rangle$ na representação de Schrödinger continua sendo um autoestado do hamiltoniano instantâneo $h(\mathbf{R}(t))$, se este hamiltoniano depende de parâmetros lentamente variáveis e é não degenerado. Deste modo

$$|\psi(t)\rangle = e^{-(i/\hbar) \int_0^t dt' E_n(t') + i\gamma_n(t)} |E_n(\mathbf{R}(t))\rangle, \quad (3.6)$$

onde

$$\gamma_n(t) = \int_{\mathbf{R}(0)}^{\mathbf{R}(t)} d\mathbf{R}' \cdot \langle n; \mathbf{R}' | i\nabla_{\mathbf{R}'} | n; \mathbf{R}' \rangle, \quad (3.7)$$

e $\nabla_{\mathbf{R}'}$ é o operador gradiente que atua no espaço dos parâmetros R .

Berry observou que, para o caso do transporte adiabático ao longo de uma trajetória fechada no espaço dos parâmetros, o fator de fase $e^{i\gamma(t)}$ não é integrável, isto é, em geral não pode ser escrito como uma função de \mathbf{R} , e em particular não é unívoca ao longo da curva fechada: $e^{i\gamma(T)} \neq e^{i\gamma(0)}$. Entretanto, reescrevendo a equação (3.8) como

$$\gamma_n(t) = \oint_C d\mathbf{R} \cdot \langle n; \mathbf{R} | i\nabla_{\mathbf{R}} | n; \mathbf{R} \rangle, \quad (3.8)$$

Berry evidenciou que o fator acima, que a partir daqui será chamado de *fase de Berry*, independe da parametrização.

Diferentemente da fase dinâmica $\{-1/\hbar \int dt' E_n\}$, a fase de Berry $\gamma_n(t)$ não depende do tempo que o sistema demora para descrever a curva fechada.

No Apêndice B discutiremos com mais detalhes, seguindo a referência [24], o fator de fase geométrica.

3.3.1 Aplicação da fase geométrica a uma partícula de spin $1/2$

Como aplicação desta fase, Berry analisou o exemplo de uma partícula de spin- s interagindo com um campo magnético \mathbf{B} através do hamiltoniano

$$h(\mathbf{B}) = \kappa \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}, \quad (3.9)$$

onde, κ é uma constante que envolve a razão giromagnética e \mathbf{S} é o operador de spin cujos n autovalores entre $-s$ e s têm espaçamento unitário [26]. Em particular, ele verificou que a equação (3.8) fornece a mudança de fase de um autoestado $|n; \mathbf{B}(t)\rangle$ de $h(t)$ quando o campo magnético varia lentamente, portanto, quando o spin precessiona lentamente ao longo de uma curva fechada Γ no espaço de \mathbf{B} . Em particular, quando $s = 1/2$ e o estado inicial é $|m_s = 1/2; \mathbf{B}(0)\rangle$, a fase obtida é o ângulo sólido delimitado pela curva Γ na figura 3.3.

Em 1987 J. Anandan e L. Stodolsky [27] deram uma interpretação simples para esta fase baseados na teoria de grupos. Eles consideraram que os pontos na esfera representam as direções possíveis do campo \mathbf{B} . A direção do campo magnético é representada por um vetor perpendicular a superfície da esfera e é paralelo ao eixo z de uma tríade. Assim, em uma evolução do campo \mathbf{B} a tríade é transportada ao longo de Γ e os eixos x e y são transportados paralelamente.

A figura 3.3 ilustra o transporte paralelo de um vetor ao longo da trajetória Γ na esfera. Os vetores x e y da tríade partem do ponto vermelho (pólo norte), e são transportados ao longo da trajetória permanecendo o mais paralelo possível à direção que ele apontava antes de cada deslocamento infinitesimal (o vetor x sempre apontando para o sul durante toda a evolução). Depois de completar a curva fechada, os vetores voltam ao ponto inicial apontando em outra direção. Se a tríade retorna à posição inicial em $\Gamma(T) = \Gamma(0)$, então o ângulo sólido γ delimitado por esta curva é a fase geométrica adquirida pelos estados que são representados por x e y .

Como vimos anteriormente, cada autoestado adquire as fases dinâmica (durante a evolução temporal do hamiltoniano) e geométrica. O fator de fase adicional adquirido por cada autoestado é interpretado como *fase geométrica* devido à rotação da tríade em torno de z . Esta rotação é descrita pela aplicação do operador de rotação no estado, isto é, $e^{i\alpha J_z} |n\rangle = e^{i\alpha n} |n\rangle$.

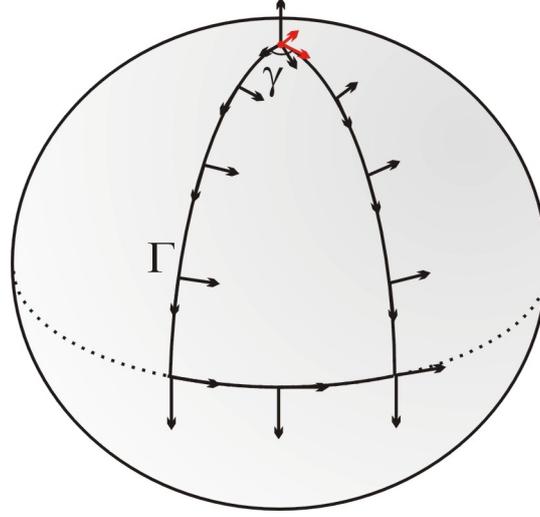


Figura 3.3: Transporte paralelo na superfície da esfera.

3.3.2 A descrição quântica da fase de Pancharatnam

Uma onda eletromagnética clássica é aproximada em eletrodinâmica quântica por um estado coerente. No calibre de Coulomb o potencial vetor [13] de uma onda eletromagnética pode ser escrito como

$$\mathbf{A} = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\lambda=1}^2 \left[a_{\mathbf{k},\lambda} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} + a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-\omega t)} \right] \mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda}, \quad (3.10)$$

onde \mathbf{k} é o vetor de onda, ω a frequência, $\mathbf{e}_{\mathbf{k},\lambda}$ são os vetores reais de polarização perpendiculares a \mathbf{k} e $a_{\mathbf{k},\lambda}$, $a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger$ são os operadores de aniquilação e criação dos modos (\mathbf{k}, λ) . Os campos elétrico \mathbf{E} e magnético \mathbf{B} correspondentes a \mathbf{A} são $\mathbf{E} = -\partial\mathbf{A}/\partial t$ e $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, respectivamente. O estado coerente que corresponde ao feixe de Pancharatnam

$$|z_1, z_2, \mathbf{p}\rangle = e^{-\frac{1}{2}(|z_1|^2 + |z_2|^2)} e^{(z_1 a_{\mathbf{p},1}^\dagger + z_2 a_{\mathbf{p},2}^\dagger)} |0\rangle \quad (3.11)$$

é um autoestado de $a_{\mathbf{p},\lambda}$ com autovalores z_λ . Portanto,

$$\begin{aligned} \langle z_1, z_2, \mathbf{p} | \mathbf{A} | z_1, z_2, \mathbf{p} \rangle &= 2|z_1| \cos(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \theta_1) \mathbf{e}_{\mathbf{p},1} \\ &+ 2|z_2| \cos(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \theta_2) \mathbf{e}_{\mathbf{p},2} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Onde $|z_1|\omega$ e $|z_2|\omega$ são as amplitudes do campo elétrico nas direções ortogonais e θ_1 e θ_2 são os ângulos de fase de z_1 e z_2 , respectivamente.

Podemos representar o estado de polarização de um fóton $(z_1 a_{\mathbf{p},1}^\dagger + z_2 a_{\mathbf{p},2}^\dagger) |0\rangle$, como um spinor de duas componentes

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix},$$

em um espaço vetorial bidimensional com o produto interno usual satisfazendo as propriedades do espaço de Hilbert. A esfera de Poincaré corresponde ao espaço dos estados de projeção. Cada fóton correspondente ao modo (\mathbf{p}, μ) passa por um polarizador e sofre uma transição de estado para (\mathbf{p}, μ') . O novo estado é obtido através da projeção do antigo estado no estado que passa pelo polarizador. Isto corresponde ao transporte paralelo do estado inicial ao longo da menor geodésica que une dois pontos na esfera de Poincaré. Portanto, usando argumentos similares aos usados por Anandan e Stodolsky [27], o estado final é obtido através da aplicação do operador $e^{i\gamma J}$ no estado inicial do fóton. Aqui γ é o ângulo sólido compreendido entre o polígono geodésico definido por uma sequência de estados de polarização na esfera de Poincaré, e $J = N_\mu/2$, onde $N_\mu = a'_{\mathbf{p},\mu} a_{\mathbf{p},\mu}$ é o operador número para o modo (\mathbf{p}, μ) . Conforme mostramos no Apêndice B, o estado final do campo eletromagnético é

$$e^{i\gamma J} |z_1, z_2, \mathbf{p}\rangle = |z_1 e^{i\frac{\gamma}{2}}, z_2 e^{i\frac{\gamma}{2}}, \mathbf{p}\rangle. \quad (3.13)$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \langle z_1, z_2, \mathbf{p} | \mathbf{A} | z_1, z_2, \mathbf{p} \rangle &= 2|z_1| \cos(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \theta_1 + \gamma/2) \mathbf{e}_{\mathbf{p},1} \\ &+ 2|z_2| \cos(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \omega t + \theta_2 + \gamma/2) \mathbf{e}_{\mathbf{p},2}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

A comparação desta expressão com a equação (3.12) mostra que $\gamma/2$ é a fase clássica observada por Pancharatnam.

3.4 Fases geométricas na conversão astigmática de feixes gaussianos

No capítulo anterior vimos que podemos realizar transformações entre as famílias dos modos Hermite-Gauss e Laguerre-Gauss. Este procedimento inicialmente foi

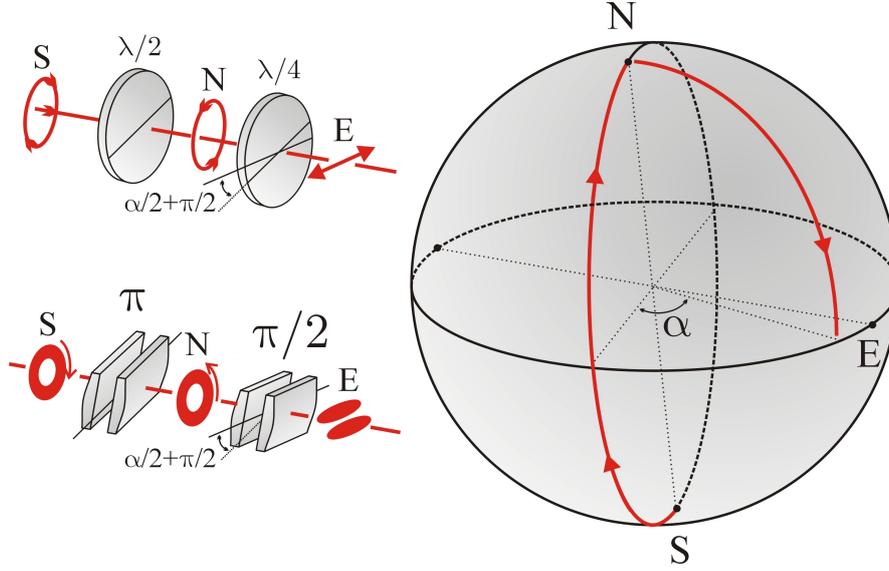


Figura 3.4: Transformações (a) na polarização (b) nos modos. (c) trajetória referente às transformações em uma mesma esfera.

proposto e implementado por Allen et al [9] em 1992. Pouco tempo depois, van Enk [29] propôs a existência de fases geométricas associadas às transformações de modos.

De forma análoga aos estados de polarização de um feixe, as transformações realizadas pelos conversores $\pi/2$ e π são representadas por trajetórias na esfera dos modos de primeira ordem ao longo de um meridiano. A figura 3.4 ilustra na mesma esfera duas transformações realizadas em um feixe polarizado circularmente à direita e em um modo LG_0^{-1} .

A partir deste ponto, descreveremos teoricamente a construção do experimento [6] de medida da fase geométrica adquirida por um modo representado pelo estado $|\psi\rangle$ que sofre uma transformação cíclica no espaço de estados (esfera dos modos). As medidas e o experimento serão apresentados no próximo capítulo.

Transformações de modos podem ser descritas através do uso da álgebra matricial [30]. Por exemplo, uma sequência mínima de três transformações T na qual um modo ψ evolui para dois estados intermediários e retorna ao estado inicial pode ser representado por

$$T\psi = e^{i\phi}\psi, \tag{3.15}$$

onde a transformação total pode ser decomposta em um produto de três transformações $T = T_1 T_2 T_3$ e $\phi = \phi_{din} + \phi_{geo}$ é a fase total adquirida pelo modo após a evolução, composta por uma contribuição dinâmica (ϕ_{din}) e outra geométrica (ϕ_{geo}).

Se representarmos os modos HG_{10} e HG_{01} por $|HG_{10}\rangle = (1 \ 0)^T$ e $|HG_{01}\rangle = (0 \ 1)^T$, respectivamente, então a matriz de conversão dos modos de primeira ordem será dada por

$$C(\phi) = \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{i\phi/2} \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Esta conversão corresponde, na esfera dos modos, a uma rotação de ϕ no sentido horário sobre o meridiano (a trajetória NE na figura 3.4 ilustra esta conversão para $\phi = \pi/2$). Vimos no capítulo anterior que o conversor de lentes cilíndricas realiza experimentalmente esta conversão. Os conversores em outras orientações são descritos por rotações na matriz C :

$$C(\phi, \alpha) = R(-\alpha)C(\phi)R(\alpha), \quad (3.17)$$

onde $R(\alpha)$ é a matriz unitária de rotação

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \text{sen}(\alpha) \\ -\text{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Para uma rotação de $\alpha > 0$, os autovalores do conversor são girados nessa mesma quantidade no sentido horário. Por exemplo,

$$\begin{aligned} C(\pi/2)|LG_0^{-1}\rangle &= |HG_{01}^{45^\circ}\rangle \\ R(-\pi/4)C(\pi/2)R(\pi/4)|LG_0^{-1}\rangle &= |HG_{01}\rangle \\ R(-\pi/2)C(\pi/2)R(\pi/2)|LG_0^{-1}\rangle &= |HG_{01}^{135^\circ}\rangle \\ R(-3\pi/4)C(\pi/2)R(3\pi/4)|LG_0^{-1}\rangle &= |HG_{10}\rangle \end{aligned}$$

Na primeira parte do experimento, consideramos o conjunto de transformações envolvidas na trajetória $ABCA'$ da figura 3.5. Dividimos esta trajetória em três partes: AB, BC e CA que são facilmente implementáveis. As transformações AB e CA são obtidas por conversores $\pi/2$. A matriz $T_{AB} = C(\pi/2, -\pi/4)$ corresponde à trajetória AB que converte o modo $|LG_0^{-1}\rangle = 2^{-1/2} (1 \ i)^T$ no modo $|HG_{01}\rangle$, envolvendo troca de momento angular orbital entre a luz e o sistema óptico. A trajetória BC é uma

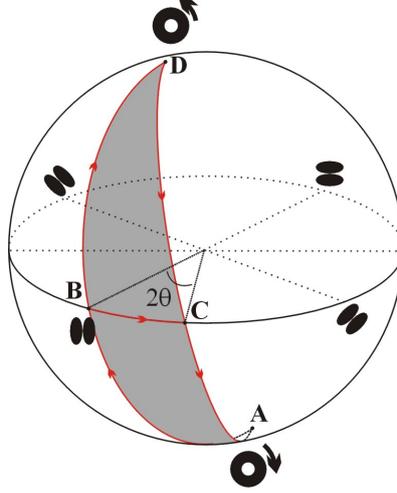


Figura 3.5: Representação dos experimentos realizados no espaço dos modos.

rotação no feixe de θ , descrita por $T_{BC} = R(\theta)$. A última trajetória CA corresponde à conversão descrita por $T_{CA} = C(\pi/2, \pi/4 - \theta)$. Após estas transformações, o modo final volta a ser o LG_0^{-1} .

Estas transformações só envolvem trajetórias geodésicas, conseqüentemente, toda a fase ϕ adquirida pelo modo é geométrica². Portanto, da equação (3.15) com $T = T_{ABCA}$ e $\psi = |LG_0^{-1}\rangle$ obtemos que a fase geométrica é $\phi_{geo} = \theta$. Em analogia com a fase de Pancharatnam, a fase geométrica é dada por $\phi_{geo} = -\Omega/2$, onde $\Omega = 2\theta$ é o ângulo sólido delimitado pela curva ABCA na figura 3.5.

Utilizando basicamente os mesmos elementos ópticos, podemos fazer o feixe LG_0^{-1} sofrer uma outra transformação cíclica, tal que a fase adquirida seja diferente da adquirida em $ABCA'$ e puramente geométrica.

Dois conversores π em série realizam facilmente a transformação cíclica $ABDCA'$ representada na figura 3.5. A fase geométrica neste caso onde a transformação cíclica $T = T_{ABDCA'} = T_{ABD'} + T_{DCA'}$ e $\psi = |LG_0^{-1}\rangle$ vale $\phi_{geo} = 2\theta$ e o ângulo sólido compreendido pela trajetória é dado por $\Omega = 4\theta$. O primeiro conversor (mantido fixo), que é descrito por $T_{ABD} = C(\pi, -\pi/4)$, transforma um modo $|LG_0^{-1}\rangle$

²fizemos $\phi_{din} = 0$ por simplicidade.

em $|LG_0^{-1}\rangle = 2^{-1/2}(1 - i)^T$ seguindo a trajetória ABD . Um segundo conversor (mantido em um estágio de rotação), descrito por $T_{DCA'} = C(\pi, \pi/4 - \theta)$, restaura o modo inicial transformando LG_0^1 em LG_0^{-1} seguindo a trajetória DCA' na esfera.

Veremos no próximo capítulo que a realização de apenas um desses experimentos evidencia a existência de fases geométricas em transformações de feixes gaussianos portadores de MAO. Porém, uma comparação dos resultados de ambos experimentos favorecerá uma análise quantitativa desta fase para diferentes trajetórias na esfera dos modos.

3.5 Conclusão

Inicialmente vimos que a fase geométrica foi antecipada por Pancharatnam ao estudar a polarização de feixes clássicos. Posteriormente, M. V. Berry prevê a existência destas fases na evolução cíclica de estados quânticos. Discutimos a existência da fase geométrica adquirida por um modo LG_0^{-1} que sofre uma transformação cíclica. Esta fase só depende da trajetória descrita na esfera dos modos de primeira ordem.

Capítulo 4

Fase Geométrica em Feixes com MAO

4.1 Introdução

Neste capítulo apresentaremos nossa reprodução das medidas feitas por Galvez [6], da fase geométrica adquirida por feixes que possuem MAO ao sofrerem evoluções cíclicas. As medidas foram feitas via interferência de dois feixes copropagantes que passam pelos mesmos componentes óticos, mas ganham fases geométricas diferentes.

4.2 Experimentos

O procedimento básico para a determinação dessas fases foi medir via interferometria a fase geométrica ganha por um modo LG_0^{-1} após sofrer a transformação cíclica ABCA' ilustrada na figura 4.1. O experimento introduz a fase no modo LG_0^{-1} que é copropagado com LG_0^0 . Este último não ganha essa fase ao longo das transformações. É muito difícil realizar este experimento se os dois feixes viajam em trajetórias diferentes, pois, qualquer variação no caminho ótico de um dos feixes introduzirá fase dinâmica entre eles. Um diagrama simplificado do experimento referente à trajetória ABCA' é mostrado na figura 4.1. Este diagrama consiste basicamente de um laser HeNe, um interferômetro de Mach-Zehnder, um par de conversores e um sistema de aquisição de imagens. O laser oscila no modo fundamental

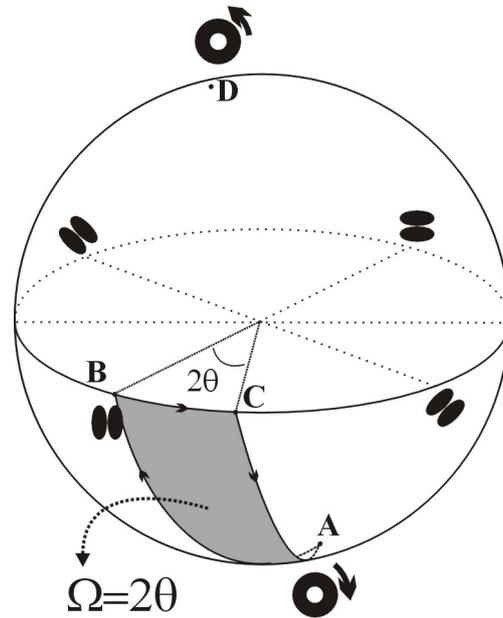


Figura 4.1: Representação da transformação cíclica $ABCA'$.

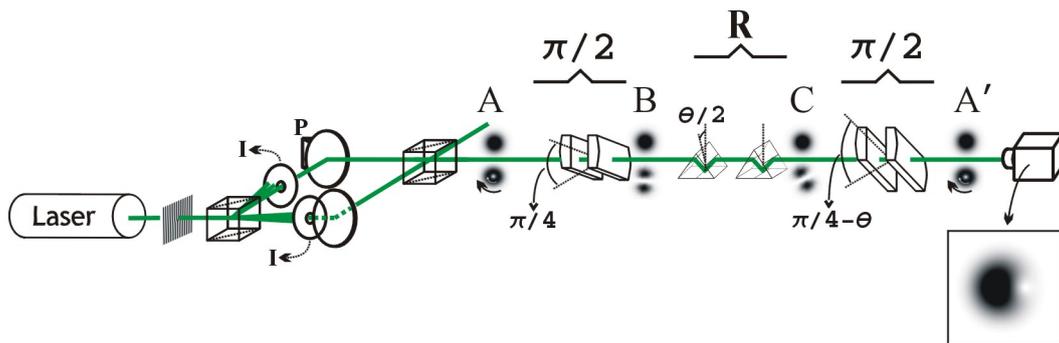


Figura 4.2: Esquema do experimento que insere fase geométrica via transformações de modos associadas à trajetória $ABCA'$ na figura 4.1. A figura na caixa é uma simulação feita no MATEMATICA[®] do perfil de interferência dos modos LG_0^0 e LG_0^{-1} copropagantes.

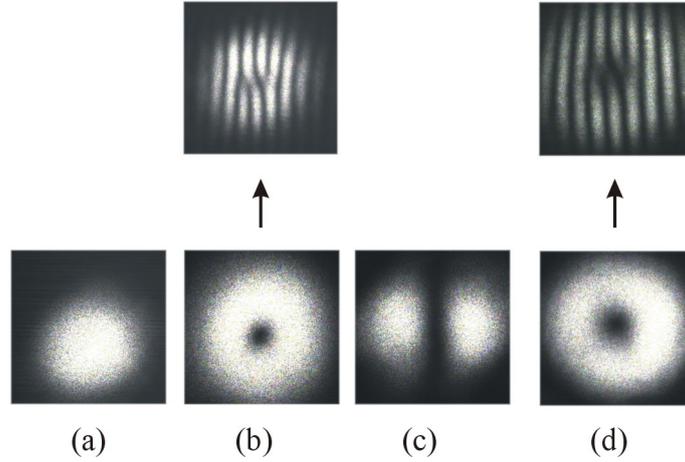


Figura 4.3: *Perfis de intensidade dos modos selecionados no Mach-Zehnder: (a) LG_0^0 e (b) LG_0^{-1} , ambos na posição A do esquema; (c) HG_{10} na posição B e (d) LG_0^{-1} na posição A'. As figuras acima das setas são as interferências obtidas em um interferômetro de Michelson (não mostrado no esquema).*

LG_{00} com 1,2mW. A máscara bifurcada produz os modos LG de várias ordens que são enviados ao interferômetro. Este é composto de dois cubos divisores de feixes não polarizadores e dois espelhos, sendo que um deles colado em uma cerâmica Piezo-Elétrica (designada por P na figura 4.2) com a finalidade de controlar a fase dinâmica entre os feixes LG_0^0 e LG_0^{-1} selecionados pelas íris (I).

Como podemos ver no esquema, um dos prismas de ângulo reto e um dos conversores devem girar durante a execução do experimento. Experimentalmente é quase impossível efetuar essas rotações sem que haja variação do caminho óptico, ou seja, variação da fase dinâmica dos modos. A solução encontrada foi enviar um feixe de referência LG_0^0 , que é insensível às transformações, junto com o feixe LG_0^{-1} . Qualquer fase dinâmica será introduzida em ambos os feixes e se cancelarão. A figura 4.3 mostra o perfil de intensidade dos feixes produzidos pela máscara bifurcada nos pontos indicados no esquema. O perfil de intensidade foi obtido após o bloqueio do feixe no outro braço do Mach-Zehnder.

Cada conversor $\pi/2$ consiste de um par de lentes cilíndricas paralelas com distância focal $f = 19$ mm separadas por uma distância $d = \sqrt{2}f$. Essas lentes estão localizadas entre um par de lentes esféricas ($f = 200$ mm) para satisfazer a condição de casamento dos modos. No segundo conversor, as lentes cilíndricas foram mon-

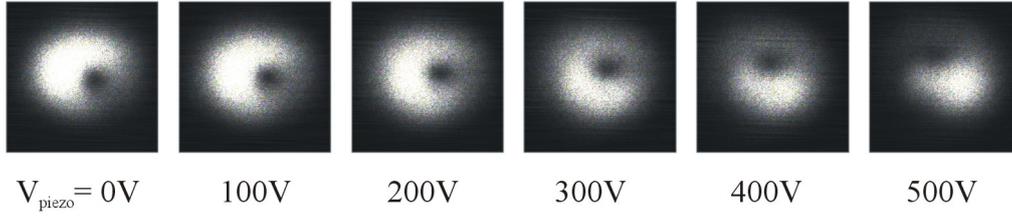


Figura 4.4: *Rotação do perfil de interferência devido à variação do caminho óptico no Mach-Zehnder.*

tadas em estágios de rotação que permitem o controle da direção do eixo principal das lentes. O dispositivo formado por dois prismas de ângulo reto em série, designado por R na figura, efetua uma operação de rotação $R(\theta)$ na imagem do feixe. Quando um dos prismas é rodado de um ângulo $-\theta/2$ e o outro permanece fixo, a imagem incidente é rodada de θ . O perfil do feixe foi filmado e digitalizado com o sistema de aquisição de imagens.

Quando os dois feixes são desbloqueados eles formam um padrão de interferência parecido com um caroço de feijão onde a região clara é a região onde os feixes estão em fase. No lado oposto, os feixes estão fora de fase. Uma simulação computacional deste padrão está mostrada no quadrado da figura 4.2. O efeito da variação de fase entre os modos LG_0^{-1} e LG_0^0 é verificado quando introduzimos uma fase dinâmica entre os feixes por meio da variação do caminho óptico dentro do interferômetro de Mach-Zehnder. Isto foi feito variando a voltagem V_P do Piezo. Aumentando V_P diminuimos o caminho óptico de LG_0^{-1} em relação a LG_0^0 . Este avanço na fase de LG_0^{-1} faz a imagem observada na câmera ccd (posição A' , na figura 4.2) girar no sentido anti-horário. A figura 4.4 mostra o perfil de interferência entre os modos LG_0^0 e LG_0^{-1} para diferentes valores de V_P .

De acordo com o capítulo anterior, se rodarmos o primeiro prisma de $-\theta/2$ e o segundo conversor de θ (mantendo $V_P = 0$) no esquema da figura 4.2, de forma que o modo de primeira ordem siga a trajetória ABCA' (figura 4.1), devemos introduzir uma fase geométrica $\phi_g = \theta$. De fato, o conjunto de dados da figura 4.5 mostra que conforme θ é aumentado, o padrão de interferência captado pela câmera gira (sentido horário) de acordo com o aumento de fase de LG_0^{-1} com relação a LG_0^0 .

Com este experimento, reproduzimos o resultado de Galvez que mostra a existência das fases geométricas em transformações de modos que possuem MAO.

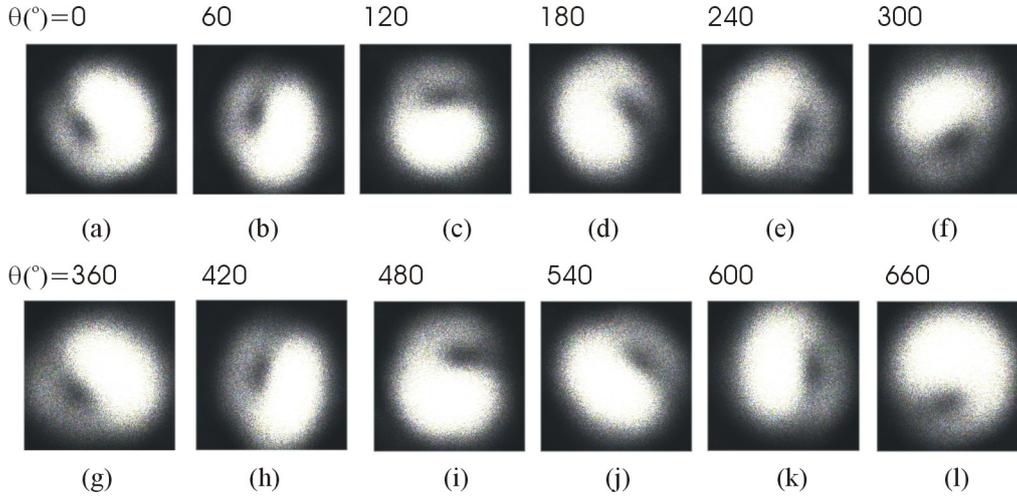


Figura 4.5: *A medida que o trajeto na esfera é variado, o perfil de interferência gira demonstrando a fase geométrica.*

Uma segunda medida de fase geométrica envolveu a trajetória $ABDCA'$ na figura 4.6. Nesta medida, utilizamos o mesmo procedimento experimental. A figura 4.7 ilustra o segundo experimento. Após o interferômetro de Mach-Zehnder, um conversor π consistindo de um par de lentes cilíndricas com distância focal $f = 19$ mm separadas por $d = 2f$ transforma o modo LG_0^{-1} em LG_0^1 seguindo a trajetória ABD , com $T_{ABD} = C(\pi, -\pi/4)$. Isto corresponde a uma troca de MAO de $2\hbar$ por fóton do feixe. Um segundo conversor π em um estágio de rotação retorna ao modo inicial pela trajetória DCA , com $T_{DCA} = C(\pi, \pi/4 - \theta)$. A fase geométrica esperada é $\phi_g = 2\theta$ que é consistente com o ângulo sólido delimitado pela curva $ABDCA'$, duas vezes maior que no caso anterior. O perfil de interferência entre os feixes LG_0^{-1} e LG_0^0 foi capturado pelo sistema de aquisição de imagens e está mostrado na figura 4.8.

Medindo o ângulo dos interferogramas obtidos pelo sistema de aquisição de imagens e relacionando-os com a fase geométrica (ângulo θ) adquirida ao longo das evoluções cíclicas, podemos ter uma informação adicional referente ao aumento da fase durante a realização dos experimentos. O gráfico na figura 4.9 relaciona um conjunto de ângulos dos interferogramas com valores de θ para as trajetórias $ABCA'$ e $ABDCA'$. Como podemos observar no gráfico, uma reta aproxima muito bem o crescimento da fase a medida que θ cresce. Um ajuste ("fit") linear dos pon-

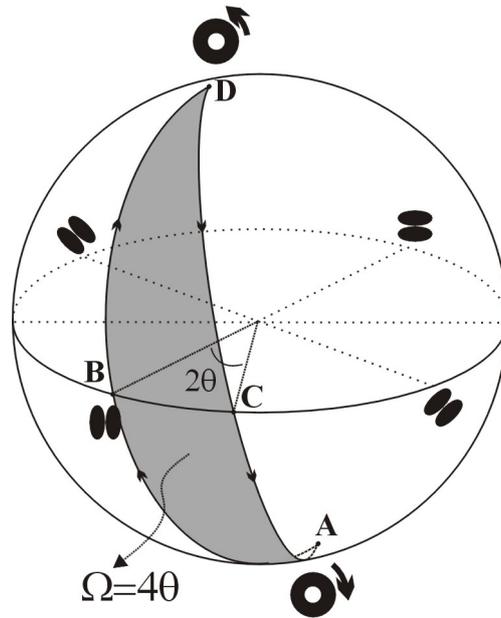


Figura 4.6: Representação da transformação cíclica $ABDCA'$.

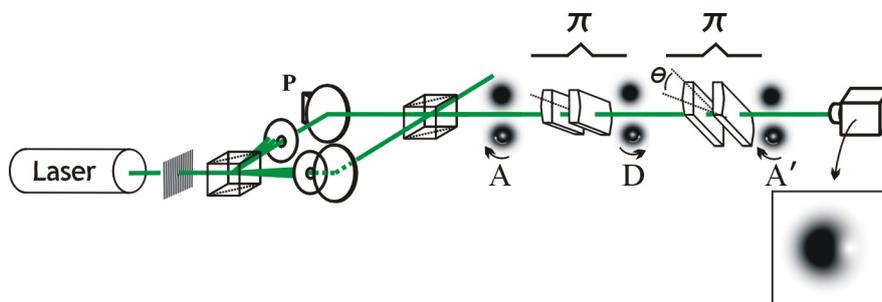


Figura 4.7: Esquema experimental do experimento que insere fase geométrica via transformações de modos associadas à trajetória $ABDCA'$ na figura 4.6.

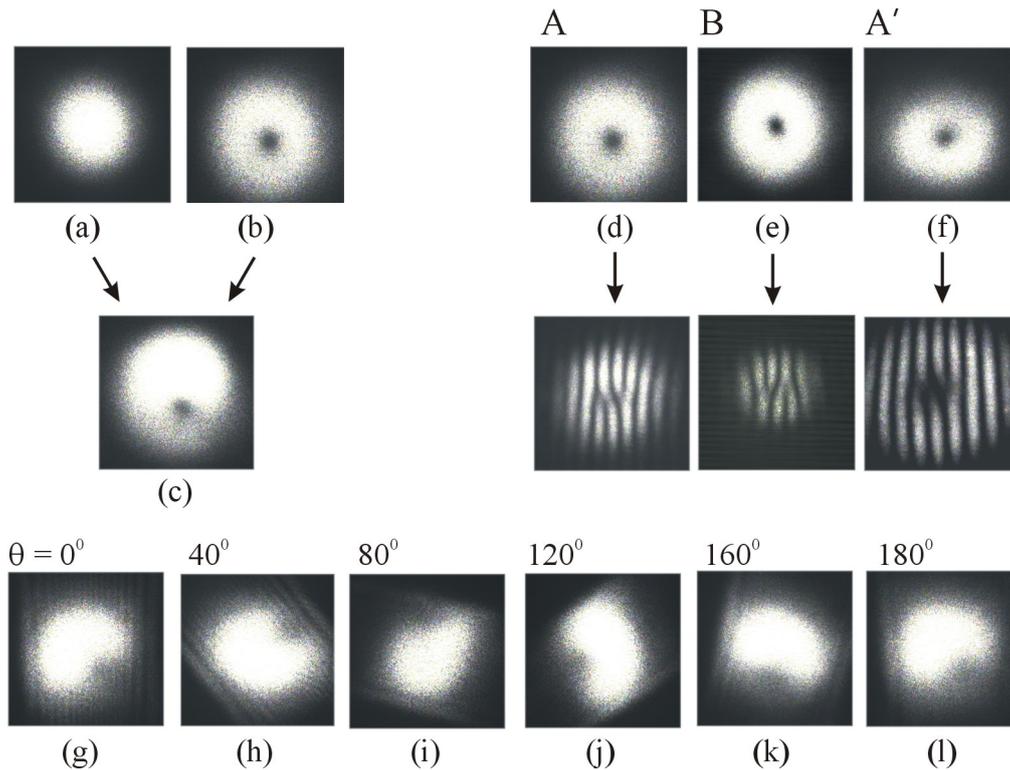


Figura 4.8: (a)-(b): Perfil de intensidade dos modos selecionados no Mach-Zehnder; (c) interferência entre estes modos selecionados; (d)-(f) perfil de intensidade dos modos nas posições A, B e A', respectivamente. Os padrões apresentados logo abaixo das setas são as interferências dos modos em A, B e A' obtidas em um interferômetro de Michelson não mostrado na figura 4.7; (g)-(l) perfil de interferência para diferentes valores de θ .

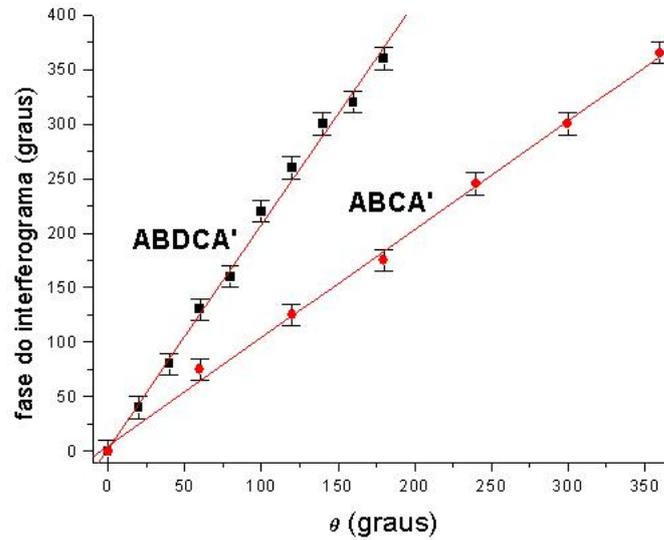


Figura 4.9: Gráfico da fase geométrica medida de um conjunto de interferogramas das trajetórias ABCA' (círculos) e ABDCA' (quadrados) como função de θ .

tos experimentais foi feita no MICROCAL ORIGIN[®] e também é apresentada no gráfico. Para a trajetória ABCA' a equação da reta que se ajusta aos pontos é dada por $\phi = (0,99 \pm 0,02)\theta + (5,18^\circ \pm 4,6^\circ)$. E para a trajetória ABDCA', $\phi = (2,05 \pm 0,05)\theta + (2,89^\circ \pm 5,66^\circ)$. A fase geométrica aumenta duas vezes mais rápido no segundo experimento. O ângulo azimutal do interferograma é igual ao ângulo da reta que o divide simetricamente (figura 4.10). Este ângulo é determinado quando sobrepomos o transferidor ao interferograma e verificamos o ângulo da reta de simetria do perfil. A margem de erro foi estimada em 10° , levando-se em conta as limitações de estabilidade do interferograma e o tamanho das regiões de incerteza para a determinação dos pontos de intensidade máxima e mínima que pertencem à reta de simetria. As barras de erro referentes a θ são menores que os símbolos, pois, dependem da precisão dos instrumentos opto-mecânicos que é menor que 1° .

Estes resultados corroboram as previsões de que a fase geométrica adquirida é proporcional ao ângulo sólido compreendido pela trajetória na esfera de Poincaré que representa a evolução.

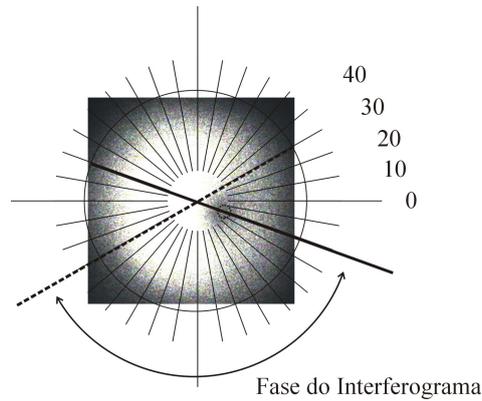


Figura 4.10: *Determinação do ângulo dos interferogramas.*

4.3 Conclusão

Com estes experimentos, nós reproduzimos os resultados de Galvez mostrando que os modos que sofrem evolução cíclica guardam uma memória desta evolução em forma de fase geométrica, e que toda esta fase resulta das transformações envolvendo troca de MAO dos modos. A fase dinâmica pode ser eliminada nesta medida ao estabelecermos o mesmo caminho óptico para os dois feixes obrigando-os a propagarem colinearmente através de todo o sistema óptico. Os resultados obtidos aqui concordam com a descrição teórica. No próximo capítulo descreveremos um sistema para produção de modos intermediários de primeira ordem.

Capítulo 5

Modos Elípticos

5.1 Introdução

No capítulo 2 vimos que os modos transversos de Lagerre-Gauss LG_{-1}^0 e LG_1^0 são representados pelos pólos sul e norte, respectivamente, na esfera dos modos e que os modos transversos de Hermite-Gauss HG_{10} nas diversas inclinações são representados por pontos no equador desta esfera. Os estados com polarização elíptica são representados pelos pontos fora dos pólos ou do equador. Os modos elípticos são análogos aos estados de polarização elíptica, nesta representação. Neste Capítulo apresentaremos uma contribuição original para a geração dos modos elípticos. Trata-se de um dispositivo baseado em transformações dos estados de polarização de um feixe LG no interior de um interferômetro de Sagnac.

5.2 Estados de polarização

Ao descrever a luz em termos das ondas eletromagnéticas transversais, dizemos que um feixe polarizado linearmente sempre possui as componentes ortogonais \mathbf{E}_x e \mathbf{E}_y defasadas de $n\pi$ com $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Se as amplitudes das componentes forem iguais mas estiverem defasadas de $\frac{n+1}{2}\pi$, a polarização é circular podendo ser direita (\mathcal{D}) ou esquerda (\mathcal{E}) o que determina o sentido da rotação do vetor $\mathbf{E} = \mathbf{E}_x + \mathbf{E}_y$. Em particular, pode-se obter uma onda polarizada linearmente a partir

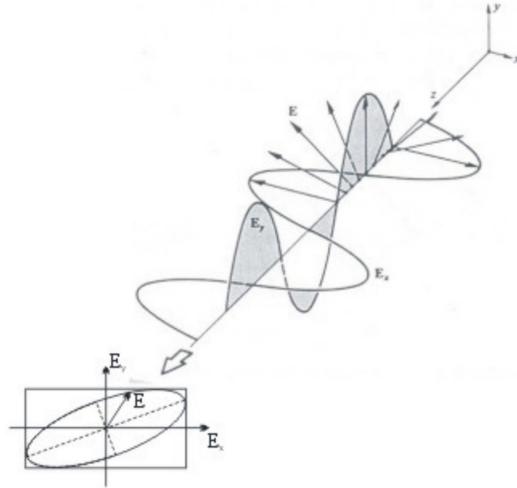


Figura 5.1: Luz com polarização elíptica ([25]-figura 8.3).

da superposição de duas ondas com a mesma amplitude, polarizadas circularmente em sentidos opostos [25].

Formalmente, um feixe com polarização elíptica pode ser descrito como uma superposição de duas ondas com polarizações circulares invertidas e intensidades diferentes. O estado de polarização elíptica se caracteriza pelo fato da amplitude do campo elétrico \mathbf{E} variar à medida que descreve uma elipse num plano perpendicular ao vetor de onda k . A figura 5.1 ilustra a propagação de um feixe com polarização elíptica.

Podemos manipular os estados de polarização de um feixe através da utilização adequada de polarizadores ou lâminas de retardo, e assim, gerar qualquer estado de polarização. Do mesmo modo, utilizando a representação da esfera de Poincaré para os modos transversos, podemos produzir modos intermediários aos modos HG e LG, sendo análogos à polarização elíptica. Chamaremos estes modos transversos intermediários de modos elípticos. Neste capítulo descreveremos o funcionamento de um dispositivo que manipula os estados de polarização de modos Laguerre-gaussianos e produz qualquer modo elíptico.

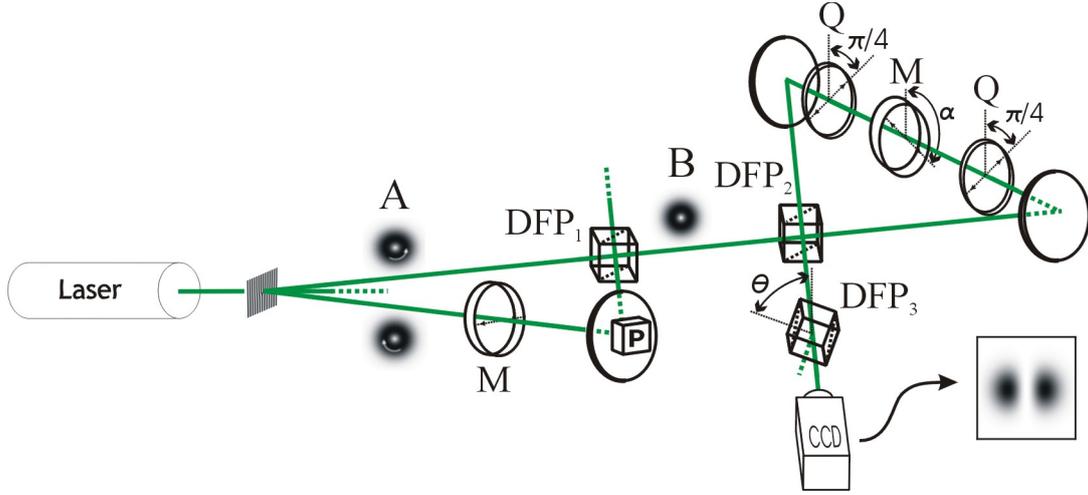


Figura 5.2: *Esquema experimental para a geração de modos elípticos.*

5.3 Dispositivo para a geração de modos elípticos

Um diagrama simplificado do dispositivo está ilustrado na figura 5.2. Ele é composto basicamente de um laser polarizado verticalmente (o mesmo utilizado na medida das fases) e um interferômetro de Sagnac [31]. A máscara produz os modos LG_{-1}^0 e LG_1^0 . O modo LG_{-1}^0 tem sua polarização girada de 90° após atravessar uma lâmina de meia onda (M) com seus eixos formando um ângulo de 45° com a vertical. Os modos serão representados por $|LG_{-1}^0; H\rangle$ e $|LG_1^0; V\rangle$. Estes modos são reunidos no cubo divisor de feixe por polarização DFP₁. O espelho utilizado para este alinhamento está colado a uma cerâmica Piezo elétrica que controla a fase dinâmica entre os modos. No ponto B os dois feixes não interferem devido à polarização ortogonal entre eles. Os modos $|LG_{-1}^0; H\rangle$ e $|LG_1^0; V\rangle$ são enviados ao interferômetro de Sagnac composto pelo DFP₂ e dois espelhos fixos. Os modos com polarizações ortogonais são separados pelo cubo DFP₂, executam trajetórias invertidas e saem pela outra face do cubo ainda copropagantes como indicado no esquema. Devido à geometria deste interferômetro, a diferença de caminho óptico entre os feixes dentro do interferômetro é nula, o que mantém a fase dinâmica entre eles fixa. As três lâminas de retardo: duas quarto de onda (Q) e uma de meia onda (M) foram utilizadas para introdução controlada de fase entre os modos. Veremos mais adiante o funcionamento destas lâminas com mais detalhes. Após o interferômetro, os feixes que ainda são ortogonais e copropagantes passam pelo cubo DFP₃ colocado em um

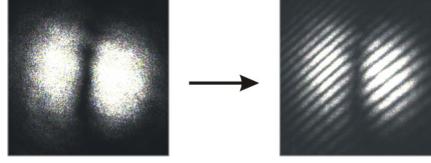


Figura 5.3: Perfil de intensidade do feixe produzido para $\theta = 45^\circ$ e o padrão de interferência deste feixe.

estágio de rotação. Este último cubo tem a finalidade de projetar as polarizações dos feixes sobre uma mesma direção. Se este cubo estiver inclinado, uma parte de cada feixe é transmitida e a outra é refletida de acordo com a decomposição da polarização nas componentes perpendicular e paralela à base do cubo. Assim, se a inclinação θ for de 45° , os modos LG_{-1}^0 e LG_1^0 serão transmitidos (refletidos) com metade da potência.

Vimos no segundo capítulo (equação 2.28) que podemos escrever um modo de LG em função dos modos de HG e vice-versa. Assim, para $\theta = 45^\circ$, o dispositivo ao somar os modos LG_{-1}^0 e LG_1^0 , deve produzir o modo HG_{10} quando a fase entre eles for nula. A figura 5.3 mostra o perfil de intensidade e o padrão de interferência obtido na implementação deste dispositivo.

5.3.1 O funcionamento das lâminas

Os modos $|LG_{-1}^0; H\rangle$ e $|LG_1^0; V\rangle$ descrevem trajetórias invertidas dentro do interferômetro. Ao passarem pelas lâminas, eles adquirem fase geométrica devido às transformações de polarização que sofrem. Estas transformações estão ilustradas na figura 5.4.

O modo $|LG_1^0; V\rangle$ se propaga no sentido anti-horário, passa por Q_1 que tem a direção do eixo óptico fixa a 45° como mostrado no esquema, e tem sua polarização transformada de V para \mathcal{D} . Este feixe agora passa através da lâmina M_2 colocada em um estágio de rotação e tem a polarização invertida para \mathcal{E} . Ao atravessar Q_2 que também tem a direção do eixo óptico fixa a 45° , o modo volta a adquirir polarização vertical e continua a trajetória até a câmera ccd (Figura 5.4 (a)-(b)). O feixe $|LG_{-1}^0; H\rangle$ sofrerá as transformações referentes a Q_2 - M_2 - Q_1 e passará pelos estados H- \mathcal{E} - \mathcal{D} -H (Figura 5.4 (c)).

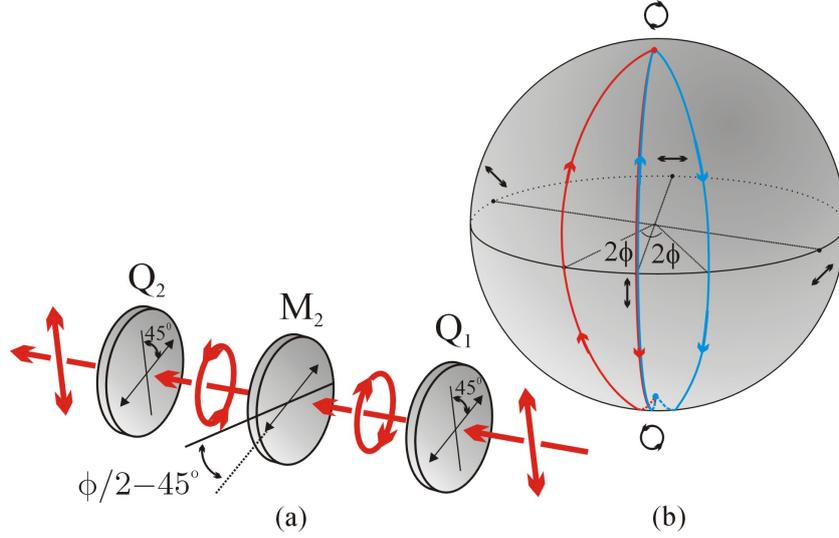


Figura 5.4: (a) Transformações na polarização do feixe $|LG_1^0; V\rangle$ dentro do Interferômetro; (b) Fase geométrica adquirida por $|LG_1^0; V\rangle$; (c) Fase geométrica adquirida por $|LG_{-1}^0; H\rangle$.

As fases adquiridas pelos modos dependem da orientação de M_2 e possuem mesma magnitude com sinais contrários devido ao sentido das transformações. Vimos na seção 3.5 que a transformação que M_2 realiza no estado de polarização é representada por um meridiano na esfera de Poincaré e que a orientação ϕ de M_2 determina a longitude deste meridiano. Portanto, quando M_2 está orientada a um ângulo $\phi/2$ com relação a Q_1 e Q_2 , o estado do feixe logo após o interferômetro é dado por

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [e^{i\phi}|LG_0^{-1}; H\rangle + e^{-i\phi}|LG_0^1; V\rangle]. \quad (5.1)$$

Podemos descrever o feixe após o cubo DFP₃ por

$$|\psi'\rangle = e^{i\phi} \cos(\theta) |LG_0^{-1}\rangle + e^{-i\phi} \sin(\theta) |LG_1^0\rangle. \quad (5.2)$$

Quando $\theta = 45^\circ$ (na figura 5.2), podemos obter qualquer modo hermite-gaussiano de primeira ordem ao girar a lâmina de meia onda dentro do interferômetro. Na figura 5.5 os modos referentes aos números (2)-(5) foram obtidos para $\theta = 45^\circ$ e $\phi = 0; 22,5^\circ; 45^\circ$ e $67,5^\circ$, respectivamente.

O valor de θ determina a intensidade de cada modo espacial transmitido por DFP₃. Se θ , por exemplo, for igual a zero, apenas a componente $|LG_1^0; V\rangle$ será

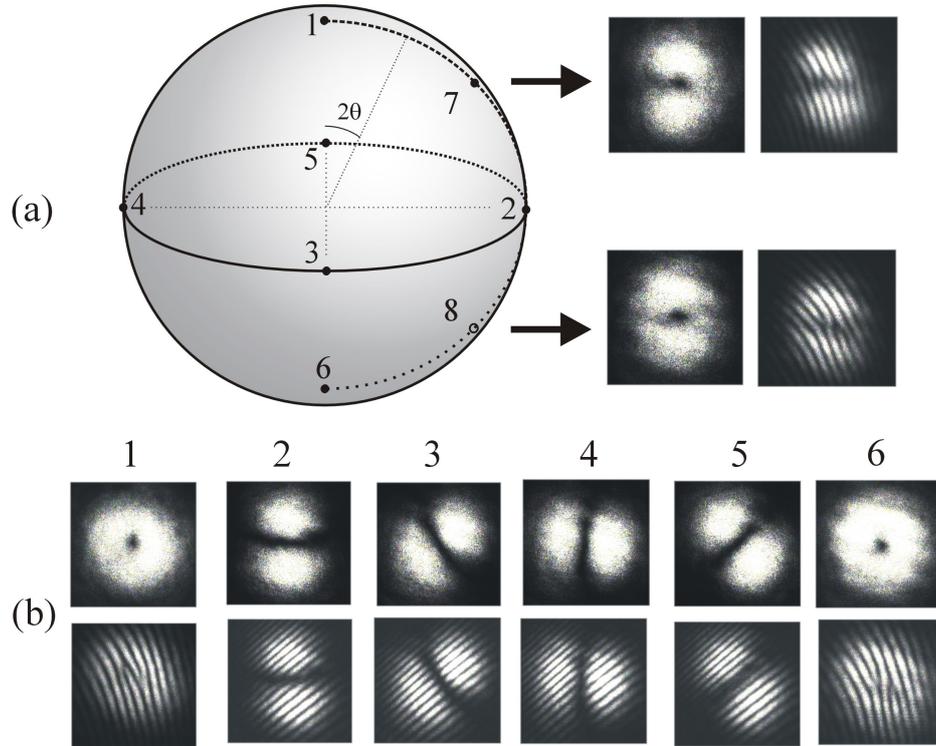


Figura 5.5: (a) Representação dos modos elípticos na esfera; (b) Perfil de interferência dos modos produzidos. Os números relacionam a intensidade (na esfera) e o padrão de interferência.

transmitida e filmada pela câmera. No caso mais geral, o feixe a ser capturado é uma superposição dos modos LG_{-1}^0 e LG_1^0 projetados na mesma polarização. Na figura 5.5 os perfis de intensidade dos feixes produzidos com $\theta = 20^\circ, \phi = 0^\circ$ e $\theta = 70^\circ, \phi = 0^\circ$ são representados pelos números (7) e (8), respectivamente. A disposição das bifurcações no perfil de interferência diferencia os modos elípticos com mesmo perfil de intensidade e helicidades opostas. Por exemplo, os modos produzidos para $\theta = 20^\circ$ e $\theta = 70^\circ$ na figura 5.5 (indicados pelas setas) possuem perfis de intensidade idênticos, mas são diferenciados devido à disposição relativa das bifurcações nos respectivos padrões de interferência.

Este dispositivo pode ser de grande utilidade em experimentos que utilizem os modos elípticos. Uma vez que o modo produzido depende apenas do ajuste de componentes ópticos de polarização, este dispositivo permite a preservação do alinhamento do feixe de saída durante as transformações. A figura 5.6 ilustra na esfera

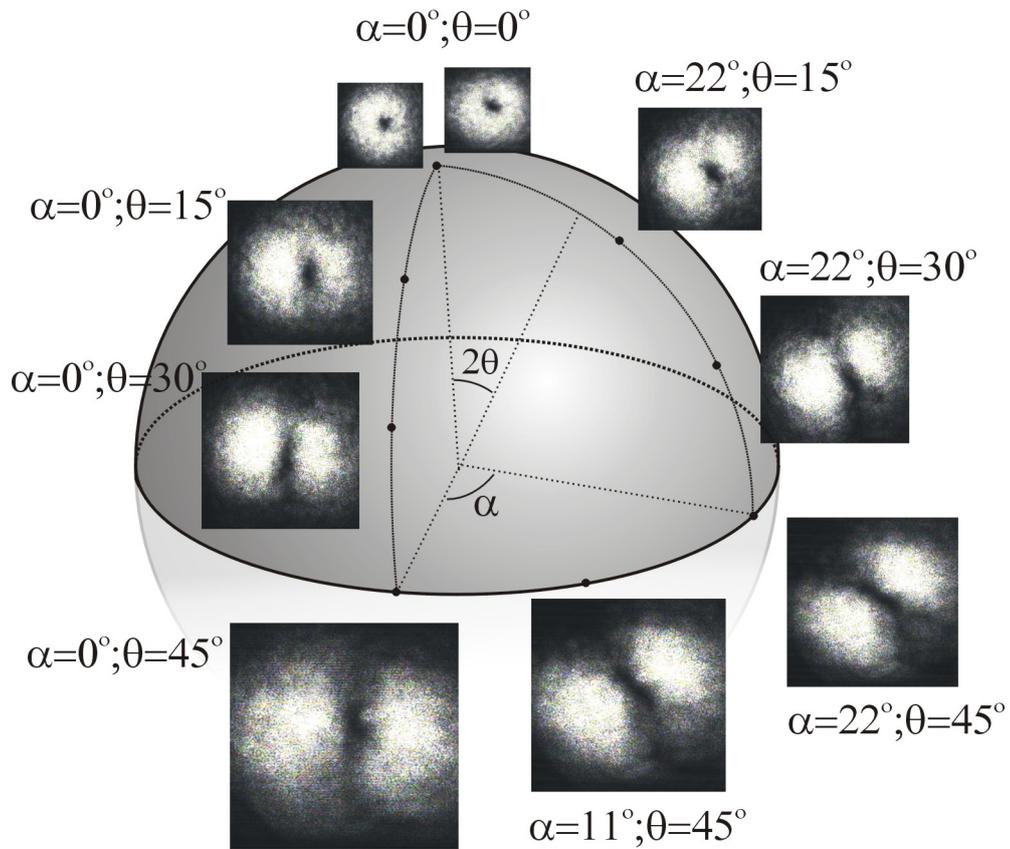


Figura 5.6: O feixe produzido pelo experimento descreve continuamente o octante tracejado na esfera. Os Perfis de intensidade para alguns valores de θ e α (ilustrados na figura 5.2) são mostrados na própria figura.

dos modos uma seqüência de perfis de intensidade dos feixes produzidos ao longo da transformação cíclica representada pelo octante tracejado.

Capítulo 6

Conclusões Gerais e Perspectivas

A idéia central deste trabalho é descrever em linhas gerais o trabalho realizado e os resultados obtidos em nosso laboratório de óptica quântica ao longo desses últimos dois anos.

Nesta dissertação tratamos do momento angular orbital (MAO) em feixes luminosos. Vimos que podemos manipular o feixe proveniente de um laser produzindo outros feixes que são bem descritos pelos modos de Hemite-Gauss (HG) e de Laguerre-Gauss (LG), soluções da equação paraxial. Os modos LG podem carregar MAO. Apresentamos duas técnicas de obtenção experimental desses modos que são utilizados em muitos experimentos. O método holográfico: onde obtemos os modos LG de diversas ordens a partir da difração de um laser convencional em máscaras holográficas e o método astigmático que utiliza lentes cilíndricas para converter um modo HG em um LG e vice-versa. Em particular, discutimos um método de se obter uma aproximação de um modo HG de primeira ordem a partir de um modo fundamental do laser.

Também estudamos a fase geométrica adquirida por feixes que possuem MAO após sofrerem transformações cíclicas. Inicialmente vimos que a fase geométrica se manifesta tanto em sistemas clássicos, como no experimento analisado por Pancharatnam, quanto em sistemas quânticos. Nos sistemas quânticos esta fase surge em processos adiabáticos, resultando de propriedades geométricas do espaço dos parâmetros do hamiltoniano. Uma discussão à luz da mecânica quântica foi dada para a fase observada no experimento de Pancharatnam. Discutimos também a ex-

istência de fases geométricas associadas a transformações de modos gaussianos de ordem superior que possuem MAO ao reproduzir o experimento de Galvez et al [6].

Finalmente, apresentamos uma contribuição original do nosso trabalho que consiste de um método de obtenção dos modos intermediários, análogos aos estados de polarização elíptica. Construimos um dispositivo capaz de produzir experimentalmente qualquer feixe composto pela superposição dos modos Laguerre-gaussianos de primeira ordem. Este dispositivo utiliza a fase de Pancharatnam e permite um alinhamento robusto durante a produção dos modos.

Este dispositivo foi inicialmente projetado para estudos da conservação do MAO na conversão paramétrica descendente em osciladores paramétricos ópticos. Neste tipo de experimento, o conhecimento do modo produzido e o alinhamento deste têm importância fundamental. Paralelamente à realização do experimento de conservação do MAO, faremos uma tomografia dos modos produzidos pelo dispositivo.

Apêndice A

Fase dinâmica e fase geométrica

Na Mecânica Quântica obtemos o estado dependente do tempo de um sistema através da aplicação do operador de evolução temporal no estado inicial. Para um sistema cujo hamiltoniano comuta em tempos diferentes, isto é:

$$[h(t), h(t')] = 0 \quad \forall t, t', \quad (\text{A.1})$$

podemos construir uma base de autoestados de $h(t)$ independentes do tempo. Assim, apenas as energias $E_n(t)$ dependem do tempo e o hamiltoniano pode ser escrito como

$$h(t) = E_n(t)|n\rangle\langle n|. \quad (\text{A.2})$$

Neste caso, o operador de evolução é dado por $\mathbf{U}(t) = e^{-i/\hbar \int_0^t dt' h(t')}$ e pode ser escrito como

$$\mathbf{U}(t) = \sum_n e^{-i/\hbar \int_0^t dt' E_n(t')} |n\rangle\langle n|. \quad (\text{A.3})$$

Assim, a solução da equação de Schrödinger (3.3) é escrita como:

$$|\psi(t)\rangle = \mathbf{U}(t)|\psi(0)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(i/\hbar) \int_0^t dt' E_n(t')} |n\rangle\langle n|\psi(0)\rangle. \quad (\text{A.4})$$

Se o sistema está inicialmente no autoestado $|n_0\rangle$, então

$$|\psi(t)\rangle = e^{-(i/\hbar) \int_0^t dt' E_{n_0}(t')} |\psi(0)\rangle = e^{-(i/\hbar) \int_0^t dt' E_{n_0}(t')} |n_0\rangle, \quad (\text{A.5})$$

O operador de evolução mantém o sistema no mesmo autoestado de $h(t)$. O fator de fase adquirido pelo vetor de estado na equação (A.5) é chamado de *fase dinâmica*.

Consideraremos agora o caso em que o sistema é não conservativo e a equação (A.2) não é satisfeita, isto é, $[h(t), h(t')] \neq 0$. Neste caso, a matriz densidade de um estado puro estacionário é definida por:

$$|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| = |\psi(0)\rangle\langle\psi(0)| \quad \forall t. \quad (\text{A.6})$$

Isto significa que um vetor de estado estacionário difere do estado inicial apenas por um fator de fase dependente do tempo, isto é:

$$|\psi(t)\rangle = e^{i\zeta_\psi(t)} |\psi(0)\rangle. \quad (\text{A.7})$$

Substituindo a equação acima na equação de Shrödinger (3.3), fazendo o produto escalar com $\langle\psi(t)|$ e assumindo que $|\psi(t)\rangle$ é normalizado, obtemos:

$$-\hbar \frac{d\zeta_\psi(t)}{dt} = \langle\psi(t)|h(t)|\psi(t)\rangle. \quad (\text{A.8})$$

Integrando (A.8) e substituindo o resultado em (A.7), podemos escrever:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-(i/\hbar) \int_0^t dt' \langle\psi(t')|h(t')|\psi(t')\rangle} |\psi(0)\rangle. \quad (\text{A.9})$$

Note que a fase neste caso guarda toda a memória da evolução da função de onda, pois a fase depende da integral no intervalo $[0, t]$. Quando a equação (A.1) é satisfeita, o estado estacionário é um autoestado do hamiltoniano e o valor esperado $\langle\psi(t')|h(t')|\psi(t')\rangle$ se reduz ao autovalor $E_{n_0}(t')$, de modo que recaímos na equação (A.5). Por outro lado, se o hamiltoniano não comuta em diferentes instantes de tempo, um estado estacionário não é em geral um autoestado, e vice versa. Na maior parte das vezes, a evolução temporal de um estado não é estacionária, isto é, o estado inicial do sistema nem sempre evolui de acordo com a equação (A.7). Veremos agora que o estado $|\psi(t)\rangle$ não será dado simplesmente por (A.9), mas dependerá de um fator de fase adicional.

O conjunto dos operadores de projeção $\Lambda(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$ do espaço de Hilbert \mathcal{H} são denotados por $\wp(\mathcal{H})$ (espaço projetivo dos estados físicos puros). Se o estado $\Lambda(t)$ muda no tempo, então o operador de projeção descreve uma trajetória Γ em $\wp(\hat{H})$. Assim, em uma trajetória fechada ("evolução cíclica")

$$\Gamma : t \rightarrow \Lambda(t) \quad 0 \leq t \leq T, \quad \Lambda(T) = \Lambda(0), \quad (\text{A.10})$$

a matriz densidade do sistema retorna após algum período $t=T$ ao estado original.

O fato de $\Lambda(t)$ descrever uma trajetória fechada não significa necessariamente que o vetor de estado $|\psi\rangle$ que satisfaz a equação de Schrödinger também descreva uma trajetória fechada. Contudo, a trajetória

$$C : t \rightarrow |\Psi(t)\rangle, \quad 0 \leq t \leq T, \quad \langle \Psi(t) | \Psi(t) \rangle = 1, \quad (\text{A.11})$$

descrita por $|\psi(t)\rangle$ no espaço de Hilbert satisfaz

$$|\psi(T)\rangle = e^{-i\alpha_\psi} |\psi(0)\rangle, \quad (\text{A.12})$$

onde α_ψ é um ângulo de fase módulo 2π .

Se o estado inicial em $t=0$ é um autoestado do hamiltoniano, isto é $\Lambda(0) = |n; \mathbf{R}(0)\rangle \langle n; \mathbf{R}(0)|$, então $|\psi(0)\rangle$ pode ser dado (depois de uma escolha de fase conveniente) por:

$$|\psi(0)\rangle = |n; \mathbf{R}(0)\rangle. \quad (\text{A.13})$$

Para um dado hamiltoniano $h(\mathbf{R}(t))$ cujos parâmetros mudam no tempo, as soluções da equação de Schrödinger (3.3) podem ser descritas por trajetórias abruptamente variáveis em $\wp(\mathcal{H})$. Com isto, dificilmente um autoestado em $t=0$ será também um autoestado em um tempo posterior. Um caso particular surge quando o estado é igual ao autoestado de $h(t)$ para todos os tempos t com mesmo número quântico de energia n , ou seja,

$$|\psi(t)\rangle \langle \psi(t)| \stackrel{\text{adiabático}}{\downarrow} |n; \mathbf{R}(t)\rangle \langle n; \mathbf{R}(t)|. \quad (\text{A.14})$$

Uma evolução onde o estado do sistema em qualquer tempo é sempre um autoestado do hamiltoniano é chamada de *evolução adiabática*. A igualdade (A.14) constitui uma condição adicional imposta sobre as soluções da equação de Schrödinger. Para um dado hamiltoniano, pode não haver nenhuma solução $|\psi(t)\rangle$ com $|\psi(0)\rangle = |n; \mathbf{R}(0)\rangle$ que satisfaça (A.14), exceto quando $|\psi(t)\rangle$ é estacionário. Mas sob certas condições a igualdade (A.14) é aproximadamente satisfeita e chamamos $|\psi(t)\rangle$ de aproximação adiabática. Isto em geral é válido se $h(\mathbf{R}(t))$ ou $\mathbf{R}(t)$ muda lentamente em um período T .

Voltando à solução da equação de Schrödinger, ao expandir a solução $|\psi(t)\rangle$ em uma base $|n; \mathbf{R}(t)\rangle$ e separar o coeficiente de fase dinâmica obtemos:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_m c_m(t) |m; \mathbf{R}(t)\rangle = \sum_m a_m(t) e^{-i/\hbar \int_0^t dt' E_m(t')} |m; \mathbf{R}(t)\rangle. \quad (\text{A.15})$$

Em uma evolução adiabática com a condição inicial (A.13), a expressão acima toma a seguinte forma:

$$|\psi(t)\rangle \stackrel{\text{adiabático}}{\Downarrow} c_n(t)|n; \mathbf{R}(t)\rangle = a_n(t)e^{-(i/\hbar)\int_0^t dt' E_n(t')}|n; \mathbf{R}(t)\rangle, \quad (\text{A.16})$$

onde $a_n(0) = 1$ de acordo com a equação (A.13). A equação (A.16) é uma igualdade aproximada, que indicamos pela qualificação adiabática. Inserindo (A.16) na equação de Schrödinger (3.3), obtemos

$$\frac{d}{dt}a_n(t) = -a_n\langle n; \mathbf{R}(t)|\frac{d}{dt}|n; \mathbf{R}(t)\rangle. \quad (\text{A.17})$$

Ao integrar a equação (A.17), obtemos ainda

$$a_n(t) = e^{\int_{R_0}^R i\langle n; \mathbf{R}(t)|\frac{\partial}{\partial R_j}|n; \mathbf{R}(t)\rangle dR_j} \equiv e^{i\gamma_n(t)}. \quad (\text{A.18})$$

Os coeficientes $c_n(t)$ e $a_n(t)$ são fatores de fase porque o vetor normalizado $|\psi(t)\rangle$ foi obtido a partir de $|\psi(0)\rangle$ por uma evolução unitária. Isto justifica a definição de $\gamma_n(t)$ como um ângulo de fase real.

O ângulo de fase $\gamma_n(t)$ é definido em termos de uma integral sobre a função vetorial univocamente definida

$$\mathbf{A}^n(\mathbf{R}) \equiv i\langle n; \mathbf{R}(t)|\nabla_R|n; \mathbf{R}(t)\rangle. \quad (\text{A.19})$$

Ela é definida como o produto escalar dos autovetores de $h(t)$ e suas derivadas em relação ao parâmetro \mathbf{R} , $\nabla_R|n; \mathbf{R}\rangle$.

A integral

$$\gamma_n(t) = \int_{\mathbf{R}(0)}^{\mathbf{R}(t)} i\langle n; \mathbf{R}(t)|\frac{\partial}{\partial R_j}|n; \mathbf{R}(t)\rangle dR_j \quad (\text{A.20})$$

$$= \int_{\mathbf{R}(0)}^{\mathbf{R}(t)} A_j^n(\mathbf{R}) dR^j. \quad (\text{A.21})$$

não depende da parametrização. Para qualquer \mathbf{A}^n podemos definir uma forma diferencial $A_j^n dR^j$ que é invariante sob mudança de variáveis.

Assim, a expressão do estado de um sistema que sofreu uma evolução adiabática com a condição inicial dada por (A.13) é escrita como

$$|\psi(t)\rangle = e^{-(i/\hbar)\int_{t_0}^t dt' E_n(t')} e^{i\gamma_n(t)}|n; \mathbf{R}(t)\rangle. \quad (\text{A.22})$$

Como os autovetores normalizados $|n; \mathbf{R}(t)\rangle$ são completamente determinados a menos de um fator de fase, então, podemos definir um novo sistema de autovetores realizando uma transformação de fase

$$|n; \mathbf{R}(t)\rangle \rightarrow |n; \mathbf{R}(t)\rangle' = e^{i\zeta_n(\mathbf{R}(t))}|n; \mathbf{R}(t)\rangle, \quad (\text{A.23})$$

onde $\zeta_n(\mathbf{R}(t))$ são ângulos arbitrários de fase. Tal base constitui também uma base válida de autovetores em \mathcal{H} .

Assim, da equação (A.23) podemos efetuar uma transformação de calibre do tipo

$$\begin{aligned} A^n \rightarrow A'^n &= i\langle n; \mathbf{R}' | (\nabla |n; \mathbf{R}'\rangle) \\ &= i\langle n; \mathbf{R} | e^{-i\zeta_n(\mathbf{R})} (\nabla e^{i\zeta_n(\mathbf{R})} |n; \mathbf{R}\rangle) \\ &= i\langle n; \mathbf{R} | \nabla |n; \mathbf{R}\rangle + ie^{-i\zeta_n(\mathbf{R})} (\nabla e^{i\zeta_n(\mathbf{R})}) \end{aligned}$$

ou

$$A^n(\mathbf{R}) \rightarrow A'^n(\mathbf{R}) = A^n(\mathbf{R}) - \nabla\zeta_n(\mathbf{R}) \quad (\text{A.24})$$

Portanto,

$$\gamma_n(t) = \int_{R(0)}^{R(t)} \mathbf{A}^n(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{R} \rightarrow \int_{R(0)}^{R(t)} \mathbf{A}'^n(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{R} = \gamma_n(t) - \zeta_n(\mathbf{R}(t)) + \zeta_n(\mathbf{R}(0)) = \gamma'_n(t). \quad (\text{A.25})$$

Repetindo os cálculos que produziram (A.22) usando $|\mathbf{R}; n\rangle'$ ao invés de $|\mathbf{R}; n\rangle$ nós obteremos

$$e^{i\gamma'_n(t)} |n; \mathbf{R}(t)\rangle' = e^{i\gamma'_n(t)} e^{i\zeta_n(t)} |n; \mathbf{R}(t)\rangle. \quad (\text{A.26})$$

Usando o fato que $\zeta_n(t)$ é uma função módulo 2π unívocamente definida, podemos escolher um fator de fase unitário de forma que

$$|\psi(t)\rangle = e^{-(i/\hbar) \int_0^t dt' E_n(t')} |n; \mathbf{R}(t)\rangle. \quad (\text{A.27})$$

Isto satisfaz a condição inicial (A.13). Uma vez que $|n; \mathbf{R}'\rangle$ também é uma base assim como $|n; \mathbf{R}\rangle$, podemos descrever a evolução no tempo do vetor de estado por (A.22) com um fator de fase somente.

Os argumentos anteriores fazem uso do fato que $\zeta_n(t)$ foi arbitrário. Se depois de algum período T os parâmetros do ambiente retornam aos seus valores iniciais, isto é, $\mathbf{R}(T) = \mathbf{R}(0)$ de modo que $\Lambda(t)$ evolui ao longo de uma trajetória fechada,

não podemos escolher ζ_n livremente para remover γ_n . Neste caso, $\gamma_n(T)$ é dado por uma integral de linha sobre a trajetória correspondente Γ

$$\gamma_n(t) = \oint_C i \langle n; \mathbf{R} | \frac{\partial}{\partial R^j} | n; \mathbf{R} \rangle dR^j = \oint_C \mathbf{A}^n(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{R}. \quad (\text{A.28})$$

Uma vez que $e^{i\zeta_n(\mathbf{R})}$ é unívoca, temos para $\mathbf{R}(T) = \mathbf{R}(0)$

$$e^{i\zeta_n(\mathbf{R}(T))} = e^{i\zeta_n(\mathbf{R}(0))} \quad \text{ou} \quad \zeta_n(\mathbf{R}(T)) = \zeta_n(\mathbf{R}(0)) + 2\pi \cdot \text{inteiro}. \quad (\text{A.29})$$

Portanto, de acordo com (A.25)

$$\begin{aligned} \gamma_n(T) \rightarrow \gamma'_n(T) &\equiv \oint_C \mathbf{A}^n(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{R} = \gamma_n(T) - 2\pi \cdot \text{inteiro} \\ &= \oint_C \mathbf{A}^n(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{R} - 2\pi \cdot \text{inteiro}. \end{aligned}$$

$\gamma_n(T)$ é invariante sob a transformação (A.23) dos vetores $|n; R\rangle$ e não pode ser removido. Portanto,

$$|\psi(t)\rangle = e^{-(i/\hbar) \int_0^t dt' E_n(t')} |n; \mathbf{R}(t)\rangle. \quad (\text{A.30})$$

O fator de fase $\gamma_n(t)$ é conhecido como *ângulo de fase de Berry* e $e^{i\gamma_n(t)}$ é chamado de *fator de fase de Berry*. Em resumo, a única exceção ocorre quando os parâmetros do sistema retornam aos seu valores originais, $\mathbf{R}(T) = \mathbf{R}(0)$ de forma que $\Lambda(t)$ evolui ao longo de uma trajetória fechada.

Apêndice B

$$e^{i\alpha\frac{N}{2}}|z_1, z_2, \mathbf{p}\rangle = |z_1 e^{i\frac{\alpha}{2}}, z_2 e^{i\frac{\alpha}{2}}, \mathbf{p}\rangle$$

Considerando que

$$e^{i\alpha N/2}|z_1, z_2, p\rangle = e^{i\alpha N_1/2} e^{i\alpha N_2/2}|z_1, z_2, p\rangle, \quad (\text{B.1})$$

pois,

$$N = N_1 + N_2 \quad e \quad [N_1, N_2] = 0 \quad (\text{B.2})$$

com $N_j = a_j^\dagger a_j$ e ($j = 1, 2$), e lembrando que

$$|z_1, z_2, p\rangle = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(|z_1|^2 + |z_2|^2)} \frac{(z_1)^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \frac{(z_2)^{n_2}}{\sqrt{n_2!}} |n_1, n_2, p\rangle, \quad (\text{B.3})$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} e^{i\alpha\frac{N}{2}}|z_1, z_2, \mathbf{p}\rangle &= e^{i\alpha\frac{N_1}{2}} e^{i\alpha\frac{N_2}{2}} \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(|z_1|^2 + |z_2|^2)} \frac{(z_1)^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \frac{(z_2)^{n_2}}{\sqrt{n_2!}} |n_1, n_2, p\rangle \\ &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(|z_1|^2 + |z_2|^2)} \frac{\left(z_1 e^{i\frac{\alpha}{2}}\right)^{n_1}}{\sqrt{n_1!}} \frac{\left(z_2 e^{i\frac{\alpha}{2}}\right)^{n_2}}{\sqrt{n_2!}} |n_1, n_2, p\rangle \\ &= |z_1 e^{i\frac{\alpha}{2}}, z_2 e^{i\frac{\alpha}{2}}, \mathbf{p}\rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Onde utilizamos: $e^{iN_1/2}|z_1\rangle = e^{in_1/2}|n_1\rangle$.

Referências Bibliográficas

- [1] Collins, G. P., *Nós quânticos na computação* Sci. Am. Brasil, 2006/05 (49).
- [2] Michael A. Nielsen, Isaac L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge, 1^a ed, 2000.
- [3] Xiang-Yu and Miki Wadati, *Geometric phase of entangled spin pairs in a magnetic field*, *Phys. Rev. A* **72**, (2005).
- [4] F de Zela, *Topological phase for entangled two-qubit states and the representation of the $SO(3)$ group*, *J. Opt. B: Quantum Semiclass Opt.* **7**, (2005).
- [5] A. Mair *et al.*, *Storage of Light in Atomic Vapor*, *Nature (London)* **412**, (2001).
- [6] Galvez, E. J. *et al.*, *Geometric Phase Associated with Mode Transformations of Optical Beams Bearing Orbital Angular Momentum*, *Phys. Rev. Lett.*, **90**, 203901 (2003).
- [7] Pérola Milman and Remy Mosseri, *Topological Phase for Entangled Two-Qubit States*, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 230403 (2003).
- [8] J. A. Jones *et al.*, *Geometric Quantum Computation Using Nuclear Magnetic Resonance*, **403** (2000).
- [9] L. Allen *et al.*, *Topological Phase for Entangled Two-Qubit States*, *Phys. Rev. A* **45**, (1992).
- [10] Padgett, M. J., Courtial, J., *Poincaré-Sphere Equivalent For Light Beams Containing Orbital Angular Momentum* *Optics Letters*, **24**, 430 (1999).

- [11] Pancharatnam, S., 1956, Proc. Indian Acad. Sci. Sect. A, 44, 247; reprinted in 1975, Collected Works of S. Pancharatnam, Oxford Univ. Press, London.
- [12] Berry, M. V., Proc. Roy. Soc. London, Ser A **392**, 45 (1984).
- [13] Leonard Mandel and Emil Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*, 1ed, Cambridge University Press, EUA, 1995.
- [14] Siegman, A. E., *Lasers*, University Science Books, Mill Valley, CA, EUA, 1986.
- [15] Beijersbergen, M. W., *et al*, *Astigmatic Laser Mode Converters and Transfer of Orbital Angular Momentum* Opt. Commun, **96**, 123 (1993).
- [16] Born, M., Wolf, E., *Principles of Optics*, Pergamon, EUA, 1980.
- [17] Heckenberg, N. R., *et al*, *Generation of optical phase singularities by computer-generated holograms* Optics Letters, **17**, 221 (1992).
- [18] Petrov, D. V., Canal, F., Torner, L., *A simple method to generate optical beams with a screw phase dislocation* Opt. Commun, **143**, 265 (1997).
- [19] Gouy, C. R. Acad. Sci. Paris **110**, 1251 (1890).
- [20] Gouy, Ann. Chim. Phys. Ser. 6, **24** (1891).
- [21] Padgett, M. and Allen, L. *Light with a twist in its tail* Cont. Phys., **41**, 275 (2000).
- [22] SSR Oemrawsingh *et al*, *Production and Characterization of Spiral Phase Plates for Optical Wavelengths* Applied Optics., **43**, 688 (2004).
- [23] SSR Oemrawsingh *et al*, *Optical spin-to-orbital angular momentum conversion in inhomogeneous anisotropic media* Phys. Rev. Lett. **96**, 163905 (2006).
- [24] Arno Bohm, *Quantum Mechanics Foundations and Applications*, Springer-Verlag, 3 edição (1993).
- [25] Hecht, Eugene, *Optics*, Addison-Wesley Longman, 3 edição, EUA, 1998.
- [26] Cohen-Tannoudji, C., Diu, B., Laloë, F., *Quantum Mechanics*, vol. 1, ed. John Wiley & Sons, 1 edição, 1977.

- [27] Anandan, J. and Stodolsky, Phys. Rev. D **35** 2597-2600 (1987).
- [28] Allen, L. et al *Orbital angular momentum of light and transformation of Laguerre-Gaussian laser modes* Phys. Rev. A, (45) **11** (1992).
- [29] van Enk, S. J., *Opt. Commun*, **102**, 59 (1993).
- [30] Allen, L. et al *Phys. Rev. E*, **60** **11** (1999)
- [31] Galvez, E. *Applications of Geometric Phase in Optics*, <http://departments.colgate.edu/physics/faculty/EGalvez/articles/PreprintRflash.pdf> em 04/01/2007.
- [32] Coutinho, B. C. S. *Dissertação de Mestrado*, Universidade Federal Fluminense, 10/2004.
- [33] Huguenin, J. A. O., *Dissertação de Doutorado*, Universidade Federal Fluminense, 01/2006.
- [34] Griffiths, D. J., *Introduction to electrodynamics*, 3th ed., Prentice Hall, EUA, 1999.