

Universidade Federal Fluminense
Instituto de Física

*Modelos Computacionais Baseados em
Agentes Aplicados à Migração Interna*

Aquino Lauri de Espíndola

Orientador: Dr. Thadeu J. P. Penna

Co-orientador: Dr. Jaylson J. Silveira
UNESP - Departamento de Economia



INSTITUTO DE FÍSICA
Universidade Federal Fluminense

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de
Doutor em Física

Niterói, Março de 2006

Nada, em minha opinião, é mais prejudicial ao avanço do conhecimento que uma dada tendência dele, que ocorre ajustar-se às habilidades, inclinações e treinamentos de acadêmicos individuais, que pode de fato ser frutífera e necessária, seja seguida a ponto de demandar para si mesma um controle exclusivo, e de pretender que nela está a ciência verdadeira [...] Será que é tão difícil admitir, e sobretudo para homens de ciência, que pode haver, não apenas diferenças de grau de habilidade, mas diferentes espécies de habilidades e, portanto, diferenças de inclinação, de tendência, e de uso de método? E, ademais, apreender a vantagem imensa de tais diferenças num cultivo multifacetado dos campos do conhecimento? [...] Cada tendência tem seus fortes e fracos, seus méritos e defeitos.

Adolf Wagner (1835-1917), economista e político alemão

À Eliane Arenas e Cláudia Mendonça.

Índice

Resumo	ix
Abstract	x
Introdução	1
1 Conceitos Básicos	4
1.1 Sistemas Complexos	4
1.2 O Modelo de Ising para o Ferromagnetismo	6
1.3 Método de Monte Carlo	8
1.4 Transições de Fase	11
1.5 Expoentes Críticos e Universalidade	15
1.6 Econofísica e Sociofísica	17
1.7 Simulações	19
2 Migração Rural-Urbana: A Abordagem Harris-Todaro	20
2.1 Estrutura de Equilíbrio Geral	21
2.2 Equilíbrio Temporário	26
2.3 Equilíbrio do Fluxo Migratório	27
3 Migração: Uma Abordagem de Mecânica Estatística	32
3.1 Descrição do Sistema Econômico	32
3.2 O Processo Migratório	39

3.3	A Simulação	43
3.4	Migração Rural-Urbana em Redes d -dimensionais	51
4	Migração: Teste da Hipótese do MHT	59
4.1	O Modelo Harris-Todaro Revisitado	60
4.1.1	MHT com Função de Produção Cobb-Douglas e Elasticidade dos Termos de Troca Constante	60
4.1.2	Análise Estática Comparativa do MHT	62
4.2	Um Modelo de Aprendizagem Social por Imitação	64
	Conclusões	75
	Bibliografia	80

Lista de Figuras

1.1	<i>Diagrama de fase de um fluido.</i>	12
1.2	<i>Curva de coexistência da fase líquida e gasosa.</i>	13
1.3	<i>Magnetização. Fig. (a) mostra a dependência da magnetização M em função do campo externo H. Fig. (b) mostra a dependência da magnetização M em função da temperatura T.</i>	13
1.4	<i>Susceptibilidade magnética χ. Fig. (a) mostra a dependência da susceptibilidade χ em função do campo magnético externo H. Fig. (b) mostra a dependência da susceptibilidade χ em função da temperatura T.</i>	14
1.5	<i>Diagrama de fase para uma material ferromagnético.</i>	15
1.6	<i>Curva de coexistência de oito fluidos diferentes. O ajuste requer o parâmetro $\beta = 1/3$. Figura retirada da ref. [15], página 28.</i>	17
2.1	<i>Determinação do nível de emprego manufatureiro, N_m, pela produtividade marginal $f'(N_m)$.</i>	23
2.2	<i>Determinação do salário rural w_a em função da população rural.</i>	25
2.3	<i>Fluxograma de determinação do equilíbrio temporário.</i>	26
2.4	<i>Equilíbrio do fluxo migratório sem desemprego.</i>	27
2.5	<i>Equilíbrio Harris-Todaro com desemprego urbano.</i>	29
2.6	<i>Estabilidade assintótica global do equilíbrio Harris-Todaro com desemprego urbano.</i>	31
3.1	<i>Proporção de trabalhadores no setor urbano como função do tempo para três diferentes parâmetros J e K. Círculos: ($J > 0, K > 0$); Quadrados: ($J = 0, K > 0$); Cruzes: ($J > 0, K = 0$).</i>	46

3.2	<i>Fração rural como função da renda per capita em unidades de bens manufaturados.</i>	48
3.3	<i>Distribuição de agentes na rede. Clusters pretos representam agentes urbanos ($\sigma_i = +1$) e clusters brancos, os rurais ($\sigma_i = -1$). Fig. (a) é a distribuição aleatória inicial do sistema. Fig. (b) é distribuição de equilíbrio em que os clusters devido a vizinhanças social podem ser vistos.</i>	49
3.4	<i>Magnetização média m em função da razão J/K.</i>	50
3.5	<i>Razão de salários esperados r_e em função da razão J/K.</i>	51
3.6	<i>Fração urbana n_u em função da razão J/K e a dimensão linear da rede quadrada L. Áreas mais claras correspondem a valores maiores de n_u e as escuras a valores menores de n_u.</i>	52
3.7	<i>Fração urbana de equilíbrio n_u em função do parâmetro β.</i>	53
3.8	<i>Tempo pra atingir o equilíbrio em função do parâmetro atividade a.</i>	54
3.9	<i>Fração urbana em função dos passos de simulação para redes com dimensões diferentes. A dimensão linear de cada rede é $L_{(3d)} = 100$, $L_{(4d)} = 32$, $L_{(5d)} = 16$, $L_{(6d)} = 10$, $L_{(7d)} = 7$. Um overshooting na fração urbana torna-se mais evidente com o aumento da dimensão da rede.</i>	55
3.10	<i>Fração urbana em função dos passos de simulação para diferentes dimensões da rede com o parâmetro $J = 0$. A dimensão linear de cada rede é $L_{(3d)} = 100$, $L_{(4d)} = 32$, $L_{(5d)} = 16$, $L_{(6d)} = 10$, $L_{(7d)} = 7$.</i>	56
3.11	<i>Salário do setor manufatureiro w_m para redes de diferentes dimensões. A dimensão linear de cada rede é $L_{(3d)} = 100$, $L_{(4d)} = 32$, $L_{(5d)} = 16$, $L_{(6d)} = 10$, $L_{(7d)} = 7$.</i>	56
3.12	<i>Salário do setor rural w_a para diferentes dimensões da rede. A dimensão linear de cada rede é $L_{(3d)} = 100$, $L_{(4d)} = 32$, $L_{(5d)} = 16$, $L_{(6d)} = 10$, $L_{(7d)} = 7$.</i>	57
3.13	<i>Salário do setor rural w_a para diferentes comprimentos da rede em $7d$. Quadrados: $L = 5$; Diamantes: $L = 6$; Triângulos: $L = 7$; Círculos: $L = 8$.</i>	57
3.14	<i>Fração urbana n_u em função da razão J/K e o tamanho da rede L. Áreas mais claras correspondem a frações urbanas mais elevadas e áreas mais escuras a frações urbanas mais baixas.</i>	58

4.1	<i>Solução numérica da eq. (4.10) para diferentes valores de w_m. Quadrados: fração urbana n_u^*; Círculos: taxa de desemprego urbano $(1 - N_m/N)$. Parâmetros fixos usados são $A_a = 1,0$, $A_m = 1,0$, $\phi = 0,3$, $\alpha = 0,7$, $\rho = 1,0$ e $\gamma = 1,0$.</i>	63
4.2	<i>Solução numérica da eq. (4.10) para diferentes valores de γ. Quadrados: fração urbana n_u^*; Círculos: taxa de desemprego urbano, $(1 - N_m/N_u^*)$. Parâmetros fixos usados são $A_a = 1,0$, $A_m = 1,0$, $\phi = 0,3$, $\alpha = 0,7$, $\rho = 1,0$ e $w_m = 0,8$</i>	64
4.3	<i>Fração urbana n_u em função dos passos de simulação. De cima para baixo as frações urbanas iniciais são 0,9, 0,8, 0,3, 0,2.</i>	67
4.4	<i>Taxa de desemprego $(1 - N_m/N_u)$ em função dos passos de simulação. De cima para baixo as frações urbanas são 0,9, 0,8, 0,3, 0,2.</i>	68
4.5	<i>Diferencial de salário esperado rural-urbano $(w_u^e - w_a)$ em função dos passos de simulação. De cima para baixo as frações urbanas iniciais são 0,9, 0,8, 0,3, 0,2.</i>	69
4.6	<i>Fração urbana de equilíbrio n_u em função do parâmetro tecnológico α e o salário mínimo w_m. A área branca refere-se a uma combinação inválida de parâmetros.</i>	70
4.7	<i>Diferencial de salários esperados de equilíbrio em função do parâmetro tecnológico α e o salário mínimo w_m. A área branca refere-se a uma combinação inválida de parâmetros.</i>	70
4.8	<i>Taxa de desemprego urbano de equilíbrio $(1 - N_m/N_u)$ em função do parâmetro tecnológico α e o salário mínimo w_m. A área branca refere-se a uma combinação inválida de parâmetros.</i>	71
4.9	<i>Fração urbana de equilíbrio n_u em função do parâmetro γ e o salário mínimo w_m. A área branca refere-se a uma combinação inválida de parâmetros.</i>	72
4.10	<i>Diferencial de salários esperados de equilíbrio $(w_u^e - w_a)$ em função do parâmetro γ e o salário mínimo w_m. A área branca refere-se a uma combinação inválida de parâmetros.</i>	72
4.11	<i>Taxa de desemprego urbano de equilíbrio $(1 - N_m/N_u)$ em função do parâmetro γ e o salário mínimo w_m. A área branca refere-se a uma combinação inválida de parâmetros.</i>	73

4.12	<i>Fração urbana de equilíbrio n_u em função dos parâmetros tecnológicos α e ϕ. A área branca refere-se a uma combinação inválida de parâmetros.</i>	73
4.13	<i>Diferencial de salários esperados de equilíbrio ($w_u^e - w_a$) em função dos parâmetros tecnológicos α e ϕ. A área branca refere-se a uma combinação inválida de parâmetros.</i>	74
4.14	<i>Taxa de desemprego urbano de equilíbrio ($1 - N_m/N_u$) em função dos parâmetros tecnológicos α e ϕ. A área branca refere-se a uma combinação inválida de parâmetros.</i>	74
4.15	<i>Distribuição de agentes na rede. A área preta representa agentes urbanos ($\sigma_i = +1$) e a área branca, os rurais ($\sigma_i = -1$). Fig. (a) é a distribuição inicial do sistema. Fig. (b) é distribuição de equilíbrio em que o processo de migração ocorre somente na interface, sugerindo uma forma fractal.</i>	78

Agradecimentos

Quero agradecer inicialmente ao Thadeu por ter sido meu orientador e me apresentar o mundo das simulações. Quero, também, deixar registrado meu agradecimento a ele pelo fato de manter a rede funcionando e o *cluster* de computadores, sem o qual estas simulações não teriam sido realizadas.

Ao meu amigo e co-orientador Jaylson Jair da Silveira, pelo apoio e pela produtiva parceria que permitiu a conclusão deste trabalho.

A Ana e Júlia pelo apoio e paciência que tiveram comigo durante os momentos em que estive em Araraquara, deixo aqui meu muito obrigado.

Ao Prof. Jurgen Stilck, que foi coordenador da Pós do IF-UFF durante a maior parte do meu doutorado, cujo apoio foi fundamental para realização dessa tese.

Agradeço a minha Grande Família, cujos nomes são muitos, pelo apoio dado durante esses 4 anos que fizeram a saudade mais suportável.

Um agradecimento muito especial a Karen Luz Burgoa por ter me recebido de forma tão calorosa e pela amizade que a partir daí construímos.

Ao Prof. Frederico Firmo Souza Cruz - Depto de Física UFSC - pelo apoio e pela referência que tem sido desde a graduação, onde tive o privilégio de assistir suas aulas.

Ao meu grande amigo Subharthy Ray pelo apoio que tem me dado.

As meninas da biblioteca: Ana Maria, Lúcia, Irani, Ritinha, Débora, Léa pelo excelente trabalho que realizam e companherismo destes quatro anos.

A Luana e João, funcionários da Pós, pelo suporte dado nesses quatro anos, principalmente pelos lembretes sobre as datas. O meu muito obrigado também a

Yurié da secretaria do IF-UFF.

Elis Pelegrini, Luiz Alves, Felipe Hoepers, Daniel Hoepers pela grande amizade que se mostrou inabalável apesar da distância.

Ao Thales C. Soares, pelo apoio e as propagandas sobre o Rio de Janeiro, as quais superaram as expectativas!

Aos amigos da Pós do Instituto de Física-UFF pela companhia que foram neste período, em especial ao Zé Augusto, Claudia Gomes, Maurício das Virgens, Luciana Rios e André Schwartz.

Aos amigos da UFSC: Lilian, Ângela, Marcos Daniel, Emerson, Tânia, Sandra, Ramona, Daniel, André Leonel, Rafael Galina.

Tatiana Arenas, Waldir, Marisa Monteiro, Marisa e Iberê, Wecy, Marcelo Santana e Hermes, Themis e, Valdir, Zé Reinaldo, Amauri, João, Alex, Paulo Eduardo Júnior, Simone Aziz, Carol Aziz, Luiz Goldstein, Thiago, Wecy e André, Diogo, Ariel Hauss, Ricardo Léo, Paulo César, Vitor.

O mestrado terminou, o doutorado veio e novamente quero agradecer ao pessoal da "velha guarda": Sérgio e Márcia, Edson, Carlinho e Marilene, Marcos Roberto, Izabel, Denise, Adilson Schuindt, Vânia, Sônia, Maricléia, Gabriela Cavalheiro, Anita Fangier, Rode, pois o tempo passou, mas o que é verdadeiro permanece.

Parte deste trabalho foi apresentada no IV Brazilian Meeting on Simulational Physics, em que várias sugestões e comentários foram feitas. Por estes, deixo aqui meu agradecimento.

Algumas partes deste trabalho foram apresentadas em forma de seminário na FEA-USP. Registro aqui meus agradecimentos ao grupo de pesquisa COMPLEX - Economia e Sociedade por oportunizarem estes seminários.

Finalmente, quero agradecer à CAPES pelo suporte financeiro sem o qual não seria possível a execução deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho estudamos a migração rural-urbana a partir dos trabalhos de Harris e Todaro, os quais são considerados o ponto de partida da teoria clássica sobre o assunto. Por se tratar de um trabalho interdisciplinar, inicialmente apresentamos alguns conceitos básicos sobre complexidade e mecânica estatística, os quais serão utilizados no transcorrer do trabalho. Passamos à apresentação do modelo de Harris e Todaro (MHT), com formas funcionais específicas (tecnologia Cobb-Douglas e elasticidade constante dos termos de troca). Em seguida, implementamos o MHT através de simulações computacionais baseadas em agentes em que a influência de vizinhança social foi considerada em um modelo do tipo Ising. Esse modelo é estendido a redes com dimensão superior a 2 até 7. Por último, estudamos o MHT implementando-o em uma nova simulação com dinâmica paralela, cujo principal objetivo é obter a suposição crucial do MHT como propriedade emergente da interação entre agentes adaptativos.

Abstract

In this work we studied the rural-urban migration problem based on the Harris-Todaro work, which is considered as the starting point of the classic theory about this subject. Since this is an interdisciplinary work, in the beginning we present some basic concepts about complexity and statistical mechanics that will be used throughout this thesis. Next, we test the Harris-Todaro model by means of agent-based computational simulations in which the effect due the social neighborhood are taken into account in an Ising like model. Implementations of this model were done by using lattices from two to seven dimensions. Afterwards, we present the Harris-Todaro model with specific functional forms (Cobb-Douglas technology and constant elasticity of the trade terms). Finally, we also studied the Harris-Todaro model implementing it by means of an agent-based simulation to test the crucial assumption taken by Harris and Todaro as an emergent property of the interaction among adaptative agents.

Introdução

O desenvolvimento econômico gera significantes transformações estruturais, tais como mudanças nas condições demográficas e na estrutura de produção. A característica estrutural mais importante das economias em desenvolvimento é a distinção entre os setores rural e urbano [1]. A agricultura desempenha um papel chave no desenvolvimento do setor urbano de uma economia: supre este setor com alimentos, permitindo que o mesmo sobreviva e também supre o setor industrial em expansão com mão-de-obra. Parte fundamental da transformação dos países predominantemente rurais e agrários em países industrializados e com concentração urbana é o fluxo de enorme quantidade de indivíduos, através da migração de áreas rurais para áreas urbanas [2]. Este fluxo de indivíduos das áreas rurais para urbanas é uma resultante de milhares de decisões individuais dispersas e não-coordenadas. Mesmo assim os estudiosos do tema têm registrado padrões agregados que se repetem em vários países e em diferentes períodos históricos. Portanto, tem-se um típico cenário em que a abordagem da complexidade, fundamentada na modelagem oriunda da Mecânica Estatística, pode contribuir para a explicação de certos padrões revelados pelos dados históricos.

No capítulo 1, em virtude do caráter interdisciplinar deste trabalho, introduzimos alguns conceitos básicos sobre complexidade e Mecânica Estatística. Iniciamos com os sistemas complexos, mostrando a dificuldade em definí-los com precisão e, em seguida, citando diversos autores, apontamos as principais características que um sistema necessita possuir para ser considerado complexo. Mais adiante, apresentamos alguns conceitos que, apesar de serem conhecidos pelos físicos, precisam

ser apresentados ao leitor de outras áreas. Assim sendo, apresentamos o modelo de Ising para o ferromagnetismo, o Método de Monte Carlo, as transições de fase e suas classificações, os expoentes críticos e as classes de universalidade e, finalizando este capítulo, comentamos a respeito das simulações computacionais e sua importância na ciência moderna.

O capítulo 2 é a apresentação do fenômeno da migração rural-urbana abordada pelo modelo de Harris e Todaro (MHT), o qual é considerado o ponto de partida da teoria clássica sobre este assunto. Na seção 2.1 mostramos a formalização da estrutura de equilíbrio geral do MHT seguida da seção 2.2 em que calculamos o equilíbrio temporário do sistema. De posse da formalização do MHT, feita nas seções anteriores, passamos ao cálculo do equilíbrio do fluxo migratório na seção 2.3. Nesta seção é introduzida a condição Harris-Todaro, a qual é fundamental para o entendimento do processo de equilíbrio do fluxo migratório.

Dando continuidade ao estudo da migração rural-urbana, abordamos esta questão através na Mecânica Estatística no capítulo 3. Analisamos o fenômeno de migração rural-urbana através de um modelo computacional baseado em agentes, cujo objetivo é descrever algumas das principais características das economias em desenvolvimento. A decisão de migrar é tratada da maneira usual como descrito no MHT, capítulo 2. Entretanto, propomos uma modelagem da migração rural-urbana como um problema de escolha discreta, o que nos permitiu formalizar o processo de migração utilizando o modelo de Ising. Desta forma, conseguimos introduzir o efeito de vizinhança social na decisão de migrar. Na seção 3.1 consideramos o sistema econômico de dois setores do MHT, porém relaxamos a hipótese original em que o salário urbano é politicamente fixado, substituindo-a por uma determinação endógena deste salário, baseada na teoria do salário-eficiência. Dada a estrutura de equilíbrio do sistema, passamos para a seção 3.2, onde a formalização do processo migratório como um problema de escolhas discretas é feita. Concluímos este capítulo apresentando na seção 3.3 a implementação do modelo baseado em agentes e seus resultados.

No capítulo 4, novamente abordamos o processo de migração rural-urbana, porém, desta vez, através de um modelo baseado em agentes com dinâmica paralela. O processo de migração dos trabalhadores é tomado como um processo de *aprendizagem social* por imitação. Nesta parte do trabalho, os resultados obtidos originalmente por Harris e Todaro são propriedades emergentes do nosso modelo.

Finalmente, no último capítulo apresentamos as conclusões deste trabalho e possíveis extensões do modelo para pesquisa futura.

Capítulo 1

Conceitos Básicos

Elaborar um trabalho no qual o tema é a migração interna, sendo que a abordagem deste tema é feita através de modelos da Mecânica Estatística, em que a principal ferramenta de análise são as simulações computacionais, implica, necessariamente, em um trabalho de caráter interdisciplinar. Por isso, tendo em vista este aspecto, objetivamos neste primeiro capítulo, apresentar alguns conceitos básicos fundamentais para a compreensão dos capítulos subsequentes. Os principais conceitos, tais como sistemas complexos, modelos baseados em agentes, modelo de Ising e transições de fase serão mostrados de uma maneira que o leitor que não seja da área de Física possa compreendê-los. Por outro lado, pretendemos também mostrar ao leitor da área de Física as possíveis relações desses conceitos com outras áreas do conhecimento, principalmente a Economia.

1.1 Sistemas Complexos

Definir o que vem a ser um sistema complexo não constitui uma tarefa simples, haja visto que não há uma maneira única de identificá-los. Diferentes autores caracterizam esses sistemas de maneiras distintas, destacando sempre as características mais pertinentes às suas áreas de estudo, as quais permitem classificá-los como sistemas complexos. Em geral, sistemas complexos são necessariamente sistemas

dinâmicos em contínua evolução, constituídos de uma grande quantidade de unidades que interagem entre si de uma maneira não-linear. Esta interação entre suas partes gera uma ou mais regularidades em nível macro no sistema. Por sua vez, tais regularidades ou propriedades realimentam estas unidades, as quais, sob determinadas condições, interagem entre si novamente, fazendo surgir essas propriedades. Segundo Flake [3], um sistema é definido como complexo se exibir duas características: 1) o sistema é composto de unidades interagentes; 2) o sistema exibe propriedades emergentes, ou seja, padrões que surgem a partir da interação de suas unidades, propriedades estas que *não são das unidades individuais*. Vicsek [4] define tais sistemas como aqueles em que os processos que ocorrem simultaneamente em diferentes escalas ou níveis são importantes, e o comportamento intrincado do sistema como um todo depende de suas unidades de uma maneira não trivial. Para Casti [5], nos sistemas complexos os agentes são necessariamente adaptativos, no sentido de que tomam decisões de acordo com várias regras, estando prontos para modificar suas regras de ações a partir das novas informações que surgem. Nesta definição, o termo unidades foi substituído por agentes, termo empregado para sistemas sociais. Agentes são unidades de um sistema complexo capazes de tomar decisões autônomas, dadas certas restrições impostas pelo ambiente social relevante em que estão situados. Por sua vez, Durlauf [6] afirma que um sistema é dito complexo quando exibe algum tipo de ordem como resultado das interações de muitos objetos heterogêneos. Quando as interações ocorrem em um nível de descrição que seja aquele em que os padrões ocorrem, esses padrões são frequentemente chamados de *emergentes*.

Outras características importantes dos sistemas complexos são a *frustração*, a *hierarquia* e a existência de *atratores múltiplos* [7, 8]. A frustração ocorre quando uma das unidades do sistema complexo recebe diversas informações contraditórias. Assim, cada unidade tendo que responder a apenas uma dessas informações, inevitavelmente frustrará outras. Outro aspecto, a organização hierárquica, ou simplesmente hierarquia, refere-se aos diferentes níveis de organização e interação dos sistemas complexos. Na ref. [7], para ilustrar o fato dos sistemas complexos serem

hierárquicos, o autor usa o exemplo de um sinal luminoso que atinge a retina. Este sinal será tratado em diversos níveis antes de chegar a área do cérebro responsável pela visão, ou seja, há uma hierarquização no processamento dessa informação (sinal luminoso). Um outro exemplo são as economias [8]: as interações dos agentes de uma economia que ocorrem em um nível microeconômico tais como decisões de consumo, de investimento, inovações tecnológicas e lançamento de produtos servem como base para a construção de outras interações em um nível mais elevado como, por exemplo, o preço de equilíbrio de um determinado bem no mercado, o processo inflacionário e a taxa de crescimento do PIB de um país. Finalmente, um atrator em sistemas dinâmicos é um estado para o qual diferentes estados iniciais do sistema tendem. Desta forma, a presença de atratores múltiplos está ligada à possibilidade de existência de múltiplos equilíbrios do sistema, característica típica de um sistema complexo. Devido à existência de múltiplos estados de equilíbrio (e ao fato da própria dinâmica alterar o sistema) toda a história, ou evolução, do sistema é determinante da sua condição atual.

1.2 O Modelo de Ising para o Ferromagnetismo

Nesta seção apresentaremos o modelo de Ising e suas principais características, embora este modelo não seja um sistema complexo, tem várias aplicações a esses sistemas. Inicialmente, vamos abordar alguns conceitos sobre sistemas magnéticos, fazendo a classificação de materiais de acordo com suas propriedades magnéticas para, em seguida, apresentar o modelo propriamente dito.

Alguns materiais, como o ferro, apresentam características magnéticas à temperatura ambiente. A interação magnética aparece devido ao movimento de cargas elétricas. No entanto, para fornecer uma explicação sobre o fenômeno do magnetismo em materiais é preciso lançar mão da Mecânica Quântica: elétrons possuem spin, isto é, momento angular intrínseco. O spin dos elétrons e o movimento angular orbital eletrônico são os responsáveis pelo magnetismo nos materiais, ou por seu

”momento magnético”.

Diferentes materiais terão momentos magnéticos diferentes e, conseqüentemente, propriedades magnéticas diversas. Entre os vários fenômenos magnéticos, vamos rapidamente apresentar aqueles que nos interessam, neste trabalho. Alguns materiais apresentam momento magnético permanente. O *paramagnetismo* consiste na ausência de magnetização espontânea, mas que pode ser induzida através da aplicação de um campo magnético externo. Os momentos magnéticos atômicos tenderão a se alinhar com o campo externo gerando uma magnetização total diferente de zero. Neste caso, os materiais magnéticos se comportam como se fossem imãs permanentes.

O ferromagnetismo ocorre em alguns materiais, como o *Fe* e outros materiais cristalinos. Eles apresentam uma magnetização espontânea, isto é, mesmo na ausência de um campo externo. Esta magnetização é causada pela tendência dos momentos magnéticos de átomos vizinhos se alinharem, devido ao princípio de exclusão de Pauli, dando origem à interação de troca entre átomos. Materiais antiferromagnéticos tendem a ter seus momentos magnéticos alinhados antiparalelamente. Estes materiais não apresentam magnetização espontânea.

À medida que um material ferromagnético é exposto a temperaturas mais elevadas, as flutuações térmicas podem destruir a ordem magnética, fazendo-os se comportar como materiais paramagnéticos. Esta mudança ocorre em uma temperatura bem definida, que depende do material em questão, chama temperatura de Curie (materiais antiferromagnéticos apresentam comportamento semelhante na chamada temperatura de Néel). Esta mudança de comportamento ferro-paramagnético é chamada de *transição de fase*.

Ernest Ising, em sua tese de doutorado, propôs um modelo de interação local entre spins em uma dimensão para um sistema ferromagnético [9], o qual passou a ser conhecido como modelo de Ising. A hamiltoniana do modelo para um material ferromagnético é dada por:

$$\mathcal{H} = -H \sum_i \sigma_i - J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j. \quad (1.1)$$

A variável σ_i representa os estados possíveis do i -ésimo spin, neste caso, $\sigma_i = \pm 1$ (*up* ou *down*). O termo $H \sum_i \sigma_i$ refere-se à interação de um campo magnético externo H com todos os spins do sistema. O segundo termo desta hamiltoniana, $J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j$, é a parte conhecida como interação de Ising. A constante J é a energia de troca entre os spins: $J > 0$ favorece o alinhamento paralelo dos spins, $\sigma_i = \sigma_j$, portanto descreve no caso ferromagnético; $J < 0$, um alinhamento antiparalelo dos spins é favorecido, $\sigma_i = -\sigma_j$, como no caso anti-ferromagnético. Para $J = 0$, a hamiltoniana dada na eq. (1.1) torna-se válida apenas para materiais paramagnéticos, pois, como dito anteriormente, não existe interação entre spins nesses materiais. A interação $\sigma_i \sigma_j$, ou seja, a interação entre os spins, é avaliada na vizinhança $\langle ij \rangle$ do i -ésimo spin. Pelo fato de Ising ter proposto seu modelo em apenas uma dimensão, essa interação foi feita somente entre os primeiros vizinhos. A interação entre mais vizinhos foi realizada quase 20 anos mais tarde, quando Onsager [10] resolveu analiticamente o modelo de Ising em duas dimensões. A solução exata do modelo para mais de duas dimensões não é conhecida até hoje. Existem várias técnicas para obtenção de soluções aproximadas para este modelo em 3 dimensões. Uma delas é particularmente interessante e é a ferramenta principal utilizada neste trabalho: o Método de Monte Carlo que descrevemos a seguir.

1.3 Método de Monte Carlo

Entende-se por Método de Monte Carlo qualquer método computacional em que haja a necessidade de gerar aleatoriamente o valor de uma ou mais variáveis. Por isso, de início, mostraremos algumas formas de gerar números aleatórios em computador.

Segundo Von Neuman: "qualquer um que use métodos aritméticos para pro-

duzir números aleatórios está em estado de pecado” (*apud*) [11]. Essa afirmação se deve ao fato de que um gerador aleatório baseado em métodos computacionais determinísticos não pode ser considerado um gerador verdadeiro, haja vista que seu resultado é, de certa forma, previsível. Apesar disso, os ditos pseudo-geradores têm se mostrado bastante úteis nas aplicações a diversos problemas.

Há diversas formas de gerar um número aleatório em um computador, cada uma tem suas vantagens e desvantagens. Mostraremos aqui apenas um tipo simples de gerador, chamado de LCG ou gerador congruencial linear, utilizado desde 1950. No pseudo-código 1.3.1 vemos esquematicamente como funciona um desses geradores.

Algoritmo 1.3.1: GERADORALEATÓRIO(r_n)

$r_0 \leftarrow$ número inteiro /* semente do gerador */

$r_{n+1} \leftarrow a * r_n$

Um número inteiro positivo é atribuído a r_0 , em seguida a função $r_{n+1} = a * r_n$ é executada, onde a é número inteiro positivo muito grande. A qualidade do gerador dependerá do valor de a , sendo que os valores mais comuns para computadores de 32 bits são 16807, 69621, 1103515245 e 13^{13} ou 44485709377909 para 64 bits [12].

O processo de multiplicação, $a * r_n$, produzirá um número muito grande, além da capacidade de representação do computador. Desta forma, alguns bits serão desconsiderados, o que gerará um outro número inteiro com os bits que permanecem e este será nosso número aleatório. Se desejarmos gerar números fracionários dentro do intervalo $[0, 1]$, basta dividir o número r_{n+1} pelo maior número representado pelo computador. Agora, passaremos à aplicação do método de Monte Carlo para o modelo de Ising numa rede quadrada em duas dimensões.

É conhecido da Mecânica Estatística que a probabilidade de encontrar um sistema no estado de energia E_n , em equilíbrio térmico com um reservatório de calor à temperatura T é dada por:

$$P(E_n) \propto g_n e^{-E_n/K_B T}, \quad (1.2)$$

onde g_n é a degenerescência dos estados n , ou seja, o número de microestados com a mesma energia E_n (distribuição de Boltzmann).

Uma condição suficiente para um sistema que sofre um processo Markoviano, isto é, o estado do sistema em um dado tempo só depende do tempo anterior, é a condição do balanço detalhado:

$$W_{mn}P_m = W_{nm}P_n, \quad (1.3)$$

onde W_{ij} é a taxa de transição do estado $i \rightarrow j$ e P_i é a distribuição de probabilidades no equilíbrio do estado i . Destas duas constatações podemos apresentar o algoritmo de Metropolis [13].

Para a distribuição de Boltzmann, se quisermos estudar a transição de um estado de energia E_0 para outro E_n , teremos:

$$W(E_0 \rightarrow E_n)P(E_0) = W(E_n \rightarrow E_0)P(E_n). \quad (1.4)$$

Se ambos os estados são acessíveis, $P(E_0) \neq 0$ e $P(E_n) \neq 0$, então

$$\frac{W(E_0 \rightarrow E_n)}{W(E_n \rightarrow E_0)} = \exp\left(-\frac{E_n - E_0}{T}\right). \quad (1.5)$$

A equação acima permite a escolha de uma das taxas de transição. O critério de Metrópolis se resume a sempre aceitar mudanças se o novo estado (E_n) for energeticamente mais baixo que o inicial (E_0). Portanto, a probabilidade de aceitação de uma mudança do estado $\Delta E = E_0 \rightarrow E_1$ é dada por:

$$P(E_0 \rightarrow E_1) = \min(1, e^{-\Delta E/T}). \quad (1.6)$$

O papel da temperatura pode ser entendido como: quanto menor a temperatura, menor a probabilidade do sistema ir para um estado mais energético.

Basicamente, atribui-se aleatoriamente a cada sítio de uma rede quadrada um dos valores possíveis ao spin, $\sigma_i = \pm 1$. Dada uma temperatura inicial T_0 , a evolução do sistema é iniciada da seguinte forma: para um dado spin σ_i calcula-se sua energia em relação aos seus vizinhos, obtendo-se um valor E_0 . Em seguida, o estado deste spin é virado, isto é, $\sigma_i \rightarrow -\sigma_i$ e novamente sua energia em relação a vizinhança, E_1 , é calculada. Se $\Delta E = E_1 - E_0 < 0$, a mudança do estado do spin é aceita, pois diminui a energia do sistema, como dito anteriormente. Caso contrário, essa mudança será aceita com probabilidade definida na eq. (1.6). Esse processo será repetido para todos os spins da rede, ou seja, será feita uma varredura da rede. Cada vez que uma dessas varreduras é concluída, diz-se que um passo de Monte Carlo foi dado. A cada passo de Monte Carlo podemos calcular a magnetização líquida do sistema, definida como

$$m = \frac{1}{N} \sum_i \sigma_i, \quad (1.7)$$

onde N é o número total de spins da rede quadrada.

Para a obtenção das médias termodinâmicas, lançamos mão da hipótese ergódica: a média da magnetização será igual a média dos valores obtidos em todos os passos após o equilíbrio. Frequentemente, nos estudos de sistemas físicos, nos deparamos com os problemas de tamanho finito (e tempo finito), já que os sistemas simulados são muito menores que os sistemas reais (tipicamente simulamos $10^6 \sim 10^9$ spins para sistemas reais de 10^{23} átomos) [14].

1.4 Transições de Fase

Na Figura 1.1 temos o diagrama de fase de um fluido que não é a água. As três fases, sólida, líquida e gasosa estão bem definidas dentro de certos limites em que esses estados são estáveis. Ao cruzar um desses limites através da variação da temperatura T e/ou pressão P , ocorrerá uma abrupta variação na densidade do fluido, a qual é uma assinatura de uma transição de fase. As transições de fase em

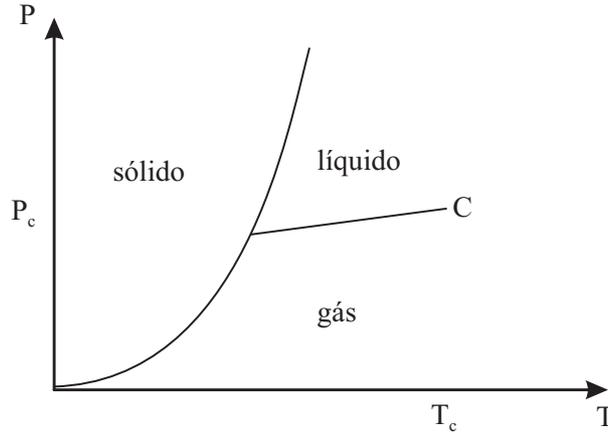


Figura 1.1: *Diagrama de fase de um fluido.*

sistemas físicos podem ser caracterizadas por um parâmetro de ordem. Tomando novamente como exemplo o fluido, mudando do estado líquido para o estado gasoso, o parâmetro de ordem escolhido é a diferença entre as densidades do líquido e do vapor. Quando esta diferença for nula, ou melhor dizendo, quando o parâmetro de ordem for nulo, $\rho_l - \rho_g = 0$, o sistema terá sofrido uma transição de fase, cf. Figura 1.2. Analogamente, em sistemas ferromagnéticos, o parâmetro de ordem é a magnetização total m . Portanto, o monitoramento do parâmetro m servirá de indicador da ocorrência ou não de uma transição de fase.

Para um sistema magnético o potencial termodinâmico apropriado é a energia livre \mathcal{F} , dada por:

$$\mathcal{F} = U - TS, \quad (1.8)$$

onde U é a energia interna, T a temperatura e S a entropia do sistema.

A partir da energia livre, eq. (1.8), obtemos a magnetização através da relação

$$M = - \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial H} \right)_T \quad (1.9)$$

e a susceptibilidade magnética

$$\chi = \left(\frac{\partial M}{\partial H} \right)_T. \quad (1.10)$$

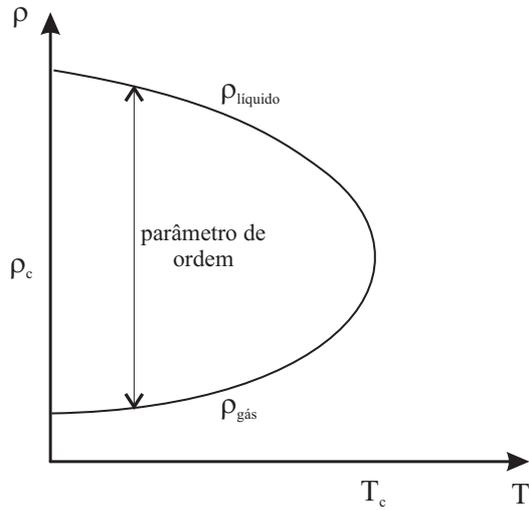


Figura 1.2: Curva de coexistência da fase líquida e gasosa.

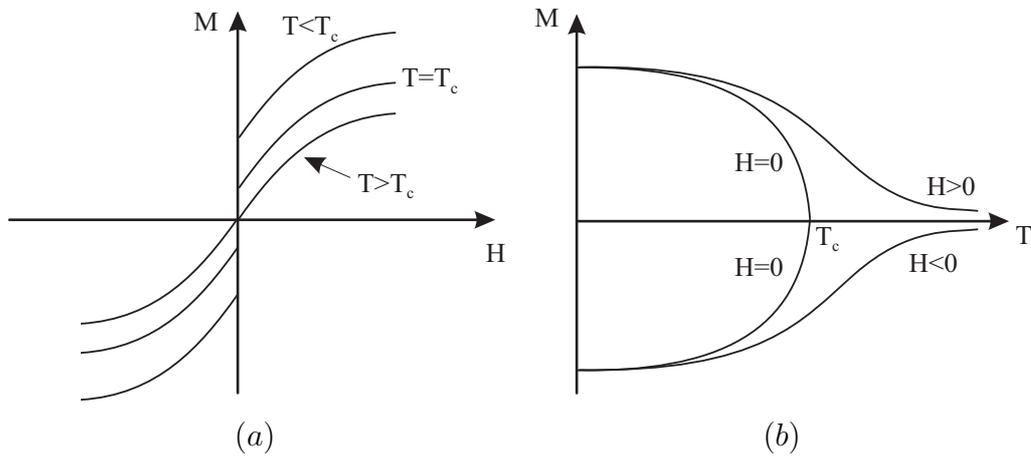


Figura 1.3: Magnetização. Fig. (a) mostra a dependência da magnetização M em função do campo externo H . Fig. (b) mostra a dependência da magnetização M em função da temperatura T .

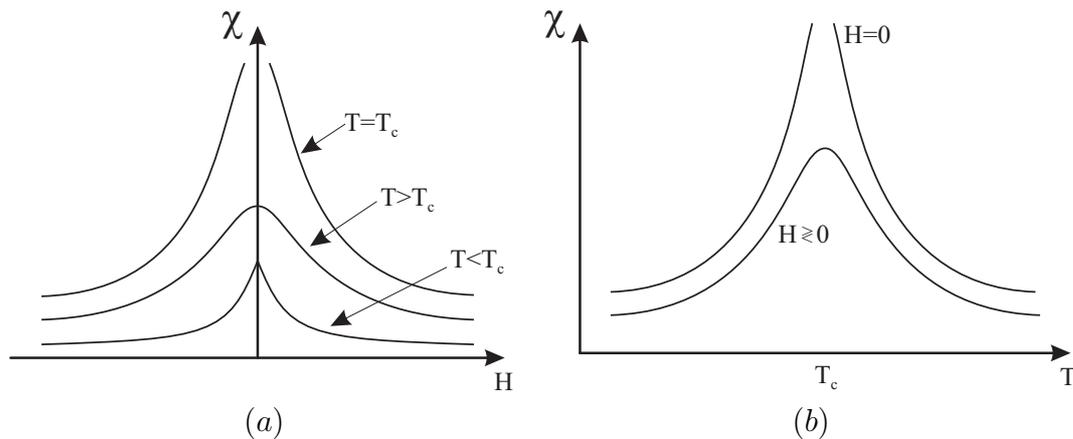


Figura 1.4: Susceptibilidade magnética χ . Fig. (a) mostra a dependência da susceptibilidade χ em função do campo magnético externo H . Fig. (b) mostra a dependência da susceptibilidade χ em função da temperatura T .

O diagrama de fase de um ferromagneto está esboçado na Figura 1.3. Na Fig. 1.3a vemos a dependência da magnetização M em função do campo externo H e na Fig. 1.3b, a dependência da magnetização M em função da temperatura T .

Na Figura 1.4 temos esboçada a susceptibilidade magnética χ . Na Fig. 1.4a vemos a dependência da susceptibilidade χ em função do campo magnético externo H e na Fig. 1.4b, a dependência da susceptibilidade χ em função da temperatura T .

Classificação das Transições de Fase

O diagrama de fase para o modelo de Ising é mostrado na Figura 1.5. Podemos ver que para temperaturas $T < T_c$, o sistema apresenta uma magnetização líquida, $m > 0$. Porém, para valores de $T \cong T_c$, ou seja, próximos a temperatura crítica, o sistema sofre uma brusca mudança nos valores da magnetização. A partir daí, o sistema entra em uma fase com magnetização total nula, indicando a ocorrência de uma transição de fase. No caso do fluido, na transição sólido-líquido, por exemplo, existe uma descontinuidade na densidade nas duas fases. Já no caso dos sistemas magnéticos, a descontinuidade é na susceptibilidade magnética (derivada do parâmetro de ordem). Na classificação de Ehrenfest, chamamos a transição

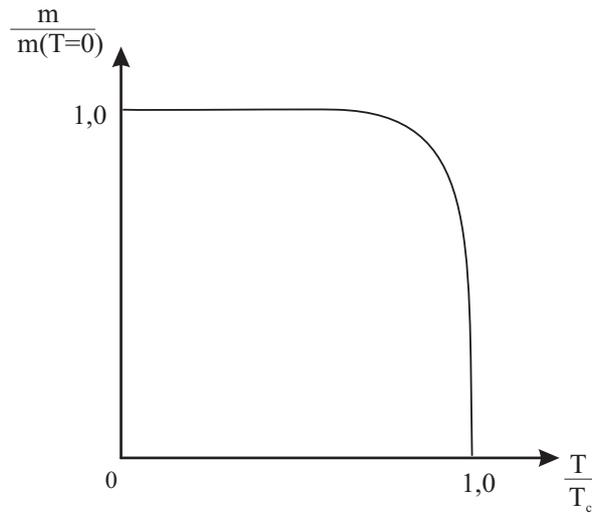


Figura 1.5: *Diagrama de fase para uma material ferromagnético.*

sólido-líquido de transição de primeira ordem, pois a descontinuidade é na primeira derivada do potencial termodinâmico. Como no caso magnético a descontinuidade ocorre na segunda derivada (susceptibilidade), esta chamamos de transição de fase de segunda ordem. Existem transições de fase de ordem infinita, onde não há descontinuidade no parâmetro de ordem mas há quebras de simetria.

Transições de fase de segunda ordem apresentam expoentes críticos, caracterizando um comportamento algébrico (lei de potência) de várias grandezas termodinâmicas. Por outro lado, transições de fase de primeira ordem apresentam calor latente (energia necessária para que haja transição).

1.5 Expoentes Críticos e Universalidade

Como vimos na seção anterior, em transições de fase contínuas, à medida que nos aproximamos do ponto crítico alguma grandezas termodinâmicas divergem. Com o intuito de analisar essas divergências, vamos definir um parâmetro τ (distância da temperatura crítica) como :

$$\tau = \frac{T - T_c}{T_c}, \quad (1.11)$$

o qual mede o distanciamento da temperatura crítica T_c . Então, o expoente crítico associado a uma grandeza termodinâmica qualquer $A(\tau)$ é

$$\lambda = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\ln |A(\tau)|}{\ln |\tau|}, \quad (1.12)$$

ou

$$A(\tau) \sim |\tau|^\lambda. \quad (1.13)$$

É importante lembrar que o sinal \sim na equação acima está relacionado com o comportamento assintótico de $A(\tau)$ à medida que $\tau \rightarrow 0$, isto é, podemos afirmar que a forma funcional de $A(\tau)$ é algébrica, mas apenas seu comportamento nas proximidades do ponto crítico. Para melhor compreender a idéia de expoente crítico, vamos analisar a Figura 1.4b em que temos esboçada a dependência da susceptibilidade χ em função da temperatura T . Para este caso, temos que

$$\chi(T) \sim |\tau|^{-\gamma} \quad \text{com } \gamma > 0, \quad (1.14)$$

ou seja, a susceptibilidade magnética a campo-zero diverge conforme a eq. (1.14), cf. Fig. 1.4b.

Como exemplos, temos o comportamento de algumas grandezas físicas próximas a criticalidade que podem ser caracterizadas pelos expoentes α , β , γ , δ :

$$\begin{aligned} C_H &\sim |\tau|^{-\alpha} &\rightarrow &\text{ calor específico} \\ m &\sim (-\tau)^\beta &\rightarrow &\text{ magnetização} \\ \chi_T &\sim |\tau|^{-\gamma} &\rightarrow &\text{ suscetibilidade magnética} \\ H &\sim |m|^\delta &\rightarrow &\text{ resposta ao campo externo em } T_c \end{aligned}$$

A temperatura crítica T_c depende das interações inter-atômicas de cada material, portanto, pode variar muito dependendo do sistema em questão. Por sua vez, os

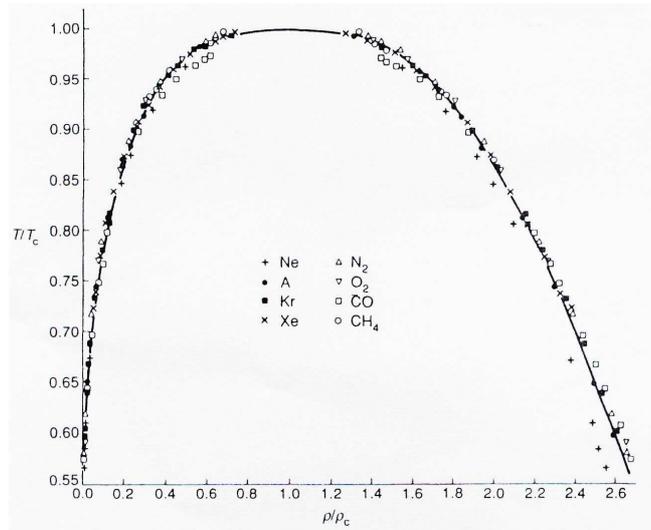


Figura 1.6: Curva de coexistência de oito fluidos diferentes. O ajuste requer o parâmetro $\beta = 1/3$. Figura retirada da ref. [15], página 28.

expoentes críticos dependem de poucos parâmetros, tais como dimensionalidade do sistema ou simetria do parâmetro de ordem. Assim sendo, vários sistemas podem ser descritos pelo mesmo conjunto de expoentes críticos, os quais pertencem a uma classe de universalidade. Em 1945, Guggenheim [16] produziu um gráfico para oito fluidos diferentes, relacionando T/T_c em relação a ρ/ρ_c , cf. Figura 1.6. Nesta figura os dados referentes aos oito diferentes materiais estão sobre a mesma curva e, por isso, podem ser descritos pelo mesmo expoente crítico. Assim, afirmamos que estes materiais pertencem a uma mesma classe de universalidade.

Encontrar sistemas que pertençam a uma determinada classe de universalidade, ou seja, que possam ser descritos pelos mesmos expoentes críticos, é de grande importância, haja visto que poderemos obter informações sem conhecer detalhes microscópicos desses sistemas.

1.6 Econofísica e Sociofísica

Como destacado por Chakrabarti [17] (*apud* [18]), o termo econofísica é um neologismo criado por Stanley em 1995 na II conferência Statphys-Kolkata [19] na Índia

e usado de forma impressa pela primeira vez por ele [20]. Mantegna e Stanley [21] definem "o campo multidisciplinar da econofísica" como um "neologismo que denota a atividade de físicos que estão trabalhando em problemas de economia para testar uma variedade de novas abordagens conceituais que derivam das ciências físicas". Os problemas tratados pela econofísica são inúmeros, entre eles estão a distribuição de retornos no mercado financeiro, a distribuição de renda e riqueza, a distribuição de choques econômicos e variações das taxas de crescimento, a distribuição do tamanho das firmas e suas taxas de crescimento, bem como a distribuição do tamanho de cidades.

Porém, tentativas de explicar fenômenos sociais utilizando-se de leis físicas são bem mais antigas do que a econofísica [22]. Em 1781, Laplace registra o nascimento de homens e mulheres em Paris, explicando esses dados como resultado de processos aleatórios e não como uma intervenção divina! Segundo ele, a distribuição de tais nascimentos poderia ser descrita pela "curva de erro", a qual foi introduzida na matemática por Abraham de Moivre em 1733. Atualmente, conhecemos esta curva como uma distribuição gaussiana ou normal. Maxwell chega à conclusão de que a curva erro ou gaussiana é evidência de processos aleatórios, embora determinísticos, complexos demais pra serem explicados da maneira clássica como vinha sendo feito até então.

Filósofos Iluministas, tais como Immanuel Kant e Augusto Comte, afirmavam que os fenômenos sociais estavam sujeitos a leis tão precisas quantos as que tratavam do mundo físico. Comte foi quem pela primeira vez usou o termo física social. Como mencionado por Ball [22]: "há uma prazerosa simetria na maneira em que os físicos estatísticos de hoje **cautelosamente** procuram estender seus modelos e conceitos para a ciência social..." (grifo nosso). A aplicação destes modelos e conceitos conta hoje com uma ferramenta poderosíssima, a qual permitiu estudar sistemas sociais considerados complexos, não passíveis de tratamento analítico: as simulações computacionais.

1.7 Simulações

Pensar em ciência moderna associada ao uso dos computadores é algo quase que imediato. A primeira aplicação de computadores em larga escala foi no projeto Manhattan para simular detonações nucleares. O rápido avanço no poder de processamento dessas máquinas tem permitido, como nunca antes na história, sua aplicação a uma gama gigantesca de problemas. Vemos computadores sendo utilizados para resolver problemas que variam desde a solução numérica de equações analiticamente intratáveis até a análise de fenômenos físicos, que por questões econômicas ou por limitações técnicas tornam-se impraticáveis experimentalmente. Tomemos como exemplo os sistemas magnéticos, anteriormente mencionados, os quais são comumente estudados através de simulações do modelo de Ising.

A possibilidade de simular sistemas físicos, ou seja, imitá-los e reproduzi-los artificialmente em um programa de computador, tornou-se uma ferramenta poderosíssima usada em diversas áreas do conhecimento. Essas possibilidades não se limitam apenas a fenômenos físicos, mas também à construção de sociedades artificiais.

O estudo de sociedades reais torna-se complicado haja visto a impossibilidade de ter-se um controle sobre todas ou até mesmo algumas variáveis pertinentes à análise pretendida. Isso, associado às escalas de tempo em que alguns fenômenos ocorrem, dificulta ou impossibilita a observação da dinâmica de sociedades reais. Assim, criar em um programa de computador uma sociedade artificial é algo que ultimamente os pesquisadores têm utilizado com frequência crescente. É possível em um ambiente virtual criar condições e regras para determinar dinâmicas que se deseja estudar. E mais, é possível um controle dos agentes destas sociedades virtuais, o que nos permite quantificar uma série de coisas impossíveis de serem medidas em sociedades reais.

Capítulo 2

Migração Rural-Urbana: A Abordagem Harris-Todaro

Os trabalhos de Harris e Todaro [23, 24] são considerados, em Economia, o ponto de partida da teoria clássica da migração rural-urbana [1]. Assim sendo, neste capítulo apresentaremos a abordagem de Harris e Todaro para migração rural-urbana, cuja estrutura será tomada como referência na presente tese.

Harris e Todaro, em seu trabalho [24], observaram em muitos países subdesenvolvidos, em particular na África, a ocorrência do fenômeno de migração rural-urbana, mesmo havendo um produto marginal positivo na agricultura¹ e consideráveis níveis de desemprego no setor urbano. Esses dois efeitos deveriam funcionar como um freio ao processo migratório.

Assim sendo, Harris e Todaro [24], formularam um modelo de dois setores para migração rural-urbana, MHT daqui em diante. A principal característica deste modelo é o princípio de que a migração ocorre em resposta a *rendimentos esperados*, com a taxa de desemprego urbano agindo como uma força de estabilização no processo de migração. Neste modelo, entre outras coisas, supõe-se a existência de um salário mínimo urbano determinado politicamente a níveis mais elevados do que os

¹Com um produto marginal positivo na agricultura, um fluxo migratório rural-urbano acarreta uma redução na produção agrícola e aumenta o salário rural.

rendimentos rurais. A *suposição crucial*, como denominada na ref. [24], no MHT é de que a migração rural-urbana continuará enquanto o rendimento urbano esperado exceda o rendimento agrícola. O rendimento urbano esperado será definido como sendo igual ao salário mínimo fixado politicamente vezes a proporção da força de trabalho urbano empregada. Também supõe que o preço do bem agrícola (definido em termos do bem manufaturado) é determinado diretamente pelas quantidades relativas dos dois bens produzidos.

O principal resultado do MHT é a demonstração de que, dado este salário mínimo determinado politicamente, existe uma contínua migração rural-urbana, apesar do substancial desemprego urbano, a qual representa uma escolha economicamente racional por parte do migrante.

2.1 Estrutura de Equilíbrio Geral

Harris e Todaro analisam o processo de migração rural-urbana em uma economia formada por dois setores, denominados rural e urbano. Essa economia é composta por uma população de N trabalhadores, a qual é suposta constante. Esses trabalhadores, por hipótese, não podem ofertar sua força de trabalho nos dois setores simultaneamente. Assim sendo, a cada período a seguinte igualdade é verificada:

$$N_r + N_u = N, \tag{2.1}$$

onde N_r e N_u são os números de trabalhadores localizados nos setores rural e urbano, respectivamente.

Os setores rural e urbano se diferenciam pelo tipo de bem que produzem, as tecnologias usadas pelas firmas e o processo de determinação dos salários. Adiante descrevemos as características específicas de ambos os setores.

O setor urbano, especializado na produção de bens manufaturados, tem a seguinte função de produção:

$$Y_m = f(N_m) \text{ com } f'(N_m) > 0 \text{ e } f''(N_m) < 0, \quad (2.2)$$

onde Y_m é o nível de produção de bens manufaturados e N_m é a quantidade de trabalhadores empregados na produção de bens manufaturados. A derivada $f'(N_m)$ é denominada *produtividade marginal do trabalho* da manufatura. Intuitivamente, é uma estimativa da variação da produção total da manufatura gerada pelo acréscimo de um trabalhador. Por sua vez, a derivada $f''(N_m) < 0$ implica que $f'(N_m)$ é uma função estritamente decrescente. Em outras palavras, quanto maior a quantidade de trabalhadores empregados N_m menor será a produtividade de um trabalhador adicional, mantendo todos os demais fatores de produção fixos. Funções de produção que apresentam esta propriedade são ditas satisfazerem o *princípio da produtividade marginal decrescente*.

Neste setor, por suposição, existe um salário mínimo w_m fixado pelo governo em um nível acima do valor de equilíbrio do mercado de trabalho. As firmas maximizam seus lucros, π_m , sujeitas a este salário dado, ou seja,

$$\text{Max } \pi_m = \text{Max } (f(N_m) - w_m N_m). \quad (2.3)$$

Cabe salientar, que o preço do bem manufaturado é tomado como numerário do sistema de preços, isto é, normalizado em 1. Desta forma, $f(N_m)$ é a receita total em unidades do bem manufaturado e $w_m N_m$ o custo variável (massa de salários).

A condição de primeira ordem para a maximização de lucro é

$$\frac{\partial \pi_m}{\partial N_m} = f'(N_m) - w_m = 0, \quad (2.4)$$

ou seja, no nível de emprego tal que a produtividade marginal iguala-se ao salário real tomado como exógeno pela firma. Por suposição, $f''(N_m) < 0$, garantindo que a condição de segunda ordem para maximização seja satisfeita.

Assim, N_m que satisfaz (2.4) é a escolha ótima do nível de emprego para um dado w_m . Em outros termos, a função inversa de (2.4) é a função demanda de trabalho

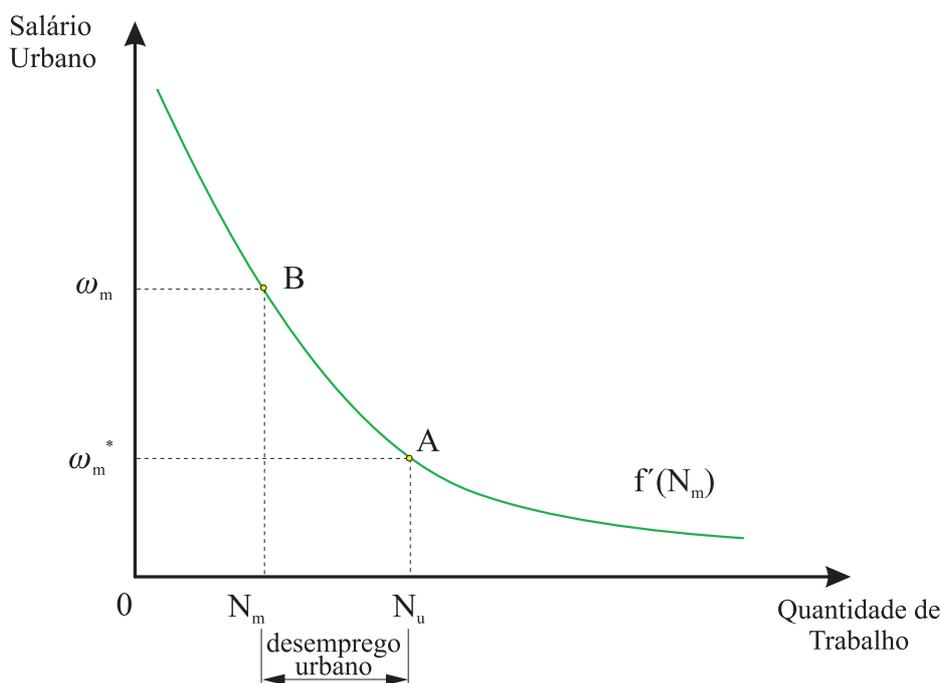


Figura 2.1: Determinação do nível de emprego manufatureiro, N_m , pela produtividade marginal $f'(N_m)$.

da manufatura:

$$N_m = f'^{-1}(w_m). \quad (2.5)$$

Na Figura 2.1 encontramos esboçada a função demanda inversa de trabalho na manufatura dada pela curva de produtividade marginal do trabalho neste setor, $f'(N_m)$. Vê-se que o nível de emprego só aumentará com uma redução do salário real, devido ao princípio de produtividade marginal decrescente. No ponto A desta figura, o salário vigente no setor urbano é w_m^* , tal que a quantidade demandada de trabalho, dada pela eq. (2.5), será $N_m = f'^{-1}(w_m^*) = N_u$. Em outras palavras, o salário do setor urbano está fixado em um patamar w_m^* que gera uma demanda suficiente para empregar toda a população urbana, ou seja, uma situação de pleno emprego. Por outro lado, no ponto B da mesma figura, o salário urbano é fixado institucionalmente em um valor acima de w_m^* , tal que a quantidade demandada de trabalho será $N_m = f'^{-1}(w_m) < N_u$, isto é, uma situação com desemprego urbano.

Em suma, segundo o MHT, se o salário urbano fosse perfeitamente flexível, a competição no mercado de trabalho urbano levaria a um salário w_m^* , ao qual todos os trabalhadores urbanos estariam empregados, cf. ponto A na Fig. 2.1. Em outros termos, se o mercado de trabalho urbano funcionasse livremente, um equilíbrio sem desemprego seria alcançado ($N_m = N_u$) com um salário w_m^* . Todavia, se $w_m > w_m^*$ a demanda por trabalho gerará um nível de desemprego $N_u - N_m > 0$, cf. ponto B na Fig. 2.1.

O setor rural, por sua vez, é formado por firmas agrícolas tomadoras de preço.² Este setor é especializado na produção de bens agrícolas. O processo produtivo deste setor é descrito pela seguinte função de produção:

$$Y_a = q(N_a) \text{ com } q'(N_a) > 0 \text{ e } q''(N_a) < 0, \quad (2.6)$$

onde Y_a é o nível de produção do bem agrícola e N_a é a quantidade de trabalhadores usados na produção agrícola. Esta função, como no setor urbano, satisfaz o princípio da produtividade marginal decrescente.

As firmas do setor agrícola tomam como dados (variáveis exógenas) o preço de venda do bem agrícola em unidades do bem manufaturado, p , e o salário agrícola também em unidades do bem manufaturado, w_a , e escolhem o nível de emprego N_a que maximiza seus lucros π_a . Em termos agregados, podemos representar este problema de maximização como segue:

$$\text{Max } \pi_a = \text{Max } (pq(N_a) - w_a N_a). \quad (2.7)$$

A condição de primeira ordem para a maximização do lucro é

$$\frac{\partial \pi_a}{\partial N_a} = pq'(N_a) - w_a = 0. \quad (2.8)$$

²Em teoria econômica, uma firma tomadora de preço é aquela que não tem poder de mercado, no sentido em que não é capaz de determinar ou afetar individualmente o preço do mercado em que está inserida.

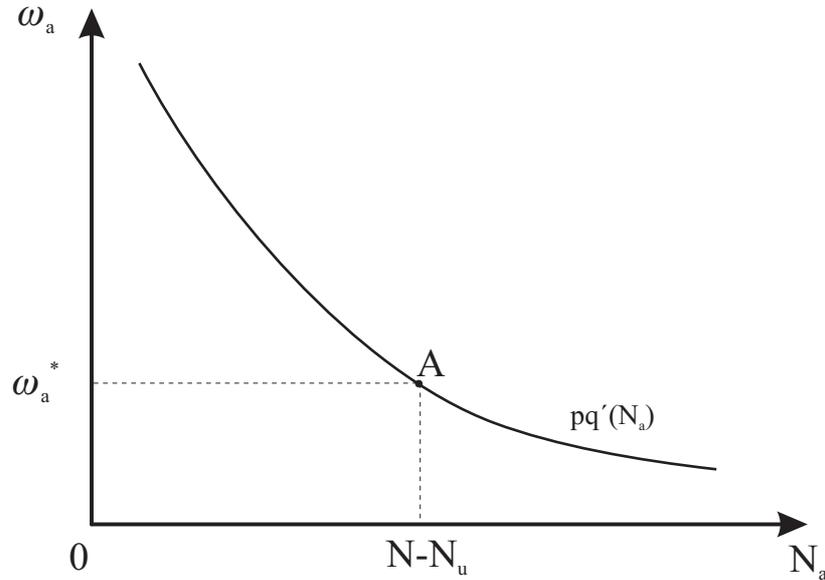


Figura 2.2: *Determinação do salário rural w_a em função da população rural.*

Por suposição, $q''(N_a) < 0$, garantido que a condição de segunda ordem para maximização seja satisfeita. Harris e Todaro supõem que o mercado de trabalho rural funciona livremente, ou seja, há perfeita flexibilidade do salário real neste setor. Isto implica que haverá em qualquer período pleno emprego no setor rural, isto é, $N_a = N_r$. Considerando a eq. (2.1), temos que $N_r = N - N_u$, cf. ponto A na Fig. 2.2. O salário real deste setor, então, será igual à produtividade marginal do trabalho agrícola no nível de emprego $N_a = N - N_u$:

$$w_a = pq'(N - N_u). \quad (2.9)$$

Harris e Todaro fecham o sistema de equilíbrio geral do seu modelo econômico bissetorial assumindo que os termos de troca entre os dois setores variam de acordo com a escassez relativa do bem agrícola, medida pela razão Y_m/Y_a . Ou seja, quanto maior (menor) esta razão, maior (menor) a escassez relativa do bem agrícola. Formalmente, o preço do bem agrícola em unidades do bem manufaturado p é considerado uma função estritamente crescente da escassez relativa do bem agrícola:

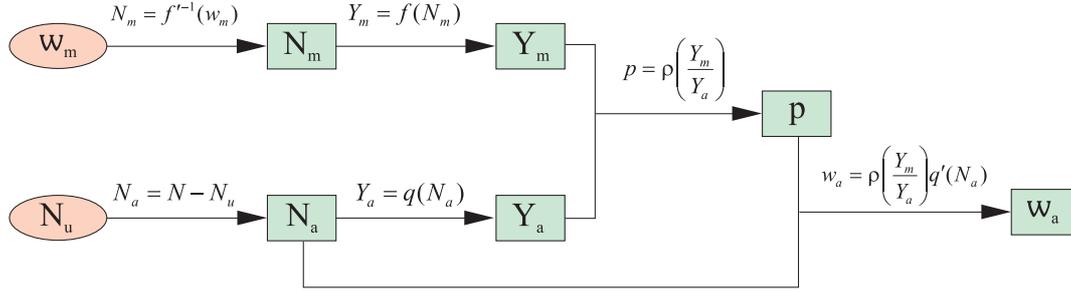


Figura 2.3: Fluxograma de determinação do equilíbrio temporário.

$$p = \rho \left(\frac{Y_m}{Y_a} \right), \text{ com } \rho' \left(\frac{Y_m}{Y_a} \right) > 0. \quad (2.10)$$

2.2 Equilíbrio Temporário

Dada a estrutura de equilíbrio geral apresentada anteriormente, podemos determinar o equilíbrio temporário definido pelo vetor de variáveis endógenas $(N_m, Y_m, N_a, Y_a, p, w_a)$ para um dado salário mínimo w_m , fixado pelo governo, e uma dada população urbana N_u , determinada pelo fluxo migratório.

Na Figura 2.3 vemos a representação esquemática do cálculo do equilíbrio temporário. Dado w_m , através da eq. (2.5) obtemos N_m . Podemos, então, determinar Y_m usando a eq. (2.2). Enfim, dado o salário mínimo, o nível de emprego e a produção do setor manufatureiro permanecem inalterados. Para o setor rural, como $N_a = N_r$, determinamos o nível de emprego agrícola N_a através da eq. (2.1), já que N_u e N são dados a cada período. Uma vez obtido N_a , a produção do setor rural com pleno emprego é calculada pela eq. (2.6). Os níveis de produção dos dois setores, Y_m e Y_a nos permitem saber os termos de troca p , dado pela equação (2.10). Finalmente, de posse de $N_a = N - N_u$ e p obtemos o salário do setor rural w_a , usando a eq. (2.9). Em suma, com este procedimento, obtivemos o vetor $(N_m, Y_m, N_a, Y_a, p, w_a)$, que define o equilíbrio temporário do sistema. Note que este equilíbrio será alterado sempre que a população urbana N_u for modificada pela migração rural-urbana.

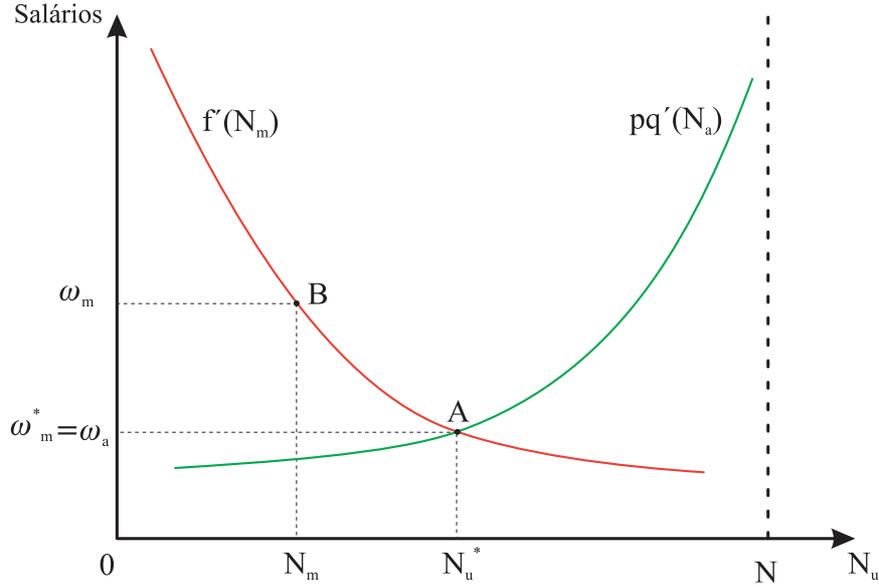


Figura 2.4: *Equilíbrio do fluxo migratório sem desemprego.*

2.3 Equilíbrio do Fluxo Migratório

Caso a restrição imposta pelo governo às firmas manufatureiras não fosse ativa, i.e., $w_m \leq w_m^*$ o mercado de trabalho urbano atingiria um equilíbrio com pleno emprego (sem desemprego). A migração entre os setores levaria à equalização dos salários urbano e rural, $w_m^* = w_a$, como mostrado no ponto A da Figura 2.4.

Todavia, ao se tornar ativa a restrição imposta pelo governo às firmas manufatureiras, i.e., $w_m > w_m^*$, surge o desemprego urbano, cf. ponto B na Figura 2.4. Agora, do ponto de vista de um migrante rural-urbano não há mais a certeza de obter um emprego quando chegar ao setor urbano. Harris e Todaro, então, argumentam que os trabalhadores rurais, na sua decisão de migrar para áreas urbanas, levam em consideração não só o salário na região de destino, mas também a probabilidade de obter um emprego urbano. Em outras palavras, estes autores partem da premissa de que a decisão de migração é formada com base no salário urbano esperado, w_u^e :

$$w_u^e = \frac{N_m}{N_u} w_m \text{ com } \frac{N_m}{N_u} \leq 1. \quad (2.11)$$

A proporção empregada da força de trabalho urbana total, N_m/N_u , é uma medida da taxa de emprego do setor urbano, tomada como estimativa da probabilidade de obter um emprego neste setor.

Conforme mencionado anteriormente, a suposição chave do modelo de Harris e Todaro é que haverá um fluxo migratório das áreas rurais para o setor urbano enquanto o salário urbano esperado for mais alto do que o rural. Desta forma, o equilíbrio do fluxo migratório é alcançado quando a população de trabalhadores urbanos atinge um nível tal que o salário urbano esperado se equaliza ao rural, ou seja,

$$w_u^e - w_a = 0. \quad (2.12)$$

Esta igualdade é conhecida na literatura econômica como *condição Harris-Todaro* [1, 25].

Harris e Todaro afirmam que o diferencial de salários esperado que torna o fluxo migratório nulo pode ser um valor constante $\delta \neq 0$. Quando este diferencial atinge δ , a migração líquida cessa. Assim, a equação (2.12) pode ser generalizada para

$$w_u^e - w_a = \delta. \quad (2.13)$$

Esta condição de equilíbrio pode ser denominada *condição generalizada Harris-Todaro*. Embora Harris e Todaro trabalhem diretamente com a eq. (2.12), neste trabalho vamos usar, sem perda de generalidade, a eq. (2.13).

Na Figura 2.5 encontra-se representada a determinação do equilíbrio do fluxo migratório ou equilíbrio Harris-Todaro com desemprego. A curva crescente representa, como na Figura 2.4, a produtividade marginal do trabalho no setor rural em unidades do bem manufaturado. Entretanto, a curva decrescente não é mais a produtividade marginal do trabalho no setor urbano. Agora, esta curva é o salário esperado urbano, $w_u^e = (N_m/N_u)w_m$. O ponto E da Figura 2.5 é solução da condição generalizada Harris-Todaro dada pela eq. (2.13).

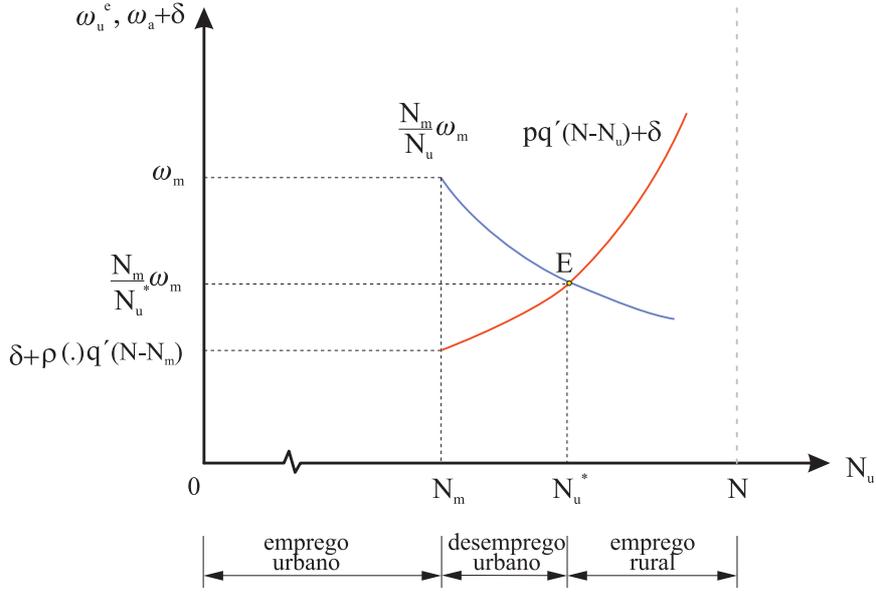


Figura 2.5: *Equilíbrio Harris-Todaro com desemprego urbano.*

Se a eq. (2.13) não for satisfeita, para uma dada população urbana, haverá um fluxo migratório entre os setores. Mais precisamente, Harris e Todaro supõem que a migração para áreas urbanas é uma função estritamente crescente do diferencial de salários esperados rural-urbano. Formalmente, os autores postulam o seguinte mecanismo de ajustamento:

$$\dot{N}_u = \psi(w_u^e - w_a) \text{ com } \psi'(\cdot) > 0 \text{ e } \psi(\delta) = 0. \quad (2.14)$$

Como podemos ver na eq. diferencial (2.14), se $w_u^e - w_a > \delta$ teremos um fluxo migratório líquido em direção ao setor urbano, isto é, $\dot{N}_u > 0$. Exatamente o oposto ocorrerá se $w_u^e - w_a < \delta$, ou seja, $\dot{N}_u < 0$.

Usando as equações (2.1),(2.6), (2.9), (2.10) e eq. (2.11), o mecanismo de ajustamento dado pela eq. (2.14) toma a seguinte forma:

$$\dot{N}_u = \psi \left(\frac{N_m}{N_u} w_m - \rho \left(\frac{f(N_m)}{q(N - N_u)} \right) q'(N - N_u) \right). \quad (2.15)$$

Harris e Todaro demonstraram que o equilíbrio, N_u^* , com desemprego urbano, é um atrator global da dinâmica migratória. Com efeito, derivando a eq. (2.15) em

relação a N_u , obtemos

$$\frac{\partial \dot{N}_u}{\partial N_u} = \psi'(\cdot) \left[\frac{\partial w_u^e}{\partial N_u} - \frac{\partial w_a}{\partial N_u} \right]. \quad (2.16)$$

Desenvolvendo os cálculos das derivadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{N}_u}{\partial N_u} = \psi'(\cdot) \left\{ -\frac{N_m}{N_u^2} w_m - \left[q'(N - N_u) \frac{\partial}{\partial N_u} \rho \left(\frac{f(N_m)}{q(N - N_u)} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. \rho \left(\frac{f(N_m)}{q(N - N_u)} \right) \frac{\partial}{\partial N_u} q'(N - N_u) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Efetando as operações de derivação restantes, usando a regra da cadeia, temos:

$$\frac{\partial \dot{N}_u}{\partial N_u} = \psi'(\cdot) \left\{ -\frac{N_m}{N_u^2} w_m - \left[q'(\cdot) \rho'(\cdot) \left(-\frac{f(\cdot)}{(q(\cdot))^2} \right) q'(\cdot)(-1) + \rho(\cdot) q''(\cdot)(-1) \right] \right\}. \quad (2.18)$$

Finalmente, simplificando:

$$\frac{\partial \dot{N}_u}{\partial N_u} = \psi'(\cdot) \left\{ -\frac{N_m}{N_u^2} w_m - \rho'(\cdot) f(\cdot) \left[\frac{q'(\cdot)}{q(\cdot)} \right]^2 + \rho(\cdot) q''(\cdot) \right\}. \quad (2.19)$$

Para determinar o sinal da derivada (2.19), basta avaliar o sinal da expressão entre chaves, pois $\psi'(\cdot) > 0$. Considerando o primeiro termo, $-(N_m/N_u^2)w_m$, sabemos que $N_m > 0$, $N_u > 0$ e $w_m > 0$, o que o torna negativo. No segundo termo, $-\rho'(\cdot)f(\cdot) \left[\frac{q'(\cdot)}{q(\cdot)} \right]^2$, temos que, por suposição, $\rho'(\cdot) > 0$, $f(\cdot) > 0$, $q(\cdot) > 0$ e $q'(\cdot) > 0$, garantindo que este termo também seja negativo. O último termo, $\rho(\cdot)q''(\cdot)$ é formado por $\rho(\cdot) > 0$ e $q''(\cdot) < 0$, tornando-o também negativo. Enfim, a expressão entre chaves da derivada (2.19) é estritamente negativa, implicando que $\partial \dot{N}_u / \partial N_u < 0$. Ou seja, \dot{N}_u é uma função estritamente decrescente como mostrado na Figura 2.6.

Logo, para uma população inicial $N_{u0} < N_u^*$ (ponto A da Fig. 2.6), teremos $\dot{N}_u > 0$, pois $\dot{N}_u = 0$ em N_u^* e $\partial \dot{N}_u / \partial N_u < 0$. Exatamente o oposto ocorre quando $N_{u0} > N_u^*$ (ponto B da Fig. 2.6). Se a população está abaixo do valor de equilíbrio, $N_{u0} < N_u^*$ (ponto A da Fig. 2.6), a taxa de emprego urbano, (N_m/N_u) , é alta, a

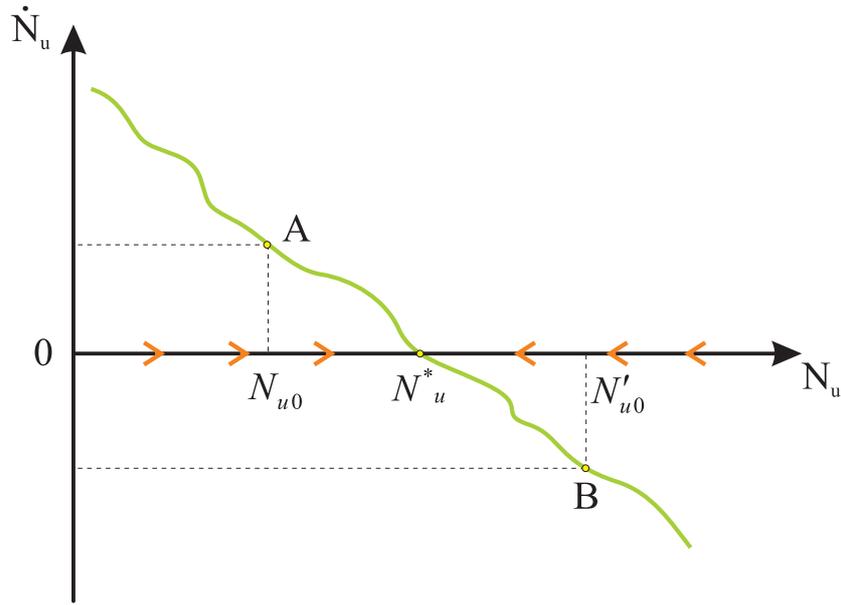


Figura 2.6: Estabilidade assintótica global do equilíbrio Harris-Todaro com desemprego urbano.

produtividade marginal do trabalho rural, $q'(N_a)$, é baixa e os termos de troca, p , são favoráveis ao setor urbano, isto é, p é baixo. Esta configuração gera um salário real urbano médio maior do que o salário no setor rural. Este diferencial leva a um fluxo migratório líquido em direção ao setor urbano. A situação oposta ocorre quando a população urbana está acima do nível do equilíbrio de Harris-Todaro, $N_{u0} > N_u^*$, (ponto B da Fig. 2.6). Neste caso, a taxa de emprego urbano é muito baixa, a produtividade marginal do setor rural é bastante alta e os termos de troca favorecem o setor rural. Assim, o salário real urbano médio é inferior ao salário rural. Esta configuração causa uma migração rural-urbana reversa, ou seja, o diferencial de salário esperado negativo gera um fluxo migratório líquido do setor urbano para o setor rural.

Capítulo 3

Migração: Uma Abordagem de Mecânica Estatística

Nesta parte do trabalho, analisamos o fenômeno de migração rural-urbana através de um modelo computacional baseado em agentes com métodos de análise da mecânica estatística, cujo objetivo é descrever algumas das principais características das economias em desenvolvimento. Tratamos a decisão de migrar da maneira usual, considerando a força exercida pela diferença de rendimentos entre os dois setores como descrito no MHT apresentado no capítulo 2. Todavia, propomos uma modelagem da migração rural-urbana como um problema de escolha discreta [6, 26], o que nos permite formalizar o processo de migração utilizando o modelo de Ising. Com isso, conseguimos formalizar o efeito de vizinhança social na decisão de migrar. Além disso, relaxamos a hipótese original de Harris-Todaro de que o salário urbano é politicamente fixado, substituindo-a por uma determinação endógena deste salário, baseada na teoria do salário-eficiência [27].

3.1 Descrição do Sistema Econômico

Vamos considerar um sistema econômico formado por dois setores, um rural e outro urbano, como no MHT apresentado no capítulo 2. As principais diferenças

entre estes setores são o tipo de bens que produzem, as tecnologias usadas pelas firmas e o processo de determinação dos salários. Esta estrutura dual é tipicamente utilizada pela literatura econômica que investiga o fenômeno de migração rural-urbana [1, 24, 23, 25, 28].

Consideramos inicialmente o setor urbano. Este setor utiliza uma tecnologia específica e produz bens manufaturados, tendo um processo de determinação de salários distinto do setor rural. Diferentemente do MHT original, iremos adotar a teoria de salário-eficiência para determinação de salários deste setor.

A suposição central da teoria do salário-eficiência é que existe uma influência do salário na produtividade dos trabalhadores, gerando custos e benefícios quando as firmas alteram os salários [27]. Nesta modelagem, o salário médio pago no setor urbano deixa de ser fixado institucionalmente, passando agora a ajustar-se de acordo com a dinâmica do sistema econômico.

Supondo que existe um grande número Z_m de firmas no setor manufatureiro, cada uma destas firmas procura maximizar seus lucros:

$$\pi_{mi} = Y_{mi} - w_{mi}N_{mi}, \quad (3.1)$$

onde Y_{mi} é a produção da i -ésima firma manufatureira, w_{mi} é o salário pago pela firma i e N_{mi} é o número de trabalhadores empregados por ela.

A produção das firmas depende positivamente do número de trabalhadores que empregam e do esforço individual ε , isto é, de maneira genérica a produção é uma função

$$Y_{mi} = F(\tilde{N}_{mi}), \quad F'(\tilde{N}_{mi}) > 0 \text{ e } F''(\tilde{N}_{mi}) < 0. \quad (3.2)$$

onde $\tilde{N}_{mi} = \varepsilon N_{mi}$ é o trabalho em unidades de eficiência ou, simplesmente, trabalho efetivo.

O esforço de cada trabalhador não depende unicamente do salário w_{mi} pago pela firma, mas também de outras variáveis. Entre elas, o salário médio alternativo, w_m ,

que pode ser obtido pelo trabalhador em outras firmas e a taxa de desemprego, u . Formalmente supõe-se uma relação funcional do tipo [29]:

$$\varepsilon = \varepsilon(w_{mi}, w_m, u), \text{ com } \frac{\partial \varepsilon}{\partial w_{mi}} > 0, \quad \frac{\partial \varepsilon}{\partial w_m} < 0 \text{ e } \frac{\partial \varepsilon}{\partial u} > 0. \quad (3.3)$$

O termo $\partial \varepsilon / \partial w_{mi} > 0$ significa que maiores salários pagos pela firma induzem a uma maior eficiência do trabalhador na execução do seu trabalho. O segundo termo, $\partial \varepsilon / \partial w_m < 0$, nos diz que a eficiência será menor quanto maior for o salário alternativo w_m pago por outras firmas. O último termo $\partial \varepsilon / \partial u > 0$, significa que um aumento do desemprego diminui as oportunidades do trabalhador, induzindo a uma maior eficiência.

Portanto, considerando a função de produção (3.2) e a função esforço (3.3), o problema de maximização definido na eq. (3.1) toma a seguinte forma:

$$\max \pi_{mi} = \max \left(F(\tilde{N}_{mi}) - w_{mi} N_{mi} \right). \quad (3.4)$$

Assim, cada firma i escolhe o salário e o nível de emprego tal que a condição de primeira ordem do problema de otimização anterior é satisfeita:¹

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial w_{mi}} = F'(\tilde{N}_{mi}) \frac{\partial \varepsilon(w_{mi}, w_m, u)}{\partial w_{mi}} N_{mi} - N_{mi} = 0, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial N_{mi}} = F'(\tilde{N}_{mi}) \varepsilon(w_{mi}, w_m, u) - w_{mi} = 0. \quad (3.6)$$

Isolando $F'(\tilde{N}_{mi})$ na eq. (3.6):

$$F'(\tilde{N}_{mi}) = \frac{w_{mi}}{\varepsilon(w_{mi}, w_m, u)} \quad (3.7)$$

e substituindo na eq. (3.5), a condição de primeira ordem colapsa em:

$$\frac{\partial \varepsilon(w_{mi}, w_m, u)}{\partial w_m} \frac{w_{mi}}{\varepsilon(w_{mi}, w_m, u)} = 1. \quad (3.8)$$

¹A condição de segunda ordem para um máximo também é satisfeita.

Assumindo a forma funcional Cobb-Douglas, a função de produção dada na eq. (3.2) torna-se

$$Y_{mi} = A_m (\varepsilon N_{mi})^\alpha, \quad (3.9)$$

onde $0 < \alpha < 1$ e $A_m > 0$ são constantes paramétricas.

Para a função esforço, eq. (3.3), usaremos a forma funcional originalmente sugerida por Summers [29] e levemente modificada por Romer [27]. Nesta formulação, o esforço do trabalhador urbano é definido como uma função do salário real pago pela firma manufatureira w_{mi} , a taxa de desemprego urbano u e o salário alternativo w_m oferecidos por outras firmas manufatureiras, assim:

$$\varepsilon = \begin{cases} \left[\frac{w_{mi} - (1-bu)w_m}{(1-bu)w_m} \right]^\eta, & \text{se } w_{mi} > (1-bu)w_m, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (3.10)$$

onde $0 < \eta < 1$ e $b \in (0, 1]$ são constantes paramétricas. Como salienta Romer [27] a expressão $(1-bu)w_m$, a depender do valor da constante b , pode ter diferentes significados. Se $0 < b < 1$ os trabalhadores dão menos importância ao desemprego; se $b = 1$, $(1-bu)w_m$ torna-se o salário alternativo esperado; por último, se $b > 1$ os trabalhadores dão uma maior importância ao desemprego.

Tendo definidas a função de produção do setor manufatureiro, eq. (3.9), e o esforço, eq. (3.10), podemos substituí-los nas equações (3.7) e (3.8) para obter os valores de maximização do lucro π_{mi} . Assim,

$$w_{mi} = \frac{(1-bu)w_m}{1-\eta} \quad (3.11)$$

e

$$N_{mi} = \left[\frac{\alpha A_m \eta^{\alpha\eta} (1-\eta)^{1-\alpha\eta}}{(1-bu)w_m} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (3.12)$$

Em equilíbrio, todas as Z_m firmas escolhem o mesmo salário [29, 27], isto é, $w_{mi} = w_m$ ($i = 1, 2, 3, \dots, Z_m$). Então, partindo da equação (3.11), com $w_{mi} = w_m$, a taxa de desemprego urbano é dada por:

$$u = \frac{\eta}{b}. \quad (3.13)$$

Por definição, a taxa de desemprego urbano é a razão entre o número de trabalhadores desempregados e a população urbana, ou seja:

$$u \equiv \frac{N_u - Z_m N_{mi}}{N_u}. \quad (3.14)$$

A definição (3.14) deve ser consistente, em cada período, com o valor de equilíbrio dado pela equação (3.13). Assim sendo, o nível de emprego da firma manufatureira, que obedece essa condição, isto é, aquele obtido igualando-se as eqs. (3.13) e (3.14) é:

$$N_{mi} = \left(1 - \frac{\eta}{b}\right) \frac{N_u}{Z_m}. \quad (3.15)$$

Sabendo que o nível de emprego agregado do setor urbano é $N_m = Z_m N_{mi}$, utilizando a eq. (3.15) chegamos a

$$N_m = \left(1 - \frac{\eta}{b}\right) N_u. \quad (3.16)$$

Tomando a eq. (3.10), calculada no equilíbrio,² e a equação (3.15) e substituindo-as na eq. (3.9), obtemos a produção agregada do setor manufatureiro, $Z_m Y_{mi}$, dada por:

$$Y_m = \xi_1 N_u^\alpha, \quad (3.17)$$

onde $\xi_1 = A_m Z_m^{1-\alpha} \left[\left(\frac{\eta}{1-\eta} \right)^\eta \left(1 - \frac{\eta}{b} \right) \right]^\alpha$.

Igualando a eq. (3.12) a eq. (3.15), e considerando a eq. (3.13), obtemos o salário de equilíbrio do setor manufatureiro:

$$w_m = \xi_2 N_u^{\alpha-1}, \quad (3.18)$$

²No qual $w_{mi} = w_m$ para todo $i = 1, 2, \dots$, Z_m e $u = \eta/b$.

onde $\xi_2 = \alpha A_m \left(\frac{\eta}{1-\eta} \right)^{\alpha\eta} \left[\left(1 - \frac{\eta}{b} \right) \frac{1}{Z_m} \right]^{\alpha-1}$.

Dadas as constantes paramétricas que especificam a tecnologia e a sensibilidade do esforço ao salário, assim como o número de firmas manufatureiras, vemos que o equilíbrio do setor urbano depende diretamente da população urbana N_u .

No setor rural, a firma agrícola i produz uma quantidade de bens agrícolas Y_{ai} através do emprego de N_{ai} trabalhadores. Essa quantidade é obtida usando-se a função de produção Cobb-Douglas [30]:

$$Y_{ai} = A_a (N_{ai})^\phi, \quad (3.19)$$

onde $0 < \phi < 1$ e $A_a > 0$ são constantes paramétricas. Supomos que tanto a dotação de terra como o estoque de capital das firmas agrícolas são constantes determinadas exogenamente, como assumido nas referências [24] e [30].

Como já descrito no capítulo 2, as firmas agrícolas são tomadoras de preços e o salário real ajusta-se até o ponto em que não haja desemprego neste setor [24][23]. Isto implica que o emprego agregado no setor rural é igual à população deste setor. O nível de emprego de equilíbrio da firma agrícola i é então:

$$N_{ai} = \frac{N - N_u}{Z_a}, \quad (3.20)$$

onde Z_a é o número total de firmas agrícolas.

A produção agregada do setor rural é

$$Y_a = Z_a Y_{ai}, \quad (3.21)$$

a qual, a partir das equações (3.19) e (3.20), torna-se

$$Y_a = \xi_3 (N - N_u)^\phi, \quad (3.22)$$

onde $\xi_3 = A_a Z_a^{1-\phi}$.

O salário real rural, expresso em unidades de bens manufaturados, cf. eq. (2.9), usando tecnologia Cobb-Douglas é dado por

$$w_a = \xi_4 p (N - N_u)^{\phi-1}, \quad (3.23)$$

onde $\xi_4 = A_a \phi / Z_a^{\phi-1}$.

Para a implementação da simulação assumimos uma forma funcional específica para os termos de troca, eq. (2.10), a saber:

$$p = \left(\frac{Y_m}{Y_a} \right)^\gamma \quad (3.24)$$

onde $\gamma > 0$ é uma constante paramétrica que representa a elasticidade dos termos de troca com relação à escassez relativa do bem agrícola. Economicamente, esta elasticidade é a variação percentual gerada nos termos de troca para cada variação percentual unitária na escassez relativa do bem agrícola. Ou seja, uma variação de 1% na razão Y_m/Y_a gerará uma variação de $\gamma\%$ em p . Formalmente, esta elasticidade pode ser definida como segue. Seja $x \equiv Y_m/Y_a$. A elasticidade em questão, denotada por ϵ_{px} , é dada por:

$$\epsilon_{px} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta p/p}{\Delta x/x} \right) = \frac{x}{p} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta x}.$$

Como a função $\rho(\cdot)$, por hipótese, é continuamente diferenciável:

$$\epsilon_{px} = \frac{x}{p} \rho'(\cdot).$$

Logo, considerando a forma funcional na eq. (4.6), chegamos a:

$$\epsilon_{px} = \frac{x}{x^\gamma} \gamma x^{\gamma-1} = \gamma.$$

Então, dado o tamanho da população urbana, por meio das equações (3.13-3.18) podemos calcular o equilíbrio temporário do setor urbano, (N_m, Y_m, w_m) . Da mesma maneira, o equilíbrio temporário do setor rural é determinado através das equações (3.20-3.24), (N_a, Y_a, w_a, p) . O estado de equilíbrio de ambos os setores será modificado se um fluxo migratório mudar a distribuição populacional rural-urbana do sistema econômico.

3.2 O Processo Migratório

Baseados na formalização da mecânica estatística aplicada e fenômenos sócio-econômicos [6, 26], propomos aqui um modelo computacional baseado em agentes para descrever o processo de migração rural-urbana. As propriedades emergentes deste modelo serão analisadas levando em conta o efeito padrão do mecanismo de alocação de trabalho de Harris e Todaro, descrito no capítulo 2. Além disso, também será considerado o efeito de vizinhança social sobre a decisão de migrar, ou seja, a influência que cada indivíduo sofre no grupo de referência em que está incluído.

A principal característica do processo de decisão é que cada trabalhador poderá fazer revisão de sua localização setorial depois de um determinado tempo de permanência em um determinado setor. Excluimos, por suposição, a possibilidade de cada trabalhador ofertar simultaneamente sua força de trabalho em ambos os setores. Assim sendo, somente duas escolhas são possíveis para cada agente: permanecer no setor no qual ele estava durante o(s) período(s) anterior(es) ou migrar.

Com o propósito de modelar o processo de migração, permitindo apenas escolhas discretas, cada trabalhador tem seu estado definido pela variável $\sigma_i \in \{-1, +1\}$, onde $\sigma_i = -1$ representa um trabalhador i localizado no setor rural e $\sigma_i = +1$ um trabalhador i localizado no setor urbano.

Em nosso modelo, durante o processo de decisão, incentivos explícitos e observáveis são levados em conta por cada um dos potenciais migrantes. Tais incentivos são chamados de *utilidade determinística privada* [6, 26], dada por

$$U_i(\sigma_i) = K\omega_e(\sigma_i), \quad (3.25)$$

onde $K > 0$ é uma constante paramétrica e $\omega_e(\sigma_i)$ é o salário esperado dos trabalhadores que se encontram no estado σ_i .

Os empregos urbanos são alocados de maneira aleatória quando as firmas manufatureiras defrontam-se com mais trabalhadores do que empregos disponíveis [24][25]. Isto significa que em cada período todos os trabalhadores urbanos têm a mesma pro-

bilidade de encontrar um emprego urbano. Sob tal hipótese, a taxa de emprego, $1 - u$, é a probabilidade de um trabalhador urbano obter um emprego, fazendo com que $(1 - u)w_m$ seja o salário urbano esperado.³ Como mencionado na seção 4.1.1, o salário rural é perfeitamente flexível, não havendo desemprego neste setor, de maneira que a probabilidade de encontrar emprego é 1. Portanto, o salário esperado rural é o mesmo que o salário rural w_a . Em suma, a função salário esperado é:

$$\omega_e(\sigma_i) = \begin{cases} w_a, & \text{se } \sigma_i = -1, \\ (1 - u)w_m, & \text{se } \sigma_i = +1. \end{cases} \quad (3.26)$$

Além do salário esperado, o trabalho i também está sob a influência de outros trabalhadores, ou seja, sua vizinhança social [31]. A medida desta influência, isto é, a *utilidade determinística social* [6, 26], é dada por

$$S_i(\sigma_i) = J \sum_{j \in \langle ij \rangle} \left(\frac{\sigma_i + \sigma_j}{2} \right)^2, \quad (3.27)$$

onde J é uma constante paramétrica. O termo J representa o grau de influência do estado (escolha) do j -ésimo trabalhador, pertencente à vizinhança social do i -ésimo trabalhador, sobre a decisão de migrar deste último. Assumiremos daqui em diante $J > 0$, o que representa a hipótese de que cada trabalhador procura adaptar-se ao comportamento preponderante em sua vizinhança social [6].⁴ Quanto ao termo $((\sigma_i + \sigma_j)/2)^2$, se a escolha do trabalhador i diferir da escolha do vizinho j , ou seja, $\sigma_i = -\sigma_j$, então $((\sigma_i + \sigma_j)/2)^2 = 0$; caso contrário, $\sigma_i = \sigma_j$ e, portanto, $((\sigma_i + \sigma_j)/2)^2 = 1$.

Seguindo as referências [6] e [26] os incentivos explícitos e observáveis são simplesmente a soma das utilidades determinísticas privada e social dadas pelas eqs. (3.25) e (3.27), ou seja:

³Estamos supondo, como no MHT original, que um trabalhador desempregado tem rendimento nulo.

⁴Como no modelo de Ising para um material ferromagnético temos $J > 0$, o que favorece o alinhamento dos spins.

$$K\omega_e(\sigma_i) + J \sum_{j \in \langle ij \rangle} \left(\frac{\sigma_i + \sigma_j}{2} \right)^2, \quad (3.28)$$

a qual é denominada *utilidade determinística total* de um trabalhador i no estado σ_i .

Todavia, a decisão de localização de um trabalhador depende também de motivações idiossincráticas e não-observáveis, que, por sua própria natureza são componentes aleatórios. Esta parte é denominada *utilidade aleatória* [6, 26]. Dessa forma, o *payoff* total de um trabalhador i que se encontra no estado σ_i , ou seja, sua *utilidade total* [6, 26] pode ser expressa como:

$$V_i(\sigma_i) = U_i(\sigma_i) + S_i(\sigma_i) + \epsilon_i(\sigma_i), \quad (3.29)$$

onde $\epsilon_i(\sigma_i)$ é a utilidade aleatória de um agente no estado σ_i , isto é, o valor subjetivo que um trabalhador associa a escolha σ_i independentemente do salário esperado e das escolhas dos seus vizinhos.

Em cada período, cada trabalhador revisa sua decisão sobre sua localização setorial com probabilidade a , chamada de *atividade* [32]. Assim, apenas uma fração da população revisa suas decisões, tornando-se potenciais migrantes.

O migrante potencial i torna-se um migrante de fato, dependendo da comparação entre sua utilidade total no estado σ_i em que se encontra, $V_i(\sigma_i)$, e a escolha alternativa $-\sigma_i$, $V_i(-\sigma_i)$. Considere a diferença entre as utilidades totais nos dois estados, que a partir das eqs. (3.28) e (3.29) pode ser escrita como segue:

$$V_i(-\sigma_i) - V_i(\sigma_i) = K [\omega_e(-\sigma_i) - \omega_e(\sigma_i)] \sigma_i + J \sum_{j \in \langle ij \rangle} \left[\left(\frac{-\sigma_i + \sigma_j}{2} \right)^2 - \left(\frac{\sigma_i + \sigma_j}{2} \right)^2 \right] - \mu_i, \quad (3.30)$$

onde $\mu_i \equiv \epsilon_i(\sigma_i) - \epsilon(-\sigma_i)$. Substituindo a eq. (3.26) na eq. (3.30) e manipulando algebricamente a equação daí resultante, a eq. (3.30), esta ser reexpressa como:

$$V_i(-\sigma_i) - V_i(\sigma_i) = \mathcal{H}_i - \mu_i, \quad (3.31)$$

onde

$$\mathcal{H}_i = -K [(1 - u)w_m - w_a] \sigma_i - J \sum_{j \in \langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j. \quad (3.32)$$

Assim, a decisão de migrar de um trabalhador i depende do saldo entre \mathcal{H}_i e μ_i . Note que \mathcal{H}_i pode ser vista como uma hamiltoniana do modelo de Ising ferromagnético na presença de um campo magnético externo dependente do tempo, $H(t) = -K [(1 - u)w_m - w_a]$.

A cada período, se $V_i(-\sigma_i) > V_i(\sigma_i)$, ou seja, $\mu_i < \mathcal{H}_i$, o migrante potencial i torna-se migrante de fato, caso contrário, isso não ocorre. Suponha que μ_i seja uma variável aleatória logisticamente distribuída [6, 26], isto é, que a função de distribuição acumulada seja:

$$Pr(\mu_i < x) = F(x) = \frac{1}{1 + e^{-\beta x}}, \quad (3.33)$$

onde $\beta > 0$ é uma constante paramétrica. Assim, a probabilidade de que o migrante potencial efetivamente migre é dada por:⁵

$$F(\mathcal{H}_i) = \frac{1}{1 + e^{-\beta \mathcal{H}_i}}. \quad (3.34)$$

Neste contexto, a constante paramétrica β mede a heterogeneidade dos trabalhadores com relação à propensão à migrar. A equação (3.34) é uma medida da probabilidade com que um trabalhador i , que está revendo sua localização setorial, muda de estado, ou seja, migre para o outro setor. Quanto maior o diferencial de utilidade determinística total, eq. (3.32), maior será a probabilidade de que a mudança ocorra.

⁵Como destacado nas ref. [26] essa distribuição de probabilidades permite uma conexão direta entre a modelagem teórica e sua implementação econométrica.

3.3 A Simulação

Para simular o sistema econômico descrito nas seções anteriores, cada agente foi posicionado em um sítio de uma rede quadrada. Sabemos que existem outras topologias de rede mais adequadas para simulações de sistemas sociais (*small-world, scale-free etc*) [33]. No entanto, não utilizamos as mesmas neste estudo para tentar diminuir o número de parâmetros livres nestas simulações. Nossa intenção é futuramente realizar simulações nestes tipos de redes.

O estado de cada sítio é configurado da seguinte forma: $\sigma_i = +1$ para trabalhadores urbanos; $\sigma_i = -1$ para os rurais. É importante enfatizar que o estado destes sítios representa a alocação setorial de cada agente, ou seja, se o agente está ofertando sua força de trabalho no setor urbano ou rural. Em outras palavras, as coordenadas dos sítios da rede não estão relacionadas à distribuição espacial dos trabalhadores.

Para definir o estado inicial do sistema, todos os agentes são aleatoriamente distribuídos na rede. No tempo $t = 0$, aplica-se a condição inicial de que 20% da população é urbana, ou seja, 20% dos sítios serão designados por $\sigma_i = +1$ e os restantes 80%, $\sigma_i = -1$. A razão para esta escolha é de que estes são os valores médios historicamente observados em economias em desenvolvimento no início do processo de transição urbana [2].

O próximo passo na simulação é calcular os valores das variáveis que definem o equilíbrio temporário do setor urbano, usando as equações (3.13-3.18), e do setor rural através das equações (3.20-3.24). Uma vez que as variáveis de estado de ambos os setores sejam conhecidas, torna-se necessário definir a quantidade de agentes que revisarão sua alocação setorial, isto é, aqueles que se tornarão migrantes potenciais, selecionadas com probabilidade a [32]. Todos aqueles selecionados como potenciais migrantes terão sua utilidade determinística total calculada pela equação (3.32).

Afim de concluir o processo de revisão, a probabilidade definida na eq. (3.34) é calculada para cada migrante potencial. Em seguida, um número aleatório $rn \in$

$[0, 1]$ é gerado a partir de uma distribuição uniforme. Se $rn < Pr$, o migrante potencial torna-se migrante de fato, caso contrário, nenhuma mudança ocorre.

Tão logo os migrantes potenciais finalizem seus processos de revisão, uma nova distribuição populacional é obtida. Sabendo-se a nova população urbana, podemos recalcular o novo macro-estado do sistema econômico. As variáveis de estado de ambos os setores, então, têm que ser calculadas novamente. Todo o processo descrito acima será repetido um número de vezes pré-determinada na simulação. O critério de parada usado é terminar a simulação alguns períodos após o momento em que o sistema atinja o equilíbrio do fluxo migratório. Todos os passos da simulação descrita acima estão mostrados de forma esquemática no pseudo-código 3.3.1.

Algoritmo 3.3.1: HARRISTODAROISING(n_u)

```
 $n_u = \frac{N_u}{N} \leftarrow 0,2$  /*  $n_u$  inicial */  
for ( $i \leftarrow 1$  to  $N$ ) /* Alocação aleatória dos agentes */  
  do  $\sigma[i] \leftarrow \pm 1$   
  /* Equilíbrio temporário */  
 $N_m \leftarrow$  eq. (3.16),  $w_m \leftarrow$  eq. (3.18),  $Y_m \leftarrow$  eq. (3.17)  
 $Y_a \leftarrow$  eq. (3.22),  $p \leftarrow$  eq. (3.24),  $w_a \leftarrow$  eq. (3.23)  
  /* Equilíbrio do fluxo migratório */  
while ( $n_u \neq$  equilíbrio do fluxo migratório)  
  do {  
     $N_{pot} = aN$  /*  $N_{pot}$  migrantes potenciais aleatórios */  
    for ( $i \leftarrow 1$  to  $N_{pot}$ )  
      do {  
         $\mathcal{H}[i] \leftarrow$  eq. (3.32)  
         $Prob[i] \leftarrow$  eq. (3.34)  
        if ( $rn < Prob[i]$ ) /*  $rn \in [0, 1]$  é um n° aleatório */  
          then  $\sigma[i] \leftarrow -\sigma[i]$  /* Migração efetivada */  
      }  
    if ( $\sigma[i] = +1$ )  
      then  $n_u \leftarrow n_u + \sigma[i]$   
    /* Novo equilíbrio temporário */  
     $N_m \leftarrow$  eq. (3.16),  $w_m \leftarrow$  eq. (3.18),  $Y_m \leftarrow$  eq. (3.17)  
     $Y_a \leftarrow$  eq. (3.22),  $p \leftarrow$  eq. (3.24),  $w_a \leftarrow$  eq. (3.23)
```

A Figura 3.1 mostra a proporção de trabalhadores no setor urbano $n_u \equiv N_u/N$, de agora em diante denominada *fração urbana*, esboçada em três diferentes combinações dos parâmetros J e K . É importante lembrar que os parâmetros K e J ajustam a intensidade do utilidade determinística privada, eq. (3.25), e a utilidade determinística social, eq. (3.27), respectivamente.

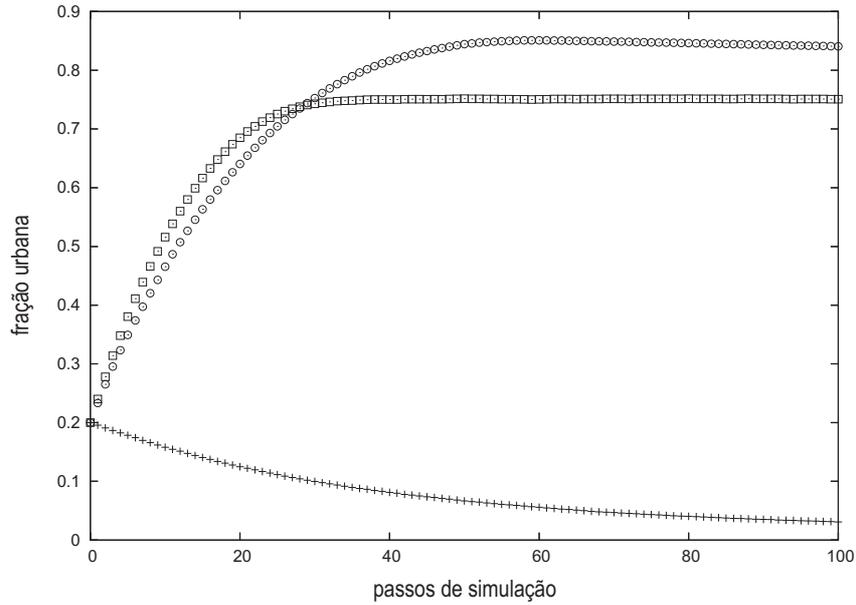


Figura 3.1: *Proporção de trabalhadores no setor urbano como função do tempo para três diferentes parâmetros J e K . Círculos: ($J > 0, K > 0$); Quadrados: ($J = 0, K > 0$); Cruzes: ($J > 0, K = 0$).*

Primeiramente, consideraremos o caso ($J = 0, K > 0$) esboçado na Fig. 3.1. Neste caso, o processo de revisão feito pelos agentes é guiado somente pela utilidade determinística privada, a qual depende do diferencial de salários esperados. Como nos modelos clássicos de teoria da migração [24][23], quando o salário urbano esperado é mais alto do que o rural, um contínuo crescimento da fração urbana é gerado, bem como uma convergência relativamente rápida em direção ao equilíbrio do fluxo migratório.

Em segundo lugar, consideramos os caso em que ambos os efeitos são levados em consideração, ($J > 0, K > 0$). Semelhante ao caso anterior, o processo de migração rural-urbana ocorre novamente. Entretanto, o sistema alcança um valor mais elevado para a fração urbana de equilíbrio, embora necessite mais tempo para isto. Esta diferença é causada pelo parâmetro $J > 0$, significando que a influência da vizinhança social está sendo considerada. Para melhor entender este comportamento, devemos lembrar que o processo da localização setorial depende da utilidade determinística privada e da utilidade determinística social. Portanto,

quando $J > 0$ a influência da vizinhança social está sendo exercida, ou seja, cada agente tenta ajustar sua escolha de acordo com a localização setorial de seus vizinhos. A existência desta influência causa dois efeitos diferentes durante o processo de convergência em direção ao equilíbrio. No primeiro momento, quando as vizinhanças são preponderantemente rurais, a influência dos vizinhos desacelera o fluxo migratório rural-urbano, aumentando o tempo necessário para alcançar o equilíbrio. No segundo momento, quando a vizinhança se torna preponderantemente urbana, a influência devido aos vizinhos reforça a atração exercida pelo alto salário urbano esperado, levando o sistema a uma fração urbana de equilíbrio mais elevado.

Finalmente, consideramos o caso ($J > 0, K = 0$), no qual somente os efeitos de vizinhança são considerados. Neste caso, o migrante potencial leva em conta apenas a posição setorial da vizinhança e não está sob o efeito do diferencial de salários esperados. O efeito puro devido apenas a vizinhança leva à extinção do setor urbano. Este caso não tem importância empírica, já que não tem sido observado na história das economias em desenvolvimento.

Na Figura 3.2, outra característica importante gerada pela dinâmica migratória é a expansão da renda *per capita* $(Y_m + pY_a)/N$. Este resultado coincide com dados históricos de que em países com alta renda *per capita*, a proporção da população vivendo em áreas rurais é baixa [1].

Como já dito, no estado inicial do sistema a configuração foi aleatoriamente determinada com 20% dos sites sendo trabalhadores urbanos, $\sigma_i = +1$, e o restante, $\sigma_i = -1$, trabalhadores rurais como mostrado na Fig. 3.3a. O estado final da dinâmica do sistema, usando ($J > 0, K > 0$), pode ser visualizado na Figura 3.3b. Agora o *cluster* infinito é formado por sites $\sigma_i = +1$, representando uma concentração urbana causada pelo processo migratório.

As Figuras 3.4 e 3.5 mostram a magnetização média $m = \sum \sigma_i/N$ e a razão de salários esperados $r_e \equiv (1 - u)w_m/w_a$, respectivamente. Ambas as figuras são esboçadas em função da razão J/K (K mantido constante), com o intuito de medir a intensidade relativa destes dois parâmetros.

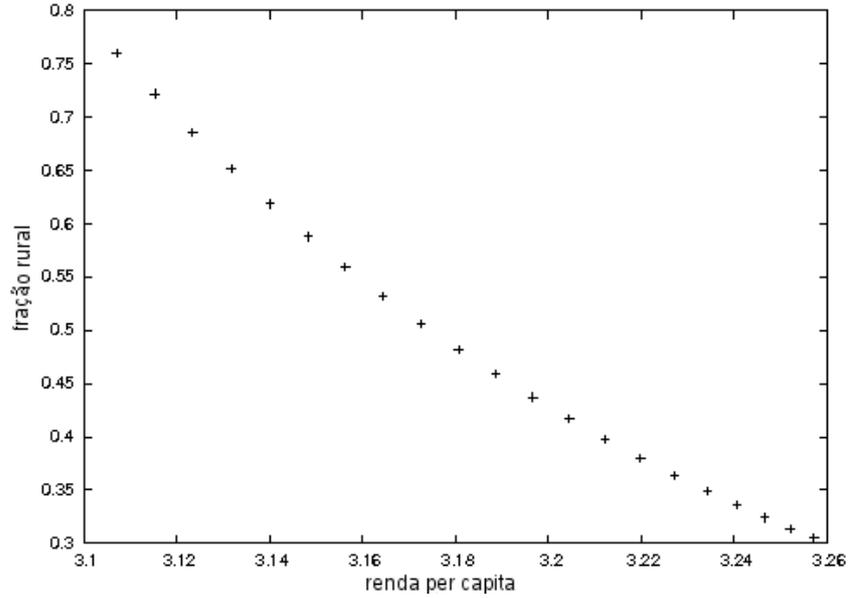


Figura 3.2: *Fração rural como função da renda per capita em unidades de bens manufaturados.*

A Figura 3.4 tem em seu eixo vertical a magnetização média calculada durante alguns períodos após o sistema ter atingido equilíbrio. Para valores de J/K menores do que o limiar crítico a magnetização líquida é $m \cong 0,4$, representando uma fração urbana em torno de $n_u = 0,70$. Aumentando a razão J/K acima do limite crítico, o sistema passa para um novo regime, mudando completamente sua magnetização líquida.

Na Figura 3.5 vemos a razão de salários esperados em função de J/K . Para valores $J/K \lesssim 9,0$, a razão é $r_e \cong 1,0$, indicando que o salário urbano esperado e o salário rural convergem para o mesmo valor. Esta propriedade é conhecida como condição de equilíbrio de Harris-Todaro [1, 24, 25]. Assim, num sistema econômico em que a migração interna ocorre livremente, a diferença absoluta entre o salário rural e urbano pode persistir se os trabalhadores considerarem a possibilidade de desemprego. Após o limiar $J/K > 9,0$, r_e tem seu máximo valor em torno de 2,8, mostrando que o salário esperado urbano é 2,8 vezes maior do que o rural. Embora esta razão esteja aumentando o valor da utilidade determinística privada de cada agente, eq. (3.25), o equilíbrio do sistema ocorre em $m \cong -0,29$, ou seja,

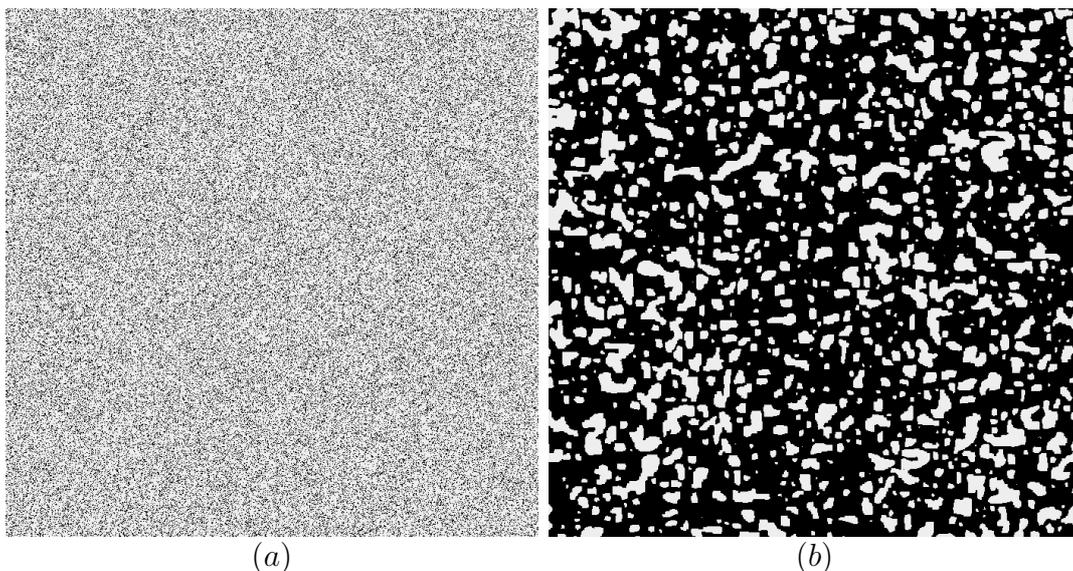


Figura 3.3: *Distribuição de agentes na rede. Clusters pretos representam agentes urbanos ($\sigma_i = +1$) e clusters brancos, os rurais ($\sigma_i = -1$). Fig. (a) é a distribuição aleatória inicial do sistema. Fig. (b) é distribuição de equilíbrio em que os clusters devido a vizinhanças social podem ser vistos.*

uma concentração rural de 64,9%. A explicação para este resultado é que após um dado limite os valores de J estão em um intervalo em que a utilidade determinística social, eq. (3.27), é muitas vezes maior do que a utilidade determinística privada. Em outras palavras, neste intervalo, não importa se o salário esperado é atrativo no setor urbano, porque o fator mais forte na decisão de migração é a influência da vizinhança, isto é, os agentes tendem a imitar o comportamento dos vizinhos.

Os efeitos da razão J/K , junto com o tamanho da população $N = L^2$, são mostrados na Figura 3.6. Os diferentes valores de equilíbrio da fração urbana são esboçados em um escala de cinza. A primeira propriedade observada nesta figura é a existência de vários estados de fase, os quais dependem dos valores de J/K e N . Cada estado de fase é caracterizado por uma fração urbana de equilíbrio constante. A topologia da Figura 3.6 está de acordo com os resultados mostrados na Fig. 3.4, demonstrando que a propriedades do macro-estado de equilíbrio dependem da combinação destes parâmetros.

Na Figura 3.7 vemos a fração urbana de equilíbrio em função do parâmetro β . Para valores de β tendendo a zero, a fração urbana de equilíbrio tende a 0,5 (ou

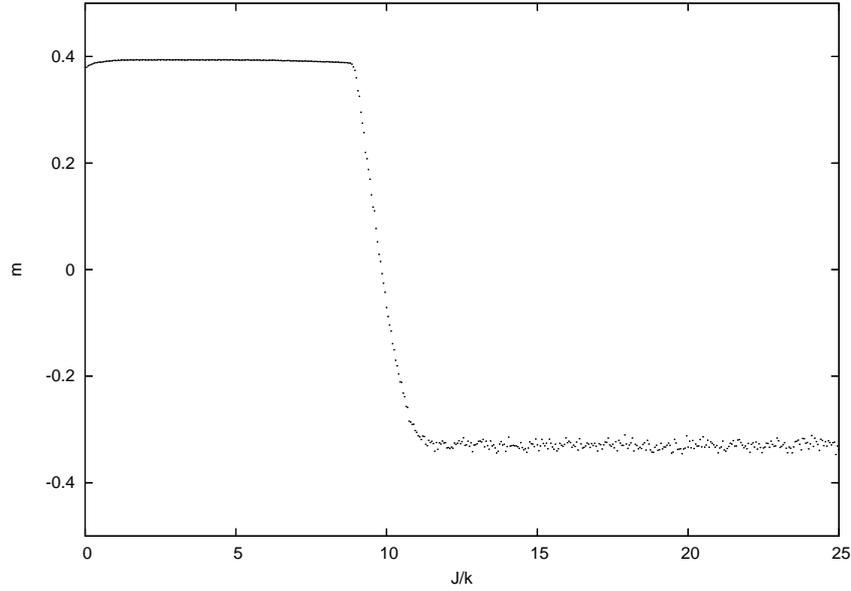


Figura 3.4: Magnetização média m em função da razão J/K .

$m = 0$), levando a uma concentração urbana igual a rural (magnetização média nula), mesmo que haja um salário urbano esperado mais elevado do que o rural. De fato, eq. (3.34) mostra que quanto menor β , maior a proporção idiossincrática e não-observável do comportamento dos agentes em relação à propensão a migrar. Se $\beta = 0$, as escolhas $\sigma_i = +1$ e $\sigma_i = -1$ têm a mesma probabilidade de ocorrer sendo independente do diferencial de salários esperados. Em suma, quando a heterogeneidade dos agentes relacionada a decisão de migração aumenta, a concentração urbana diminuirá a longo prazo. Por outro lado, quando a heterogeneidade dos agentes diminui, isto é, β aumenta, a fração urbana de equilíbrio é invariável após um determinado limite.

A decisão de migrar não é tomada por todos os agentes simultaneamente. Afim de simular este comportamento, usamos o parâmetro chamado atividade a , o qual dá a probabilidade de que um agente revisará sua decisão sobre sua localização setorial em determinado período. Mais especificamente, a representa a fração da população que passará pelo processo de revisão setorial. Na Figura 3.8, temos a variação de a em diferentes simulações, mostrando que o tempo necessário para

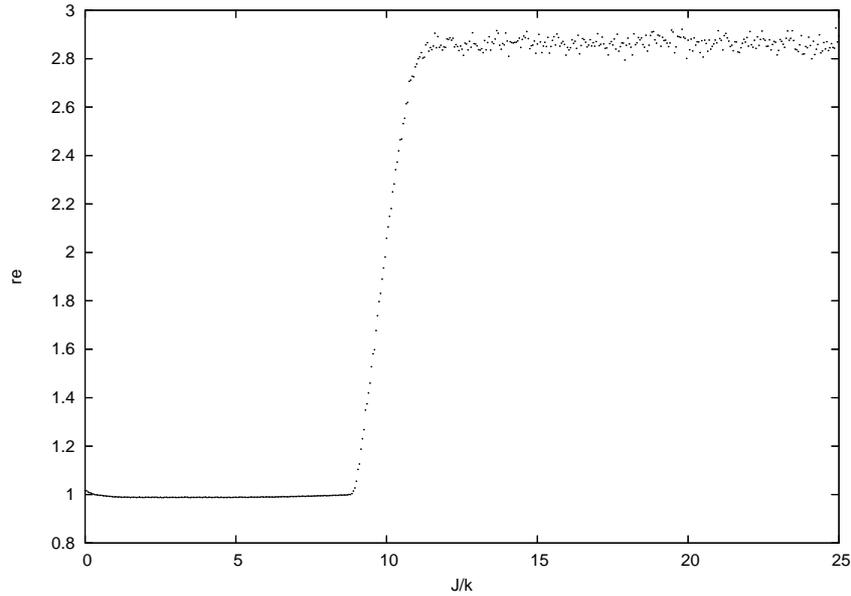


Figura 3.5: Razão de salários esperados r_e em função da razão J/K .

o sistema atingir equilíbrio é inversamente proporcional ao valor da atividade. O tempo necessário para alcançar o equilíbrio, portanto, é fortemente relacionado a quantidade de indivíduos que revisam sua localização setorial.

3.4 Migração Rural-Urbana em Redes d -dimensionais

Nesta seção estenderemos a análise do MHT para estudar o comportamento do sistema econômico em direção ao equilíbrio do fluxo migratório e suas propriedades em redes d -dimensionais, $3 \leq d \leq 7$, ao invés $d = 2$ como na seção anterior.

O sistema econômico no qual a migração em redes d -dimensionais será estudada é exatamente o mesmo apresentado na seção 3.1. Assim, temos a estrutura dual anterior, cujas variáveis de estado são calculadas através das equações (3.13-3.18), para o setor urbano e eqs. (3.20-3.24) para o setor rural.

As simulações para redes d -dimensionais foram feitas alocando os agentes em redes com dimensões $d = 3, 4, 5, 6$ e 7 . Esta mudança dimensional na rede modificará o número de primeiros vizinhos que cada agente terá de acordo com a relação:

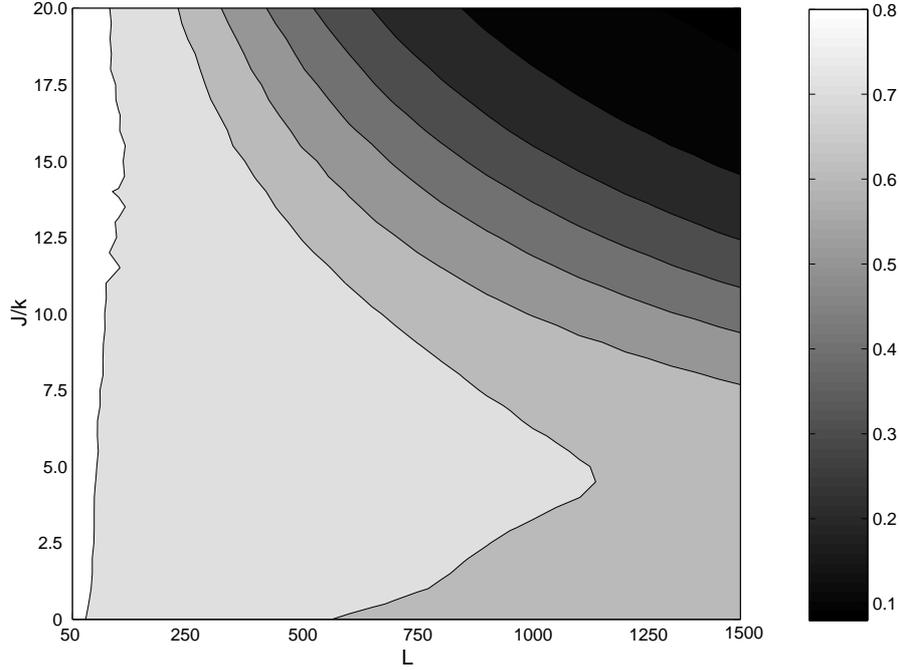


Figura 3.6: Fração urbana n_u em função da razão J/K e a dimensão linear da rede quadrada L . Áreas mais claras correspondem a valores maiores de n_u e as escuras a valores menores de n_u .

$$n_b = 2d; \quad (3.35)$$

onde n_b é o número de primeiros vizinhos e d a dimensão da rede. Em todas as simulações a fração urbana inicial foi de $n_u = 0,2$.

Na Figura 3.9 temos a fração urbana em função do número de passos de simulação. Nesta figura podemos ver que o aumento da dimensão da rede acelerará o processo migratório, provocando um *overshooting* na fração urbana, como observado em economias em desenvolvimento. Por outro lado, quanto menor a dimensão, o sistema atinge o equilíbrio mais rápido do que em dimensões mais elevadas. Na eq. (3.35) podemos ver que a variação da dimensão da rede modificará a quantidade de vizinhos de cada agente. Portanto, como todos os parâmetros são mantidos constantes em todas as simulações, o comportamento das curvas na Figura 3.9 está estritamente relacionado ao número de primeiros vizinhos nas redes d -dimensionais.

A afirmação acima é mostrada na Figura 3.10 onde todas as simulações foram

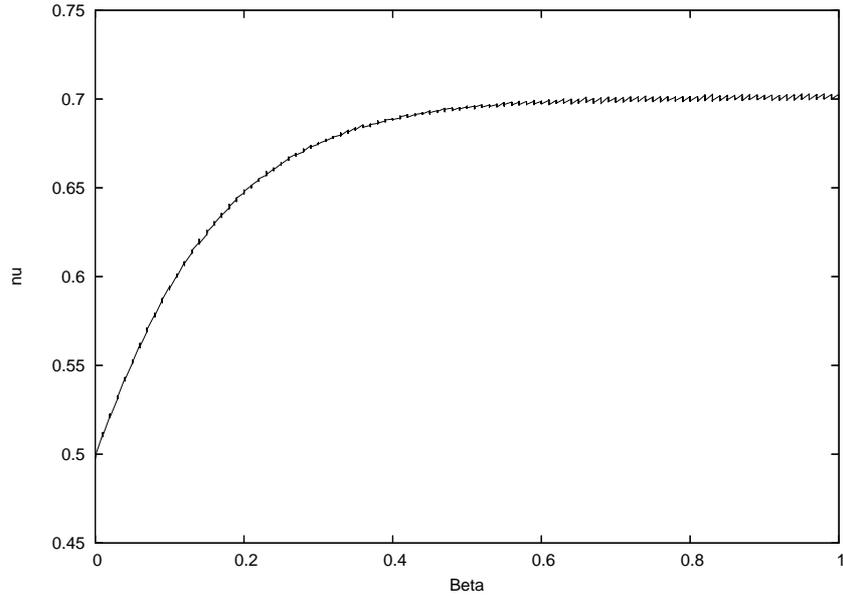


Figura 3.7: Fração urbana de equilíbrio n_u em função do parâmetro β .

executadas da mesma maneira que na Fig. 3.9, porém com o parâmetro $J = 0$. O parâmetro J nulo, na eq. (3.32), significa que a interação entre os vizinhos não está sendo considerada no processo de revisão dos agentes. Então, esta figura claramente mostra que o processo migratório está sendo modificado devido ao número de vizinhos, ou seja, a interação social está desempenhando um papel mais importante na decisão de migrar ou não.

As Figuras 3.11 e 3.12 são gráficos do salário urbano esperado $(1 - u)w_m$ e do salário rural w_a , respectivamente. Mais uma vez, o único parâmetro alterado é a dimensão da rede. Nesta figuras, mostramos que as curvas de w_m e w_a têm um comportamento similar independentemente da dimensão da rede. É importante enfatizar que as curvas para $d = 7$ nas Figuras 3.11 e 3.12 são as únicas em que o número total de trabalhadores N é diferente dos valores usados para redes de dimensão $d < 7$ por limitações numéricas. Os tamanhos usados por nós são consideravelmente menores do que o recorde mundial simulado na ref. [34], pois não usamos a técnica de *multi-spin coding* e w_a e w_m devem ser reavaliados a cada passo de simulação. Portanto, na Figura 3.13 esboçamos o gráfico do salário urbano em

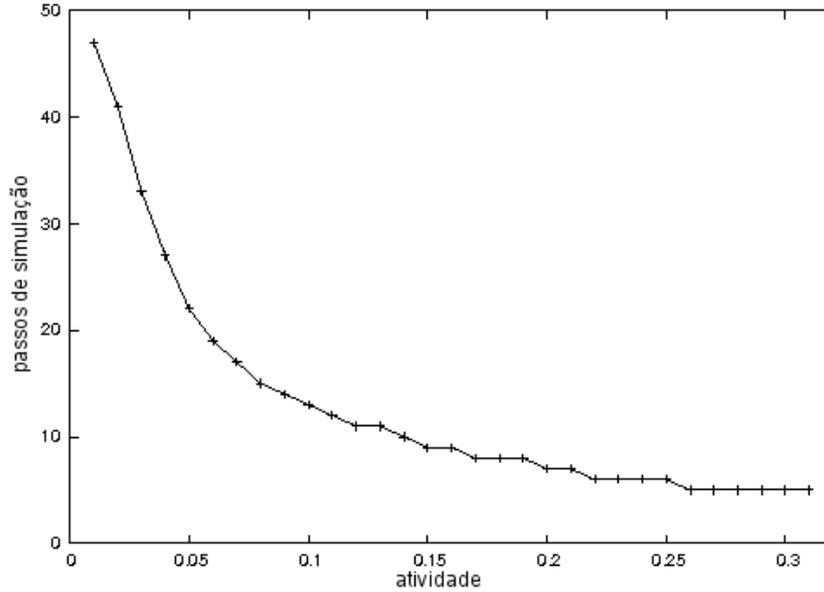


Figura 3.8: Tempo pra atingir o equilíbrio em função do parâmetro atividade a .

função dos passos de simulação pra uma rede $d = 7$, variando N , com o intuito de checar a sua influência nos resultados.

A variável $r_e \equiv (1 - u)w_m/w_a$ mede a razão de salários esperados. Observando as Figuras 3.11 e 3.12 vemos que $r_e \approx 1,0$, indicando que o salário urbano esperado e o salário rural convergem para o mesmo valor, isto é, mais uma vez a condição de equilíbrio de Harris-Todaro é satisfeita.

Na Figura 3.14 vemos a fração urbana n_u em função da razão J/K para tamanhos diferentes de rede L . Cada figura deste conjunto é feita para dimensões partindo de $d = 2$, canto esquerdo superior, a $d = 7$, canto direito inferior. O eixo horizontal de cada figura é a dimensão linear da rede L , assim, o número de agentes de cada rede é obtido pela relação $N = L^d$.

Todos os conjuntos da Figura 3.14 revelam uma distribuição similar de valores de equilíbrio para fração urbana, n_u . A fração urbana de equilíbrio é levemente diferente quando a dimensão espacial d é alterada. Este resultado está de acordo com a fig 3.9 onde podemos ver que d modifica a velocidade do processo migratório, mas tem pouca influência no valor da fração urbana de equilíbrio do sistema. Isso

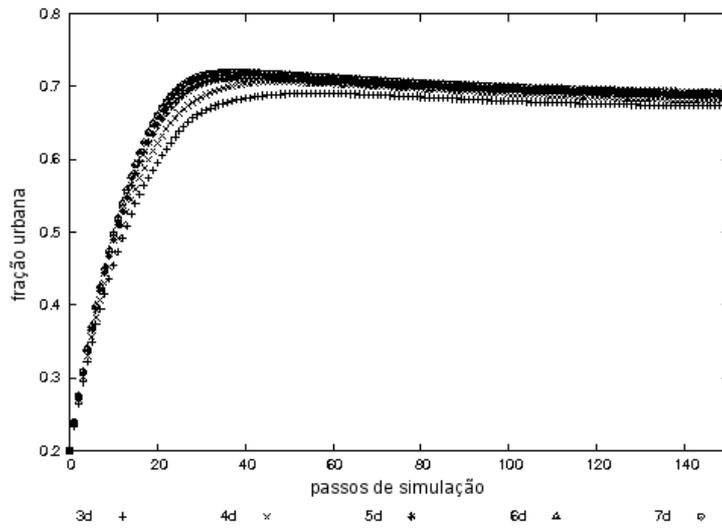


Figura 3.9: *Fração urbana em função dos passos de simulação para redes com dimensões diferentes. A dimensão linear de cada rede é $L_{(3d)} = 100$, $L_{(4d)} = 32$, $L_{(5d)} = 16$, $L_{(6d)} = 10$, $L_{(7d)} = 7$. Um overshooting na fração urbana torna-se mais evidente com o aumento da dimensão da rede.*

explica as estruturas similares em todos os conjuntos da Fig. 3.14.

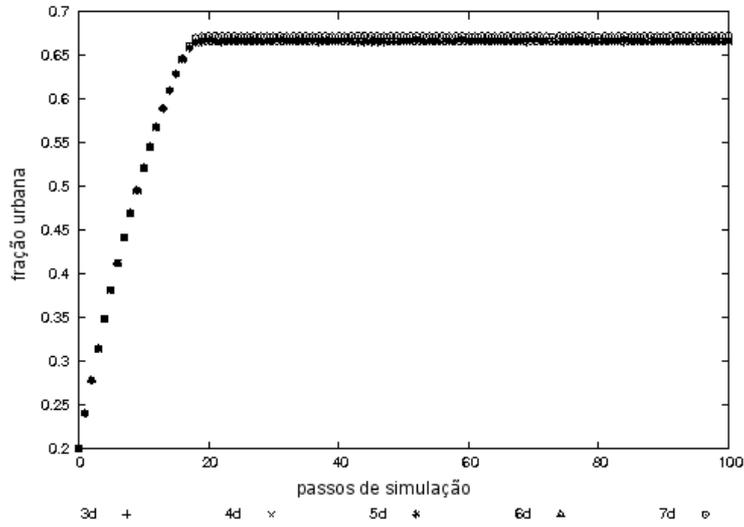


Figura 3.10: Fração urbana em função dos passos de simulação para diferentes dimensões da rede com o parâmetro $J = 0$. A dimensão linear de cada rede é $L_{(3d)} = 100$, $L_{(4d)} = 32$, $L_{(5d)} = 16$, $L_{(6d)} = 10$, $L_{(7d)} = 7$.

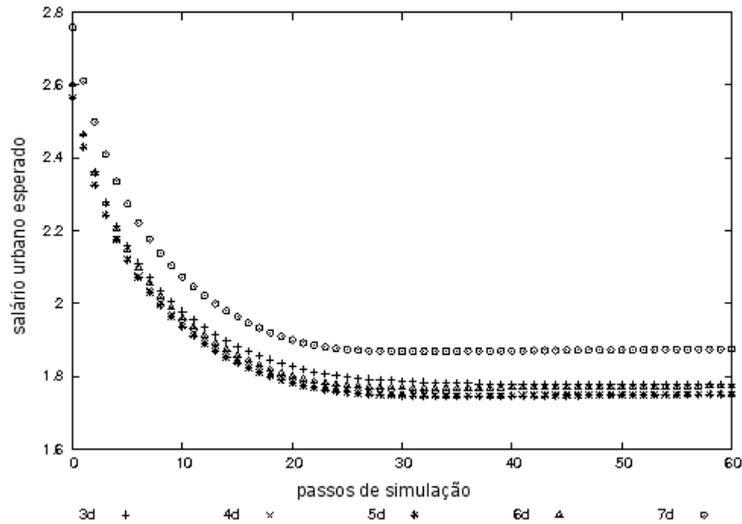


Figura 3.11: Salário do setor manufatureiro w_m para redes de diferentes dimensões. A dimensão linear de cada rede é $L_{(3d)} = 100$, $L_{(4d)} = 32$, $L_{(5d)} = 16$, $L_{(6d)} = 10$, $L_{(7d)} = 7$.

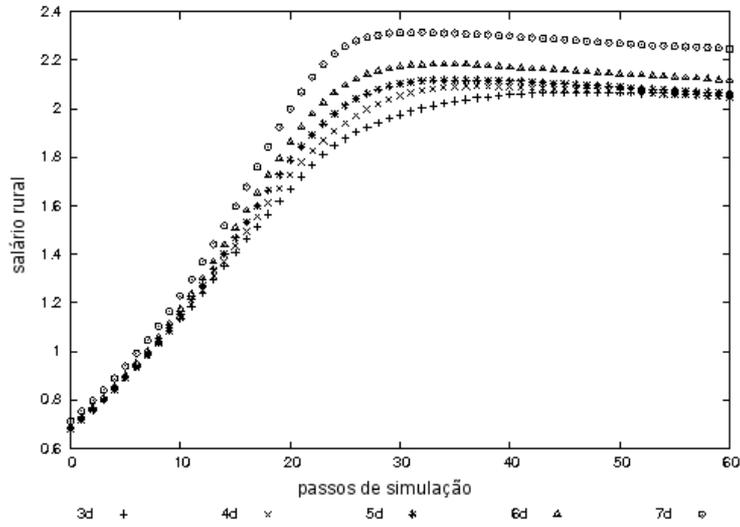


Figura 3.12: Salário do setor rural w_a para diferentes dimensões da rede. A dimensão linear de cada rede é $L_{(3d)} = 100$, $L_{(4d)} = 32$, $L_{(5d)} = 16$, $L_{(6d)} = 10$, $L_{(7d)} = 7$.

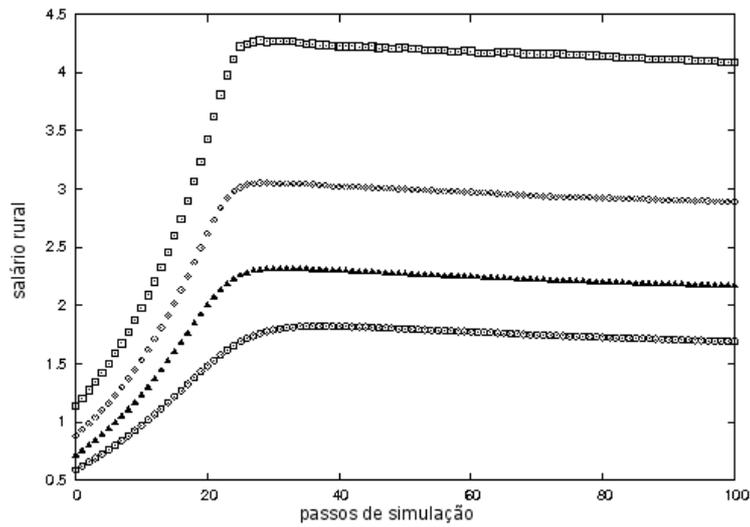


Figura 3.13: Salário do setor rural w_a para diferentes comprimentos da rede em 7d. Quadrados: $L = 5$; Diamantes: $L = 6$; Triângulos: $L = 7$; Círculos: $L = 8$.

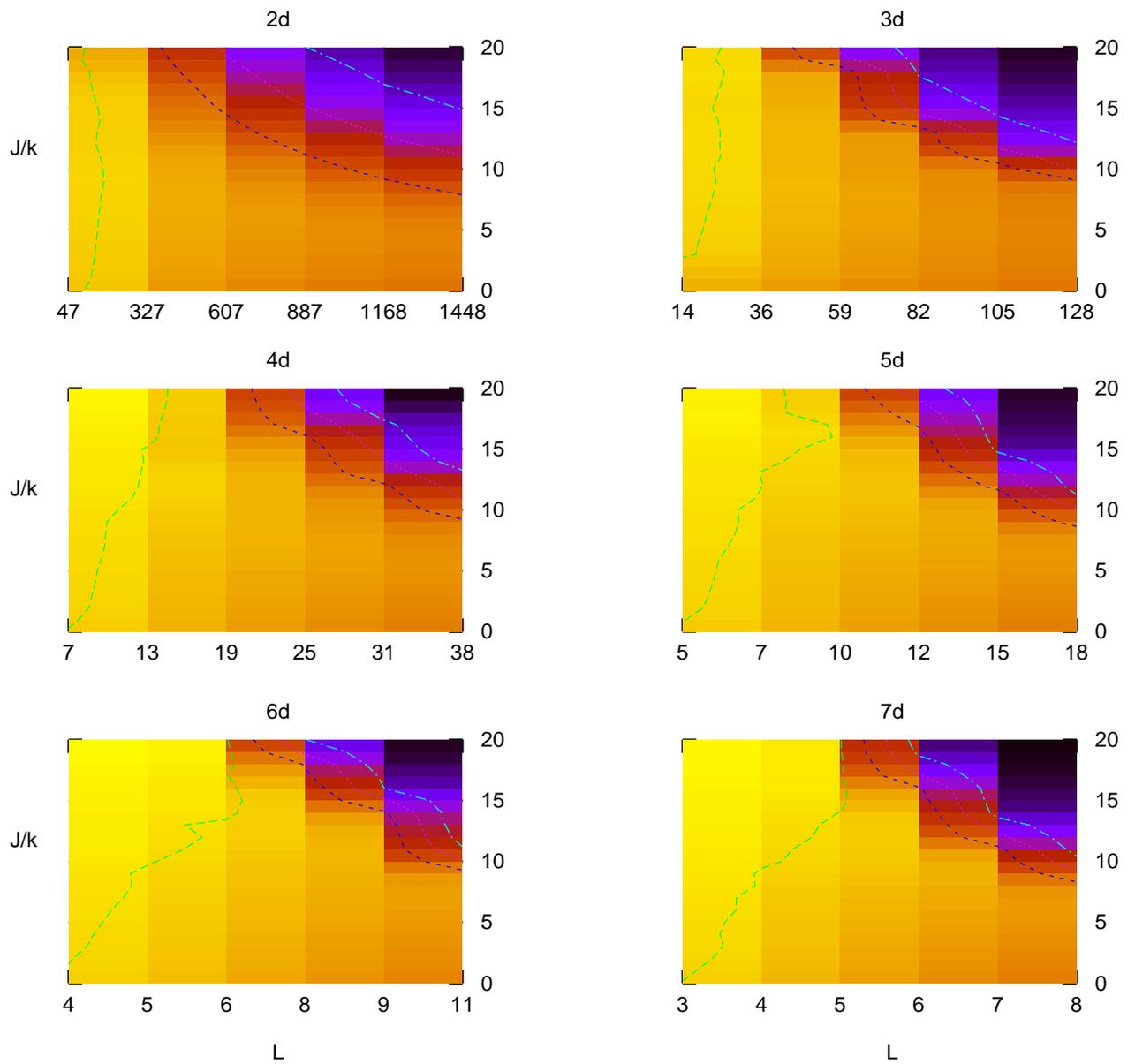


Figura 3.14: Fração urbana n_u em função da razão J/K e o tamanho da rede L . Áreas mais claras correspondem a frações urbanas mais elevadas e áreas mais escuras a frações urbanas mais baixas.

Capítulo 4

Migração: Teste da Hipótese do MHT

Nesta seção o MHT é revisitado através de um modelo baseado em agentes usando dinâmica paralela. O processo de migração dos trabalhadores é novamente tomado como um processo de *aprendizagem social*¹ por imitação. Mostraremos que os resultados obtidos originalmente por Harris e Todaro são propriedades emergentes do nosso modelo.

No capítulo 3, analisamos a migração rural-urbana através de um modelo computacional baseado em agentes, levando em consideração a influência da vizinhança social na decisão de migração. Naquela parte do trabalho, tal influência foi analisada através de um modelo do tipo Ising. Por sua vez, a *suposição crucial* feita por Harris e Todaro foi tomada como premissa.

No presente capítulo, somos motivados pela seguinte questão: a *suposição crucial* e o equilíbrio com concentração urbana e desemprego urbano do MHT original podem ser obtidos como propriedades emergentes das interações entre agentes adaptativos? A fim de responder esta questão, implementamos um modelo computacional baseado em agentes no qual cada trabalhador busca sua melhor localização setorial

¹Em modelos de aprendizagem social sucessos e falhas de outros agentes afetam a probabilidade com que cada agente escolhe uma determinada estratégia [39, 40].

em termos de rendimentos, imitando agentes de sucesso.

4.1 O Modelo Harris-Todaro Revisitado

Como exposto no capítulo 2, a hipótese chave de Harris e Todaro é que os migrantes reagem principalmente a incentivos econômicos, diferencial de rendimentos e a probabilidade de obter um emprego no setor de destino quando tomam sua decisão de migrar.

4.1.1 MHT com Função de Produção Cobb-Douglas e Elasticidade dos Termos de Troca Constante

Nesta seção formalizaremos o modelo de Harris e Todaro para funções de produção com formas funcionais específicas. Semelhante à versão original do modelo de Harris-Todaro, em cada período de análise a igualdade (2.1) é verificada e a população total da economia é constante.

Uma suposição padrão feita a respeito da tecnologia é a função de produção Cobb-Douglas [30]. A partir dela, o processo produtivo do setor manufatureiro pode ser descrito da seguinte forma:

$$Y_m = f(N_m) = A_m N_m^\alpha, \quad (4.1)$$

onde $A_m > 0$ e $0 < \alpha < 1$ são constantes paramétricas. Note que $f'(N_m) = \alpha A_m (N_m)^{\alpha-1} > 0$, pois $A_m > 0$ e $\alpha > 0$; e $f''(N_m) = (\alpha - 1)\alpha A_m (N_m)^{\alpha-2} < 0$, pois $A_m > 0$ e $0 < \alpha < 1$. Esta tecnologia, portanto, satisfaz o princípio da produtividade marginal decrescente.

Neste setor, como suposto no MHT, um salário mínimo, w_m , é fixado institucionalmente. Usando a função de produção descrita acima, podemos, a partir da eq. (2.5), obter o nível de emprego do setor manufatureiro:

$$N_m = \left(\frac{\alpha A_m}{w_m} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (4.2)$$

De maneira semelhante, o setor rural tem seu processo produtivo descrito por uma função de produção do tipo Cobb-Douglas:

$$Y_a = q(N_a) = A_a(N_a)^\phi, \quad (4.3)$$

onde $A_a > 0$ e $0 < \phi < 1$ são constantes paramétricas. Note que $q'(N_a) = \phi A_a(N_a)^{\phi-1} > 0$ pois $A_a > 0$ e $\phi > 0$; e $q''(N_a) = (\phi - 1)\phi A_a(N_a)^{\phi-2} < 0$ pois $A_a > 0$ e $0 < \phi < 1$. Esta tecnologia, portanto, satisfaz também o princípio da produtividade marginal decrescente. Por último, como $N_a = N_r = N - N_u$, a função de produção do setor rural passa a ter como variável independente a população urbana:

$$Y_a = A_a(N - N_u)^\phi. \quad (4.4)$$

No setor rural, o salário real, dado pela equação (2.9), toma a seguinte forma com a tecnologia Cobb-Douglas:

$$w_a = \phi A_a(N - N_u)^{\phi-1} p. \quad (4.5)$$

O preço relativo do bem agrícola em termos do bem manufaturado, p , é dado por:

$$p = \left(\frac{Y_m}{Y_a} \right)^\gamma, \quad (4.6)$$

onde $\gamma > 0$ é um constante paramétrica, a qual é a elasticidade de p com relação a razão Y_m/Y_a .

Equilíbrio Temporário

Dados um vetor de constantes paramétricas $(A_a, A_m, \phi, \alpha, \gamma)$, uma população urbana inicial N_u e um salário mínimo w_m , podemos calcular o equilíbrio temporário do sistema econômico usando o fluxograma da Figura 2.3.

Dado w_m , pela eq. (4.2) encontramos o nível de emprego do setor manufatureiro, o qual substituído na eq. (4.1) resulta na produção agregada deste setor:

$$Y_m = A_m^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{\alpha}{w_m} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \quad (4.7)$$

Utilizando as eqs. (4.4), (4.6) e (4.7), os termos de troca são

$$p = \left[\frac{A_m^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{\alpha}{w_m} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}{A_a (N - N_u)^\phi} \right]^\gamma. \quad (4.8)$$

Finalmente, substituindo a equação (4.8) na eq.(4.5), o salário rural será

$$w_a = \phi \rho A_a^{1-\gamma} A_m^{\frac{\gamma}{1-\alpha}} \left(\frac{\alpha}{w_m} \right)^{\frac{\alpha\gamma}{1-\alpha}} \frac{1}{(N - N_u)^{1-\phi+\phi\gamma}}. \quad (4.9)$$

Em suma, o vetor $(N_m, Y_m, N_a, Y_a, p, w_a)$ dá a configuração do equilíbrio temporário. Este equilíbrio poderá ser alterado caso ocorra a migração de trabalhadores, induzida pelo diferencial de salários, que modifica a distribuição setorial da população total.

4.1.2 Análise Estática Comparativa do MHT

Como exposto no capítulo 2, o fluxo migratório da região rural para urbana cessará quando o diferencial de salários esperados atinje o valor δ , eq. (2.13).

O nível da população urbana que satisfaz a eq. (2.13), isto é, a fração urbana de equilíbrio $n_u^* = N_u^*/N$, é determinada a partir da solução da equação que resulta da substituição das eqs. (2.11) e (4.9) na eq. (2.13):

$$\frac{N_m}{N_u} w_m - \phi \rho A_a^{1-\gamma} A_m^{\frac{\gamma}{1-\alpha}} \left(\frac{\alpha}{w_m} \right)^{\frac{\alpha\gamma}{1-\alpha}} \times \frac{1}{(N - N_u)^{1-\phi+\phi\gamma}} = \delta. \quad (4.10)$$

A solução da eq. (4.10) é parametrizada pelo vetor $(A_a, A_m, \rho, \gamma, \alpha, \phi, w_m)$.

No MHT, para avaliar a estabilidade do equilíbrio do fluxo migratório, postula-se um mecanismo de ajuste que é baseado na equação (2.14). Portanto, a equação diferencial que governa o estado de transição no modelo de Harris e Todaro é obtida através da substituição das equações (2.11) e (4.9) na eq. (2.14). Baseados neste processo de ajuste postulado, Harris e Todaro mostram que o equilíbrio do fluxo migratório é global e assintoticamente estável. Isto significa que a economia tenderia a um equilíbrio do fluxo migratório com desemprego no setor urbano, gerado pela presença de um salário mínimo relativamente alto para todas as possíveis condições iniciais. Daqui em diante, nos referiremos ao equilíbrio do fluxo migratório simplesmente como equilíbrio.

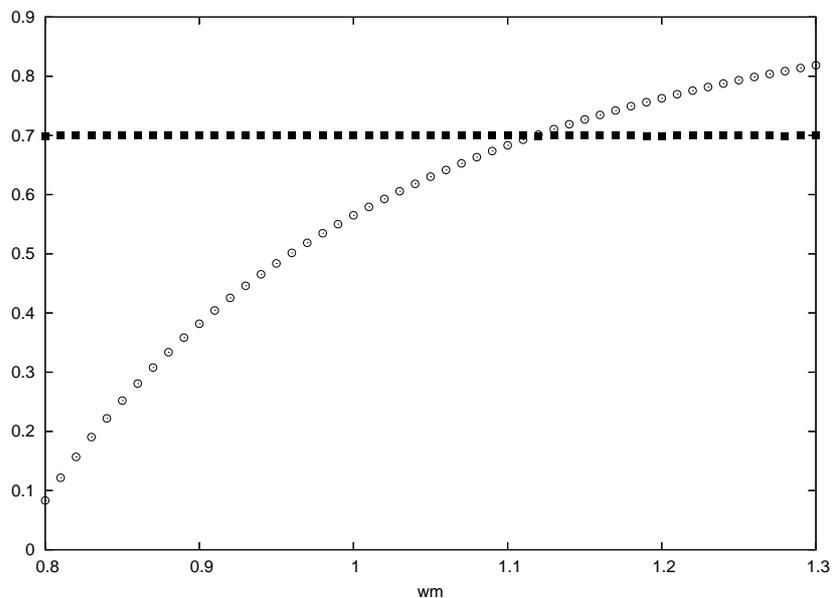


Figura 4.1: Solução numérica da eq. (4.10) para diferentes valores de w_m . Quadrados: fração urbana n_u^* ; Círculos: taxa de desemprego urbano $(1 - N_m/N)$. Parâmetros fixos usados são $A_a = 1,0$, $A_m = 1,0$, $\phi = 0,3$, $\alpha = 0,7$, $\rho = 1,0$ e $\gamma = 1,0$.

Baseados na solução numérica da eq. (4.10) podemos avaliar o impacto que a variação do salário mínimo e a elasticidade dos termos de troca causam no equilíbrio. Na Figura 4.1 vemos que, sob a hipótese de uma tecnologia Cobb-Douglas, a fração urbana de equilíbrio, n_u^* , não depende do salário mínimo w_m . Entretanto, mudanças no valor de w_m reduzem a demanda de trabalho no setor manufatureiro, resultando

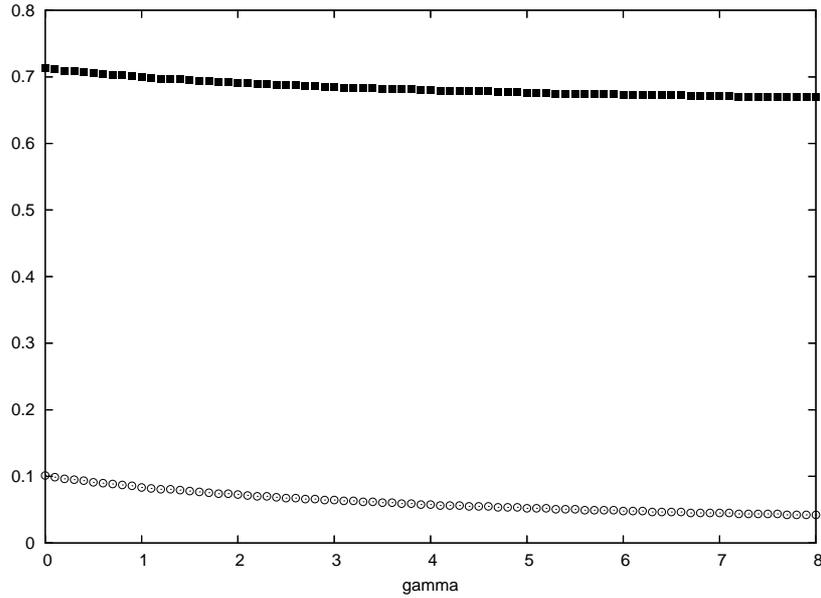


Figura 4.2: Solução numérica da eq. (4.10) para diferentes valores de γ . Quadrados: fração urbana n_u^* ; Círculos: taxa de desemprego urbano, $(1 - N_m/N_u^*)$. Parâmetros fixos usados são $A_a = 1,0$, $A_m = 1,0$, $\phi = 0,3$, $\alpha = 0,7$, $\rho = 1,0$ e $w_m = 0,8$

em altas taxas de desemprego urbano no equilíbrio.

Por sua vez, conforme visto na Figura 4.2, mudanças na elasticidade dos termos de troca alteram levemente a fração urbana de equilíbrio e a taxa de desemprego. Uma migração líquida em direção ao setor urbano modifica os termos de troca para valores mais elevados.

4.2 Um Modelo de Aprendizagem Social por Imitação

Os valores de referência dos parâmetros usados para calcular os valores de equilíbrio do modelo nas simulações adiante são: rede quadrada com dimensão linear $L = 500$, $A_a = 1,0$, $A_m = 1,0$, $\phi = 0,3$, $\alpha = 0,7$, $\rho = 1,0$ e $\gamma = 1,0$. O valor usado para o salário mínimo é $w_m = 0,8$ e a fração inicial da população urbana é $n_u = 0,2$. Dados estes parâmetros, podemos calcular o vetor que caracteriza o equilíbrio temporário do sistema através das equações (4.2-4.9).

Usando a eq. (4.2), o nível de emprego do setor urbano, N_m é obtido. Se

$n_u \leq N_m/N$ todos os trabalhadores no setor urbano estão empregados e cada indivíduo i recebe o salário dado pela produtividade marginal manufatureira, $w_i = \alpha A_m N_u^{\alpha-1}$. Caso contrário, $n_u > N_m/N$, haverá uma fração N_m/N_u de trabalhadores empregados, cada um recebendo o salário mínimo, $w_i = w_m$, e $(1 - N_m/N_u)$ trabalhadores desempregados, recebendo um salário $w_i = 0$.

Os migrantes potenciais são selecionados através da atividade a , semelhante a implementação feita na seção 3.3 do capítulo anterior, e determinarão seu nível de satisfação de estar no setor em que se encontram comparando seus rendimentos, w_i , com os vizinhos mais próximos.

Cada um dos migrantes potenciais inicia o processo de comparação com um nível de satisfação inicial $s_i = 0$. Quando $w_i > w_{vizinho}$, adiciona-se uma unidade ao nível de satisfação s_i ; se $w_i < w_{vizinho}$, s_i é decrescida em uma unidade; por último, se $w_i = w_{vizinho}$, s_i não é modificado. Assim que o migrante potencial o processo de revisão, o saldo do seu nível de satisfação é checado. A migração ocorrerá somente se $s_i < 0$, significando que o rendimento do i -ésimo trabalhador é menor do que o da maioria de sua vizinhança.

Depois que todos os migrantes potenciais completam seu processo de revisão e decidem por migrar ou não, uma nova configuração da rede é estabelecida. Portanto, um novo equilíbrio temporário do sistema é calculado através das equações (4.7-4.9). Todo o procedimento é repetido até que um número pré-determinado de passos seja atingido. É importante enfatizar que N_m é mantido constante durante toda simulação devido a fixação do salário mínimo w_m pelo governo. A sequência da simulação descrita anteriormente pode ser vista de forma esquemática no pseudocódigo 4.2.1.

Algoritmo 4.2.1: HARRISTODARO(n_u, w_m)

$n_u = \frac{N_u}{N} \leftarrow 0,2$ /* n_u inicial */

$w_m \leftarrow$ valor constante /* w_m fixo institucionalmente */

$n_m = \frac{N_m}{N} \leftarrow$ eq. (4.2)

if ($n_u < n_m$)

then $\left\{ \begin{array}{l} w_u \leftarrow \alpha A_m \left(\frac{1}{n_u} \right)^{1-\alpha} \quad /* \text{Salário urbano} */ \\ N_{\text{empregados}} \leftarrow n_u N \quad /* \text{Quantidade de empregados} */ \end{array} \right.$

else $\left\{ \begin{array}{l} w_u \leftarrow w_m \\ N_{\text{empregados}} \leftarrow n_m N \end{array} \right.$

/* Alocação aleatória dos agentes */

for $i \leftarrow 1$ **to** N

do $\sigma[i] = \pm 1$

/* Equilíbrio temporário */

$Y_m \leftarrow$ eq. (4.7), $Y_a \leftarrow$ eq. (4.4), $p \leftarrow$ eq. (4.8), $w_a \leftarrow$ eq. (4.9)

while ($n_u \neq$ equilíbrio do fluxo migratório) /* Equilíbrio do fluxo migratório */

do $\left\{ \begin{array}{l} N_{\text{pot}} = aN \\ \textbf{for } i \leftarrow 1 \textbf{ to } N_{\text{pot}} \\ \textbf{do } \left\{ \begin{array}{l} w[i] = \textbf{if } \sigma[i] = +1 \\ \textbf{then } n_u + = \sigma[i] \end{array} \right. \\ \textbf{if } (n_u < n_m) \\ \textbf{then } \left\{ \begin{array}{l} w_u \leftarrow \alpha A_m \left(\frac{1}{n_u} \right)^{1-\alpha} \\ N_{\text{empregados}} \leftarrow n_u N \end{array} \right. \\ \textbf{else } \left\{ \begin{array}{l} w_u \leftarrow w_m \\ N_{\text{empregados}} \leftarrow n_m N \end{array} \right. \\ Y_m \leftarrow \text{eq. (4.7)}, Y_a \leftarrow \text{eq. (4.4)}, p \leftarrow \text{eq. (4.8)}, w_a \leftarrow \text{eq. (4.9)} \end{array} \right.$

Análise das Propriedades Emergentes

Passamos agora para a análise das propriedades agregadas do modelo computacional. Estas propriedades serão comparadas com a solução analítica do MHT original e as simulações que executamos.

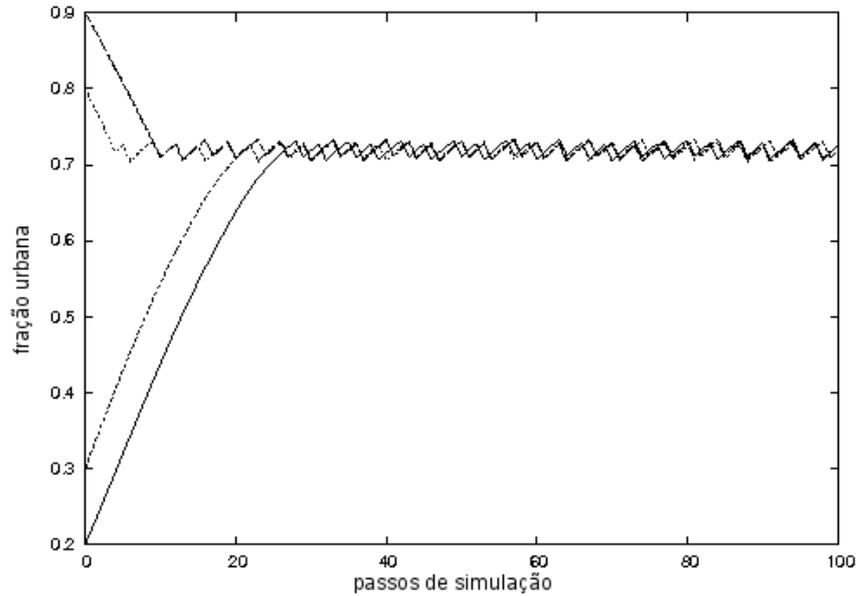


Figura 4.3: Fração urbana n_u em função dos passos de simulação. De cima para baixo as frações urbanas iniciais são 0,9, 0,8, 0,3, 0,2.

As Figuras 4.3, 4.4 e 4.5 mostram as características básicas da dinâmica de transição e do equilíbrio gerados pelas simulações. Podemos ver que para uma fração urbana inicial baixa, $n_u = 0,2$ ou $n_u = 0,3$, ocorre uma migração líquida em direção ao setor urbano. Esta migração leva este setor de uma situação de pleno emprego para um cenário com desemprego e o diferencial positivo de salários esperados que impulsiona os trabalhadores para o setor urbano diminuir paulatinamente. Entretanto, se a distribuição populacional da economia é tal que a fração urbana $n_u = 0,8$ ou $n_u = 0,9$ há um fluxo líquido de migração em direção ao setor rural de maneira que a taxa de desemprego no setor urbano diminui gradativamente. Neste caso, o diferencial de salários esperados é negativo. Em suma, as simulações indicam que parece haver um atrator em torno do qual a distribuição populacional gravita.

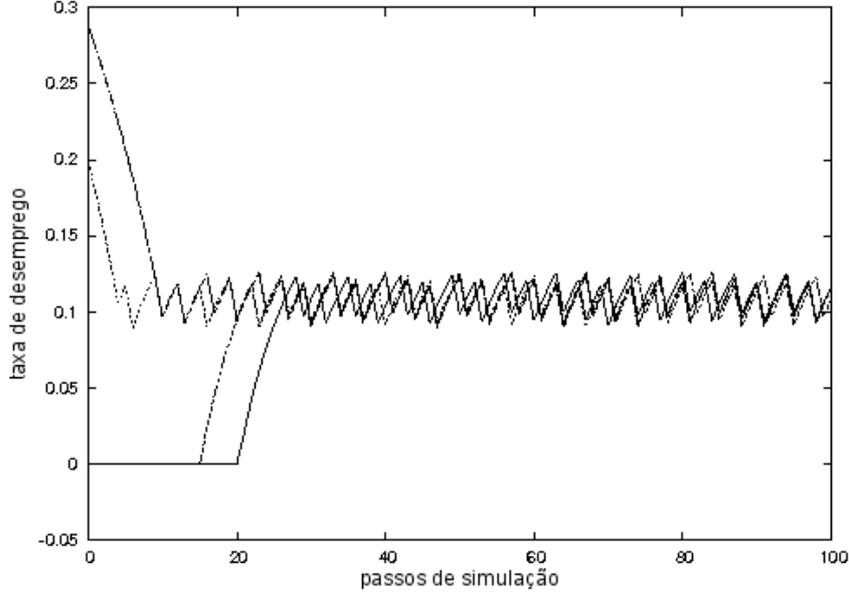


Figura 4.4: Taxa de desemprego ($1 - N_m/N_u$) em função dos passos de simulação. De cima para baixo as frações urbanas são 0,9, 0,8, 0,3, 0,2.

Da observação das Figuras 4.3, 4.4 e 4.5 percebe-se, também, que numa economia principalmente rural ($n_u < 0,5$), a dinâmica de transição é caracterizada pelo crescimento contínuo da população do setor urbano com um diferencial de salários esperados relativamente alto, seguido pela estabilização do diferencial de salários esperados rural-urbano. Em outras palavras, a condição generalizada Harris-Todaro, eq. (2.13), surge como uma propriedade de equilíbrio da dinâmica migratória baseada em agentes.

Podemos ver na Figura 4.3 que mesmo depois que a fração urbana tenha atingido um valor médio estável, existem pequenas flutuações em torno deste valor. Assim, diferentemente do MHT original, nosso modelo exibe o fenômeno de *migração reversa*. Este fenômeno tem sido observado em várias economias em desenvolvimento, cf. ref. [30].

Nas Figuras 4.6, 4.7 e 4.8 vemos que, para um dado valor do parâmetro tecnológico α , a variação de w_m praticamente não modifica os valores de equilíbrio da fração urbana, o diferencial de salários esperados e a taxa de desemprego. Entretanto, para um dado w_m , valores mais altos de α fazem com que o setor urbano

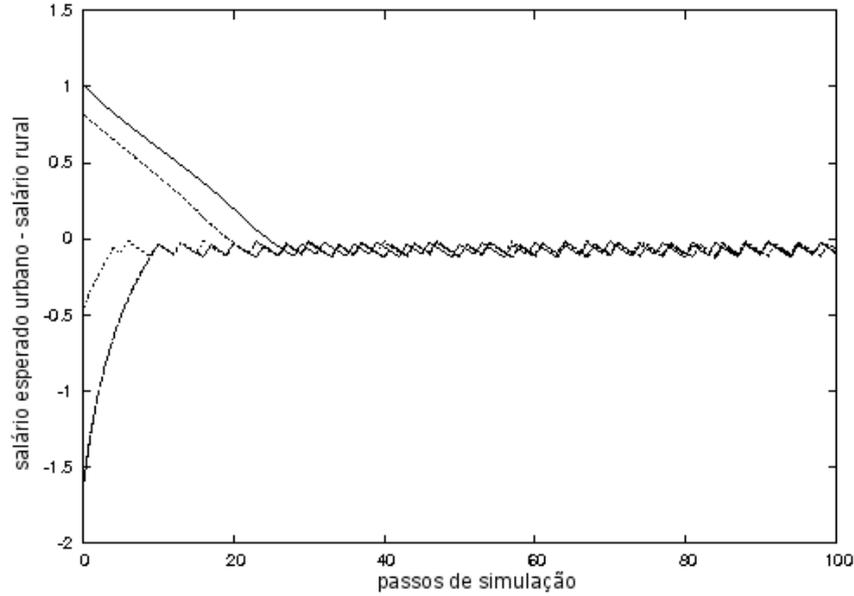


Figura 4.5: *Diferencial de salário esperado rural-urbano ($w_u^e - w_a$) em função dos passos de simulação. De cima para baixo as frações urbanas iniciais são 0,9, 0,8, 0,3, 0,2.*

torne-se menos atrativo devido a redução do nível de emprego. Isto produz uma fração urbana de equilíbrio menor, uma taxa de desemprego maior e uma não convergência dos salários esperados.

Na Figuras 4.9, 4.10 e 4.11 temos que para um valor fixo de γ , os valores de equilíbrio da fração urbana, o diferencial de salários esperados e a taxa de desemprego não têm uma dependência forte com w_m . Porém, variações em γ para um w_m fixo, modificam dramaticamente os valores de equilíbrio das variáveis mencionadas anteriormente. Valores mais elevados de γ geram uma concentração urbana menor, um maior hiato entre os salários esperados e uma taxa de desemprego mais elevada no equilíbrio.

Finalmente, na Figura 4.12 é mostrado que a convergência da dinâmica migratória para uma determinada fração urbana, compatível com dados históricos, é robusta em relação à variação dos principais parâmetros tecnológicos (α e ϕ). O impacto causado pela variação desses parâmetros nos valores de equilíbrio do diferencial de salários esperados, ($w_u^e - w_a$), e taxa de equilíbrio de desemprego urbano, ($1 - N_m/N_u$) podem ser vistos nas Figuras 4.13 e 4.14, respectivamente.

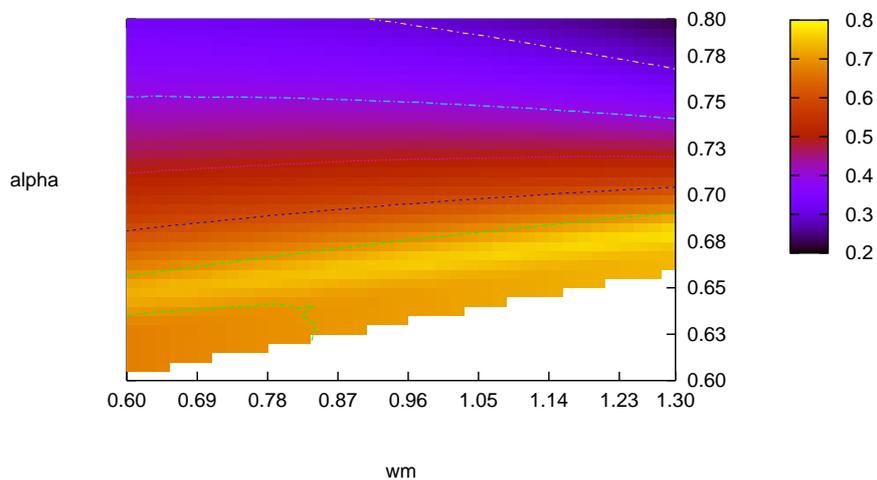


Figura 4.6: Fração urbana de equilíbrio n_u em função do parâmetro tecnológico α e o salário mínimo w_m . A área branca refere-se a uma combinação inválida de parâmetros.

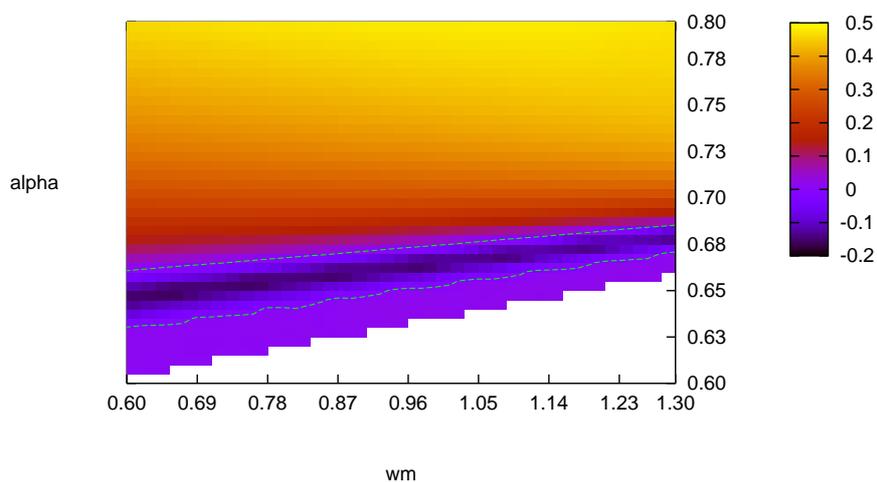


Figura 4.7: Diferencial de salário esperados de equilíbrio em função do parâmetro tecnológico α e o salário mínimo w_m . A área branca refere-se a uma combinação inválida de parâmetros.

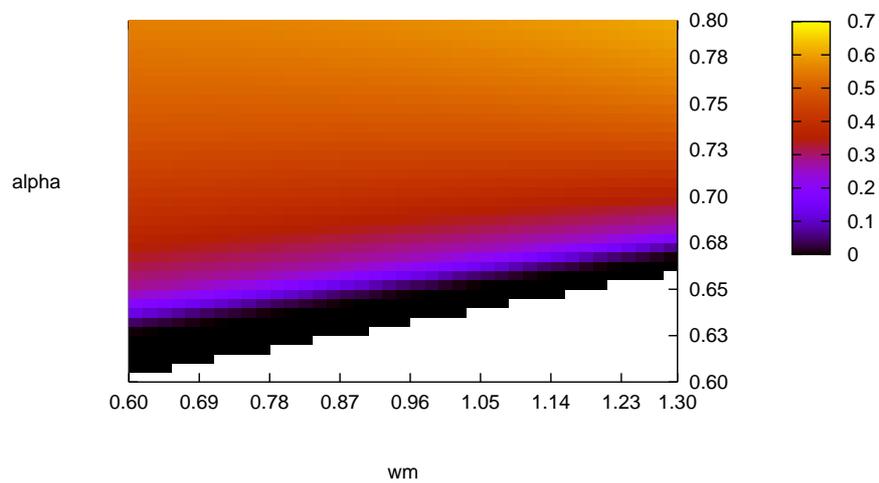


Figura 4.8: Taxa de desemprego urbano de equilíbrio ($1 - N_m/N_u$) em função do parâmetro tecnológico α e o salário mínimo w_m . A área branca refere-se a uma combinação inválida de parâmetros.

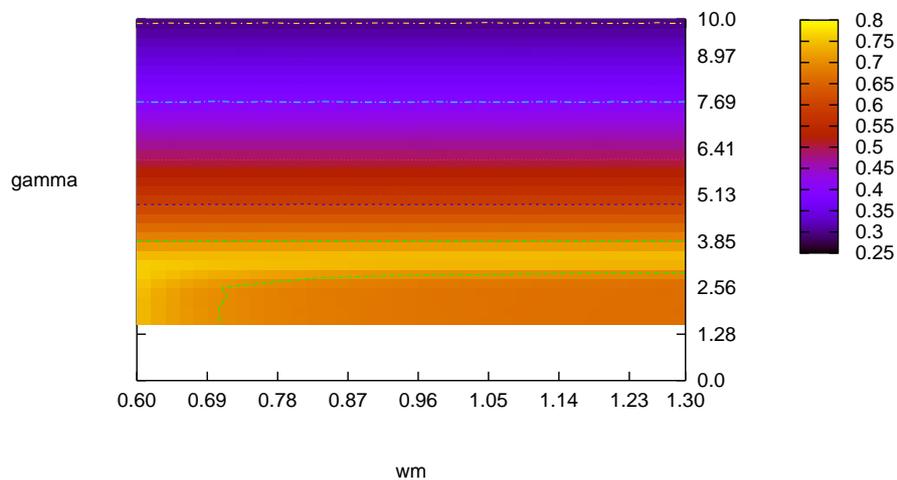


Figura 4.9: Fração urbana de equilíbrio n_u em função do parâmetro γ e o salário mínimo w_m . A área branca refere-se a uma combinação inválida de parâmetros.

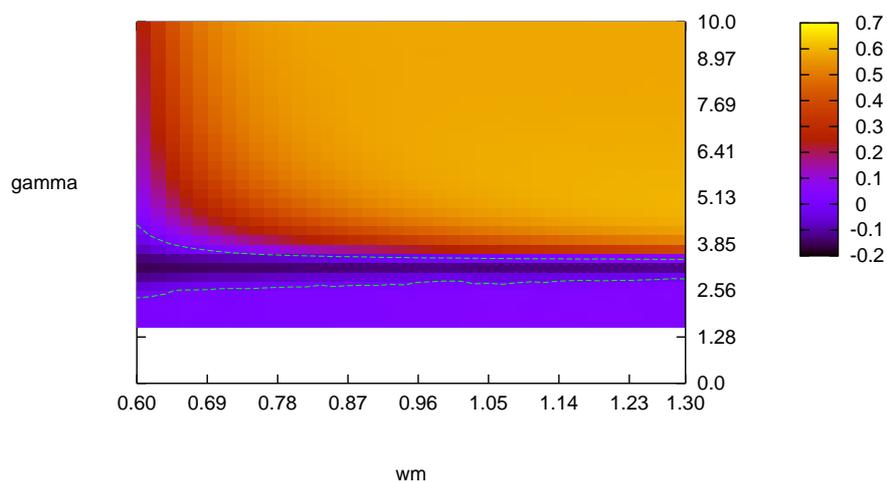


Figura 4.10: Diferencial de salários esperados de equilíbrio ($w_u^e - w_a$) em função do parâmetro γ e o salário mínimo w_m . A área branca refere-se a uma combinação inválida de parâmetros.

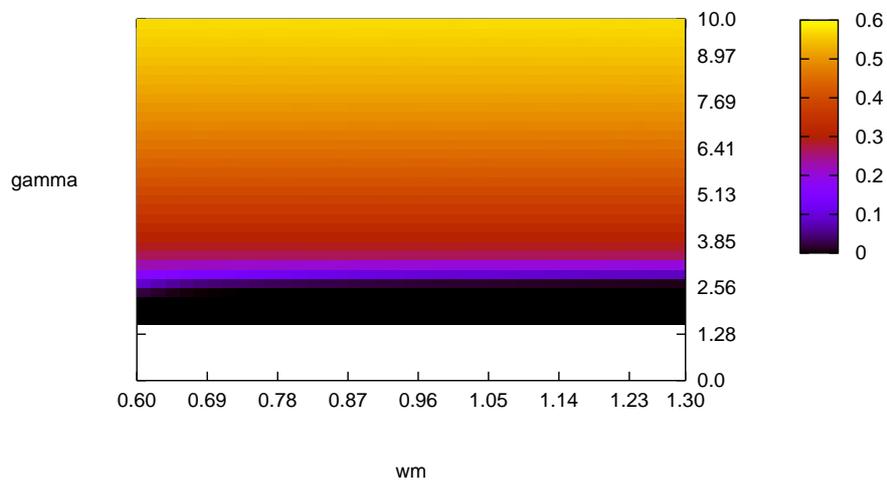


Figura 4.11: Taxa de desemprego urbano de equilíbrio ($1 - N_m/N_u$) em função do parâmetro γ e o salário mínimo w_m . A área branca refere-se a uma combinação inválida de parâmetros.

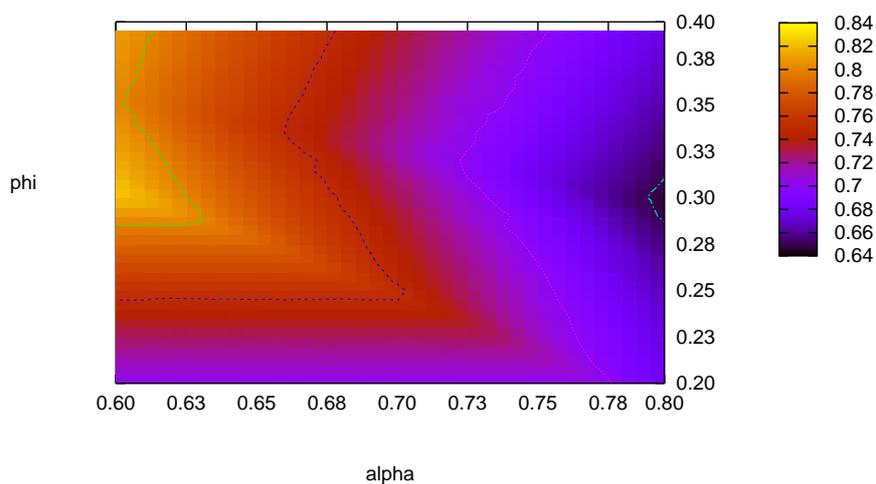


Figura 4.12: Fração urbana de equilíbrio n_u em função dos parâmetros tecnológicos α e ϕ . A área branca refere-se a uma combinação inválida de parâmetros.

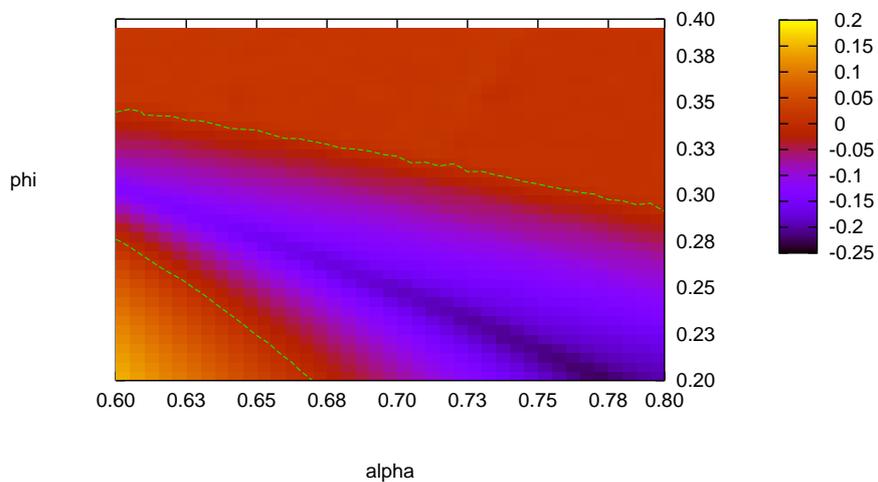


Figura 4.13: *Diferencial de salários esperados de equilíbrio ($w_u^e - w_a$) em função dos parâmetros tecnológicos α e ϕ . A área branca refere-se a uma combinação inválida de parâmetros.*

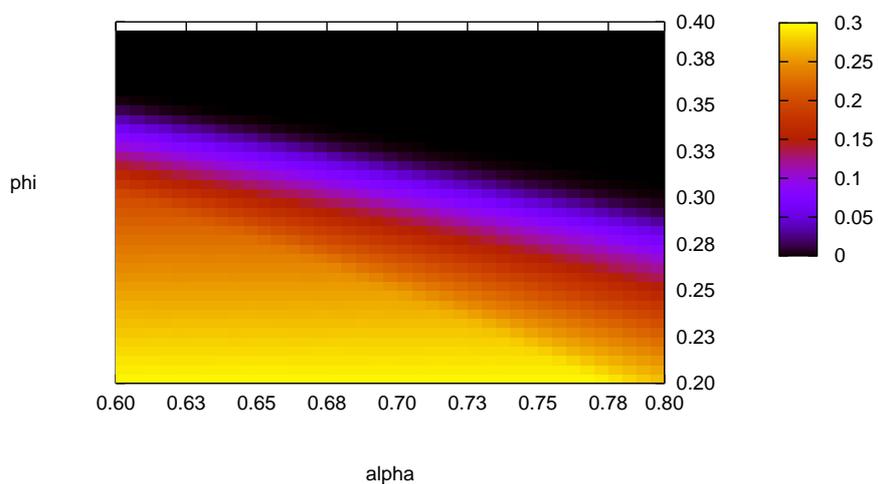


Figura 4.14: *Taxa de desemprego urbano de equilíbrio ($1 - N_m/N_u$) em função dos parâmetros tecnológicos α e ϕ . A área branca refere-se a uma combinação inválida de parâmetros.*

Conclusões

Neste trabalho estudamos o processo de migração rural-urbana a partir dos trabalhos de Harris e Todaro. Implementamos modelos computacionais baseados em agentes, com uma abordagem de mecânica estatística, com o intuito de descrever algumas das principais características das economias em desenvolvimento. No primeiro capítulo introduzimos alguns conceitos básicos sobre complexidade e mecânica estatística para, em seguida, no segundo capítulo apresentar o modelo de Harris e Todaro.

No capítulo 3 desenvolvemos um modelo computacional baseado em agentes para analisar o fenômeno da migração rural-urbana [35]. Para tanto, utilizamos um sistema econômico constituído de dois setores, rural e urbano, os quais diferem pelos tipos de bens produzidos, a tecnologia de produção e o mecanismo de determinação salarial. Assumimos o processo de decisão migratória como um problema de escolhas discretas, o qual ocorria em um ambiente cujas tomadas de decisão são descentralizadas e não-coordenadas, permitindo que o processo de migração rural-urbana fosse formalizado como um modelo do tipo Ising.

As simulações deste modelo mostraram regularidades agregadas as quais indicam que decisões descentralizadas de migração podem levar a macroestados de equilíbrio com as características observadas em economias em desenvolvimento. Primeiramente, as simulações em que o macro estado inicial era o de predominância da população rural e salário urbano esperado maior do que o rural provocaram uma dinâmica de transição rural-urbana com contínuo crescimento da fração urbana. Esta característica chave do fenômeno de migração é chamada na ref. [2] *transição*

urbana. Em segundo lugar, as simulações também mostraram que, durante o processo de migração rural-urbana, a redução da fração rural ocorria junto com o aumento da renda *per capita* da economia. Essa relação inversa entre a fração rural e a renda *per capita* é um dos fatos mais robustos observados em estatística econômica [1]. Em terceiro, a dinâmica de transição rural-urbana convergiu em direção a um macroestado de equilíbrio. Tal dinâmica e o macroestado de equilíbrio são sensíveis ao peso relativo entre os efeitos sociais e privados (utilidades), assim como ao grau de heterogeneidade dos agentes referente à propensão a migrar. Quando a componente da interação social é relativamente alta e encontra-se abaixo de um limiar crítico, a dinâmica de transição em direção ao equilíbrio é retardada e atinge uma fração urbana mais elevada. Por sua vez, com uma heterogeneidade dos agentes mais alta, $\beta \rightarrow 0$, anula-se a existência da "força" devida ao alto salário esperado urbano, fazendo com que o sistema econômico atinja um macroestado de equilíbrio com uma fração urbana de $n_u = 0,5$. Por outro lado, com uma heterogeneidade dos agentes moderada, $\beta > 1$, a fração urbana de equilíbrio alcançará um valor dentro de uma faixa empiricamente razoável ($n_u \geq 0,6$). A análise deste modelo foi estendida para redes de dimensão superiores a 2 até 7 [36].

A variação da dimensão das redes modificou levemente alguns dos resultados encontrados no caso em que $d = 2$. Para explicar este resultado, é importante lembrar que a distribuição de trabalhadores na rede não significa sua distribuição espacial, mas sim, a definição da vizinhança social de cada trabalhador. Portanto, quanto maior a dimensão da rede, maior será a vizinhança social de cada trabalhador, causando estas pequenas diferenças nos resultados.

No capítulo 4, implementamos um modelo computacional baseado em agentes com dinâmica paralela [37], em que cada trabalhador busca sua melhor localização em termos de rendimentos, imitando agentes de sucesso. Nesta parte do trabalho, a motivação foi verificar se a suposição crucial e o equilíbrio com concentração urbana e desemprego urbano do MHT original podiam ser obtidos como propriedades emergentes das interações entre os agentes dos sistema. As simulações mostraram

que as decisões migratórias individuais não-coordenadas tomadas com base em informações locais, geram regularidades agregadas. Em primeiro lugar, a suposição crucial de Harris e Todaro, ou seja, o princípio de que a migração rural-urbana ocorrerá enquanto o salário urbano esperado exceder o salário rural, foi gerada como um padrão emergente da interação entre agentes. Em segundo lugar, mostramos que a dinâmica migratória gerada por agentes que procuram adaptar-se ao ambiente econômico, levou a economia em direção a um equilíbrio do fluxo migratório caracterizado pela concentração urbana com desemprego urbano. Quando este equilíbrio foi atingido, a condição generalizada Harris-Todaro é satisfeita, isto é, há uma estabilização do diferencial de salários esperados rural-urbano. Em terceiro, o impacto do salário mínimo e a elasticidade dos termos de troca no equilíbrio do fluxo migratório obtidos pelas simulações estão de acordo com as previsões do MHT original com tecnologia Cobb-Douglas. E, por último, as simulações também mostraram um padrão agregado não encontrado no MHT original, isto é, a possibilidade de pequenas flutuações da fração urbana em torno de uma média estável, fenômeno conhecido como migração reversa.

O estudo do processo de migração rural-urbana feito neste trabalho pode ser aprofundado de diversas formas. O primeiro passo nesse sentido é a inclusão de mais setores no sistema econômico, pois, à medida que novos setores forem incluídos, teremos um modelo mais próximo o possível de uma economia real. A inclusão de vários outros setores da economia aumentará consideravelmente a sofisticação do nosso modelo de migração rural-urbana, o que nos permitirá estudar também o processo de formação de cidades. Vários estudos têm sido elaborados a respeito da formação dos aglomerados urbanos com intuito de explicar, por exemplo, a forma fractal do contorno de algumas cidades e o fato da distribuição da população seguir a lei de Zipf [41]. Em um estudo recente, Moura e Ribeiro [42] mostram através de dados estatísticos que a distribuição da população nas cidades brasileiras seguem a lei de Zipf. Assim sendo, pretendemos verificar a formação dessas cidades do ponto de vista do processo de migração interna. Na Figura 4.15a temos a distribuição

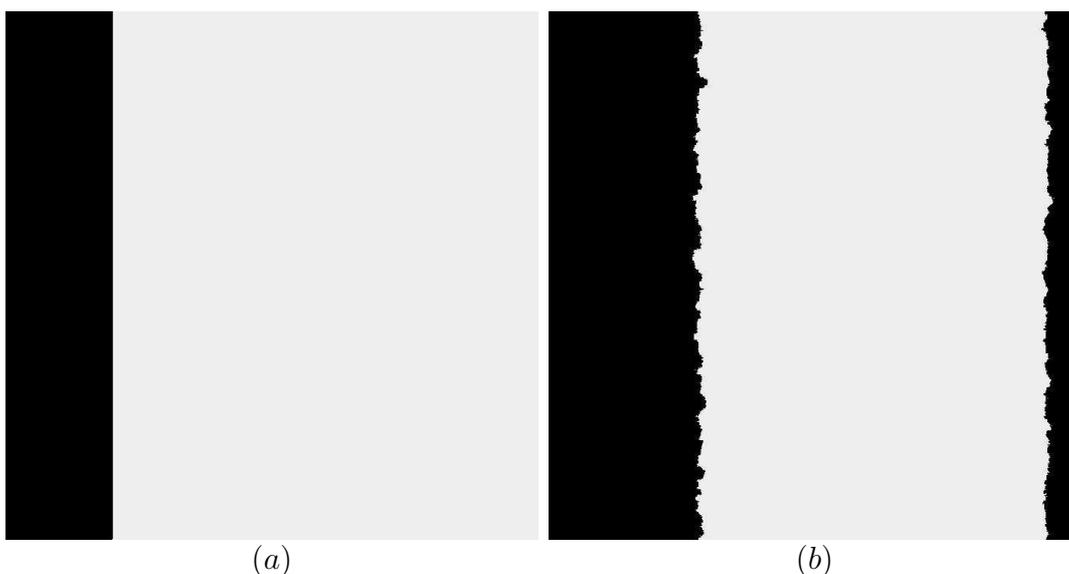


Figura 4.15: *Distribuição de agentes na rede. A área preta representa agentes urbanos ($\sigma_i = +1$) e a área branca, os rurais ($\sigma_i = -1$). Fig. (a) é a distribuição inicial do sistema. Fig. (b) é distribuição de equilíbrio em que o processo de migração ocorre somente na interface, sugerindo uma forma fractal.*

inicial dos trabalhadores numa rede quadrada, onde os pontos pretos representam trabalhadores urbanos e pontos brancos os rurais. Aplicamos a esta rede o mesmo modelo do capítulo 3 e mostramos os resultados na Figura 4.15b.

Outra questão que necessita ser analisada com mais profundidade é a possibilidade de transição no modelo baseado em agentes mostrado no capítulo 3. Na Figura 3.4 vemos a magnetização média m em função da razão J/K . A variação abrupta da magnetização para um dado valor da razão J/K sinaliza uma provável transição de fase. Entre outra coisas, estudaremos a possibilidade de incluir diferentes tipos de sistemas econômicos em alguma classe de universalidade, permitindo descrevê-las através de expoentes críticos.

Dando continuidade aos refinamentos do modelo, poderemos incluir o processo eleitoral como uma nova possibilidade em nosso sistema econômico. O objetivo é a inclusão de uma entidade governamental que define as proporções relativas do orçamento público que serão aplicadas no setor urbano e rural. Os agentes do sistema econômico avaliarão a política de alocação regional de recursos públicos via processo

eleitoral, levando em conta o saldo entre os benefícios trazidos em termos de bens públicos e o custo gerado pela cobrança de impostos. A política governamental, portanto, será avaliada recorrentemente, afetando e sendo afetada pelo processo de migração rural-urbana. Observaremos se a inclusão das estratégias governamentais provoca um viés urbano, ou seja, uma alocação de recursos públicos concentrada no setor urbano.

Referências Bibliográficas

- [1] Ray, D. *Development Economics*. Princeton: Princeton University Press, 1998.
- [2] Willianson, J. G., Migration and Urbanization. In: Chenery, H. and Srinivasan, T.N., *Handbook of developments economics*. Amsterdam: Elsevier, 1988.
- [3] Flake, G. W. *The Computational Beauty of Nature: Computer Explorations of Fractals, Chaos, Complex Systems, and Adaptations*. Cambridge: MIT Press, 2000.
- [4] Viscek, T. The bigger picture, *Nature* **418** (2002) 131.
- [5] Casti, J. L. *Would-be worlds - how simulation is changing the frontiers of science*. New York: John Wiley and Sons, 2001.
- [6] Durlauf, Steven N. Statistical mechanics approaches to socioeconomic behavior. In: *The economy as an evolving complex system II*. Santa Fe: Addison-Wesley, 1997.
- [7] Nussenzveig, H. M., Introdução à Complexidade. In: Nussenzveig, H. M. (Org.), *Complexidade & Caos*. Rio de Janeiro: Editora UFRJ/Copea, 2003.
- [8] Arthur, W. B., Durlauf, S. N. e Lane D. Process e Emergence in the Economy. In: *The economy as an evolving complex system II*. Santa Fe: Addison-Wesley, 1997.
- [9] Ising, E., Lenz, W., *Physik* **31** (1925) 253.

- [10] Onsager, L., Crystal statistics. A two dimensional model with an order-disorder transition, *Phys. Rev.* **65** (1944) 117.
- [11] Goldstine, H. H. *The Computer from Pascal to von Neumann*. Princeton: Princeton University Press, 1972.
- [12] Penna, T. J. P. Simulações computacionais de sistemas complexos. In: Rodrigues, L. M. C. S. et al. (Ed.), *Anais da V Escola do CBPF*, Vol II. Rio de Janeiro: Imprinta, 2005.
- [13] Metropolis, A. W. et al. *Journal of Chemical Physics*, **21** (1953) 1087 .
- [14] Binder, K., Heerman, D. W. *Monte Carlo simulation in statistical physics*. Berlin: Springer, 1997.
- [15] Yeomans, J. M. *Statistical mechanics of phase transitions*. Oxford University Press, Oxford, 1993.
- [16] Guggenheim, E. A. *Journal of Chemical Physics*, **3** (1945) 253 .
- [17] Chakrabarti. B. K. *Econophysics-Kolkata a short story*. In: Sudhakar, A. C., Chakrabarti. B. K. (Ed.), *Econophysics of Wealth Distributions*. Milão: Springer, 2005.
- [18] Rosser Jr., J. B. *Econophysics*. The new palgrave dictionary of economics, 2 ed., Cidade: editora, 2006.
- [19] Disponível em : <<http://boson.bose.res.in/~statkv/home.html>>. Acesso em: 20 dez. 2005.
- [20] Stanley, H. E, et al. Anomalous fluctuations in the dynamics of complex systems: from DNA and physiology to econophysics, *Physica A* **224** (1996) 302.
- [21] Mantegna, R. N., Stanley, H. E. *An introduction to econophysics: correlations and complexity in finance*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

- [22] Ball, P., The physics of society, *Nature*, **415** (2002) 371 .
- [23] Todaro, M. P. A model of labor migration and urban unemployment in less developed countries, *American Economic Review* **59** (1969) 138.
- [24] Harris, J. R., Todaro, M. P. Migration, unemployment and development: a two-sector analysis, *American Economic Review* **60** (1970) 126.
- [25] Bardhan, P., Udry, C. *Development Microeconomics*. Oxford: Oxford University, 1999.
- [26] Brock, William A., Durlaf, Steven N. Discrete choices with social interactions, *Review of Economic Studies* **68** (2001) 235.
- [27] Romer, D. *Advanced Macroeconomics*. New York: McGraw-Hill, 1996.
- [28] Ranis, G. Analytics of Development: Dualism. In: Chenery, H. and Srinivasan, T.N., *Handbook of developments economics*. Amsterdam: Elsevier, 1988.
- [29] Summer, L. H. *American Economic Review* **78** (1988) 383.
- [30] Day, R. H. et al. Instability in rural-urban migration. *The Economic Journal* **97** (1987) 940.
- [31] Freitas, G.G. Economia e sistemas complexos: interações sociais, dinâmicas emergentes e uma análise da difusão da Internet na cidade de São Paulo. Dissertação de Mestrado, Instituto de Pesquisas Econômicas, USP, 2003.
- [32] Stauffer, D., Penna, T.J.P. Crossover in the Count-Bouchaud percolation model for market fluctuations, *Physica A* **256** (1998) 284.
- [33] Barabasi, A. *Linked: how everything is connected to everything else and what it means for science, business and everyday life*. Cambridge, 2002.
- [34] Stauffer, D. World records in the size of simulated Ising models. *Brazilian Journal of Physics* **30** (2000) 787.

- [35] Silveira, J. J., Espíndola, A. L. e Penna, T. J. P. An agent-based model to rural-urban migration analysis. *Physica A* **364** (2006) 445.
- [36] Espíndola, A. L., Penna, T. J. P. e Silveira, J. J., Rural-urban migration in d -dimensional lattices, *International Journal of Modern Physics C* **16**, issue 12 (2005).
- [37] Espíndola, A. L., Silveira, J. J. e Penna, T. J. P. A Harris-Todaro Agent-Based Model to Rural-Urban Migration, *Brazilian Journal of Physics* **36 2B** (2006).
- [38] Meier, G. M., Rauch, J. E., *Leading issues in economic development*. Oxford: Oxford University Press, 2000.
- [39] Fudenberg, D., Levine, D. K. *The theory of learning in games*. Cambridge: MIT Press, 1999.
- [40] Ponti, G. Continuous-time evolutionary dynamics: theory and practice. *Research in Economics* **54** (2002) 187.
- [41] Zipf, G. K. *Human Behaviour and the Principle of Least-Effort*, Cambridge: Addison-Wesley, 1949.
- [42] Moura, N. J., Ribeiro, M. B. Zipf law for Brazilian cities, *Physica A*, no prelo.