

Universidade Federal Fluminense

Instituto de Física



INSTITUTO DE FÍSICA  
Universidade Federal Fluminense

## **Correlações espaciais e temporais na amplificação e oscilação paramétrica**

Tese apresentada ao Curso de Pós-  
Graduação em Física, como requisito  
parcial para obtenção do título de  
Doutor em Física.

**Jose Augusto Oliveira Huguenin**

Orientador: **Prof. Dr. Antonio Zelaquett Khoury**

Niteroi - R.J.

Janeiro 2006

*"A terra estava informe e vazia e o Espírito de Deus pairava sobre as águas. Deus disse: 'Faça-se a luz'. E a luz se fez."*

Gênese, 1, 2-3

À memória de José Maria Huguenin.

Pai amoroso, homem honrado.

Dedico este trabalho à minha família

A minha mãe, Doris, e meus irmãos Livia e João Paulo

Obrigado pelo amor, pelo conforto nas horas difíceis, pela certeza na  
horas de dúvidas.

A minha esposa Julliane

Obrigado por dar-me sempre a certeza do amor verdadeiro, por poder  
partilhar meus dias com alguém tão especial.

## Agradecimentos:

Muito obrigado ao meu orientador, Prof. Antonio Zelaquett Khoury, pela dedicação e confiança. Tenho muita admiração pela sua determinação e coragem. Abraçou um projeto e ergueu um Laboratório do zero.

Agradeço ao Prof. Paulo Acioly dos Santos pelos ensinamentos e amizade. Abriu-me as portas de seu Laboratório e de seu saber.

Obrigado ao Prof. Paulo Henrique Souto Ribeiro, ao Dr. Dilson Pereira dos Santos e Marcelo P. de Almeida. Muito aprendi no Laboratório Ótica quântica da UFRJ, onde passei boa parte do doutorado desfrutando da estrutura e da amizade.

Aos Professores Paulo Nussenzeig e Marcelo Martinelli, do IF-USP, meu muito obrigado pela acolhida em seu laboratório me permitindo o primeiro contato com o OPO.

Obrigado aos amigos Bernardo Coutinho e Felipe Dimer, ao lado de quem iniciei esta jornada e com quem divido todas as alegrias vividas neste percurso.

Obrigado ao grupo ótica quântica da UFF, pelo ótimo ambiente de trabalho. A seus professores Kaled Dechoum, Daniel Jonathan e Murray Olsen. Aos companheiros Carlos Eduardo Souza, Luciano Fonseca, Juliana Thimoteo da Costa . Aos alunos de IC Marcelo e Diego, coragem.

A todos os amigos do curso de Pós Graduação da UFF , obrigado, pelo ótimo ambiente, pelas discussões acaloradas sobre física e sobre vida.

Obrigado as professores do curso de Pós Graduação da UFF, sua atenção e profissionalismo foram imprescindíveis nesta escalada.

Je voudrais remercier le professeur Claude Fabre par l'accueil dans son groupe de recherche au Laboratoire Kastler Brossel pendant mon estage de doctorat. Je

remercie l'occasion et la confiance. Cet estage a été un excellent opportunité pour apprendre beaucoup sur l'OPO, sur la Physique.

Je voudrais remercier le Dr. Thomas Coudreau, qui m'a dédié beaucoup de son temps, s'amitié et qui a fait cet estage tellement fructifère et plaisant.

J'ai beaucoup a remercier Julien Laurat, qui a trop m'enseigné sur les techniques de detection et estabilization des cavités. Merci par s'attention et amitié dehors et dans le labo. Merci aussi a Gaëlle Keller par la compagnie pendant le travaille. Ces deux personnes ont été des vrais amis pendant toute mon sejour en France.

Je voudrias remercier tout le monde qu'ont partagé avec moi son temps, l'aide et gentillesse: Nicolas Treps, Agnés Maitre, Sylvain Gigan, Laurent Lopez, Antonino, Marco, Monique Bonamy, Laëtticia Morel et a Fabrizzio Villa, mon ami italien en France.

Obrigado ao companheiro Ivan Ferreira pela ótima companhia do outro lado do Atlântico.

Obrigado às funcionárias da Biblioteca do IF-UFF, Ana Maria, Lucia Regina, Rita, Katia e todos os outros, que realizam um trabalho excelente, tornado a convivência no Instituto ainda mais prazeroza. Obrigado.

Obrigado aos funcionários da Oficina Mecânica, Nelson, Sérgio e Edmilson, e Oficina Eletrônica, Marcos, Alan e Yasser, pela ajuda na confecção de peças imprescindíveis para a montagem do Laboratório.

Agradeço o apoio financeiro à CAPES, suporte indispensável para a realização desta tese. Agradeço à CAPES a bolsa de estágio de doutorado no exterior, como parte integrante do projeto CAPES-COFFECUB.

Um agradecimento pessoal e importantíssimo faço às duas familias que me adotaram em Niterói. Ao Marcelo, Leila, Marcelinho e André, e a sr. Luiz, D. Leda e Ana.

## Resumo

Este trabalho é baseado na conversão paramétrica de frequências. Nos concentramos em dois sistemas: A conversão paramétrica descendente (CPD) espontânea e estimulada, livre de cavidade, e o oscilador paramétrico ótico (OPO). Nos dois sistemas temos um feixe laser bombeando um cristal não linear produzindo dois outros feixes, chamados sinal e complementar. Apresentamos também um estudo sobre feixes luminosos portadores de momento angular orbital (MAO), discutindo assim os chamados modos de Laguerre-Gauss. São utilizados dois métodos diferentes para se obter estes modos experimentalmente. Um dos métodos emprega hologramas, conhecidos como placas zonais espirais. Este método é utilizado para observarmos a transferência de MAO na conversão paramétrica descendente estimulada livre de cavidade. Como mostramos, a conservação da carga topológica total é observada na amplificação paramétrica estimulada. De acordo com nossos resultados este processo é mais complicado na oscilação paramétrica, onde efeitos de cavidade são importantes. Medidas de redução de ruído nas quadraturas dos feixes convertidos são apresentadas.

Também foi observado franjas de moiré na superposição de placas zonais espirais. Estas franjas apresentam defeitos topológicos como aqueles observados na interferência de vórtices óticos. Este trabalho incentivou o estudo de franjas de moiré em correlações quânticas espaciais de fótons gêmeos produzidos pela conversão paramétrica descendente espontânea. Podemos evidenciar batimentos espaciais, típicos de franjas moiré, no perfil de coincidências dos fótons gêmeos.

## Abstract

This work is based on studies of parametric frequency conversion. It is concentrated in two different systems: Spontaneous and stimulated cavity free parametric down conversion (PDC) and an optical parametric oscillator. Both systems use a laser beam to pump a non linear crystal to produce two new beams, called signal and idler. Studies about light beams carrying orbital angular momentum (OAM) are presented, and the Laguerre-Gauss modes are also discussed. Two different methods are used to obtain these modes experimentally. One method employs holograms known as spiral zones plates (SZP). This method was used to observe OAM transfer in cavity free stimulated parametric down conversion. As we show, parametric amplification is subject to conservation of the total topological charge. According to our results, the situation is somewhat more complicated in parametric oscillation, where cavity effects are important. Squeezing of signal and idler quadratures is presented.

We also observed moiré fringes patterns when SZP's are superposed. These patterns present topological defects as those observed in optical vortices interference. This work motivated a new study about moiré fringe patterns in spatial quantum correlations of twin photons produced by spontaneous PDC. We observed the spatial beats, characteristic of moiré fringes, in the coincidence profile of the twin photons.



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Introdução à Ótica Quântica</b>	<b>5</b>
2.1	Quantização do campo . . . . .	7
2.1.1	Hamiltoniana do campo livre . . . . .	9
2.1.2	Estados de Fock . . . . .	12
2.1.3	Estados coerentes . . . . .	14
2.1.4	Quadraturas do campo . . . . .	15
2.1.5	Fotodeteção . . . . .	18
2.2	Correlações Temporais . . . . .	21
2.2.1	Estados comprimidos . . . . .	21
2.2.2	Emaranhamento e Compressão do ruído . . . . .	24
2.3	Correlações Espaciais . . . . .	28
2.3.1	Teoria Clássica da Coerência . . . . .	28
2.3.2	Coerência de ordem superior . . . . .	31
2.4	Correlações Quânticas . . . . .	32
2.4.1	Função de correlação de primeira ordem . . . . .	32

2.4.2	Função de correlação de segunda ordem . . . . .	33
<b>3</b>	<b>Momento Angular Orbital da Luz</b>	<b>35</b>
3.1	Momento angular da luz . . . . .	36
3.1.1	Decomposição do momento angular . . . . .	37
3.2	Modos de Laguerre-Gauss . . . . .	38
3.2.1	Esfera de Poincaré para modos transversos . . . . .	41
3.3	Geração de feixes luminosos portando momento angular orbital . . .	44
3.3.1	Método holográfico . . . . .	44
3.3.2	Conversores Astigmáticos de modos . . . . .	47
3.3.3	Obtenção de modos de Hermite . . . . .	50
3.3.4	Caracterização dos modos de Laguerre . . . . .	52
3.4	Defeitos topológicos em franjas de moiré . . . . .	52
3.4.1	Superposição entre PZEs . . . . .	54
3.4.2	Resultados experimentais . . . . .	57
<b>4</b>	<b>Amplificação Paramétrica</b>	<b>65</b>
4.1	Mistura de ondas ou conversão paramétrica de frequências . . . . .	67
4.1.1	Equação de onda em um meio não linear . . . . .	67
4.1.2	Equações de onda acopladas: CPD estimulada . . . . .	69
4.2	Conversão Paramétrica Descendente Espontânea: Fótons gêmeos . . .	73
4.2.1	Estado produzido pela interação paramétrica . . . . .	74
4.2.2	Transferência do espectro angular na CPD . . . . .	79
4.3	Transferência de momento angular orbital na CPD estimulada . . . .	83

4.3.1	Transferência do espectro Angular na CPD Estimulada . . . . .	84
4.3.2	Experimento com MAO . . . . .	87
4.4	Imagens quânticas e franjas de moiré não-locais na CPD Espontânea	93
4.4.1	Formação de Imagens . . . . .	93
4.4.2	Moiré não local: Teoria . . . . .	96
4.4.3	Moiré não local: Experimento . . . . .	106
<b>5</b>	<b>Oscilação Paramétrica</b>	<b>115</b>
5.1	Propriedades Clássicas de um Oscilador Paramétrico Ótico . . . . .	118
5.1.1	Equações de acoplamento em cavidades . . . . .	119
5.1.2	Condições de Oscilação . . . . .	123
5.2	Transferência de momento angular orbital em um oscilador paramétrico ótico do tipo II . . . . .	126
5.2.1	Experimento . . . . .	127
5.2.2	Cavidade Astigmática . . . . .	133
5.2.3	Modelo Teórico . . . . .	137
5.3	OPO com auto-travamento de fase . . . . .	146
5.4	Perspectivas . . . . .	155
<b>6</b>	<b>Conclusões</b>	<b>160</b>
<b>A</b>	<b>Propagação paraxial em meios anisotrópicos</b>	<b>164</b>
<b>B</b>	<b>Lista de publicações</b>	<b>171</b>

# Capítulo 1

## Introdução

Nos últimos anos muito se avançou no campo da ótica. Desde o surgimento do laser em 1960 as possibilidades de investigação experimental se multiplicaram, sobretudo, na continuidade dos estudos sobre da interação da radiação com a matéria. A ótica não-linear teve seu início com a geração do segundo harmônico [1], onde um feixe laser de frequência  $\omega$  bombeando um cristal não linear dá origem a um outro feixe de frequência  $2\omega$ . Baseando-se sempre em um cristal não-linear bombeado por um mais feixes, muitos outros experimentos foram realizados, como a geração de soma de frequências [2] e diferença de frequência [3, 4].

O estudo quântico da luz provoca uma revisita a estes efeitos não-lineares. O surgimento da ótica quântica traz consigo a explicação para conversão paramétrica descendente [5], por exemplo. Mais do que isto, enxerga-se em experimentos de ótica quântica o ambiente apropriado para discutir os fundamentos da mecânica quântica. Exemplo disto é a violação da desigualdade de Bell [6], depondo a favor da teoria quântica.

Um dos pontos mais intrigantes do último século, o paradoxo de EPR [7], proposto por Einstein, Podolsky e Rosen para posição e momento de uma partícula

ganha a viabilidade de um estudo experimental, em termos de variáveis contínuas, como as quadraturas do campo eletromagnético [8].

Novos campos vão surgindo, como a comunicação e a informação quântica. Muitos estudos vem sendo realizados em várias partes do mundo em teleportação [9, 10], computação quântica [11] e criptografia quântica [12, 13, 14]. Estudos mais recentes tratam da distribuição quântica de chaves para criptografia [15].

Nesta tese exploramos a conversão paramétrica decendente e a oscilação paramétrica realizando diferentes estudos.

No capítulo 2 fazemos uma breve introdução à ótica quântica, revendo os principais resultados desta teoria, que serviram de base para os estudos realizados nesta tese. Discutimos a quantização do campo eletromagnético, correlações temporais e espaciais.

O capítulo 3 traz um estudo sobre os sobre o momento angular orbital (MAO) da luz. Neste capítulo descrevemos os modos de Laguerre-Gauss (LG), que podem carregar MAO, bem como métodos para obtenção experimental de tais feixes luminosos. Discutimos o método holográfico, onde construímos hologramas capazes de gerar modos LG. Estes hologramas são uma variação da placa zonal de Fresnel e são chamados Placas Zonais Espirais(PZE). Também apresentamos o método que utiliza conversores astigmáticos, construídos a partir de lentes cilíndricas. Estudamos o aparecimento de franjas de moiré com a superposição de PZE's. As franjas de moiré são estruturas que surgem quando uma, ou mais, estruturas repetitivas são superpostas. Neste caso, observamos o surgimento de franjas de moiré portando os mesmos defeitos topológicos observados na interferência dos feixes que são gerados por estes hologramas.

No capítulo 4 descrevemos a CPD estimulada e espontânea, revendo os principais resultados. Estudamos a transferência do espectro angular do bombeamento

para a correlação do feixes convertidos, bem como o efeito de conjugação de fase. Mostramos experimentalmente a transferência do MAO na CPD espontânea. Neste trabalho, observamos a transferência do MAO do bombeamento para o feixe complementar, bem como a transferência do MAO do feixe auxiliar, ficando evidente a conservação do MAO neste processo. Outro trabalho apresentado neste capítulo é a observação de franjas de moiré não locais. Observamos as franjas de moiré no perfil de coincidências de sinal e complementar, quando duas grades com um perfil de transmissão cossenoidal eram remotamente colocadas no caminho dos feixes envolvidos no processo. Exploramos os casos onde o perfil de coincidências fosse proporcional ao produto das transmissões das duas grades. Dois regimes são explorados para obter este efeito. Em um primeiro caso colocamos uma das grades no feixe de bombeamento, sabendo que o espectro angular do bombeamento é transferido para o perfil de coincidências. Uma segunda grade é colocada em frente de um dos detectores. No segundo caso as grades são colocadas no caminho de sinal e complementar, arranjadas seguindo a interpretação de ondas avançadas, para termos o produto das grades no perfil de coincidências. Também apresentamos cálculos mostrando que, nos dois casos, temos o perfil de coincidência proporcional ao produto das grades.

O capítulo 5 é dedicado ao estudo do oscilador paramétrico ótico (OPO). Apresentamos um breve estudo das principais características deste sistema, calculando seu limiar de oscilação e obtendo expressões para os feixes convertidos. Estudamos a transferência de MAO em um OPO do tipo II, bombeando OPO, acima do limiar, com um feixe preparado no modo  $LG_0^1$ . Discutimos as condições para que a conservação do MAO seja observada. Veremos que a anisotropia do cristal exerce um papel fundamental nesta dinâmica. Realizamos um estudo completo da propagação de modos transversos em meios birrefringentes. Apresentamos medidas de compressão de ruído para as quadraturas dos feixes gerados pelo OPO, como resultado do estágio de doutorado sanduíche no Laboratoire Kastler Brossel, Paris. Uma

medida de separabilidade de sinal e complementar, aplicando o critério de Duan, abaixo do limiar, é apresentada. Por fim, apresentamos a montagem do Laboratório de Ótica Quântica da UFF, mostrando resultados preliminares e perspectivas para continuidade do trabalho.

No capítulo 6, concluimos, destacando os principais resultados dos estudos realizados durante a tese.

# Capítulo 2

## Introdução à Ótica Quântica

### Contents

---

<b>2.1</b>	<b>Quantização do campo</b>	<b>7</b>
2.1.1	Hamiltoniana do campo livre	9
2.1.2	Estados de Fock	12
2.1.3	Estados coerentes	14
2.1.4	Quadraturas do campo	15
2.1.5	Fotodeteção	18
<b>2.2</b>	<b>Correlações Temporais</b>	<b>21</b>
2.2.1	Estados comprimidos	21
2.2.2	Emaranhamento e Compressão do ruído	24
<b>2.3</b>	<b>Correlações Espaciais</b>	<b>28</b>
2.3.1	Teoria Clássica da Coerência	28
2.3.2	Coerência de ordem superior	31
<b>2.4</b>	<b>Correlações Quânticas</b>	<b>32</b>
2.4.1	Função de correlação de primeira ordem	32



Luz : Onda ou partícula? Existem experimentos [6] que são capazes de produzir um único fóton, que podem se comportar como partícula levando-se em conta sua inseparabilidade. Porém, se enviarmos estes fótons, um a um, em uma fenda dupla de Young o que teremos será um padrão de interferência. O que temos então é a dualidade partícula-onda. A ótica quântica ocupa hoje um lugar de destaque na pesquisa de física básica pois ela permite a investigação e compreensão de muitos fenômenos que não poderiam ser descritos classicamente . Pensando na evolução do conhecimento a respeito da luz, podemos evocar a descrição corpuscular dada por Newton como grande contribuição. Esta visão é abandonada mais tarde após a bela descrição, feita por Maxwell, unificando a eletrecidade e o magnetismo onde a luz era compreendida como oscilações tipo-ondas dos campos elétrico e magnético propagando-se no espaço. Já no final do século XIX outra mudança de paradigma é exigida frente à catástrofe do ultra-violeta, associada à radiação do corpo negro, onde foi necessária a introdução do quanta de energia por Planck para a explicação do seu espectro. Um pouco mais tarde Einstein estende esta idéia e explica o efeito fotoelétrico introduzindo o conceito de fóton.

Somente com Dirac em 1927 [16], e Fermi em 1932 [17] o aspecto corpuscular e ondulatório da luz viria a ser combinado e apareceria a atual descrição do campo quantizado. A quantização do campo eletromagnético tem como consequência interessante, por que não intrigante, flutuações do ponto zero de energia, dita *flutuação do vácuo*. Tal quantização se torna necessária para explicar vários fenômenos como a emissão espontânea, o efeito casimir, o estudo completo da estatística de fótons em um laser.

Entre tantos fenômenos, os estudos apresentados nesta tese evidenciam o caráter quantizado da luz tanto na Conversão Paramétrica Descendente, como na

geração de estados não-clássicos da luz em Osciladores Paramétricos Óticos. Farei portanto uma apresentação resumida da quantização do campo, como apresentado na referência [22], descrevendo o estado de Fock e o estado Coerente. Falaremos da teoria de fotodeteção e sobre correlações na ótica quântica

## 2.1 Quantização do campo

Comecemos tomando as equações de Maxwell para os campos elétrico  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  e magnético  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  no vácuo, na ausência de fontes:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) &= 0, \\ \nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) &= -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) &= 0, \\ \nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t},\end{aligned}\tag{2.1}$$

onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo.

Podemos escrever os campos  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  e  $\vec{B}(\vec{r}, t)$  em função do potencial vetor, que no calibre de Coulomb ( $\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = 0$ ) se escreve:

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t), \quad \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\partial \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t}.\tag{2.2}$$

Associando as equações (2.1) e (2.2) à propriedade  $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$ , podemos escrever a equação de onda para  $\vec{A}(\vec{r}, t)$ :

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t^2},\tag{2.3}$$

sendo  $\vec{A}(\vec{r}, t)$  uma variável real.

A fim de encontrarmos o Hamiltoniano clássico do campo livre vamos expandir o potencial vetor na base de ondas planas e considerar que o campo está confinado em uma caixa cúbica de aresta  $L$ , satisfazendo às condições de periodicidade. A escolha do tamanho da caixa é arbitrária e os resultados não dependerão da dimensão  $L$ , sendo válidos mesmo para o limite  $L \rightarrow \infty$  (campo livre). Fazendo a expansão temos:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 L^3}} \sum_{\vec{k}} \vec{A}_{\vec{k}}(\vec{r}, t) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}, \quad (2.4)$$

onde  $\epsilon_0$  é a permissividade do vácuo. O vetor de onda  $\vec{k}$  tem as seguintes componentes:

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L} (n_x \hat{x}, n_y \hat{y}, n_z \hat{z}), \quad (2.5)$$

e  $n_j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  ( $j = x, y, z$ ).

Assumindo que  $\vec{A}(\vec{r}, t)$ , de frequência  $\omega$ , é real, temos que  $\vec{A}_{\vec{k}}^*(\vec{r}, t) = \vec{A}_{-\vec{k}}(\vec{r}, t)$ , logo a equação de onda (2.3) nos fornecerá:

$$\vec{A}_{\vec{k}} = \vec{c}_{\vec{k}} e^{-i\omega t} + \vec{c}_{\vec{k}}^* e^{i\omega t}. \quad (2.6)$$

Satisfazendo a condição do calibre  $\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}, t) = 0$  temos  $\vec{k} \cdot \vec{A}_{\vec{k}}(\vec{r}, t) = 0$ , o que implica na transversalidade do potencial vetor com a direção de propagação. Podemos assim escrever o vetor  $\vec{c}_{\vec{k}}$  por meio de dois versores ortogonais  $\hat{\epsilon}_{\vec{k},s}$ ,  $s = 1, 2$ , chamados versores de polarização, de modo que

$$\begin{aligned}
 \vec{k} \cdot \hat{\epsilon}_{\vec{k},s} &= 0, \\
 \hat{\epsilon}_{\vec{k},s}^* \cdot \hat{\epsilon}_{\vec{k},s'} &= \delta_{s,s'}, \\
 \hat{\epsilon}_{\vec{k},s}^* \times \hat{\epsilon}_{\vec{k},s'} &= \frac{\vec{k}}{k}, \\
 \vec{c}_{\vec{k}} &= c_{k,1} \hat{\epsilon}_{\vec{k},1} + c_{k,2} \hat{\epsilon}_{\vec{k},2}.
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

A descrição complexa dos versores de polarização ainda nos permite escrevê-los tanto na base de polarização linear quanto na base circular. Desta forma escrevemos o potencial vetor como

$$\begin{aligned}
 \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 L^3}} \sum_{\vec{k},s} [c_{\vec{k},s} \hat{\epsilon}_{\vec{k},s} e^{-i\omega t} + c_{-\vec{k},s}^* \hat{\epsilon}_{\vec{k},s}^* e^{i\omega t}] e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 L^3}} \sum_{\vec{k},s} [c_{\vec{k},s} \hat{\epsilon}_{\vec{k},s} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + c_{\vec{k},s}^* \hat{\epsilon}_{\vec{k},s}^* e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 L^3}} \sum_{\vec{k},s} [u_{\vec{k},s}(t) \hat{\epsilon}_{\vec{k},s} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + u_{\vec{k},s}^*(t) \hat{\epsilon}_{\vec{k},s}^* e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}].
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

onde  $u_{\vec{k},s}(t) = c_{\vec{k},s} e^{-i\omega t}$  é a amplitude complexa do modo  $\hat{\epsilon}_{\vec{k},s} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$ . Com o potencial vetor podemos obter a partir de 2.2 os campos elétrico e magnético:

$$\begin{aligned}
 \vec{E}(\vec{r}, t) &= \frac{i}{\sqrt{\epsilon_0 L^3}} \sum_{\vec{k},s} \omega [u_{\vec{k},s}(t) \hat{\epsilon}_{\vec{k},s} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} - u_{\vec{k},s}^*(t) \hat{\epsilon}_{\vec{k},s}^* e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}], \\
 \vec{B}(\vec{r}, t) &= \frac{i}{\sqrt{\epsilon_0 L^3}} \sum_{\vec{k},s} [u_{\vec{k},s}(t) (\vec{k} \times \hat{\epsilon}_{\vec{k},s}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} - u_{\vec{k},s}^*(t) (\vec{k} \times \hat{\epsilon}_{\vec{k},s}^*) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}].
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Sabemos que a energia do campo eletromagnético é escrita em termos dos campos  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  e  $\vec{B}(\vec{r}, t)$ , o que nos permite escrever a Hamiltoniana do campo livre.

### 2.1.1 Hamiltoniana do campo livre

A energia do campo eletromagnético livre é dada por

$$H = \frac{1}{2} \int_{L^3} [\epsilon_0 \vec{E}^2(\vec{r}, t) + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2(\vec{r}, t)] dv. \quad (2.10)$$

Tendo em conta (2.9) e realizando a integração em todo o volume  $L^3$  temos a energia dada por

$$u_H = 2 \sum_{\vec{k}, s} \omega^2 |u_{\vec{k}, s}(t)|^2. \quad (2.11)$$

Ou seja, a energia é dada pela soma sobre todos os modos da amplitude complexa  $u_{\vec{k}, s}(t)$ .

Para realizar a quantização, devemos expressar o Hamiltoniano em termos de um par de variáveis canônicas reais  $q_{\vec{k}, s}(t)$  e  $p_{\vec{k}, s}(t)$  definidas como:

$$\begin{aligned} q_{\vec{k}, s}(t) &= [u_{\vec{k}, s}(t) + u_{\vec{k}, s}^*(t)], \\ p_{\vec{k}, s}(t) &= -i\omega[u_{\vec{k}, s}(t) - u_{\vec{k}, s}^*(t)]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Com estas variáveis reescrevemos a Hamiltoniana do campo:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}, s} [p_{\vec{k}, s}^2(t) + \omega^2 q_{\vec{k}, s}^2(t)]. \quad (2.13)$$

Esta é uma expressão conhecida, que descreve a energia de um sistema de osciladores harmônicos independentes, correspondentes aos modos  $\vec{k}, s$  do campo. Para descrever o campo quantizado precisamos associar operadores do espaço de Hilbert às variáveis dinâmicas. Na quantização canônica, substituímos as variáveis  $q_{\vec{k}, s}(t)$  e  $p_{\vec{k}, s}(t)$  pelos operadores hermitianos  $\widehat{q}_{\vec{k}, s}(t)$  e  $\widehat{p}_{\vec{k}, s}(t)$  que obedecem as seguintes relações de comutação:

$$\begin{aligned} [\widehat{q}_{\vec{k}, s}(t), \widehat{q}_{\vec{k}', s'}(t)] &= 0, \\ [\widehat{p}_{\vec{k}, s}(t), \widehat{p}_{\vec{k}', s'}(t)] &= 0, \\ [\widehat{q}_{\vec{k}, s}(t), \widehat{p}_{\vec{k}', s'}(t)] &= i\hbar \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}^3 \delta_{s, s'}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

O operador Hamiltoniano será então

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k},s} [\hat{p}_{\vec{k},s}^2(t) + \omega^2 \hat{q}_{\vec{k},s}^2(t)]. \quad (2.15)$$

Temos assim a quantização do campo. Porém, por questões operacionais, não é usual utilizarmos esta quantização em termos dos operadores  $\hat{q}_{\vec{k},s}(t)$  e  $\hat{p}_{\vec{k},s}(t)$ , mas do operador de aniquilação  $\hat{a}_{\vec{k},s}(t)$  e de seu hermitiano conjugado, o operador de criação,  $\hat{a}_{\vec{k},s}^\dagger(t)$  do oscilador harmônico, definidos como

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\vec{k},s}(t) &= \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega}} \left( \omega \hat{q}_{\vec{k},s}(t) + i \hat{p}_{\vec{k},s}(t) \right), \\ \hat{a}_{\vec{k},s}^\dagger(t) &= \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega}} \left( \omega \hat{q}_{\vec{k},s}(t) - i \hat{p}_{\vec{k},s}(t) \right), \end{aligned} \quad (2.16)$$

com os quais obtemos facilmente as seguintes relações de comutação

$$\begin{aligned} [\hat{a}_{\vec{k},s}(t), \hat{a}_{\vec{k}',s'}(t)] &= 0, \\ [\hat{a}_{\vec{k},s}^\dagger(t), \hat{a}_{\vec{k}',s'}^\dagger(t)] &= 0, \\ [\hat{a}_{\vec{k},s}(t), \hat{a}_{\vec{k}',s'}^\dagger(t)] &= \delta_{\vec{k},\vec{k}'}^3 \delta_{s,s'}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

A menos de um fator de normalização, os operadores  $\hat{a}_{\vec{k},s}(t)$  e  $\hat{a}_{\vec{k},s}^\dagger(t)$  correspondem às amplitudes complexas  $\hat{u}_{\vec{k},s}(t)$  e  $\hat{u}_{\vec{k},s}^*(t)$ , respectivamente, e possuem a mesma dependência temporal na representação de Heisenberg

$$\hat{a}_{\vec{k},s}(t) = \hat{a}_{\vec{k},s}(0)e^{-i\omega t}, \quad \hat{a}_{\vec{k},s}^\dagger(t) = \hat{a}_{\vec{k},s}^\dagger(0)e^{i\omega t}. \quad (2.18)$$

Enfim, podemos escrever o Hamiltoniano do campo em função dos operadores de aniquilação e criação, que em ordem normal será

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k},s} \hbar\omega \left( \hat{a}_{\vec{k},s}^\dagger(t) \hat{a}_{\vec{k},s}(t) + \frac{1}{2} \right). \quad (2.19)$$

A contribuição  $\frac{\hbar\omega}{2}$  para cada modo corresponde à flutuação do vácuo, ou energia de ponto zero.

Por fim, podemos escrever os operadores de campo  $\widehat{E}(\vec{r}, t)$  e  $\widehat{B}(\vec{r}, t)$  em função dos operadores de aniquilação e criação:

$$\begin{aligned}\widehat{E}(\vec{r}, t) &= \frac{i}{L^{\frac{3}{2}}} \sum_{\vec{k}, s} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0}} \left[ \widehat{a}_{\vec{k}, s} \widehat{\epsilon}_{\vec{k}, s} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} - \widehat{a}_{\vec{k}, s}^\dagger \widehat{\epsilon}_{\vec{k}, s}^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \right], \\ \widehat{B}(\vec{r}, t) &= \frac{i}{L^{\frac{3}{2}}} \sum_{\vec{k}, s} \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega\epsilon_0}} \left[ \widehat{a}_{\vec{k}, s} (\vec{k} \times \widehat{\epsilon}_{\vec{k}, s}) e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} - \widehat{a}_{\vec{k}, s}^\dagger (\vec{k} \times \widehat{\epsilon}_{\vec{k}, s}^*) e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)} \right].\end{aligned}\quad (2.20)$$

Vimos assim como obter o Hamiltoniano para o campo livre, bem como os operadores do campo quantizado. Tratemos agora de alguns possíveis estados do campo, como o estado de Fock e os estados coerentes.

### 2.1.2 Estados de Fock

Reconhecemos no Hamiltoniano 2.19 o operador número

$$\widehat{n}_{\vec{k}, s} = \widehat{a}_{\vec{k}, s}^\dagger(t) \widehat{a}_{\vec{k}, s}(t). \quad (2.21)$$

O que nos permite escrever

$$\widehat{H} = \sum_{\vec{k}, s} \hbar\omega \left( \widehat{n}_{\vec{k}, s} + \frac{1}{2} \right). \quad (2.22)$$

Logo, os auto-estados do operador número formam uma base que poderemos utilizar para obter os autovalores do hamiltoniano do campo. Escrevemos então estes estados como:

$$\widehat{n}_{\vec{k}, s} |n_{\vec{k}, s}\rangle = n_{\vec{k}, s} |n_{\vec{k}, s}\rangle. \quad (2.23)$$

Estes operadores são associados, como sabemos, ao número de fótons em um certo modo. Assim  $|n_{\vec{k},s}\rangle$  é o estado do modo que contém  $n_{\vec{k},s}$  fótons. Podemos ainda observar que os operadores de aniquilação e criação agem nestes estados destruindo e criando, respectivamente, fótons em um dado modo, ou seja

$$\begin{aligned}\hat{a}_{\vec{k},s}|n_{\vec{k},s}\rangle &= \sqrt{n_{\vec{k},s}}|n_{\vec{k},s}-1\rangle, \\ \hat{a}_{\vec{k},s}^\dagger|n_{\vec{k},s}\rangle &= \sqrt{n_{\vec{k},s}+1}|n_{\vec{k},s}+1\rangle.\end{aligned}\quad (2.24)$$

Os operadores correspondem a diferentes  $\vec{k}, s$ , e portanto atuam em diferentes subespaços do espaço de Hilbert. Podemos então formar um vetor de estado que caracteriza todo o campo tomando o produto tensorial dos estados  $|n_{\vec{k},s}\rangle$  de todos os modos. Escrevemos de maneira simplificada

$$|\{n\}\rangle = \prod_{k,s}^{\otimes} |n_{\vec{k},s}\rangle. \quad (2.25)$$

Este estado é o chamado estado de Fock do campo, sendo caracterizado pelo conjunto infinito dos números de ocupação em cada modo  $\{n\} = n_{\vec{k}1,s1}, n_{\vec{k}2,s2}, n_{\vec{k}3,s3}, \dots$ . Dizemos também que o estado onde todos os modos estão desocupados é o estado de vácuo  $|0\rangle$  ou  $|vac\rangle$ . Percebemos ainda que o operador de criação atua em  $|\{n\}\rangle$ , o que nos permite escrever qualquer estado de Fock a partir do vácuo:

$$|\{n\}\rangle = \prod_{k,s}^{\otimes} \left[ \frac{(\hat{a}^\dagger)^{n_{\vec{k},s}}}{\sqrt{n_{\vec{k},s}!}} \right] |vac\rangle. \quad (2.26)$$

Da mesma forma,  $|\{n\}\rangle$  é autoestado do operador número, e por conseguinte do Hamiltoniano

$$\hat{H}|\{n\}\rangle = \sum_{\vec{k},s} \hbar\omega \left( n_{\vec{k},s} + \frac{1}{2} \right) |\{n\}\rangle. \quad (2.27)$$



Podemos assim identificar a energia total do campo

$$\varepsilon = \sum_{\vec{k},s} \hbar\omega \left( n_{\vec{k},s} + \frac{1}{2} \right), \quad (2.28)$$

onde fica evidenciado que mesmo para o campo vazio ( $n_{\vec{k},s} = 0$ ) temos uma energia não nula, e se somada para todos os modos tem um valor infinito. Esta energia no estado de vácuo pode ser interpretada como oscilações do campo elétrico na ausência de fótons. Os estados de Fock formam ainda uma base completa e ortonormal.

Este tipo de estado é conveniente para representar estados com baixo número de fótons, como os produzidos pelo processo de conversão paramétrica descendente espontânea, que será tratado ao longo da tese. Neste caso estamos em um regime de contagem de fótons. Quando temos estados intensos da luz, como o gerado em Osciladores Paramétricos Óticos, também estudados nesta tese, o tratamento é mais conveniente se feito por outra base, formada pelos estados coerentes.

### 2.1.3 Estados coerentes

O estado coerente é definido como sendo o autoestado do operador de aniquilação

$$\hat{a}_{\vec{k},s} |\alpha_{\vec{k},s}\rangle = \alpha_{\vec{k},s} |\alpha_{\vec{k},s}\rangle, \quad (2.29)$$

onde  $\alpha_{\vec{k},s}$  são os autovalores complexos. Estes estados, então, formam uma base contínua. Impondo a normalização, temos

$$|\alpha_{\vec{k},s}\rangle = e^{-\frac{|\alpha_{\vec{k},s}|^2}{2}} \sum_{n_{\vec{k},s}=0}^{\infty} \frac{\alpha_{\vec{k},s}^{n_{\vec{k},s}}}{\sqrt{n_{\vec{k},s}!}} |n_{\vec{k},s}\rangle. \quad (2.30)$$

Considerando um caso monomodo, podemos calcular, por exemplo, a média do operador número nesta base:

$$\langle n \rangle = \langle \alpha | \hat{n} | \alpha \rangle = |\alpha|^2, \quad (2.31)$$

o que nos fornece o número médio de fótons, sendo desta forma que relacionamos a amplitude complexa  $\alpha$  com o campo quantizado. Da mesma forma podemos calcular a variância do número de fótons

$$\Delta^2 n = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = |\alpha|^2. \quad (2.32)$$

A estatística de fótons para estes estados é Poissoniana.

### 2.1.4 Quadraturas do campo

Observáveis físicos são sempre descritos na mecânica quântica por operadores hermitianos. Como podemos ver, os operadores do campo elétrico não são hermitianos. Vamos então descrever o campo em função de suas quadraturas. Classicamente podemos descrever um campo elétrico na representação de Fresnel como

$$E(\vec{r}, t) = E_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi) = E_P \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) + E_Q \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t), \quad (2.33)$$

onde  $E_0$  e  $\varphi$  são a amplitude e a fase do campo.  $E_P$  e  $E_Q$  são as amplitudes reais das quadraturas de amplitude e de fase.

Os operadores de quadratura são definidos como

$$\begin{aligned} \hat{P} &= \frac{(\hat{a} + \hat{a}^\dagger)}{\sqrt{2}}, \\ \hat{Q} &= \frac{-i(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

onde  $\hat{P}$  é conhecido como operador da quadratura de Amplitude, e  $\hat{Q}$  o de fase. Podemos reescrever o campo elétrico de (2.21) como

$$\hat{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{L^{\frac{3}{2}}} \sum_{\vec{k}, s} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0}} \left[ \hat{P}_{\vec{k}, s} \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) + \hat{Q}_{\vec{k}, s} \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \right]. \quad (2.35)$$

### Desigualdade de Heisenberg

Os operadores de quadratura de um modo do campo eletromagnético têm a mesma relação de comutação dos operadores posição e momento de uma partícula

$$[\hat{P}, \hat{Q}] = i, \quad (2.36)$$

impondo, assim, um limite inferior ao produto das variâncias destes dois operadores, denotadas  $V(\hat{P})$  e  $V(\hat{Q})$ , isto é, obedecem a desigualdade de Heisenberg

$$V(\hat{P}) V(\hat{Q}) \geq 1. \quad (2.37)$$

As quadraturas não podem ser, portanto, medidas simultaneamente com uma precisão infinita. Suas flutuações constituem o *ruído quântico* da luz.

Podemos também representar o ruído fazendo uma superposição, dentro do plano de Fresnel, de um campo clássico e suas flutuações. O campo clássico é representado por um vetor em que a norma fornece a amplitude e o ângulo a fase. A natureza quântica da luz faz aparecer flutuações instantâneas em torno do valor médio. A extremidade do vetor está imerso em uma "zona de incerteza", cuja a distância do contorno desta extensão ao valor médio fornece a medida da variância de cada quadratura. A figura 2.1 mostra estas diferentes representações.

O estado coerente é aquele cuja a incerteza é mínima, com as variâncias tendo o mesmo valor  $V(\hat{P}) = V(\hat{Q}) = 1$ . Este estado define ainda uma referência para as flutuações. Neste caso, no plano de Fresnel temos um vetor cuja amplitude ao quadrado fornece o número médio de fótons com a área de incerteza sendo uma circunferência de raio unitário. Um estado de vácuo, tem também incerteza mínima

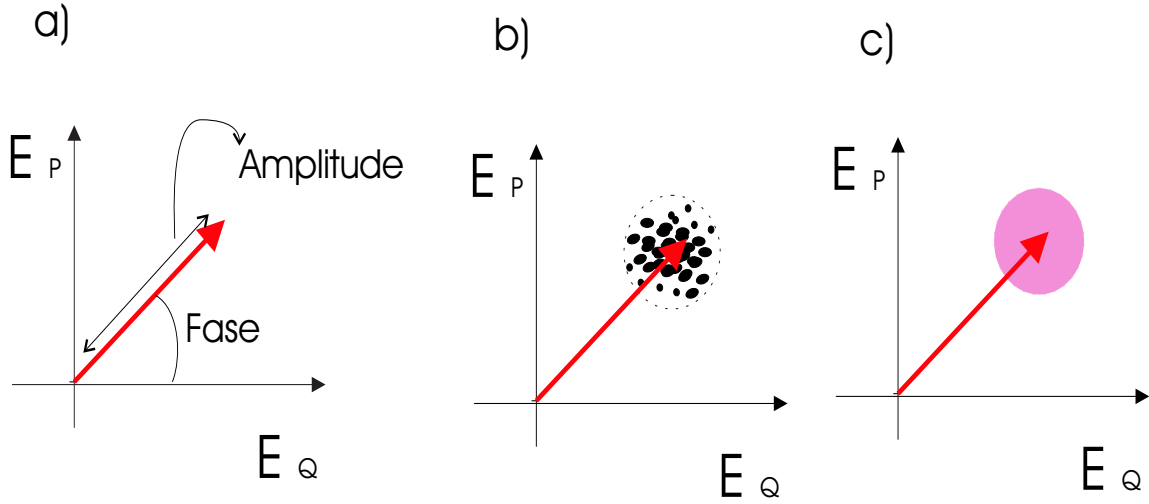


Figura 2.1: a) *Campo clássico*, b) *Campo com incertezas instantâneas* e c) *Área de incerteza*

e podemos representá-lo como um estado coerente de valor médio nulo. Podemos obter qualquer estado coerente aplicando o operador Deslocamento  $\hat{D}(\alpha)$ , definido como

$$\hat{D}(\alpha) = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} e^{-\alpha^* \hat{a}}. \quad (2.38)$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= \hat{D}(\alpha) |vac\rangle \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha \hat{a}^\dagger} |vac\rangle. \end{aligned} \quad (2.39)$$

A figura 2.2 mostra a representação de um estado de vácuo (a) e um estado coerente (b).

Uma interpretação corpuscular permite usar uma imagem do ruído de intensidade de um feixe luminoso, chamado *ruído balístico* ("shot noise"). Podemos representar

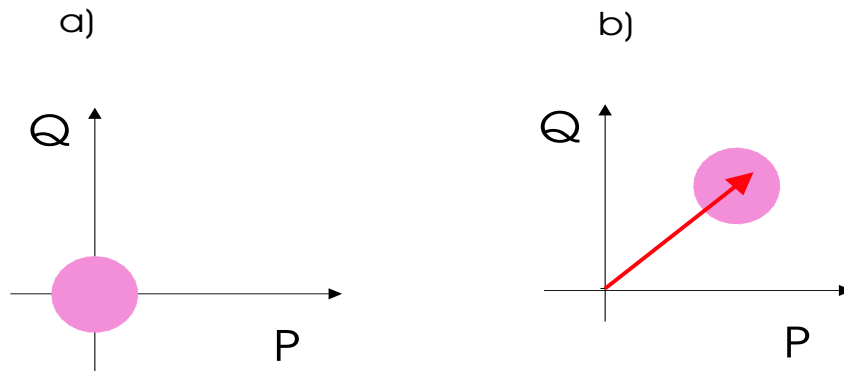


Figura 2.2: a) Estado de vácuo e b) Estado coerente após aplicação do operador  $\hat{D}(\alpha)$

um feixe como constituído de fótons distribuídos aleatoriamente, no caso de um feixe coerente esta distribuição é Poissoniana.

### 2.1.5 Fotodeteção

A deteção em ótica é normalmente baseada no efeito fotoelétrico, onde um fóton incidente no detetor é absorvido, gerando em contrapartida, um elétron. Obteremos o elétron a partir de uma transição eletrônica no detetor. Se faz necessário então pensarmos na probabilidade de transição de um estado inicial  $|i\rangle$  para um estado final  $|f\rangle$ . Vimos na equação 2.21 que o operador campo é descrito pela somatória de termos positivos (proporcional ao operador de aniquilação) e negativos (por sua vez, proporcional ao operador de criação) das frequências. Podemos escrever então

$$\hat{E}(\vec{r}, t) = \hat{E}^{(+)}(\vec{r}, t) + \hat{E}^{(-)}(\vec{r}, t), \quad (2.40)$$

onde

$$\begin{aligned}
 \widehat{E}^{(+)} &= \frac{i}{L^{\frac{3}{2}}} \sum_{\vec{k},s} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0}} \widehat{a}_{\vec{k},s} \widehat{\epsilon}_{\vec{k},s} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}, \\
 \widehat{E}^{(-)} &= \frac{-i}{L^{\frac{3}{2}}} \sum_{\vec{k},s} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0}} \widehat{a}_{\vec{k},s}^\dagger \widehat{\epsilon}_{\vec{k},s}^* e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}.
 \end{aligned} \tag{2.41}$$

No processo de absorção do fóton, a probabilidade de transição em uma dada posição do campo  $\vec{r}$  dependerá da atuação do operador de aniquilação, sendo dada por:

$$p_f(\vec{r}, t) \propto |\langle f | \widehat{E}^{(+)}(\vec{r}, t) | i \rangle|^2. \tag{2.42}$$

A probabilidade total será dada pela soma em todas as possíveis transições:

$$\begin{aligned}
 p(\vec{r}, t) &= \sum_f |\langle f | \widehat{E}^{(+)}(\vec{r}, t) | i \rangle|^2 \\
 &= \sum_f \langle i | \widehat{E}^{(-)}(\vec{r}, t) | f \rangle \langle f | \widehat{E}^{(+)}(\vec{r}, t) | i \rangle \\
 &= \langle i | \widehat{E}^{(-)}(\vec{r}, t) \widehat{E}^{(+)}(\vec{r}, t) | i \rangle,
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

onde utilizamos a completza de  $|f\rangle$ .

Se integramos esta probabilidade sobre todos os pontos  $\vec{r}$  da superfície do detetor temos a taxa total do fluxo de elétrons gerados, que designamos como a *fotocorrente*  $\widehat{i}$ , dada por

$$\langle \widehat{i} \rangle = e \sum_{\vec{k},s} \langle \widehat{n}_{\vec{k},s} \rangle. \tag{2.44}$$

O operador número  $\widehat{n}_{\vec{k},s}$  fornece o fluxo de fótons por segundo na área do feixe detectada e  $e$  é a carga do elétron.

Esta fotocorrente é muito pequena no caso de feixes pouco intensos, e por isso precisamos amplificar esta corrente. Exemplo disto são as fotomultiplicadoras e fotodetecores a avalanche. Estes detetores se baseiam na multiplicação do foto-elétron via efeito cascata, gerando um pulso de muitos elétrons. A este pulso associamos um fóton. Este tipo de detecção é empregado no regime de contagem de fótons. Neste caso não associamos o fluxo de fótons diretamente à fotocorrente, mas sim aos pulsos da fotomultiplicação.

Para detecção de feixes intensos com potência da ordem de alguns  $mW$  são utilizados fotodiodos. Nestes detetores o fóton gera um par elétron-buraco na junção reversamente polarizada. Neste caso a fotocorrente é diretamente proporcional ao fluxo de fótons. Assim, a estatística da fotocorrente nos dará informação sobre a estatística dos fótons no feixe detectado. A fotocorrente, embora seja maior para este caso, ainda é muito pequena, sendo necessária uma amplificação eletrônica da saída dos fotodiodos. Estes circuitos vão limitar a detecção devido à banda passante. Os circuitos de detecção funcionam como um filtro passa baixa. Quanto mais ganho temos menor é a frequência de corte, mais informação sobre o espectro perdemos.

Falamos até aqui de detetores ideais, mas na verdade nem todo fóton que chega no detetor é absorvido e dá origem a um elétron, os detetores têm uma eficiência quântica limitada, embora grande atualmente, da ordem de 93%.

De modo geral, escrevemos a equação 2.44 multiplicada pela eficiência quântica  $\eta$ , que pode ser interpretada como a probabilidade de um fóton originar um elétron, ficando então da seguinte forma:

$$\langle \hat{i} \rangle = \eta e \sum_{\vec{k}, s} \langle \hat{n}_{\vec{k}, s} \rangle. \quad (2.45)$$

Ao estudarmos a estatística da fotocorrente, quanto maior a eficiência quântica dos detetores, maior será a informação que teremos sobre a estatística fotônica.

Para tratar de fotodetektres não ideais, normalmente usa-se uma imagem muito interessante, que é tratar o detektor como ideal tendo à sua frente um divisor de feixes cuja transmitância  $T$  representa a eficiência  $\eta$ . Temos assim a variância do operador número depois do divisor de feixe, descontado o valor do ruído balístico, igual a

$$\langle : \hat{n}_d^2 : \rangle = \eta^2 \langle : \hat{n}_a^2 : \rangle, \quad (2.46)$$

onde os índices  $d$  e  $a$  representam o operador número depois e antes do divisor de feixes, e os símbolos  $: \hat{o} :$  representam o operador em ordem normal. Isto traz consequências diretas nas medidas das variâncias, que a rigor devem ser corrigidas devido a esta eficiência menor que a unidade.

Evidentemente as perdas na detecção não provêm tão somente da eficiência quântica limitada dos fotodetektres. Para uma análise da eficiência total devemos levar em conta todas as perdas desde a fonte até o detektor, como a reflexão em componentes óticos como espelhos, lentes e outros. Atualmente temos componentes que recebem um tratamento anti-reflexão que minimiza esta perda, mas nunca totalmente. Estas perdas são tratadas como uma transmitância, assim como a eficiência quântica, que no melhor das hipóteses é muito perto de 1.

## 2.2 Correlações Temporais

### 2.2.1 Estados comprimidos

Vimos na seção 2.1.4 que o estado de um modo do campo apresenta flutuações tanto de intensidade quanto de fase, e que as variâncias de quadraturas ortogonais devem respeitar a desigualdade de Heisenberg. Contudo, tal desigualdade não versa sobre as variâncias individuais, mas sobre seu produto. Portanto, é possível obtermos flutuações abaixo do limite quântico para uma das quadraturas, às custas do



aumento do ruído na quadratura ortogonal. Isto se traduz, estatisticamente, numa distribuição temporal mais regular dos fótons que compõem o estado. Vimos também que para um estado coerente temos uma distribuição Poissoniana de número de fótons e que as quadraturas ortogonais têm a mesma variância, iguais a unidade. A compressão do ruído de uma quadratura abaixo do limite quântico leva ao aumento do ruído da quadratura ortogonal. Por ter esta compressão do ruído em uma das quadraturas estes estados se chamam *Estados Comprimidos* .

Então, se as quadraturas  $\hat{P}$  e  $\hat{Q}$  obedecem à relação de comutação (2.36) e por conseguinte suas variâncias  $V(\hat{P})$  e  $V(\hat{Q})$  obedecem à desigualdade de Heisenberg (2.37). Dizer que, por exemplo,  $\hat{P}$  é comprimida, equivale dizer que

$$\begin{aligned} V(\hat{P}) &< 1, \\ V(\hat{Q}) &> 1. \end{aligned} \quad (2.47)$$

De modo que a relação (2.37) seja verificada para o valor mínimo, num caso ideal de compressão.

Um estado comprimido é descrito [23] a partir do operador de compressão

$$\hat{S}(\xi) = e^{\frac{1}{2} \xi^* \hat{a}^2 - \xi (\hat{a}^\dagger)^2}, \quad (2.48)$$

onde  $\xi = r e^{i\theta}$  é um número complexo arbitrário. O estado comprimido se escreve então a partir da aplicação de  $\hat{S}(\xi)$  em um estado coerente

$$\begin{aligned} |\alpha, \xi\rangle &= \hat{S}(\xi) |\alpha\rangle \\ &= \hat{S}(\xi) \hat{D}(\alpha) |vac\rangle. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Como podemos observar  $\hat{S}(-\xi) = \hat{S}^{-1}(\xi) = \hat{S}^\dagger(\xi)$ , o que nos permite escrever

$$\begin{aligned} \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a} \hat{S}(\xi) &= \hat{a} \cosh(r) - \hat{a}^\dagger e^{i\theta} \sinh(r), \\ \hat{S}^\dagger(\xi) \hat{a}^\dagger \hat{S}(\xi) &= \hat{a}^\dagger \cosh(r) - \hat{a} e^{-i\theta} \sinh(r), \end{aligned} \quad (2.50)$$

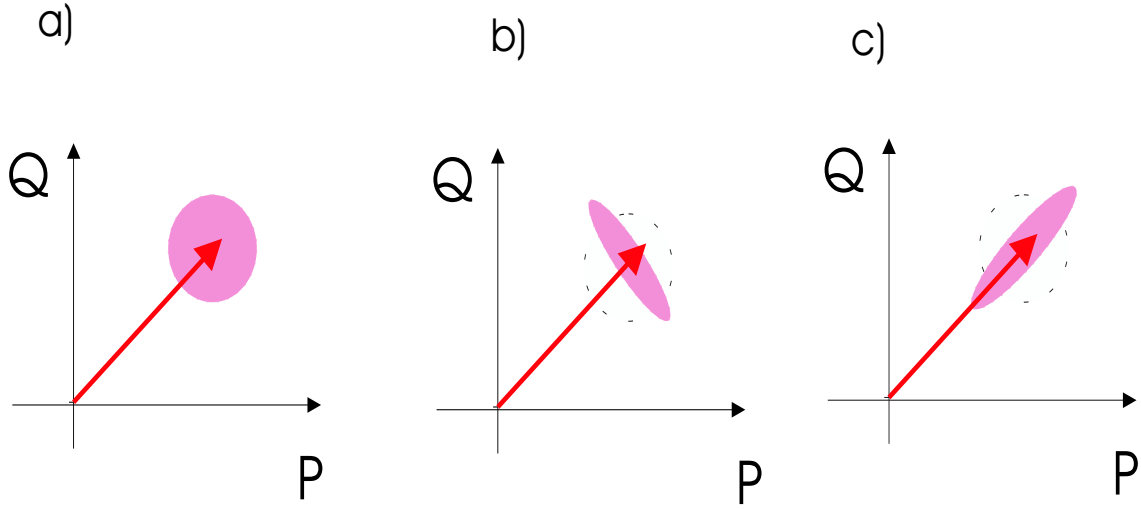


Figura 2.3: a) *Estado coerente*, b) *Compressão do ruído de intensidade* e c) *Compressão do ruído de fase*

o que nos levará a escrever, fazendo  $\theta = 0$ , as variâncias para as quadraturas:

$$\begin{aligned}\Delta^2\hat{P} &= e^{-r}, \\ \Delta^2\hat{Q} &= e^r.\end{aligned}\tag{2.51}$$

Para  $\theta = 0$ , percebemos que  $\Delta^2\hat{P}$  é sempre menor que 1, ao passo que  $\Delta^2\hat{Q}$  é sempre maior, e o produto delas, igual à unidade. Isto nos leva à uma compressão na quadratura de  $\hat{P}$ . Chamamos  $r$  o parâmetro de compressão.

No plano de Fresnel, estados comprimidos da luz são representados por uma deformação na área de incerteza. Passamos a ter uma elipse, onde o eixo menor representa variância da quadratura comprimida, como mostra a figura 2.3

### 2.2.2 Emaranhamento e Compressão do ruído

Podemos ter estados do campo correlacionados temporalmente. Considere dois feixes, 1 e 2, que individualmente podem até apresentar excesso de ruído. Quando comparados um com o outro, porém, podem apresentar correlações de intensidade superiores ao permitido pela teoria clássica do campo. Note que podemos pensar nesta situação, tanto no regime de contagem de fótons, onde dizemos ter fótons gêmeos, quanto no regime de campo intenso, onde temos os chamados feixes gêmeos.

Normalmente dizemos que feixes possuem correlações na sua intensidade, ligada ao números de fótons. Para compararmos dois feixes e saber se são ou não correlacionados, "Gêmeos", calculamos a variância da diferença de suas quadraturas de Amplitude

$$V(\hat{P}_-) = \frac{V(\hat{P}_1 - \hat{P}_2)}{2}. \quad (2.52)$$

Se este valor for menor que 1, então os modos 1 e 2 são correlacionados.

Da mesma maneira podemos criar um critério para as anti-correlações, uma vez que os fótons que possuem correlação de intensidade possuem fases anti-correlacionadas. Calculamos então a variância da soma das quadraturas de fase

$$V(\hat{Q}_+) = \frac{V(\hat{Q}_1 + \hat{Q}_2)}{2}, \quad (2.53)$$

que será menor que 1, caso exista anti-correlação de fase entre os modos 1 e 2.

#### Feixes EPR

Pode-se dizer que depois da publicação do artigo de Einstein-Podolsky e Rosen [24], em 1935, os físicos foram despertados por aquilo que pode ser considerado a parte mais intrigante da mecânica quântica. No trabalho, os autores argumentavam

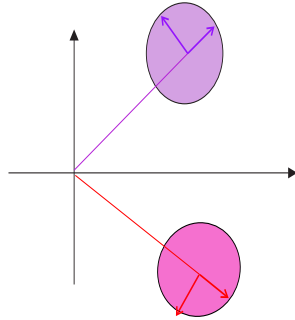


Figura 2.4: *Este é os esquema de um par EPR ideal, onde as flutuações de intensidade estão correlacionadas e as de fase anticorrelacionadas*

a não completude da mecânica quântica. Enunciado em termos de variáveis contínuas, o argumento EPR foi reescrito para variáveis discretas por D. Bohm, em 1952, como o spin de duas partículas ou polarização de dois fótons. O que sucede-se é uma série de discussões teóricas, quiza filosóficas, até que em 1964 J.Bell estabelece uma desigualdade baseada em variáveis ocultas, cuja violação eliminaria qualquer teoria realista e local. A violação da desigualdade de Bell em 1982 [6] por Alain Aspect e colaboradores e por outros grupos com diferentes sistemas [25, 26, 27, 28] veio depor a favor da mecânica quântica.

Em 1988, M.Reid e P. Drummond [8] propõem a realização experimental do paradoxo EPR sob a forma original usando variáveis contínuas, não posição e momento de duas partículas, mas quadraturas ortogonais do campo eletromagnético. Como vimos, as quadraturas do campo são análogas à posição e ao momento. Podemos enunciar o paradoxo em termos de dois modos do campo em que suas quadraturas conjugadas são respectivamente correlacionadas e anti-correlacionadas. Na figura 2.4 vemos uma representação de feixes EPR, onde as flutuações de intensidade são correlacionadas e as flutuações de fase anti-correlacionadas.

### Critério de Inseparabilidade

Nos últimos anos, muito se tem trabalhado na tentativa de obter critérios que indiquem se há ou não emaranhamento entre os estados de um sistema. Em geral, parte-se da premissa de que os estados são separáveis (não emaranhados), chegando-se à desigualdades que, se violadas, indicam o emaranhamento. Este é o princípio do critério de Duan [29]. Outros critérios podem ser encontrados em [30, 31].

Vamos discutir aqui o critério de Duan [29], por ser aquele de mais fácil implementação experimental. O critério de Duan repousa, então, na não separabilidade dos estados de um dado sistema sistema. Definamos então um sistema separável de dois modos: Um sistema de dois modos 1 e 2 será dito separável se o estado deste sistema for fatorável, isto é, se a matriz de densidade  $\rho$  puder ser escrita como uma mistura estatística de estados

$$\rho = \sum_i p_i \rho_{i1} \otimes \rho_{i2}, \quad (2.54)$$

onde  $\rho_{i1}$  e  $\rho_{i2}$  são as matrizes de densidade dos modos 1 e 2, e  $p_i$  a probabilidade associada.

Um estado não separável será aquele que não puder ser escrito nesta forma. Para estados Gaussianos<sup>1</sup>, o critério estabelece uma condição **suficiente** para a inseparabilidade. Partindo da hipótese de que dois modos são separáveis, Duan e co-autores chegam a uma desigualdade, envolvendo a diferença e a soma das variâncias das quadraturas correlacionadas e anti-correlacionadas, respectivamente. Chamamos então a separabilidade de  $\Sigma$ , sendo definida de como

$$\Sigma = \frac{V(\hat{P}_1 - \hat{P}_2)}{2} + \frac{V(\hat{Q}_1 + \hat{Q}_2)}{2}, \quad (2.55)$$

que para estados separáveis obedece à desigualdade

$$\Sigma \geq 1. \quad (2.56)$$

---

<sup>1</sup>Este critério é válido somente para estados Gaussianos.

A violação desta desigualdade implica na inseparabilidade do sistema. Para ser observado, o critério necessita que pelo menos uma das duas variâncias seja menor que 1.

Percebemos que há uma ligação muito forte entre emaranhamento e compressão do ruído. Se tomarmos dois feixes  $A_1$  e  $A_2$ , misturados em divisor de feixe 50/50 os dois modos obtidos são

$$A_+ = \frac{A_1 + A_2}{\sqrt{2}}, \quad A_- = \frac{A_1 - A_2}{\sqrt{2}}, \quad (2.57)$$

e suas variâncias são

$$V(\hat{Q}_+) = \frac{V(\hat{Q}_1 + \hat{Q}_2)}{2}, \quad V(\hat{P}_-) = \frac{V(\hat{P}_1 - \hat{P}_2)}{2}. \quad (2.58)$$

Assim a variância para a quadratura  $\hat{Q}_+$ , do modo  $A_+$ , está ligada às anticorrelações dos modos que são misturados. Da mesma forma, para o modo  $A_-$ , sua variância da quadratura  $\hat{P}_-$  está ligada às correlações.

Se  $A_1$  e  $A_2$  são feixes EPR ideais, as variâncias  $V(\hat{Q}_+)$  e  $V(\hat{P}_-)$  tendem à zero, o que significa que dois feixes EPR misturados num divisor de feixes 50/50 fornecem dois feixes perfeitamente comprimidos segundo quadraturas ortogonais. De imediato vemos que a separabilidade  $\Sigma$  se exprime pelas variâncias comprimidas dos modos  $A_+$  e  $A_-$ .

Da mesma maneira que feixes emaranhados geram feixes comprimidos, o contrário também é verdade. Dois feixes perfeitamente comprimidos segundo quadraturas ortogonais produzem um par EPR ideal, aliás, conforme visto na equação 2.56, é por meio da compressão do ruído que se verifica o emaranhamento. Esta técnica é utilizada por muitos pesquisadores para obtenção de feixes EPR e sua utilização em protocolos de teleportação [32] em diversos temas de pesquisa [33, 34].

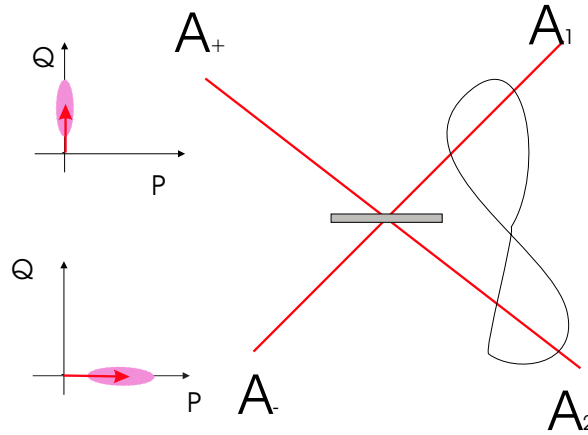


Figura 2.5: Do lado esquerdo temos dois feixes comprimidos segundo quadraturas ortogonais, que ao se misturarem em um divisor de feixe 50/50 resultam em dois feixes emaranhados. O senso oposto da figura também é válido

A figura 2.5 mostra como obter feixes EPR a partir de dois modos comprimidos segundo quadraturas de amplitude e fase. Note que o sentido contrário da figura também é permitido, ou seja, feixes EPR se misturados num divisor de feixe 50/50 resultam em dois modos comprimidos segundo quadraturas ortogonais.

## 2.3 Correlações Espaciais

### 2.3.1 Teoria Clássica da Coerência

Ao falarmos de coerência, é sempre útil separarmos o assunto em duas partes. A *Coerência Temporal*, ligada ao fato de termos uma largura de linha  $\Delta\nu$  finita, mas que freqüentemente é descrita sob o ponto de vista quase-monocromático, o que é completamente razoável nos dias de hoje com lasers que têm largura de linha menor que  $1\text{KHz}$ . Neste caso falamos em um tempo de coerência  $\Delta t_c$  que é o inverso da largura de linha. Este tempo nos leva a um comprimento de coerência  $l_c = c\Delta t_c$ ,

onde  $c$  é a velocidade da luz. Esta é chamada de coerência longitudinal. Este efeito é observado na formação de franjas de interferência em um interferômetro de Michelson. A diferença de caminho entre os braços do interferômetro implica em uma diferença de fase nos trens de onda divididos pelo divisor de feixes resultando a interferência. A observância destas franjas só é obtida se o tempo de atraso entre os braços for menor que o tempo de coerência.

Por outro lado, temos a *Coerência Espacial*. Analisando um experimento tipo fenda dupla de Young, representada na figura 2.6, onde uma fonte, quase-monocromática, de extensão finita é utilizada, veremos que se as fendas estiverem posicionadas próximas ao eixo de simetria da fonte teremos franjas de interferência em um dado plano de observação. O aparecimento destas franjas é atribuído à coerência espacial. Para que isto ocorra as fendas devem estar em uma região denominada área de coerência, cuja raiz quadrada é denominada comprimento transverso de coerência.

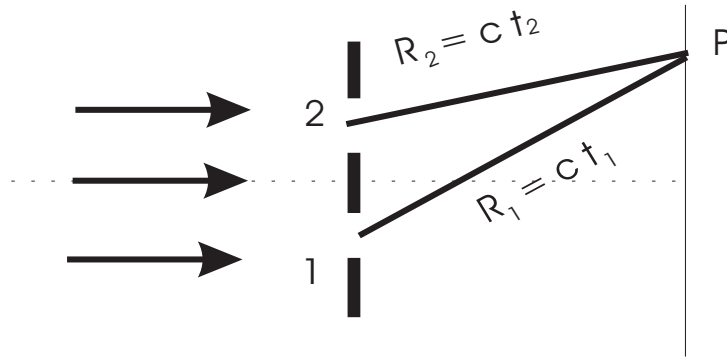


Figura 2.6: *Esquema do experimento de fenda dupla de Young.*

Neste experimento de fenda dupla, a intensidade em um ponto  $\vec{r}$  no anteparo de detecção será dada por

$$I(\vec{r}, t) = |K_1|^2 I_1(\vec{r}_1, t - t_1) + |K_2|^2 I_2(\vec{r}_2, t - t_2) + 2\text{Re}[K_1^* K_2 \Gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau)], \quad (2.59)$$



onde  $K_i$  é o propagador da luz que vai da fenda 1 ou 2 até o anteparo,  $\tau$  a diferença de tempo de propagação, e  $\Gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau)$  é a **Função de Coerência Mútua** de primeira ordem, definida como

$$\Gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau) = \langle E_1^*(\vec{r}_1, t + \tau) E_2(\vec{r}_2, t) \rangle_T. \quad (2.60)$$

Podemos ainda escrever esta função normalizada às intensidades da luz provinda de cada fenda, obtendo assim, o **Grau Complexo de Coerência**

$$\gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau) = \frac{\Gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau)}{\sqrt{I_1 I_2}}. \quad (2.61)$$

Levando-se em conta a desigualdade de Schwarz, o valor de  $\gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau)$  vai de 0, limite de descoerência, até 1, limite de coerência. Valores entre 0 e 1 são atribuídos à coerência parcial.

A visibilidade das franjas de interferência serão descritas no caso de intensidade igual nas duas fendas como

$$v = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}} = |\gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau)|. \quad (2.62)$$

Uma aplicação desta teoria foi a *Interferometria Estelar*, onde foi possível a medida de diâmetros de estrelas a partir do grau complexo de coerência [18, 19]. Neste experimento dois espelhos  $M_1$  e  $M_2$  coletam a luz emitida por uma estrela distante, funcionando como as fendas. A luz coletada é então enviada por meio de dois outros espelhos ao plano focal de um telescópio ao qual o sistema está associado. Variando-se a distância entre os espelhos  $M_1$  e  $M_2$ , varia-se a visibilidade das franjas de interferência observadas. De acordo com o teorema de van Cittert Zernike <sup>1</sup>, a luz que chega aos espelhos é parcialmente coerente e a medida do grau

<sup>1</sup>Referência [22], seção 4.4.4, pág. 188.

de coerência  $\gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau)$  para  $\tau = 0$ , leva-nos ao conhecimento da transformada de Fourier da distribuição de intensidade em torno da fonte. Portanto, medidas de  $\gamma$  fornecem informação sobre o diâmetro da estrela.

Contudo para estrelas muito distantes a área de coerência se torna muito grande e a separação entre os espelho  $M_1$  e  $M_2$  deve aumentar. Devido a flutuações do índice de refração da atmosfera o uso do interferômetro torna-se cada vez mais crítico. Neste momento surge a necessidade de usarmos a coerência de ordem superior.

### 2.3.2 Coerência de ordem superior

Dados os problemas com a técnica de interferometria estelar, foi desenvolvido por Hanbury-Brown e Twiss a realização de um interferômetro estelar de intensidade [20, 21]. Neste experimento, dois espelhos parabólicos são posicionados da mesma forma do experimento anterior, e enviam a intensidade dos campos que chegam da estrela para fotodetetores. O que é feito então é a medição e comparação das intensidades provindas de cada espelho coletor. O que se buscou foi uma relação entre o produto das Intensidades captadas em cada espelho  $I_1$  e  $I_2$  de um campo parcialmente coerente.

Temos assim a definição da Função Coerência Mútua de segunda ordem, em intensidade, definida como

$$\Gamma^{(2)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t_1, t_2) = \langle I_1(\vec{r}_1, t_1) I_2(\vec{r}_2, t_2) \rangle_T, \quad (2.63)$$

da qual podemos definir o Grau Complexo de Coerência de segunda ordem, através da normalização desta última equação:

$$\gamma^{(2)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t_1, t_2) = \frac{\Gamma^{(2)}}{\langle I_1 \rangle \langle I_2 \rangle}. \quad (2.64)$$

Os trens de onda que contribuem para correlação é representado por um campo complexo, o qual considera-se que foi emitido aleatoriamente, obedecendo uma estatística Gaussiana. Esta consideração implica em uma relação direta entre os graus de coerência de primeira e segunda ordem [22]:

$$\gamma^{(2)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t_1, t_2) = 1 + |\gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t_1, t_2)|^2, \quad (2.65)$$

onde  $\gamma(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t_1, t_2)$  é o Grau Complexo de Coerência de primeira ordem definido em (2.61). Desta forma, medindo  $\Gamma^{(2)}$  chegamos à  $\gamma$ .

Assim, depois de 1956 é que Hanbury-Brown e Twiss realizaram o experimento de interferometria estelar, depois de terem estabelecido a validade desta correlação na região de radiofrequência. Contudo, este experimento somente foi possível com o advento de detectores baseados na teoria da fotodeteção que leva em conta a natureza quantizada do campo luminoso.

Passemos agora à discussão da Teoria Quântica da Coerência, ou Correlações Quânticas.

## 2.4 Correlações Quânticas

### 2.4.1 Função de correlação de primeira ordem

Para levar em conta a natureza quantizada do campo, precisamos lançar mão do ferramental da teoria da fotodeteção, apresentada brevemente na seção 2.1.5. A equação (2.43) fornece a probabilidade de um fóton incidente gerar um fóto-elétron. Porém não sabemos precisamente qual é o estado inicial do campo, necessitando, portanto, fazermos uma média sobre todos os possíveis estados iniciais.

$$p \propto \sum_i P_i \langle i | \hat{E}^{(-)}(\vec{r}, t) \hat{E}^{(+)}(\vec{r}, t) | i \rangle \quad (2.66)$$

onde  $P_i$  é a probabilidade do estado inicial ser  $|i\rangle$ . Introduzindo o operador densidade para o campo

$$\rho = \sum_i P_i |i\rangle \langle i|, \quad (2.67)$$

reescrevemos 2.66 como

$$p \propto \text{Tr} \left[ \rho \hat{E}^{(-)}(\vec{r}, t) \hat{E}^{(+)}(\vec{r}, t) \right]. \quad (2.68)$$

É então definida a função de correlação de primeira ordem para o campo:

$$\begin{aligned} G^{(1)}(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) &= \text{Tr} \left[ \rho \hat{E}^{(-)}(\vec{r}_1, t_1) \hat{E}^{(+)}(\vec{r}_2, t_2) \right] \\ &= \left\langle \hat{E}^{(-)}(\vec{r}_1, t_1) \hat{E}^{(+)}(\vec{r}_2, t_2) \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Para um campo estacionário, podemos ainda escrever a função de correlação dependendo apenas da diferença de tempo  $\tau = t_2 - t_1$ , ficando com

$$G^{(1)}(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) \equiv G^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau). \quad (2.70)$$

Logo, a probabilidade de detecção pode ser escrita em termos da função de correlação de primeira ordem:

$$p \propto G^{(1)}(\vec{r}, \vec{r}, 0). \quad (2.71)$$

## 2.4.2 Função de correlação de segunda ordem

Consideremos agora a probabilidade de dois detectores, posicionados em  $\vec{r}_1$  e  $\vec{r}_2$ , detectarem um fóton cada, um no instante  $t_1$  e outro no instante  $t_2$ . Esta probabilidade será dada por

$$\begin{aligned} p_2 &\propto \sum_i P_i \sum_f |\langle f | \hat{E}^{(+)}(\vec{r}_2, t_2) \hat{E}^{(+)}(\vec{r}_1, t_1) | i \rangle|^2 \\ &= \sum_i P_i \langle i | \hat{E}^{(-)}(\vec{r}_1, t_1) \hat{E}^{(-)}(\vec{r}_2, t_2) \hat{E}^{(+)}(\vec{r}_1, t_1) \hat{E}^{(+)}(\vec{r}_2, t_2) | i \rangle, \end{aligned} \quad (2.72)$$

o que nos leva a escrever

$$p_2 = \text{Tr} \left[ \rho \hat{E}^{(-)}(\vec{r}_1, t_1) \hat{E}^{(-)}(\vec{r}_2, t_2) \hat{E}^{(+)}(\vec{r}_2, t_2) \hat{E}^{(+)}(\vec{r}_1, t_1) \right]. \quad (2.73)$$

Da mesma maneira que foi definida  $G^{(1)}$ , percebemos que a probabilidade conjunta de detecção é governada pela função de correlação de segunda ordem

$$\begin{aligned} G^{(2)}(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2) &= \text{Tr} \left[ \rho \hat{E}^{(-)}(\vec{r}_1, t_1) \hat{E}^{(-)}(\vec{r}_2, t_2) \hat{E}^{(+)}(\vec{r}_2, t_2) \hat{E}^{(+)}(\vec{r}_1, t_1) \right] \\ &= \left\langle \hat{E}^{(-)}(\vec{r}_1, t_1) \hat{E}^{(-)}(\vec{r}_2, t_2) \hat{E}^{(+)}(\vec{r}_2, t_2) \hat{E}^{(+)}(\vec{r}_1, t_1) \right\rangle, \end{aligned} \quad (2.74)$$

que para um campo estacionário só depende de  $\vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_2$  e  $\tau = t_2 - t_1$ . Percebemos, portanto, que podemos construir a função de correlação quântica de ordem  $n$ , bastando para isto tirarmos a média dos  $2n$  operadores de campo em ordem normal e temporal. Podemos também, como no caso clássico, definir um grau quântico de coerência bastando para isto, normalizar  $G^{(1)}$  pela intensidade dos campos, ou seja

$$g^{(1)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau) = \frac{\left\langle \hat{E}^{(-)}(\vec{r}_1, t) \hat{E}^{(+)}(\vec{r}_2, t + \tau) \right\rangle}{\sqrt{\left\langle \hat{E}^{(-)}(\vec{r}_1, t) \hat{E}^{(+)}(\vec{r}_1, t) \right\rangle \left\langle \hat{E}^{(-)}(\vec{r}_2, t + \tau) \hat{E}^{(+)}(\vec{r}_2, t + \tau) \right\rangle}}, \quad (2.75)$$

e

$$g^{(2)}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \tau) = \frac{\left\langle \hat{E}^{(-)}(\vec{r}_2, t + \tau) \hat{E}^{(-)}(\vec{r}_1, t) \hat{E}^{(+)}(\vec{r}_2, t + \tau) \hat{E}^{(+)}(\vec{r}_1, t) \right\rangle}{\left\langle \hat{E}^{(-)}(\vec{r}_1, t) \hat{E}^{(+)}(\vec{r}_1, t) \right\rangle \left\langle \hat{E}^{(-)}(\vec{r}_2, t + \tau) \hat{E}^{(+)}(\vec{r}_2, t + \tau) \right\rangle}. \quad (2.76)$$

Ao longo da tese vamos calcular taxas de coincidências para os fótons gêmeos, que nada mais é do que calcular a Função de Correlação de segunda ordem.

---

<sup>1</sup>Utilizamos  $\Gamma$  para coerência clássica e  $G$  para a quântica conforme referência [22].

# Capítulo 3

## Momento Angular Orbital da Luz

### Contents

---

<b>3.1</b>	<b>Momento angular da luz . . . . .</b>	<b>36</b>
3.1.1	Decomposição do momento angular . . . . .	37
<b>3.2</b>	<b>Modos de Laguerre-Gauss . . . . .</b>	<b>38</b>
3.2.1	Esfera de Poincaré para modos transversos . . . . .	41
<b>3.3</b>	<b>Geração de feixes luminosos portando momento angular orbital . . . . .</b>	<b>44</b>
3.3.1	Método holográfico . . . . .	44
3.3.2	Conversores Astigmáticos de modos . . . . .	47
3.3.3	Obtenção de modos de Hermite . . . . .	50
3.3.4	Caracterização dos modos de Laguerre . . . . .	52
<b>3.4</b>	<b>Defeitos topológicos em franjas de moiré . . . . .</b>	<b>52</b>
3.4.1	Superposição entre PZEs . . . . .	54
3.4.2	Resultados experimentais . . . . .	57

---

Como sabemos, da teoria eletromagnética Maxwelliana, a luz carrega energia, momento linear e momento angular. O momento angular pode ser decomposto em uma parte intrínseca, ligada à polarização circular, e outra orbital.

Nos últimos anos, muitos estudos referentes ao momento angular orbital (MAO) da luz vêm sendo realizados. No campo da física fundamental, feixes luminosos vêm sendo utilizados para observar a conservação do MAO em sistemas não lineares. No grupo de A. Zeilinger verificou-se a conversão paramétrica descendente [35]. Estudos com misturas de 4 ondas em nuvens atômicas foram realizados no grupo de J.W.R. Tabosa [36, 37]. Apresentaremos nesta tese estudos com o MAO na conversão paramétrica descendente estimulada [39] e em osciladores paramétricos óticos [38]. Além disso, esta característica pode ser explorada como mais um grau de liberdade para emaranhamento de fótons. No campo tecnológico, a propriedade de possuir MAO é explorada em pinças óticas, onde o feixe produz um torque no elemento aprisionado, facilitando a manipulação com a possibilidade de rotação. Vamos mostrar neste capítulo propriedades de feixes com MAO, apresentando técnicas experimentais para geração destes feixes portadores de momento angular orbital.

### 3.1 Momento angular da luz

O fluxo de energia do campo eletromagnético no vácuo é dado pelo vetor de Poynting

$$\vec{S}(\vec{r}, t) = c^2 \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t). \quad (3.1)$$

A densidade de momento linear é proporcional ao vetor de Poynting, sendo escrita como [22]

$$\vec{p} = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t). \quad (3.2)$$

O momento linear total será dado, então, pela integral de  $\vec{p}$  em todo o volume

$$\vec{P} = \epsilon_0 \int_V \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) d^3r. \quad (3.3)$$

Podemos então escrever uma densidade de momento angular, que será dado por

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = \epsilon_0 \vec{r} \times \left[ \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) \right]. \quad (3.4)$$

Da mesma forma, para obter o momento angular total, basta integrar em todo o volume.

Vale ressaltar que estas definições são válidas para o calibre de Coulomb.

### 3.1.1 Decomposição do momento angular

Como na mecânica podemos escrever o momento angular da luz em duas partes. Para isso, tomando o campo magnético em função do potencial vetor  $\vec{A}$  temos

$$\vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \left[ \vec{E}(\vec{r}, t) \times \left( \nabla \times \vec{A}(\vec{r}, t) \right) \right]. \quad (3.5)$$

E ainda utilizando o fato de que  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ , escrevemos o momento angular total como

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \epsilon_0 \int_V \vec{E} \times \vec{A} d^3r \quad + \quad \epsilon_0 \int_V E_i [\vec{r} \times \nabla] A_i d^3r \\ &= \vec{L}_S + \vec{L}_O, \end{aligned} \quad (3.6)$$

onde a soma dos índices  $i$  sobre todas as coordenadas está implícita.

Observamos que a primeira parte de 3.6 não depende da origem do sistema de coordenadas, e representa o momento angular *intrínseco*, também chamado de *momento angular de Spin*. Esta parte está associada à polarização da luz [22, 41] e será diferente de zero caso esta seja circularmente polarizada.



Por outro lado, a segunda parte tem dependência explícita em  $\vec{r}$  e, portanto, da origem do sistema de coordenadas, estando, assim, associada ao *Momento Angular Orbital (MAO)* da luz.

Da definição da densidade MAO, verifica-se a existência de uma relação entre este e a estrutura da frente de onda do campo. Para frentes de ondas planas o MAO será nulo, como mostra a figura 3.1 a). Para possuir momento angular orbital a frente de onda deve ser helicoidal, com os vetores  $\vec{k}$  e  $\vec{S}$  espiralando em torno da direção de propagação, como sugere a figura 3.1 b).

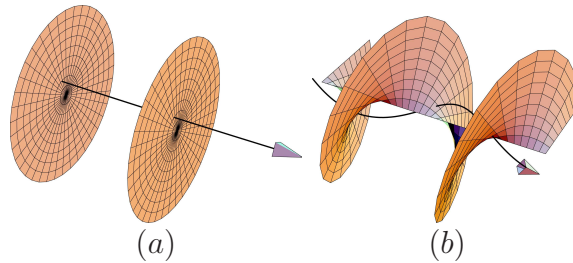


Figura 3.1: Em (a) vemos as frentes e os vetores de onda de uma onda plana. Em (b) vemos a frente de onda de um modo de Laguerre-Gauss.

Normalmente feixes luminosos como os modos de Hermite-Guass ( $HG_{mn}$ ) [43] não possuem momento angular orbital, sobretudo o modo fundamental. Contudo, é possível obtermos feixes luminosos portadores de MAO. São exemplo disto os chamados modos de Laguerre-Gauss, que passaremos a descrever a seguir.

## 3.2 Modos de Laguerre-Gauss

Os modos de Laguerre-Gauss são portadores de momento angular orbital [42]. Eles são soluções da equação paraxial de Helmholtz em coordenadas cilíndricas

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0. \quad (3.7)$$

A solução geral é dada por

$$LG_p^l(r, z, \phi) = \sqrt{\frac{2p!}{\pi w^2(z)(p+|l|)!}} \left[ \frac{\sqrt{2}r}{w(z)} \right]^{|l|} \exp\left[-\frac{r^2}{w^2(z)}\right] L_p^l\left(\frac{2r^2}{w^2(z)}\right) \\ \times \exp\left\{i\left[kz - (2p+|l|+1)\arctan\left(\frac{z}{z_R}\right) + \frac{kr^2}{2R(z)} + l\phi\right]\right\}, \quad (3.8)$$

onde  $R(z)$  é o raio de curvatura do feixe,  $z_R$  a distância de Rayleigh,  $w(z) = w_0\sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}$  é o raio do feixe em  $z$  sendo  $w_0$  a cintura do feixe [43].  $L_p^l$  são os polinômios associados de Laguerre.

Os modos de Laguerre formam uma base ortonormal de soluções da equação paraxial em coordenadas cilíndricas, tal como os modos de Hermite-Gauss ( $HG_{m,n}$ ) o é para a equação paraxial em coordenadas cartesianas.

Analisemos o termo  $l\phi$  na fase do modo LG. A coordenada  $\phi$  não é bem definida na origem do plano, de onde provém uma singularidade de fase nos modos de Laguerre quando  $l \neq 0$ . Esta singularidade dará origem ao MAO do feixe. O índice inteiro  $l$  é conhecido como a carga topológica do feixe, ele é que dará o módulo e o sentido do MAO. Levando em conta a quantização do campo, dizemos que um fóton possuirá um momento angular orbital de  $l\hbar$ . Caso o fóton seja polarizado circularmente o momento angular total será  $(\sigma \pm l)\hbar$ , sendo  $\sigma = \pm 1$ , dependendo da orientação da polarização circular. O índice  $p$  é um índice radial. Para a polarização linear teremos uma superposição das polarizações circulares à direita e à esquerda.

O perfil de intensidade de algumas ordens do modo de Laguerre-Gauss é mostrado na figura 3.2. Para  $p = l = 0$ , recuperamos o modo fundamental  $TEM_{00}$ , assim  $HG_{00} = LG_0^0$ . Sempre que tivermos o índice radial  $p$  igual a zero e  $l \neq 0$ , o perfil de intensidade tem uma forma anelar, com uma região central escura de extensão dependente da ordem  $l$  do modo. Quanto maior for  $l$ , maior será a região escura, ou seja, quanto maior o  $l$ , mais fino será o "anel" de luz. Estes modos são também

conhecidos como vórtices óticos e são, em geral, os mais utilizados nos experimentos que exploram o momento angular da luz. O índice  $p$  estará relacionado com o "número de anéis" que teremos.

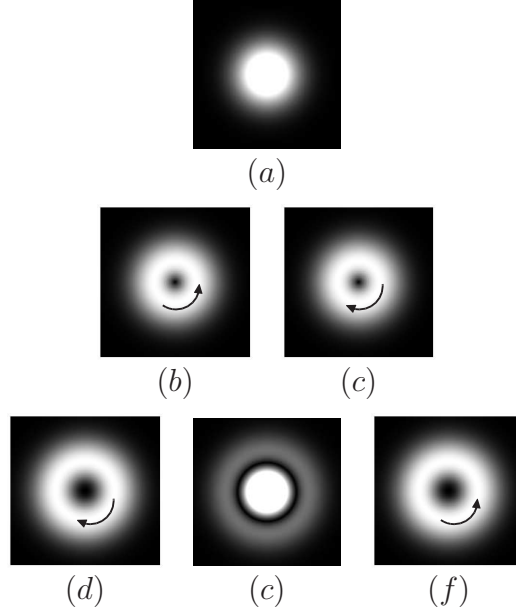


Figura 3.2: Perfis de intensidade dos modos de Laguerre-Gauss. Em (a) vemos o modo fundamental,  $(p, l) = (0, 0)$ . Em (b) e (c) os modos de primeira ordem,  $(p, l) = (0, 1)$  e  $(p, l) = (0, -1)$ , respectivamente. E em (d), (e) e (f) os modos de segunda ordem,  $(p, l) = (0, 2)$ ,  $(p, l) = (1, 0)$  e  $(p, l) = (0, -2)$ , respectivamente.

Existe uma relação entre as bases de Hermite e Laguerre, de modo que podemos expressar o elemento de uma base como uma combinação linear de elementos da outra. Tomando, particularmente, modos de primeira ordem, por serem os mais utilizados experimentalmente, podemos, por exemplo, escrever os modos de Laguerre  $LG_0^{\pm 1}$  como uma superposição dos seguintes modos de Hermite

$$LG_0^{\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{2}} (HG_{1,0} \pm iHG_{0,1}). \quad (3.9)$$

Podemos ilustrar este procedimento, como sugere a figura 3.3.

De maneira geral, podemos usar esta decomposição para obter ordens mais altas

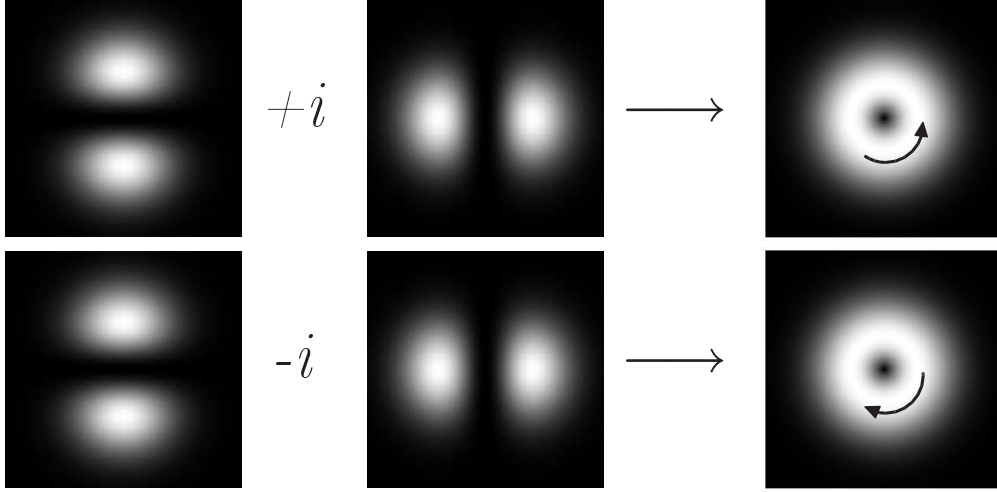


Figura 3.3: *Relação entre os modos HG e os modos LG de primeira ordem.*

dos modos de *LG*, bastando para isso a combinação de ordens transversas mais altas para os modos *HG* [44].

Igualmente, por formarem uma base, podemos escrever ainda modos de Hermite com uma certa rotação  $\theta$  em termos dos modos  $HG_{1,0}$  e  $HG_{0,1}$ . Para uma rotação de  $45^\circ$  e  $135^\circ$  temos

$$\begin{aligned} HG_{0,1}^{45^\circ} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (HG_{1,0} + HG_{0,1}), \\ HG_{0,1}^{135^\circ} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (HG_{1,0} - HG_{0,1}). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Notamos uma semelhança muito grande entre a relação entre os modos de primeira ordem *HG* e *LG* com a as polarizações linear e circular da luz. Tal semelhança permite construirmos uma representação análoga para modos transversos de primeira ordem e polarização da luz, como a esfera de Poincaré para modos transversos.

### 3.2.1 Esfera de Poincaré para modos transversos

O fato de podermos relacionar modos transversos de Hermite e Laguerre tal como polarização linear e circular nos permite lançar mão de uma representação

muito elegante como a esfera de Poincaré [45]. Para um feixe monocromático, seu estado de polarização pode ser totalmente caracterizado pelos parâmetros de Stokes [45]

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{I_{0^\circ} - I_{90^\circ}}{I_{0^\circ} + I_{90^\circ}}, \\ s_2 &= \frac{I_{45^\circ} - I_{135^\circ}}{I_{45^\circ} + I_{135^\circ}}, \\ s_3 &= \frac{I_{\circlearrowleft} - I_{\circlearrowright}}{I_{\circlearrowleft} + I_{\circlearrowright}}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde  $I_j$  representa a intensidade da componente  $j = 0^\circ, 45^\circ, \dots$  de polarização. Para feixes completamente polarizados os parâmetros de Stokes, obedecem a seguinte relação

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1, \quad (3.12)$$

o que nos leva a interpretar tais parâmetros como coordenadas cartesianas de uma esfera de raio unitário e cada ponto desta esfera representa um estado de polarização. Esta é a esfera de Poincaré para polarização e está representada na figura 3.4 a). Nos pólos desta esfera se encontram as polarizações circulares à direita e à esquerda, e no equador temos as polarizações lineares,  $0^\circ, 90^\circ, +45^\circ, -45^\circ(135^\circ)$ .

Podemos, então, pensar numa esfera de Poincaré para os modos de primeira ordem [46] de Hermite e Laguerre. Semelhantemente à polarização circular, teremos nos pólos os modos  $LG_0^{\pm 1}$  e no equador, em analogia à polarização linear teremos os modos de Hermite  $HG_{1,0}, HG_{0,1}, HG_{1,0}^{45^\circ}$  e  $HG_{0,1}^{135^\circ}$ , como mostra a figura 3.4 b).

Temos, similarmente, as coordenadas desta esfera dadas pelos parâmetros de Stokes para a esfera de modos transversos:

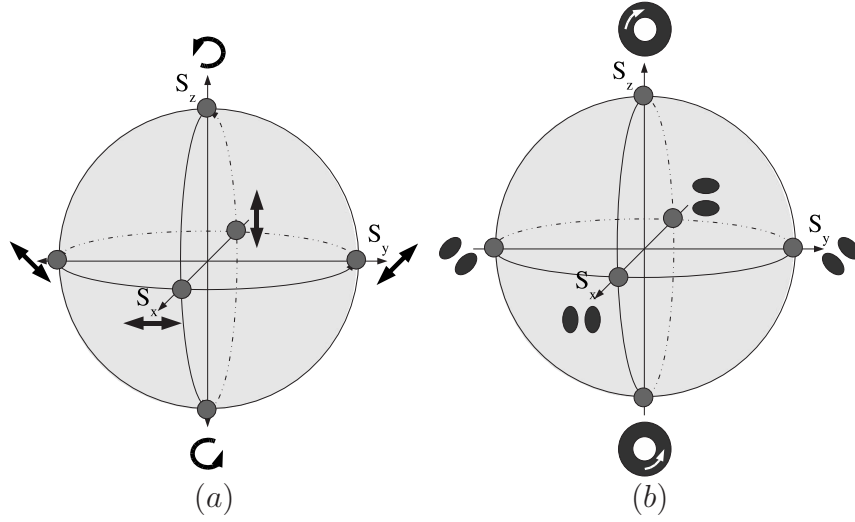


Figura 3.4: *Esfera de Poincaré para os estados de polarização e para os modos transversos de 1ª ordem.*

$$p_1 = \frac{I_{HG_{1,0}^{0^\circ}} - I_{HG_{1,0}^{90^\circ}}}{I_{HG_{1,0}^{0^\circ}} + I_{HG_{1,0}^{90^\circ}}},$$

$$p_2 = \frac{I_{HG_{1,0}^{45^\circ}} - I_{HG_{1,0}^{135^\circ}}}{I_{HG_{1,0}^{45^\circ}} + I_{HG_{1,0}^{135^\circ}}}, \quad (3.13)$$

$$p_3 = \frac{I_{LG_0^1} - I_{LG_0^{-1}}}{I_{LG_0^1} + I_{LG_0^{-1}}}. \quad (3.14)$$

Desta maneira relacionamos os modos transversos de Hermite e Laguerre de primeira ordem. Passemos agora a discutir algumas técnicas de obtenção experimental dos modos de Laguerre.

### 3.3 Geração de feixes luminosos portando momento angular orbital

A geração de feixes luminosos de ordem transversa mais alta não é uma das tarefas mais fáceis. Os lasers disponíveis fornecem o modo fundamental, devido ao requerimento de uma engenharia mais robusta e estável para as cavidades. Contudo, é possível obtermos feixes luminosos com ordens transversas não muito elevadas de maneira estável. Discutiremos, a seguir, alguns métodos de obter os modos de Laguerre-Gauss. Apresentaremos dois dos principais métodos: O Holográfico e o Conversor Astigmático.

#### 3.3.1 Método holográfico

Este é, sem dúvidas, uma das mais simples maneiras de se obter feixes com MAO. O método consiste em obter a onda helicoidal via reconstrução holográfica [47, 48], utilizando como hologramas, Placas Zonais Espirais (PZE). As PZE's são uma variação das placas zonais de Fresnel, ou lente de Fresnel [49].

Obtemos as PZE's a partir do padrão de interferência de uma onda plana e um modo de Laguerre divergente com carga topológica  $l$ , cuja forma é um padrão com  $l$  espirais, sendo  $l$ , também, a carga topológica do modo a ser gerado. Os padrões são gerados computacionalmente [50] e impressos com uma impressora de alta resolução, fornecendo padrões como os apresentados na figura 3.5. Na figura 3.5 a) temos uma placa zonal de Fresnel que é obtida para  $l = 0$ , em b) temos uma PZE para  $l = 1$ , sendo capaz de gerar os modos  $LG_0^{\pm 1}$ , em c) a PZE é de ordem 2 ( $l = 2$ ).

Depois de impressos os padrões são fotografados utilizando-se um filme *super grão fino* de altíssima resolução. Utilizamos o filme *Kodalith<sup>R</sup>*. Revelados, os negativos foram utilizados como hologramas (máscaras) de amplitude para geração dos modos

de Laguerre, como é mostrado na 3.5 d).

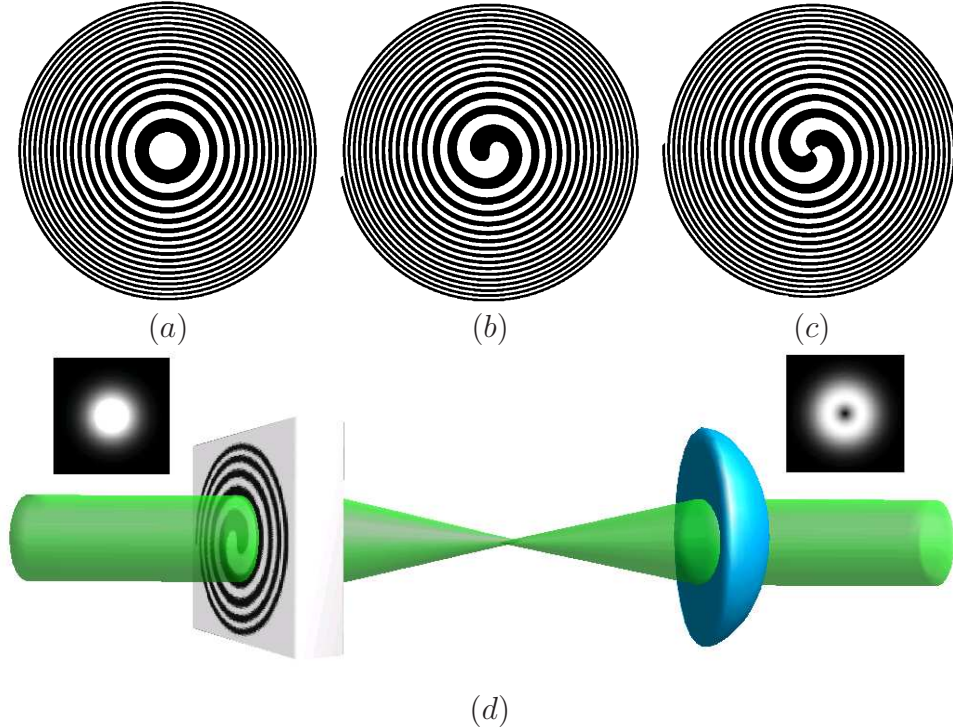


Figura 3.5: Máscaras usadas para gerar os modos  $LG$ . Em (a) uma placa zonal de Fresnel. Em (b) e em (c) temos duas placas zonais espirais (PZE) com helicidade  $+1$  e  $+2$ , respectivamente. Em (d) o arranjo experimental básico para produção do modo  $LG$ . Assim como as placas zonais de Fresnel, as PZE também focalizam o feixe, sendo necessário recolimá-lo utilizando uma lente posta de maneira confocal com a máscara.

Iluminamos a máscara com um feixe laser colimado e expandido, observando assim uma focalização da luz, já que as máscaras são uma variação da lente de Fresnel. Assim se faz necessário o uso de uma lente auxiliar, que é posta de maneira confocal com a máscara de modo a recolimar o feixe, este, já portando momento angular orbital.

Um outro tipo de máscara pode ser gerada a partir deste princípio. Interferindo um Laguerre-Guass ( $LG_0^l$ ) colimado com a onda plana. O que temos são franjas



de interferência apresentando no centro  $l$  bifurcações. A figura 3.6 a) mostra um padrão para  $l = 1$ , aparecendo uma bifurcação. Construindo hologramas destes padrões obtemos uma grade de difração, cujas ordens possuirão modos de Laguerre de diferentes  $l$ 's [51]. A ordem zero terá o modo fundamental, a ordem  $\pm 1$  terá o  $LG_0^{\pm 1}$ , e assim sucessivamente, como sugere a figura 3.6 b).

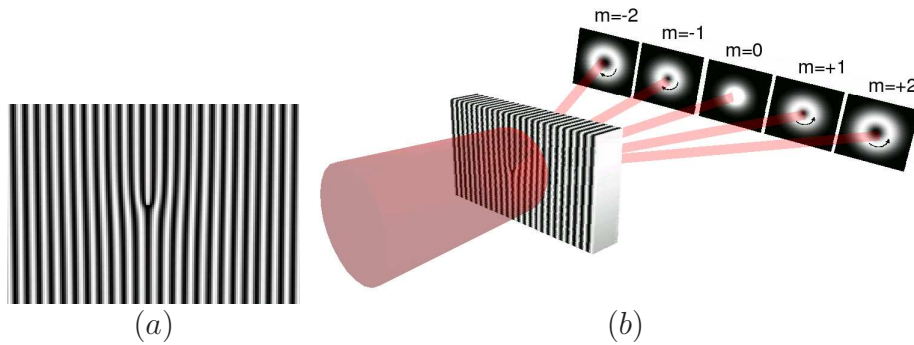


Figura 3.6: *Rede de difração bifurcada. Em (a) a rede de difração com defeito topológico gerada por computador. Em (b) um desenho esquemático do funcionamento da rede, onde  $m$  é a vorticidade do feixe.*

Temos assim uma família de modos, limitados, evidentemente, pela difração, que vai fornecer um  $l$  máximo que podemos observar. Em geral, a qualidade dos modos gerados por esta grade é maior que no primeiro caso, além deste fornecer várias ordens simultaneamente, o primeiro método gera apenas uma por vez <sup>1</sup>, mas concentra a intensidade naquele modo.

Como vemos, o método holográfico nos permite obter modos  $LG$  de diferentes cargas topológicas (ou vorticidade)  $l$ . Um fator limitante neste método, todavia é a intensidade. Como podemos notar, existe muita perda de energia no processo, como por exemplo, a expansão do feixe que ilumina o holograma e a absorção pelo material da máscara. Além disto, o uso de potência elevada (da ordem de  $100\text{ mW}$ ) irá deteriorar a máscara, derretendo-a. Portanto, este método se torna inadequado

<sup>1</sup>Com a máscara espiral obtemos diferentes ordens nos diferentes planos focais.

quando a potência é imprecindível como em experimentos de ótica não linear.

Este problema seria contornado utilizando-se uma máscara de fase [52], onde se eliminariam em grande parte as perdas. Porém o processo para construção destas máscaras não é de fácil implementação, além de mais oneroso.

Outra alternativa é utilizar Conversores Astigmáticos de modos, que passaremos a apresentar.

### 3.3.2 Conversores Astigmáticos de modos

Como vimos na seção 3.2 podemos decompor os modos  $LG$  na base dos modos  $HG$  com fases relativas como a equação (3.9). Se conseguirmos 'operar' experimentalmente esta decomposição podemos obter os modos  $LG$  partindo dos modos  $HG$ . A fase relativa entre os diferentes modos  $HG$  podem ser obtidas explorando a fase de Gouy, que é a fase adquirida por uma onda eletromagnética quando sofre uma focalização.

Para modos  $HG_{n,m}$  não astigmáticos a fase de Gouy [53] é dada por

$$\varphi_{n,m} = (n + m + 1) \varphi(z), \quad (3.15)$$

sendo  $\varphi(z) = \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right)$  para a cintura do feixe posicionada em  $z = 0$ .

O mesmo não é válido para um modo  $HG$  astigmático, que pode ser obtido passando um modo  $HG$  por uma lente cilíndrica. Neste caso, podemos considerar a amplitude deste modo separadamente, em dois planos perpendiculares  $(x, z)$  e  $(y, z)$ . Em cada um destes planos teremos distâncias de Rayleigh diferentes, resultando, assim, fases de Gouy distintas, nos levando a escrever

$$\varphi_{n,m} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \varphi_x(z) + \left(m + \frac{1}{2}\right) \varphi_y(z), \quad (3.16)$$

com

$$\begin{aligned}\varphi_x(z) &= \arctan\left(\frac{z}{z_{R_x}}\right), \\ \varphi_y(z) &= \arctan\left(\frac{z}{z_{R_y}}\right).\end{aligned}\quad (3.17)$$

Aqui,  $z_{R_x}$  e  $z_{R_y}$  são as distâncias de Rayleigh em cada plano.

O conversor de modos [53] irá então explorar esta decomposição da fase de Gouy para transformar os campos, fazendo-o astigmático em uma região do espaço a fim de induzir a defasagem necessária e deixando-o isotrópico no restante da propagação. Isto pode ser feito com um par de lentes cilíndricas, dispostas como mostra a figura 3.7.

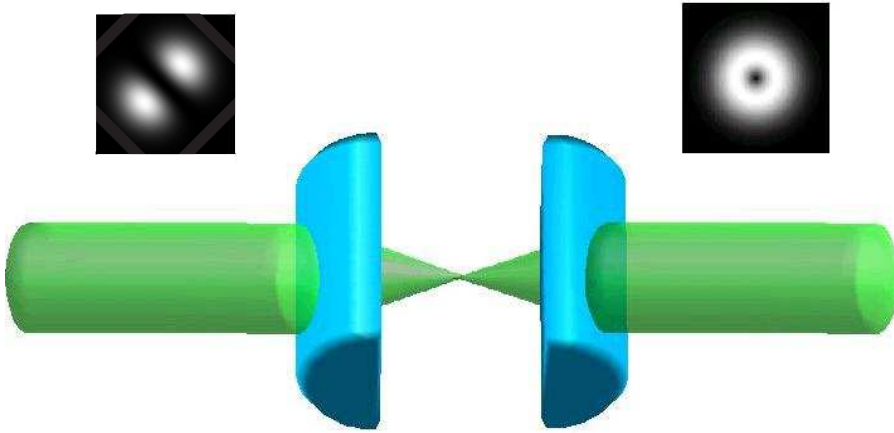


Figura 3.7: *Conversor de modos com lentes cilíndricas.*

Tomemos o caso da equação (3.9). Se incidirmos um modo  $HG_{0,1}$  no aparato mostrado na figura 3.7 com as lentes cilíndricas fazendo um ângulo de  $45^\circ$  com a linha nodal, teremos introduzido uma diferença de fase entre as componentes do modo durante a propagação entre as duas lentes. Sendo esta diferença de fase igual a  $\pm\pi/2$ , o que teremos é a realização da equação (3.9), e teremos produzido um

modo  $LG_0^{\pm 1}$ . O mesmo ocorre quando entramos com um modo  $LG_0^{\pm 1}$  e recuperamos um modo  $HG_{0,1}$  rodado de  $\pm 45^\circ$  em relação às lentes.

A defasagem entre as componentes irá depender da distância  $D$  entre as lentes, e esta estará relacionada com a distância focal das lentes utilizadas. Para um par de lentes idênticas de focal  $f$ , para obtermos uma defasagem de  $\pi/2$  teremos  $D = f\sqrt{2}$  [53]. Este conversor é chamado de **Conversor**  $\pi/2$ , e pode levar um modo  $HG$  em outro  $LG$ , e vice-versa.

Da mesma forma podemos ter uma defasagem de  $\pi$  que acarretará numa inversão de vorticidade para um modo de Laguerre incidente, levando um  $LG_0^l$  em um  $LG_0^{-l}$ . Na incidência de um modo de Hermite, sua linha nodal sofrerá uma reflexão com relação ao eixo das lentes cilíndricas. Neste caso a distâncias entre as lentes será  $D = 2f$  e teremos um **Conversor**  $\pi$ .

Voltando a analogia entre os modos transversos  $HG$  e  $LG$  de primeira ordem com as polarizações linear e circular, respectivamente, podemos fazer também uma analogia entre estes conversores e os elementos birrefringentes que são utilizados para transformação de polarização. Assim, podemos associar o Conversor  $\pi/2$ , que leva um modo  $HG_{1,0}$  e  $HG_{0,1}$  a um modo  $LG_0^{\pm 1}$ , à uma lâmina Quarto-de-onda que leva polarização linear à circular. Igualmente associamos o Conversor  $\pi$  com a lâmina de Meia-onda. Com uma combinação destes elementos conseguimos realizar todas as transformações na esfera de Poincaré.

Outro elemento que vale a pena salientar para transformações de modos de Laguerre, é o prisma de Dove. Trata-se de um prisma de ângulo reto, com sua base tratada para reflexão máxima. Nestas condições, um modo  $LG_0^{+1}$  incidente é rebatido, saindo do prisma com sua vorticidade invertida ( $LG_0^{-1}$ ).

### 3.3.3 Obtenção de modos de Hermite

Vimos, então, como se transforma um modo  $HG$  em um  $LG$ . Precisamos, portanto, antes de mais nada, termos um modo  $HG$ , o que não é uma tarefa trivial no laboratório. Os lasers operam fornecendo o modo fundamental, por ser uma solução mais estável e mais utilizados na grande maioria dos experimentos. Em geral se procura o modo fundamental mais puro possível.

Uma solução é introduzirmos um fio muito fino no interior da cavidade do laser, forçando-o a operar transversalmente no modo  $HG_{1,0}$  ou  $HG_{0,1}$ . Esta tática foi bem sucedida em alguns laboratórios, mas a perda de potência é grande e a estabilidade comprometida. Além disso é sempre um risco danificarmos o laser ao abrí-lo.

Uma solução muito elegante foi dada pelo Dr. D. Petrov [54], que simula um  $HG_{0,1}$  com dois feixes gaussianos saídos de um interferômetro de Mach-Zender ligeiramente desalinhado, como sugere a figura 3.8.

Um feixe gaussiano é dividido em dois braços equilibrados e recombinados no segundo divisor de feixes. Um dos espelhos é colocado em um estágio de translação. Assim, alinhamos o interferômetro para que os feixes saiam co-propagantes interferindo construtivamente. Com o estágio deslocamos um dos braços de  $\sqrt{2}W(z)$  ( $W(z)$  é o raio do feixe), e com o PZT ajustamos a fase, para que a diferença de fase entre eles seja  $\pi$  e tenhamos uma franja de interferência destrutiva entre os feixes<sup>1</sup>, equivalente à linha nodal de um modo de Hermite. Esta combinação fornece uma boa aproximação de um modo de Hermite e pode ser usada para obtermos os modos de Laguerre, pelo método astigmático.

---

<sup>1</sup>Note que podemos construir um modo  $HG$  de primeira ordem girado de qualquer ângulo.

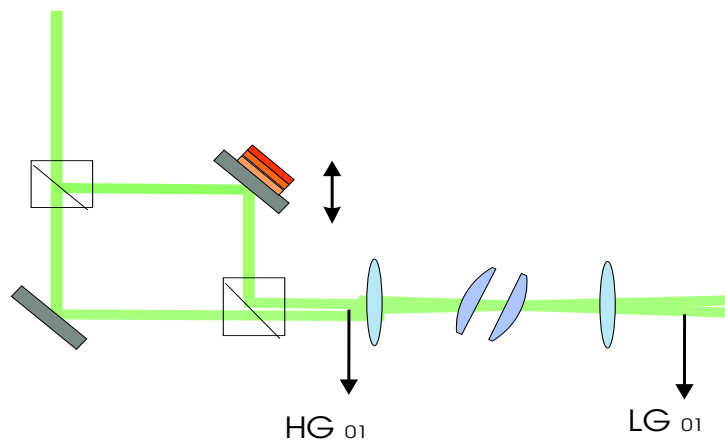


Figura 3.8: *Esquema para obtenção do modo  $HG_{1,0}$ . Um dos espelhos é posto sobre um estágio de translação e pode ser controlado por um PZT, este controlará a deflexão entre os feixes co-propagantes. Uma lente é posta para o casamento de modo com o conversor, composto por duas lentes cilíndricas rodadas de  $45^\circ$  em relação à linha nodal do modo. Uma segunda lente é utilizada para colimar o modo  $LG_0^1$  produzido.*

### 3.3.4 Caracterização dos modos de Laguerre

Discutimos até aqui métodos para obtenção dos chamados vórtices óticos. Após utilizar qualquer que seja o método, precisamos nos certificar de que obtivemos, de fato, um modo de Laguerre. Uma maneira inequívoca de fazer tal caracterização é feita via interferometria. Como discutimos na seção 3.3.1, o padrão de interferência destes modos possuem defeitos topológicos relacionados com a carga topológica  $l$  do feixe. Utilizamos um interferômetro de Michelson por seu fácil alinhamento.

O método consiste, então, em desalinhar o interferômetro, de modo a fazer com que a singularidade de um braço superponha-se com o anel de intensidade do outro braço, obtendo-se então um padrão de interferência como o da figura 3.9. Neste caso, observamos dois "garfos" contendo  $l$  bifurcações, onde  $l$  é a carga topológica do modo.

Outro método é interferirmos um modo de Laguerre com uma onda esférica. Obteremos com isto  $l$  espirais como mostra a figura 3.9.

Podemos também, diante de dois padrões, comparar a vorticidade de dois modos. Por exemplo, dois padrões com uma bifurcação podem ser resultantes da interferência de um  $LG_0^{+1}$  ou um  $LG_0^{-1}$ . Mas as posições dos "garfos" para um modo  $LG_0^{+1}$  serão invertidas com relação às de um modo  $LG_0^{-1}$ , de maneira que não poderemos obter um padrão com a rotação do outro, permitindo-nos identificar a vorticidade do modo.

## 3.4 Defeitos topológicos em franjas de moiré

A superposição de estruturas repetitivas, não necessariamente periódicas, dá origem a novas estruturas, nem sempre presentes nas originais. Este é o efeito *moiré*, ou *franjas de moiré* devido a certa semelhança com franjas de interferência. De grande

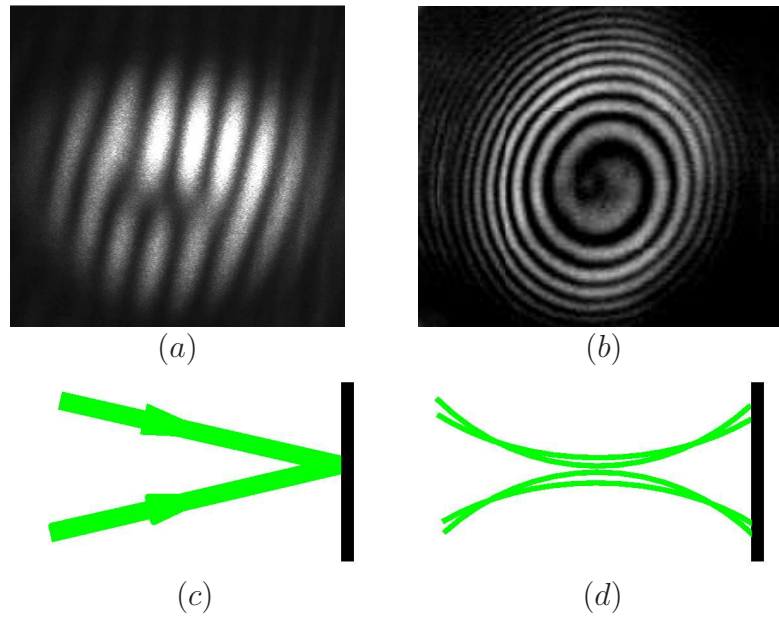


Figura 3.9: Em (a) vemos o padrão gerado pela interferência (c) entre modos LG, o número de bifurcações é igual ao módulo da helicidade. Em (b) temos interferências (d) do modo com uma onda esférica, o módulo da helicidade dos feixes é igual ao número de espirais claras ou escuras.

apelo tecnológico, tal efeito vem sendo utilizado em técnicas de metrologia ótica, como por exemplo, testes não destrutivos na engenharia mecânica [55]. Aplicações óticas utilizando franjas de moiré vêm ganhando espaço nos últimos anos, como medidas de propriedades de lasers [56], microscopia [57] e holografia em tempo real [58]. Comum também no dia-a-dia, podemos observar estas franjas na superposição de tecidos semi-transparentes.

São conhecidas franjas de moiré para uma grande variedade de estruturas, inclusive para a Placa zonal de Fresnel (PZF) ilustrada na figura 3.10 a). A superposição de duas PZF's apresenta uma série de franjas retilíneas paralelas. Quando superpomos grades retilíneas com diferentes frequências espaciais, origina-se franjas do tipo "batimento espacial", cuja frequência é, de fato, a diferença das frequências das grades originais. Realizamos um estudo das franjas de moiré originadas da superpo-



sição de Placas zonais espirais (PZE), utilizadas como hologramas para geração de vórtices óticos. Trabalhamos com as cargas topológicas de módulo  $|l| = 1$  e  $|l| = 2$ . A figura 3.10 b) e c), ilustram estas máscaras respectivamente.

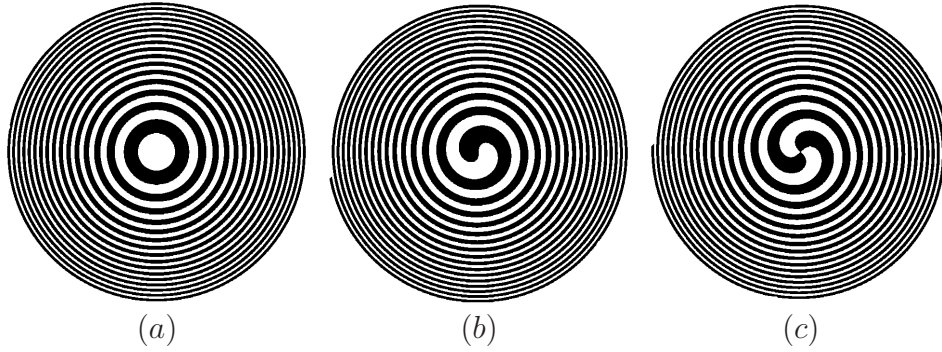


Figura 3.10: Apresentamos aqui a placa zonal de Fresnel (a), e placas zonais espirais com carga topológica  $l = 1$  (b) e  $l = 2$  (c).

Observamos [59] o aparecimento de defeitos topológicos similares à assinatura de vorticidade no padrão de interferência de vórtices gerados por tais hologramas, que passaremos a apresentar. Fizemos uma análise teórica do problema seguindo a referência [60], cujos resultados suportam o estudo experimental realizado.

### 3.4.1 Superposição entre PZEs

A referência [60] explica muito bem a noção de repetitividade, não estritamente periódicas, mas que apresentam uma certa repetição, governada por uma lei matemática, como é o caso da PZF e das PZE's. A transmitância  $t(x, y)$  de uma dada estrutura pode ser escrita como

$$t(x, y) = p[g(x, y)], \quad (3.18)$$

onde  $p(x')$  é uma função periódica chamada perfil periódico e  $x' = g(x, y)$  é uma transformação de coordenadas  $g : \mathfrak{R}^2 \mapsto \mathfrak{R}$  que dá a forma geométrica da estrutura.

Por exemplo, uma PZF pode ser obtida utilizando a função Cossenoidal como  $p$ , com  $g(x, y) = \alpha(x^2 + y^2)$ , onde  $\alpha$  é a escala radial. Uma PZE terá como forma geométrica, escrita convenientemente em coordenadas polares,

$$g(r, \phi) = \alpha r^2 + l\phi, \quad (3.19)$$

onde além da escala radial  $\alpha$ , teremos a carga topológica  $l$  multiplicada à coordenada  $\phi$ . Note que, para  $l = 0$ , a equação 3.19 reduz-se à expressão correspondente à PZF.

As propriedades espectrais da função de transmissão serão dadas pela decomposição de Fourier do perfil periódico  $p[g(r, \phi)]$

$$t(r, \phi) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2i\pi\nu n g(r, \phi)}, \quad (3.20)$$

onde  $n$  é inteiro. As PZE's superpostas serão máscaras de amplitude, para as quais limitamos nossa análise. Neste caso, a presença de frequências positivas e negativas dão origem a batimentos quando superpomos duas destas máscaras de amplitude.

A superposição de duas máscaras terá sua função de transmissão descrita pelo produto das funções de transmissão de cada uma

$$t(r, \phi) = t_1(r, \phi) t_2(r, \phi), \quad (3.21)$$

que terá sua decomposição de Fourier dada por

$$t_1(r, \phi) t_2(r, \phi) = \sum_{n, n'=-\infty}^{+\infty} c_n^1 c_{n'}^2 e^{2i\nu\pi[n g_1(r, \phi) + n' g_2(r, \phi)]}. \quad (3.22)$$

Se tomarmos os pares  $(n, n') = m(k_1, k_2)$ , onde  $k_1$  e  $k_2$  são inteiros co-primos, e realizarmos a soma parcial sobre  $m$  teremos extraído de (3.22) as franjas de moiré

$$f_{k_1, k_2}(r, \phi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{mk_1}^1 c_{mk_2}^2 e^{2i\nu\pi m [g_{k_1, k_2}(r, \phi)]}, \quad (3.23)$$

onde

$$g_{k_1, k_2}(r, \phi) = k_1 g_1(r, \phi) + k_2 g_2(r, \phi), \quad (3.24)$$

é a forma geométrica das franjas de moiré. Vale salientar, que a estrutura  $f_{k_1, k_2}$  não está presente em nenhuma das estruturas originais, mas aparece da superposição das duas. Percebemos que existem infinitas ordens  $(k_1, k_2)$  de franjas de moiré, e quanto maior for esta ordem, maiores as frequências. Como normalmente somente podemos resolver a ordem mais baixa, consideremos então a estrutura de moiré  $f_{1, -1}$ , que terá como forma geométrica a diferença das formas individuais, como vemos na equação (3.24) fazendo  $k_1 = 1$  e  $k_2 = -1$ . Tomemos agora duas PZE's de cargas topológicas  $l_1$  e  $l_2$ , ligeiramente deslocadas ao longo da direção  $x$ . A equação (3.19) para cada uma das PZE's ficará

$$\begin{aligned} g_1(r, \phi) &= \alpha \left[ \left( x + \frac{\epsilon}{2} \right)^2 + y^2 \right] + l_1 \phi, \\ g_2(r, \phi) &= \alpha \left[ \left( x - \frac{\epsilon}{2} \right)^2 + y^2 \right] + l_2 \phi, \end{aligned} \quad (3.25)$$

com  $\epsilon \ll 1$ . Tomando somente até a primeira ordem em  $\epsilon$ , escreveremos então a forma geométrica da estrutura de moiré como

$$\begin{aligned} g_{1, -1}(r, \phi) &= 2\alpha\epsilon x + \Delta l \phi, \\ &= 2\alpha\epsilon r \cos \phi + \Delta l \phi, \end{aligned} \quad (3.26)$$

onde  $\Delta l = l_1 - l_2$ .

As curvas resultantes serão um conjunto de franjas claras e escuras de modos que  $g_{1, -1} = q\pi$ , com  $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Para o caso de  $l_1 = l_2 = 0$  teremos a superposição de duas PZF, obtendo um seqüência de linhas retas  $2\alpha\epsilon x = q\pi$ , regularmente espaçadas. O mesmo é observado para  $l$ s diferentes de zero, porém idênticos ( $l_1 = l_2$ ), fazendo com que  $\Delta l$  seja nulo. Mas se  $l_1 \neq l_2$ ,  $g_{1, -1}$  se torna dependente de  $\phi$ , que é indefinido na origem. Portanto, aparecerão defeitos topológicos nas franjas de moiré, que na prática serão  $\Delta l$  bifurcações que aparecerão, em analogia ao padrão de interferência de vórtices óticos com cargas topológicas iguais a  $l_1$  e  $l_2$  respectivamente.

Outra estrutura muito interessante aparece quando superpomos de maneira concêntrica duas PZE's com diferentes escalas radiais

$$\begin{aligned} g_1(r, \phi) &= \alpha_1 r^2 + l_1 \phi, \\ g_2(r, \phi) &= \alpha_2 r^2 + l_2 \phi. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Neste caso obtemos

$$g_{1,-1}(r, \phi) = \Delta\alpha r^2 + \Delta l \phi, \quad (3.28)$$

o que significa que a franja de moiré será uma nova PZE de carga topológica  $\Delta l = l_1 - l_2$  e escala radial  $\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ .

Passemos agora aos resultados experimentais que comprovam as equações (3.26) e (3.28).

### 3.4.2 Resultados experimentais

Mostraremos agora as franjas de moiré obtidas com a superposição de duas PZE's variando suas cargas topológica em módulo ( $|l| = 1$  e  $|l| = 2$ ) e em sentido<sup>1</sup>.

A fim de ilustrar as similaridades entre franjas de moiré e padrões de interferência, realizamos primeiro a interferência entre vórtices gerados pelo holograma mostrado na figura 3.10 b).

Utilizamos um interferômetro de Mach-Zehnder para podermos ter a liberdade de manipular a vorticidade em cada braço independentemente. Realizamos dois esquemas diferentes, como mostra a figura 3.11

Com o interferômetro estando ligeiramente desalinhado, obtivemos os padrões de interferência, registrando-os com uma câmera CCD colocada em uma das saídas do Mach-Zehnder.

---

<sup>1</sup>Note que se invertermos o lado no qual incide-se luz no holograma, invertemos seu sinal.

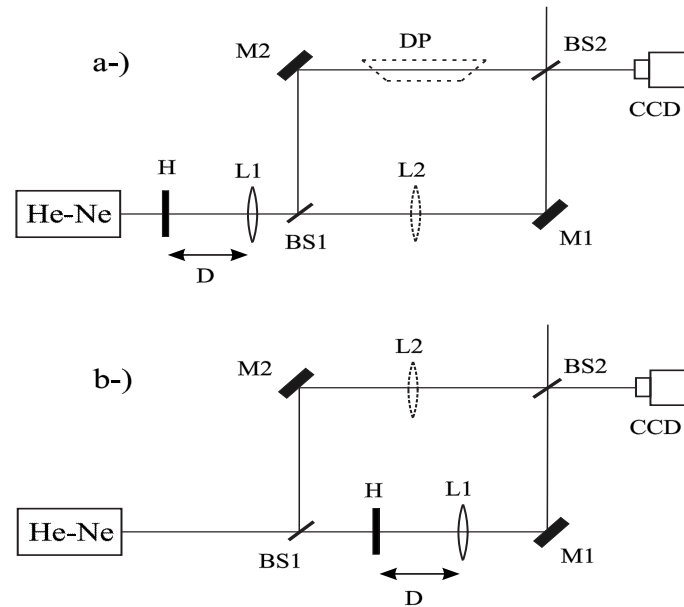


Figura 3.11: Esquemas utilizados para gerar os padrões de interferência a partir do holograma  $H$ . Em a) obtemos o modo  $LG$  fora do interferômetro para interferirmos feixes de ordens superiores. Com o Prisma de Dove  $DP$  presente invertemos a vorticidade do  $LG$  que passa por aquele braço. Com a lente  $L_2$  introduzimos uma divergência diferente para os dois braços. Já em b), o  $LG$  é produzido em um dos braços e utilizamos este esquema para interferir um modo com  $l = 0$  com outro de ordem superior.

Com um laser He-Ne (638.2nm, Coherent), de potência igual a 7mW iluminamos hologramas para geração dos modos de Laguerre, como descreve a seção 3.3.1. Quando queremos interferir vórtices de ordens mais altas, usamos o esquema da figura 3.11 a). Um vórtice é gerado fora do interferômetro e sua vorticidade pode ser invertida em um dos braços com um prisma de Dove  $DP$ , ou ainda sua divergência pode ser alterada com a lente  $L_2$ . Para realizarmos a interferência de um vórtice com um feixe de carga topológica  $l = 0$ , usamos o aparato 3.11 b), onde um vórtice é gerado em um dos braços do interferômetro.

Para obter as franjas de moiré utilizamos hologramas similares aos utilizados para geração dos modos  $LG$ . Um deles é fixado em um suporte de translação  $X - Y$  com estágio micrométrico, a fim de realizar pequenos deslocamentos  $\epsilon$  ao longo da direção  $X$ . A superposição dos hologramas é iluminada por luz branca e a imagem capturada por um câmera CCD.

Apresentamos na figura 3.12 os resultados obtidos para franjas de moiré de hologramas de mesma escala radial e a interferência para feixes que tenham a mesma divergência. Comparamos, assim, seus padrões. À esquerda temos padrões de interferência e à direita, a respectiva franja de moiré.

A figura 3.12 a) foi obtida pela auto interferência de um vórtice  $l = 1$ . Ela foi obtida com o esquema da figura 3.11 a) sem o prisma  $DP$  e a lente  $L_2$ . Em 3.12d) temos a franja de moiré para duas máscaras com  $l = 1$ . A semelhança entre os padrões é muito clara, não aparecendo nenhuma bifurcação conforme o previsto pela equação 3.26 para o caso  $\Delta l = 0$ .

O resultado apresentado na figura 3.12 b) é fruto da interferência de um feixe com  $l = 0$  com um  $l = 1$ . Para tanto utilizamos o esquema da figura 3.11 b) sem a lente  $L_2$ . A franja de moiré equivalente é mostrada em 3.12 e), apresentando uma bifurcação, em concordância com a equação 3.26 para  $\Delta l = 1$ .

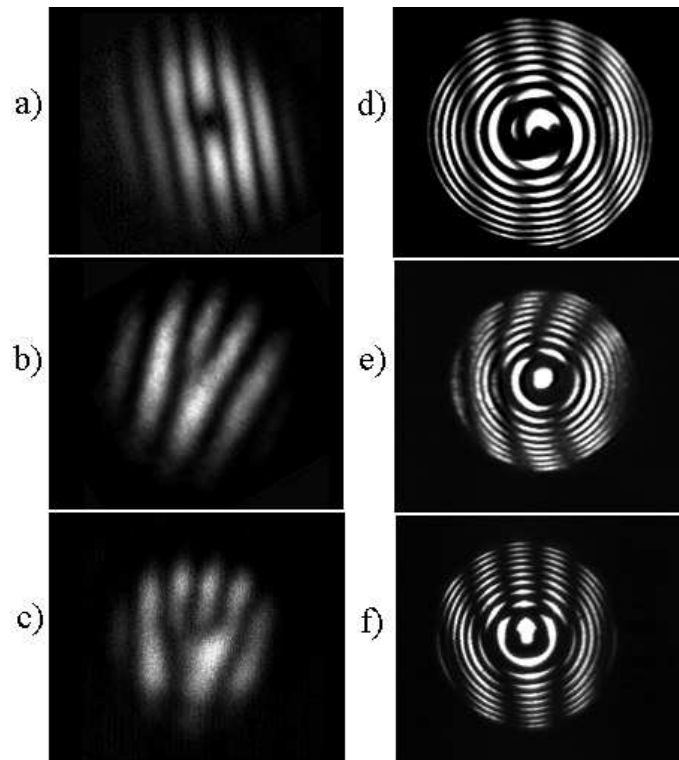


Figura 3.12: Padrões de interferência entre dois vórtices óticos com a)  $l_1 = l_2 = 1$ , b)  $l_1 = 1, l_2 = 0$  c)  $l_1 = 1, l_2 = -1$  e franjas de moiré análogas obtidas com a superposição de duas PZE de d)  $l_1 = l_2 = 1$ , e)  $l_1 = 1, l_2 = 0$  e f)  $l_1 = 1, l_2 = -1$

Em 3.12 c) mostramos a interferência de um vórtice  $l = 1$  com um  $l = -1$ . O feixe com  $l = -1$  é obtido no esquema 3.11 a) com a inserção do prisma de Dove  $DP$ . A figura 3.12 f) é a franja de moiré correspondente, e o defeito equivalente a  $\Delta l = 2$  é claro em ambos os casos.

Note que em 3.12 e), temos as franjas ligeiramente inviezadas. Lembramos que esta figura foi obtida da superposição de um PZF ( $l = 0$ ) com uma PZE  $l = 1$ . Neste caso, uma ligeira diferença entre as escalas radiais gera esta anomalia, nos incentivando a estudar o caso para escalas radiais com uma diferença mais contundente.

Para este estudo repetimos basicamente os mesmos passos anteriores, mas introduzimos a lente  $L_2$  em ambos os braços (esquemas 3.11 a) e b) ) a fim de obtermos divergências distintas com o interferômetro alinhado. Para as franjas de moiré utilizamos a mesma seqüência de  $ls$ , porém com diferentes escalas radiais.

A figura 3.13 traz os resultados obtidos para esta seqüência. 3.13 a) traz a auto-interferência do modo  $l = 1$  e 3.13 d) a correspondente franja de moiré. O primeiro anel da PZF é claramente observado.

Em 3.13 b) interferimos  $l = 0$  com  $l = 1$ , observando o mesmo padrão com uma espiral em seu moiré equivalente, 3.13 e), ainda que com um freqüência muito mais baixa.

Já em 3.13 c) temos a interferência de vórtices de primeira ordem e vorticidades opostas, resultando  $\Delta l = 2$ . Duas espirais são observadas tanto no padrão de interferência quanto na franja de moiré, 3.13 f). Os resultados das figuras 3.13 d), e) e f) estão de acordo com a equação 3.28 para  $\Delta l = 0, 1$  e  $2$ .

Percebemos assim que as equações (3.26) e (3.28) são comprovadas experimentalmente. Verificamos a grande similaridade entre os defeitos topológicos apresentados nas franjas de moiré de PZEs e aqueles presentes nos padrões de interferência de



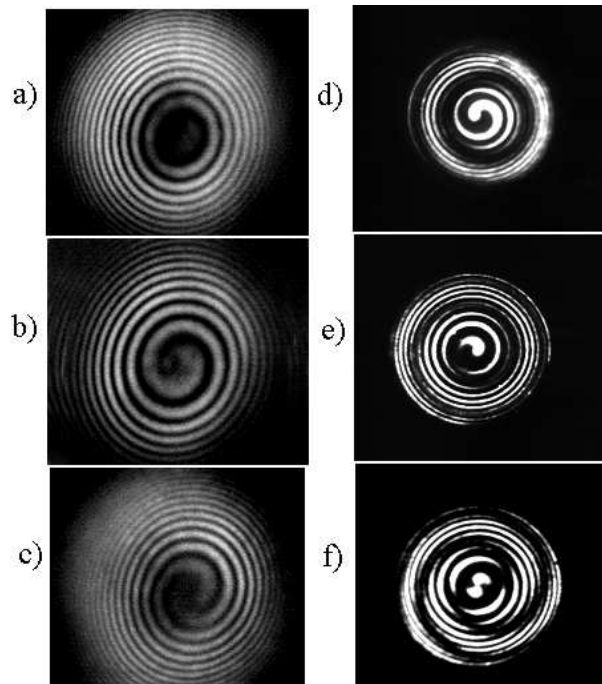


Figura 3.13: *Padrões de interferência entre dois vórtices óticos de divergências distintas com a)  $l_1 = l_2 = 1$ , b)  $l_1 = 1, l_2 = 0$  c)  $l_1 = 1, l_2 = -1$  e franjas de moiré análogas obtidas com a superposição de duas PZE com diferentes escalas radiais de d)  $l_1 = l_2 = 1$ , e)  $l_1 = 1, l_2 = 0$  e f)  $l_1 = 1, l_2 = -1$ .*

vórtices óticos.

Para construir as franjas de moiré tomamos hologramas utilizados para geração de vórtices e estes geraram franjas de baixa frequência, mas mesmo assim ficou evidenciado o efeito. Para ilustrar franjas de frequências e ordens mais altas, obtivemos franjas de moiré para máscaras de carga topológica  $|l| = 2$ . Na figura 3.14 temos os resultados obtidos. Em 3.14 a) apresentamos a superposição de máscaras com  $l_1 = l_2 = 2$  e mesma escala radial, e franjas retas são obtidas. Para 3.14 b) temos  $l_1 = 2, l_2 = -2$ , fornecendo  $\Delta l = 4$ , o que pode ser verificado. Em 3.14 c) utilizamos máscaras de mesma carga topológica mas com diferentes escalas radiais, de modo que  $\Delta l = 0$ . Os primeiros anéis escuros das zonas de Fresnel são observados. Quando superpomos máscaras com  $l_1 = 2, l_2 = -2$ , e escalas radiais distintas, obtemos 3.14 d), e 4 espirais são observadas.

Observamos, assim, defeitos topológicos na formação de franjas de moiré de PZE's, mostrando seu análogo interferométrico. Vimos que os defeitos oriundos desta superposição obedecem a uma lei matemática muito bem definida. No próximo capítulo vamos estudar a conversão paramétrica descente estimulada, onde estudaremos a transferência de momento angular orbital, e espontânea, usada para formação de franjas de moiré não locais em imagens quânticas.

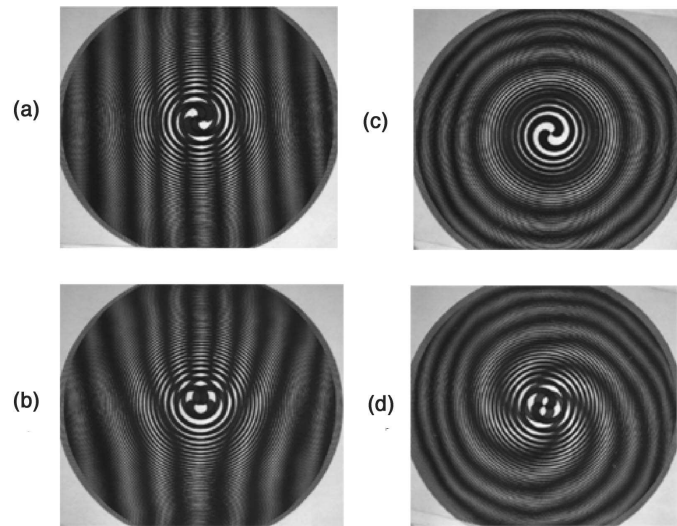


Figura 3.14: *Franjas de moiré obtidas da supermposição de duas PZEs de mesma escala radial com a)  $l_1 = l_2 = 2$ , b)  $l_1 = 2, l_2 = -2$ , e escalas radiais diferentes c)  $l_1 = l_2 = 2$ , d)  $l_1 = 2, l_2 = -2$*

# Capítulo 4

## Amplificação Paramétrica

### Contents

---

<b>4.1</b>	<b>Mistura de ondas ou conversão paramétrica de frequências</b>	<b>67</b>
4.1.1	Equação de onda em um meio não linear . . . . .	67
4.1.2	Equações de onda acopladas: CPD estimulada . . . . .	69
<b>4.2</b>	<b>Conversão Paramétrica Descendente Espontânea: Fótons gêmeos</b>	<b>73</b>
4.2.1	Estado produzido pela interação paramétrica . . . . .	74
4.2.2	Transferência do espectro angular na CPD . . . . .	79
<b>4.3</b>	<b>Transferência de momento angular orbital na CPD estimulada</b>	<b>83</b>
4.3.1	Transferência do espectro Angular na CPD Estimulada . .	84
4.3.2	Experimento com MAO . . . . .	87
<b>4.4</b>	<b>Imagens quânticas e franjas de moiré não-locais na CPD Espontânea</b>	<b>93</b>
4.4.1	Formação de Imagens . . . . .	93

4.4.2	Moiré não local: Teoria . . . . .	96
4.4.3	Moiré não local: Experimento . . . . .	106

---

A Ótica não-linear nasceu com o experimento de geração do segundo Harmônico, observado pela primeira vez por Franken, Hill, Peters e Weinreich [1], em 1961, logo depois da primeira operação laser em 1960, realizada por Maiman [61]. Este ramo da Física estuda fenômenos que ocorrem como consequência da modificação das propriedades óticas de alguns materiais com a presença da luz. A polarização em um meio dielétrico é dada por

$$\begin{aligned}\vec{P}(t) &= \overset{\leftrightarrow}{\chi}^{(1)} \vec{E}(t) + \overset{\leftrightarrow}{\chi}^{(2)} \vec{E}(t) \vec{E}(t) + \overset{\leftrightarrow}{\chi}^{(3)} \vec{E}(t) \vec{E}(t) \vec{E}(t) + \dots \\ &\equiv \vec{P}^{(1)} + \vec{P}^{(2)} + \vec{P}^{(3)} + \dots,\end{aligned}\tag{4.1}$$

onde  $\overset{\leftrightarrow}{\chi}^{(n)}$  é o tensor de susceptibilidade elétrica de ordem  $n$ . No início das pesquisas somente intensidades significativas de luz podiam explorar estas propriedades, porém nos dias de hoje é possível a fabricação de materiais que tenham uma susceptibilidade não linear cada vez maior, permitindo a interação não linear para intensidades cada vez mais baixas.

Estes termos não-lineares permitem, então, um acoplamento entre campos de diferentes frequências em um meio material, dando origem ao fenômeno chamado mistura de ondas, ou amplificação paramétrica. Além do efeito de geração de segundo harmônico, temos a soma e a diferença de frequência. O processo de diferença de frequências é também chamado de Conversão Paramétrica Descendente (CPD). O processo pode ser estimulado, onde precisamos de dois feixes luminosos interagindo no meio não linear para geração de um terceiro, trata-se da CPD Estimulada que discutiremos na seção 4.1, mostrando a transferência de Momento Angular Orbital.

Porém, o bombeamento do meio não linear por um único feixe laser irá gerar outras frequências, ou seja, temos também a CPD Espontânea, que trataremos na seção 4.2. Neste caso, pode-se explicar tal efeito através da quantização do campo, revelando o emaranhamento dos fótons gerados neste processo. Existe, neste caso, uma forte correlação quântica espacial e temporal, que exploramos para mostrar a geração de franjas de moiré em imagens quânticas.

## 4.1 Mistura de ondas ou conversão paramétrica de frequências

Vamos discutir nesta seção o processo de mistura de ondas ou conversão paramétrica descendente estimulada. Neste processo dois campos, um de frequência  $\omega_0$ , que identificamos como um campo de bombeamento, relativamente forte, e outro de frequência  $\omega_1$ , chamado de feixe auxiliar, interagem em um meio não linear para produzir um terceiro campo de frequência  $\omega_2 = \omega_0 - \omega_1$ . Este processo está esquematizado na figura 4.1. Veremos os cálculos clássicos do processo seguindo, basicamente, a referência [64].

### 4.1.1 Equação de onda em um meio não linear

Para explorar a não linearidade do meio precisamos acrescentar os termos dielétricos nas equações de Maxwell

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.\end{aligned}\tag{4.2}$$

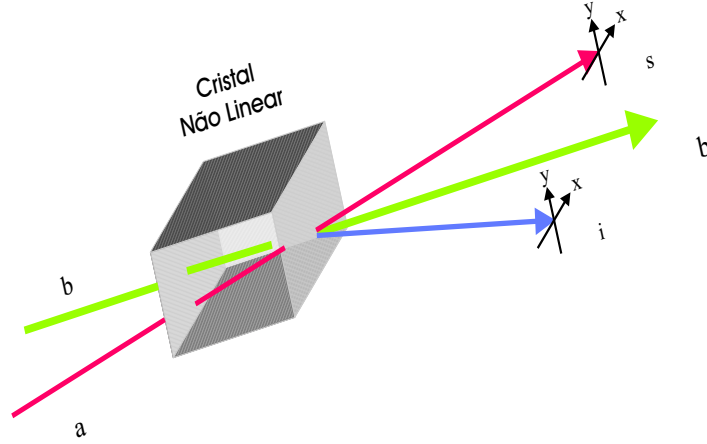


Figura 4.1: Esquema para CPD Estimulada.

com

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \\ \vec{B} &= \mu_0 \vec{H},\end{aligned}\tag{4.3}$$

onde  $\vec{J}$  é a densidade de corrente,  $\vec{P}$  a polarização elétrica do meio e  $\vec{D}$  o vetor deslocamento. Obtemos, então, a partir da substituição de 4.3 em 4.2

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}),\tag{4.4}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \vec{H}).\tag{4.5}$$

Analisemos a polarização do meio. Ela pode ser escrita como a soma de um termo linear e outro não-linear

$$\vec{P} = \epsilon_0 \overset{\leftrightarrow}{\chi}^{(1)} \vec{E} + \vec{P}_{NL},\tag{4.6}$$

onde  $\overset{\leftrightarrow}{\chi}^{(1)}$  é a susceptibilidade elétrica. Para meios isotrópicos esta grandeza é um escalar, não dependendo da polarização do campo elétrico. Em geral os cristais utilizados em laboratório são anisotrópicos e por isto  $\overset{\leftrightarrow}{\chi}^{(1)}$  deve ser expresso como um tensor.

Tal decomposição nos permite reescrever (4.4), substituindo a densidade de corrente por  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ , onde  $\sigma$  é a condutividade, como

$$\nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \vec{E}) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{P}_{NL} \quad (4.7)$$

onde  $\epsilon = (1 + \overset{\leftrightarrow(1)}{\chi}) \epsilon_0$ .

Com o mesmo procedimento utilizado no Capítulo 2, para obtenção da equação de onda para o campo elétrico, tomamos o rotacional de (4.5)

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{H}), \quad (4.8)$$

e utilizando as propriedades do rotacional juntamente com a aproximação  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ , escrevemos

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}_{NL}}{\partial t^2}. \quad (4.9)$$

Esta é a equação de onda para o campo elétrico propagando-se em um meio com polarização não linear. Vamos agora ver como um termo de segunda ordem da polarização pode fornecer o acoplamento entre os campos.

### 4.1.2 Equações de onda acopladas: CPD estimulada

Consideraremos, conforme a referência [64], o campo elétrico como um vetor, composto por uma somatória de componentes de frequência  $\omega_n$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_n \vec{\epsilon}_{\omega_n} e^{i(\vec{k}_n \cdot \vec{r} - \omega_n t)}, \quad (4.10)$$

onde  $\vec{\epsilon}_{\omega_n}$  são os envelopes lentamente variáveis. A soma é feita tanto das frequências positivas quanto negativas, e sendo o campo  $\vec{E}(\vec{r}, t)$  real, teremos  $\vec{\epsilon}_{-\omega_n} = \vec{\epsilon}_{\omega_n}^*$ .

A fim de simplicidade na compreensão do processo tomemos ( $z$ ) como sendo a única direção de propagação. Além disso, consideremos a propagação dos campos em forma de onda plana, cujas derivadas transversas são nulas. Estudaremos três



termos da somatória do campo elétrico, correspondentes às frequências  $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ , com polarizações lineares. Utilizemos os índices  $(i, j, k)$  para representar a orientação das polarizações que, neste caso, se referem a uma das coordenadas cartesianas  $(x, y)$ , já que a direção  $(z)$  é a de propagação. As três componentes do campo, serão então,

$$\begin{aligned} E_i^{(\omega_0)} &= \frac{1}{2} \left[ \varepsilon_i^{(\omega_0)} e^{(k_0 z - \omega_0 t)} + c.c. \right], \\ E_j^{(\omega_1)} &= \frac{1}{2} \left[ \varepsilon_j^{(\omega_1)} e^{(k_1 z - \omega_1 t)} + c.c. \right], \\ E_k^{(\omega_2)} &= \frac{1}{2} \left[ \varepsilon_k^{(\omega_2)} e^{(k_2 z - \omega_2 t)} + c.c. \right]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Tomemos agora a polarização não-linear  $\vec{P}_{NL}$ . Este é o coração do processo, será através deste termo que surgirá o acoplamento entre os campos. Nos limitaremos a analisar o termo de segunda ordem

$$[P^{(2)}]_i = \chi_{ijk}^2 E_j E_k \quad (4.12)$$

Aqui está subtendido uma soma sobre os índices repetidos. Vale ressaltar que o tensor de susceptibilidade depende das frequências. Existem também simetrias intrínsecas à ordem destas frequências e suas polarizações. Logo, a susceptibilidade dependerá da classe de simetria do meio e da orientação da polarização de cada frequência. Outro aspecto a ser levado em conta é o fato das frequências envolvidas serem bem menores que a mais baixa frequência de ressonância do meio. Neste caso a susceptibilidade praticamente não depende da frequência, e a resposta do sistema é praticamente instantânea. Estas são as chamadas simetrias de Kleinman.

No problema que estamos analisando, onde uma frequência será obtida da diferença de duas outras, o termo de polarização não-linear de segunda ordem para a polarização  $k$  de frequência  $\omega_2$  será

$$\left[ P_{NL}^{(\omega_2)} \right]_k = \chi_{ijk}^2 \varepsilon_i^{(\omega_0)}(z) \varepsilon_j^{(\omega_1)*}(z) e^{i[(\omega_0 - \omega_1)t - (k_0 - k_1)z]} + c.c. \quad (4.13)$$

Com a polarização não linear definida, podemos voltar à equação (4.9), escrita para cada componente do campo. Tomemos então a equação de onda para a componente  $k$  da polarização. O Laplaciano será escrito como

$$\nabla^2 E_k^{\omega_2} = \frac{\partial^2 E_k}{\partial z^2} = \left[ -\frac{k_2}{2} \varepsilon_k^{(\omega_2)} + ik_2 \frac{d\varepsilon_k^{(\omega_2)}}{dz} \right] e^{i(k_2 z - \omega_2 t)} + c.c. \quad (4.14)$$

onde aplicamos a aproximação do envelope lentamente variável :

$$\frac{d^2 \varepsilon_k}{dz^2} \ll ik_2 \frac{d\varepsilon_k}{dz}. \quad (4.15)$$

Considerando ainda que a condutividade depende da freqüência, a derivada temporal será dada por  $\frac{d}{dt} \rightarrow i\omega$ , de modo que podemos escrever (4.9) como

$$\frac{d\varepsilon_k^{\omega_2}}{dz} = -\sigma_2 \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_2}} \varepsilon_k^{(\omega_2)}(z) - i\frac{\omega_2}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_2}} \chi_{kij}^{(2)} \varepsilon_i^{(\omega_0)} \varepsilon_j^{(\omega_1)*} e^{i(k_0 - k_1 - k_2)z}, \quad (4.16)$$

onde fizemos  $\omega_2 = \omega_0 - \omega_1$  e  $k_2^2 = \mu_0 \epsilon_2 \omega_2^2$ .

O primeiro termo da direita, proporcional a  $\sigma_2$ , refere-se à absorção no meio, enquanto o segundo termo acopla os campos 0 e 1 ao campo 2, graças à polarização não linear. Se tal acoplamento é feito com a fase adequada, teremos uma amplificação do campo 2.

Podemos ainda, para simplificar (4.16), definir uma nova variável de modo que

$$\varepsilon_k^{(\omega_2)} = \sqrt{\frac{\omega_2}{n_2}} A_k^{(\omega_2)}, \quad (4.17)$$

onde  $n_2$  é o índice de refração para o campo 2. Ficamos então com

$$\frac{dA_k^{(\omega_2)}}{dz} = -\frac{\sigma_2}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_2}} A_k^{(\omega_2)}(z) - i\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0 \omega_0 \omega_1 \omega_2}{\epsilon_0 n_0 n_1 n_2}} \chi_{kij}^{(2)} A_i^{(\omega_0)} A_j^{(\omega_1)*} e^{i(k_0 - k_1 - k_2)z} \quad (4.18)$$

Analogamente, obtemos as equações para os demais campos

$$\frac{dA_j^{(\omega_1)}}{dz} = -\frac{\sigma_1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_1}} A_j^{(\omega_2)}(z) - i\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0 \omega_0 \omega_1 \omega_2}{\epsilon_0 n_0 n_1 n_2}} \chi_{jik}^{(2)} A_i^{(\omega_0)} A_k^{(\omega_2)*} e^{i(k_0 - k_1 - k_2)z}, \quad (4.19)$$

$$\frac{dA_i^{(\omega_0)}}{dz} = -\frac{\sigma_0}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_1}} A_j^{(\omega_2)}(z) - i\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0 \omega_0 \omega_1 \omega_2}{\epsilon_0 n_0 n_1 n_2}} \chi_{ijk}^{(2)} A_j^{(\omega_1)} A_k^{(\omega_2)} e^{-i(k_0 - k_1 - k_2)z}. \quad (4.20)$$

Considerando haver poucas perdas no meio, podemos desprezar o termo de absorção em cada equação. Admitindo a simetria de Kleinman, onde as susceptibilidades são as mesmas para todas as frequências, podemos escrever, de maneira simplificada

$$\frac{dA_0}{dz} = -i\kappa A_1 A_2 e^{-i\Delta k z}, \quad (4.21)$$

$$\frac{dA_1}{dz} = -i\kappa A_0 A_2^* e^{i\Delta k z}, \quad (4.22)$$

$$\frac{dA_2}{dz} = -i\kappa A_0 A_2^* e^{i\Delta k z}, \quad (4.23)$$

onde os índices 0, 1, 2 condensam as indicações de frequência e polarização,  $\Delta k = k_0 - k_1 - k_2$  é o desacordo de fase, e

$$\kappa = \sqrt{\frac{\mu_0 \omega_0 \omega_1 \omega_2}{\epsilon_0 n_0 n_1 n_2}} \chi^{(2)}.$$

Podemos assim obter soluções para os campos  $A_1$  e  $A_2$ , a partir do bombeamento  $A_0$ . Tomando por simplicidade  $\Delta k = 0$  e fazendo

$$A_0(0) = A_0 \equiv cte,$$

$$A_1(0) = A_1 \equiv cte,$$

$$A_2(0) = 0.$$

Temos como solução

$$A_1(z) = A_1 \cosh(A_0 \kappa z), \quad (4.24)$$

$$A_2(z) = i A_1 \sinh(A_0 \kappa z). \quad (4.25)$$

Percebemos que a amplificação dos campos  $A_1$  e  $A_2$  se dá devido ao bombeamento e ao acoplamento proveniente da polarização não linear.

Podemos obter, ainda, a partir de (4.21), (4.22) e (4.23) as relações de Manley-Rowe

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{|A_1|^2}{\omega_1} \right) = \frac{d}{dz} \left( \frac{|A_2|^2}{\omega_2} \right) = -\frac{d}{dz} \left( \frac{|A_0|^2}{\omega_0} \right). \quad (4.26)$$

Ou seja, a intensidade nos feixes  $A_1$  e  $A_2$  varia da mesma forma, e negativamente no feixe  $A_0$ , indicando que a intensidade "perdida" pelo bombeamento alimenta a amplificação de  $A_1$  e  $A_2$ . Em nível fotônico, um fóton de frequência  $\omega_0$  é destruído gerando dois outros de frequência  $\omega_1$  e  $\omega_2$  tal que  $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$ , nos permitindo dizer que a energia no processo é conservada.

Descrevemos com isso a CPD estimulada, onde um feixe auxiliar  $A_1$  associado ao bombeamento  $A_0$  dá origem a um terceiro feixe  $A_2$  como representa a figura 4.1. Contudo, se tomarmos como condição de contorno  $A_1(0) = 0$  nas equações (4.21), (4.22) e (4.23), inteiramente clássicas, somente teremos a solução  $A_1 = A_2 = 0$ , não havendo, portanto, amplificação.

Porém, não observamos isso experimentalmente. Se bombearmos um cristal não linear com um feixe  $A_0$ , iremos produzir pares de fótons. Teremos então a conversão paramétrica descendente espontânea. Neste caso uma análise clássica não pode explicar o fenômeno que somente foi compreendido com o desenvolvimento da teoria quântica para a CPD, que passaremos a discutir agora.

## 4.2 Conversão Paramétrica Descendente Espontânea: Fótons gêmeos

Apresentaremos nesta seção a CPD espontânea que consiste no bombeamento de um cristal não linear por um feixe laser de frequência  $\omega_b$ , onde um fóton dará origem, simultaneamente, a um par de fótons de frequências  $\omega_s$  e  $\omega_c$ , denominados *senal* e *complementar*, respectivamente. Este fótons são chamados de **fótons gêmeos**.

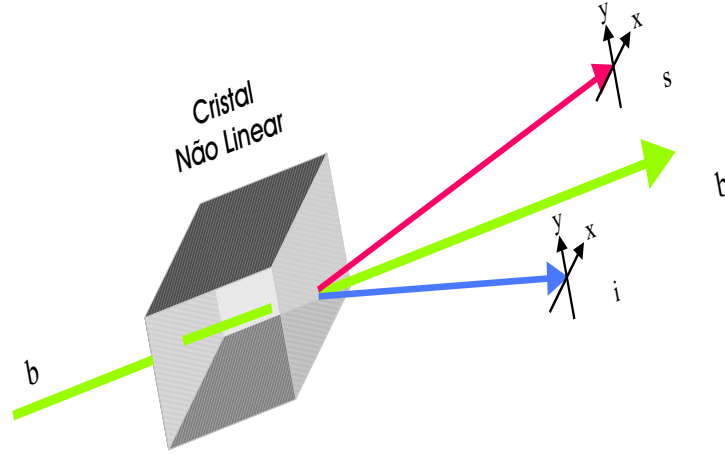


Figura 4.2: Esquema para CPD Espontânea

**meos.** Fizemos aqui uma troca dos índices  $(0, 1, 2)$  por  $(b, s, c)$  para indicar mais diretamente os campos de bombeamento, sinal e complementar.

Podemos, então, esquematizar o processo de CPD espontânea como mostra a figura 4.2.

### 4.2.1 Estado produzido pela interação paramétrica

Como vimos, este processo não pode ser explicado classicamente, tendo seu estudo quântico sido realizado teoricamente em 1969, por D.N. Klyshko [65], e experimentalmente por Burnham e Weinberg [66], em 1970. Descreveremos brevemente a teoria quântica da CPD.

Para que o processo ocorra temos que observar

$$\omega_b = \omega_s + \omega_c, \quad (4.27)$$

sugerindo a conservação da energia e,

$$\vec{k}_b = \vec{k}_s + \vec{k}_c, \quad (4.28)$$

a conservação do momento.

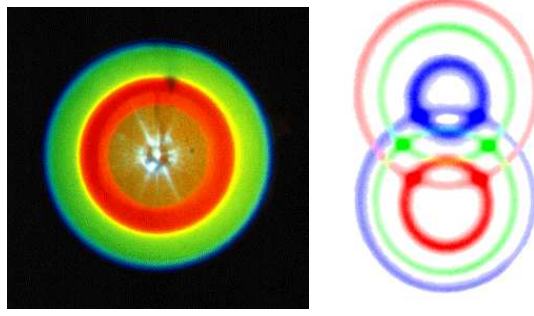


Figura 4.3: À esquerda cone de emissão da CPD do tipo I, e à direita, simulação da emissão do tipo II

A equação (4.28) é conhecida como a condição de *casamento de fase*, podendo ser de dois tipos: Do **Tipo I**, onde as polarizações de sinal e complementar são iguais e ortogonais à do bombeamento, sendo a polarização do bombeamento *extraordinária*, teremos sinal e complementar com polarizações *ordinária* e *ordinária*. No casamento de fase do **Tipo II**, sinal e complementar têm polarizações ortogonais entre si. Neste caso a polarização do bombeamento é *extraordinária*, a do sinal *ordinária* e a do complementar *extraordinária*.

A direção de propagação do sinal e do complementar na saída do cristal é dada por [67]

$$\omega_s \sin(\beta_s) = \omega_c \sin(\beta_c), \quad (4.29)$$

onde  $\beta_s$  é o ângulo de saída do *signal* em relação à direção de propagação do feixe de bombeamento, já  $\beta_c$  equivale ao mesmo para o *complementar*.

Como a condição (4.27) é satisfeita para uma gama de frequências, o que temos, para o casamento de fase do tipo I, é o surgimento de vários cones de luz centrados na direção de propagação do bombeamento. Para o casamento de fase do tipo II teremos dois cones, um para cada polarização. A figura 4.3 mostra a saída da CPD espontânea para os dois tipos de casamento de fase.

Para o tratamento quântico da CPD espontânea, tomaremos a hamiltoniana do

sistema, levando em conta a interação não linear entre os três campos envolvidos.

A polarização total no cristal, até a segunda ordem é dada por [68]

$$P_i(\vec{r}, t) = \int \chi_{ijk}^{(1)}(t') E_j(\vec{r}, t - t') dt' + \int \int \chi_{ijk}^{(2)}(t', t'') E_j(\vec{r}, t - t') E_k(\vec{r}, t - t'') dt' dt'', \quad (4.30)$$

onde o primeiro termo é a resposta linear, e o segundo a não linear, com suas respectivas susceptibilidades. Os índices  $i, j, k$  representam as polarizações.

A hamiltoniana de interação não linear será dada por

$$\begin{aligned} H_I &= \frac{1}{2} \int_{V_c} \vec{E} \cdot \vec{P}_{NL} d\vec{r} \\ &= \frac{1}{2} \int_{V_c} d\vec{r} E_i(\vec{r}, t) \int \int \chi_{ijk}^{(2)}(t', t'') E_j(\vec{r}, t - t') E_k(\vec{r}, t - t'') dt' dt'', \end{aligned} \quad (4.31)$$

onde  $V_c$  é o volume do cristal. Escrevemos, então, a hamiltoniana total como sendo a soma da hamiltoniana do campo livre com a hamiltoniana de interação,

$$H = H_0 + H_I. \quad (4.32)$$

Quantizando, obteremos o operador hamiltoniano

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_I. \quad (4.33)$$

O hamiltoniano de interação, proporcional à susceptibilidade de segunda ordem, em geral muito pequena, pode ser tratado como uma perturbação, nos permitindo encontrar soluções aproximadas para o estado gerado pela interação paramétrica.

Como vimos, o campo quantizado é dado por  $\hat{E} = \hat{E}^{(+)} + \hat{E}^{(-)}$ , onde

$$\hat{E}^{(+)} = [\hat{E}^{(-)}]^\dagger = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}, s} l(\omega) \epsilon_{\vec{k}, s} \hat{a}_{\vec{k}, s} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}. \quad (4.34)$$

Lembrando que  $V$  é o volume de quantização,  $\epsilon_{\vec{k}, s}$  é o vetor unitário de polarização,  $\hat{a}_{\vec{k}, s}$  o operador de aniquilação e

$$l(\omega) = i \left[ \frac{\hbar\omega(\vec{k}, s)}{2\epsilon_0 n^2(\vec{k}, s)} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (4.35)$$

A quantização no interior do cristal se deu semelhantemente à feita no vácuo, mas, para que isto seja feito, é preciso considerar que o cristal está imerso em um meio linear passivo de mesmo índice de refração para evitar-se, assim, problemas de refração na interface dielétrico-ar.

Substituindo as expressões para os campos em (4.32) e excluindo termos que não satisfazem a conservação de energia, ficamos, então, com o seguinte hamiltoniano de interação

$$\begin{aligned} \hat{H}_I = & \frac{1}{V^{\frac{3}{2}}} \sum_{\vec{k}_b, s_b} \sum_{\vec{k}_s, s_s} \sum_{\vec{k}_c, s_c} l(\omega_b) l^*(\omega_s) l^*(\omega_c) \hat{a}_{\vec{k}_s, s_s}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}_c, s_c}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}_b, s_b} e^{i(\omega_s + \omega_c - \omega_b)t} \times \\ & \times \left[ \bar{\chi}_{ijk}^{(2)}(\epsilon_{\vec{k}_b, s_b})_i (\epsilon_{\vec{k}_s, s_s})_j^* (\epsilon_{\vec{k}_c, s_c})_k^* \right] \int_V d\vec{r} e^{-i(\vec{k}_s + \vec{k}_c - \vec{k}_b) \cdot \vec{r}} + h.c., \end{aligned} \quad (4.36)$$

onde  $h.c.$  é o hermitiano conjugado, e

$$\bar{\chi}_{ijk}^{(2)} = \bar{\chi}_{ijk}^{(2)}(\omega_b = \omega_c + \omega_s) + \bar{\chi}_{ijk}^{(2)}(\omega_s = \omega_b - \omega_c) + \bar{\chi}_{ijk}^{(2)}(\omega_c = \omega_b - \omega_s), \quad (4.37)$$

com

$$\bar{\chi}_{ijk}^{(2)}(\omega = \omega' + \omega'') \equiv \int \int dt' dt'' \chi_{ijk}^{(2)}(t', t'') e^{i(\omega' t' + \omega'' t'')}. \quad (4.38)$$

Lembrando que os índices  $b, s, c$  correspondem aos campos de bombeamento, sinal e complementar, respectivamente.

Para obter o estado do sistema na **representação de interação** utilizamos o operador de evolução da interação que se inicia em  $t = t_0$ . Tal operador é dado por

$$\hat{U}(t, t_0) = \exp \left\{ \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t d\tau \hat{H}_I(\tau) \right\}. \quad (4.39)$$



Para uma teoria perturbativa de primeira ordem temos que o estado em  $t$  é

$$|\psi(t)\rangle = \left[1 + \widehat{U}_1(t, t_0)\right] |\psi(t_0)\rangle, \quad (4.40)$$

com

$$\widehat{U}_1(t, t_0) = \frac{1}{i\hbar} \int_{t_0}^t d\tau \widehat{H}_I(\tau). \quad (4.41)$$

Devemos, então, calcular  $\widehat{U}_1$  a partir de (4.36). Para escrevê-lo, porém, fazamos algumas considerações. Supondo que o campo de bombeamento encontra-se, inicialmente, em um estado coerente  $|\nu(\vec{k}_b)\rangle$ , e considerando-o intenso e praticamente não afetado pelo processo, podemos substituir o operador de aniquilação pela amplitude do estado coerente  $\nu(\vec{k}_b)$ , também chamado de *espectro angular* do bombeamento. Suporemos também a utilização de filtros de interferência nos detectores, de modo que os feixes podem ser considerados monocromáticos, e, portanto,  $\omega_b, \omega_s, \omega_c$  são constantes e com  $\omega_b = \omega_s + \omega_c$ . Esta aproximação levará a susceptibilidade a ser um termo constante. Faremos, ainda, a aproximação contínua

$$\frac{1}{V^{\frac{3}{2}}} \sum_{\vec{k}_b, s_b} \sum_{\vec{k}_s, s_s} \sum_{\vec{k}_c, s_c} \longrightarrow \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d\vec{k}_b \int d\vec{k}_s \int d\vec{k}_c,$$

onde os índices de polarização estão implícitos e fixados pelo casamento de fase.

Temos, então,

$$\begin{aligned} \widehat{U}_1 &= \frac{\overline{\chi}_{ijk}^{(2)}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int d\vec{k}_s \int d\vec{k}_c \Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_c) \\ &\times \frac{\text{sen}[(\omega_s + \omega_c - \omega_b)(t - t_0)/2]}{(\omega_s + \omega_c - \omega_b)/2} \widehat{a}_{\vec{k}_s}^\dagger \widehat{a}_{\vec{k}_c}^\dagger, \end{aligned} \quad (4.42)$$

onde

$$\Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_c) = \int d\vec{k}_b \nu(\vec{k}_b) l(\omega_b) l^*(\omega_s) l^*(\omega_c) \prod_{m=1}^3 \text{sinc} \left[ \left( \vec{k}_s + \vec{k}_c - \vec{k}_b \right)_m \frac{L_m}{2} \right] \quad (4.43)$$

sendo  $L_m$  as arestas do cristal, e  $\nu(\vec{k}_b)$  o espectro angular do bombeamento.

Supondo que os campos sinal e complementar estão, inicialmente, no estado de vácuo, o estado final do sistema, até a primeira ordem, será dado por

$$|\psi(t)\rangle \approx \left[ 1 + c \int d\vec{k}_s \int d\vec{k}_c \Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_c) \times \frac{\text{sen}[(\omega_s + \omega_c - \omega_b)(t - t_0)/2]}{(\omega_s + \omega_c - \omega_0)/2} \hat{a}_{\vec{k}_s}^\dagger \hat{a}_{\vec{k}_c}^\dagger \right] |vac\rangle, \quad (4.44)$$

onde  $c$  engloba todas as constantes envolvidas. Podemos ir mais além, escrevendo

$$|\psi(t)\rangle = \alpha |vac\rangle + \beta \int d\vec{k}_s \int d\vec{k}_c \Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_c) \times \frac{\text{sen}[(\omega_s + \omega_c - \omega_b)(t - t_0)/2]}{(\omega_s + \omega_c - \omega_0)/2} |1, \vec{k}_s\rangle |1, \vec{k}_c\rangle. \quad (4.45)$$

Os coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$  são tais que  $|\psi\rangle$  seja normalizado e  $|\alpha|^2 \gg |\beta|^2$ .

O coeficiente  $\beta$  nos dará a amplitude de probabilidade de se gerar os fótons gêmeos e depende, entre outras constantes, da dimensão do cristal e, sobretudo, da susceptibilidade de segunda ordem. Percebemos, ainda, que mesmo o estado inicial dos campos sinal e complementar sendo o estado de vácuo, temos a criação de pares de fótons, explicando assim, a CPD espontânea em termos das flutuações de ponto zero destes campos.

## 4.2.2 Transferência do espectro angular na CPD

O estudo de propriedades transversas dos campos na CPD vem sendo explorado em vários grupos de pesquisa. Em particular, grande contribuição neste campo foi dada por C.H. Monken, P.H. Souto Ribeiro e S. Pádua [69], em cujo trabalho desenvolveu-se uma teoria de muita elegância e praticidade, capaz de suportar inúmeros resultados experimentais realizados, sobretudo, na área de imagens quânticas [67, 70]. Em [69] foi mostrado, pela primeira vez, a transferência do espectro angular do feixe de bombeamento para às correlações espaciais dos fótons gêmeos.

Para verificar tal transferência, façamos algumas aproximações no estado produzido na CPD espontânea [69], dado por (4.45). Uma aproximação já comentada é a da monocromaticidade, uma vez que as frequências de interesse estão bem resolvidas com a utilização de filtros de interferência de largura de linha fina nos detetores. Com isso, teremos a condição (4.27) satisfeita, e toda a dependência temporal em (4.45) é simplificada, com o termo senoidal sendo apenas mais uma constante multiplicativa.

Podemos escrever o vetor de onda como um soma de componentes transversas  $\vec{q}$  e longitudinais  $k_z \hat{z}$

$$\vec{k} = \vec{q} + k_z \hat{z}. \quad (4.46)$$

Supondo, ainda, que  $|\vec{q}| \ll |\vec{k}|$ , e os índices de refração para os três campos podem ser considerados constantes. Associando esta aproximação com a de monocromaticidade e observando que  $k_{bz}$  é constante, podemos escrever

$$\begin{aligned} \int d\vec{k}_b &\longrightarrow \int d\vec{q}_b, \\ v(\vec{k}_b) &\equiv v(\vec{q}_b). \end{aligned} \quad (4.47)$$

Outra consideração a ser feita diz respeito às dimensões do cristal. Considerando as dimensões transversais ( $L_x, L_y$ ) bem maiores que o inverso do módulo dos vetores de onda transversais, e que  $L_z$  é muito menor do que o inverso do módulo dos vetores de onda longitudinais (*aproximação de cristal fino*), podemos escrever:

$$\text{sinc} \left[ \left( \vec{k}_s + \vec{k}_c - \vec{k}_b \right)_x \frac{L_x}{2} \right] = \text{sinc} \left[ \left( \vec{k}_s + \vec{k}_c - \vec{k}_b \right)_y \frac{L_y}{2} \right] \approx \delta(\vec{q}_s + \vec{q}_c - \vec{q}_b) \quad (4.48)$$

e

$$\text{sinc} \left[ \left( \vec{k}_s + \vec{k}_c - \vec{k}_b \right)_z \frac{L_z}{2} \right] \approx 1. \quad (4.49)$$

Deste modo,

$$\Phi(\vec{k}_s, \vec{k}_c) \simeq v(\vec{q}_s + \vec{q}_c). \quad (4.50)$$

Assim, o estado de dois fótons descritos por 4.45 fica [69]

$$|\psi\rangle = \alpha|vac\rangle + \beta' \int d\vec{q}_s \int d\vec{q}_c v(\vec{q}_s + \vec{q}_c) |1, \vec{q}_s\rangle |1, \vec{q}_c\rangle, \quad (4.51)$$

com o espectro angular do bombeamento sendo transferido ao estado de dois fótons. Mais do que isso, o estado de dois fótons é um estado emaranhado, já que em geral, o espectro angular transferido não pode ser decomposto em um produto do espectro angular do sinal e do complementar.

Para observarmos o efeito desta transferência devemos calcular a taxa de coincidência dos fótons gêmeos com detectores localizados nos pontos  $\vec{r}_s$  e  $\vec{r}_c$ , conforme ilustra a figura 4.4. Ela será proporcional à função de correlação de segunda ordem, em ordem normal, definida como

$$G^{(2)} = \langle \psi | \hat{E}^{(-)}(\vec{r}_s) \hat{E}^{(-)}(\vec{r}_c) \hat{E}^{(+)}(\vec{r}_c) \hat{E}^{(+)}(\vec{r}_s) | \psi \rangle. \quad (4.52)$$

Podemos, ainda, escrever o operador do campo como

$$\hat{E}^{(+)}(\vec{r}) = \int d\vec{q} \hat{a}(\vec{q}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{\rho} + \sqrt{k^2 - q^2}z}. \quad (4.53)$$

onde escrevemos os vetores  $\vec{r}$  e  $\vec{k}$  como uma soma de suas componentes transversais e longitudinais ( $\vec{r} = \vec{\rho} + z\hat{z}$ ) e ( $\vec{k} = \vec{q} + k_z\hat{z}$ ). Logo a taxa de coincidências se escreve como

$$C(\vec{r}_s, \vec{r}_c) \propto \left| \int d\vec{q}_c \int d\vec{q}_s v(\vec{q}_s + \vec{q}_c) \times \exp\left[i\left(\vec{q}_s \cdot \vec{\rho}_s - \frac{q_s^2}{ak_s} z_s\right)\right] \exp\left[i\left(\vec{q}_c \cdot \vec{\rho}_c - \frac{q_c^2}{ak_c} z_c\right)\right] \right|^2. \quad (4.54)$$

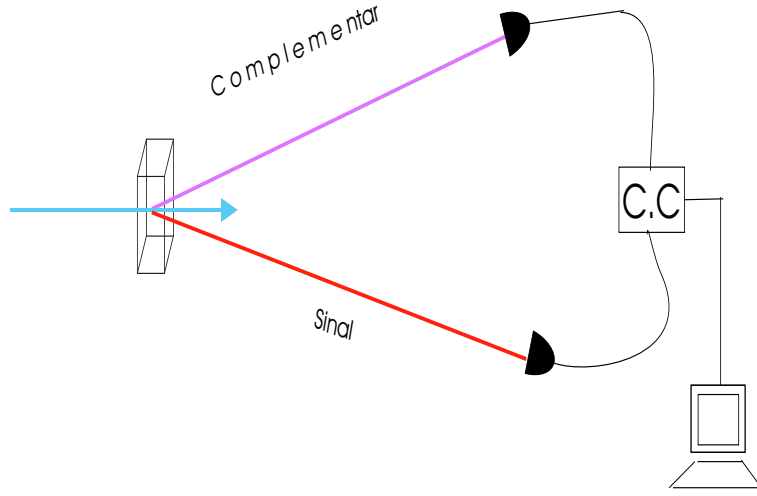


Figura 4.4: Os fótons dos feixes sinal e complementar são detectados em fotodiodos de avalanche e superpostos em uma janela de tempo de 5 ns, contando uma coincidência.

Escrevendo em termos da distribuição de amplitude do bombeamento  $W(\vec{\rho})$ , que por sua vez é a transformada de Fourier do espectro angular, teremos [69]

$$C(\vec{r}_s, \vec{r}_c) \propto \left| \int d\vec{\rho} W(\vec{\rho}) \exp \left[ -i \frac{k_b}{2Z_0} \frac{|\vec{R} - \vec{\rho}|^2}{|\vec{\rho}|^2} \right] \right|^2, \quad (4.55)$$

com

$$\frac{1}{Z_0} = \frac{k_s}{k_b} \frac{1}{z_s} + \frac{k_c}{k_b} \frac{1}{z_c}, \quad (4.56)$$

e

$$\vec{R} = \frac{Z_0 k_s}{z_s k_b} \vec{\rho}_s + \frac{Z_0 k_c}{z_c k_b} \vec{\rho}_c. \quad (4.57)$$

A integral que aparece em (4.55) descreve a propagação, na aproximação paraxial, do perfil do feixe de bombeamento, desde o cristal até o plano  $z = Z_0$ , nos permitindo escrever

$$C(\vec{r}_s, \vec{r}_c) \propto |W(\vec{R}, Z_0)|^2. \quad (4.58)$$

Desta maneira, vemos que a taxa de coincidências é proporcional ao perfil de intensidade do feixe de bombeamento em  $z = Z_0$ , devido ao efeito de transferência

do espectro angular. Logo, se um dado objeto que module a intensidade do feixe de bombeamento (Máscaras de amplitude, lentes, fendas, etc ), for colocado antes do cristal, esta modulação será transferida para a taxa de coincidências.

Vimos, então, que o espectro angular do bombeamento é transferido para o estado de dois fótons. Na próxima seção, vamos analisar este problema para a CPD estimulada e estudar a transferência de momento angular orbital neste processo.

### 4.3 Transferência de momento angular orbital na CPD estimulada

Na CPD espontânea, devido à simultaneidade da geração dos fótons gêmeos, estes possuem uma forte correlação temporal. Por sua vez a relação de fase entre eles não é bem definida, ou seja, individualmente, são incoerentes. No processo estimulado, o feixe auxiliar, que deverá ter um casamento de modo e frequência com o feixe sinal, dá origem à emissão estimulada, que aumentará a taxa de conversão do sinal e, por conseguinte, do complementar. Além disso, propriedades transversas e de coerência são transferidas [71, 72, 73] do auxiliar para o complementar. Em um trabalho feito em colaboração com o Grupo de Ótica Quântica do IF-UFRJ, mostramos a transferência de coerência e imagens, tanto do bombeamento quanto do auxiliar, para o feixe complementar. Neste trabalho também foi mostrada a conjugação de fase do feixe complementar [74]. Estaremos interessados aqui, nos efeitos transversos, mais exatamente, na conservação do momento angular orbital (MAO) na CPD Estimulada.

O estudo da interação de feixes portadores de MAO com meios não lineares já vem sendo feito há algum tempo como no processo de geração de segundo harmônico [75, 76], na interação com nuvens atômicas [36, 37]. A possibilidade de preparar

fótons emaranhados em diferentes graus de liberdade torna interessante esta interação de feixes portadores de MAO e meios não lineares. A produção de fótons emaranhados para este grau de liberdade já foi observada experimentalmente [35].

Na CPD a transferência de MAO foi estudada no caso espontâneo, onde em um primeiro experimento verificou-se que o MAO não se conserva se observarmos os fótons individualmente [77], como consequência da incoerência mútua do sinal e complementar. Porém, quando é analisado o estado de dois fótons gerados pelo processo o MAO é conservado [35, 78]. Recentemente foi mostrado que a transferência do espectro angular do bombeamento na CPD, implica na conservação do MAO [79]. Nesta seção vamos mostrar o estudo experimental da transferência de MAO na CPD Estimulada [39].

### 4.3.1 Transferência do espectro Angular na CPD Estimulada

A configuração típica da CPD estimulada é mostrada na figura 4.1. Uma descrição conveniente é utilizar para CPD estimulada o tratamento multimodo, baseado no tratamento feito para o caso espontâneo [72]. Com as mesmas considerações feitas para CPD espontânea, mas agora considerando um feixe auxiliar  $A_s$  em perfeito casamento de modo e frequência com o feixe sinal, o estado final para o processo é dado por [72]

$$|\psi\rangle = \alpha|vac\rangle + \beta \int d\vec{q}_s \int d\vec{q}_c v_b(\vec{q}_s + \vec{q}_c) |1, \vec{q}_c\rangle \hat{a}_s^\dagger |v_s(q_s)\rangle, \quad (4.59)$$

onde  $v_s(q_s)$  é o espectro angular do estado coerente multimodo associado ao feixe auxiliar com vetor de onda transversal  $q_s$ . A transformada de Fourier de  $v_s(q_s)$  fornece, então, a distribuição transversal de amplitude do feixe auxiliar.

Com o estado  $|\psi\rangle$ , definido em (4.59) podemos calcular a intensidade do feixe

complementar  $I(\vec{r}_c)$ , detectada na posição  $\vec{r}_c$ , definida como

$$I(\vec{r}_c) = \langle \psi | \hat{E}^{(-)}(\vec{r}_c) \hat{E}^{(+)}(\vec{r}_c) | \psi \rangle, \quad (4.60)$$

onde utilizamos o operador do campo definido em (4.53). Com procedimento análogo ao utilizado para o cálculo da taxa de coincidência na seção 4.2.2 obtemos [80]

$$I(\vec{r}_c) \propto \int d\vec{\rho} |W(\vec{\rho})|^2 + \left| \int d\vec{\rho} W(\vec{\rho}) W_s^*(\vec{\rho}) e^{i(|\vec{\rho}_c - \vec{\rho}|^2 \frac{k_c}{2z})} \right|^2. \quad (4.61)$$

O primeiro termo desta equação é a contribuição do processo espontâneo, que depende somente do perfil de intensidade do bombeamento no plano do cristal, sendo um termo constante em relação à coordenada transversa na posição de detecção. O segundo termo é a contribuição do processo estimulado, dependendo das distribuições de amplitude do bombeamento e do complexo conjugado da distribuição de amplitude do feixe auxiliar no plano do cristal. A exponencial complexa corresponde ao propagador de Fresnel até a posição de detecção  $\vec{r}_c$ , que é feita com o vetor de onda do feixe complementar, já que se calculou a intensidade para este feixe. Logo, além de aumentar a taxa de geração do feixe complementar, as propriedades transversas deste são também afetadas no processo, já que o espectro angular do complementar é, na verdade, dado pela convolução entre os espectros angulares do bombeamento e do auxiliar.

Para explicitar a transferência do espectro angular do bombeamento e do auxiliar para o feixe complementar, devemos considerar constantes as distribuições de amplitude ora do bombeamento, ora do auxiliar [80]. Muito embora os feixes reais envolvidos tenham uma distribuição gaussiana, se este for suficientemente expandido, podemos considerar sua região central constante.

Tomando a amplitude do auxiliar constante ficamos com

$$I(\vec{r}_c) \propto \left| \int d\vec{\rho} W(\vec{\rho}) e^{i(|\vec{\rho}_c - \vec{\rho}|^2 \frac{k_c}{2z})} \right|^2, \quad (4.62)$$



onde desprezamos a contribuição do processo espontâneo, já que esta contribuição é muito menor comparada à contribuição estimulada. Vemos, então, que neste caso a distribuição de intensidade do feixe complementar é dada pela propagação até o plano de detecção, situado a uma distância  $z$  do cristal, da distribuição de intensidade do bombeamento. Dizemos, assim, que o espectro angular do bombeamento é transferido para o complementar.

Se a amplitude do bombeamento for constante, temos

$$I(\vec{r}_c) \propto \left| \int d\vec{\rho} W_s^*(\vec{\rho}) e^{i(|\vec{\rho}_c - \vec{\rho}|^2 \frac{k_c}{2z})} \right|^2, \quad (4.63)$$

e podemos interpretar como a transferência do espectro angular do feixe auxiliar para o complementar. Note que, neste caso, o que temos é a propagação do complexo conjugado da distribuição de amplitude do auxiliar. Isto implica a conjugação de fase presente no processo, conforme demonstrado em [74].

Podemos, desta forma, preparar o feixe de bombeamento ou auxiliar no modo de Laguerre-Gauss, portadores de MAO como visto no capítulo 3. Assim as equações (4.62) e (4.63) são escritas, respectivamente, como

$$I(\vec{r}_c) \propto \left| \int d\vec{\rho} [LG_p^l(\vec{\rho})]_b e^{i(|\vec{\rho}_c - \vec{\rho}|^2 \frac{k_c}{2z})} \right|^2, \quad (4.64)$$

$$I(\vec{r}_c) \propto \left| \int d\vec{\rho} [LG_p^l(\vec{\rho})]_s^* e^{i(|\vec{\rho}_c - \vec{\rho}|^2 \frac{k_c}{2z})} \right|^2. \quad (4.65)$$

Em (4.64) consideramos o bombeamento no modo  $LG_p^l(\vec{\rho})$  e o auxiliar com amplitude constante. Já em (4.65), preparamos o auxiliar no modo de Laguerre <sup>1</sup> e fizemos o bombeamento constante.

Passemos agora ao estudo experimental da transferência de MAO na CPD estimulada.

---

<sup>1</sup>Note que a propagação é do complexo conjugado do modo de Laguerre.

### 4.3.2 Experimento com MAO

O estudo apresentado nesta seção foi realizado em uma colaboração entre os Grupos de Ótica Quântica do IF- UFRJ e IF-UFF. Os resultados foram obtidos no Laboratório de Ótica Quântica do IF-UFRJ, sob coordenação do Prof. Dr. Paulo Henrique Souto Ribeiro.

Para estudar experimentalmente a transferência do MAO utilizamos um cristal de  $\beta$ - Borato de Bário (BBO) de 3 *mm* de espessura, cortado para casamento de fase tipo II. Para o bombeamento foi utilizado um laser de He-Cd, de 200 *mW* de potência, em operação contínua com comprimento de onda de 442 *nm*. O Comprimento de onda dos feixes sinal e complementar, numa operação não-degenerada, é de 845 *nm* e 925 *nm*, respectivamente.

Inicialmente foi obtida a CPD Espontânea, com maximização, das contagens de coincidências, conforme ilustrou a figura 4.4. Os detetores utilizados foram fotodiodos de avalanche, descritos, mais detalhadamente, na referência [81]. Cada detetor faz parte de um sistema de contagem de fótons, cuja a saída é um pulso eletrônico formatado no padrão TTL. Este sinal é enviado para um módulo de contagem de pulsos, controlado por um computador, que registra as taxas de contagens individuais (Módulo de pulsos provenientes de cada detetor.) e da taxa de coincidências (Dada pela contagem de pulsos oriundos dos dois detetores que se superpõem num intervalo de 5*ns*). A estes detetores são acrescentados fendas, filtros de interferência de largura de banda estreita, da ordem de 10 *nm*, e uma lente coletora de luz, já que o foto-diodo tem cerca de 200  $\mu\text{m}^2$  de área.

Após obter o alinhamento, otimizando a contagem de coincidências, o caminho percorrido pelo feixe sinal foi marcado com o auxílio de 2 orifícios. Tal estratégia permitiu uma boa superposição do feixe auxiliar com o sinal.

Como feixe auxiliar foi utilizado um laser de diodo, CW, operando em torno de

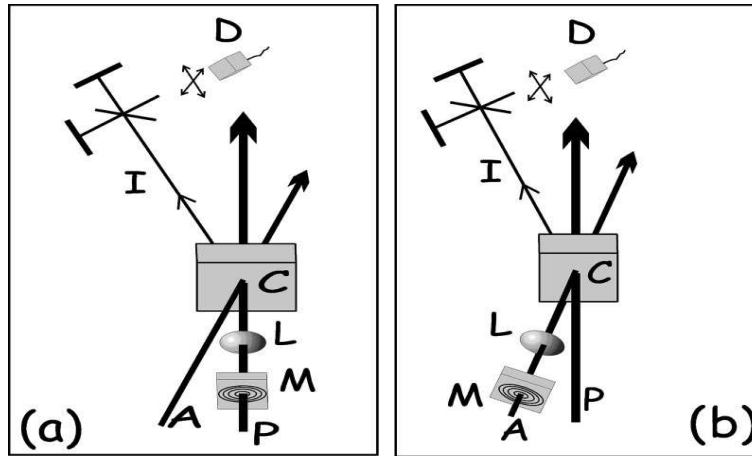


Figura 4.5: Em a), o modo de Laguerre é produzido no feixe de bombeamento e em b) no feixe complementar. Para os dois esquemas se observa tanto o perfil de intensidade do feixe complementar, quanto seu padrão de interferência.

845 nm com potência de 150 mW e polarização vertical, a mesma do feixe sinal. O alinhamento é feito, então, passando o feixe auxiliar pelo cristal e orifícios, fazendo-nos observar um grande aumento nas contagens do feixe complementar. Assim, a CPD Estimulada é obtida.

Para estudar a transferência do MAO na CPD Estimulada, precisamos realizar experimentalmente, o sugerido pelas equações 4.64 e 4.65. Para tanto precisamos preparar ora o bombeamento, ora o auxiliar em um modo de Laguerre de ordem mais alta e observar o feixe complementar.

Utilizamos então o método holográfico descrito no capítulo 3. Optamos por preparar os feixes no modo  $LG_0^{l=+1}$ , obtendo assim, vórtices óticos com carga topológica  $l = +1$ . Tais feixes têm um perfil transversal conhecido (anel) e podemos distinguir o sinal da carga topológica via interferometria.

O esquema geral do experimento é mostrado na figura 4.5. Em 4.5 a) temos a preparação do modo de  $LG$  no bombeamento, e em 4.5 b) o modo de  $LG$  é preparado no feixe auxiliar. O feixe complementar é enviado para um interferômetro

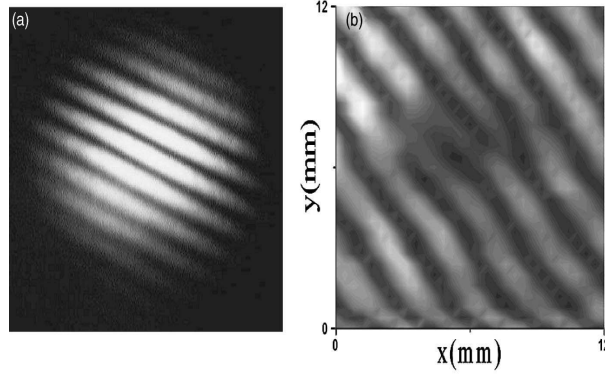


Figura 4.6: a) *Interferência do feixe de bombeamento no modo transversal fundamental; e b) Interferência do bombeamento no modo de  $LG_0^1$ .*

de Michelson. Obstruindo um dos braços medimos o perfil transversal do feixe. Estas medidas foram realizadas com os foto-diodos contendo uma fenda quadrada de  $200 \times 200 \mu m^2$ , de modo que a imagem do feixe complementar foi feita varrendo-se o plano de detecção e obtendo-se, uma matriz de fotocontagens, que é convertida em um mapa de intensidade em tons de cinza.

Preparando o feixe de bombeamento no modo  $LG_0^{l=+1}$ , obtemos via interferômetro de Michelson, a assinatura do MAO, mostrada na figura 4.6 b), sendo resultado de uma matriz  $30 \times 30$  das contagens simples, convertida no mapa de intensidade. O interferômetro é ligeiramente desalinhado a fim de observarmos as franjas com os respectivos defeitos topológicos. Observamos claramente, duas bifurcações típicas deste tipo de interferometria. Constatamos que a bifurcação do lado direito está voltada para cima e a do lado esquerdo voltada para baixo. Esta será a assinatura do modo  $LG_0^{l=+1}$ . Em 4.6 a) obtivemos o padrão de interferência do bombeamento quando preparamos o modo  $LG$  no feixe auxiliar, deixando o bombeamento no modo fundamental. Logo, não observamos nenhum defeito topológico, como o esperado. Esta figura foi obtida com uma câmera CCD.

Assim, observando o perfil de intensidade do feixe complementar, obtivemos para

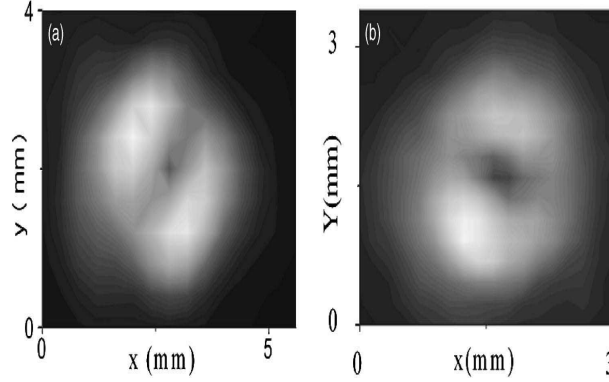


Figura 4.7: Perfil de intensidade do feixe complementar quando, a) o bombeamento é preparada no modo de Laguerre, e b) o feixe auxiliar é preparado no modo de Laguerre.

o caso de bombeamento no modo de  $LG$  o perfil mostrado na figura 4.7 a) e para caso em que o feixe auxiliar porta MAO o perfil da figura 4.7 b). Como podemos ver, o feixe complementar se propaga com o perfil de intensidade semelhante ao de um modo de Laguerre nos dois casos. Porém, é preciso que observemos os sinais da carga topológica, carregada por estes modos. Para tanto, utilizamos o interferômetro, e observamos as franjas de interferência <sup>1</sup> do feixe complementar.

Com o feixe de bombeamento portando MAO, preparado com carga topológica  $l_b = +1$ , conforme esquema 4.5 a), obtemos o padrão de interferência mostrado na figura 4.8 a), onde é tomada uma matriz  $20 \times 20$  convertida no mapa de intensidade. Como podemos verificar, com a ajuda dos apontadores da figura, observamos que a carga topológica carregada pelo complementar tem módulo 1, e a mesma disposição das bifurcações obtidas na interferência do bombeamento (bifurcação esquerda para baixo e direita para cima). Logo, vemos que o MAO foi transferido do bombeamento para o complementar e, mais ainda, têm a mesma vorticidade. De fato, como

<sup>1</sup>Vale salientar que este padrão só é possível obter graças à transferência de coerência para o feixe complementar na CPD Estimulada [80].

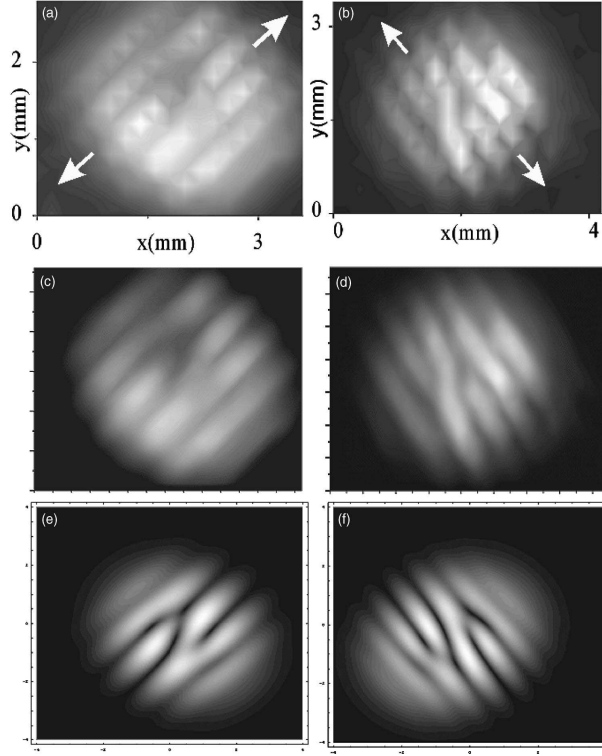


Figura 4.8: *Interferência do feixe complementar para, a) bombeamento operando no modo de LG, b) Auxiliar operando no modo de LG. Em c) e d) reproduzimos, respectivamente a) e b) com tratamento de imagem para melhor visualização. e) e f) são simulações teóricas par os casos a) e b).*

conseqüência da conservação da carga topológica temos

$$l_b = l_s + l_c \quad (4.66)$$

A carga do feixe sinal, será a mesma do auxiliar devido à CPD Estimulada. Assim preparando o bombeamento com  $l_b = +1$  e  $l_s = 0$  devemos obter  $l_c = +1$ , conforme observado.

Preparando, agora, o feixe auxiliar no modo de  $LG$ , utilizando o mesmo holograma, logo,  $l_s = +1$  e  $l_b = 0$ , devemos ter o feixe complementar com  $l_c = -1$ , pela observância da conservação do MAO dada por 4.66.

O resultado da medida interferométrica para este caso é mostrado na figura 4.8 b). Como podemos observar, novamente o módulo da carga topológica do feixe complementar é unitário, porém, a vorticidade é oposta ao caso em que a transferência se dá do bombeamento. Observamos de 4.8 b) que a bifurcação da esquerda, agora, aponta para cima, e a da direita, para baixo. Nenhuma rotação desta imagem pode levar à figura 4.8 a). Apenas uma imagem tipo reflexão pode levar uma à outra, indicando uma mudança no sinal da carga topológica. Assim concluímos que  $l_c = -1$ , como esperávamos, confirmando a conservação do MAO.

As figuras 4.8 a) e 4.8 b) são os resultados brutos, de modo que utilizando um software de tratamento de imagens, podemos melhorar o contraste e facilitar a observação da bifurcações, como apresentado na figura 4.8 c) e 4.8 d). Uma simulação da auto-interferência dos modos  $LG_0^{l_c=+1}$  e  $LG_0^{l_c=-1}$  é mostrada na figura 4.8 e) e 4.8 f), com parâmetros ajustados para melhor compararmos aos resultados experimentais.

Podemos ainda interpretar o fato de termos  $l_c = -l_s$ , como consequência da conjugação de fase na CPD Estimulada [74]. Note que temos em 4.65 o complexo conjugado do modo de  $LG$ .

Os resultados mostram, então, de maneira conclusiva, a conservação do MAO na CPD Estimulada, embora o padrão de interferência não tenha uma grande visibilidade. A baixa visibilidade pode ser proveniente de ruídos de fundo da iluminação da sala, ou ainda contagens escuras dos detetores. Outro fato importante a ser mencionado é o tempo das medidas. Devido à baixa intensidade do feixe complementar as medidas das matrizes de intensidade têm um tempo de aquisição em torno de 1h, o que pode acarretar em desvios na diferença de fase do interferômetro.

## 4.4 Imagens quânticas e franjas de moiré não-locais na CPD Espontânea

O estudo de correlações quânticas espaciais em feixes luminosos tem atraído grande interesse nos últimos anos. Muitos trabalhos tratando este assunto vêm sendo agrupados em uma nova área, intitulada, Imagens Quânticas. Entre os sistemas capazes de produzir, experimentalmente, feixes correlacionados temporal e espacialmente estão os Amplificadores Paramétricos e os Osciladores Paramétricos Óticos.

O estudo de correlações espaciais em Osciladores Paramétricos Óticos, tem sido realizado, por exemplo, através da amplificação de imagens em cavidades degeneradas transversalmente [82]. Recentemente, foram medidos nano-deslocamentos utilizando-se feixes de luz multimodos comprimidos espacialmente [83].

No regime de contagens de fótons na CPD, muitos trabalhos [69, 84, 85, 86, 89] exploraram conseqüências do emaranhamento do momento transversal dos fótons gêmeos para obterem imagens condicionais, chamadas "Imagens Fantasmas". Combinando o emaranhamento transversal com o emaranhamento em polarização foi realizado um estudo do controle de imagens quânticas através da polarização [87].

Nesta seção estaremos interessados na formação de imagens no contexto da CPD Espontânea, explorando a imagem do bombeamento transferida para o perfil de coincidências via espectro angular e imagens condicionais.

### 4.4.1 Formação de Imagens

Em 1995, T.B. Pittman, Y.H. Shih, D.V.Strekalov e A.V.Sergienko desenvolveram um trabalho experimental de imagem com dois fótons [67], utilizando um cristal BBO, cortado para casamento de fase tipo II, bombeado por laser de Argônio



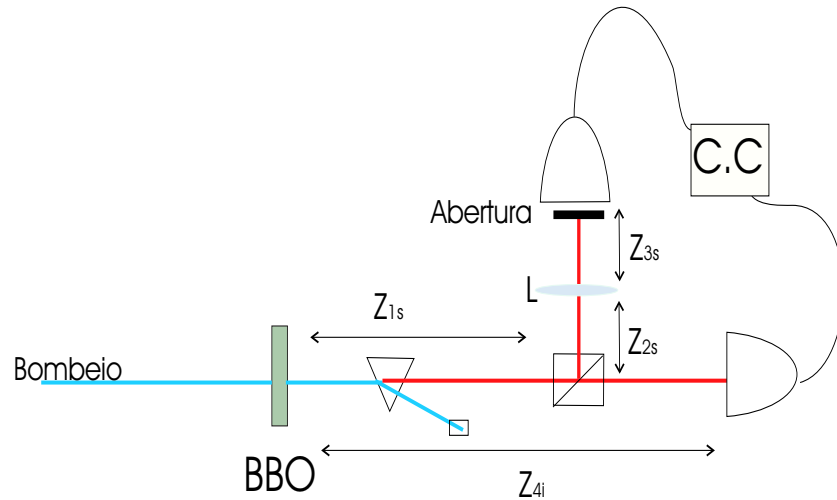


Figura 4.9: *Esquema experimental do trabalho de Pittman e colaboradores [67]. Sinal e complementar são separados por um cubo polarizador.*

(351,1nm). Neste experimento trabalhou-se com o caso degenerado, separando-se sinal e complementar via um cubo polarizador. Foi colocado imediatamente antes do detector do feixe sinal uma abertura contendo uma imagem que era, então, iluminada pelo feixe sinal, através de uma lente, conforme ilustra a figura 4.9.

Varrendo o plano  $(x, y)$  transversal ao feixe complementar obtiveram, no perfil de coincidências, a imagem da abertura, que ganhou um fator de ampliação 2. Esta ampliação não poderia ser explicada pela expansão sofrida pelos feixes sinal e complementar durante a propagação desde o cristal.

Foi constatado, porém, que as distâncias entre a abertura e a lente,  $z_{3s}$  e a da lente até o detector do feixe complementar passando pelo cristal ( $z_{1s} + z_{2s} + z_{4i}$ ) obedeciam a equação para lente de distância focal  $f$  da ótica geométrica, explicando a ampliação da imagem. Isto se dá como se o cristal não-linear operasse como um "espelho", refletindo a luz que viria da abertura que é iluminada por uma "fonte" de luz representada pelo detector do feixe sinal. Esta é a interpretação das **ondas avançadas** [88] de Klyshko, de muita utilidade e empregada em nosso experimento, descrito

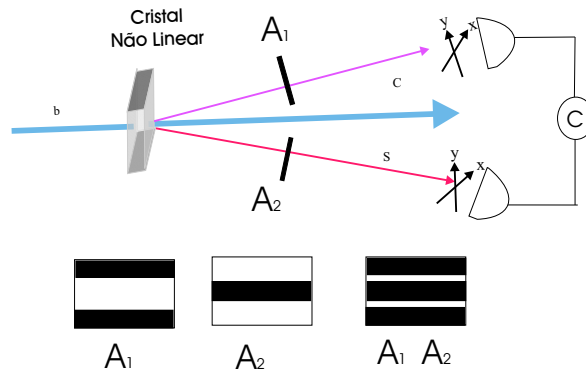


Figura 4.10: *Esquema do experimento de fenda dupla não local [89]*

mais adiante. Desta maneira podemos pensar em arranjos com sistemas de imagens envolvendo esta interpretação, mesmo para um caso não degenerado, onde transferimos imagens para o perfil de coincidências, graças à correlação espacial dos fótons gêmeos.

Um outro trabalho, de grande importância neste tema, foi a observação do padrão de interferência por uma fenda dupla não-local realizado por E.J.S. Fonseca, P.H.Souto Ribeiro, S Pádua e C.H. Monken [89]. Neste trabalho, com uma operação não-degenerada, os autores colocaram no caminho do sinal e do complementar, conforme indica a figura 4.10, aberturas que superpostas formam uma abertura com dupla fenda, típica dos experimentos de difração.

As contagens individuais revelaram características de cada abertura, separadamente, embora não se tenha formado imagens no plano de detecção. Porém, o perfil da taxa de coincidências ao varrer-se o detetor do feixe sinal, resultou em um padrão de interferência, apontando explicitamente para características não-locais na formação das imagens. Neste trabalho, não foram formadas imagens no plano de detecção, mas observou-se a propagação do perfil de coincidências. Além disto, foi dado neste trabalho, uma explicação teórica para o efeito, gerando uma abordagem que permite o estudo de varios outros sistemas. Seguindo esta abordagem, iremos atacar,

na próxima seção, os cálculos para o perfil de coincidências de um sistemas com duas grades remotamente posicionadas, que superpostas, geram franjas de moiré.

Por fim, podemos observar imagens no perfil de coincidências, proveniente do feixe de bombeamento, devido à transferência do espectro angular . Neste caso precisamos projetar a imagem do bombeamento no plano de detecção [81]. Para tanto, ou é utilizado uma única lente no feixe de bombeamento, colocada antes do cristal de tal modo que a imagem seria projetada no plano de detecção, ou uma lente em cada feixe convertido, explorando a interpretação em termos de ondas avançadas. A imagem é, então, formada no plano de detecção, vista somente no perfil de coincidências.

#### 4.4.2 Moiré não local: Teoria

Como vimos na seção 3.4 do capítulo 3, o efeito *moiré* é observado quando estruturas repetitivas são superpostas. Baseado no trabalho de fenda dupla não local [89], onde uma fenda dupla é obtida da superposição de dois anteparos, podemos vislumbrar que se os dois anteparos apresentam padrões repetitivos, como uma grade cossenoidal, por exemplo, observaremos nas coincidências a superposição destes anteparos, logo, o efeito *moiré*, aparecendo como uma espécie de batimento entre as frequências de cada grade.

Vamos agora mostrar uma investigação teórica [90] realizada para duas configurações fundamentalmente diferentes. Uma, baseada na transferência do espectro angular do bombeamento para os fótons gêmeos. A outra diretamente baseada nas correlações não locais entre sinal e complementar.

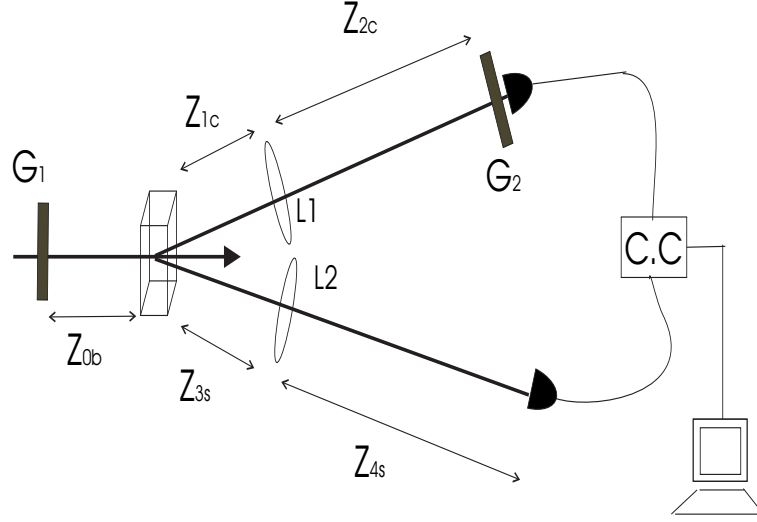


Figura 4.11: *Esquema bombeamento-complementar. A imagem transferida do bombeamento para coincidências irá se superpor àquela formada pela grade imediatamente antes do detetor do feixe complementar, resultando as franjas de moiré.*

### Configuração bombeamento-complementar

Calcularemos agora o perfil de coincidências para a configuração baseada na transferência do espectro angular do bombeamento (**bombeamento-complementar**). Para tanto, consideraremos o esquema apresentado na figura 4.11, onde uma grade  $G_1$  é colocada no feixe de bombeamento a uma distância  $z_0$  do cristal, e uma outra grade  $G_2$  é posicionada imediatamente antes do detetor do feixe complementar. Duas lentes são postas no sinal e no complementar de modo a formarmos um sistema de imagens, conforme referência [91].

Obtivemos na seção 4.2.2 a taxa de coincidências dos fótons gêmeos, que em função das coordenadas transversas, é dada por

$$G^{(2)}(\vec{\rho}_s, \vec{\rho}_i) = \langle \psi | \hat{E}^{(-)}(\vec{\rho}_s) \hat{E}^{(-)}(\vec{\rho}_c) \hat{E}^{(+)}(\vec{\rho}_c) \hat{E}^{(+)}(\vec{\rho}_s) | \psi \rangle, \quad (4.67)$$

$$= |\langle vac | \hat{E}^{(+)}(\vec{\rho}_c) \hat{E}^{(+)}(\vec{\rho}_s) | \psi \rangle|^2, \quad (4.68)$$

onde  $|\psi\rangle$  é o estado gerado na CPD, obtido na seção 4.2.1, que para o caso da

configuração estudada será

$$|\psi\rangle = \alpha|vac\rangle + \beta \int d\vec{q}_s \int d\vec{q}_c v_b^{z_0}(\vec{q}_s + \vec{q}_c) |1, \vec{q}_c\rangle \hat{a}_s^\dagger |1, \vec{q}_s\rangle. \quad (4.69)$$

O espectro angular do bombeamento no cristal  $v_b^{z_0}(\vec{q}_s + \vec{q}_c)$  é proporcional ao espectro angular imediatamente após a máscara, propagado da distância  $z_0$  até o cristal, logo,

$$v_b^{z_0}(\vec{q}_s + \vec{q}_c) \propto v_b^0(\vec{q}_s + \vec{q}_c) \exp\left[-i\frac{q_b^2 z_0}{2k_b}\right]. \quad (4.70)$$

Levando-se em conta a propagação do feixe complementar do cristal ao detector, de acordo com a configuração sugerida na figura 4.11, o operador do campo para o feixe complementar no plano de detecção será

$$\hat{E}^{(+)}(\vec{\rho}_c, z_{1c} + z_{2c}^+) = G_2(\vec{\rho}_c) \hat{E}^{(+)}(\vec{\rho}_c, z_{1c} + z_{2c}^-). \quad (4.71)$$

Os sinais  $-$  e  $+$  sobre a coordenada de propagação  $z$ , representam a posição longitudinal imediatamente antes e depois da grade, respectivamente.  $G_2(\vec{\rho}_c)$  é a função de transmissão da grade colocada no feixe complementar. Obtemos o operador do campo para sinal e complementar realizando cálculos semelhantes aos realizados na referência [89], levando-se em conta a propagação de cada feixe, do cristal até o detector. Teremos, desta forma, para o campo complementar, no plano de detecção <sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \hat{E}_c^{(+)}(\vec{\rho}_c) &= G_2(\vec{\rho}_c) \int d\vec{\rho}_c' \int d\vec{\rho}_c'' \int d\vec{q}_c' \hat{a}_c(\vec{q}_c') \exp\left[i(\vec{q}_c' \cdot \vec{\rho}_c)\right] \\ &\times \exp\left[i\left(|\vec{\rho}_c'' - \vec{\rho}_c'\|^2 \frac{k_c}{2z_{1c}}\right)\right] \tau_1(\vec{\rho}_c'') \\ &\times \exp\left[i\left(|\vec{\rho}_c - \vec{\rho}_c''|^2 \frac{k_c}{2z_{2c}}\right)\right], \end{aligned} \quad (4.72)$$

---

<sup>1</sup>Omitiremos a dependência da coordenada longitudinal para não sobrecarregar a notação.

onde  $k_c$  é o vetor de onda do feixe complementar,  $\tau_1(\vec{\rho}_c'')$  é a função de transmissão da lente  $L_1$  de distância focal  $f$ , dada por

$$\tau_1(\vec{\rho}_c'') = \exp\left[-i\frac{\rho_c''^2 k_c}{2f}\right]. \quad (4.73)$$

Da mesma forma podemos obter o operador para o feixe sinal, ficando com

$$\begin{aligned} \widehat{E}_s^{(+)}(\vec{\rho}_s) &= \int d\rho_s'' \int d\vec{\rho}_s' \int dq_s' \widehat{a}_s(\vec{q}_s') \exp\left[i(\vec{q}_s' \cdot \vec{\rho}_s')\right] \\ &\times \exp\left[i\left(|\rho_s'' - \rho_s'|^2 \frac{k_s}{2z_{3s}}\right)\right] \tau_2(\rho_s'') \\ &\times \exp\left[i\left(|\vec{\rho}_s - \vec{\rho}_s''|^2 \frac{k_s}{2z_{4s}}\right)\right]. \end{aligned} \quad (4.74)$$

Usando agora os operadores do campo dados por (4.72) e (4.74), e o estado  $|\psi\rangle$ , podemos calcular

$$\begin{aligned} &\langle vac | \widehat{E}_s^{(+)}(\vec{\rho}_s) \widehat{E}_c^{(+)}(\vec{\rho}_c) | \psi \rangle = \\ G_2(\vec{\rho}_c) &\int d\rho_s'' \int d\vec{\rho}_s' \int d\rho_c'' \int d\vec{\rho}_c' \int dq_s' \int dq_c' v_b^{z_0}(\vec{q}_s + \vec{q}_c) \\ &\times \exp\left[i\left(|\rho_s'' - \rho_s'|^2 \frac{k_s}{2z_{3s}}\right)\right] \exp\left[-i\frac{\rho_s''^2 k_s}{2f}\right] \\ &\times \exp\left[i\left(|\vec{\rho}_s - \vec{\rho}_s''|^2 \frac{k_s}{2z_{4s}}\right)\right] \exp\left[i(\vec{q}_s' \cdot \vec{\rho}_s')\right] \\ &\times \exp\left[i\left(|\rho_c'' - \rho_c'|^2 \frac{k_c}{2z_{1c}}\right)\right] \exp\left[-i\frac{\rho_c''^2 k_c}{2f}\right] \\ &\times \exp\left[i\left(|\vec{\rho}_c - \vec{\rho}_c''|^2 \frac{k_c}{2z_{2c}}\right)\right] \exp\left[i(\vec{q}_c' \cdot \vec{\rho}_c')\right]. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Integrando nas variáveis  $\rho_c''$ ,  $\rho_c'$ ,  $\rho_s''$  e  $\rho_s'$  encontramos a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
 \langle vac | \widehat{E}_s^{(+)}(\vec{\rho}_s) \widehat{E}_c^{(+)}(\vec{\rho}_c) | \psi \rangle \propto \\
 G_2(\vec{\rho}_c) \int d\vec{q}_s \int d\vec{q}_c v_b^{z_0}(\vec{q}_s + \vec{q}_c) \\
 \times \exp \left[ iq_s^2 \left( \frac{1}{4\alpha_s} - \frac{z_{3s}}{2k_s} \right) \right] \exp \left[ iq_c^2 \left( \frac{1}{4\alpha_c} - \frac{z_{1c}}{2k_c} \right) \right] \\
 \times \exp \left[ -i \frac{k_s}{2z_{4s}} \vec{q}_s \cdot \vec{\rho}_s \right] \exp \left[ -i \frac{k_c}{2z_{2c}} \vec{q}_c \cdot \vec{\rho}_c \right], \quad (4.76)
 \end{aligned}$$

onde  $\alpha_j, j = s, c$  é dado por

$$\alpha_j = \frac{k_j}{2f} - \frac{k_j}{2z_{2j}}. \quad (4.77)$$

Em (4.76) omitimos termos dependentes unicamente das variáveis  $\vec{\rho}_s$  e  $\vec{\rho}_c$ , pois como não contribuem na integral em  $\vec{q}$ , originam somente uma fase global para o cálculo do módulo quadrado.

Para simplificação dos cálculos, consideremos, sem perda de generalidade, que as distâncias do cristal até as lentes, e das lentes até os detetores são as mesmas para ambos os modos ( $z_{ms} = z_{mc}, m = 1, 2$ ). consideremos ainda o caso degenerado, onde sinal e complementar têm a mesma frequência, acarretando

$$\begin{aligned}
 k_s = k_c = k \\
 \alpha_s = \alpha_c = \alpha. \quad (4.78)
 \end{aligned}$$

Usando ainda a lei das lentes delgadas  $\frac{1}{f} = \frac{1}{O} + \frac{1}{I}$ , onde a distância da lente ao objeto é  $O = z_0 + z_1$  e a distância da lente à imagem é  $I = z_2$ , podemos reescrever (4.76) como

$$\begin{aligned}
 \langle vac | \widehat{E}_s^{(+)}(\vec{\rho}_s) \widehat{E}_c^{(+)}(\vec{\rho}_c) | \psi \rangle \propto G_2(\vec{\rho}_c) \int d\vec{q}_s \int d\vec{q}_c v_b^{z_0}(\vec{q}_s + \vec{q}_c) \\
 \times \exp [iB(q_s^2 + q_c^2)] \exp \left[ -i \frac{O}{I} (\vec{q}_s \cdot \vec{\rho}_s + \vec{q}_c \cdot \vec{\rho}_c) \right], \quad (4.79)
 \end{aligned}$$

onde  $B$  é definido como

$$B = \frac{1}{4\alpha} - \frac{z_1}{k}. \quad (4.80)$$

Para prosseguir, vamos intruduzir as variáveis relativas

$$\vec{u} = \vec{q}_s + \vec{q}_c, \quad (4.81)$$

$$\vec{v} = \vec{q}_s - \vec{q}_c, \quad (4.82)$$

que nos leva a escrever

$$\begin{aligned} & \langle vac | \widehat{E}_s^{(+)}(\vec{\rho}_s) \widehat{E}_c^{(+)}(\vec{\rho}_c) | \psi \rangle \propto G_2(\vec{\rho}_c) \\ & \times \int d\vec{v} \exp\left[i\frac{B}{2}v^2\right] \exp\left[-i\frac{O}{I}\vec{v} \cdot \left(\frac{\vec{\rho}_c - \vec{\rho}_s}{2}\right)\right] \\ & \times \int d\vec{u} v_b^0(\vec{u}) \exp\left[-i\frac{O}{I}\vec{u} \cdot \left(\frac{\vec{\rho}_c + \vec{\rho}_s}{2}\right)\right] \end{aligned} \quad (4.83)$$

A integral em  $\vec{u}$  é a transformada de Fourier do espectro angular do bombeamento, enquanto a integral em  $\vec{v}$  será mais um fator de fase, irrelevante para o cálculo da taxa de coincidências, que ao final será dada por

$$C(\vec{\rho}_s, \vec{\rho}_c) \propto |G_2(\vec{\rho}_c) W_b \left[ \frac{-(\vec{\rho}_s + \vec{\rho}_c)}{2} \right]|^2, \quad (4.84)$$

onde  $W_b$  é a distribuição do campo de bombeamento imediatamente após a grade  $G_1$ . Se considerarmos o feixe de bombeamento suficientemente expandido para ser aproximado por uma onda plana, teremos  $W_b = \varepsilon_0 G_1$ , sendo  $\varepsilon_0$  constante. Desta maneira (4.84) se escreve como

$$C(\vec{\rho}_s, \vec{\rho}_c) \propto |G_2(\vec{\rho}_c) G_1 \left[ \frac{-(\vec{\rho}_s + \vec{\rho}_c)}{2} \right]|^2. \quad (4.85)$$

Vemos então que o perfil de coincidências é proporcional ao produto das duas grades, e espera-se observar o efeito moiré. Percebemos, contudo, uma clara diferença entre a configuração bombeamento-complementar e qualquer outra implementação



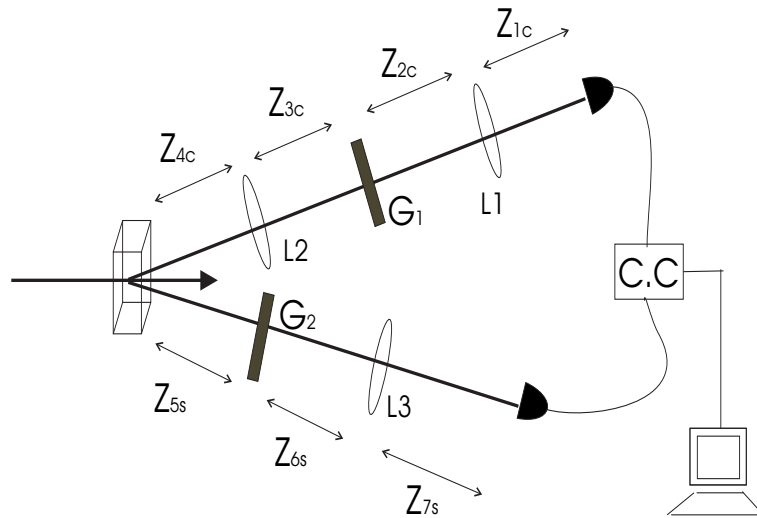


Figura 4.12: *Esquema sinal-complementar. Para este caso utilizamos a interpretação de ondas avançadas.*

clássica, pois uma das grades está escrita diretamente nas correlações espaciais condicionais existentes entre sinal e complementar. Este fato é evidenciado aqui pela dependência da soma das coordenadas transversas de sinal e complementar no plano de detecção.

Devido ao processo de conversão de frequência, a estrutura condicional terá suas dimensões aproximadamente dobradas em relação à original [67, 81].

Passemos à configuração seguinte, onde as grades são colocadas, uma em cada feixe convertido.

### Configuração sinal-complementar

Apresentaremos aqui, de maneira resumida, o cálculo do perfil de coincidências para a configuração ilustrada na figura 4.12, onde as grades são colocadas nos feixes sinal e complementar. Neste caso o efeito moiré aparecerá da superposição entre as imagens condicionais das grades.

Esta configuração pode ser compreendida facilmente em termos da interpretação de ondas avançadas de Klyshko [88]. Nesta visão, o detetor do feixe complementar funciona como uma fonte de luz que "ilumina" a grade  $G_1$  que está no feixe complementar. Esta, é então projetada sobre a grade  $G_2$ , que está no feixe sinal. A luz "proveniente" do detetor do feixe complementar passa para o caminho do feixe sinal devido a uma "reflexão" no cristal não linear que, nesta visão, funciona como um espelho. A superposição é, enfim, projetada no plano de detecção do feixe sinal, sendo observada pelo detetor. Note que esta interpretação é apenas uma imagem que facilita a compreensão do fenômeno. Esta visão equivale pensar na retro-propagação do feixe complementar devido a conjugação de fase.

Para escrever os operadores de campo para sinal e complementar, contudo, devemos levar em conta a propagação de cada feixe do cristal ao detetor, conforme foi feito para a configuração Bombeamento-Complementar. Levando em conta o arranjo da figura 4.12, obtemos, então, para o feixe complementar:

$$\begin{aligned} \widehat{E}_c^{(+)}(\vec{\rho}_c, z_{1c+}) &= \int d\vec{\rho}_c' \int d\vec{\rho}_c'' \int d\vec{\rho}_c''' \int d\vec{\rho}_c'''' \int dq_c'''' \widehat{a}(q_c''') \exp[iq_c'''' \cdot \vec{\rho}_c'''''] \\ &\times \exp\left[i|\vec{\rho}_c' - \vec{\rho}_c''|^2 \frac{k_c}{2z_{4c}}\right] \tau_2(\vec{\rho}_c') \exp\left[i|\vec{\rho}_c' - \vec{\rho}_c''|^2 \frac{k_c}{2z_{3c}}\right] G_1(\vec{\rho}_c'') \\ &\times \exp\left[i|\vec{\rho}_c'' - \vec{\rho}_c'''|^2 \frac{k_c}{2z_{2c}}\right] \tau_1(\vec{\rho}_c'') \exp\left[i|\vec{\rho}_c''' - \vec{\rho}_c''''|^2 \frac{k_c}{2z_{1c}}\right], \end{aligned} \quad (4.86)$$

onde  $\tau_1(\vec{\rho}_c')$  e  $\tau_2(\vec{\rho}_c'')$  são as funções de transmissão das lentes  $L_1$  e  $L_2$ . Novamente,  $G_1$  é a transmissão da grade posta no feixe complementar. Resolvendo a integral para  $\vec{\rho}_c'$ ,  $\vec{\rho}_c''$ ,  $\vec{\rho}_c'''$ , fazendo  $z_{4c} = z_{1c} = f$  e  $z_{2c} = z_{3c} = 2f$ , sendo  $f$  a distância focal das lentes, tomadas idênticas, podemos reduzir a expressão para o operador acima à:

$$\begin{aligned} \widehat{E}_c^{(+)}(\vec{\rho}_c, z_{1c+}) &\propto \int dq_c'''' \widehat{a}(q_c''') \int d\vec{\rho}_c'' G_1(\vec{\rho}_c'') \exp\left[i\frac{q_c''''^2}{2k_c}\right] \\ &\times \exp\left[i\vec{\rho}_c'' \cdot \left(\frac{\vec{\rho}_c}{f} + q_c''''\right)\right]. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Para o campo sinal, temos

$$\begin{aligned} \widehat{E}_s^{(+)}(\vec{\rho}_s, z_{7s+}) &= \int d\vec{\rho}_s' \int d\vec{\rho}_s'' \int d\vec{\rho}_s''' \int d\vec{q}_s'''' \widehat{a}(\vec{q}_s''') \exp[i\vec{q}_s'''' \cdot \vec{\rho}_s'''] \\ &\times \exp\left[i|\vec{\rho}_s - \vec{\rho}_s'|^2 \frac{k_c}{2z_{5s}}\right] G_2(\vec{\rho}_s) \exp\left[i|\vec{\rho}_s' - \vec{\rho}_s''|^2 \frac{k_c}{2z_{6s}}\right] \tau_3(\vec{\rho}_s'') \\ &\times \exp\left[i|\vec{\rho}_s'' - \vec{\rho}_s'''|^2 \frac{k_c}{2z_{7s}}\right], \end{aligned} \quad (4.88)$$

que pode ser simplificado integrando-se nas variáveis  $\vec{\rho}_s'$ ,  $\vec{\rho}_s''$ ,  $\vec{\rho}_s'''$ , fazendo  $z_{5s} = f$  e  $z_{6s} = z_{7s} = 2f$ . Neste caso obtemos,

$$\widehat{E}_s^{(+)}(\vec{\rho}_s, z_{7s+}) \propto G_2(-\vec{\rho}_s) \times \int d\vec{q}_s'''' \widehat{a}(\vec{q}_s''') \exp[-i\vec{q}_s'''' \cdot \vec{\rho}_s'''] \exp\left[-i\frac{q_s''''^2 z_{5s}}{2k_s}\right]. \quad (4.89)$$

Nas equações (4.87) e (4.89) termos de fase proporcionais à  $\vec{\rho}_c$  e  $\vec{\rho}_s$  são omitidos. Podemos então calcular o perfil de coincidências de forma análoga à feita para a configuração bombeamento-complementar, ficando com

$$\begin{aligned} \langle vac | \widehat{E}_s^{(+)}(\vec{\rho}_s) \widehat{E}_c^{(+)}(\vec{\rho}_c) | \psi \rangle &= \\ G_2(-\vec{\rho}_s) \int d\vec{\rho}_c'''' G_1(\vec{\rho}_c''') \int d\vec{q}_s'''' \int d\vec{q}_c'''' \exp\left[-i\frac{q_s''''^2 z_{5s}}{2k_s}\right] \exp[-i\vec{q}_s'''' \cdot \vec{\rho}_s'] & \quad (4.90) \\ \times \exp\left[-i\vec{\rho}_c'''' \cdot \left(\frac{\rho_c \vec{k}_c}{f} + \vec{q}_c''''\right)\right] v(\vec{q}_s'''' + \vec{q}_c'''') & \end{aligned}$$

onde  $v(\vec{q}_s'''' + \vec{q}_c'''')$  é o espectro angular do bombeamento. Lembrando que estamos considerando o caso degenerado onde sinal e complementar têm o mesmo comprimento de onda.

O próximo passo é utilizar a mudança de variáveis proposta em (4.82), de modo

que ficamos com:

$$\begin{aligned}
 & \langle vac | \widehat{E}_s^{(+)}(\vec{\rho}_s) \widehat{E}_c^{(+)}(\vec{\rho}_c) | \psi \rangle = \\
 & G_2(-\vec{\rho}_s) \int d\vec{\rho}_c''' G_1(\vec{\rho}_c''') \exp\left[-i\vec{\rho}_c''' \frac{k}{2f}\right] \exp\left[i\vec{\rho}_c''' \cdot \frac{\vec{\rho}_c k}{f}\right] \\
 \times & \int d\vec{u} \int d\vec{v} \exp\left[-i\vec{\rho}_c''' \cdot \left(\frac{\vec{u} + \vec{v}}{2}\right)\right] \exp\left[i\frac{f}{2k}\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v}\right] \exp\left[-i\vec{\rho}_s \cdot \left(\frac{\vec{u} - \vec{v}}{2}\right)\right] v(\vec{u}).
 \end{aligned} \tag{4.91}$$

Resolvendo as integrais em  $\vec{u}$  e  $\vec{v}$  e omitindo termos de fase global, temos

$$\begin{aligned}
 & \langle vac | \widehat{E}_s^{(+)}(\vec{\rho}_s) \widehat{E}_c^{(+)}(\vec{\rho}_c) | \psi \rangle = \\
 & G_2(-\vec{\rho}_s) \int d\vec{\rho}_c''' G_1(\vec{\rho}_c''') v\left[\frac{k}{f}\left(\vec{\rho}_c''' - \vec{\rho}_s\right)\right] \exp\left[-i\frac{k\vec{\rho}_c''' \vec{\rho}_c}{f}\right].
 \end{aligned} \tag{4.92}$$

Assumindo que o campo de bombeamento é uma onda plana, podemos utilizar a seguinte aproximação:

$$v\left[\frac{k}{f}\left(\vec{\rho}_c''' - \vec{\rho}_s\right)\right] \longrightarrow \delta\left(\vec{\rho}_c''' - \vec{\rho}_s\right) \tag{4.93}$$

o que nos fornece para a taxa de coincidências

$$C(\vec{\rho}_s, \vec{\rho}_c) \propto |G_2(-\vec{\rho}_s) G_1(\vec{\rho}_s)|^2. \tag{4.94}$$

Novamente, o perfil de coincidências é dado pelo produto das grades, mas desta vez a dependência é exclusivamente da coordenada transversa do plano de detecção do feixe sinal. À primeira vista isto pode parecer estranho, mas pode ser compreendido na interpretação de ondas avançadas. O detetor do feixe complementar, que assume o papel de uma fonte, é colocado no plano focal da lente  $L_1$ , não sendo sensível a variação de posições. Os detetores são considerados pontuais e toda a luz do feixe complementar é focalizada neste ponto. Este fato, associado à transformada de Fourier realizada pela focalização leva o detetor do feixe complementar a se comportar como um filtro para as frequências espaciais.

Esta configuração está mais próxima de um análogo clássico, porém, a observação em coincidências, explorando a forte correlação entre sinal e complementar, pode ser um fator favorável ao esquema quântico quando se desejar fazer superposições não locais a grandes distâncias.

### 4.4.3 Moiré não local: Experimento

O experimento apresentado nesta seção foi realizado no Laboratório de Ótica Quântica do IF-UFRJ, em nova colaboração com o grupo do prof. Paulo Henrique Souto Ribeiro. Neste experimento [92] exploramos as duas configurações apresentadas na seção anterior (4.4.2). Para obtermos a conversão paramétrica utilizamos um cristal de Iodato de Lítio ( $LiIO_3$ ) de 5 mm de espessura cortado para casamento de fase tipo I. O cristal foi bombeado por um laser pulsado com comprimento de onda de 425 nm, gerado pelo dobramento da frequência de um laser de Ti-Safira. Os pares correlacionados foram observados nos comprimentos de onda de 890 nm (sinal) e 810 nm (complementar), detectados por detetores de foto-avalanche, sendo registrados tanto as contagens simples como as coincidências.

Vamos descrever separadamente cada configuração, explorando as diferentes maneiras de superpor, não localmente, as grades  $G_1$  e  $G_2$ . Para cada uma destas configurações estudamos dois regimes distintos, utilizando para isto dois pares de grades.

Em um par, o período das grades foi tomado com uma diferença maior, tendo  $G_1$  um período de 1.6 mm e  $G_2$ , um período de 1.2 mm. Neste caso a superposição destas grades produzem franjas de moiré em que tanto a alta quanto a baixa frequência são visíveis, fornecendo um padrão mais complicado, como mostra a figura 4.13 a). Este padrão foi obtido fazendo a superposição direta das duas grades, iluminando-as com luz branca e registrando a imagem com uma câmera CCD.

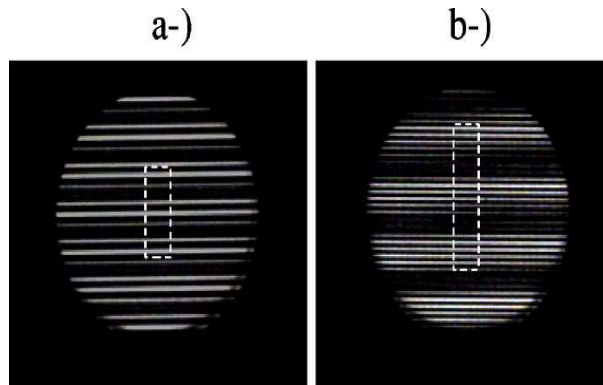


Figura 4.13: *Moiré produzido pela superposição de duas grades com períodos , a) 1.6 mm e 1.2 mm , b) 0.9 mm e 0.8 mm*

O outro regime estudado é o caso onde o períodos das grades são muito próximos um do outro. Para este estudo fizemos  $G_1$  com um período de  $0.8\text{ mm}$  e  $G_2$ , com um período de  $0.9\text{ mm}$ . Além de próximos estes períodos são menores, resultando grades de maior frequência, cuja superposição produz um batimento de baixa frequência, facilmente observado como mostra a figura 4.13 b). Por outro lado, as frequências individuais são mais difíceis de serem notadas. É neste regime que o efeito de moiré é mais evidente.

### Configuração bombeamento-complementar

Esta configuração foi esquematizada na figura 4.11. Para o estudo experimental, tomamos as distâncias e posições do sistema de imagem, composto pelas lentes e grades, de modo que mantivéssemos o tamanho original das grades, ficando com um esquema como o indicado na figura 4.14, onde utilizamos sempre lentes de mesma distância focal  $f = 15\text{cm}$ .

A grade  $G_1$  é colocada no feixe de bombeamento, a uma distância  $f$  do cristal, fazendo com que as correlações espaciais entre sinal e complementar se propaguem como o perfil do bombeamento a menos de um fator de escala, que depende do

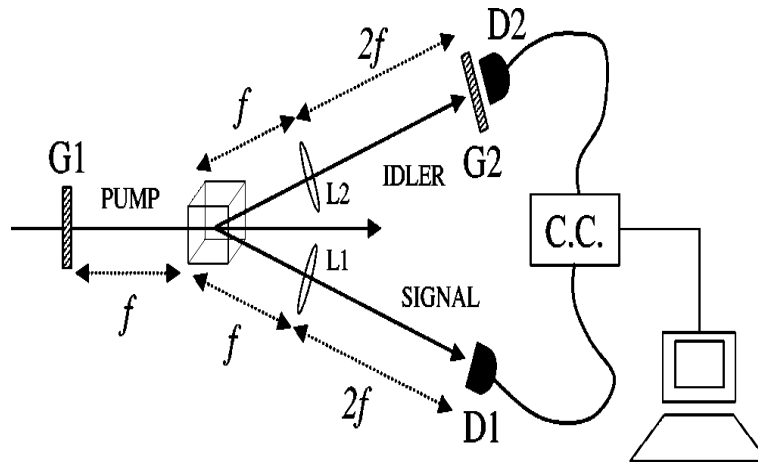


Figura 4.14: Esquema experimental da configuração bombeamento-complementar comprimento de onda de sinal e complementar [69]. Para esta operação próxima à degenerescência, este fator de escala é aproximadamente 2, de maneira que para obtermos um dado período  $p$  de  $G_1$ , nas correlações, utilizamos uma grade cujo período é a metade do desejado ( $\frac{p}{2}$ ) no bombeamento. A imagem de  $G_1$  carregada por sinal e complementar é projetada no plano de detecção [81] pelas lentes  $L_1$  e  $L_2$ , colocadas nos feixes sinal e complementar a uma distância  $f$  do cristal, de modo que a distância do objeto seja  $2f$ . A grade  $G_2$  é colocada imediatamente antes do detector  $D_2$  a uma distância  $2f$  da lente. Deste modo, o perfil de coincidências esperado para esta configuração, como vimos nos cálculos, é proporcional ao produto  $G_1 \times G_2$ , onde as dimensões originais são mantidas.

Um fator determinante para observação das franjas de moiré no perfil de coincidências, é saber se as grades estão contidas na região de coincidências. Em nosso caso esta região é muito pequena. Para uma dada posição do detector do feixe sinal (complementar), as coincidências somente eram observadas para uma verredura do detector do feixe complementar (sinal) sobre uma região de  $4 \text{ mm}^2$  de área. Logo a solução foi manter os detectores parados no ponto de contagens máximas de coincidências e varrer as posições das grades, simultaneamente, e no mesmo sentido.

Primeiramente verificamos o caso onde os períodos das grades são muito diferentes, com o período de  $G_1$  igual a  $0.8 \text{ mm}$ , para produzir uma grade de período  $1.6 \text{ mm}$  nas correlações, e  $G_2$  com período de  $1.2 \text{ mm}$ . Varremos a posição vertical das grades em passos de  $0.2 \text{ mm}$ , com um tempo de aquisição de  $20 \text{ s}$ . Lembrando do fator de escala devido à conversão de frequências, para obter um deslocamento efetivo de  $0.2 \text{ mm}$  para a grade do bombeamento, fizemos uma varredura em passos de  $0.1 \text{ mm}$ . Para os detetores, utilizamos aberturas circulares de  $0.5 \text{ mm}$  de diâmetro, de modo a possuímos resolução das máscaras individuais. O resultado mostrado na figura 4.15 a) é o perfil de coincidências em função do deslocamento comum das duas grades que correspondem às franjas de moiré da figura 4.13 a). Note que as linhas pontilhadas em 4.13 indicam as regiões varridas no experimento.

Para estes parâmetros, a modulação lenta (franja de moiré) esperada têm um período de  $4.8 \text{ mm}$ , em excelente acordo com o espaçamento entre os picos maiores da figura 4.15 a).

A linha sólida em 4.15 a) é resultado do ajuste dos pontos pelo produto de duas funções cosseno ao quadrado com os períodos das grades  $G_1$  e  $G_2$ , ou seja,

$$F = F_0 \cos^2 \left( \frac{\pi x}{1.6 \text{ mm}} \right) \cos^2 \left( \frac{\pi x}{1.2 \text{ mm}} \right). \quad (4.95)$$

A linha pontilhada apenas liga os pontos experimentais, servindo de guia para os olhos. Vemos que há um bom acordo entre os pontos experimentais e o ajuste, tanto para a modulação rápida quanto para a lenta. As pequenas diferenças podem ser explicadas pelo fato das grades possuírem distorções em comparação a funções cosseno ideais, e ainda pelo tamanho finito dos detetores.

A figura 4.15 b) mostra o resultado correspondente às franjas de moiré da figura 4.13 b). Aqui utilizamos uma grade  $G_1$  de período  $0.4 \text{ mm}$  no bombeamento de modo a obtermos uma grade  $G_1$  de período  $0.8 \text{ mm}$  nas correlações. Em frente ao detetor do feixe complementar colocamos uma grade  $G_2$  de período  $0.9 \text{ mm}$ . A



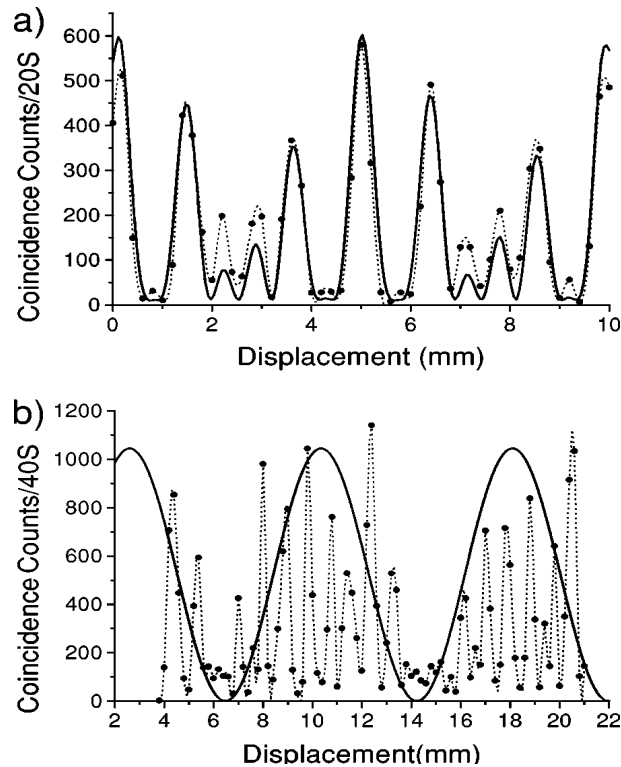


Figura 4.15: Resultado experimental para a configuração bombeamento-complementar. a) Moiré das grades de períodos 1.6 - 1.2 mm. A linha sólida é o ajuste da função 4.95. b) Moiré das grades de período 0.9-0.8 mm. A linha sólida é o ajuste da função 4.96. Em ambos os casos as linhas pontilhadas são guias para os olhos.

varredura foi realizada com passos menores ( $0.05 \text{ mm}$  para a grade no bombeamento e  $0.1 \text{ mm}$  para a grade no complementar), já que estamos trabalhando com uma frequência maior. Fizemos medidas com um tempo de aquisição de  $40 \text{ s}$ , mantendo as fendas circulares de  $0.5 \text{ mm}$  em cada detetor.

Como podemos observar em 4.15 b) as modulações rápidas devido às frequências originais, indicadas pelas linhas pontilhadas que apenas ligam os pontos experimentais, apresentam claramente um envelope lentamente varável, que pode ser ajustado por uma única função cosseno quadrado, cujo período é próximo do esperado. A função ajustada é

$$F = F_0 \cos^2 \left( \frac{\pi x}{7.8 \text{ mm}} \right), \quad (4.96)$$

onde o período para o ajuste mostrado em 4.15 b), pela linha sólida vale  $7.8 \text{ mm}$ , valor próximo ao período de  $7.2 \text{ mm}$ , esperado para estas duas grades. Novamente, este pequeno desvio pode ser explicado pela discordância das grades, com funções cossenoidais ideais, principalmente a gerada nas correlações pela grade posta no bombeamento. Este resultado está em ótimo acordo com as franjas de moiré mostradas na figura 4.13 b).

### Configuração sinal-complementar

Vamos tratar agora do caso em que as duas grades são colocadas nos feixes sinal e complementar. Como discutimos na seção 4.4.2, para montar esta configuração adotamos a interpretação de ondas avançadas. Escolhemos ainda distâncias em que os sistemas de imagens nos fornecessem ampliações unitárias, mantendo, assim, as dimensões originais das grades, ficando com um esquema conforme ilustra a figura 4.16.

Nesta configuração, exploramos então as correlações quânticas dos fótons gêmeos, associadas às propriedades de transmissão das grades colocadas remotamente no

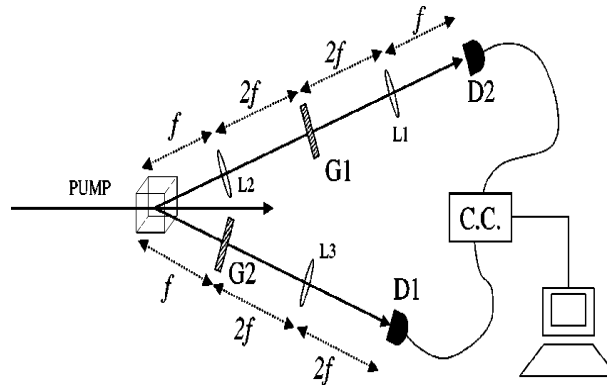


Figura 4.16: *Esquema experimental para a configuração sinal-complementar*

caminho de cada feixe [89].

Assim, o detetor do feixe complementar ( $D_2$ ) é tomado como uma fonte pontual, que é colimada pela lente  $L_1$ , colocada a uma distância  $f$  da fonte. A grade  $G_2$  é então "iluminada" a uma distância  $2f$  da lente. O caminho das ondas avançadas segue, com a lente  $L_2$  projetando a imagem de  $G_1$  sobre  $G_2$ , onde se supõe uma "reflexão" no cristal não linear. A imagem desta superposição é, enfim, projetada no plano de detecção do feixe sinal ( $D_1$ ) pela lente  $L_3$  (idêntica a  $L_1$  e  $L_2$ ). Como vimos, é esperado que o perfil de coincidências dependa do produto entre  $G_1$  e  $G_2$ .

Os resultados experimentais são mostrados na figura 4.17. Em 4.17 a) utilizamos as grades com períodos mais diferenciados ( $G_1$  com  $1.6 \text{ mm}$  de período e  $G_2$  com  $1.2 \text{ mm}$ ), que produzem as franjas de moiré de figura 4.13 a). Nesta configuração, nenhum fator de escala está envolvido, de modo que as grades são tomadas com os períodos desejados. A varredura se deu em passos de  $0.2 \text{ mm}$  para cada grade, com um tempo de aquisição de  $5 \text{ s}$ , já que o bombeamento livre de grades resulta em uma taxa de conversão maior. Note que a modulação lenta com  $4.8 \text{ mm}$  de período é novamente clara, observada a distância entre os picos maiores. O ajuste mostrado através da curva sólida é o produto de duas funções cosseno quadrado, como indica a equação 4.95. Temos um bom ajuste dos pontos experimentais, mostrando um

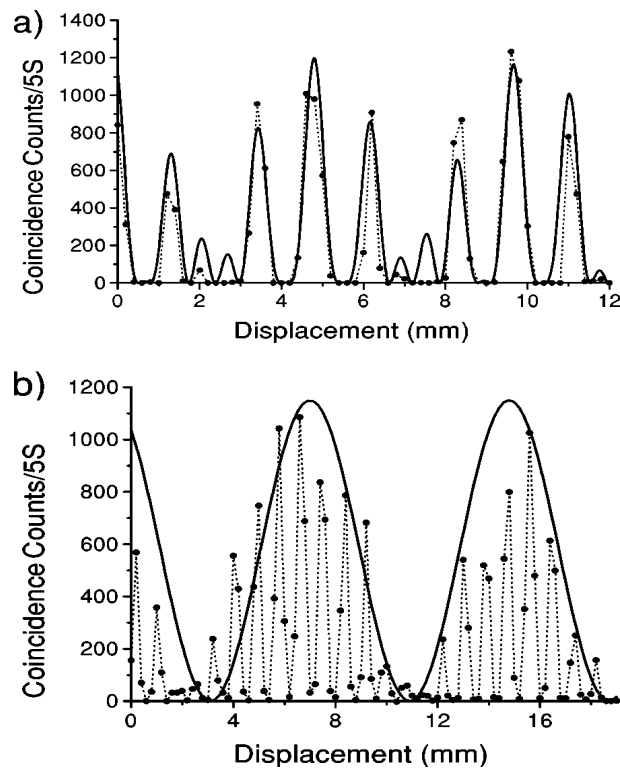


Figura 4.17: Resultado experimental para a configuração sinal-complementar. a) Moiré das grades de períodos 1.6 - 1.2 mm. A linha sólida é o ajuste da função 4.95. b) Moiré das grades de período 0.9-0.8 mm. A linha sólida é o ajuste da função 4.96. Em ambos os casos as linhas pontilhadas são guias para os olhos.

bom acordo com os resultados teóricos.

Já em 4.17 b), utilizamos as grades correspondentes às franjas de moiré de 4.13 b), com o período de  $G_1$  igual a  $0.8 \text{ mm}$  e o de  $G_2$  igual a  $0.9 \text{ mm}$ . Vemos que a modulação lenta é ainda mais evidente, com o ajuste do envelope da equação 4.96 estando em ótimo acordo.

Com isto demonstramos experimentalmente a aparição do efeito *moiré*, em imagens quânticas. Estes resultados podem motivar aplicações interessantes em medidas de pequenas deformações mecânicas sem contatos, explorando o fato de obtermos franjas de moiré provenientes de uma superposição não local.

A configuração bombeamento-complementar não possui nenhum análogo clássico, sendo proveniente da transferência do espectro angular do bombeamento. Já a configuração sinal-complementar, explicada pela interpretação de ondas avançadas, está próxima do arranjo clássico de projeção interferométrica de moiré, onde a imagem de uma estrutura com uma frequência conhecida é projetada sobre uma segunda estrutura cuja frequência é inferida da frequência das franjas de moiré que são facilmente lidas. Ainda assim, salientamos pelo fato desta medida ser feita em coincidências. As correlações são mantidas a grandes distâncias o que pode ser um fato a favor da utilização da configuração quântica.

A técnica de moiré é muito utilizada em vários campos, por isso julgamos estes resultados de grande interesse. Porém, um julgamento sobre as vantagens e desvantagens entre o moiré clássico e o quântico está além deste trabalho.

# Capítulo 5

## Oscilação Paramétrica

### Contents

---

<b>5.1</b>	<b>Propriedades Clássicas de um Oscilador Paramétrico Ótico</b>	<b>118</b>
5.1.1	Equações de acoplamento em cavidades . . . . .	119
5.1.2	Condições de Oscilação . . . . .	123
<b>5.2</b>	<b>Transferência de momento angular orbital em um oscilador paramétrico ótico do tipo II</b>	<b>126</b>
5.2.1	Experimento . . . . .	127
5.2.2	Cavidade Astigmática . . . . .	133
5.2.3	Modelo Teórico . . . . .	137
<b>5.3</b>	<b>OPO com auto-travamento de fase</b>	<b>146</b>
<b>5.4</b>	<b>Perspectivas</b>	<b>155</b>

---

O oscilador paramétrico ótico (OPO) é uma fonte de luz tipo laser, que utiliza como meio de ganho um cristal não-linear inserido em uma cavidade ótica. O bombeamento do cristal por um feixe laser leva à geração de um par de feixes (*signal e complementar*) via conversão paramétrica descendente, como estudamos no capítulo

anterior. Estes feixes são realimentados pela cavidade, que também realiza uma seleção de modos, levando o sistema à oscilação a partir de uma intensidade mínima do bombeamento, ou seja, como nos lasers, o sistema também possui um limiar de oscilação. Temos dois tipos de cavidades possíveis para este sistema: A cavidade em anel, representada na figura 5.1 a), onde o feixe de bombeamento passa uma única vez pelo cristal durante uma volta completa na cavidade. A figura 5.1 b) mostra o esquema de uma cavidade linear, para a qual o bombeamento passa pelo cristal duas vezes em uma volta completa.

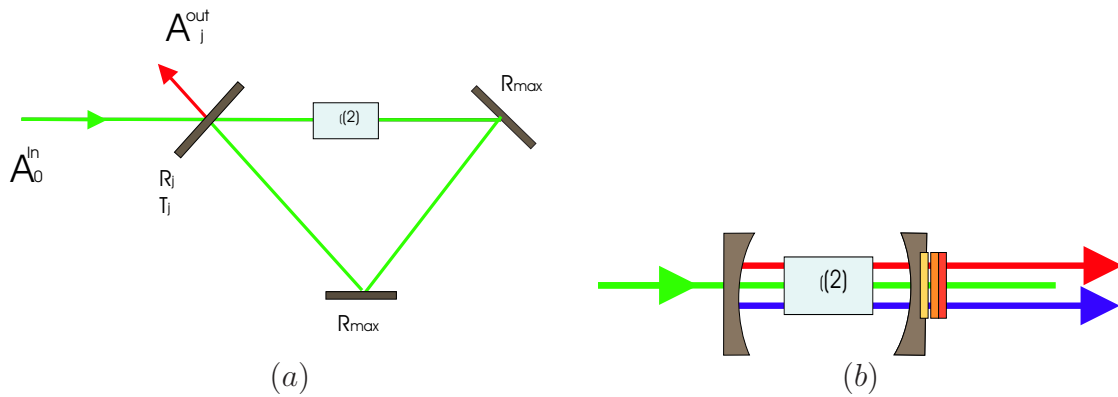


Figura 5.1: Em a) temos um OPO em anel, com apenas um espelho de acoplamento. Em b) é representado uma cavidade linear, mais usada experimentalmente.

Uma característica marcante deste sistema é a capacidade de emitir feixes luminosos cujos comprimentos de onda são ajustáveis. Esta propriedade suscitou grande interesse na área de espectroscopia, já que poderiam substituir os lasers de corante que operam no regime pulsado. Além disso, podem gerar feixes dentro da faixa do infra-vermelho distante.

Por serem gerados num processo de CPD, os feixes sinal e complementar obedecem às condições de casamento de fase discutidas no capítulo 4, ou seja,

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2, \quad (5.1)$$

$$\vec{k}_0 = \vec{k}_1 + \vec{k}_2. \quad (5.2)$$

Os índices 0, 1, 2 correspondem, respectivamente, ao feixe de bombeamento, sinal e complementar.

Outra característica que o OPO carrega da CPD é poder ser do tipo I, onde sinal e complementar têm a mesma polarização, e do tipo II, com os feixes possuindo polarizações ortogonais.

Obtemos, assim, feixes intensos que apresentam, dentro da banda passante da cavidade, fortes correlações quânticas em intensidade: falamos dos "feixes gêmeos". Esta propriedade permite a compressão do ruído da diferença das intensidades de sinal e complementar, abaixo do ruído balístico. Tal compressão foi medida pela primeira vez em 1987 no Grupo de Ótica Quântica do Laboratório Kastler Brossel, da *École Normale Supérieure*, em Paris [93].

Os feixes gêmeos apresentam também fortes anti-correlações na flutuação de fase. Logo, estes feixes são emaranhados em quadratura, podendo ser utilizados em diversos protocolos de informação quântica. Contudo, esta propriedade é muito difícil evidenciar experimentalmente, pois os feixes em geral não possuem a mesma frequência, isto é, não são degenerados em frequência. Na operação livre do sistema a degenerescência é obtida apenas acidentalmente. Abaixo do limiar este problema não é tão importante, já que neste regime o OPO funciona como um amplificador passivo.

O emaranhamento de sinal e complementar já foi medido com sucesso abaixo do limiar [99], utilizando-se o critério de separabilidade de Duan [29]. Acima do limiar surgem alguns problemas. Uma tentativa foi feita com um OPO tipo II, utilizando-se a técnica da detecção homodina. Para tanto é necessário a operação degenerada, o que levou à implementação do método de auto-travamento de fase, proposto por E.J. Mason e N.C. Wong [103] e implementado experimentalmente por Julien Laurat [99]. O método consiste em inserir uma lâmina birrefringente dentro da cavidade



com seus eixos fazendo um pequeno ângulo com os eixos do cristal. Isto gera um pequeno acoplamento entre sinal e complementar, levando à sincronização dos dois osciladores. Vamos discutir um pouco mais este método em uma seção mais a frente. Neste trabalho um excesso de ruído de fase foi medido, impossibilitando a violação do critério de separabilidade.

Mais recentemente foi realizado por Alessandro Villar, Marcelo Martinelli e Paulo Nussenzveig do IF-UFF a primeira medida de emaranhamento acima do limiar[101]. Eles utilizaram uma técnica de auto-homodinação [102], que não necessita da degenerescência. Estas medidas também apresentaram um excesso de ruído de fase, o que revela-se um problema mais fundamental.

Neste capítulo, vamos explorar propriedades clássicas do OPO. Mais precisamente, estudaremos a transferência do momento angular orbital do bombeamento para os feixes convertidos. Não faremos nenhum estudo quântico dos feixes gerados pelo bombeamento de um vórtice ótico. Faremos um estudo detalhado da propagação de modos transversos de ordens mais altas em meios anisotrópicos, o que é de suma importância para compreensão da conservação, ou não conservação do MAO no processo paramétrico intracavidade. Apresentaremos também o OPO à auto-travamento de fase, com uma medida de emaranhamento abaixo do limiar de oscilação do OPO.

## 5.1 Propriedades Clássicas de um Oscilador Paramétrico Ótico

Vamos discutir nesta seção as principais propriedades clássicas de um OPO. Apresentaremos as equações de acoplamento entre os campos intra-cavidade, obtendo o limiar de oscilação e as expressões para os campos gerados no processo. Es-

tas propriedades são mostradas no artigo clássico de Thierry Debuissert e Claude Fabre [94].

### 5.1.1 Equações de acoplamento em cavidades

Obtivemos no capítulo 4 as equações de acoplamento dos campos bombeamento, sinal e complementar em um meio não linear, considerando os campos como ondas planas. Para um modo gaussiano os termos de polarização não linear são escritos como

$$\begin{aligned}
 P_0^{(\omega_0)}(\vec{r}) &= \epsilon_0 \chi^2 \varepsilon_1(z) \varepsilon_2(z) e^{-\frac{(x^2+y^2)}{w_0^2}} e^{-i\Delta k z}, \\
 P_1^{(\omega_1)}(\vec{r}) &= \epsilon_0 \chi^2 \varepsilon_0(z) \varepsilon_2^*(z) e^{-\frac{(x^2+y^2)}{w_1^2}} e^{i\Delta k z}, \\
 P_2^{(\omega_2)}(\vec{r}) &= \epsilon_0 \chi^2 \varepsilon_0(z) \varepsilon_1^*(z) e^{-\frac{(x^2+y^2)}{w_2^2}} e^{i\Delta k z}.
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Onde temos uma dependência transversa da polarização regida pelo parâmetro  $\bar{w}_j$ , que depende da cintura ("waist") dos modos acoplados, definido como

$$\frac{1}{\bar{w}_j^2} = \frac{1}{\bar{w}_k^2} + \frac{1}{\bar{w}_l^2}, \tag{5.4}$$

com  $j \neq k$ ,  $k \neq l$  e  $\{j, k, l\} \{0, 1, 2\}$ .  $\varepsilon_j(z)$  é o envelope lentamente variável na direção  $z$ . Os termos  $\epsilon_0$  e  $\chi^2$  são, respectivamente, a permeabilidade do vácuo e o termo de segunda ordem do tensor susceptibilidade elétrica. Por fim,  $\Delta k$  é o desacordo de fase.

Considerando que não há acoplamento de diferentes modos transversos e que  $w$

é constante ao longo do cristal, obtemos as equações acopladas para campos

$$\begin{aligned}\frac{dA_0}{dz} &= -\kappa A_1 A_2 e^{-i\Delta kz}, \\ \frac{dA_1}{dz} &= \kappa A_0 A_2^* e^{i\Delta kz}, \\ \frac{dA_2}{dz} &= \kappa A_0 A_1^* e^{i\Delta kz},\end{aligned}\tag{5.5}$$

onde temos uma redefinição do envelope lentamente variável

$$A_j(\omega_j, \vec{r}) = \sqrt{\frac{n_j \epsilon_0 c \pi w_j^2}{4 \hbar \omega_j}} \varepsilon(\omega_j, \vec{r}),\tag{5.6}$$

e a constante de acoplamento dada por

$$\kappa = \chi^{(2)} \frac{w_0 w_1 w_2}{w_0^2 w_1^2 + w_0^2 w_2^2 + w_2^2 w_1^2} \sqrt{\frac{\hbar \omega_0 \omega_1 \omega_2}{\pi \epsilon_0 c^3 n_0 n_1 n_2}}\tag{5.7}$$

As variáveis para o campo estão normalizadas, de forma que  $|A_j|^2$  dê a taxa de fótons por segundo que atravessa uma seção reta do respectivo feixe.

Vamos realizar, então, a integração ao longo do cristal de comprimento  $l$ , das equações (5.5). Considerando que, em geral, a constante de acoplamento é pequena e mantendo até a primeira ordem nesta constante, temos

$$\begin{aligned}A_0(l) &= A_0(0) - g A_1 A_2 e^{-i\Delta kl} \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta kl}{2}\right), \\ A_1(l) &= A_1(0) + g A_0 A_2^* e^{i\frac{\Delta kl}{2}} \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta kl}{2}\right), \\ A_2(l) &= A_2(0) + g A_0 A_1^* e^{i\frac{\Delta kl}{2}} \operatorname{sinc}\left(\frac{\Delta kl}{2}\right).\end{aligned}\tag{5.8}$$

Onde  $g = \kappa l$ , e a função *sinc* é o seno cardinal.

Podemos agora, escrever as equações para o campo intra-cavidade, conforme tratamento dado por Thierry Debuissert *et al* [94]. Tomemos como modelo um OPO em anel, esquematizado na figura 5.1 a), triplamente ressonante, onde em uma volta completa os campos passam um única vez pelo cristal. Consideraremos

também que temos somente um espelho de acoplamento, de coeficientes de reflexão  $r_j$  e transmissão  $t_j$  para um campo  $j \in \{0, 1, 2\}$  referentes ao bombeamento, sinal e complementar, respectivamente. Os outros dois espelhos são considerados ideais, com reflexão unitária. Desconsideraremos as defasagens devidas à reflexão neste espelho de acoplamento. Esta defasagem pode levar a um aumento do limiar, podendo este aumento, contudo, ser compensado pelo desacordo de fase. Analisamos, então, as mudanças sofridas pelos campos em uma volta completa na cavidade, escolhendo como origem a entrada no cristal.

As equações (5.8) nos mostram como se dá a interação do campos no cristal não-linear. Após a passagem no cristal, segue a propagação livre dos campos na cavidade e a reflexão no espelho de acoplamento. Deste modo, escrevemos os campos  $A'_j$ , após uma volta completa na cavidade, como

$$\begin{aligned} A'_0 &= r_0 e^{i\varphi_0} [A_0 - g^*(\Delta k) A_1 A_2] + t_0 A_0^{in}, \\ A'_1 &= r_1 e^{i\varphi_1} [A_1 + g(\Delta k) A_0 A_2^*] + t_1 A_1^{in}, \\ A'_2 &= r_2 e^{i\varphi_2} [A_2 - g(\Delta k) A_0 A_1^*] + t_2 A_2^{in}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Onde  $g(\Delta k)$  engloba os termos dependentes do desacordo de fase, sendo escrito como

$$g(\Delta k) = g \operatorname{sinc} \left( \frac{\Delta k}{2} \right) e^{i\frac{\Delta k}{2}}. \quad (5.10)$$

O desacordo de fase atuará modificando o coeficiente de acoplamento, sendo que no perfeito acordo de fase ( $\Delta k = 0$ ) temos o maior coeficiente de acoplamento.

As defasagens sofridas pelo campo durante a volta na cavidade são escritas como

$$\varphi_j = k_j (n_j l + L), \quad (5.11)$$

onde  $k_j = \frac{\omega_j}{c}$ ,  $n_j$  é o índice de refração do cristal para o campo  $j$  e  $L$  o comprimento de propagação livre da cavidade.

Considerando-se a condição de ressonância, a fase acumulada pelos campos é expressa como um múltiplo de períodos completos. Podemos, ainda, tratar os campos nas proximidades da ressonância, admitindo pequenas dessintonia  $\delta_j$  de modo que

$$\varphi_j = 2p_j\pi + \delta_j; \quad \delta_j \ll 2\pi. \quad (5.12)$$

Desta forma, as equações 5.10 se escrevem

$$\begin{aligned} A_0 [1 - r_0 e^{i\delta_0}] &= -r_0 g A_1 A_2 + t_0 A_0^{in}, \\ A_1 [1 - r_1 e^{i\delta_1}] &= r_1 g A_0 A_2^*, \\ A_2 [1 - r_2 e^{i\delta_2}] &= r_2 g A_0 A_1^*, \end{aligned} \quad (5.13)$$

onde consideramos o acordo de fase, e admitimos injeção apenas do campo de bombeamento. Na aproximação de grande finesse, as perdas devido a transmissão do espelho de acoplamento são pequenas, nos permitindo tratar o coeficiente de reflexão como

$$r_j = 1 - \gamma_j. \quad (5.14)$$

Podemos ir mais adiante, considerando perdas intra-cavidade que, ainda em um regime de poucas perdas, pode ser escrita como uma "transmissão" extra, nos permitindo incorporar ao coeficiente de reflexão um termo proveniente destas perdas:

$$r_j = 1 - \gamma_j + \mu_j = 1 - \gamma', \quad (5.15)$$

com  $\gamma' = \gamma + \mu$ .

Tomando, então, pequenas dessintonias e expressando-as normalizadas às perdas ( $\Delta_j = \frac{\delta_j}{\gamma_j}$ ), temos

$$A_0\gamma'_0 [1 - i\Delta_0] = -gA_1A_2 + \sqrt{\gamma_0}A_0^{in}, \quad (5.16)$$

$$A_1\gamma'_1 [1 - i\Delta_1] = gA_0A_2^*, \quad (5.17)$$

$$A_2\gamma'_2 [1 - i\Delta_2] = gA_0A_1^*, \quad (5.18)$$

o que finalmente nos dá um sistema para os campos acoplados intra-cavidade.

### 5.1.2 Condições de Oscilação

Uma solução possível para o sistema formado pelas equações 5.16, 5.17 e 5.18 é  $A_1 = A_2 = 0$ . Neste caso, não temos oscilação, obtendo somente a descrição para o campo de bombeamento em uma cavidade vazia.

Considerando  $A_1$  e  $A_2$  não nulos, tomemos o produto de 5.17 com o complexo conjugado de 5.18, obtendo

$$\gamma'_1\gamma'_2 [1 - i\Delta_1] [1 - i\Delta_2] = g^2|A_0|^2. \quad (5.19)$$

Da parte imaginária desta equação obtemos uma condição de igualdade entre às dessintonias relativas às perdas para sinal e complementar:

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta, \quad (5.20)$$

o que implica em uma relação entre as intensidades dos feixes gêmeos

$$\gamma'_1|A_1|^2 = \gamma'_2|A_2|^2. \quad (5.21)$$

Considerando a transmissão da cavidade dada por  $T_j = 2\gamma_j$ , vemos que  $\gamma'_j$  é a fração total de fótons perdidos em uma volta na cavidade, seja pela transmissão do espelho ou por perdas intra-cavidade. Assim sendo, 5.21 nos mostra que o número médio de fótons perdidos pela cavidade no modo  $j = 1$  é igual ao número de fótons

perdidos para o modo  $j = 2$ . Esta é uma evidência da forte correlação em intensidade que há entre os feixes de saída, embora não seja uma condição de existência dos feixes gêmeos, o que deve ser revelado por um tratamento quântico.

Sendo, então,  $I_j = 2\gamma_j|A_j|^2$  a intensidade de saída do modo  $j$ , podemos escrever a seguinte relação para as intensidades de saída de sinal e complementar como

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\gamma_1\gamma'_2}{\gamma_2\gamma'_1}. \quad (5.22)$$

Esta equação nos mostra que as intensidades de sinal e complementar não são necessariamente balanceadas, mesmo se a perda no espelho de acoplamento for igual para os dois modos. De fato, nada garante que  $\mu_1 = \mu_2$ , devido a diferentes polarizações e frequências, no caso não degenerado.

A parte real de (5.19) nos fornece uma limitação da intensidade do campo de bombeamento intra-cavidade, dada por

$$|A_0|^2 = \frac{\gamma'_1\gamma'_2(1 + \Delta^2)}{g^2}. \quad (5.23)$$

Como vemos, a potência do bombeamento intra-cavidade é limitada pela dessintonia e perdas dos campos sinal e complementar, além do coeficiente de acoplamento não-linear  $g$ .

O sistema apresenta, ainda, um limiar de oscilação que é obtido substituindo (5.23) no módulo quadrado de (5.16). Observando que no limiar os campos sinal e complementar são nulos, obtemos

$$|A_0|_{lim}^2 = \frac{\gamma_0'^2\gamma'_1\gamma'_2(1 + \Delta_0^2)(1 + \Delta^2)}{2g^2\gamma_0}. \quad (5.24)$$

Note que o limiar será mínimo quando os três campos forem simultaneamente ressonantes.

$$|A_0|_{limres}^2 = \frac{\gamma_0'^2\gamma'_1\gamma'_2}{2g^2\gamma_0}. \quad (5.25)$$

Vemos claramente que quanto maior forem as perdas para os campos sinal e complementar, maior será o limiar.

Por fim, podemos obter a intensidade de sinal e complementar a partir do sistema de equações para os campos na cavidade. Para tanto é definida a taxa de bombeamento como a razão entre a intensidade injetada e a intensidade de limiar na ressonância

$$\sigma = \frac{|A_0^{in}|^2}{|A_0|_{limres}^2}, \quad (5.26)$$

que se escreve a partir das equações 5.16, 5.17 e 5.18 em função do modo  $A_1$  como

$$\sigma = \left(1 - \Delta\Delta_0 + \frac{g^2|A_1|^2}{\gamma'_0\gamma'_2}\right)^2 + (\Delta + \Delta_0)^2, \quad (5.27)$$

que resolvida para  $|A_1|^2$  resulta no fluxo de fótons intracavidade do campo sinal, dado por

$$|A_1|^2 = \frac{\gamma'_0\gamma'_2}{g^2} \left[ \sqrt{\sigma - (\Delta + \Delta_0)^2} + \Delta\Delta_0 - 1 \right]. \quad (5.28)$$

A equação 5.28 tem sentido físico para  $|A_1|^2$  real (implicando que  $\sigma > (\Delta + \Delta_0)^2 \equiv \sigma_a$ ) e positivo. No limiar temos  $\sigma = (1 + \Delta^2)(1 + \Delta_0^2) \equiv \sigma_b$ .

Se  $\Delta\Delta_0 < 1$ , temos uma única solução não nula possível, para  $\sigma > \sigma_b$ . Neste caso, em um regime de grandes dessintonias e potências elevadas, esta solução torna-se instável levando à uma operação auto-pulsada e um comportamento caótico do OPO [95].

Por outro lado, se tivermos  $\Delta\Delta_0 > 1$ , na região  $\sigma_a < \sigma < \sigma_b$  obtemos uma solução trivial estável e duas soluções positivas, uma instável e outra estável idêntica a 5.28. Este efeito, estudado detalhadamente em [95] e observado experimentalmente em [96], é chamado de biestabilidade do OPO.

De maneira análoga, obtemos a expressão para a intensidade do campo  $A_2$ , que



se escreve

$$|A_2|^2 = \frac{\gamma'_0 \gamma'_1}{g^2} \left[ \sqrt{\sigma - (\Delta + \Delta_0)^2} + \Delta \Delta_0 - 1 \right]. \quad (5.29)$$

Vamos estudar agora o caso do bombeamento de um OPO tipo II com um modo de Laguerre-Gauss, portador de MAO. Neste caso devemos considerar efeitos transversos do campo na propagação pelo cristal e na ressonância da cavidade.

## 5.2 Transferência de momento angular orbital em um oscilador paramétrico ótico do tipo II

Vimos no Capítulo 4 alguns trabalhos onde se estudou a transferência do momento angular orbital (MAO) no processo de conversão paramétrica. Particularmente, mostramos experimentalmente que o MAO é transferido na CPD estimulada, tanto do feixe de bombeamento quanto do feixe auxiliar. Não havia, até o momento, nenhum estudo realizado sobre conservação do MAO em processos paramétricos intracavidade, ou seja, em osciladores paramétricos óticos.

Alguns estudos foram realizados explorando o caráter multimodo transversal de OPO's, mostrando a formação de padrões e imagens quânticas em cavidades com meios não-lineares degeneradas transversalmente, seja em cavidades planas [104, 105] ou esféricas [106, 107]. Experimentalmente, observou-se padrões em uma cavidade confocal [108] e concêntrica [109]. Também foram exploradas diferentes configurações de cavidades esféricas [110].

Recentemente foi mostrado por Kaled Dechoum e Peter Drummond [111] que o comportamento das correlações para um OPO com cavidade plana, ou seja, completamente degenerada, tem a mesma universalidade de transições magnéticas de Lifshitz. Deste modo, pequenas dessintonias para ressonância de sinal e complementar produzem modulações espaciais das correlações.

Neste trabalho realizamos um estudo da transferência do MAO em um OPO tipo II, não degenerado. Para tanto, bombeamos o OPO acima do limiar, com o feixe de bombeamento preparado no modo de Laguerre com MAO( $LG_0^{+1}$ ). Foram mostradas condições para que a transferência do MAO do bombeamento para os feixes convertidos ocorresse. Além disso, vimos que o astigmatismo, causado pela birrefringência do cristal, tem um papel fundamental neste processo.

Com base neste astigmatismo, um modelo teórico é proposto, cujos resultados estão em ótimo acordo com o experimento.

### 5.2.1 Experimento

Este experimento foi realizado no Laboratório de Manipulação Coerente de Átomos e Luz, no IF-USP - SP, numa colaboração com os professores Paulo Nussenzveig e Marcelo Martinelli.

O esquema experimental é mostrado na figura 5.2, onde uma montagem tradicional de OPO é utilizada. A cavidade é composta por dois espelhos esféricos  $M_1$  e  $M_2$  com raios de curvatura idênticos, medindo  $R_e = 13 \text{ mm}$ . O cristal utilizado é um KTP de fabricação francesa (Cristal Laser) cortado para casamento de fase do tipo II, para os comprimentos de onda de  $532 - 1064 \text{ nm}$  à temperatura ambiente, não havendo, portanto, controle de temperatura para o cristal.

Os eixos cristalográficos são orientados de maneira que o eixo  $Z$  está na direção vertical. A propagação se dá no plano horizontal  $(x, y)$ , fazendo um ângulo  $\phi = 23.5^\circ$  com o eixo  $x$ .

Os espelhos são tratados para fornecerem alta reflexão para o infravermelho ( $R_{IR} = 99,8\% @ 1064 \text{ nm}$ ) e uma pequena transmissão para o verde ( $R_V = 92\% @ 532 \text{ nm}$ ). Teremos portanto uma cavidade de grande Finesse para o infra (IR) e larga para o bombeamento. A escolha destes espelhos visa minimizar o limiar de oscilação,

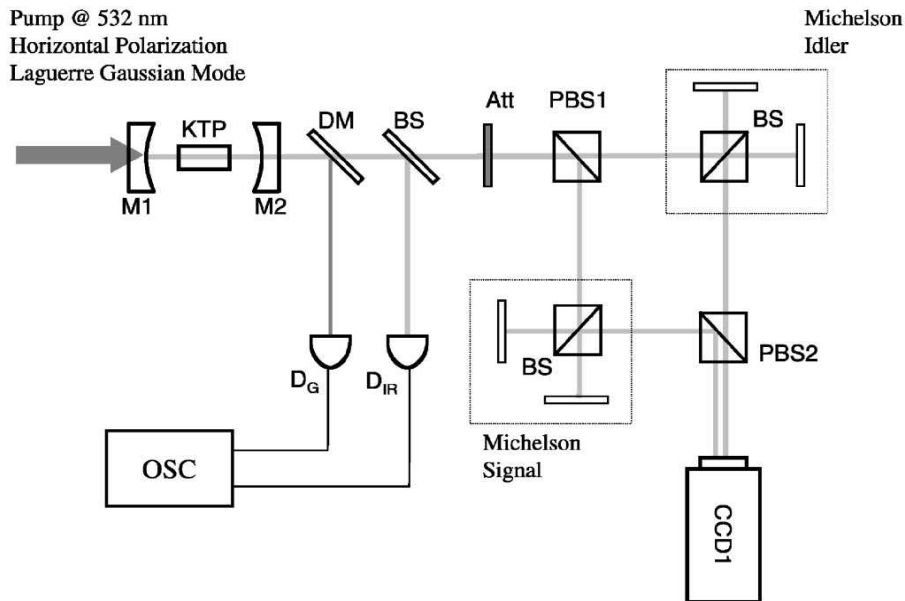


Figura 5.2: *Esquema experimental do OPO tipo II, bombeado por um modo LG. O conversor de modos, discutido na seção 3.3.2, não é mostrado na figura.*

já que nosso estudo não abordará nenhum aspecto quântico. Não faremos nenhum estudo do ruído de sinal e complementar, pois com tão pouca transmissão dos feixes convertidos não observaríamos uma redução de ruído conclusiva. Trataremos apenas da troca de MAO na oscilação paramétrica, observando a intensidade e os aspectos transversos dos feixes sinal e complementar.

As perdas do cristal são, principalmente, devidas às reflexões nas faces do cristal. Estas perdas são minimizadas com tratamento anti-reflexão ( $R = 0.1\% @ 1064nm$  e  $R = 0.5\% @ 532nm$ ). A absorção do cristal na faixa do infravermelho é pequena (0.005 %), enquanto o bombeamento sofre a absorção devido ao efeito do "gray-tracking"[100].

O laser de bombeamento é o laser comercial de Nd:YAG, com dobramento de frequência, fabricado pela empresa americana LightWave. Seu comprimento de onda é de 532 nm e tem polarização horizontal(extraordinária) Preparamos o bombea-

mento no modo de Laguerre com carga topológica  $l = 1$  ( $LG_0^1$ ). Para tanto utilizamos o conversor astigmático descrito detalhadamente no capítulo 3. Obtivemos um modo de ótima simetria cilíndrica, como podemos verificar na figura 5.3 a). Para comprovar a existência de MAO realizamos uma interferência com o feixe de bombeamento em um interferômetro de Michelson para observar os defeitos topológicos mostrados da figura 5.3 b). O resultado final é um vórtice ótico de 60 *mW* de potência com polarização extraordinária (horizontal).

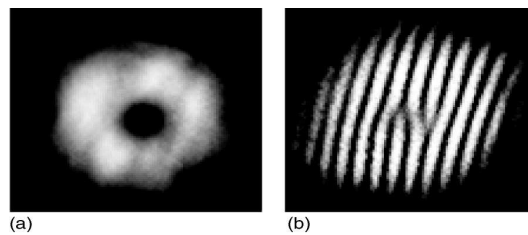


Figura 5.3: a) *Perfil de intensidade do feixe de bombeamento gerado no conversor.* b) *Padrão de interferência com bifurcações: Assinatura do MAO.*

O comprimento da cavidade é controlado por uma cerâmica piezoelétrica (PZT). Como estaremos lidando com modos transversos de ordens mais altas, escolhemos uma configuração da cavidade próxima à confocalidade. O feixe de bombeamento entra pelo espelho  $M_1$  e sai pelo espelho  $M_2$  sendo refletido por um espelho dicróico (DM) que envia o feixe para um fotodiodo de Si, amplificado ( $D_G$ ), cujo sinal é lido em um osciloscópio digital. Observamos os feixes IR que saem pelo espelho  $M_2$ , tomando parte dos feixes convertidos por meio de um divisor de feixes (BS)10/90. Esta pequena parcela é detectada (sinal+complementar) por um fotodiodo de InGaAs  $D_{IR}$  (ETX-300 - EPITAXX). O sinal é enviado ao segundo canal do osciloscópio, o que nos permite monitorar simultaneamente as ressonância do bombeamento e dos feixes convertidos.

Os feixes sinal e complementar, tendo polarizações ortogonais, são separados por um cubo polarizador (PBS1). Vamos adotar a convenção usual para um OPO tipo II:

O feixe sinal tem a polarização vertical (ordinária), alinhada com o eixo  $z$  do cristal, e o feixe complementar tem sua polarização horizontal (extraordinária). Cada feixe convertido é enviado a um interferômetro de Michelson, feitos com um divisor de feixes 50/50, não polarizador, e dois espelhos planos, de modo que podemos obter franjas de interferência e investigar a existência de singularidade de fase em sinal e complementar. Este arranjo nos permite obter facilmente o perfil de intensidade, bloqueando um dos espelhos do interferômetro. As saídas de cada Michelson são recombinadas em um segundo cubo polarizador e enviadas a uma câmera digital (CCD), onde registramos os perfis de intensidade e os padrões de interferência.

A intensidade dos feixes de bombeamento e convertidos que são transmitidos pela cavidade é medida nos detetores  $D_G$  e  $D_{IR}$ . Quando o comprimento da cavidade é varrido pelo PZT, os picos de ressonância correspondentes são mostrados na figura 5.4. Como a ressonância do bombeamento é mais larga, foram observadas 4 ressonâncias para os feixes convertidos. Podemos observar a redução do bombeamento coincidente com a ressonância do IR, cujas curvas de redução ampliadas têm uma forma parabólica, em concordância com o esperado para um OPO triplamente ressonante [94]. Da finesse do bombeamento, inferimos, para este, uma perda de 29%. As perdas do IR podem ser obtidas ajustando as formas parabólicas da redução do bombeamento à curva de Airy [112], para nossos resultados obtivemos um valor de 1%. O limiar de oscilação, nestas condições, ficou em torno de 20  $mW$ .

Controlando a tensão manualmente, através de um controle fino, podemos nos colocar em qualquer um dos 4 picos de ressonância do IR, com o OPO ficando estabilizado por 10 minutos. Assim registramos os perfis transversos de sinal e complementar, bem como seus padrões de interferência. As imagens são apresentadas na figura 5.5. Elas são identificadas com números que indicam os picos de ressonância correspondentes (Figura 5.4). À direita nós temos o feixe sinal, e à esquerda o complementar.

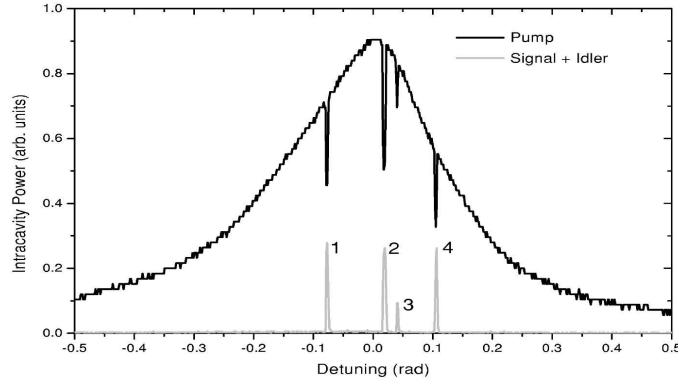


Figura 5.4: *Picos de ressonância do bombeamento (largo) e dos feixes convertidos (sinal + complementar) quando o comprimento da cavidade é varrido. Os picos de ressonância do IR são numerados a fim de identificar as imagens da figura. 5.5*

Nas imagens 1 e 4, constatamos que o feixe complementar tem o perfil do modo de Laguerre, ainda mais simétrico que o bombeamento, já que sofre uma filtragem espacial na cavidade. As franjas de interferência evidenciam a presença da singularidade de fase pelos defeitos topológicos, claramente observados.

Na imagem 2, o feixe complementar apresenta um perfil transversal intermediário entre um Laguerre-Gaussiano de primeira ordem e um Hermite-Gaussiano diagonal de primeira ordem. Os defeitos topológicos continuam presentes no padrão de interferência, mostrando que o feixe ainda possui MAO. Podemos interpretar este resultado segundo a esfera de Poincaré para os modos de LG, discutida no capítulo 3. Este modo seria o análogo orbital de uma polarização elíptica. Nestes três casos o feixe sinal oscila no modo fundamental, indicando a transferência do MAO e a conservação da carga topológica no processo.

Um efeito muito interessante aparece na imagem 3, quando o feixe sinal oscila com o modo transversal de ordem superior, contudo, sem MAO. O modo transversal do sinal é um modo de Hermite puro ( $TEM_{01}$ ), verticalmente orientado, enquanto o feixe complementar oscila no modo fundamental. Assim, o MAO não é conservado

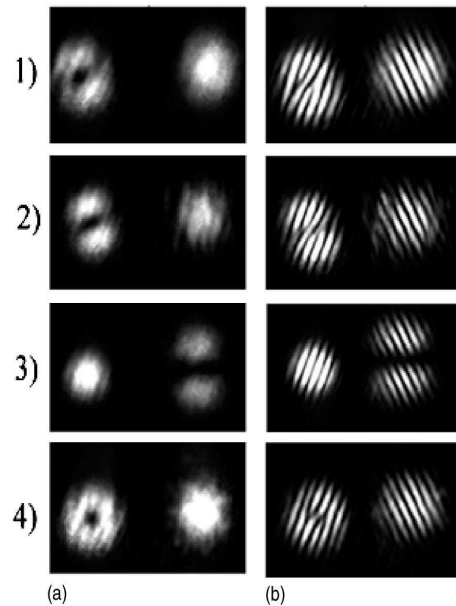


Figura 5.5: a) Perfil de intensidade de sinal (direita) e complementar (esquerda). Os feixes são numerados de acordo com os picos de ressonância da figura 5.4. b) Padrões de interferência revelando, ou não, a presença de singularidade de fase.

no processo de CPD, sendo esperado que o cristal receba um pequeno torque. Este efeito é análogo ao torque mecânico sofrido por uma placa de onda, usada para conversão de polarização da luz [113].

A razão desta assimetria na conservação do MAO do bombeamento pode ser explicada quando a propagação de feixes paraxiais em um meio anisotrópico é investigada. A cavidade astigmática resultante dos espelhos esféricos e do cristal irão selecionar os modos que podem oscilar. No apêndice A apresentamos um estudo detalhado da propagação em um cristal biaxial, que nos auxiliará na análise da cavidade astigmática, que passamos a descrever.

## 5.2.2 Cavidade Astigmática

Quando os efeitos da birrefringência do cristal são considerados, a equação de onda paraxial pode ser expressa com a introdução de coordenadas espaciais re-escaladas. Todos os termos de re-escalamento podem ser escritos em termos de um número de onda efetivo  $k_{ef}$ . Como podemos ver no Apêndice A, podemos escrever as equações paraxiais da seguinte forma

$$\partial_y^2 U(x, y) = 2ik_{ef}\partial_x U(x, y), \quad (5.30)$$

cujas soluções normalizadas são dadas por [43]

$$U(x, y) = \left( \frac{k_{ef}x_R}{\pi 2^{2n} n!^2 (x^2 + x_R^2)} \right)^{\frac{1}{4}} H_n \left( y \sqrt{\frac{k_{ef}x_R}{x^2 + x_R^2}} \right) \times \exp \left[ -i \frac{k_{ef}y^2}{2(x + ix_R)} - i \left( n + \frac{1}{2} \right) \arctan \left( \frac{x}{x_R} \right) \right], \quad (5.31)$$

onde  $x_R$  é o comprimento de Rayleigh,  $H_n(x)$  é o polinômio de Hermite de ordem  $n \geq 0$ . O termo

$$\left( n + \frac{1}{2} \right) \arctan \left( \frac{x}{x_R} \right), \quad (5.32)$$

é a conhecida fase de Gouy. Como vemos, ela depende da ordem  $n$  do modo transversal. A propagação do feixe é caracterizada pela cintura do feixe  $w_0 = \sqrt{2x_R/k_{ef}}$  e pelo raio de curvatura  $R(x) = x(1 + x_R^2/x^2)$ . A mudança para o número de onda efetivo é equivalente (em termos da difração do feixe) a uma propagação em uma distância mais curta no espaço livre. Como  $k_{ef}$  depende da polarização e da direção transversal, podemos considerar comprimentos de propagação diferentes para cada feixe convertido.

Consideremos agora os índices de refração do cristal de KTP dados pelo fabricante (Cristal Laser). Para  $1064nm$ , temos

$$n_x = 1.7404, \quad n_y = 1.7479, \quad n_z = 1.8296,$$



e para  $532nm$

$$n_x = 1.7797, \quad n_y = 1.7897, \quad n_z = 1.8877.$$

Os índices de refração para a polarização ordinária  $n_o$  nos dois comprimentos de onda, serão os mesmos índices  $n_z$ . Para a polarização extraordinária teremos  $n_e = 1.7467(1064 \text{ nm})$  e  $n_e = 1.7881(532 \text{ nm})$ .

Podemos calcular o comprimento efetivo da cavidade para cada polarização, levando-se em conta o comprimento livre  $L_0 = 17.4mm$  da cavidade e o comprimento  $l = 10mm$  do cristal. Usando a relação

$$L = L_0 - l \frac{k_{ef} - k_0}{k_{ef}}, \quad (5.33)$$

obtemos , dados os  $k_{ef}$  definidos por A.14 e A.19, os seguintes valores

$$L_{y'}^o = 12.87mm, \quad L_z^o = 13.40mm, \quad L_{y''}^e = 13.17mm, \quad L_z^e = 13.12mm. \quad (5.34)$$

O índice  $o(e)$  indica a polarização ordinária (extraordinária). Os comprimentos de Rayleigh, dados por  $x_R^2 = L^2(2R_e - L)/4$ , têm uma diferença menor que 1%, para as diferentes polarizações, e podem, neste caso, ser considerados idênticos.

Por outro lado, a fase de Gouy acumulada em um volta completa na cavidade, definida como

$$\Phi = 4 \arctan \left( \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{2R_e - L}} \right), \quad (5.35)$$

será, para cada polarização e em cada direção, igual a

$$\Phi_{y'}^o = 3.122rad, \quad \Phi_z^o = 3.204rad, \quad \Phi_{y''}^e = 3.167rad, \quad \Phi_z^e = 3.161rad. \quad (5.36)$$

A fase total ganha em uma volta completa, depende da ordem do modo  $TEM_{mn}$ . Esta fase é definida como

$$\Phi = \left(m + \frac{1}{2}\right) \Phi_z + \left(n + \frac{1}{2}\right) \Phi_y. \quad (5.37)$$

Como podemos constatar, a partir dos valores da equação (5.36), há uma diferença de fase entre os modos  $TEM_{01}$  e  $TEM_{10}$ . Esta diferença acarretará em uma separação da posição dos picos de ressonância destes modos. Para o comprimento de onda de  $1064 \text{ nm}$ , a separação é de  $82 \text{ mrad}$ , para polarização ordinária (do feixe sinal) e de  $6 \text{ mrad}$  para a polarização extraordinária (do feixe complementar).

Para estudarmos esta separação na ressonância dos modos, estudamos a ressonância do feixe de bombeamento, preparado no modo de LG, em uma cavidade OPO de alta Finesse para o  $532 \text{ nm}$ , conforme indica a figura 5.6. Como vimos no capítulo 3, o modo LG de primeira ordem é uma superposição dos modos  $TEM_{01}$  e  $TEM_{10}$ . Logo, varrendo-se o comprimento da cavidade, um único pico de ressonância é esperado quando os dois modos  $TEM$  são degenerados. Caso não sejam degenerados, dois picos de ressonância devem aparecer.

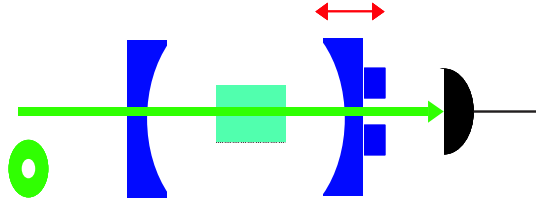


Figura 5.6: *Esquema de verificação da quebra de degenerescência das componentes HG do modo de Laguerre.*

Na figura 5.7 são apresentados as medidas realizadas para a ressonância do bombeamento, com as duas polarizações. Em 5.7 a), observamos um único pico de ressonância para o bombeamento com a polarização usada no experimento (extraordinária). Uma separação de  $8 \text{ mrad}$  é esperada para este comprimento de onda, bem

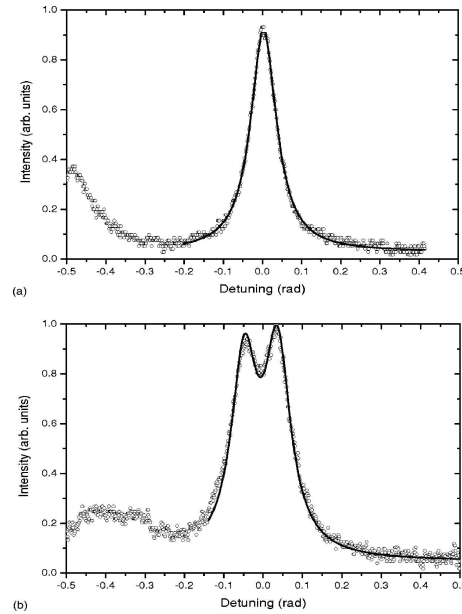


Figura 5.7: *Pico de ressonância do bombeamento com a) polarização horizontal (extraordinária) e b) polarização vertical (ordinária). No segundo caso temos dois picos de ressonância, indicando que a simetria entre as componentes HG do modo LG foi quebrada.*

abaixo da resolução da cavidade usada para esta medida. Giramos a polarização do bombeamento, de modo a iluminarmos o OPO com polarização ordinária. Como podemos verificar em 5.7 b), dois picos aparecem separados de  $88 \text{ mrad}$ , em boa concordância com os  $93 \text{ mrad}$  esperados para este comprimento de onda.

Desta análise, concluímos que o OPO permite a oscilação do modo LG para polarização extraordinária, para a qual os modos HG possuem uma frequência de ressonância degenerada (ou quase degenerada). Para a polarização ordinária, não é possível a oscilação no modo LG, pois, para este caso, suas componentes HG não são ressonantes simultaneamente. Isto explica o resultado da figura 5.5, onde o MAO é transferido do bombeamento (onda extraordinária) para o complementar (onda extraordinária), mas não é transferido para o sinal (onda ordinária).

É importante notar que sob nossas condições experimentais, somente um dos modos convertidos oscila em um modo de ordem transversa maior, enquanto o outro sempre oscila no modo fundamental.

A troca de MAO do bombeamento para sinal e complementar é governada pela dinâmica da cavidade, afetada pela anisotropia do cristal, envolvendo aspectos de polarização e modos transversos. Com estes ingredientes, propusemos um modelo teórico para este sistema, que passamos a descrever. Exploramos a dinâmica de modos transversos em OPO's.

### 5.2.3 Modelo Teórico

A operação multimodo transverso em OPO's foi estudada em [115]. O bombeamento pode excitar diferentes modos da cavidade para sinal e complementar, mas, em geral, somente os pares com menor limiar irão oscilar. Neste sentido, modos com melhor recobrimento podem oscilar. Para estender este estudo ao nosso experimento precisamos levar em conta o "walk-off" e o astigmatismo imposto pelo cristal. Como vimos, este astigmatismo introduz uma defasagem entre as duas componetes HG do modo LG.

Levando-se em conta a estrutura gaussiana do campo eletromagnético, podemos escrever

$$E_i(\vec{r}, z) = \sum_{m,n} A_{m,n}^i(z) u_{m,n}(\vec{r}, z)^i e^{ik_i z}, \quad (5.38)$$

onde  $A_{m,n}^i(z)$  é a amplitude do campo, dependente de  $z$ , à frequência  $\omega_i$ ;  $u_{m,n}(\vec{r}, z)$  são os modos transversos à mesma frequência, sendo  $\vec{r}$  a coordenada transversa.

Para tratar este problema, podemos escolher tanto a base dos modos LG, onde o astigmatismo acopla entre si os modos com carga topológica  $l = \pm 1$ , ou seja, modos que giram à direita e à esquerda. Na base de Hermite o astigmatismo implica em

dessintonias diferentes entre os modos  $TEM_{01}$  e  $TEM_{10}$ . Escolhemos trabalhar com a base de Hermite, mas a passagem para a base de Laguerre é feita diretamente.

Em qualquer base,  $u_{m,n}(\vec{r}, z)$  são soluções da equação de Helmholtz, na aproximação paraxial:

$$\nabla_{\perp}^2 u_{m,n}(\vec{r}, z) + 2ik_i \frac{\partial}{\partial z} u_{m,n}(\vec{r}, z) = 0 \quad (5.39)$$

onde  $\nabla_{\perp}^2$  é o Laplaciano transversal.

A propagação do campo eletromagnético em um meio não linear é descrita, na aproximação paraxial, por

$$\nabla_{\perp}^2 E_i(\vec{r}, z) + 2ik_i \frac{\partial}{\partial z} E_i(\vec{r}, z) = -\omega_i \mu_0 P_{NL}^i e^{ik_i z}, \quad (5.40)$$

sendo  $P_{NL}^i$  a polarização não linear à frequência  $\omega_i$ .

Assim, substituindo a expressão para o campo (5.38) em (5.40), levando-se em conta (5.39) temos

$$\frac{d}{dz} A_{m,n}^i = \frac{i\omega_i \mu_0}{2k_i} \int \int d^2r u_{m,n}^*(\vec{r}, z) P_{NL}^i e^{-ik_i z}. \quad (5.41)$$

Como vimos, a polarização linear é dada por

$$\begin{aligned} P_{NL}^0 &= \epsilon_0 \chi_0^2 E_1(\vec{r}, z) E_2(\vec{r}, z) e^{i(k_1+k_2)z}, \\ P_{NL}^{1,2} &= \epsilon_0 \chi_{1,2}^2 E_0(\vec{r}, z) E_{1,2}^*(\vec{r}, z) e^{i(k_0-k_{1,2})z}, \end{aligned} \quad (5.42)$$

onde  $\chi_i^2$  é a componente do tensor de susceptibilidade para frequência  $i$ , que pode ser 0, 1, 2, para bombeamento, sinal e complementar respectivamente.

Escrevendo os campos, segundo (5.38), temos

$$\begin{aligned} E_0 &= \sum_{p,l} A_{p,l}^0(z) u_{p,l}^0(\vec{r}, z), \\ E_1 &= \sum_{q,m} A_{q,m}^1(z) u_{q,m}^1(\vec{r}, z), \\ E_2 &= \sum_{p,l} A_{p,l}^2(z) u_{p,l}^2(\vec{r}, z), \end{aligned} \quad (5.43)$$

que substituídos em (5.41) resulta

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} A_{p,l}^0 &= \frac{i\omega_0 \chi^2}{n_0 c} \sum_{qm, rn} [\Lambda_{pqr}^{lmn}]^* A_{qm}^1(z) A_{rn}^2(z) e^{i\Delta k z}, \\ \frac{d}{dz} A_{q,m}^1 &= \frac{i\omega_1 \chi^2}{n_1 c} \sum_{pl, rn} [\Lambda_{pqr}^{lmn}] A_{qm}^1(z) A_{rn}^2(z) e^{-i\Delta k z}, \end{aligned} \quad (5.44)$$

$$\frac{d}{dz} A_{r,n}^2 = \frac{i\omega_2 \chi^2}{n_2 c} \sum_{pl, qm} [\Lambda_{pqr}^{lmn}] A_{qm}^1(z) A_{rn}^2(z) e^{-i\Delta k z}, \quad (5.45)$$

onde  $\Delta k$  é o desacordo de fase e

$$\Lambda_{pqr}^{lmn} = \int \int d^2 r u_{p,l}^0(\vec{r}, z) u_{q,m}^{1*}(\vec{r}, z) u_{r,n}^{2*}(\vec{r}, z). \quad (5.46)$$

$\Lambda_{pqr}^{lmn}$  é o coeficiente de acoplamento entre os diferentes modos transversos e representa o recobrimento espacial entre os modos  $TEM_{p,l}$ ,  $TEM_{q,m}$  e  $TEM_{r,n}$ . Esta é a conhecida integral de recobrimento.

O somatório sobre todos os modos transversos acaba sendo limitado. O bombeamento, por exemplo, é preparado no modo  $LG_{0,1}$ , o que, na base de Hermite, limita aos modos de primeira ordem  $TEM_{0,1}^0$  e  $TEM_{1,0}^0$ . Desta maneira, a integral de recobrimento (5.46) somente terá um valor significativo para poucas combinações. Nos limitaremos às combinações entre modos transversos até, no máximo, a primeira ordem.

Vamos introduzir uma nova notação que facilite a discussão dos modos transversos, dando à função  $u$  dois índices:  $u_{jk}(\vec{r}, z)$ , onde  $j = b, s, c$ , com  $b$  para bombeamento,  $s$  para sinal e  $c$  para complementar. O outro índice recebe  $k = 0, h, v$  para diferenciar os modos transversos, sendo 0 para o modo  $TEM_{00}$ ,  $h$  o modo  $TEM_{10}$  e  $v$  o modo  $TEM_{01}$ . A integral de recobrimento se escreve

$$\Lambda_{lmn} = \int \int \int d^3 r u_{bl}(\vec{r}, z) u_{sm}^*(\vec{r}, z) u_{cn}^*(\vec{r}, z)^1, \quad (5.47)$$

<sup>1</sup>Devido a intereação não linear deve-se realizar a integração em todo o volume do cristal.

com  $l, m, n$  assumindo  $0, v, h$ .

Conforme procedimento da referência [115], obtemos as equações dinâmicas para as amplitudes dos modos transversos, para as várias combinações possíveis. Observamos que na integral de recobrimento ocorre uma seleção de paridade, que é afetada em meios anisotrópicos, principalmente pelo "walk-off". Temos desta forma valores não nulos para combinações ímpares, como  $(v, 0, 0)$  ou  $(v, v, v)$ , mas que resultam, na realidade, valores muito menores que combinações pares como  $(v, v, 0)$  ou  $(h, h, 0)$ . Este fato nos permite desprezar muitos acoplamentos de modos, restringindo o número de equações dinâmicas.

Experimentalmente observamos dois tipos de operação: O feixe sinal oscilando no modo fundamental, enquanto o complementar oscila no subespaço dos modos  $TEM_{01}$  e  $TEM_{10}$  (picos 1, 2 e 4 da figura 5.5), ou o feixe complementar oscila no modo fundamental (pico 3). Vamos descrever estes regimes separadamente.

### A: Feixe sinal operando no modo $TEM_{00}$

Neste caso, o conjunto de equações dinâmicas para o bombeamento, sinal e complementar são

$$\begin{aligned}
\tau \frac{da_{bv}}{dt} &= -[\gamma_b + i(\Delta_b + \sigma_b)] a_{bv} - ig\Lambda_{v0v}^* a_{s0} a_{cv} + \frac{E_{in}}{\sqrt{2}}, \\
\tau \frac{da_{bh}}{dt} &= -[\gamma_b + i(\Delta_b - \sigma_b)] a_{bh} - ig\Lambda_{h0h}^* a_{s0} a_{ch} + i \frac{E_{in}}{\sqrt{2}}, \\
\tau \frac{da_{s0}}{dt} &= -(\gamma + i\Delta_s) a_{s0} + ig\Lambda_{v0v} a_{bv} a_{cv}^* + ig\Lambda_{h0h} a_{bh} a_{ch}^*, \\
\tau \frac{da_{cv}}{dt} &= -[\gamma + i(\Delta_c + \sigma_c)] a_{cv} + ig\Lambda_{v0v} a_{bv} a_{s0}^*, \\
\tau \frac{da_{ch}}{dt} &= -[\gamma + i(\Delta_c - \sigma_c)] a_{ch} + ig\Lambda_{h0h} a_{bh} a_{s0}^*.
\end{aligned} \tag{5.48}$$

Consideramos que as perdas são iguais para sinal e complementar. Os novos

elementos que aparecem nas equações 5.48 são as integrais de recobrimento  $\Lambda_{lmn}$  e as defasagens  $\sigma_j$ , que aparecem devido ao astigmatismo e que são calculadas a partir da equação 5.37. O bombeamento que é transmitido pelo espelho de entrada, é representado pelo termo de fonte  $E_{in}$ . Estando o bombeamento preparado no modo de Laguerre, os termos de fonte para as amplitudes  $a_{bv}$  e  $a_{bh}$  estão defasados de  $\pi/2$ .

As equações dinâmicas, bem como suas soluções estacionárias, são consideravelmente simplificadas se expressamos o tempo em unidades do tempo de ida e volta na cavidade  $\tau$ , e definimos as seguintes variáveis normalizadas:

$$\begin{aligned} b_{jk} &= g\Lambda_{000}\tau a_{jk}, & x_{in} &= g\Lambda_{000}\tau^2 E_{in}, & \eta_{lmn} &= \frac{\Lambda_{lmn}}{\Lambda_{000}}, \\ \tilde{\gamma}_j &= \gamma_j\tau, & \tilde{\Delta}_j &= \Delta_j\tau, & \tilde{\sigma}_j &= \sigma_j\tau. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Cálculos analíticos podem ser efetuados de maneira simples, considerando  $\Delta_s = \Delta_c = 0$  (ressonância de sinal e complementar),  $\sigma_b = \sigma_c = 0$  (desprezando o astigmatismo para polarização extraordinária) e as integrais de recobrimento normalizadas  $\eta_{v0v} = \eta h 0 h = \eta$  (que corresponde desprezar efeitos de "walk-off"). As soluções estacionárias serão obtidas a partir de

$$\begin{aligned} 0 &= -\left[\tilde{\gamma}_b + i\tilde{\Delta}_b\right] b_{bv} - i\eta b_{s0} b_{cv} + \frac{x_{in}}{\sqrt{2}}, \\ 0 &= -\left[\tilde{\gamma}_b + i\tilde{\Delta}_b\right] b_{bh} - i\eta b_{s0} b_{ch} + i\frac{x_{in}}{\sqrt{2}}, \\ 0 &= -\tilde{\gamma}_{s0} + i\eta b_{bv} b_{cv}^* + i\eta b_{bh} b_{ch}^*, \\ 0 &= -\tilde{\gamma}_{cv} + i\eta b_{bv} b_{s0}^*, \\ 0 &= -\tilde{\gamma}_{ch} + i\eta b_{bh} b_{s0}^*. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Neste caso, o MAO é transmitido para o feixe complementar, enquanto o feixe sinal oscila no modo fundamental. Escrevendo as amplitudes dos modos LG com



cargas topológicas  $l = \pm 1$ , temos

$$b_{j\pm} = \frac{b_{jv} \pm ib_{jh}}{\sqrt{2}}, \quad (5.51)$$

onde novamente,  $j = b, s, c$ .

As soluções estacionárias se escrevem então como

$$\begin{aligned} I_{b-} = I_{c-} = 0, \quad I_{b+} = \frac{\tilde{\gamma}^2}{\eta^2}, \\ I_{s0} = I_{c+} = I_0 \equiv \frac{\tilde{\gamma}}{\eta^2} \left[ \sqrt{\frac{\eta^2 x_{in}^2}{\tilde{\gamma}^2} - \tilde{\Delta}_b^2} - \tilde{\gamma}_b \right], \end{aligned} \quad (5.52)$$

onde  $I_{jk} = |b_{jk}|^2$ .

Obtemos o limiar de oscilação fazendo  $I_0 = 0$ , ficando com

$$x_L^2 = \frac{\tilde{\gamma}^2}{\eta^2} \left( \tilde{\gamma}_b + \tilde{\Delta}_b \right). \quad (5.53)$$

Mesmo com todas estas simplificações, estes cálculos dão uma boa estimativa das ordens de grandeza. Quando calculamos as integrais de recobrimento sem considerar o "walk-off" e o astigmatismo, encontramos  $\eta_{vv0} = \eta_{hh0}\eta_{v0v} = \eta_{h0h} = 0.71$ , aproximadamente, confirmando a aproximação feita. Quando levamos tudo em conta, encontramos  $\eta_{vv0} = 0.70$ ,  $\eta_{hh0} = 0.60$  e  $\eta_{v0v} \approx \eta_{h0h} \approx 0.71$ . Somente o termo  $\eta_{hh0}$  apresenta uma diferença significativa.

Considerando as perdas intracavidades estimadas anteriormente (29 % para o bombeamento e 1 % para os convertidos) calculamos  $\gamma_b = 145mrad$  e  $\gamma = 5mrad$ .

As defasagens devido ao astigmatismo estimadas para o bombeamento e complementar são muito pequenas, resultando  $\sigma_b = 4mrad$  e  $\sigma_c = 3mrad$  [O parâmetro de diferença de fase é definido como sendo a metade do valor calculado por (5.37)]. Estas pequenas diferenças de fase podem, contudo, causar a transferência parcial

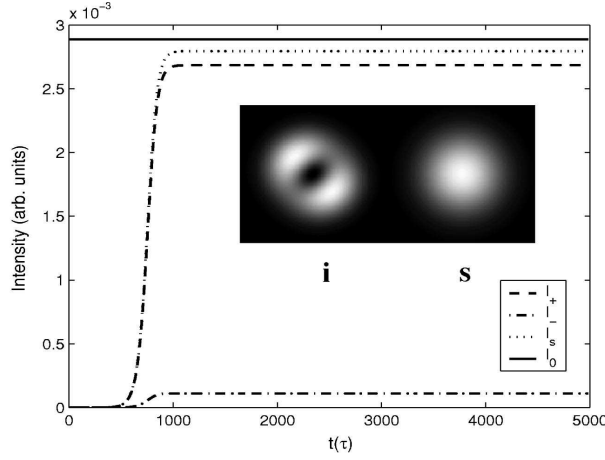


Figura 5.8: *Evolução temporal das intensidades dos feixes convertidos em unidades de tempo de uma volta completa na cavidade da equação 5.48. A imagem no interior é o perfil transversal esperado para sinal (s) e complementar (i). A linha cheia é o valor analítico calculado para estas intensidades*

do MAO, como sugere a imagem 2 da figura 5.5. Para verificar o efeito destas pequenas defasagens realizamos a integração até o estado estacionário das equações dinâmicas, utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem. Nestas simulações **não** fizemos as hipóteses simplificadoras do cálculo analítico. Na figura 5.8 esta evolução é apresentada juntamente com o valor estacionário  $I_0$ , obtido analiticamente. A imagem no interior mostra os perfis de intensidade esperados para o feixe sinal (s) e complementar (i). Observamos uma boa concordância qualitativa com os resultados experimentais correspondentes aos picos 1, 2 e 4 da figura 5.5. Os parâmetros utilizados nesta simulação das equações (5.48) foram  $\Delta_p = 0.071\gamma_p$ ,  $\Delta_s = 0$ ,  $\Delta_i = 1 \text{ mrad}$ ,  $\gamma_p = 145 \text{ mrad}$ ,  $\gamma = 5 \text{ mrad}$ ,  $\sigma_p = 4 \text{ mrad}$ ,  $\sigma_i = 3 \text{ mrad}$ ,  $E_{in} = 3E_L$  e  $\eta_{v0v} = \eta_{h0h} = 0.71$ .

**B: Feixe complementar operando no modo  $TEM_{00}$** 

As equações dinâmicas para este caso são

$$\begin{aligned}
\tau \frac{da_{bv}}{dt} &= -[\gamma_b + i(\Delta_b + \sigma_b)] a_{bv} - ig\Lambda_{vv0}^* a_{c0} a_{sv} + \frac{E_{in}}{\sqrt{2}}, \\
\tau \frac{da_{bh}}{dt} &= -[\gamma_b + i(\Delta_b - \sigma_b)] a_{bh} - ig\Lambda_{hh0}^* a_{c0} a_{sh} + i \frac{E_{in}}{\sqrt{2}}, \\
\tau \frac{da_{c0}}{dt} &= -(\gamma + i\Delta_c) a_{c0} + ig\Lambda_{vv0} a_{bv} a_{sv}^* + ig\Lambda_{hh0} a_{bh} a_{sh}^*, \\
\tau \frac{da_{sv}}{dt} &= -[\gamma + i(\Delta_s + \sigma_s)] a_{sv} + ig\Lambda_{vv0} a_{bv} a_{c0}^*, \\
\tau \frac{da_{sh}}{dt} &= -[\gamma + i(\Delta_s - \sigma_s)] a_{sh} + ig\Lambda_{hh0} a_{bh} a_{c0}^*.
\end{aligned} \tag{5.54}$$

A diferença de fase por astigmatismo aparece agora na dinâmica do feixe sinal, representada por  $\sigma_s$ . Para este caso, a diferença de fase é bem maior que no caso anterior, sendo igual a  $\sigma_s = 41mrad$ , valor bem maior que as perdas intracavidade normalizadas  $\gamma = 5mrad$ . Desta forma, é impossível que o OPO suporte a oscilação simultânea de  $h$  e  $v$ , necessária para composição do modo LG. Portanto, o MAO não é transferido neste caso. Através da sintonia da cavidade será selecionado o modo HG cuja ressonância é mais próxima da ressonância do complementar. Por exemplo, para  $\Delta_s = -\sigma_s$  apenas o modo  $v$  é ressonante, de modo que  $a_{sh} = 0$ . As soluções estacionárias da equação 5.54 podem ser obtidas utilizando-se as mesmas normalizações definidas nas equações 5.49. Vale notar que  $\eta_{hh0}$  não tem, neste caso, nenhuma influência na dinâmica, o que nos permite considerar apenas  $\eta_{vv0} = \eta$ . As soluções estacionárias ficam

$$\begin{aligned}
I_{sh} &= 0, & I_{bh} &= \frac{x_{in}^2/2}{\tilde{\gamma}^2 + \tilde{\Delta}_b^2} & I_{bv} &= \frac{\tilde{\gamma}^2}{\eta^2}, \\
I_{c0} = I_{sv} = I'_0 &\equiv \frac{\tilde{\gamma}}{\eta^2} \left[ \sqrt{\frac{\eta^2 x_{in}^2}{2\tilde{\gamma}^2} - \tilde{\Delta}_b^2} - \tilde{\gamma}_b \right].
\end{aligned} \tag{5.55}$$

A componente  $h$  do bombeamento não é acoplada com os feixes convertidos, de modo que sua solução é para uma cavidade vazia. Por outro lado, o valor de  $I'_0$  da

componente  $v$  do feixe sinal, bem como do modo fundamental do feixe complementar, apresentam um valor menor do que o obtido para  $I_0$ , no caso anterior, para uma mesma taxa de bombeamento. Isto corresponde ao caso do pico 3 da figura 5.4, o qual é claramente menor do que os demais.

O limiar será, novamente, obtido fazendo-se  $I'_0 = 0$ :

$$x_L^2 = \frac{2\gamma'^2}{\eta^2} (\gamma'_b + \Delta'_b). \quad (5.56)$$

Este valor é o dobro do obtido no caso anterior, onde o MAO é transferido para o feixe complementar, o que é também coerente com o fato do pico 3 ser menor que os demais.

A evolução numérica, com o Runge-Kutta quarta ordem, é realizada levando-se em consideração todos os parâmetros, como "walk-off" e astigmatismo. Os resultados são apresentados na figura 5.9. As imagens esperadas para sinal e complementar estão em ótimo acordo com os resultados experimentais.

Os parâmetros para simulação das equações 5.54 foram  $\Delta_p = 0.28\gamma_p$ ,  $\Delta_s = -41 \text{ mrad}$ ,  $\Delta_i = 0$ ,  $\gamma_p = 145 \text{ mrad}$ ,  $\gamma = 5 \text{ mrad}$ ,  $\sigma_p = 4 \text{ mrad}$ ,  $\sigma_s = 41 \text{ mrad}$ ,  $E_{in} = 1.5E_L$  e  $\eta_{vv0} = \eta_{hh0} = 0.70$

Estes resultados mostram que a transferência de MAO na CPD intracavidade é fortemente afetada por efeitos de anisotropia. A conservação somente será observada quando os modos transversos  $TEM_{01}$  e  $TEM_{10}$  são degenerados. Efeitos de astigmatismo podem remover esta degenerescência natural, impedindo a conservação do momento angular orbital.

Vimos que enquanto a onda extarordinária (complementar) sofre o "walk-off", o astigmatismo devido à propagação no cristal é fraco. Assim este feixe pode oscilar no modo de Laguerre, conservando o MAO. A onda ordinária, ao contrário, não

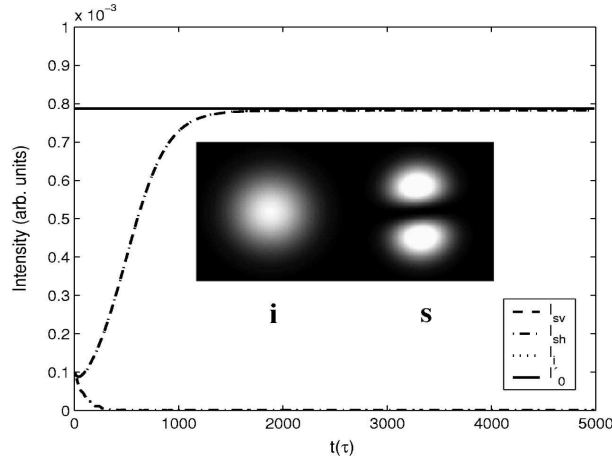


Figura 5.9: *Evolução temporal das intensidades dos feixes convertidos em unidades de tempo de uma volta completa na cavidade da equação 5.54. A imagem no interior é o perfil transversal esperado para sinal (s) e complementar (i). A linha cheia é o valor analítico calculado para estas intensidades.*

sofre "walk-off", mas possui um forte astigmatismo, impossibilitando a conservação da carga topológica.

### 5.3 OPO com auto-travamento de fase

Durante o período da tese foi realizado um estágio de doutorado sanduíche de um ano no Laboratoire Kastler Brossel (LKB), Paris, sob coordenação do professor Claude Fabre. Neste estágio foi possível explorar características quânticas do OPO. Mais particularmente, foram realizados estudos no experimento de geração de feixes EPR. Vale mencionar que o período do estágio coincidiu com a mudança do laboratório. Assim, depois dos primeiros 3 meses de trabalho, todo o experimento foi desmontado, para a posterior remontagem, o que foi feito com sucesso, como poderemos verificar ao longo desta seção.

Osciladores paramétricos óticos podem ser utilizados como uma fonte compacta

de feixes emaranhados [97, 98, 99]. No LKB, foi montado um experimento durante a tese de Julien Laurat que permitiu medidas recordes de separabilidade [99] com um OPO tipo II abaixo do limiar. Foi também realizado o primeiro estudo de flutuações de fase dos feixes gerados pelo OPO acima do limiar, utilizando-se a técnica de detecção homodina. Como é sabido, para utilização da detecção homodina é preciso que tenhamos a operação degenerada do OPO. O funcionamento degenerado, contudo, não é de fácil obtenção devido à difusão de fase dos feixes convertidos, já que no processo paramétrico a soma das fases é definida, mas não a diferença, ficando as fases individuais livres para difundir. Como mencionamos na introdução do capítulo, para obtenção da operação degenerada do OPO foi implementado o método de auto-travamento de fase, onde uma lâmina birrefringente é inserida na cavidade do OPO. Vamos discutir este método, omitindo, porém, riqueza de detalhes por motivo de concisão da tese. Um estudo detalhado pode ser encontrado em [99].

O acoplamento entre dois osciladores leva a uma sincronização entre eles, que passam a oscilar com a mesma frequência. Este efeito foi descrito pela primeira vez em 1665, por Christian Huygens, quando observou a sincronização de relógios suspensos por um suporte comum. Na ótica este processo é empregado na estabilização de um laser de grande potência, dito "escravo", por um laser "mestre", de raia fina que impõe ao primeiro a estabilidade. Para o oscilador paramétrico ótico é proposta, então, a inserção de uma lâmina birrefringente na cavidade para um OPO II [103] com seus eixos formando um pequeno ângulo com os eixos do cristal. Sendo as polarizações de sinal e complementar ortogonais, a lâmina produzirá um pequeno acoplamento entres estes modos que, se estiverem suficientemente próximos à degenerescência, terão suas fases travadas pelo acoplamento, operando de maneira degenerada. Este comportamento tem a mesma origem da "zona cega" dos giroscópio-laser. O batimento entre os campos contra-propagantes no giroscópio-laser é nulo numa região onde a velocidade angular da cavidade é relativamente

baixa.

O acoplamento deve ser feito entre os campos sinal e complementar, não afetando o campo de bombeamento. Considerando uma cavidade linear, é escolhida uma lâmina  $\lambda/4$  para  $1064 \text{ nm}$ , que devido a dupla passagem imposta pela cavidade linear, funciona como uma placa de onda  $\lambda/2$  para os feixes convertidos e como uma  $\lambda$  para o bombeamento, não alterando-o durante a passagem. Levando em conta um pequeno ângulo  $\rho$  entre os eixos da placa de onda e os eixos do cristal, as novas equações de acoplamento entre os campos intracavidade são [99]

$$\begin{aligned}(\gamma' - i\Delta_1) A_1 &= gA_0A_1^* + i2\rho e^{i(\theta-\psi)} A_2, \\(\gamma' - i\Delta_2) A_2 &= gA_0A_2^* + i2\rho e^{-i(\theta-\psi)} A_1,\end{aligned}\tag{5.57}$$

onde  $\theta$  é a birrefringência do cristal e  $\psi$  é a birrefringência da placa de onda. Note que os campos  $A_1$  e  $A_2$  estão acoplados pelo ângulo  $\rho$ . Este acoplamento dará origem ao travamento de fase. Quando  $\rho = 0$ , recuperamos as equações para os campos sem a presença da lâmina na cavidade.

O esquema experimental é mostrado na figura 5.10. O OPO é formado por uma cavidade semimonolítica. O espelho de entrada é depositado diretamente em uma das faces do cristal, com uma reflectância  $R = 95\%$  para o verde e  $R_{MAX}$  para o infra. O espelho de saída tem  $R_{MAX}$  para o bombeamento e uma transmissão  $T = 5\%$  para  $1064 \text{ nm}$ . O cristal utilizado foi um KTP tipo II, de fabricação israelense, da empresa Raicol. O feixe de bombeamento é obtido de um laser comercial de Nd:YAG, com frequência dobrada. O laser é do modelo "Diabolo" de fabricação da empresa alemã Innolight. Este modelo nos fornece duas saídas:  $500 \text{ mW}$  a  $532 \text{ nm}$ , utilizado para bombear o OPO e  $200 \text{ mW}$  a  $1064 \text{ nm}$ , utilizado como oscilador local. Um isolador ótico é colocado no caminho do bombeamento para evitar-se reinjeção e desestabilização do laser. A lâmina birrefringente é inserida na cavidade em um estágio de rotação com controle motor. Este controle do ângulo é automatizado, nos

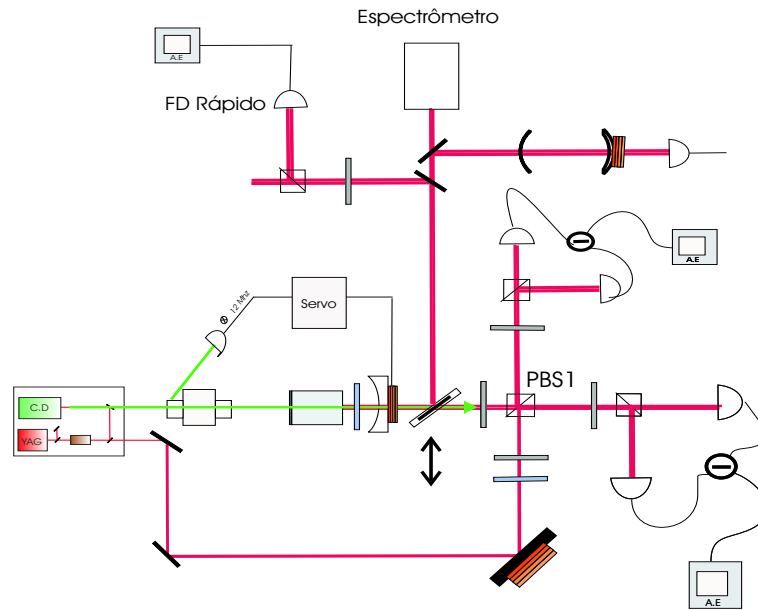
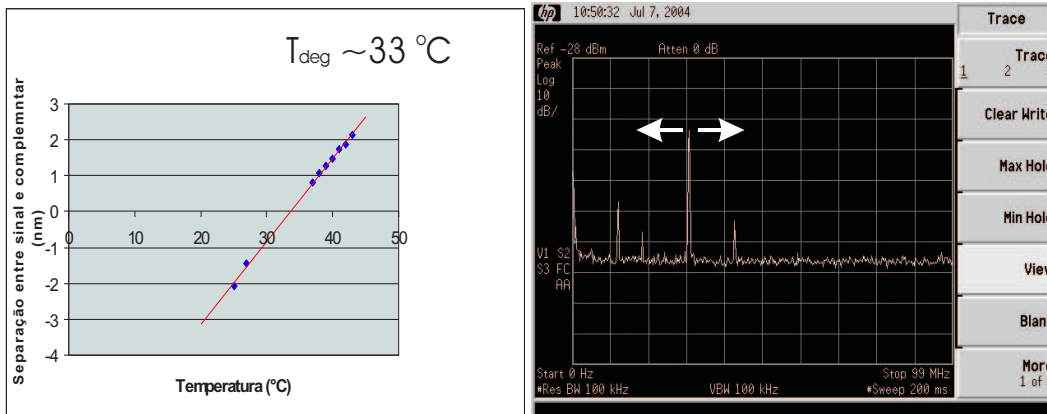


Figura 5.10: *Esquema experimental para o travamento de fase. Uma  $\lambda/4$  é inserida na cavidade. Com um espelho móvel, ora enviamos os feixes convertidos para um bloco de análise de frequência, ora enviamos para a dupla detecção homodina.*

permitindo uma resolução de  $0,01^\circ$ . O OPO é estabilizado eletronicamente e pode operar sem saltos de modo por aproximadamente 1 hora. A temperatura do cristal é controlada por um circuito PID de fabricação do próprio laboratório e tem uma precisão na casa do  $mK$ . Como dissemos, o auto-travamento de fase se dá quando o batimento entre sinal e complementar estiver perto da degenerescência, isto é, dentro de uma zona de frequência, chamada "zona de travamento", que por sua vez depende do ângulo da lâmina. Quanto maior for este ângulo, maior será a zona de travamento. Em geral trabalhamos com ângulos pequenos, pois se aumentamos muito o ângulo para facilitar o travamento de fase, levando à operação degenerada, este aumento tem por efeito a degradação da redução do ruído. Deve-se ter, assim, um compromisso entre operação degenerada e baixa degradação da redução do ruído. Um estudo detalhado deste problema para um ângulo qualquer é apresentado em [116, 117, 118].





a)

b)

Figura 5.11: a) Separação entre os comprimentos de onda de sinal e complementar em função da temperatura medida em um espectrômetro. b) Pico de batimento entre sinal e complementar medido pelo fotodiodo rápido.

Para nos colocarmos perto da degenerescência, fazemos, então, um estudo da temperatura de degenerescência ( $T_{DEG}$ ) do cristal, enviando sinal e complementar para um espectrômetro. Para isso utilizamos um espelho móvel, indicado pela dupla seta na figura 5.10. Medimos a diferença de comprimento de onda destes feixes variando-se a temperatura do cristal estimando, assim,  $T_{DEG}$ , como mostra a figura 5.11 a). Para o cristal utilizado no experimento esta temperatura é de aproximadamente  $33^{\circ}C$ . Este estudo é feito uma única vez, quando se usa um cristal novo. Caracterizada esta temperatura, iremos sempre encontrar a degenerescência em torno dela. Essa temperatura é diferente para cavidade com e sem lâmina, em geral quando introduzimos a lâmina  $T_{DEG}$  diminui de  $3^{\circ}C$ . Vale ressaltar que esta medida não é muito precisa, e mesmo nos colocando a esta temperatura não é garantido termos degenerescência.

Para garantir a degenerescência, monitoramos sinal e complementar com uma

cavidade Fabrit-Perot, confocal, que nos fornece dois picos de ressonâncias quando não estamos na degenerescência. Observamos, também, o batimento entre sinal e complementar com um fotodiodo rápido, que é sensível a uma frequência máxima de  $1\text{ GHz}$ . Este sinal é enviado para um analisador de espectro, onde se observa o pico de batimento entre os feixes convertidos, como mostrado na figura 5.12 b). Podemos controlar o pico de batimento variando a temperatura do cristal e a frequência do laser de bombeamento simultaneamente. Este batimento pode ser levado a zero, chegando à operação degenerada [99]. A figura 5.12 mostra o batimento indo a zero na função "MAXHOLD" do analisador de espectro <sup>1</sup>. Este estudo é feito na ausência da lâmina em 5.12 a) e com a lâmina inserida na cavidade em 5.12 b). Quando fazemos isto sem a lâmina na cavidade, o batimento vai a zero continuamente, e em poucos segundos evolui devido à difusão de fase. No caso da lâmina inserida, observamos a "zona de travamento" para a qual o batimento salta para o valor nulo bruscamente. Neste caso, o OPO continua operando degenerado enquanto estiver estabilizado. A cada vez que o OPO salta, é preciso encontrar novamente o batimento e levá-lo à degenerescência.

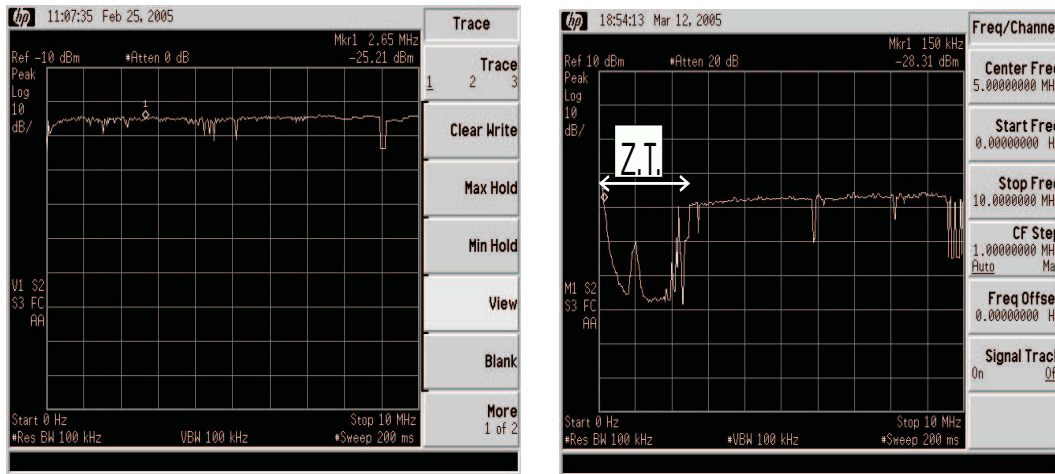
Com o OPO degenerado podemos alinhar a detecção homodina. A particularidade deste experimento é a utilização de uma dupla detecção homodina, que nos permite acessar simultaneamente as medidas do ruído de dois modos e assim obtemos uma medida direta do emaranhamento [99]. Vimos no capítulo 2, que dois modos emaranhados  $A_1$  e  $A_2$  podem ser convertidos em dois modos com redução de ruído em quadraturas ortogonais, definidos como

$$A_+ = \frac{A_1 + A_2}{\sqrt{2}}, \quad A_- = \frac{A_1 - A_2}{\sqrt{2}}. \quad (5.58)$$

O modo  $A_+$  é intenso e tem compressão de ruído na quadratura de fase, e o modo  $A_-$ , que tem sua intensidade praticamente nula, tem o ruído da quadratura

---

<sup>1</sup>Somente o valor máximo do pico é mostrado quando levamos o batimento a zero.



a)

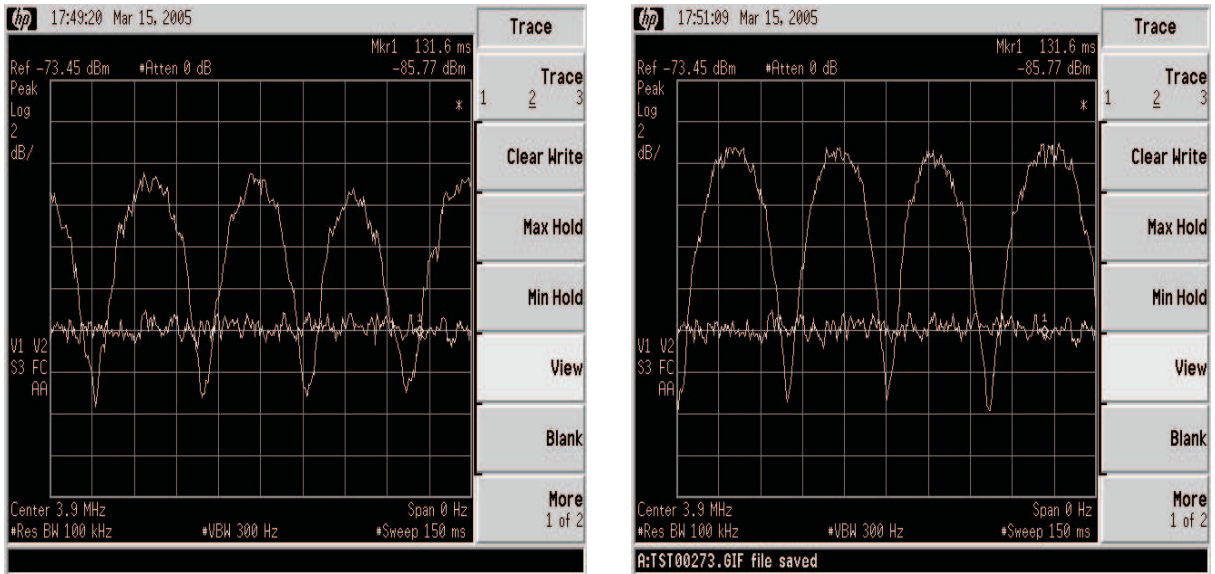
b)

Figura 5.12: *Batimento entre sinal e complementar observado na função "MAXHOLD". a) OPO sem a  $\lambda/4$  inserida: Batimento vai a zero continuamente. b) OPO com a  $\lambda/4$ : Aparecimento da zona de travamento (Z.T.)*

de amplitude comprimido.

Para obtermos estes modos experimentalmente utilizamos uma placa de meia onda a  $45^\circ$  em frente ao primeiro cubo polarizador (PBS1). Assim teremos nas duas portas de saída os modos desejados. Cada um deles é enviado para uma deteção homodina, formada por mais uma placa de meia onda e um cubo polarizador, que servem para equilibrar as intensidades em cada par de detetores. Outra particularidade é a utilização de um único oscilador local para as duas deteções. Neste caso é preciso assegurar que as deteções tenham a mesma referência de fase, o que pode ser obtido com o par de lâminas  $\lambda/2$  e  $\lambda/4$  antes do cubo que mistura oscilador local e feixes convertidos, corrigindo defeitos deste cubo.

As diferenças das fotocorrentes são feitas com circuitos de fabricação do próprio laboratório e cada qual dos respectivos sinais é enviado para um analisador de



a)

b)

Figura 5.13: Ruído das quadraturas dos modos  $A_+$  (a) e  $A_-$  (b) quando a fase do oscilador local é varrida.

espectro.

Com o OPO degenerado realizamos, então, o alinhamento do oscilador local, cuja a interferência com os feixes convertidos, quando a fase deste é varrida com um PZT, nos fornece franjas com uma visibilidade de 97%.

Realizamos medidas abaixo do limiar, varrendo a fase do oscilador local, observando simultaneamente o ruído dos modos  $A_+$  e  $A_-$  conforme mostra a figura 5.13. Fizemos esta medida para uma frequência de análise de 3 MHz, pois há o interesse do grupo em trabalhar com detectores com circuitos ressonantes para esta frequência, o que reduz o ruído eletrônico.

Como podemos observar temos uma redução do ruído de aproximadamente 3 dB

(50%) para as quadraturas de fase do modo  $A_+$  ( $Q_+$ ) e para a quadratura de amplitude do modo  $A_-$  ( $P_-$ ). Neste caso, podemos calcular diretamente a separabilidade de  $A_1$  e  $A_2$ , via critério de Duan [29], definido no capítulo 2. Temos assim

$$\Sigma = \frac{V(P_-)}{2} + \frac{V(Q_+)}{2} \geq 1, \quad (5.59)$$

onde  $P_- = P_1 - P_2$  é a diferença das quadraturas de amplitude dos modos  $A_1$  e  $A_2$ , e  $Q_+ = Q_1 + Q_2$  é a soma das quadraturas de fase.

Para nossos resultados temos, aproximadamente

$$\Sigma = 0,5, \quad (5.60)$$

violando, assim, a desigualdade de Duan e comprovando a inseparabilidade dos feixes convertidos. O recorde para a inseparabilidade foi obtido por Julien Laurat neste experimento, chegando a  $\Sigma = 0,3$ . Porém, foi utilizado um cristal diferente do nosso experimento. Os novos cristais recebidos para a montagem apresentavam uma rápida degradação ("gray-tracking"). O limiar praticamente dobrava quando todo alinhamento era terminado, justificando assim uma redução de ruído menor. Contudo, observando apenas um modo com uma única detecção homodina chegamos a medir uma redução de ruído de 4,5 dB.

Foram realizadas tentativas de medidas de compressão do ruído acima do limiar, levando à observação de um excesso de ruído de fase, conforme o obtido anteriormente neste experimento.

Mostramos na figura 5.14, fotos em dois momentos da remontagem: Em 5.14 a) o início da montagem, em 5.14 b) temos o experimento remontado e funcionando.

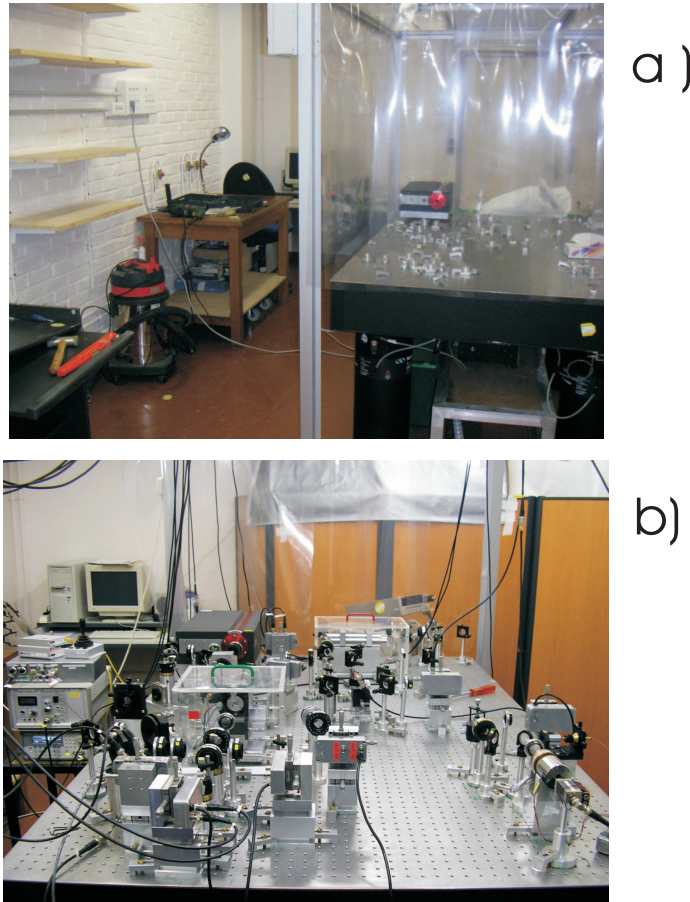


Figura 5.14: *Em a) foto do início da montagem. Em b) foto do experimento remontado.*

## 5.4 Perspectivas

Durante a tese foi montado o Laboratório de Ótica Quântica do IF-UFF, com financiamento do Instituto do Milênio de Informação Quântica. O laboratório foi construído do zero e sua evolução, em três anos, pode ser verificada na figura 5.15. Foram montados dois osciladores paramétricos óticos, que operam simultaneamente. Esta estrutura nos permitirá avançar no estudo da transferência do MAO, explorando propriedades quânticas deste sistema.

Um estudo preliminar foi realizado com um dos OPO's, constituído de dois es-



Figura 5.15: Apresentamos aqui a evolução da montagem do laboratório de ótica quântica do IF-UFF. Acima uma foto do laboratório no início da montagem. Abaixo uma foto da montagem 3 anos depois.



pelhos esféricos idênticos de raio  $R_e = 13\text{mm}$ . Realizamos um estudo com uma montagem semelhante àquela utilizada no estudo de transferência de MAO para um OPO tipo II, representada na figura 5.2. Tentamos observar a excitação de ordens transversas mais altas, bombeando o OPO muito acima do limiar. O cristal utilizado foi um KTP tipo II com tratamento anti-reflexão em sua faces. Este cristal é de fabricação da empresa lituana Altechna.SA. Os e coeficientes de reflexão dos espelhos são  $R = 92\% @ 532\text{ nm}$  e  $R = 99,8\% @ 1064\text{ nm}$ . Trabalhamos perto da confocalidade da cavidade para obtermos degenerescência transversa.

O bombeamento foi preparado no modo LG por um conversor astigmático, fornecendo uma potência de  $200\text{ mW}$  no modo LG. Varrendo-se o comprimento da cavidade observamos os picos de ressonância do bombeamento e dos convertidos. Na figura 5.16 mostramos uma ressonância do bombeamento com os diferentes picos de oscilação de sinal e complementar. O limiar de oscilação é de  $16\text{ mW}$ .

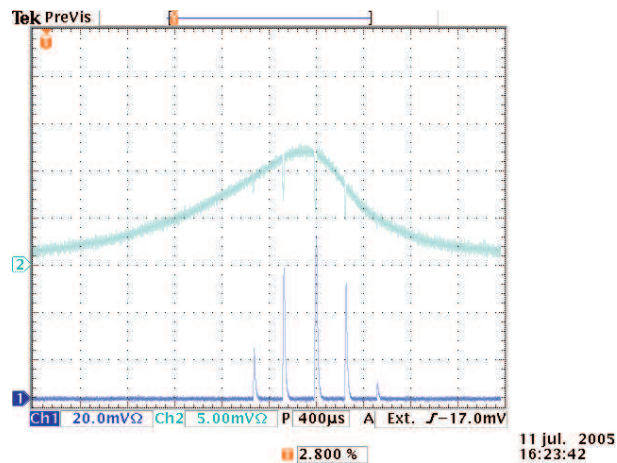


Figura 5.16: Picos de ressonância do bombeamento (*largo*) e dos feixes convertidos (*sinal + complementar*).

Bombeando o OPO com o modo fundamental  $TEM_{00}$ , obtemos sinal e complementar no modo fundamental, como mostra a primeira imagem da figura 5.17. Temos complementar (i) à direita e sinal(s) à esquerda. Bombeando o OPO com o



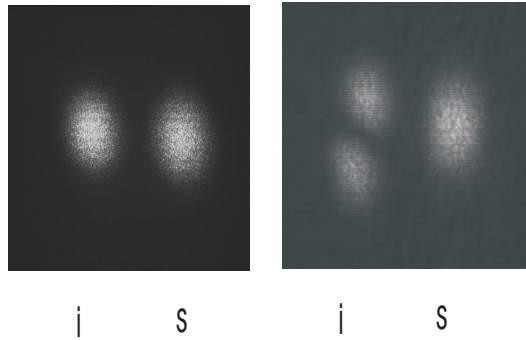


Figura 5.17: *Imagens de sinal (s) e complementar (i) para o bombeamento do OPO com o modo  $TEM_{00}$  (imagens à esquerda) e com o modo  $LG_0^1$  (imagens à direita).*

modo de LG obtemos o modo complementar (mesma polarização do bombeamento) operando no modo transversal de ordem mais alta. Observamos sempre o feixe complementar oscilando no modo HG. Portanto, não é observada a conservação do MAO como anteriormente. Nenhum outro regime de operação foi observado. Obtivemos sempre o resultado mostrado na segunda imagem da figura 5.17. Estamos aguardando a fabricação de um novo suporte para testarmos o cristal utilizado no experimento da USP em nossa cavidade. Astigmatismos remanescentes da cavidade podem estar impedindo a conservação do MAO. Nenhum outro modo transversal foi observado, mesmo bombeando o OPO 5 vezes acima do limiar.

Como continuidade, poderá ser realizado, a curto prazo, dois estudos muito interessantes. Um dos estudos é a injeção do OPO com um sinal preparado no modo LG. Poderá ser investigado se o MAO se conservará, ou não, neste processo. Recentemente estudos de OPO's com sinal injetado, tanto degenerado em frequência [119] quanto não degenerado [120], têm revelado interessantes saídas para preparação de estados emaranhados (feixes EPR). A injeção de vórtices óticos pode fornecer um ingrediente a mais neste estudo enriquecendo o sistema. Para realizar este estudo dispomos de um Laser "Diabolo", que é um laser cw de Nd:YAG (1064 nm) de

frequência dobrada (532 nm). Este modelo nos fornece a saída nos dois comprimentos de onda (300 *mW* no IR e 800 *mW* no verde). Podemos, então, utilizar esta saída no IR para injetar o OPO. Será utilizado um OPO com dois espelhos esféricos de alta refletividade para o IR, a fim de diminuir o limiar. Novamente, serão exploradas apenas propriedades clássicas, neste primeiro momento.

Outro trabalho a ser realizado é o estudo quântico da transferência de MAO no OPO. Pode-se medir, por exemplo, as correlações de intensidade com um dos feixes convertidos contendo MAO. Para este estudo foi montado um OPO tipo II semi-monolítico, onde um dos espelho é depositado diretamente na face do cristal. Esta montagem oferece mais estabilidade, diminuindo vibrações mecânicas da cavidade. O prosseguimento deste trabalho aguarda a confecção de um sistema de estabilização de temperatura, para que a operação do OPO seja a mais estável possível.

A médio prazo poderá ser realizado o estudo das flutuações das quadraturas, ou implementando-se a detecção homodina, ou realizando-se a auto-homodinação. Vemos assim, que a situação em fim de tese é muito promissora para o Laboratório.

# Capítulo 6

## Conclusões

Vamos descrever neste último capítulo as conclusões sobre os principais pontos apresentados nesta tese. O trabalho contou com muitas colaborações, as quais possibilitaram o contato com muitas técnicas experimentais em temas variados, permitindo uma abrangência de conhecimentos.

Apresentamos duas técnicas de obtenção de vórtices óticos, os chamados modos de Laguerre, possuidores de momento angular orbital (MAO), que empregamos em diferentes experimentos. Discutimos o método holográfico, onde construímos máscaras de amplitude para obtenção dos modos LG. Dois tipos de máscaras são possíveis: Uma placa zonal espiral (PZE), que é uma variação da placa zonal de Fresnel, e a grade de difração bifurcada, que nos permite obter várias ordens de modos LG simultaneamente. Também foi discutido o método astigmático, onde um par de lentes cilíndricas é utilizado para transformar um modo HG em um modo LG. Em relação a este tópico, discutimos um método de se obter uma aproximação de um modo HG de primeira ordem.

As máscaras de amplitude fabricadas em nosso laboratório, nos permitiram um estudo muito interessante de franjas de moiré. Da superposição de duas PZE's foram

obtidos defeitos topológicos similares aos observados na interferência dos vórtices gerados por estas PZE's. Observamos dois tipos de franjas de moiré: Uma quando superpusemos máscaras de mesma escala radial, obtendo assim bifurcações, indicando a diferença das cargas topológicas de cada uma, em analogia à interferência de dois modos LG, com a mesma divergência. Outro tipo de franjas de moiré foram obtidas quando superpusemos máscaras de diferentes escalas radiais. Neste caso, obtivemos espirais, cujo número, novamente, era a diferença das cargas topológicas individuais. Este efeito é comparável à interferência de modos com as mesmas cargas topológicas das máscaras, porém com divergências distintas.

Utilizando a preparação de um modo  $LG_0^1$  pelo método holográfico, estudamos a transferência de MAO na CPD estimulada. Primeiro estudamos a transferência do MAO do feixe de bombeamento para os feixes convertidos, preparando o bombeamento no modo de LG. Com o feixe auxiliar operando no modo fundamental o feixe sinal era forçado a ser emitido também neste modo, enquanto o feixe complementar era emitido com a mesma carga topológica do bombeamento, mostrando a conservação do MAO neste processo. Em seguida estudamos a transferência do MAO do feixe auxiliar. Neste caso, o feixe sinal operava no modo de LG e o bombeamento no fundamental, de modo que a soma das cargas topológicas de sinal e complementar devem ser nulas. Assim, observamos no feixe complementar, em ambos os casos, uma carga topológica condizente com a relação  $l_c + l_a = l_b$ , evidenciando a conservação do MAO. Este efeito pode ser compreendido ainda pela conjugação de fase sofrida pelo feixe complementar na CPD Estimulada.

Ainda tratando da CPD livre de cavidade, explorando o regime espontâneo, realizamos um estudo onde foi observado a formação de franjas de moiré provenientes de grades remotamente colocadas. Chamamos este efeito de *moiré não-local*. Utilizamos duas estratégias: A primeira consistiu em transferir, via espectro angular do bombeamento, uma grade periódica, para o perfil de coincidências de sinal e com-

plementar. Em seguida uma segunda grade foi colocada imediatamente antes do detetor do feixe complementar. Varrendo-se as grades simultaneamente foi possível observar os batimentos entre as duas grades no perfil de coincidências, com ótima concordância entre o batimento esperado e o obtido experimentalmente. Dois conjuntos de máscaras foram utilizados. Em um deles a diferença entre as frequências das máscaras era maior, produzindo um padrão de moiré mais complicado, mas observado experimentalmente. Com o conjunto que possuía máscaras com frequências mais próximas, foi possível observarmos claramente o batimento entre elas. Na segunda estratégia, utilizamos os mesmos conjuntos, colocando cada grade no caminho de um dos feixes convertidos. Utilizando a interpretação de ondas avançadas, obtivemos os padrões de moiré esperados, com uma resolução ligeiramente maior que o caso precedente. Um detalhe importante a ser mencionado é que devido à pequena área de coincidências existente, optamos por varrer as máscaras que tinham suas ranhuras com dimensões da ordem do  $mm$ . Isto facilitou nas escolhas das fenda de detecção, que podendo ser maiores, nos proporcionou mais sinal.

Estudamos a troca de MAO em um OPO tipo II. Neste estudo não realizamos nenhuma medida quântica, observando apenas a dinâmica dos vórtices intracavidade. Observamos que a conservação do MAO se dá somente quando bombeamento, sinal e complementar possuem um conjunto de modos transversos onde as componentes de Hermite dos modos de Laguerre sejam degeneradas na cavidade. Tal degenerescência transversa pode ser obtida quando o feixe complementar, que tem a mesma polarização do bombeamento, oscila na ordem transversa mais alta. Neste caso observou-se a conservação do MAO. O mesmo não foi observado quando o feixe sinal operou na ordem transversa mais alta, onde o MAO não se conservou. Realizamos um estudo teórico da propagação em meios anisotrópicos, nos permitindo compreender os resultados experimentais. A degenerescência dos modos de HG na polarização ordinária não ocorre devido ao astigmatismo proveniente da anisotro-

pia. Enquanto o feixe complementar sofre o "walk-off", o astigmatismo sofrido por esta polarização é muito pequeno, não impossibilitando a degenerescência transversa para as componentes Hermite-Gaussianas.

Apresentamos o trabalho do estágio de doutorado sanduíche realizado no Laboratoire Kastler Brossel. Neste estágio realizamos a remontagem de um OPO partindo do zero. Estudamos em particular o método de travamento de fase que permite a operação degenerada em frequência do OPO tipo II acima do limiar. Isto implica dizer que podemos obter dois feixes intensos, emaranhados, aplicáveis, portanto, aos mais diversificados protocolos de informação quântica em variáveis contínuas. Foram medidas compressões de ruído nas quadraturas dos feixes convertidos obtendo uma redução de 3 *dB* (50%) abaixo do limite balístico. Estudamos a separabilidade destes modos utilizado o critério de Duan, obtendo  $\Sigma = 0.5$ , evidenciando, portanto, o emaranhamento de sinal e complementar. As medidas acima do limiar revelaram um excesso de ruído de fase, conforme foi observado no trabalho original. Este excesso de ruído de fase vem sendo observado por diferentes grupos de pesquisa, constituindo um problema mais fundamental a ser estudado.

Finalmente, apresentamos a montagem do Laboratório de Ótica Quântica da UFF, construído ao longo da tese. Apresentamos resultados preliminares discutindo as principais perspectivas na continuidade do trabalho.

# Apêndice A

## Propagação paraxial em meios anisotrópicos

Na CPD tipo II, utilizamos um cristal birrefringente que acrescenta efeitos de anisotropia à propagação do feixe ao longo do cristal [114]. Para abordar este efeito no OPO tipo II, estendemos o estudo de Fleck e Feit [40] de um cristal birrefringente uniaxial para o caso de um cristal biaxial. O objetivo é reduzir as equações de onda às equações paraxiais que definem os modos de Hermite-Gauss, acoplados pela CPD intracavidade.

Vamos definir os eixos cristalográficos  $(x, y, z)$  seguindo as notações utilizadas para descrever o cristal utilizado no experimento. Este cristal é quase-uniaxial, com  $n_x \sim n_y \neq n_z$ , onde  $n_{x(y,z)}$  é o índice de refração para polarização  $x(y, z)$ . Como o vetor deslocamento  $\vec{D}$ , na ausência de carga livres, satisfaz  $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$ , podemos obter da substituição  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) e^{i\omega t}$  na equação de onda, a seguinte equação

$$\nabla^2 \vec{E} - \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{E} - \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0}{\alpha} \right) + k_0 \overset{\leftrightarrow}{\varepsilon} \cdot \vec{E} = 0, \quad (\text{A.1})$$

que convenientemente contém o termo nulo  $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$ . Nesta equação,  $k_0 = \omega/c$

é o número de onda no vácuo, correspondente à frequência  $\omega$ , e  $\alpha$  é uma constante a ser escolhida, convenientemente. Esta constante irá simplificar a análise para o meio birrefringente.

A relação  $\vec{D} = \overleftrightarrow{\varepsilon} \cdot \vec{E}$ , depende do tensor dielétrico  $\overleftrightarrow{\varepsilon}$ , que é diagonal quando usamos coordenadas cristalográficas,

$$\overleftrightarrow{\varepsilon} = \begin{bmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

As equações de onda para as componentes do campo podem ser obtidas de A.1, usando a relação entre  $\vec{D}$  e  $\vec{E}$  e escolhendo  $\alpha = n_y^2$ , resultando

$$\begin{aligned} \frac{n_x^2}{n_y^2} \partial_x^2 E_x + \partial_y^2 E_x + \partial_z^2 E_x - \left(1 - \frac{n_z^2}{n_y^2}\right) \partial_x \partial_z E_z + k_0^2 n_x^2 E_x &= 0, \\ \partial_x^2 E_y + \partial_y^2 E_y + \partial_z^2 E_y - \left(1 - \frac{n_x^2}{n_y^2}\right) \partial_y \partial_x E_x - \left(1 - \frac{n_z^2}{n_y^2}\right) \partial_y \partial_z E_z + k_0^2 n_y^2 E_y &= 0, \\ \partial_x^2 E_z + \partial_y^2 E_z + \frac{n_z^2}{n_y^2} - \left(1 - \frac{n_x^2}{n_y^2}\right) \partial_z \partial_x E_x + k_0^2 n_z^2 E_z &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Se tomarmos estas equações para um cristal uniaxial ( $n_x = n_y$ ), recuperamos as equações obtidas na referência [40]. Vamos considerar agora, a propagação ao longo de uma direção  $x'$  do plano  $(x, y)$ , que faz um ângulo  $\phi$  com o eixo cristalográfico  $x$ . Esta definição é conveniente, pois é a mesma, usualmente dada pelos fabricantes dos cristais. Como vimos, para o KTP utilizado no experimento  $\phi = 23,5^\circ$ . Podemos utilizar um referencial rodado  $(x', y', z)$ , como ilustra a figura A.1 para descrever a propagação dentro do cristal. As transformações entre os dois referencias é dada por



$$x' = x \cos\phi + y \sin\phi, \quad y' = -x \sin\phi + y \cos\phi, \quad z' = z. \quad (\text{A.4})$$

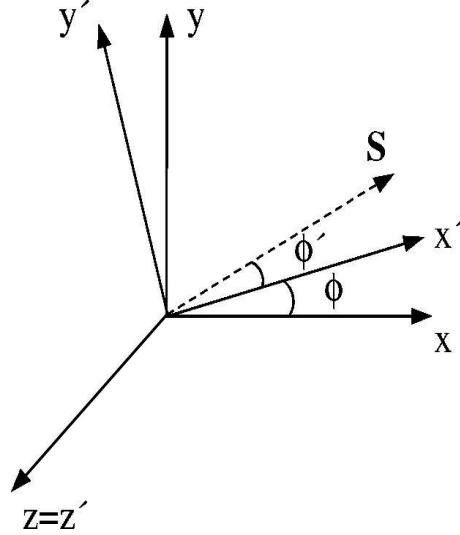


Figura A.1: Sistema de coordenadas utilizado para descrever a propagação paraxial no cristal. O ângulo de "walk-off"  $\phi'$  é indicado como o ângulo entre o vetor de Poynting  $\vec{S}$  e o eixo de propagação  $x'$ .

### 1. Análise de onda plana

Podemos encontrar duas soluções tipo onda plana, ortogonalmente polarizadas, das as equações para as componentes do campo. Uma solução polarizada na direção  $z$ , que nos leva a escrever ( $E_x = E_y = 0$  e  $E_z \neq 0$ ). Neste caso, somente a equação para a componente  $z$  sobrevive e sua solução é

$$E_z = E_{0z} e^{in_z k_0 x'}. \quad (\text{A.5})$$

Outra solução possível é uma onda plana polarizada no plano  $(x, y)$ . Neste caso  $E_z = 0$ , o que resulta em uma solução do tipo

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(k_x x + k_y y)}, \quad (\text{A.6})$$

onde  $\vec{E}_0 = E_{0x}\hat{x} + E_{0y}\hat{y}$ . Substituindo A.6 na equação para a componente  $E_x$ , obtemos

$$\frac{k_x^2}{n_y^2} + \frac{k_y^2}{n_x^2} = k_0^2, \quad (\text{A.7})$$

que é a projeção do chamado elipsóide dos índices de refração no plano  $(x, y)$ . Fazendo  $k_x = n k_0 \cos\phi$  e  $k_y = n k_0 \sin\phi$ , obtemos

$$\frac{\cos^2\phi}{n_y^2} + \frac{\sin^2\phi}{n_x^2} = \frac{1}{n^2}, \quad (\text{A.8})$$

com  $n$  sendo o índice de refração ao longo da direção de propagação  $x'$ . Substituindo agora, A.6 em  $\vec{D} = \vec{\varepsilon} \cdot \vec{E}$  e fazendo  $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0$ , temos

$$n_x^2 k_x E_x + n_y^2 k_y E_y = 0. \quad (\text{A.9})$$

Sendo  $n_x \neq n_y$ , vemos que  $\vec{E}$  e  $\vec{k}$  não são ortogonais. Portanto, o vetor de Poynting  $\vec{S}$ , que por sua vez é ortogonal à  $\vec{E}$ , não é paralelo à  $\vec{k}$ . Se chamamos  $\phi'$  o ângulo entre  $\vec{S}$  e  $\vec{k}$ , podemos encontrar uma relação direta entre  $\phi'$  e  $\phi$ :

$$\tan\phi' = \frac{\sin\phi \cos\phi (n_y^2 - n_x^2)}{n_x^2 \cos^2\phi + n_y^2 \sin^2\phi}. \quad (\text{A.10})$$

Este ângulo também é representado na figura A.1, sendo relacionado com o conhecido efeito de "walk-off", que aparece devido à anisotropia do cristal.

Vejamos agora o que acontece quando consideramos feixes transversalmente finitos, na propagação paraxial. Veremos que a polarização  $z$ , neste caso, também sofre efeitos devido à anisotropia.

## 2. Propagação paraxial anisotrópica

Obter as soluções para as componentes da equação A.1 não será de maneira tão direta, de modo que algumas aproximações devem ser feitas para desacoplar as equações para cada componente.

Para a componente  $z$ , A.1 toma a seguinte forma

$$\left(\partial_x^2 + \partial_y^2 + \frac{n_z^2}{\alpha}\partial_z^2 + k_0 n_z\right) E_z - \left(\frac{\alpha - n_x^2}{\alpha}\right) \partial_x \partial_z E_x - \left(\frac{\alpha - n_y^2}{\alpha}\right) \partial_y \partial_z E_y = 0. \quad (\text{A.11})$$

Para reduzir esta equação a uma equação paraxial para a polarização  $z$ , podemos começar eliminando os termos de derivada cruzada. Uma maneira é aproximar nosso cristal biaxial para um quase uniaxial. Para tanto devemos ter  $|n_x - n_y| \ll |n_z - n_y|$ . Se escolhemos, nestas condições,  $\alpha = n^2$  temos

$$\frac{|\alpha - n_j|}{\alpha} \simeq 10^{-2}, \quad j = x, y, \quad (\text{A.12})$$

que resulta em uma contribuição muito pequena. No limite  $n_x \rightarrow n_y$  temos, novamente, o cristal uniaxial estudado em [40].

Adotando o referencial rodado e a aproximação de cristal quase uniaxial, obtemos uma solução paraxial para A.11 dada por  $E_z = u_z(x', y', z)e^{-in_z k_0 x'}$ . Realizando a aproximação paraxial, obtemos uma equação próxima à equação paraxial, a menos de um coeficiente que multiplica a derivada de segunda ordem em  $z$ :

$$\partial_{y'}^2 u_z + \frac{n_z^2}{n^2} \partial_z^2 u_z = 2in_z k_0 \partial_{x'} u_z. \quad (\text{A.13})$$

A assimetria que aparece entre as coordenadas  $y'$  e  $z$  pode ser compreendida como um fator de re-escala da coordenada  $z$ , significando uma propagação astigmática dentro do cristal, com diferentes escalas de difração para cada coordenada transversa. Vamos separar a dependência em  $y'$  e  $z$  em  $u_z$ , fazendo  $u_z(x', y', z) = U_z(x', y')V_z(x', z)$ . Teremos, então, duas equações paraxiais para difração do feixe, uma para cada direção transversa:

$$\begin{aligned} \partial_{y'}^2 U_z &= 2in_z k_0 \partial_{x'} U_z, \\ \frac{n_z^2}{n^2} \partial_z^2 V_z &= 2in_z k_0 \partial_{x'} V_z. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Esta assimetria na difração pode ser vista como um comprimento efetivo do cristal diferente para cada direção transversa. Para um cristal de comprimento  $l$ , o comprimento efetivo para propagação  $U_z$  será  $l/n_z$ . Para  $V_z$  teremos um comprimento efetivo de  $ln_z/n^2$ . Esta assimetria resultará, portanto, em diferentes comprimentos de cavidade para cada evolução transversa.

Tomemos agora, a solução paraxial polarizada no plano  $(x, y)$ . Vamos considerar que a componente  $E_z$  do campo pode ser desprezada. Neste caso iremos escolher  $\alpha = n_x^2$  para a equação da componente  $E_y$ , na qual substituiremos a solução  $E_y = u_y(x', y', z)e^{-in_z k_0 x'}$  que obedece a equação paraxial. Com a ajuda de A.8, escrevemos

$$2ik_0 n_y \left( \cos^2 \phi + \frac{n_y^2}{n_x^2} \sin^2 \phi \right)^{\frac{1}{2}} [\partial_{x'} u_y + \tan \phi' \partial_{y'} u_y] = \left( \sin^2 \phi + \frac{n_y^2}{n_x^2} \cos^2 \phi \right) \partial_{y'}^2 u_y + \partial_z^2 u_y, \quad (\text{A.15})$$

onde  $\phi'$  é o ângulo de "walk-off", dado por A.10. Para obter a equação paraxial, precisamos de uma segunda transformação de variáveis:

$$y'' = y' - \tan \phi' x'. \quad (\text{A.16})$$

Esta transformação corresponde a um deslocamento do feixe polarizado no plano  $(x, y)$ . Usando (A.8) e definindo

$$\xi^2 = \sin^2 \phi + \frac{n_x^2}{n_y^2} \cos^2 \phi, \quad (\text{A.17})$$

podemos escrever a equação (A.15) como

$$\xi^2 \partial_{y''}^2 u_y + \partial_z^2 u_y = 2ik_0 \frac{n_y^2}{n} \partial_{x'} u_y, \quad (\text{A.18})$$

que é a equação paraxial usual com a coordenada transversa re-escalada  $y''/\xi$ . Dada a definição de  $\xi$  e a proximidade de  $n_x$  e  $n_y$ , este re-escalamento transverso é muito menor do que aquele sofrido pela polarização  $z$ . Portanto, enquanto a polarização

$z$  possui um astigmatismo significativo, mas não sofre "walk-off", a polarização do plano  $(x, y)$  apresenta "walk-off" e um pequeno astigmatismo. Passaremos a denominar a polarização do plano  $(x, y)$  como onda *extraordinária* e a polarização  $z$  como onda *ordinária*.

Fazendo a separação de variáveis também para  $u_y$ , obtemos as seguintes equações paraxiais:

$$\begin{aligned}\xi^2 \partial_{y''}^2 U_y &= 2ik_0 \frac{n_y^2}{n} \partial_{x'} U_y, \\ \partial_z^2 V_y &= 2ik_0 \frac{n_y^2}{n} \partial_{x'} V_y.\end{aligned}\tag{A.19}$$

Portanto, a propagação paraxial dentro do cristal é descrita pelas equações A.14 e A.19 para as polarizações ordinária e extraordinária, respectivamente. A equação paraxial para a componente  $x$  da onda extraordinária pode ser obtida pelo mesmo caminho feito para a componente  $y$ , resultando A.19.

# Apêndice B

## Lista de publicações

1. J.A.O. Huguenin , M.Martinelli, D.P.Caetano, B.Coutinho dos Santos, M.Almeida, P.H.Souto Ribeiro, P. Nussenzeig, A.Z.Khoury  
"Orbital angular momentum exchange in parametric down conversion."  
**Journal of Modern Optics.** , v.53, p.647 - 658, (2006).
2. M.Almeida, J.A.O. Huguenin, A.Z.Khoury, P.H.Souto Ribeiro  
"Theoretical investigation of moire patterns in quantum images."  
**Journal of Modern Optics.** , v.53, p.777 - 785, (2006).
3. J.Laurat, G.Keller, J.A.O. Huguenin, C.Fabre, T.Coudreau, A.Serafini, G.Adesso, F.Illuminati  
"Entanglement of two-mode Gaussian states: Characterization and experimental production and manipulation."  
**Journal of Optics B-Quantum and Semiclassical Optics.** , v.7, p.S577 - S587, (2005).
4. J.A.O. Huguenin, M.Almeida, P.H.Souto Ribeiro, A.Z.Khoury  
"Moire fringe patterns in spacial quantum correlations of twin fotons."

- Physical Review A - Atomic, Molecular and Optical Physics.** , v.71, n.043818, (2005).
5. M.Martinelli, J.A.O. Huguenin, P.Nussenzeig, A.Z.Khoury  
"Orbital angular momentum exchange in a optical parametric oscillator type II."  
**Physical Review A**, v.70, p.013812 , (2004).
6. J.A.O. Huguenin, B.Coutinho dos Santos, P. A. M. dos Santos, A.Z.Khoury  
"Topological defects in moiré fringes with spiral zone plates."  
**Jornal of the Optical Society of America.** , v.20, n.10, p.1883 - 1889, (2003).
7. D.P.Caetano, P.H.Souto Ribeiro, M.Almeida, J.A.O. Huguenin, B.Coutinho dos Santos, A.Z.Khoury  
"Conservation of Orbital Angular Momentum in Stimulated Down-Conversion."  
**Physical Review A - Atomic, Molecular and Optical Physics.** , v.66, p.04180 - , (2002).
8. P.H.Souto Ribeiro, M.Almeida, D.P.Caetano, J.A.O. Huguenin, B.Coutinho dos Santos, A.Z.Khoury  
"Observation of Image Transfer and Phase Conjugation in Stimulated Down-Conversion."  
**Physical Review Letters.** , v.87, p.13360 - , (2001).

# Referências Bibliográficas

- [1] P.A. Franken *et al*, Physical Review Letters, **7**, 118 (1961).
- [2] M.Bass *et al*, Physical Review Letters, **8**, 18, (1962).
- [3] K.E. Neihuht , Applied Physics Letters, **2**, 136, (1963).
- [4] A.W. Smith and N.Braslou , Journal of the Applied Physics , **34**, 2105, (1963).
- [5] C.K. Hong and L.Mandel , Physical Review A , **31**, 2409, (1985).
- [6] A.Aspect et al, Physical Review Letters, **49**, 91, (1982).
- [7] A.Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, Physical Review, **41**, 777, (1935).
- [8] M.Reid and P.Drummond, Physical Review Letters, **60**, 2731 (1988)
- [9] T. Jennewein, G.Weih, Jian-Wei Pan, A. Zeilinger, Physical Review Letters, **88**, 017903 (2002).
- [10] Samuel L. Braustein and A. Mann, Physical Review A, **51**, 1727, (1995).
- [11] J.I. Cirac and P. Zoller , Physical Review Letters, **74**, 4091, (1995).
- [12] C. H. Bennett, G. Brassard, Proc. IEEE International Conference on Computers, Systems, and Signal Processing, IEEE Press, Los Alamitos, Calif. (1984), p. 175.



- [13] C. H. Bennett et al., *J. Cryptology* **5**, 3 (1992).
- [14] A. Ekert, *Physical Review Letters*, **67**, 661, (1991).
- [15] M.P. Almeida *et al*, Preprint quant-ph/ 0510087 [http:// mentor.lan.gov](http://mentor.lan.gov), (2005).
- [16] P.A.M Dirac, *Proc. Roy. Soc. A*, **114**, 243, (1927).
- [17] E. Fermi, *Rev. Mod. Phys.*, **4**, 87, (1932).
- [18] A.A. Michelson and F.G. Pease, *Astrophys. J.*, **53**, 249, (1921).
- [19] F.G. Pease, *Sci. Amer.*, **143**, 290, (1930).
- [20] R. Hanbury-Brown and R.Q. Twiss *Nature*, **178**, 1046, (1956).
- [21] R. Hanbury-Brown and R.Q. Twiss *Proc. Roy. Soc. (London) A*, **248**, 199, (1958).
- [22] L. Mandel and E. Wolf, *Optical Coherence and Quantum Optics*. New York, NY: Cambridge University Press, 1995.
- [23] M. Scully and Zubairy, *Quantum Optics*. New York, NY: Cambridge University Press, 1997.
- [24] A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, *Physics Review*, **41**, 777 (1935).
- [25] P.G. Kwiat et al, *Physical Review Letters*, **75**, 4337 (1995).
- [26] J.G. Rarity and P.R. Tapster, *Physical Review Letters*, **64**, 2495 (1990).
- [27] Y.H. Shih and C.O. Alley, *Physical Review Letters*, **61**, 2921 (1988).
- [28] Z.Y. Ou and L. Mandel, *Physical Review Letters*, **61**, 50 (1988).
- [29] L.M. Duan et al, *Physical Review Letters*, **84**, 2722 (2000).

- [30] R.Simon, Physical Review Letters, **84**, 2726 (2000).
- [31] Mark Hillery and M. Suhail Zubairy, quant-ph 0507168 (2005).
- [32] A.Furussawa et al, Science, **286**, 706 (1998).
- [33] C.Silberhorn et al, Physical Review Letters, **86**, 4267 (2001).
- [34] W.P.Bowen et al, J.Opt. B, **4**, 421 (2002).
- [35] A. Mair *et al* , Nature (London), **412**, 313 (2001).
- [36] J.W.R. Tabosa and D.V.Petrov, Physical Review Letters, **83**, 4967 (1999).
- [37] S. Barreiro and J.W.R. Tabosa , Physical Review Letters, **90**, 133001 (2003).
- [38] M.Martinelli *et al* , Physical Review A, **70**,013812 (2004)
- [39] D.P.Caetano *et al*, Physical Review A , **66**, 041801(R) (2002).
- [40] J.A. Fleck and M.D. Feit, Journal of Optical Societ fo America, **73** , 920 (1983).
- [41] R.A.Beth, Phycical Review **50**, 115 (1936).
- [42] L.Allen et al, Phycical Review A, **45**, 8185 (1992).
- [43] A. E. Seigman,*Lasers*, University Science Books, Mill Valey (1968).
- [44] E. Abramochkin and V. Volostnikov, Optics Communications, **83**, 123 (1991).
- [45] M.Born and E. Wolf, *Principle of Optics*, Pergamon, New York, (1980).
- [46] M.Padgett, J.Courtial, *Optics Letters*, **24**, 430 (1999).
- [47] N.R Heckenberg *et al*, Optics Letters, **17**, 221 (1992).
- [48] G.F.Brand, American Journal Physics, **67** , 55 (1999).

- [49] Eugene Hecht, *Optics*, 3rd ed, Addison-Wesley Longman, EUA , (1998).
- [50] Bernardo C. dos Santos, *Dinâmica de vórtices em osciladores paramétricos óticos*, dissertação de mestrado, Instituto de Física - UFF, (2004).
- [51] N.R. Heckenberg *et al*, Optics Letters, **17**, 221, (1992).
- [52] S.S.R Oemrawsingh *et al*, Applied Optics, **43**, 688 (2004).
- [53] M.W.Beijersbergen *et al*, Optics Communications, **96** , 123 (1993).
- [54] Dmitri V. Petrov *et al* Optics Communications, **143** , 265 (1997)
- [55] O.Kafri e I Glatt, *The physics of moiré metrology*, Winley, New York (1989).
- [56] J. Yang *et al* Journal of the Optical Society of America A , **17**, 790 (2000).
- [57] E. Fujiwara *et al*, Surface Science, **459**, 390(2000).
- [58] P.A.M dos Santos *et al*, Applied Optics, **39**, 4524 (2000).
- [59] J.A.O Huguenin *et al*, Journal of the Optical Societ of America A, **20** , 1883 (2003).
- [60] I.Amidror and R.D.Hersh, Journal of the Optical Societ of America A, **15** , 1100 (1998).
- [61] T.H. Maiman, Nature, **187**, 493 (1960).
- [62] Z.Y Ou *et al*, Physical Review A, **41**, 1597 (1990).
- [63] L.J. Wang *et al*, Journal of the Optical Society of America B, **8**, 978 (1991).
- [64] R.W. Boyd *Nonlinear Optics*, 2nd edition, Academic Press, EUA (2003).
- [65] D.N. Klyshko, Sov. Physics, JETP, **28**, 522 (1969).

- [66] D.C. Burnhama and D.L.Weinberg, Physical Review Letters, **25**, 84 (1970).
- [67] T.B. Pittman *et al*, Physical Review A, **52**, R3429 (1995).
- [68] L. Lang, "Invetigation of induced coherence and without induced emissiom", PhD Thesis, University of Rochester, (1992).
- [69] C.H. Monken, P.H. Souto Ribeiro and S. Pádua, Physical Review A, **57**, 3123 (1998).
- [70] E.J.S. Fonseca *et al*, Physical Review A, **60**, 1530 (1999).
- [71] P.H.Souto Ribeiro *et al*, Physical Review A, **51**, 1631 (1995).
- [72] Z.Y Ou *et al*, Physical Review A, **41**, 1597 (1990).
- [73] L.J. Wang *et al*, Journal of the Optical Society of America B, **8**, 978 (1991).
- [74] P.H.Souto Ribeiro *et al*, Physical Review Letters, **87**, 133602 (2001).
- [75] K.Dholakia *et al*, Physical Review A, **54**, 3742 (1996).
- [76] J. Courtial *et al*, Physical Review A, **56**, 193 (1997).
- [77] J. Arlt *et al*, Physical Review A , **59**, 3950 (1999).
- [78] H.H. Arnault and G.A.Barbosa,Physical Review Letters, **85**, 286 (2000).
- [79] S.P.Walborn *et al*, Physical Review A, **69**, 023811 (2004).
- [80] P.H.Souto Ribeiro *et al*, Physical Review A, **60**, 5074 (1999).
- [81] Dilson Pereira Caetano, *Transferência e Propagação do Espectro Angular da Luz em Processos de Conversão de Freqüências*, Tese de Doutorado, Instituto de Física, UFRJ (2004).

- [82] Sylvain Gigan, "Amplification d'images en cavité: Effets classiques et quantiques" Tese de doutorado Univeristé Pierre et Marie Curie - Paris VI (2004).
- [83] N. Treps *et al*, Physical Review Letters , **88**, 203601 (2002).
- [84] W.A.T. Nogueira *et al*, Physical Review Letters , **86**, 4009 (2001).
- [85] V. Strekalov *et al*, Physical Review Letters , **74**, 36000 (1995).
- [86] G.A.Barbosa, Physical Review A , **54**, 4473 (1996).
- [87] D.P. Caetano *et al* , Physical Review A , **68**, 023805 (2003).
- [88] D.N. Klyshko, Physics Letters A, **132**, , issues 6-7, 299 (1988).
- [89] E.J.S. Fonseca *et al* , Physical Review A , **60**, 1530 (1999).
- [90] M.P.Almeida *et al* , Journal of Modern Opttics , **A ser publicado**, (2005).
- [91] M.P. Almeida and P.H.Souto Ribeiro, Preprint quant-ph/0312134 em <http://mentor.lan.gov>(2003).
- [92] J.A.O. Huguenin *et al*, Physical Review A , **71**, 043818 (2005).
- [93] A. Heidmann *et al*, Physical Review Letters , **59**, 2555 (1987).
- [94] T. Debuissert *et al*, Journal of Optical Society of America B, **10**, 1668 (1993).
- [95] L.Lugiato *et al*, Nuovo Cimento, **10**, 959 (1988).
- [96] C.Richy *et al*, Journal of the Optical Society of America B, **12**, 456 (1995).
- [97] Z.Y. Ou *et al*, Physical Review Letters, **68**, 3663 (1992).
- [98] J. Laurat *et al*, Physical Review A, **70**, 042315 (2004).

- [99] Julien Laurat, "*Etats nos clasique et intrication en variables continues à l'aide d'un oscilateur paramétrique optique*", Tese de doutorado, Laboratoire Kastler Brossel, Université Pierre et Marie Curie, Paris, França, (2004).
- [100] B.Boullanger *et al*, IEEE J. Quantum Electron, **35**, 281 (1999)
- [101] A.Villar *et al*, Preprint quant-ph/0506139 em <http://mentor.lan.gov>(2005).
- [102] M.D.Levenson *et al*, Physical Review A, **32**, 1550, (1985), R.M. Shelby *et al*, Physical Review Letters, **57**,691, (1986).
- [103] E.J. Mason and N.C. Wong, Optics Letters, **23**, 1733 (1998).
- [104] A. Gatti *et al*, Physical Review A, **52**, 1675 (1995).
- [105] L.A. Lugiato *et al*, Physical Review Letters, **70**, 3868 (1993).
- [106] M. Marte *et al*, Optics Express, **3**, 71 (1998).
- [107] L.A. Lugiato and I. Marzoli, Physical Review A, **52**, 4886 (1995).
- [108] L.A. Lugiato and P. Grangier, Journal of the Optical Society of America B, **14**, 225 (1997).
- [109] M. Vaupel *et al*, Physical Review Letters, **83**, 5278 (1999).
- [110] S.Ducci *et al*, Physical Review A, **64**, 023803 (2001).
- [111] P.Drummond and K.Dechoum, Physical Review Letters, **95**, 083601 (2005).
- [112] Amnon Yariv, *Quantum Eletronics* John Wiley and sons, E.U.A. (1989).
- [113] R.A.Beth, Physical Review, **50**, 115 (1936).
- [114] R.Martinez-Horrero, Journal of the Optical Society of America A , **18**, 2009 (2001).

- [115] C.Schwob *et al*, Applied Physics B: Lasers Optics, **66**, 685 (1998).
- [116] Laurent Longchambon, "*Effets de polarizations dans le melages paramétriques à trois ondes en cavité: Aplications au traitement classique e quantique de l'information*", Tese de doutorado, Laboratoire Kastler Brossel, Université Pierre et Marie Curie, Paris, França, (2003).
- [117] L. Longchambon *et al*, European Physics Journal D, **30**, 279 (2004).
- [118] L. Longchambon *et al*, European Physics Journal D, **30**, 287 (2004).
- [119] M.K.Olsen *et al*, Optics Communication, **223**, 123 (2003).
- [120] M.K.Olsen *et al*, Optics Communication, **215**, 101 (2003).