Universidade Federal Fluminense

Instituto de Física

Uma Revisão de Modelos Bidimensionais Em Teoria Quântica dos Campos

Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física, como requisito Parcial para obtenção do título de Doutor em Física

Armando Flavio Rodrigues

Orientador: **Prof. Dr. Luiz Victorio Belvedere**

Niterói – R.J.

Junho 2007

.νῦν δ ἄλγεα πολλὰ μογήσας
ἤλυθον έικοστῷ ἔτει ες πατρίδα γαῖαν.

Ausente por vinte anos em árduos trabalhos,
Agora piso em terras da minha linhagem.

Homero, *Odisséia, Canto XIX, 483-484*
(c. séc. VIII A.C.)
[trad. A. F. R.]

Je mehr der Nagel auf den Kopf getroffen ist. […] – Mögen andere kommen und es besser machen.

Quanto mais perto do centro a flecha atingir o alvo. [...] – *Possam outros vir e fazer melhor.*

Ludwig Wittgenstein, *Tractatus Logico-Philosophicus, Prefácio (1918)*
[trad. L. H. Lopes dos Santos, EDUSP, 1994]

Do alto de 58 anos, só resta a uma dedicatória se curvar ante o que de melhor viveu quem a faz:

- ao meu sanguíneo orientador, amigo pessoal e intransferível Luiz Victorio Belvedere, físico de uma rara estirpe que ouso pretender representar e continuar;

- ao meu generoso cúmplice e estímulo nesta empreitada, Jorge Simões de Sá Martins, físico e artista gerador de artistas, quadragenária amizade com brilho diamantino forjado nos anos de chumbo e lapidado na maturidade;

- aos meus mestres no IF-UFF, pela competência e paciência com este aluno temporão;

- ao Cesar Campos, gestor e propiciador de História e, aqui indiretamente, de Ciência;

- aos meus parcos porém seletos amigos figadais Helio Jesuíno e Amaro-Hertz;

- ao meu pai Armando (*in memoriam*) e à minha mãe Devanaghi, pelo comum prazer – espero – e incomum acerto – controverso – ao me produzirem;

- às minhas mulheres (por ordem de chegada) Lucia-Hertz, Constança-Hertz e Luisa-Hertz, que não desistiram de me entender, e que possuem uma desmedida parcela nas origens e conseqüências disto tudo;

- ao Ariel e ao Bento, na certeza de que poderão fazer muito mais e melhor que o avô imodesto.

Resumo

Desde a criação por Walter Thirring, em 1958, do primeiro modelo bidimensional em Teoria Quântica dos Campos com solução exata, não-perturbativa, resultados supreendentes e esclarecedores vem sendo obtidos na extensa literatura desenvolvida a partir de então. Não obstante, a complexidade da matéria (sem duplo sentido) tem causado certo obscurecimento e alguma confusão quanto à aplicação adequada dos métodos de análise, levando às vezes a resultados díspares e insatisfatórios. É com o objetivo de lançar uma tênue luz sobre certas áreas cinzentas da pesquisa, fundamentando a metodologia com o máximo possível de clareza, que apresento aqui um estudo visando preencher algumas sutis lacunas existentes.

De início, usando-se a abordagem pelo método integral funcional e a redução Abeliana da teoria de Wess-Zumino-Witten (WZW), é feita uma nova apresentação do modelo de Thirring-Wess, mostrando-se e estabelecendo-se o isomorfismo entre a QED2 (QCD2), com quebra de simetria operada por uma prescrição de regularização, e o modelo de Thirring-Wess Abeliano (não-Abeliano) contendo um campo mesônico com massa nua fixada.

No capítulo seguinte, em outra aplicação a duas dimensões da teoria WZW, obtemos a bosonização, pelo método integral funcional, do modelo bidimensional de férmion com interação entre N espécies diferentes de campos de Fermi. A solução de operador para as equações de movimento quânticas é reconstruída a partir da formulação integral funcional. Numa extensão dos tratamentos existentes, obtém-se a função de partição do sistema mecânico-estatístico associado com a teoria efetiva bosonizada, e a equação de estado, exata, exibe uma transição de fase de Kosterlitz-Thouless.

No capítulo final, é estudado o modelo de acoplamento derivativo - e seus avatares - entre um campo de Fermi com massa e campos de Bose de massa nula, clarificando e delimitando as características da interação quártica de Thirring subjacente. De longe, e *ab ovo*, este capítulo é o mais polêmico, uma vez que seus resultados vêm contradizer alguns outros, antigos e recentes, preexistentes na literatura, como por exemplo uma há muito suposta e propalada equivalência total entre o modelo de Thirring e o modelo de Rothe-Stamatescu no limite de massa nula ($m_0 = 0$).

Abstract

Since the seminal work by Walter Thirring, in 1958, when he created the first exactly solvable, non-perturbative bidimensional model in Quantum Field Theory, amazing and explicative results have been obtained in the copious literature that followed. Notwhitstanding that, the complexity of the matter (no double sense here) has also produced some obscurity and confusion of ideas in respect of the correct applicability of some methods of analysis, leading sometimes to different and unsatisfactory results. I'm just presenting here, with the main aim of to cast a tenuous light on these researches' gray zones, and concerned to found the methodology upon the most basic clearness, a work that intents to fill some delicate gaps in that literature.

To begin with, the Thirring-Wess model is newly seen through a functional integral approach, and using the Abelian reduction of the Wess-Zumino-Witten (WZW) theory, the isomorphism between the QED_2 (QCD_2), with broken gauge symmetry by a regularization prescription, and the Abelian (non-Abelian) Thirring-Wess model with a fixed bare mass for the meson field, is established.

The second part deals with another application of the WZW theory in two dimensions, the functional integral bosonization of the two-dimensional fermion model with interaction among N different massive field species is obtained. The operator solution for the quantum equations of motion is reconstructed from the functional integral formalism. Through an extension of the existent approaches, the partition function of the statistical mechanical system associated with the effective bosonized theory is obtained, and the exact equation of state exhibits a Kosterlitz-Thouless phase transition.

Finally, at the third and fourth parts, the characteristics of the hidden quartic Thirring interaction underneath the derivative coupling model (and its avatars), in which a massive Fermi field interacts with massless Bose fields, are clarified and delimited within the operator formalism. This last topic has had a controversial career *ab ovo*, seeing that its results do not confirm those of some old and recent papers, e.g. the long-time supposed and widespread belief in the full equivalence between the Thirring and the Rothe-Stamatescu models considered in the $m_0 = 0$ limit.

Sumário

Introdução

a. Algumas palavras iniciais

Serão analisados neste trabalho vários modelos bidimensionais existentes em Teoria Quântica dos Campos, alguns com maior detalhe e sob novos enfoques, outros apenas referidos e delineados em poucos traços. Dois motivos me sugeriram buscar essa abrangência nesta introdução – propositalmente com a maior leveza possível. O principal foi o de contextualizar os modelos revistos nos Capítulos 2, 3 e 4[1] no âmbito da produção científica, tanto do ponto de vista histórico quanto do heurístico e das teorias e metodologias ali utilizadas. O secundário foi o de fazer uma abertura em contraponto com aquelas seções mais técnicas – e, portanto, mais áridas e de mais difícil apreensão -, tentando tornar mais estimulante o assunto, em linhas gerais, à leitura pelos não-especialistas. E como o instrumental teórico central do que será apresentado a seguir, a bosonização, repousa na exata correspondência entre representações de bósons e férmions em duas dimensões espaço-temporais, vamos ao início.

Em 1932, oito anos após sua fundadora intuição de que as partículas de matéria em movimento também poderiam apresentar fenômenos como difração e interferência, até então restritos aos processos ondulatórios, Louis-Victor-Pierre-Raymond, 7[e] duc de Broglie (premiado com o Nobel em 1929), abraçou com entusiasmo outro "Ansatz", não tão bem sucedido desta vez. Sugeriu um "novo conceito de luz" [L. de Broglie, "Une nouvelle conception de la lumière", *Compt. Rend.* **195**, 536, 862 (1932)], supondo que os então recém-descobertos neutrino e sua antipartícula (ambos férmions, com spin intrínseco $=1/2$, e até recentemente - 1994 – tidos como partículas com massa nula) seriam na verdade os componentes do quantum de luz, identificado por Einstein em 1905, o fóton (um bóson, com spin intrínseco = 1). E angariou nada menos que a adesão de Pascual Ernst Jordan, juntamente com Paul Adrien Maurice Dirac e outros, um dos fundadores da Eletrodinâmica Quântica (QED) nos anos 20-30, autor e co-

[1] O Capítulo 2 refere-se ao artigo constante na Ref. [46]; o Capítulo 3, ao artigo apontado na Ref. [47]; o Capítulo 4 subdivide-se na Seção 4.1, correspondente à Ref. [21], e na Seção 4.2, que corresponde à Ref. [48].

autor de vários trabalhos, entre 1934 e 1938, sobre o que chamou de "Teoria Neutrínica da Luz" [P. Jordan, "Zur Neutrinotheorie des Lichtes", *Zeitschrift für Physik* **A,** 464 (1934); *Z. Physik* **93**, 464 (1935)]. Ainda que a idéia de de Broglie viesse a se mostrar errônea – os fótons teriam que ser férmions, e não bósons, contrariamente à observação -, assim como da mesma forma a teoria de Jordan – a criação de fótons, neutrinos e antineutrinos não teria simetria rotacional [M. H. L. Pryce, *Proc. Roy. Soc. (London)* **A165**, 247 (1938)], também contradizendo a experimentação -, até pelo menos 1965 alguns tentaram seguir suas pegadas [W. A. Perkins, "Neutrino Theory of Photons", *Phys. Rev.* **B137**, 1291 (1965)]. Em vão. Restou disso, porém, o aparato teórico matemático desenvolvido por Jordan que, em uma dimensão espacial, possibilitou nos anos cinqüenta, pela primeira vez, a representação de correntes de férmions com carga em termos de campos de bósons livres.

Sin-itiro Tomonaga, que viria a ser agraciado com o prêmio Nobel em 1965, juntamente com Robert Phillips Feynman e Julian Schwinger, por seus trabalhos anteriores, que contribuiram para estabelecer definitivamente a QED como uma teoria de resultados precisos e inquestionáveis, usou em 1950 esse legado de Jordan para, operando a redução a uma dimensão espacial, provar a correção de um trabalho de Felix Bloch datado de 1934, originariamente referente às propriedades de propagação de férmions num condutor tridimensional [S. Tomonaga, *Prog. Theor. Phys.* **5**, 544 (1950); F. Bloch, *Helv. Phys. Acta* **7**, 385 (1934)]. Começa a se manifestar aí a aproximação entre duas áreas até então distintas, a Teoria Quântica dos Campos (TQC ou, em inglês, QFT) e a Física da Matéria Condensada (FMC ou, em inglês, $CondMat$) – conhecida esta até os anos setenta como Física do Estado Sólido ("Solid State Physics").

Daí vieram outras convergências e paralelos, e observações mais recentes – supercondutores térmicos, superfluidos planares, correntes em nanotubos de carbono – têm trazido à luz da investigação o grande cabedal teórico acumulado pelos diversos modelos bidimensionais que foram sendo desenvolvidos e detalhadamente estudados no último meio século. Às vezes até com insuspeita duplicidade, como foi o caso do "modelo de Thirring com massa" da TQC, conhecido na comunidade FMC como "modelo de Tomonaga-Luttinger com espalhamento inverso (*backward scattering*)".

Os modelos bidimensionais da TQC (aqueles referidos no presente trabalho encontram-se resumidos no Apêndice (Cap. 5)) foram intensivamente empregados nas décadas de 60 e 70 na busca de clarificação do mecanismo de confinamento, componente necessária e ainda não totalmente explicada do "modelo de quarks", proposto por Murray Gell-Mann (Nobel em 1969) e Yuval Ne'eman em 1964, solidamente alicerçado hoje em inúmeros resultados experimentais [S. Eidelman et al., "Particle data group: quark model", *Phys. Lett.* **B** 592, 1 (2004)].

No Capítulo 2 (ver Ref. [46]) será desenvolvida uma nova visão do modelo de Thirring-Wess (ver Apêndice), usando uma abordagem pelo método de integração funcional – que abreviaremos por "abordagem funcional". No Capítulo 3 (ver Ref. [47]) nos aproximamos da FMC, ao estudar um modelo de férmions com N espécies, ou sabores, e o sistema mecânico-estatístico associado, que em certas condições vem a ser um gás planar de partículas carregadas que interagem através de um potencial de Coulomb (o qual, em duas dimensões, é representado por uma função logarítmica). Nas duas Seções (ver Refs. [21] e [48]) do Capítulo 4 são dissecados alguns modelos que apresentam interações através de derivadas de campos escalares e pseudo-escalares. Os resultados obtidos neste Capítulo 4, em particular – mesmo que estejam solidamente fundamentados na teoria -, prometem ser os mais polêmicos, por contradizerem outros trabalhos recentemente publicados e referidos no texto. Outros trabalhos relacionados aos aqui apresentados já foram desenvolvidos, encontrando-se em preparativos para publicação.

b. Convenções

As seguintes convenções de notação são adotadas aqui:

$$g^{00} = 1, \varepsilon^{01} = -\varepsilon_{01} = -\varepsilon^{10} = 1,$$

$$\gamma^{\mu}\gamma^{5} = \varepsilon^{\mu\nu}\gamma_{\nu}, \not{\partial} = \gamma^{\mu}\partial_{\mu}, \tilde{\partial}_{\mu} = \varepsilon_{\mu\nu}\partial^{\nu},$$

$$\gamma^{5} = \gamma^{0}\gamma^{1}, \gamma^{0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^{1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\partial_{\pm} = \partial_{0} \pm \partial_{1}, \mathcal{A}_{\pm} = \mathcal{A}_{0} \pm \mathcal{A}_{1}.$$

Para um campo escalar livre com massa nula:

$$\tilde{\partial}_{\mu}\tilde{\Phi} = -\partial_{\mu}\Phi.$$

O campo de Fermi Ψ é o spinor com duas componentes

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_{1} \\ \psi_{2} \end{pmatrix}.$$

2. Revisitando o Modelo de Thirring-Wess: uma Abordagem Funcional

Neste Capítulo (ver Ref. [46]) será considerada a teoria Wess-Zumino-Witten (WZW) para se obter a bosonização funcional do modelo de Thirring-Wess (TW) com um parâmetro de regularização arbitrário. Levando a cabo uma sistemática de decompor a álgebra do campo de Bose em sub-álgebras de campo invariante e não-invariante de calibre, obtém-se a ação quântica bosonizada desacoplada local.. As soluções de operador generalizadas para as equações de movimento são reconstituídas por meio do formalismo funcional. É estabelecido o isomorfismo entre a QED_2 (QCD_2) com quebra de simetria por uma prescrição de regularização e o modelo Thirring-Wess Abeliano (não-Abeliano) com a massa nua do campo mesônico fixa.

2.1. Escopo e Método

O modelo de Thirring-Wess (TW) [1] foi considerado nas Refs. [2, 3, 4, 5, 6, 7] com o fim de investigar a forma segundo a qual a QED_2 pode ser entendida como um limite de uma teoria de méson livre quando a massa nua (m_0) do méson tende a zero. O modelo TW padrão, no qual é adotada a prescrição de regularização invariante de calibre, corresponde a se quantizar o modelo absorvendo todos os efeitos da destruição da simetria de calibre na massa nua da teoria do méson. O cálculo da corrente vetorial é feito usando-se a regularização invariante de calibre para o procedimento de limite de point-splitting., o que corresponde ao parâmetro de regularização $a = 2$. Numa formulação em um espaço de Hilbert com métrica positiva-definida, o limite $m_0 \to 0$ não existe para o operador de campo de Fermi (ψ) nem para o operador de campo vetorial $(\mathcal{A}_\mu)$ [7]. O limite de massa zero não é bem definido para as funções de Wightman gerais que fornecem uma representação da álgebra de campo não-invariante de calibre correspondente ao modelo TW padrão. Entretanto, as funções de Wightman invariantes de calibre da QED_2 são obtidas como o limite de massa zero das funções de Wightman da sub-álgebra de campo invariante de calibre do modelo TW padrão.

Mais recentemente, a QED_2 com quebra de simetria de calibre, através do uso de um parâmetro de regularização arbitrário a, foi estudada na Ref. [9], sendo referida como modelo de Schwinger "anômalo". A QED_2 padrão corresponderia à regularização invariante de calibre $a = 2$. Entretanto, também neste caso, o limite invariante de calibre $a \to 2$ não existe para os próprios campos ψ e $\mathcal{A}_\mu$. O limite $a \to 2$ é bem definido somente para o subconjunto invariante de calibre de funções de Wightman. O problema estrutural associado com o limite de massa zero das funções de Wightman no modelo TW padrão pode ser mapeado sobre o problema correspondente de se passar ao limite $a \to 2$ na QED_2 com quebra de invariância de calibre.

Um dos objetivos do presente Capítulo é o de preencher uma lacuna na literatura existente, através da discussão dos aspectos estruturais do modelo TW sob a ótica da formulação funcional, e pela extensão da análise ao modelo TW geral regularizado por um parâmetro arbitrário a. Com este fim, usamos a redução abeliana da teoria WZW para considerar a bosonização funcional do modelo TW generalizado. Visando obter uma visão melhor do comportamento dos operadores variantes de calibre, adotamos no presente tratamento a sistemática de decompor, passo a passo, a álgebra de campo de Bose em sub-álgebras de calibre invariantes (GI) e não-invariantes (GNI), de forma que a ação quântica bosonizada efetiva é desacoplada em partes GI e partes GNI. A destruição da simetria de calibre é caracterizada pela presença de um campo de Bose livre, sem massa e não-canônico. O campo vetorial com massa nua m_0 adquire uma massa dinâmica

$$\tilde{m}_0^2 = \frac{e^2}{4\pi}\left(a+2\right) + m_0^2 .$$

Obtemos no tratamento aqui adotado uma formulação em um espaço de Hilbert de estados com métrica indefinida, e a equação de Proca é satisfeita na forma fraca. Os operadores de campo generalizados são reconstruídos pelo formalismo de integração funcional e escritos como campos de calibre transformados por uma transformação de calibre valorada sobre operadores. Na formulação de métrica indefinida o limite GI pode ser levado a cabo, e obtemos os operadores de campo correspondentes da QED_2, já obtidos por Lowenstein-Swieca [6]. Aplicando uma transformação canônica, a parte de calibre singular vem a ser a identidade, e obtemos a solução generalizada de operador para as equações de Dirac-Proca acopladas. Para a regularização invariante de calibre $a = 2$, recuperamos a solução de operador do modelo TW padrão, já obtida por Lowenstein-Rothe-Swieca. [6, 7]. Como neste caso a corrente longitudinal não porta nenhuma regra de seleção de carga fermiônica, auto-comuta e comuta com todos os operadores pertencentes à álgebra de campo, ela se reduz ao operador identidade. Isto conduz a um espaço de Hilbert de estados com métrica positivo-definida, e as equações de Dirac-Proca acopladas são satisfeitas na forma forte. Como neste caso o operador de campo de Fermi é dado em termos do operador de férmion portador de carga do modelo de Thirring, o limite de massa zero existe apenas para a sub-álgebra de campo GI. Damos assim seqüência à apresentação das Refs. [6, 7].

Outro propósito deste Capítulo é discutir criticamente o isomorfismo entre a QED_2 com quebra de invariância de calibre local (o modelo vetorial "anômalo" de Schwinger considerado em [9]) e o modelo TW. Usando a teoria de Wess-Zumino-Witten, mostramos que a ação quântica efetiva da QED_2 quantizada com uma regularização não-invariante $b \neq 2$ é equivalente à ação quântica do modelo TW com uma massa nua de campo vetorial

$$m_0^2 = \frac{e^2}{4\pi}\left(b - a\right),$$

onde $a < b$ é o parâmetro usado na regularização do modelo TW. Deste modo, o limite invariante de calibre $b \to 2$ para a QED_2 com quebra de simetria de calibre é mapeado sobre o limite $m_0 \to 0$ para o modelo TW padrão ($a = 2$). Como é bem conhecido [7, 8], o fenômeno de confinamento na QED_2 padrão está associada com a ausência de setores de carga, Deste modo, a conclusão da Ref. [9], de acordo com a qual o parâmetro a controla as propriedades de confinamento e de screening, nada mais é do que afirmar que o modelo TW exibe um operador de férmion portador de carga, e logo, que não há confinamento.

2.2. Abordagem Funcional: Bosonização

O modelo TW é definido [1] a partir da densidade Lagrangiana clássica[1]:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} + \bar{\psi}\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - e\gamma^{\mu}A_{\mu}\right)\psi + \frac{1}{2}m_0^2 A_{\mu}\mathcal{A}^{\mu} \tag{2.1}$$

onde o tensor de intensidade de campo $F_{\mu\nu}$ é dado por

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\nu}A_{\mu} - \partial_{\mu}A_{\nu}\,. \tag{2.2}$$

A invariância de calibre local é quebrada pelo termo de massa para o campo vetorial. No nível clássico, a invariância de calibre local pode ser restaurada pela passagem ao limite $m_0 \to 0$ em (2.1). Este limite corresponde à Lagrangiana clássica da eletrodinâmica bidimensional. Ao nível quântico, porém, o limite de massa zero para o campo vetorial, mesmo para uma prescrição de regularização invariante de calibre, é bem definido apenas para o subconjunto invariante de calibre das funções de Wightman [7].

2.2.1. Desacoplamento da Ação Quântica

Para obter a ação quântica desacoplada, consideraremos a redução Abeliana da teoria WZW [11]. Assim, vamos considerar o funcional gerador (no espaço de Minkowski)

$$\mathcal{Z}\left[\bar{\vartheta}, \vartheta, j^{\mu}\right] = \left\langle exp\left[i\int d^2z\left(\bar{\vartheta}\psi + \bar{\psi}\vartheta + j_{\mu}\mathcal{A}^{\mu}\right)\right]\right\rangle, \tag{2.3}$$

onde a média é tomada com respeito à medida de integração funcional

[1] Nossas convenções: $g^{00} = 1,\ \varepsilon^{01} = -\varepsilon_{01} = -\varepsilon^{10} = 1,\ \gamma^{\mu}\gamma^{5} = \varepsilon^{\mu\nu}\gamma_{\nu},\ \not{\partial} = \gamma^{\mu}\partial_{\mu},\ \tilde{\partial}_{\mu} = \varepsilon_{\mu\nu}\partial^{\nu},\ \gamma^{5} = \gamma^{0}\gamma^{1},\ \gamma^{0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \gamma^{1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$ $\partial_{\pm} = \partial_0 \pm \partial_1,\ \mathcal{A}_{\pm} = \mathcal{A}_0 \pm \mathcal{A}_1$. Para um campo escalar livre com massa nula: $\tilde{\partial}_{\mu}\tilde{\Phi} = -\partial_{\mu}\Phi$. O campo de Fermi Ψ é o spinor com duas componentes $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$.

$$d\mu = \int \mathcal{D}\mathcal{A}_\mu \mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\psi \exp\left[iS\left(\bar{\psi}, \psi, \mathcal{A}_\mu\right)\right], \tag{2.4}$$

e a densidade Lagrangiana é dada por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\mathcal{F}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mu\nu} + \psi_1^\dagger \mathcal{D}_+\left(\mathcal{A}\right)\psi_1 + \psi_2^\dagger \mathcal{D}_-\left(\mathcal{A}\right)\psi_2 + \frac{1}{2}m_0^2 \mathcal{A}_+\mathcal{A}_-, \tag{2.5}$$

onde

$$\mathcal{D}_\pm\left(\mathcal{A}\right) \doteq \left(i\partial_\pm - e\mathcal{A}_\pm\right). \tag{2.6}$$

O campo vetorial pode ser parametrizado em termos dos campos de Bose $\left(U, V\right)$ como se segue [13, 19]:

$$\mathcal{A}_+ = -\frac{1}{e}U^{-1}i\partial_+ U, \tag{2.7}$$

$$\mathcal{A}_- = -\frac{1}{e}Vi\partial_- V^{-1}, \tag{2.8}$$

onde

$$U = \exp\left(2i\sqrt{\pi}u\right), \tag{2.9}$$

$$V = \exp\left(2i\sqrt{\pi}v\right), \tag{2.10}$$

resulta que:

$$\bar{\psi}\not{D}\left(A\right)\psi = \left(V^{-1}\psi_1\right)^\dagger\left(i\partial_-\right)\left(V^{-1}\psi_1\right) + \left(U\psi_2\right)^\dagger\left(i\partial_+\right)\left(U\psi_2\right). \tag{2.11}$$

Para desacoplar os campos de Fermi e os campos vetoriais na Lagrangiana (2.1), as componentes (ψ_1, ψ_2) do spinor são parametrizadas em termos dos campos de Bose (U, V), e das componentes (χ_1, χ_2) do campo livre de Fermi:

$$\psi_1 = U^{-1}\chi_1 \tag{2.12}$$

$$\psi_2 = V\chi_2, \tag{2.13}$$

tal que

$$\bar{\psi}\not{D}\psi = \chi_1^{+} i\partial_{-}\chi_1 + \chi_2^{+} i\partial_{+}\chi_2 .$$

Visando introduzir a sistemática de decomposição da álgebra $\Im^{B}$ do campo de Bose:

$$\Im^{B} = \Im^{B}\{U, V\} \tag{2.14}$$

em sub-álgebras de campo invariante de calibre (GI) e não-invariante de calibre (GNI), vamos considerar *uma classe de transformações locais de calibre* g com ação sobre os campos de Bose (U, V), como se segue:

$$g : U \to {}^{g}U = Ug \tag{2.15}$$

$$g : V \to {}^{g}V = g^{-1}V \tag{2.16}$$

onde

$$g(x) = \exp\left(2i\sqrt{\pi}\Lambda(x)\right). \tag{2.17}$$

Logo,

$$Ug = \exp\left(2i\sqrt{\pi}u\right)\exp\left(2i\sqrt{\pi}\Lambda(x)\right) = \exp\left[2i\sqrt{\pi}\left(u + \Lambda\right)\right];$$

da mesma forma

$$g^{-1}V = \exp\left(-2i\sqrt{\pi}\Lambda(x)\right)\exp\left(2i\sqrt{\pi}v\right) = \exp\left[2i\sqrt{\pi}\left(v-\Lambda\right)\right].$$

Sob transformações do tipo g (transformações-g) os campos (u,v) se transformam como

$$g: u \to u + \Lambda(x) \tag{2.18}$$

$$g: v \to v - \Lambda(x) \tag{2.19}$$

A combinação $(u+v)$ é GI, e a combinação $(u-v)$ é GNI. Os campos vetorial e de Fermi se transformam sob g das seguintes formas:

$$^{g}\mathcal{A}_\mu = \mathcal{A}_\mu + \frac{1}{e} g i \partial_\mu g^{-1}, \tag{2.20}$$

$$^{g}\psi_1 = \left(^{g}U\right)^{-1} \chi_1 = g^{-1}\psi_1, \tag{2.21}$$

$$^{g}\psi_2 = \left(^{g}V\right)\chi_2 = g^{-1}\psi_2. \tag{2.22}$$

Vamos introduzir o campo de Bose G invariante de calibre sob a transformação-g

$$G \doteq UV = \exp\left[2i\sqrt{\pi}\left(u+v\right)\right] \tag{2.23}$$

tal que

$$^{g}G = {^{g}U}\, {^{g}V} = Ugg^{-1}V = UV = G \tag{2.24}$$

.

Em termos do campo G o tensor de campo eletromagnético é dado por

$$\mathcal{F}_{01} = \frac{1}{2}\left(\partial_-\mathcal{A}_+ - \partial_+\mathcal{A}_-\right) = -\frac{i}{2e}\left[\partial_-\left(U^{-1}\partial_+U\right) - \partial_+\left(V\partial_-V^{-1}\right)\right].$$

Por outro lado,

$$\partial_- G = \partial_-\left(UV\right) = V\partial_- U + U\partial_- V$$

$$\therefore G^{-1}\partial_- G = U^{-1}V^{-1}\left[V\left(\partial_- U\right) + U\left(\partial_- V\right)\right] = U^{-1}\partial_- U + V^{-1}\partial_- V$$

$$\therefore -\frac{i}{2e}\partial_+\left(G^{-1}\partial_- G\right) = -\frac{i}{2e}\left[\partial_+\left(U^{-1}\partial_- U\right) + \partial_+\left(V^{-1}\partial_- V\right)\right].$$

Mas

$$\partial_+\left(V^{-1}\partial_- V\right) = -\partial_+\left(V\partial_- V^{-1}\right),$$

e

$$\partial_-\left(U^{-1}\partial_+ U\right) = \partial_- U^{-1}\partial_+ U + U^{-1}\partial_-\partial_+ U =$$

$$= \left(-\partial_- U\right)\left(-\partial_+ U^{-1}\right) + U^{-1}\square\, U = \partial_+ U^{-1}\partial_- U + U^{-1}\partial_+\partial_- U = \partial_+\left(U^{-1}\partial_- U\right),$$

logo

$$\mathcal{F}_{01} = -\mathcal{F}_{10} = -\frac{1}{2e}\partial_+\left(G^{-1}i\partial_- G\right) = -\frac{1}{2e}\partial_+\left\{G^{-1}i\exp\left[2i\sqrt{\pi}\left(u+v\right)\right]2i\sqrt{\pi}\partial_-\left(u+v\right)\right\} =$$

$$= -\frac{1}{2e}\partial_+\left[-2\sqrt{\pi}\partial_-\left(u+v\right)\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{e}\,\partial_+\partial_-\left(u+v\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{e}\,\square\left(u+v\right),$$

ou seja,

$$\mathcal{F}_{01} = \frac{1}{2}\left(\partial_-\mathcal{A}_+ - \partial_+\mathcal{A}_-\right) = -\frac{i}{2e}\partial_+\left(G^{-1}i\partial_- G\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{e}\,\square\left(u+v\right) \qquad (2.25)$$

e a ação de Maxwell pode ser escrita como:

$$S_M\left[U,V\right] = S_M\left[G\right] = \int d^2z\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4}\int d^2z\left(\mathcal{F}_{01}^2 + \mathcal{F}_{10}^2\right) =$$

$$\frac{1}{8e^2}\int d^2z\left[\partial_+\left(G\partial_- G^{-1}\right)\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{8e^2}\int d^2z\left[16\pi\square\left(u+v\right)\square\left(u+v\right)\right] = \frac{1}{2\tilde{\mu}_0^2}\int d^2z\left(u+v\right)\square^2\left(u+v\right), \qquad (2.26)$$

onde definimos:

$$\tilde{\mu}_0^2 = \frac{e^2}{4\pi}. \tag{2.27}$$

Vamos retornar à integração funcional no funcional gerador. Introduzindo as identidades

$$1 = \int \mathcal{D}U \left[\det \mathcal{D}_+ \left(U \right) \right] \delta \left(e\mathcal{A}_+ - U^{-1} i \partial_+ U \right) \tag{2.28}$$

$$1 = \int \mathcal{D}V \left[\det \mathcal{D}_- \left(V \right) \right] \delta \left(eA_- - Vi\partial_- V^{-1} \right), \tag{2.29}$$

a mudança de variáveis $\left\{ \mathcal{A}_+, \mathcal{A}_- \right\} \rightarrow \left\{ U, V \right\}$ é realizada pela integração sobre as componentes do campo vetorial $A_\pm$. Fazendo as rotações (2.12) e (2.13) do campo de Fermi, e tomando o devido cuidado com os Jacobianos ao efetuarmos a alteração da medida de integração no funcional gerador, obtemos a medida de integração efetiva [13, 14, 15]

$$d\mu = \mathcal{D}\overline{\chi}\mathcal{D}\chi\mathcal{D}U\mathcal{D}V e^{iS\left(U,V,\overline{\chi},\chi\right)} e^{iS'\left(U,V,a,m_0\right)}, \tag{2.30}$$

onde

$$S\left[U, V, \overline{\chi}, \chi\right] = \int d^2 z \overline{\chi} i \partial\!\!\!/ \chi + S_M \left[UV\right], \tag{2.31}$$

e $S'\left(U, V, a, m_0\right)$ é a contribuição GNI, a qual é dada em termos dos funcionais Wess-Zumino-Witten (WZW) [20] $\Gamma\left[U\right], \Gamma\left[V\right]$,

$$S'\left(U, V, a, m_0\right) = -\Gamma\left[U\right] - \Gamma\left[V\right] - \frac{1}{2e^2}\left(a\tilde{\mu}_0^2 + m_0^2\right)\int d^2 z \left(U^{-1}\partial_+ U\right)\left(V\partial_- V^{-1}\right). \tag{2.32}$$

O termo que carrega o parâmetro regularizador a corresponde à ação de Jackiw-Rajaraman.

$$S_{JR} = \frac{a}{2}\tilde{\mu}_0^2 \int d^2 z \ A_+ A_-, \tag{2.33}$$

que em um modelo anômalo, tal como o QED_2 quiral, caracteriza a ambigüidade de quantização [10]. O valor $a=2$ corresponde à regularização GI. Os funcionais WZW entram em (2.32) com nível negativo [11]. No caso Abeliano, o funcional WZW se reduz à ação de um campo escalar livre de massa nula:

$$\Gamma[h]=\frac{1}{8\pi}\int d^2z\left(\partial_\mu h\right)\left(\partial^\mu h^{-1}\right). \tag{2.34}$$

Usando a redução Abeliana da identidade de Polyakov-Wiegman (PW) [12],

$$\Gamma[gh]=\Gamma[g]+\Gamma[h]+\frac{1}{4\pi}\int d^2z\left(g^{-1}\partial_+ g\right)\left(h\partial_- h^{-1}\right) \tag{2.35}$$

ou

$$\Gamma[UV]=\Gamma[U]+\Gamma[V]+\frac{1}{4\pi}\int d^2z\left(U^{-1}\partial_+ U\right)\left(V\partial_- V^{-1}\right);$$

A ação quântica efetiva total pode ser escrita como

$$S[U,V,\overline{\chi},\chi]=S_F[\overline{\chi},\chi,U,V]+S'[U,V] \tag{2.36}$$

onde

$$S[\overline{\chi},\chi,U,V]=S_F^{(0)}[\overline{\chi},\chi]+S_M[UV], \tag{2.37}$$

$$S'[U,V]=-\frac{1}{2\tilde{\mu}_0^2}\left\{\tilde{\mu}_0^2 a+m_0^2\right\}\Gamma[UV]+\frac{1}{2\tilde{\mu}_0^2}\left\{\tilde{\mu}_0^2(a-2)+m_0^2\right\}\left(\Gamma[V]+\Gamma[U]\right). \tag{2.38}$$

O modelo TW padrão corresponde a $a=2$, e no limite $m_0\to 0$ a invariância de calibre é restaurada:

$$S'[U,V] \rightarrow S'[G], \tag{2.39}$$

tal que a ação (2.36) se reduz à ação da QED_2 usual,

$$S[U,V,\bar{\chi},\chi] \rightarrow S_{QED}[G,\bar{\chi},\chi]. \tag{2.40}$$

Para uma regularização não-invariante de calibre, no limite $m_0 \rightarrow 0$, obtemos a ação para a QED_2 com quebra de simetria de calibre,

$$S'[U,V,b,0]_{QED} = -\frac{b}{2}\Gamma[UV] + \frac{1}{2}(b-2)\big(\Gamma[V] + \Gamma[U]\big), \tag{2.41}$$

onde b é o parâmetro de regularização correspondente. As ações (2.38) e (2.41) são equivalentes,

$$S'[U,V,b,0] \equiv S'[U,V,a,m_0], \tag{2.42}$$

desde que se tenha $b > a$ e

$$m_0^2 = \tilde{\mu}_0^2 (b-a). \tag{2.43}$$

Isto implica que a QED_2 quantizada com uma regularização GNI onde $b \neq 2$ (QED_2 com quebra de simetria de calibre) é isomorfa ao modelo TW com um parâmetro de regularização a e com uma massa nua para o campo vetorial dada por (2.43).

Dando seqüência à decomposição da álgebra de campo de Bose $\Im_B\{U,V\}$ nas sub-álgebras de campo GI e GNI, vamos introduzir o campo pseudo-escalar *invariante de calibre* $\tilde{\phi}$:

$$\tilde{\phi} \doteq \frac{1}{2}(u+v), \tag{2.44}$$

e o campo escalar *não-invariante de calibre* ς:

$$\varsigma \doteq \frac{1}{2}(u-v). \tag{2.45}$$

Os campos de Bose (U,V) definidos por (2.9) - (2.10) podem ser decompostos, em termos do campo *invariante de calibre* $g\left[\tilde{\phi}\right]$ e do campo *não-invariante de calibre* $h[\varsigma]$, em

$$U = gh \tag{2.46}$$

$$V = gh^{-1}, \tag{2.47}$$

onde

$$g = \exp\left(2i\sqrt{\pi}\tilde{\phi}\right), \tag{2.48}$$

$$h = \exp\left(2i\sqrt{\pi}\varsigma\right). \tag{2.49}$$

O campo invariante de calibre G pode ser reescrito como

$$G = UV = g^2 = \exp\left(4i\sqrt{\pi}\tilde{\phi}\right). \tag{2.50}$$

O campo vetorial pode ser decomposto na forma padrão em termos das contribuições GI e GNI,

$$\mathcal{A}_\mu = \frac{\sqrt{\pi}}{e}\left\{\tilde{\partial}_\mu\tilde{\phi} + \partial_\mu\phi\right\}, \tag{2.51}$$

e a ação de Maxwell (2.26) será dada agora por

$$S_{M[g]} = \frac{1}{2\tilde{\mu}_0^2}\int d^2z\left(\Box\tilde{\phi}\right)^2. \tag{2.52}$$

A álgebra de campo de Bose pode ser decomposta em

$$\Im^{B}\{U,V\}=\Im^{B}_{GI}\{g\}\oplus\Im^{B}_{GNI}\{h\}, \tag{2.53}$$

e a ação quântica efetiva $S[U,V,\bar{\chi},\chi]$ pode ser reescrita em termos dos campos g e do campo não-invariante de calibre h:

$$S[U,V,\bar{\chi},\chi]=S[g,h,\bar{\chi},\chi]=S[g,\bar{\chi},\chi]+S'[g,h], \tag{2.54}$$

onde

$$S_F[g,\bar{\chi},\chi]=S_F^{(0)}[\bar{\chi},\chi]+S_M[g], \tag{2.55}$$

$$S'[g,h]=-\frac{1}{2\tilde{\mu}_0^2}\left\{\tilde{\mu}_0^2 a+m_0^2\right\}\Gamma\left[g^2\right]+\frac{1}{2\tilde{\mu}_0^2}\left\{\tilde{\mu}_0^2(a-2)+m_0^2\right\}\left\{\Gamma\left[gh^{-1}\right]+\Gamma[gh]\right\}, \tag{2.56}$$

onde a ação de Maxwell agora é dada por

$$S_M[g]=\frac{1}{8\pi\tilde{\mu}_0^2}\int d^2z\left[\partial_+\left(gi\partial_-g^{-1}\right)\right]^2. \tag{2.57}$$

Usando a identidade P-W [12],

$$\Gamma[gh]=\Gamma[g]+\Gamma[h]+\frac{1}{4\pi}\mathrm{Tr}\int d^2\mathrm{z}\ \left(\mathrm{g}^{-1}\partial_+\ g\right)\left(h\ \partial_-h^{-1}\right)$$

e o fato de que, no caso Abeliano, $\Gamma\left[g^2\right]=4\Gamma[g]$, podemos calcular:

$$\Gamma\left[gh^{-1}\right]=\Gamma[g]+\Gamma[h]+\frac{1}{4\pi}\int d^2z\left(g^{-1}\partial_+g\right)\left(h^{-1}\partial_-h\right);$$

$$\Gamma[gh]=\Gamma[g]+\Gamma[h]+\frac{1}{4\pi}\int d^2z\left(g^{-1}\partial_+g\right)\left(h\partial_-h^{-1}\right);$$

temos então que

$$\Gamma\left[gh^{-1}\right]+\Gamma\left[gh\right]=2\left\{\Gamma\left[g\right]+\Gamma\left[h\right]\right\},$$

logo

$$S\left[g,h\right]=-\frac{1}{\tilde{\mu}_0^2}\left\{\left[\tilde{\mu}_0^2\left(a+2\right)+m_0^2\right]\Gamma\left[g\right]-\left[\tilde{\mu}_0^2\left(a-2\right)-m_0^2\right]\Gamma\left[h\right]\right\}.$$

A ação GNI $S\left[g,h\right]$ dada por (2.56) é desacoplada em

$$S\left[g,h\right]=S\left[g\right]+S\left[h\right]=-\frac{\tilde{m}^2}{\tilde{\mu}_0^2}\Gamma\left[g\right]+\frac{\tilde{m}_0^2}{\tilde{\mu}_0^2}\Gamma\left[h\right] \tag{2.58}$$

onde

$$\tilde{m}^2=\tilde{\mu}_0^2\left(a+2\right)+m_0^2, \tag{2.59}$$

$$\tilde{m}_0^2=\tilde{\mu}_0^2\left(a-2\right)+m_0^2. \tag{2.60}$$

Os campos $g\left[\phi\right]$, $h\left[\varsigma\right]$ são desacoplados na ação (2.58) e o campo GNI $h\left[\varsigma\right]$ é um campo escalar não-canônico livre de massa nula. A função de partição total é fatorada como se segue:

$$Z=\left(\int Dhe^{iS[h]}\right)\left(\int DgD\overline{\chi}D\chi e^{iS[g]+iS[g,\overline{\chi},\chi]}\right)=Z_h\times Z_{\overline{\chi},\chi,g} \tag{2.61}$$

A função de partição Z_h caracteriza a destruição da simetria de calibre local. Embora a função de partição possa ser fatorada, o funcional gerador, e, em decorrência disso, também o espaço de estados de Hilbert H, não admitem fatoração:

$$H\neq H_{\overline{\chi},\chi,g}\otimes H_{h.} \tag{2.62}$$

O legítimo modelo invariante de calibre corresponde à condição $\tilde{m}_0=0$, que é obtida fazendo-se $m_0=0$ e a regularização invariante de calibre $a=2$. O comutador (2.85) e o Hamiltoniano correspondente à ação quântica efetiva bosonizada são singulares para

$\tilde{m}_0 = 0$. Neste ponto crítico muda a estrutura de vínculos do modelo. Para esses valores críticos dos parâmetros a ação GNI desaparece,

$$S[h] = \frac{\tilde{m}_0^2}{\tilde{\mu}_0^2}\Gamma[h] \to 0, \tag{2.63}$$

e desaparece da ação quântica efetiva (2.58) toda e qualquer referência ao campo $h[\varsigma]$, uma vez que a ação passa a ser dada em termos do campo invariante de calibre g. O campo ς não é portanto um grau de liberdade dinâmico, e corresponde a uma pura excitação de calibre *c-number* (um múltiplo do operador identidade). A ação total efetiva (2.58) torna-se invariante de calibre, e os campos ς e $h[\varsigma]$ não satisfazem a essa nova estrutura de vínculo, implicando que para $\tilde{m}_0 = 0$ a invariância de calibre é formalmente restaurada, e os campos ς e $h[\varsigma]$ não são graus dinâmicos de liberdade.

Logo, no limite invariante de calibre $\tilde{m}_0 \to 0$ o campo h passa a ser uma pura excitação de calibre, e a função de partição correspondente se reduz a um volume de calibre,

$$\lim_{\tilde{m}_0 \to 0} Z_h \to \int Dh = V_{gauge} \qquad (2.64),$$

representando uma constante infinita que pode ser eliminada por absorção na constante de normalização da função de partição total.

O “modelo vetorial de Schwinger anômalo” considerado na Ref. [9] é obtido fazendo-se $m_0 = 0$ e $b \neq 2$. A ação GNI é dada então por

$$S'[g,h] = -(b+2)\Gamma[g] + (b-2)\Gamma[h], \tag{2.65}$$

e corresponde ao modelo TW com a massa nua do campo vetorial dada por (2.43).

2.2.2. Ação Local

A ação de Maxwell (2.57) é não-local devido à auto-interação quártica do campo g. Com a finalidade de eliminar a dependência quártica da ação do campo invariante de calibre g, consideraremos a integração funcional sobre o campo g na função de partição $Z_{\bar{\chi},\chi,g}$. Vamos introduzir inicialmente um campo invariante de calibre auxiliar Ω, de forma que

$$\int \mathcal{D}g \exp i\int d^2z \left\{ \frac{1}{8\pi\tilde{\mu}_0^2}\left[\partial_+\left(gi\partial_- g^{-1}\right)\right]^2 - \frac{1}{8\pi}\frac{\tilde{m}^2}{\tilde{\mu}_0^2}\partial_+ g\partial_- g^{-1} \right\} \equiv$$

$$\equiv \int \mathcal{D}\Omega\mathcal{D}g \exp i\int d^2z \left\{ -\frac{1}{2}\Omega^2 + \frac{1}{2\sqrt{\pi}\tilde{\mu}_0}\Omega\left[\partial_-\left(g^{-1}i\partial_+ g\right)\right] - \frac{1}{8\pi}\frac{\tilde{m}^2}{\tilde{\mu}_0^2}\partial_+ g\partial_- g^{-1} \right\}$$

(2.66)

Efetuando a mudança de variáveis

$$\partial_-\Omega \doteq \left(\omega i\partial_-\omega^{-1}\right), \tag{2.67}$$

podemos escrever

$$\Omega = \partial_-^{-1}\left(\omega i\partial_-\omega^{-1}\right). \tag{2.68}$$

Reescalonando o campo exponencial ω:

$$\frac{2\sqrt{\pi}\tilde{\mu}_0}{\tilde{m}_2}\omega^{-1}i\partial_+\omega = \breve{\omega}^{-1}i\partial_+\breve{\omega}\,, \tag{2.69}$$

obtemos de (2.66), depois de integrar por partes:

$$\int \mathcal{D}\breve{\omega}\mathcal{D}g \exp i\int d^2z\left\{-\frac{1}{8\pi}\frac{\tilde{m}^4}{\tilde{\mu}_0^2}\left[\partial_-^{-1}\left(\breve{\omega}i\partial_-\breve{\omega}^{-1}\right)\right]^2+\frac{1}{8\pi}\frac{\tilde{m}^2}{\mu_0^2}\left[\left(g^{-1}i\partial_+g-\breve{\omega}^{-1}i\partial_+\breve{\omega}\right)\left(gi\partial_-g^{-1}-\breve{\omega}i\partial_-\breve{\omega}^{-1}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{8\pi}\frac{\tilde{m}^2}{\tilde{\mu}_0^2}\left(\breve{\omega}^{-1}i\partial_+\breve{\omega}\right)\left(\breve{\omega}i\partial_-\breve{\omega}^{-1}\right)\right\} \tag{2.70}$$

Definindo um novo campo invariante de calibre θ tal que

$$\theta^{-1}i\partial_+\theta \doteq g^{-1}i\partial_+g-\breve{\omega}^{-1}i\partial_+\breve{\omega}, \tag{2.71}$$

$$\theta i\partial_-\theta^{-1} \doteq gi\partial_-g^{-1}-\breve{\omega}i\partial_-\breve{\omega}^{-1}, \tag{2.72}$$

o campo g pode ser fatorado como

$$g=\theta\breve{\omega}. \tag{2.73}$$

A ação efetiva total pode ser reescrita agora em termos dos campos invariantes de calibre θ, $\breve{\omega}$, do campo não-invariante de calibre h, e do campo livre de Fermi χ. Com o fim de obter a ação bosonizada completa, introduzimos agora a forma bosonizada da ação do campo livre de Fermi

$$S_F^{(0)}=\Gamma\left[f_\varphi\right]=\frac{1}{2}\int d^2z\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi \tag{2.74}$$

onde

$$f_\varphi=\exp\left(2i\sqrt{\pi}\varphi\right), \tag{2.75}$$

e a representação de Mandelstam para o campo livre de Fermi de massa nula bosonizado

$$\chi(x)=\left(\frac{\kappa_0}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\gamma^5\right):\exp i\sqrt{\pi}\left\{\gamma^5\tilde{\varphi}(x)+\int_{x^1}^{\infty}dz^1\partial_0\tilde{\varphi}\left(x^0,z^1\right)\right\}:, \tag{2.76}$$

onde κ_0 é uma escala arbitrária de massa finita. A ação local total é dada, na forma bosonizada, por

$$S[f,g,h]=S[f,\theta,\breve{\omega},h]=\Gamma\left[f_{\varphi}\right]-\Gamma[\theta]+\Gamma[\breve{\omega}]+\frac{\tilde{m}_0^2}{\tilde{\mu}_0^2}\Gamma[h]-\frac{1}{8\pi}\frac{\tilde{m}^4}{\tilde{\mu}_0^2}\int d^2z\left[\partial_-^{-1}\left(\breve{\omega}i\partial_-\breve{\omega}\right)\right]^2, \tag{2.77}$$

onde o campo θ está quantizado com métrica negativa. Introduzindo os campos θ e $\breve{\omega}$ com a parametrização

$$\theta(x)=\exp\left[2i\sqrt{\pi}\tilde{\eta}(x)\right], \tag{2.78}$$

$$\breve{\omega}(x)=\exp\left[2i\sqrt{\pi}\frac{\mu_0}{\tilde{m}^2}\tilde{\Sigma}(x)\right], \tag{2.79}$$

escalonando os campos

$$\tilde{\eta}\rightarrow\frac{\mu_0}{\tilde{m}}\tilde{\eta}', \tag{2.80}$$

$$\tilde{\Sigma}\rightarrow\tilde{m}\tilde{\Sigma}', \tag{2.81}$$

e eliminando os sinais de *primo*, ou linha $(')$ para aliviar a notação, obtemos para o campo invariante de calibre $\tilde{\phi}$:

$$\tilde{\phi}=\frac{\tilde{\mu}_0}{\tilde{m}}\left(\tilde{\eta}+\tilde{\Sigma}\right) \tag{2.82}$$

$$g=\theta\breve{\omega}=\exp\left[2i\sqrt{\pi}\frac{\tilde{\mu}_0}{\tilde{m}}\left(\tilde{\eta}+\tilde{\Sigma}\right)\right]. \tag{2.83}$$

A densidade Lagrangiana efetiva total bosonizada será dada então por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \tilde{\varphi}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \tilde{\Sigma}\right)^2 - \frac{\tilde{m}^2}{2}\tilde{\Sigma}^2 - \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \tilde{\eta}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\tilde{m}_0^2}{\tilde{\mu}_0^2}\left(\partial_\mu \varsigma\right)^2 \qquad (2.84)$$

O campo η está quantizado com métrica negativa.. O campo não-invariante ς é um campo desacoplado não-canônico, livre, de massa nula:

$$\left[\varsigma(x), \varsigma(y)\right] = \frac{\tilde{\mu}_0^2}{\tilde{m}_0^2}\ \Delta(x-y;0) \qquad (2.85)$$

Mesmo que para campos de Fermi de massa nula a função de partição total seja fatorável em funções de partição de campos livres

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_f \mathcal{Z}_g \mathcal{Z}_\omega \mathcal{Z}_h, \qquad (2.86)$$

o funcional gerador não o será.

2.3. Operadores de Campo e Espaço de Hilbert

Os campos de Bose(U,V) são dados por

$$U = \exp\left(2i\sqrt{\pi}\tilde{\phi}\right)h[\varsigma] = \exp\left(2i\sqrt{\pi}\,\frac{\tilde{\mu}_0}{\tilde{m}}\left(\tilde{\eta}+\tilde{\Sigma}\right)\right)h^{-1}[\varsigma], \qquad (2.87)$$

$$V = \exp\left(2i\sqrt{\pi}\tilde{\phi}\right)h^{-1}[\varsigma] = \exp\left(2i\sqrt{\pi}\,\frac{\tilde{\mu}_0}{\tilde{m}}\left(\tilde{\eta}+\tilde{\Sigma}\right)\right)h^{-1}[\varsigma]. \qquad (2.88)$$

A forma bosonizada do operador de campo de Fermi é dada em termos do campo livre de Fermi por

$$\psi(x)=\frac{\kappa_0}{2\pi}\exp\left(-i\frac{\pi}{4}\gamma^5\right):\exp\left\{2i\sqrt{\pi}\,\frac{\tilde{\mu}_0}{\tilde{m}}\gamma^5\left[\tilde{\eta}(x)+\tilde{\Sigma}(x)\right]\right\}:\times$$

$$\times:\exp\left\{i\sqrt{\pi}\left[\gamma^5\tilde{\varphi}(x)+\int_{x^1}^{\infty}\partial_0\tilde{\varphi}\left(x^0,x^1\right)dx^1\right]\right\}:h^{-1}[\varsigma], \tag{2.89}$$

e o campo vetorial é dado por

$$A_\mu=\frac{1}{\tilde{m}}\tilde{\partial}_\mu\left(\tilde{\Sigma}+\tilde{\eta}\right)+\frac{1}{e}hi\partial_\mu h^{-1}. \tag{2.90}$$

O termo em $h[\varsigma]$ (note-se que o comutador (2.85) diverge para $\tilde{m}_0\to 0$) tem a forma de um termo de calibre. As expressões bosonizadas para os campos (2.89) e (2.90) correspondem àquelas do modelo de Schwinger com um calibre dado por uma transformação de operador de calibre que diverge quando $m_0\to 0$.

A corrente vetorial é calculada através do procedimento padrão de seção pontual (*point-splitting*),

$$J_\mu(x)=\vdots\overline{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x)\vdots=Z^{-1}(\varepsilon)\left\{\overline{\psi}(x+\varepsilon)\gamma_\mu\exp\left[ia\tilde{\mu}_0\int_x^{x+\varepsilon}A_\mu(z)\,dz^\mu\right]\psi(x)-V.E.V.\right\}. \tag{2.91}$$

Em termos das combinações dos campos GI e GNI $(u\pm v)$, a corrente vetorial é dada por

$$\frac{e}{2}J_\mu=\frac{e}{2}j_\mu-\frac{\tilde{\mu}_0}{2}(a+2)\tilde{\partial}_\mu(u+v)-\frac{\tilde{\mu}_0}{2}(a-2)\partial_\mu(u-v), \tag{2.92}$$

onde j_μ é a corrente conservada associada com o campo livre de Fermi χ,

$$j_\mu=\vdots\overline{\chi}\gamma_\mu\chi\vdots=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\tilde{\partial}_\mu\tilde{\varphi}. \tag{2.93}$$

A forma bosonizada da corrente vetorial é dada por

$$\frac{e}{2}J_{\mu} = -2\tilde{\mu}_0\tilde{\partial}_{\mu}\tilde{\varphi} + \frac{\left(\tilde{m} - m_0^2\right)}{\tilde{m}}\tilde{\partial}_{\mu}\left(\tilde{\Sigma} + \tilde{\eta}\right) - \tilde{\mu}_0\left(\tilde{m}_0^2 - m_0^2\right)\partial_{\mu}\varsigma. \qquad (2.94)$$

A corrente conservada que atua como a fonte de $\Im_{\mu\nu}$ é dada por

$$K_{\mu} = m_0^2 A_{\mu} - \frac{e}{2}J_{\mu} = -\frac{e}{2}j_{\mu} + \frac{\tilde{m}^2}{2\tilde{\mu}_0}\tilde{\partial}_{\mu}\left(u + v\right) + \frac{\tilde{m}_0^2}{2\tilde{\mu}_0}\partial_{\mu}\left(u - v\right), \qquad (2.95)$$

que pode ser escrito como

$$K_{\mu} = \tilde{m}\tilde{\partial}_{\mu}\tilde{\Sigma} + L_{\mu}, \qquad (2.96)$$

onde L_{μ} é uma corrente longitudinal de norma nula dada por

$$L_{\mu} = \partial_{\mu}L, \qquad (2.97)$$

com o potencial L dado por

$$L = 2\tilde{\mu}_0\varphi + \tilde{m}\eta + \frac{\tilde{m}_0^2}{\tilde{\mu}_0}\varsigma. \qquad (2.98)$$

A corrente longitudinal L_{μ} comuta com si mesma, e logo gera estados de norma zero a partir do vácuo:

$$\left\langle \Psi_0 \middle| L_{\mu}\left(x\right) L_{\nu}\left(y\right) \middle| \Psi_0 \right\rangle = 0. \qquad (2.99)$$

Devido à presença da corrente longitudinal L_{μ}, a equação de Proca não é satisfeita enquanto uma identidade de operadores,

$$\partial_{\nu}F^{\mu\nu} + m_0^2 A^{\mu} - \frac{e}{2}J^{\mu} = L_{\mu}. \qquad (2.100)$$

Os campos fundamentais $\{\bar{\psi}, \psi, \mathcal{A}_\mu\}$ geram uma álgebra local de campo $\Im$. Estes operadores de campo constituem a descrição matemática intrínseca do modelo definido pelas suas próprias funções de Wightman. A álgebra de campo $\Im$ é representada no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ de estados com métrica indefinida:

$$\mathcal{H} = \Im \,|\, \Psi_0\rangle \tag{2.101}$$

Em um *modelo invariante de calibre* o campo ς não é um grau de liberdade dinâmico. Na formulação métrica indefinida, a lei de Gauss é satisfeita na forma fraca,

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} - eJ^\mu = L^\mu, \tag{2.102}$$

onde L_μ é a porção longitudinal de norma nula da corrente vetorial que atua como a fonte na lei de Gauss. As *transformações de calibre local* dos campos intrínsecos $\{\bar{\psi}, \psi, A_\mu\}$ são implementadas pela corrente longitudinal L_μ. A álgebra de campo *físico* invariante de calibre $\Im_{phys}$ é uma sub-álgebra da álgebra de campo intrínseco $\Im$ que comuta com a corrente longitudinal,

$$\Im_{phys} \subset \Im, \tag{2.103}$$

$$\left[\Im_{phys}, L_\mu\right] = 0. \tag{2.104}$$

O espaço de Hilbert físico

$$H_{phys} = \Im_{phys} \left|\Psi_0\right\rangle, \tag{2.105}$$

é um subespaço do espaço de Hilbert $H = \Im\left|\Psi_0\right\rangle$,

$$H_{phys} \subset H. \tag{2.106}$$

Em um modelo com *quebra de simetria de calibre*, o campo ς é um grau de liberdade dinâmico. *A álgebra de campo intrínseco comuta com a corrente longitudinal*,

$$\left[\Im, L_{\mu}\right] = 0. \tag{2.107}$$

Isto implica que os campos $\left\{\bar{\psi}, \psi, \mathcal{A}_{\mu}\right\}$ são singletos sob transformações de calibre geradas pela corrente longitudinal, e logo são *operadores físicos*. *A álgebra de campo intrínseco é ela mesma a álgebra de campo físico:*

$$\Im = \Im_{phys}. \tag{2.108}$$

2.3.1. O limite *QED₂*

Será instrutivo tecer alguns comentários acerca do limite invariante de calibre $m_0 \to 0$. A partir da Lagrangiana (2.84), escrita em termos do campo não-canônico ς, obtemos no limite de massa nula a relação

$$\mathcal{L}_{\tilde{m}_0 \to 0} \to \mathcal{L}_{QED}. \tag{2.109}$$

Nesta formulação num espaço de Hilbert com métrica indefinida, o limite GI pode ser realizado na álgebra de operador de campo escrita em termos do campo livre não canônico ς. A solução de operador da QED_2, tal como foi obtida por Lowenstein-Swieca [6], pode ser obtida formalmente de (2.89), (2.90), (2.95) e (2.96). No limite invariante de calibre, o campo ς é desacoplado da ação quântica correspondente à Lagrangiana (2.84), e logo não será um grau de liberdade dinâmico. O campo ς vem a ser um número clássico (segundo a nomenclatura de Dirac, um $c-number$), comutativo, $\varsigma(x) \to \Lambda(x)$, e temos que

$$\psi(x) =: \exp\left\{i\sqrt{\pi}\gamma^5\left[\tilde{\eta}(x) + \tilde{\Sigma}(x)\right]\right\} : \chi(x)\exp\left\{-i\sqrt{\pi}\Lambda(x)\right\}, \tag{2.110}$$

$$A_\mu = \frac{\sqrt{\pi}}{e}\tilde{\partial}_\mu\left(\tilde{\Sigma} + \tilde{\eta}\right) + \frac{\sqrt{\pi}}{e}\partial_\mu\Lambda(x), \tag{2.111}$$

$$J_\mu = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\tilde{\partial}_\mu\tilde{\Sigma} + L_\mu, \tag{2.112}$$

onde L_μ é a corrente longitudinal de norma nula,

$$L_\mu = -\frac{e}{\sqrt{\pi}}\partial_\mu(\varphi + \eta). \tag{2.113}$$

Levando isso em conta, obtemos para o funcional gerador

$$Z\left[\bar{\vartheta}, \vartheta, j_\mu\right]_{\tilde{m}_0 \to 0} \to Z\left[\bar{\vartheta}, \vartheta, j_\mu\right]_{QED}. \tag{2.114}$$

Deve ser enfatizado que este limite invariante de calibre somente pode ser formalmente obtido neste nível. O mesmo não pode ser realizado sobre as funções de Wightman gerais, em resultado da relação de comutação singular existente para o campo ς. Esse limite é bem definido apenas para o subconjunto daquelas funções de Wightman que são independentes do campo ς. Considerando-se a ação quântica e os operadores de campo escritos em termos do campo não-canônico ς, tomar o limite $m_0 \to 0$. é equivalente a considerar desde o primeiro momento o méson vetorial comapresentando sua massa nua igual a zero. Na verdade, nessa formulação num espaço de Hilbert com métrica indefinida, o limite GI pode ser formalmente calculado como acima, uma vez que o operador de campo de Fermi está escrito em termos do campo livre de Fermi, e não em termos do operador de campo de Fermi com carga como no modelo de Thirring. A álgebra de campo intrínseco $\Im$ é a álgebra de campo físico, o qual é um singleto sob transformações de calibre geradas pela corrente longitudinal.

2.4. A Formulação de Métrica Positivo-Definida

A bosonização na formulação de métrica indefinida introduz uma álgebra de Bose maior $\Im_B$, que contém mais graus de liberdade do que aqueles necessários para a descrição do modelo, $\Im \subset \Im_B$. Para possibilitar a extração dos graus de liberdade redundantes, e também para obtermos a solução das equações de movimento enquanto identidades de operadores em um espaço de Hilbert de estados com métrica positivo-definida, introduziremos dois campos livres de Bose $\left(\tilde{\Phi},\tilde{\Xi}\right)$, através da transformação canônica

$$\frac{\beta}{2}\tilde{\Phi} = \sqrt{\pi}\tilde{\varphi} + 2\sqrt{\pi}\,\frac{\tilde{\mu}_0}{\tilde{m}}\tilde{\eta}, \tag{2.115}$$

$$\frac{\beta}{2}\tilde{\Xi} = 2\sqrt{\pi}\,\frac{\tilde{\mu}_0}{\tilde{m}}\tilde{\varphi} + 2\sqrt{\pi}\tilde{\eta}. \tag{2.116}$$

A quantização com métrica negativa do campo $\tilde{\eta}$ assegura que os campos $\tilde{\Phi}$ e $\tilde{\Xi}$ são graus de liberdade independentes:

$$\left[\tilde{\Phi}(x),\tilde{\Xi}(y)\right] = 0, \forall x, y. \tag{2.117}$$

Impondo relações canônicas de comutação para os campos Φ e Ξ, obtemos

$$\frac{\beta^2}{4\pi} = \pi\left(\frac{\tilde{m}_0^2}{\tilde{m}^2}\right) > 0, \tag{2.118}$$

e o campo $\tilde{\Xi}$ é quantizado com métrica negativa. Definindo o campo livre canônico

$$\xi = \frac{\tilde{m}_0}{\tilde{\mu}_0}\varsigma, \tag{2.119}$$

o campo de Fermi e os operadores de campos vetoriais (2.89), (2.90) podem ser reescritos como "campos de calibre transformados"

$$\psi = \hat{\psi}\rho, \tag{2.120}$$

$$A_\mu = \hat{A}_\mu + \frac{1}{e}\rho i\partial_\mu \rho^{-1}. \tag{2.121}$$

Aqui, o operador ρ é uma excitação pura de calibre dada por

$$\rho =: \exp\left(2i\sqrt{\pi}\,\frac{\tilde{\mu}_0}{\tilde{m}_0}\left(\Xi - \tilde{\Sigma}\right)\right):, \tag{2.122}$$

e

$$\hat{\psi} =: \exp\left(-2i\gamma^5\sqrt{\pi}\,\frac{\tilde{\mu}_0}{\tilde{m}}\tilde{\Sigma}\right): \Psi_\Phi, \tag{2.123}$$

$$\hat{A}_\mu = -\frac{1}{\tilde{m}}\tilde{\partial}_\mu\left(\tilde{\Sigma} - 2\frac{\tilde{\mu}_0}{\tilde{m}_0}\tilde{\Phi}\right). \tag{2.124}$$

Aqui, Ψ é o operador de campo de Fermi portador de carga do modelo de Thirring, dado segundo a representação de Mandelstam:

$$\Psi(x) = \left(\frac{\mu_0}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\gamma^5\right): \exp\left\{-i\gamma^5\frac{\beta}{2}\tilde{\Phi}(x) - i\frac{2\pi}{\beta}\int_{x^1}^{+\infty}\partial_0\tilde{\Phi}\left(x^0, z^1\right)dz^1\right\}:. \tag{2.125}$$

A corrente vetorial J_μ, dada por (2.94), pode ser reescrita como

$$\frac{e}{2}J_\mu = \frac{\left(\tilde{m}^2 - m_0^2\right)}{\tilde{m}}\tilde{\partial}_\mu\tilde{\Sigma} + \frac{2\tilde{\mu}_0 m_0^2}{\tilde{m}_0\tilde{m}}\tilde{\partial}_\mu\tilde{\Phi}, \tag{2.126}$$

e a corrente K_μ agora é dada por

$$K_\mu = \tilde{m}\tilde{\partial}_\mu\tilde{\Sigma} + L_\mu, \tag{2.127}$$

onde agora a corrente longitudinal é dada por

$$\ell_\mu = \partial_\mu L = \tilde{m}_0\partial_\mu\left(\Xi - \xi\right) = \frac{\tilde{m}_0}{2\sqrt{\pi}\,\tilde{\mu}_0}\rho\partial_\mu\rho^{-1}. \tag{2.128}$$

A corrente longitudinal não carrega nenhuma regra de seleção de férmion, uma vez que é independente da corrente vetorial do modelo de Thirring

$$J_\mu^{Th} = \frac{2\tilde{\mu}_0 m_0^2}{\tilde{m}_0\tilde{m}}\tilde{\partial}_\mu\tilde{\Phi}. \tag{2.129}$$

Para a regularização GI $a = 2$ obtemos

$$\frac{\beta^2}{4\pi} = \frac{m_0^2}{\frac{e^2}{\pi} + m_0^2}, \tag{2.130}$$

$$J_\mu^{Th} = \frac{\beta}{\sqrt{\pi}}\tilde{\partial}_\mu\tilde{\Phi}, \tag{2.131}$$

e os operadores de campo dados por (2.120) - (2.121) correspondem àqueles operadores obtidos por Lowenstein-Rothe-Swieca [6, 7], com calibre resultante de uma transformação de calibre singular.

O campo ρ tem dimensão de escala nula, auto-comuta, e conseqüentemente gera infinitos estados não-localizados que conduzem a funções de Wightman constantes

$$\langle \Psi_0 \,|\, \rho^*(x_1)...\rho^*(x_n)\rho(y_1)...\rho(y_n) \,|\, \Psi_0 \rangle = 1. \qquad (2.132)$$

O operador espúrio ρ não é portador de qualquer regra de seleção de carga fermiônica, e, desde que comuta com todos os operadores pertencentes ã álgebra de campo $\mathfrak{F}$, ele se reduz ao operador identidade em $\mathcal{H}$.. A independência de posição do estado $\rho(x)\Psi_0$ pode ser verificada calculando-se as funções gerais de Wightman que envolvem o operador ρ e todos os operadores pertencentes à álgebra local de campo $\mathfrak{F}$. Assim, para qualquer operador $\mathrm{O}(f_{\mathrm{x}}) = \int \mathrm{O}(z) f(z) d^2z \in \Im$, polinomial nos campos "suavizados" (*smeared fields*) $\{\bar{\psi}, \psi, \mathcal{A}_\mu\}$, a independência de posição do operador ρ pode ser expressa na forma fraca como sendo

$$\langle \Psi_0, \rho^*(x_1)...\rho^*(x_l)\rho(y_1)...\rho(y_m) O(f_{z1},..f_{zn})\Psi_0 \rangle =$$

$$\mathcal{W}(z_1,...,z_n) \equiv \langle \Psi_0, O(f_{z1},...,f_{zn})\Psi_0 \rangle, \ \forall O(f) \in \Im, \qquad (2.133)$$

onde $\mathcal{W}(z_1,...,z_n)$ é uma distribuição independente das coordenadas do espaço-tempo (x_i, y_j).

Dentro do tratamento de integração funcional, o espaço de Hilbert de estados é construído a partir do funcional gerador (2.3), que pode ser reescrito como

$$Z\left[\bar{\vartheta}, \vartheta, j^\mu\right] = \langle \exp i \int d^2z \left\{ \bar{\vartheta}\hat{\psi}\rho + \hat{\psi}\rho^*\vartheta + j^\mu \left(\hat{A}_\mu + \frac{1}{e}\rho^{-1} i\partial_\mu p \right) \right\} \rangle, \qquad (2.134)$$

onde a média é tomada com respeito à medida funcional

$$d\mu = \int \mathcal{D}\Xi, \mathcal{D}\xi exp\left\{iS^{(0)}\left[\Xi, \xi\right]\right\} \int \mathcal{D}\tilde{\Phi}\mathcal{D}\tilde{\Sigma} \exp\left\{iS\left[\tilde{\Sigma}, \tilde{\Phi}\right]\right\}, \qquad (2.135)$$

e as ações que aparecem em (2.135) são dadas em termos das densidades Lagrangianas bosonizadas correspondentes

$$L^{(0)} = -\frac{1}{2}\left(\partial_\mu \Xi\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \xi\right)^2, \qquad (2.136)$$

$$L = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \tilde{\Phi}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \tilde{\Sigma}\right)^2 - \frac{\tilde{m}^2}{2}\tilde{\Sigma}^2. \qquad (2.137)$$

Devido ao fato dos campos livres de massa nula Ξ e ξ estarem desacoplados na ação quântica, a função de partição é fatorável:

$$Z = Z_\xi^{(0)} Z_\Xi^{(0)} Z_\Phi^{(0)} Z_\Sigma^{(0)}. \qquad (2.138)$$

Ao se proceder ao cálculo das funções gerais de correlação a partir do funcional gerador (2.134), devido à quantização com métricas opostas, as contribuições no espaço-tempo da integração funcional sobre o campo ξ cancelam as contribuições resultantes da integração sobre o campo Ξ. Deste modo, o campo ρ vem a ser o operador identidade com respeito à integração funcional, e obtemos as identidades

$$\psi \equiv \hat{\psi}, \;\; A_\mu \equiv \hat{A}_\mu. \qquad (2.139)$$

O espaço de Hilbert com métrica positivo-definida $\hat{H}$ é construído a partir do funcional gerador

$$Z\left[\bar{\vartheta}, \vartheta, j^\mu\right] \equiv \hat{Z}\left[\bar{\vartheta}, \vartheta, j^\mu\right] = \left\langle \exp i \int d^2 z \left(\bar{\vartheta}\hat{\psi} + \hat{\bar{\psi}}\vartheta + j^\mu \hat{A}_\mu\right)\right\rangle, \qquad (2.140)$$

onde a média é tomada com respeito à medida funcional

$$\widehat{d\mu} = \int D\tilde{\Phi} D\tilde{\Sigma} \exp\left\{ iS\left[\tilde{\Sigma}, \tilde{\Phi} \right] \right\}. \tag{2.141}$$

O espaço de Hilbert $\widehat{H}$ corresponde ao espaço quociente

$$\widehat{H} = \frac{H}{H_0}. \tag{2.142}$$

onde H_0 é o espaço de norma nula. Os campos (2.120) - (2.121) fornecem a solução de operador para as equações de Dirac-Proca acopladas

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) + e\gamma^\mu : A_\mu(x)\psi(x) := 0, \tag{2.143}$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} + m_0^2 A^\mu - \frac{e}{2} J^\mu = 0. \tag{2.144}$$

Para a regularização invariante de calibre $a = 2$ e $m_0 \neq 0$, recuperamos de (2.139) a solução de operador para o modelo TW obtido por Lowenstein-Rothe-Swieca [6, 7]. Para $m_0 = 0$ e a regularização não-invariante de calibre $a \neq 2$ obtemos a solução de operador da QED_2 com quebra de simetria de calibre.

Na formulação no espaço de Hilbert com métrica positiva, o limite QED_2 não existe para o campo de Fermi ou para os próprios campos vetoriais. Neste caso, as equações de movimento são satisfeitas como identidades de operadores, e o campo de Fermi é um operador portador de carga,

$$\left[J_{TW}^0(x), \Psi(z) \right]_{x^0 = z^0} = -e \frac{m_0^2}{\tilde{m}_0^2} \delta\left(x^1 - z^1 \right) \Psi(z). \tag{2.145}$$

Como é apontado na Ref. [7], se esse limite existisse, obteríamos para a QED_2 um operador de campo de Fermi local e portador de carga, o que é incompatível com a equação de Maxwell, quando a mesma é satisfeita na forma forte. Por outro lado, esse mesmo limite é bem definido para a sub-álgebra invariante de calibre, como por exemplo

$$J_\mu \to \frac{1}{\sqrt{\pi}} \tilde{\partial}_\mu \tilde{\Sigma}, \tag{2.146}$$

$$F_{\mu\nu} \to \varepsilon_{\mu\nu} \frac{e}{\sqrt{\pi}} \tilde{\Sigma}. \tag{2.147}$$

2.4.1. Férmions com Massa

A introdução de um termo de massa para o campo de Fermi contribui para a ação com

$$M = -M_0 \bar{\psi}\psi = -M_0 \left\{ \chi_1^\dagger \chi_2 \left(U,V\right) + \chi_2^\dagger \chi_1 \left(U,V\right)^{-1} \right\} =$$

$$= -M_0 \left\{ \chi_1^\dagger \chi_2 g^2 + \chi_2^\dagger \chi_1 g^{-2} \right\}. \tag{2.148}$$

Utilizando agora a decomposição para o campo GI g, a forma bosonizada e a densidade quiral bosonizada para o campo livre de Fermi,

$$\chi_1^* \chi_2 = \left(\frac{\kappa_0}{2\pi} \right) : \exp\left(2i\sqrt{\pi}\varphi \right) :, \tag{2.149}$$

temos então

$$M = \frac{M_0 \kappa_0}{2\pi} \left\{ \exp\left[2i\sqrt{\pi}\tilde{\varphi}\left(\breve{\omega}\theta\right)^2 \right] + \exp\left[-2i\sqrt{\pi}\tilde{\varphi}\left(\breve{\omega}\theta\right)^{-2} \right] \right\} =$$

$$= -\frac{M_0 \kappa_0}{\pi} \cos\left\{ 2\sqrt{\pi}\tilde{\varphi} + 4\sqrt{\pi}\,\frac{\tilde{\mu}_0}{\tilde{m}}\left(\tilde{\eta} + \tilde{\Sigma}\right) \right\}. \qquad (2.150)$$

Efetuando a transformação canônica (2.115) - (2.116), o termo de massa pode ser escrito como

$$M = -\frac{M_0 \kappa_0}{\pi} \cos\left\{ 2\beta\ \tilde{\Phi} + 4\sqrt{\pi}\,\frac{\tilde{\mu}_0}{\tilde{m}}\tilde{\Sigma} \right\}. \qquad (2.151)$$

Note-se que, mesmo no caso de um campo fermiônico com massa, o campo $\varsigma(\xi)$ é um campo livre. Os campos $\tilde{\Phi}$ e $\tilde{\Sigma}$ são acoplados pela interação de sine-Gordon, e a densidade Lagrangiana total agora será dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\left(\partial_\mu \Xi\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \xi\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \tilde{\Phi}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \tilde{\Sigma}\right)^2 -$$

$$-\frac{\tilde{m}^2}{2}\tilde{\Sigma}^2 - \frac{M_0 \kappa_0}{\pi} \cos\left\{ 2\beta\ \tilde{\Phi} + 4\sqrt{\pi}\,\frac{\tilde{\mu}_0}{\tilde{m}}\tilde{\Sigma} \right\}. \qquad (2.152)$$

Para $a = 2$ recuperamos a partir de (2.152) a densidade Lagrangiana bosonizada para o modelo TW com massa, tal como obtida por Rothe-Swieca [7].

2.5. Um Passar de Olhos sobre o Modelo Não-Abeliano

A densidade Lagrangiana clássica que define o modelo TW não-Abeliano é dada por

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{YM} + \overline{\psi}\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - e\gamma^\mu A_\mu\right)\psi + \frac{1}{2} m_0^2 \,\mathrm{Tr}\, A_\mu A^\nu, \qquad (2.153)$$

onde a Lagrangiana de Yang-Mills é dada por

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4}\operatorname{Tr} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{2.154}$$

Apliquemos a teoria de Wess-Zumino-Witten para obter a ação efetiva bosônica. Para isto, vamos considerar as mudanças de variáveis (2.7), (2.8), (2.12), (2.13), em termos dos campos de Bose (U,V) valorados numa álgebra de Lie. A função de partição pode ser fatorada como [13, 14]:

$$Z = Z_F^{(0)} \times Z_{gh}^{(0)} \times \breve{Z}, \tag{2.155}$$

onde $Z_F^{(0)}$ é a função de partição de férmions livres

$$Z_F^{(0)} = \int D\chi D\overline{\chi} \exp\left[i\int d^2 z \overline{\chi} i\partial\!\!\!/ \chi \right], \tag{2.156}$$

$Z_{gh}^{(0)}$ é a função de partição dos *ghosts* livres associados com as mudanças de variáveis (2.7)-(2.8),

$$Z_{gh}^{(0)} = \int Db_+^{(0)} Dc_+^{(0)} \exp\left[i\int d^2 z \ tr \ b_+^{(0)} i\partial_- c_+^{(0)} \right] \int Db_-^{(0)} Dc_-^{(0)} \exp\left[i\int d^2 z \ tr \ b_-^{(0)} i\partial_+ c_-^{(0)} \right], \tag{2.157}$$

e

$$\breve{Z} = \int D\,U \ D\,V \exp\left\{ iS_{YM}\left[U,V\right] \right\} \exp\left[-i\left\{ C_V \Gamma\left[UV\right] + \Gamma\left[U^{-1}\right] + \Gamma\left[V\right] \right\} - \frac{1}{2e^2}\left\{ \tilde{\mu}_0^2 a + m_0^2 \right\} \int d^2 z \ \operatorname{Tr}\left[\left(U^{-1}\partial_+ U\right)\left(V\partial_- V^{-1}\right) \right] \right] \tag{2.158}$$

com a ação de Yang-Mills dada por

$$S_{YM}\left[UV\right]=\frac{1}{4e^2}\int d^2z\,\mathrm{Tr}\frac{1}{2}\left[\partial_+\left(Gi\partial_-G\right)\right]^2. \tag{2.159}$$

No caso não-Abeliano, o funcional WZW é dado por [11, 16]

$$\Gamma\left[g\right]=S_{P\sigma M}\left[g\right]+S_{WZ}\left[g\right], \tag{2.160}$$

onde $S_{P\sigma M}\left[g\right]$ é a ação de Wess-Zumino

$$S_{WZ}\left[g\right]=\frac{1}{12\pi}\int_{S_B} d^3x\ \varepsilon^{ijk}\,\mathrm{Tr}\left[\left(\hat{g}^{-1}\partial_i\hat{g}\right)\left(\hat{g}^{-1}\partial_j\hat{g}\right)\left(\hat{g}^{-1}\partial_k\hat{g}\right)\right]. \tag{2.161}$$

Usando a identidade de PW, a função total de partição pode ser reescrita como

$$Z=Z_F^{(0)}Z_{gh}^{(0)}\int DUDV\exp\left\{iS_{YM}\left[UV\right]\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{-i\frac{1}{2\tilde{\mu}_0^2}\left[\tilde{\mu}_0^2\left(a+2C_V\right)+m_0^2\right]\Gamma\left[UV\right]++i\frac{1}{2\tilde{\mu}_0^2}\left[\tilde{\mu}_0^2\left(a-2\right)+m_0^2\right]\Gamma\left[V\right]-i\Gamma\left[U^{-1}\right]+\right.$$

$$\left.+i\frac{1}{2\tilde{\mu}_0^2}\left[\tilde{\mu}_0^2a+m_0^2\right]\Gamma\left[UV\right]\right\}. \tag{2.162}$$

2.6. Observações Conclusivas sobre o Capítulo 2

Realizamos aqui uma nova análise do modelo TW, a partir do tratamento funcional e utilizando a teoria de Wess-Zumino-Witten, propondo uma fácil visualização da equivalência entre a QED_2 (QCD_2) com quebra de simetria e o modelo TW (modelo TW não-Abeliano).

Na formulação de métrica indefinida, os campos $\{\bar{\psi}, \psi, A_{\mu}\}$ são singletos sob transformações de calibre geradas pela corrente longitudinal. Isto implica que a álgebra de campo é por si só a álgebra de campo física. O limite GI pode ser levado a cabo nos operadores de campo escritos em termos do campo livre não-canônico ς, conduzindo à solução de Lowenstein-Rothe-Swieca para a QED_2.

A formulação de métrica positivo-definida é obtida realizando-se uma transformação canônica que mapeia os graus de liberdade de Bose redundantes sobre uma excitação de calibre com norma nula. O operador de campo de férmion passa a ser escrito em termos do campo fermiônico, dotado de carga, do modelo de Thirring. Neste caso, o limite QED_2 está definido apenas para a sub-álgebra de campo GI.

O modelo vetorial de Shwinger "anômalo" considerado na Ref. [9] nada mais é do que o modelo de Thirring-Wess. De fato, o aspecto físico estrutural subjacente à conclusão dada na Ref. [9], segundo a qual aparentemente o parâmetro a controla as propriedades de *screening* e de confinamento no modelo vetorial de Schwinger "anômalo", é que o espaço de estados de Hilbert do modelo de Thirring exibe setores de carga, e, logo, resultaria não existir confinamento.

3. Uma Abordagem Funcional do Modelo Bidimensional de Férmions com Interação Quártica entre Espécies Diferentes

Usando a redução Abeliana da teoria de Wess-Zumino-Witten, obtemos a seguir a bosonização funcional do modelo bidimensional de férmions com interação entre N espécies diferentes de campos de Fermi. A solução de operador para as equações de movimento quânticas é reconstruída a partir da formulação funcional. As correspondências entre férmions e bósons, mostradas anteriormente por Halpern, são generalizadas para o caso da interação quártica entre diferentes espécies de campos de Fermi. São apresentadas desta forma, para o modelo de massa nula, as funções generalizadas de Wightman para o campo de Fermi. São calculadas a função de partição e a equação de estado do sistema mecânico estatístico associado com a teoria efetiva bosonizada, e é discutido o mecanismo de blindagem de carga (*charge screening*) próprio ao modelo de Thirring, considerando-se a simetria de calibre local do modelo. Este Capítulo se reporta à Ref. [47].

3.1. Escopo e Método

Os aspectos estruturais da bosonização funcional de modelos Abelianos bidimensionais foram analisados na Ref. [15]. Considerando-se a redução Abeliana da teoria de Wess-Zumino-Witten e usando a abordagem funcional, é reconstruída, no espaço de Hilbert dos estados, a prova de Coleman do mapeamento férmion-bóson entre as teorias de Thirring com massa e de sine-Gordon.

A bosonização funcional do modelo bidimensional de férmion com interação quártica entre espécies diferentes de campos de Fermi foi discutida nas Refs. [17, 18, 19]. Na Ref. [19] discute-se a estrutura bosônica do modelo com interação entre dois diferentes campos de Fermi com massa. Usando a redução Abeliana da teoria de Wess-Zumino-Witten (WZW) [20], obtém-se o funcional gerador bosonizado do modelo e é estabelecido o mapeamento férmions-bósons no espaço de estados de Hilbert. As correspondências entre férmions e bósons, anteriormente obtidas por Halpern [28], são generalizadas para uma interação entre duas espécies diferentes de férmions.

O objetivo deste Capítulo (ver Ref. [47]) é apresentar um estudo detalhado do modelo bidimensional de férmions com interação quártica entre diferentes espécies de férmions, preenchendo uma lacuna na literatura e clarificando algumas questões estruturais que permanecem obscuras. Para isto, será empregada a bosonização funcional, tal como apresentada nas Refs. [15, 19, 21]. O capítulo está organizado desta forma: na Seção 3.2 apresentam-se aspectos gerais do modelo. Na Seção 3.3, usamos a redução Abeliana da teoria WZW [20] para obter o funcional gerador em termos da Lagrangiana efetiva bosonizada. Na Seção 3.4 é obtida a solução de operador para as equações de movimento quânticas, e discute-se a estrutura do espaço de Hilbert. As correspondências entre férmions e bósons, obtidas anteriormente no trabalho de Halpern [28], são generalizadas para o caso de uma interação entre N espécies diferentes de campos de Fermi. As funções fermiônicas de Wightman gerais são obtidas, para o caso de campos de Fermi com massa nula. Na seção 3.5, obtemos a função de partição que descreve o sistema mecânico-estatístico associado e a correspondente equação de estado. Na seção 3.6 é discutido o modelo com simetria de calibre local, isto é, a QED_2 com N campos de Fermi com massa com a presença de sabores e auto-interação quártica entre as diferentes espécies. A carga e a quiralidade do campo de Fermi são blindadas, e o conteúdo físico do modelo é descrito por $N-1$ campos de sine-Gordon acoplados a um campo de sine-Gordon com massa

$$m_*^2 = \left(\frac{e^2 N}{\pi}\right)\left(\frac{1}{1-\frac{g^2(N-1)}{\pi}}\right)$$

As observações finais e a discussão dos resultados serão apresentadas na seção 3.7.

3.2. Aspectos Gerais

O modelo é definido pela Lagrangiana clássica[2]:

$$\mathcal{L}(x)=\sum_{j=1}^{N}\bar{\psi}_j(x)\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m_0\right)\psi_j(x)+g^2\sum_{j<k}^{N}\left(\bar{\psi}_j\gamma^{\mu}\psi_j(x)\right)\left(\bar{\psi}_k(x)\gamma_{\mu}\psi_k(x)\right), \tag{3.1}$$

onde j e k assinalam as espécies fermiônicas. Definindo as correntes vetoriais

$$\mathcal{J}_j^{\mu}=\bar{\psi}_j\gamma^{\mu}\psi_j\,, \tag{3.2}$$

a interação corrente-corrente entre as espécies diferentes de férmions na Lagrangiana (3.1) pode ser escrita como

$$\mathcal{L}_I=\frac{1}{2}g^2\left(\sum_{j=1}^{N}\mathcal{J}_j^{\mu}\right)^2-\frac{1}{2}g^2\sum_{j=1}^{N}\left(\mathcal{J}_j^{\mu}\right)^2, \tag{3.3}$$

onde a corrente $U(1)$ é dada por

$$\mathcal{J}^{\mu}=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N}\mathcal{J}_j^{\mu}\,. \tag{3.4}$$

O primeiro termo na Lagrangiana de interação (3.1) corresponde a uma auto-interação quártica repulsiva para a corrente $U(1)$, e o segundo termo corresponde a N interações

---

[2] As convenções usadas são:
$\left(\partial_{\mu}\phi\right)^2=\partial_{\mu}\phi\partial^{\mu}\phi;\ \gamma^0=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \gamma^1=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\ \gamma^5=\gamma^0\gamma^1,\ \gamma^{\mu}\gamma^5=\in^{\mu\nu}\gamma_{\nu},\ g^{00}=-g^{11},\ \in_{01}=\in^{10}=1$

de Thirring atrativas e independentes para cada espécie de corrente $\mathcal{J}_j^\mu$. As equações clássicas de movimento são dadas por

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_j = -g^2 \left(\sum_{k=1}^{N} \mathcal{J}_k^\mu \right) \gamma_\mu \psi_j + g^2 \mathcal{J}_j^\mu \gamma_\mu \psi_j - m_0 \psi_j . \tag{3.5}$$

Em duas dimensões uma corrente conservada pode ser sempre escrita em termos de um potencial pseudo-escalar como

$$\mathcal{J}_j^\mu = \in^{\mu\nu} \partial_\nu \tilde{\Phi}_j . \tag{3.6}$$

Introduzindo a decomposição [23, 16]

$$\tilde{\Phi}_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \tilde{\Phi} + \sum_{i_D=1}^{N-1} \lambda_{jj}^{i_D} \tilde{\Phi}_{i_D} , \tag{3.7}$$

onde λ^{i_D} são os $(N-1)$ geradores mutuamente comutáveis de $SU(N)$, a corrente pode ser escrita como

$$\mathcal{J}_j^\mu = \frac{1}{\sqrt{N}} \mathcal{J}^\mu + \sum_{i_D=1}^{N-1} \lambda_{jj}^{i_D} \mathcal{J}_{i_D}^\mu , \tag{3.8}$$

e a equação clássica de movimento (3.5) é dada por

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_j(x) = -g^2 \frac{(N-1)}{\sqrt{N}} \mathcal{J}^\mu(x) \gamma_\mu \psi_j(x) + g^2 \sum_{i_D=1}^{N-1} \lambda_{i_D}^{jj} \mathcal{J}_{i_D}^\mu(x) \gamma_\mu \psi_j - m_0 \psi_j(x) \tag{3.9}$$

Nas subseções seguintes a bosonização funcional será usada com o fim de obter a solução de operador para a versão quântica da equação de movimento clássica (3.9).

Para $N = 2$ o modelo exibe simetria quanto à permutação de partículas $\psi_1 \leftrightarrow \psi_2$. Neste caso podemos definir as correntes

$$\mathcal{J}_{\pm}^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathcal{J}_1^{\mu} \pm \mathcal{J}_2^{\mu}\right), \tag{3.10}$$

e a Lagrangiana de interação (3.3) pode ser reescrita como

$$\mathcal{L}_I = \frac{1}{2} g^2 \left(\mathcal{J}_+^{\mu}\right)^2 - \frac{1}{2} g^2 \left(\mathcal{J}_-^{\mu}\right)^2. \tag{3.11}$$

A operação de simetria $\psi_1 \leftrightarrow \psi_2$ corresponde a $\mathcal{J}_{\pm}^{\mu} \leftrightarrow \pm\mathcal{J}_{\pm}^{\mu}$. Como é mostrado na Ref. [19] esta simetria é exibida pela teoria quântica na faixa de valores da constante de acoplamento para a qual $g^2 < \pi$.

A álgebra de campo do modelo de Thirring de massa nula $\left(m_0 = 0\right)$ é isomorfa à álgebra do campo escalar com massa nula. Para campos de Fermi com massa nula , o modelo descrito pela Lagrangiana (3.1) é uma teoria invariante de escala com dimensão de escala anômala. Da mesma forma que no modelo de Thirring padrão, para que a teoria descrita pela Lagrangiana (3.1) admita com ponto fixo a curta distância o modelo de férmions com massa nula, a dimensão de escala do operador de massa deve ser [8]

$$D < 2. \tag{3.12}$$

A seguir, o termo de massa deve ser entendido como uma perturbação no modelo invariante de escala.

3.3. Bosonização Funcional

Com o objetivo de obter, pelo método funcional, a bosonização do modelo, consideraremos o funcional gerador e as seguintes identidades entre integrais funcionais

$$e^{i\int d^2x\left\{\frac{1}{2}g^2\left(\sum_{i=1}^{N}\mathcal{J}_i^{\mu}\right)^2\right\}} \equiv \int \mathcal{D}a_{\mu}\, e^{i\int d^2x\left\{-\frac{1}{2}g^2\left(a_{\mu}\right)^2+g^2 a_{\mu}\left(\sum_{j=1}^{N}\mathcal{J}_j^{\mu}\right)\right\}}, \tag{3.13}$$

$$e^{i\int d^2x\left\{-\frac{1}{2}g^2\sum_{j=1}^{N}\left(\mathcal{J}_j^{\mu}\right)^2\right\}} \equiv \int \prod_{j=1}^{N}\mathcal{D}b_{\mu j}\, e^{i\int d^2x\left\{\frac{1}{2}g^2\sum_{j=1}^{N}\left(b_{\mu j}\right)^2+g^2\sum_{j=1}^{N}b_j^{\mu}\mathcal{J}_{\mu j}\right\}}. \tag{3.14}$$

Este procedimento expande a álgebra de campos original pela introdução de dois campos vetoriais auxiliares, e o funcional gerador é dado em termos da medida de integração funcional

$$\prod_{j=1}^{N}\mathcal{D}\overline{\psi}_j\mathcal{D}\psi_j \to \left(\prod_{j=1}^{N}\mathcal{D}\overline{\psi}_j\mathcal{D}\psi_j\right)\mathcal{D}a_{\mu}\left(\prod_{j=1}^{\mathcal{N}}\mathcal{D}b_{\mu j}\right). \tag{3.15}$$

A Lagrangiana efetiva é dada por

$$\mathcal{L}_{ef} = \sum_{j=1}^{N}\overline{\psi}_j\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m_0\right)\psi_j - \frac{g^2}{2}\left(a_{\mu}\right)^2 + g^2 a_{\mu}\left(\sum_{j=1}^{N}\mathcal{J}_j^{\mu}\right) + \frac{g^2}{2}\sum_{j=1}^{N}\left(b_{\mu j}\right)^2 + g^2\sum_{j=1}^{N}b_j^{\mu}\mathcal{J}_{\mu j} \tag{3.15}$$

Definindo os N novos campos vetoriais

$$\mathcal{B}_j^{\mu} = a^{\mu} - b_j^{\mu}\ , \tag{3.16}$$

obtemos de (3.16)

$$\mathcal{L}_{eff} = \sum_{j=1}^{N} \bar{\psi}_j \left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} + g^2\gamma^{\mu}\mathcal{B}_{\mu j} - m_0 \right)\psi_j + \frac{g^2}{2}\sum_{j=1}^{N}\left(\mathcal{B}_j^{\mu}\right)^2 + \frac{g^2}{2}(N-1)\left(a_{\mu}\right)^2 - g^2 a_{\mu}\left(\sum_{j=1}^{N}\mathcal{B}_j^{\mu}\right) \tag{3.18}$$

Perfazendo a integração funcional sobre o campo a_{μ}, obtemos

$$\mathcal{L}_{eff} = \sum_{j=1}^{N} \bar{\psi}_j \left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} + g^2\gamma^{\mu}\mathcal{B}_{\mu j} - m_0 \right)\psi_j + \frac{g^2}{2}\sum_{j=1}^{N}\left(\mathcal{B}_j^{\mu}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{g^2}{(N-1)}\left(\sum_{j=1}^{N}\mathcal{B}_j^{\mu}\right)^2 \tag{3.19}$$

Definindo as combinações das componentes do campo vetorial

$$\mathcal{B}_j^{\pm} = \mathcal{B}_j^{0} \pm \mathcal{B}_j^{\mu}, \tag{3.20}$$

a parcela fermiônica da Lagrangiana pode ser escrita em termos das duas componentes espinoriais $\psi_{(a)j}$ $(\alpha = 1,2)$ como se segue

$$\mathcal{L}_F = \sum_{j=1}^{N}\left\{ \psi_{(1)j}^{\dagger}\left(i\partial_{-} + g^2\mathcal{B}_{-}^{j}\right)\psi_{(1)j} + \psi_{(2)j}^{\dagger}\left(i\partial_{+} + g^2\mathcal{B}_{+}^{j}\right)\psi_{(2)j} - m_0\left(\psi_{(1)j}^{\dagger}\psi_{(2)j} + \psi_{(2)j}^{\dagger}\psi_{(1)j}\right)\right\} \tag{3.21}$$

Visando agora desacoplar os campos de Fermi e os campos vetoriais auxiliares na Lagrangiana efetiva (3.9), introduzimos a seguinte parametrização dos campos $\mathcal{B}_j^{\pm}$ em termos dos campos de Bose $\left(U_j, V_j\right)$ que assumem valores no grupo $U(1)$:

$$\mathcal{B}_{+}^{j}=\frac{1}{g^{2}}U_{j}^{-1}i\partial_{+}U_{j}\,, \tag{3.22}$$

$$\mathcal{B}_{-}^{j}=\frac{1}{g^{2}}V_{j}i\partial_{-}V_{j}^{-1} \tag{3.23}$$

de forma a que se verifique

$$\psi_{(1)j}^{\dagger}\left(i\partial_{-}+g^{2}\mathcal{B}_{-}^{j}\right)\psi_{(1)j}+\psi_{(2)j}^{\dagger}\left(i\partial_{+}+g^{2}\mathcal{B}_{+}^{j}\right)\psi_{(2)j}=$$

$$\left(\psi_{(1)j}V_{j}^{-1}\right)^{\dagger}i\partial_{-}\left(V_{j}^{-1}\psi_{(1)j}\right)+\left(\psi_{(2)j}U_{j}\right)^{\dagger}i\partial_{+}\left(U_{j}\psi_{(2)j}\right) \tag{3.24}$$

O desacoplamento é efetuado pelas rotações quirais dos férmions

$$\psi_{(1)j}=V_{j}\psi_{(1)j}^{(0)}\,, \tag{3.25}$$

$$\psi_{(2)j}=U_{j}^{-1}\psi_{(2)j}^{(0)} \tag{3.26}$$

onde $\psi_{j}^{(0)}$ é a solução da teoria livre de Fermi massiva com N espécies. Definindo a seguir as derivadas covariantes

$$D_{\pm}\left(\mathcal{B}^{j}\right)=\left(i\partial_{\pm}+g^{2}\mathcal{B}_{\pm}^{j}\right) \tag{3.27}$$

e introduzindo na integral funcional as $2N$ identidades

$$1=\int\mathcal{D}U_{j}\left[\det D_{+}\left(U_{j}\right)\right]\delta\left(g^{2}\mathcal{B}_{+}^{j}-U_{j}^{-1}i\partial_{+}U_{j}\right), \tag{3.28}$$

$$1=\int \mathcal{D}V_j\left[\det D_-\left(V_j\right)\right]\delta\left(g^2\mathcal{B}_-^j-V_j i\partial_- V_j^{-1}\right), \tag{3.29}$$

a troca de variáveis de $\left(\mathcal{B}_+^j,\mathcal{B}_-^j\right)$ para $\left(U_j,V_j\right)$ é efetuada integrando-se sobre as componentes $\mathcal{B}_\pm^j$ dos campos vetoriais. Realizando agora as rotações quirais dos férmions (3.13) e (3.14), e levando em consideração a alteração correspondente na medida de integração [15, 14], obtemos

$$\left(\prod_j \mathcal{D}\bar{\psi}_j\mathcal{D}\psi_j\right)\left(\prod_j \mathcal{D}\mathcal{B}_\pm^j\right)=\left(\prod_j \mathcal{D}\bar{\psi}_j^{(0)}\mathcal{D}\psi_j^{(0)}\right)\left(\prod_j \mathcal{D}U_j\mathcal{D}V_j\right)\prod_j \mathcal{W}_j\left[U_j,V_j\right] \tag{3.29}$$

com

$$\mathcal{W}_j\left[U_j,V_j\right]=e^{-i\left\{\Gamma\left[U_j\right]+\Gamma\left[V_j\right]-\boldsymbol{b}\int d^2x\mathcal{B}_+^j\mathcal{B}_-^j\right\}}, \tag{3.31}$$

onde $\boldsymbol{b}$ é um parâmetro de regularização e $\Gamma\left[G_j\right]$ é o funcional de Wess-Zumino-Witten (WZW) [20, 15], que entra em (3.19) com peso negativo. No caso Abeliano o funcional WZW é dado por

$$\Gamma\left[G\right]=\Gamma\left[G^{-1}\right]=\frac{1}{8\pi}\int d^2z\partial_\mu G^{-1}\partial^\mu G. \tag{3.32}$$

Por conta da ausência de invariância de calibre na teoria efetiva total, o último termo em (3.19) foi acrescentado aproveitando-se a liberdade de regularização no cômputo dos Jacobianos. Porém, como a Lagrangiana fermiônica efetiva é invariante sob transformações locais de calibre, usaremos a regularização “invariante de calibre” dada por[3]

$$\boldsymbol{b} = \frac{g^2}{4\pi} \ . \tag{3.33}$$

Usando a identidade de Polyakov-Wiegman [12]

$$\Gamma[UV] = \Gamma[U] + \Gamma[V] \frac{1}{4\pi} \int d^2x \left(U^{-1}\partial_+ U\right)\left(V\partial_- V^{-1}\right), \tag{3.34}$$

obtemos

$$\mathcal{W}_j = e^{-i\Gamma\left[U_j V_j\right]}. \tag{3.35}$$

O campo vetorial pode ser decomposto em duas dimensões como

$$\mathcal{B}_j^{\mu} = \frac{1}{g^2}\left(\epsilon^{\mu\nu}\,\partial_\nu \tilde{\phi}_j + \partial^{\mu}\zeta_j\right), \tag{3.36}$$

que corresponde à parametrização dos campos de Bose $\left(U_j, V_j\right)$ a seguir

$$U_j = e^{-i\left(\tilde{\phi}_j + \zeta_j\right)} \tag{3.37}$$

$$V_j = e^{-i\left(\tilde{\phi}_j - \zeta_j\right)} \quad , \tag{3.38}$$

e os campos de Fermi são dados por

---

[3] Uma escolha diversa de regularização implica uma redefinição do parâmetro β da teoria de sine-Gordon e do intervalo físico de valores para a constante de acoplamento g [15, 19].

$$\psi_j(x) = e^{i\left(\gamma^5 \tilde{\phi}_j(x) + \zeta_j(x)\right)} \psi_j^{(0)}(x). \tag{3.39}$$

Reunindo tudo isso, a Lagrangiana efetiva total será dada por

$$\mathcal{L}_{ef} = \sum_j^N \left\{ \overline{\psi}_j^{(0)} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_j^{(0)} - m_0 \left(\psi_{(1)j}^{(0)\dagger} \psi_{(2)j}^{(0)} e^{-2i\tilde{\phi}_j} + \psi_{(2)j}^{(0)\dagger} \psi_{(1)j}^{(0)} e^{2i\tilde{\phi}_j} \right) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2g^2}\left(1 + \frac{g^2}{\pi}\right)\left(\partial_\mu \tilde{\phi}_j\right)^2 + \frac{1}{2g^2}\left(\partial_\mu \zeta_j\right)^2 \right\} - \frac{1}{2}\frac{1}{g^2(N-1)}\left(\sum_{j=1}^N \left(\in^{\mu\nu} \partial_\nu \tilde{\phi}_j + \partial^\mu \zeta_j\right)\right)^2 \tag{3.40}$$

Vamos introduzir agora as expressões de bosonização de campos livres [16]

$$\psi_j^{(0)}(x) = \left(\frac{\mu_0^{2d}}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-i\frac{1}{4}\pi\gamma^5} : e^{i\sqrt{\pi}\left\{\gamma^5 \tilde{\varphi}_j(x) + \int_{x^1}^{\infty} \partial_0 \tilde{\varphi}_j\left(x^0, z^1\right) dz^1\right\}} :, \tag{3.41}$$

$$\overline{\psi}_j^{(0)} \gamma^\mu \partial_\mu \psi_j^{(0)} = \frac{1}{2} : \left(\partial_\mu \tilde{\varphi}_j\right)^2 :, \tag{3.42}$$

$$\psi_{(1)j}^{(0)\dagger} \psi_{(2)j}^{(0)} = \frac{\mu_0}{2\pi} : e^{-2i\sqrt{\pi}\tilde{\varphi}_j} :, \tag{3.43}$$

onde $:(\bullet):$ indica a ordenação normal com respeito ao propagador livre $\left(\Box + \mu_0^2\right)^{-1}$ no limite $\mu_0 \to 0$, e d é a dimensão de escala do operador de campo de Fermi (a dimensão canônica é $d = 1/2$)[4]. Definindo os campos

[4] Para uma discussão detalhada do significado de $:(\bullet):$ em uma teoria interativa sugerimos a leitura das Refs. [8, 16]

$$\tilde{\phi} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} \tilde{\phi}_j \, , \tag{3.44}$$

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} \eta_j \, , \tag{3.45}$$

o funcional gerador é dado em termos da Lagrangiana efetiva bosonizada

$$\mathcal{L}_{ef} = \sum_{j=1}^{N} \left\{ \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \tilde{\varphi}_j \right)^2 - \frac{1}{2g^2} \left(1 + \frac{g^2}{\pi} \right) \left(\partial_\mu \tilde{\phi}_j \right)^2 + \frac{1}{2g^2} \left(\partial_\mu \zeta_j \right)^2 - m_0' \cos\left(2\sqrt{\pi} \tilde{\varphi}_j + 2\tilde{\phi}_j \right) \right\} +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{N}{g^2 \left(N-1 \right)} \left(\partial_\mu \tilde{\phi} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{N}{g^2 \left(N-1 \right)} \left(\partial_\mu \zeta \right)^2 , \tag{3.46}$$

onde $m'_0 = \mu_0 m_0 / \pi$. Introduzindo agora a decomposição [23, 16]

$$\tilde{\phi}_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \tilde{\phi} + \sum_{i_D=1}^{N-1} \lambda_{jj}^{i_D} \tilde{\phi}_{i_D} \, , \tag{3.47}$$

$$\tilde{\varphi}_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \tilde{\varphi} + \sum_{i_D=1}^{N-1} \lambda_{jj}^{i_D} \tilde{\varphi}_{i_D} \, , \tag{3.48}$$

$$\zeta_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \zeta + \sum_{i_D=1}^{N-1} \lambda_{jj}^{i_D} \zeta_{i_D} \, , \tag{3.49}$$

onde λ^{i_D} são os $N-1$ mutuamente comutáveis geradores de $SU(N)$ com normalização

$$\mathrm{Tr}\left(\lambda^{i_D} \lambda^{j_D} \right) = \delta^{ij} , \tag{3.50}$$

$$\sum_{i_D=1}^{N-1} \lambda_{jj}^{i_D} \lambda_{kk}^{i_D} = \left(\delta_{jk} - \frac{1}{N} \right). \tag{3.51}$$

a Lagrangiana efetiva bosonizada total pode ser reescrita como

$$\mathcal{L}_{ef} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \tilde{\varphi}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i_D=1}^{N-1}\left(\partial_\mu \tilde{\varphi}_{i_D}\right)^2 + \frac{1}{2g^2}\left(\frac{1}{N-1} - \frac{g^2}{\pi}\right)\left(\partial_\mu \tilde{\phi}\right)^2 - \frac{1}{2g^2}\left(1 + \frac{g^2}{\pi}\right)\sum_{i_D=1}^{N-1}\left(\partial_\mu \tilde{\phi}_{i_D}\right)^2 -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{g^2(N-1)}\left(\partial_\mu \zeta\right)^2 + \frac{1}{2g^2}\sum_{i_D=1}^{N-1}\left(\partial_\mu \zeta_{i_D}\right)^2 -$$

$$-m'_0 \sum_{j=1}^{N} \cos\left\{ 2\sqrt{\frac{\pi}{N}}\tilde{\varphi} + \frac{2}{\sqrt{N}}\tilde{\phi} + \sum_{i_D=1}^{N-1} \lambda_{jj}^{i_D}\left(2\sqrt{\pi}\tilde{\varphi}_{i_D} + 2\tilde{\phi}_{i_D}\right)\right\}. \tag{3.52}$$

Note-se que o intervalo de valores para a constante de acoplamento g^2 em (3.52) determina o sinal da métrica do campo $\tilde{\phi}$.Tal como no modelo de Thirring usual, devemos considerar

$$0 \le g^2 < \pi/(N-1). \tag{3.53}$$

Para tornarmos os campos canônicos, efetuamos agora os escalonamentos de campos

$$\tilde{\phi} = \frac{g}{\sqrt{\frac{1}{N-1} - \frac{g^2}{\pi}}}\tilde{\phi}', \tag{3.54}$$

$$\tilde{\phi}_{i_D} = \frac{g}{\sqrt{1 + \frac{g^2}{\pi}}}\tilde{\phi}'_{i_D}, \tag{3.55}$$

$$\zeta = g\sqrt{(N-1)}\zeta', \tag{3.56}$$

$$\zeta_{i_D} = g\zeta'_{i_D}, \tag{3.57}$$

e a Lagrangiana pode ser escrita como

$$\mathcal{L}_{eff} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\tilde{\varphi}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i_D=1}^{N-1}\left(\partial_\mu\tilde{\varphi}_{i_D}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\tilde{\phi}'\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i_D=1}^{N-1}\left(\partial_\mu\tilde{\phi}'_{i_D}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\zeta'\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i_D=1}^{N-1}\left(\partial_\mu\zeta'_{i_D}\right)^2 -$$

$$-m'_0\sum_{j=1}^{N}\cos\left\{2\sqrt{\frac{\pi}{N}}\tilde{\varphi} + \frac{2}{\sqrt{N}}\frac{g\sqrt{N-1}}{\sqrt{1-\frac{g^2(N-1)}{\pi}}}\tilde{\phi}' + \sum_{i_D=1}^{N-1}\lambda_{jj}^{i_D}\left(2\sqrt{\pi}\tilde{\varphi}_{i_D} + 2\frac{g}{\sqrt{1+\frac{g^2}{\pi}}}\tilde{\phi}'_{i_D}\right)\right\}.. \tag{3.58}$$

Observe-se que os campos $\tilde{\phi}'_{i_D}$ e ζ' estão quantizados com métrica negativa. Os campos $\left(\tilde{\varphi},\tilde{\phi}'\right)$ agem como pseudopotenciais para a corrente $\mathcal{J}_\mu$ em $U(1)$, e os campos $\left(\tilde{\varphi}_{i_D},\tilde{\phi}'_{i_D}\right)$ agem como pseudopotenciais para a corrente $\mathcal{J}^\mu_{i_D}$. Levando em consideração a combinação entre os campos $\tilde{\varphi}$ e $\tilde{\phi}'$, assim como a combinação entre os campos φ_{i_D} e $\tilde{\phi}'_{i_D}$ que aparecem no termo de massa em (3.58), e seguindo o procedimento apresentado nas Refs. [5, 3], realizaremos agora as transformações canônicas correspondentes. Para os campos $\tilde{\varphi}$ e $\tilde{\phi}'$, ambos quantizados com métrica positiva, introduzimos a transformação

$$\beta\,\tilde{\Phi} = 2\sqrt{\frac{\pi}{N}}\tilde{\varphi} + \frac{2}{\sqrt{N}}\frac{g\sqrt{N-1}}{\sqrt{1-\left[g^2(N-1)/\pi\right]}}\tilde{\phi}', \tag{3.59}$$

$$\beta\ \tilde{\xi} = \frac{2}{\sqrt{N}} \frac{g\sqrt{N-1}}{\sqrt{1-\left[g^2\left(N-1\right)/\pi\right]}}\tilde{\varphi} - 2\sqrt{\frac{\pi}{N}}\tilde{\phi}', \tag{3.60}$$

com

$$\beta^2 = \frac{4\pi}{N}\left(\frac{1}{1-\left[g^2\left(N-1\right)/\pi\right]}\right). \tag{3.61}$$

Ambos os campos $\tilde{\Phi}$ e $\tilde{\xi}$ possuem métrica positiva. Para os campos $\tilde{\varphi}_{i_D}$ e $\tilde{\phi}'_{i_D}$, que possuem métricas de quantização opostas, introduzimos a transformação

$$\gamma\ \tilde{\Phi}_{i_D} = 2\sqrt{\pi}\tilde{\varphi}_{i_D} + 2\frac{g}{\sqrt{1+g^2/\pi}}\tilde{\phi}'_{i_D}, \tag{3.62}$$

$$\gamma\ \tilde{\xi}_{i_D} = 2\frac{g}{\sqrt{1+g^2/\pi}}\tilde{\varphi}_{i_D} + 2\sqrt{\pi}\tilde{\phi}'_{i_D}, \tag{3.63}$$

com

$$\gamma^2 = \frac{4\pi}{1+\frac{g^2}{\pi}}\ , \tag{3.64}$$

e os campos $\tilde{\Phi}_{i_D}$ e $\tilde{\xi}_{i_D}$ têm agora métricas opostas. A Lagrangiana efetiva bosonizada (3.58) será então dada por

$$\mathcal{L}_{ef} = \delta\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}\left[\tilde{\Phi}, \tilde{\Phi}_{i_D}\right], \tag{3.65}$$

onde $\delta\mathcal{L}_0$ é a porção da Lagrangiana referente aos campos escalares livres com massa nula e métrica de quantização oposta,

$$\delta\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\zeta'\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\tilde{\xi}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i_D=1}^{N-1}\left(\partial_\mu\zeta_{i_D}\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i_D=1}^{N-1}\left(\partial_\mu\tilde{\xi}_{i_D}\right)^2 , \tag{3.66}$$

e

$$\mathcal{L}\left[\tilde{\Phi},\tilde{\Phi}_{i_D}\right] = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\tilde{\Phi}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i_D=1}^{N-1}\left(\partial_\mu\tilde{\Phi}_{i_D}\right)^2 - m_0'\sum_{j=1}^{N}\cos\left(\beta\,\tilde{\Phi} + \gamma\sum_{i_D=1}^{N-1}\lambda_{jj}^{i_D}\tilde{\Phi}_{i_D}\right). \tag{3.67}$$

A dimensão de escala do operador de massa em (3.58) é dada por

$$D = \frac{1}{4\pi}\left(\beta^2 + \gamma^2\frac{(N-1)}{N}\right). \tag{3.68}$$

Deve ser notado que os N campos $\left(\tilde{\Phi},\tilde{\Phi}_{i_D}\right)$, que descrevem o conteúdo físico da teoria efetiva bosonizada, possuem métrica positiva, e a unitariedade não é destruída. Por outro lado, deve ser enfatizado também que, embora os campos ζ', $\tilde{\xi}$ e $\tilde{\xi}_{i_D}$ se desacoplem na Lagrangiana, o mesmo desacoplamento não ocorre no funcional gerador. Na verdade, estes campos quantizados com métrica oposta são graus de liberdade bosônicos redundantes introduzidos pelo uso de campos vetoriais auxiliares [15]. Como veremos, somente estão presentes no funcional gerador combinações com norma zero desses operadores, que não contribuem para as funções de Wightman do operador de campo de Fermi. Conforme está mostrado na Ref. [15], a fatoração da função de partição conduz, em geral, a conclusões incorretas a respeito do conteúdo físico do modelo.

Para $g = 0$, $\beta^2 = 4\pi/N$, $\gamma^2 = 4\pi$, e definindo-se os N campos bosônicos

$$\tilde{\Phi}_j = \frac{1}{\sqrt{N}}\tilde{\Phi} + \sum_{i_D=1}^{N-1}\lambda_{jj}^{i_D}\tilde{\Phi}_{i_D} , \tag{3.69}$$

a Lagrangiana (3.67) pode ser reescrita como

$$\mathcal{L}^{(0)} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\left(\partial_\mu \tilde{\Phi}_j\right)^2 - m_0' \sum_{j=1}^{N} \cos\left(2\sqrt{\pi}\tilde{\Phi}_j\right), \tag{3.70}$$

e corresponde à Lagrangiana bosonizada de N campos de Fermi livres e com massa.

O termo de massa de Fermi bosonizado na Lagrangiana (3.67) é a generalização, para o caso de interação entre diferentes espécies fermiônicas, do operador de massa bosonizado obtido por Halpern [28] para o caso específico de uma "interação corrente-corrente por número bariônico" $g^2\left(\sum_{j=1}^{N}\mathcal{J}_j^\mu\right)^2$.

Para N=2, definindo os campos $\tilde{\Phi}_+ \equiv \tilde{\Phi}$ e $\tilde{\Phi}_- \equiv \tilde{\Phi}_{i_D}$, a Lagrangiana (3.67) pode ser reescrita como

$$\mathcal{L}\left[\tilde{\Phi}_+, \tilde{\Phi}_-\right] = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \tilde{\Phi}_+\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \tilde{\Phi}_-\right)^2 - m_0' \cos\left(\beta_+ \tilde{\Phi}_+\right)\cos\left(\beta_- \tilde{\Phi}_-\right), \tag{3.71}$$

onde

$$\beta_+^2 = \frac{2\pi}{1-\frac{g^2}{\pi}}, \tag{3.72}$$

$$\beta_-^2 = \frac{2\pi}{1+\frac{g^2}{\pi}}. \tag{3.73}$$

Na teoria bosonizada, a simetria implícita na permutação de partículas $\psi_1 \leftrightarrow \psi_2$ corresponde a $\tilde{\Phi}_\pm \to \pm\tilde{\Phi}_\pm$. Os campos $\tilde{\Phi}_\pm$ são campos de sine-Gordon para todos os valores das constantes de acoplamento que satisfazem a relação

$$g^2 < \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \tag{3.74}$$

para os quais é verdade que $D < 2$, e o modelo é bem definido enquanto uma teoria perturbativa em torno do ponto invariante de escala.

3.4. Solução de Operador e Espaço de Hilbert

Agora nos encontramos em condições de reconstruir, a partir da bosonização funcional, a solução de operador para as equações de movimento quânticas. Comecemos pelos campos vetoriais (3.36), que podem ser escritos como

$$\mathcal{B}_j^\mu = \mathcal{B}^\mu + \sum_{i_D} \lambda_{jj}^{i_D} \mathcal{B}_{i_D}^\mu . \tag{3.75}$$

Da mesma forma que no caso do modelo de Thirring padrão [15], os campos vetoriais auxiliares estão relacionados com as correntes vetoriais. Efetuando os escalonamentos de campos (3.54) – (3.57) e as transformações canônicas (3.59) – (3.60), obtemos

$$\mathcal{B}^\mu = -(N-1)\mathcal{J}^\mu + \ell^\mu , \tag{3.76}$$

$$\mathcal{B}_{i_D}^\mu = \mathcal{J}_{i_D}^\mu + \ell_{i_D}^\mu , \tag{3.77}$$

onde as correntes são dadas por

$$\mathcal{J}^\mu = -\frac{\beta}{2\pi} \in^{\mu\nu} \partial_\nu \tilde{\Phi} , \tag{3.78}$$

$$\mathcal{J}_{i_D}^\mu = -\frac{\gamma}{2\pi} \in^{\mu\nu} \partial_\nu \tilde{\Phi}_{i_D} . \tag{3.79}$$

Devido à métrica oposta para os campos livres com massa nula, as correntes

$$\ell^{\mu} = \frac{1}{g}\sqrt{\frac{N-1}{N}}\partial^{\mu}\left(\eta' - \xi\right), \tag{3.80}$$

$$\ell^{\mu}_{i_D} = \frac{1}{g}\partial^{\mu}\left(\eta'_{i_D} + \xi_{i_D}\right), \tag{3.81}$$

são correntes longitudinais com norma nula

$$\left\langle 0\left|\ell^{\mu}\left(x\right)\ell^{\nu}\left(y\right)\right|0\right\rangle = 0 \quad \forall\left(x,y\right), \tag{3.82}$$

$$\left\langle 0\left|\ell^{\mu}_{i_D}\left(x\right)\ell^{\nu}_{i_D}\left(y\right)\right|0\right\rangle = 0 \quad \forall\left(x,y\right) \tag{3.83}$$

Continuando com o mesmo procedimento, os operadores de Fermi (3.39) podem ser escritos em termos de operadores de Mandelstam [24] da forma

$$\psi_j\left(x\right) = \left(\Psi\left(x\right)\prod_{i_D=1}^{N-1}\Psi_j^{i_D}\left(x\right)\right)\left(\omega\left(x\right)\prod_{i_D=1}^{N-1}\omega_j^{i_D}\left(x\right)\right), \tag{3.84}$$

onde

$$\Psi\left(x\right) = \left(\frac{\mu_0^{2d}}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} : e^{i\left(\frac{\beta}{2}\gamma^5\tilde{\Phi}(x) + \frac{2\pi}{N\beta}\int_{x^1}^{\infty}\partial_0\tilde{\Phi}\left(x^0,z^1\right)dz^1\right)} :, \tag{3.85}$$

$$\Psi_j^{i_D}\left(x\right) =: e^{i\,\lambda_{jj}^{i_D}\left(\frac{\gamma}{2}\gamma^5\tilde{\Phi}_{i_D}(x) + \frac{2\pi}{\gamma}\int_{x^1}^{\infty}\partial_0\tilde{\Phi}_{i_D}\left(x^0,z^1\right)dz^1\right)} :, \tag{3.86}$$

$$\omega(x) = \; :e^{ig\sqrt{\frac{N-1}{N}}\left(\zeta'(x) - \xi(x)\right)}:, \tag{3.87}$$

$$\omega_j^{i_D}(x) = \; :e^{i\, g\, \lambda_{jj}^{i_D}\left(\zeta'_{i_D}(x) + \xi_{i_D}(x)\right)}:. \tag{3.88}$$

Os operadores de campo (3.85) e (3.86) generalizam aquelas expressões obtidas por Halpern na Ref. [28, Eq. 5.6], para o caso da interação corrente-corrente por número bariônico quando $N = 2$.

Na formulação funcional o espaço de Hilbert de estados é construído a partir do funcional gerador

$$\mathcal{Z}\left[\theta_1,\cdots,\theta_N,\bar{\theta}_1,\cdots,\bar{\theta}_N\right] = \int\prod_{j=1}^{N}\mathcal{D}\bar{\psi}_j\mathcal{D}\psi_j e^{i\int d^2z\left\{\mathcal{L} + \sum_j\left(\bar{\theta}_j\psi_j + \bar{\psi}_j\theta_j\right)\right\}} \tag{3.89}$$

Após a bosonização obtemos

$$\mathcal{Z}\left[\theta_1,\cdots,\theta_N,\bar{\theta}_1,\cdots,\bar{\theta}_N\right] = \left\langle e^{i\int d^2x\left\{\sum_{j=1}^{N}\bar{\theta}_j\left(\Psi(x)\prod_{i_D}\Psi_j^{i_D}(z)\omega(z)\prod_{i_D}\omega_j^{i_D}(z)\right) + h.c.\right\}}\right\rangle, \tag{3.90}$$

onde a média é tomada com respeito à medida funcional

$$\boldsymbol{d\mu} = \mathcal{D}\tilde{\xi}e^{iS^{(0)}\left(\tilde{\xi}\right)}\mathcal{D}\eta' e^{iS^{(0)}(\eta')}\prod_{i_D=1}^{N-1}\mathcal{D}\tilde{\xi}_{i_D}e^{-iS^{(0)}\left(\tilde{\xi}_{i_D}\right)}\prod_{i_D=1}^{N-1}\mathcal{D}\eta_{i_D}e^{iS^{(0)}\left(\eta_{i_D}\right)}\mathcal{D}\tilde{\Phi}\prod_{i_D=1}^{N-1}\mathcal{D}\tilde{\Phi}_{i_D}e^{iS\left(\tilde{\Phi},\tilde{\Phi}_{i_D}\right)} \tag{3.91}$$

A partir do funcional gerador (3.89) obtemos as funções gerais de $2n$ pontos, como por exemplo

$$\left\langle \bar{\psi}_j(x_1)\cdots\bar{\psi}_j(x_n)\psi_j(y_1)\cdots\psi_j(x_n)\right\rangle =$$

$$\langle 0|\bar{\Psi}(x_1)\prod_{i_D}\bar{\Psi}_j^{i_D}(x_1)\cdots\bar{\Psi}(x_n)\prod_{i_D}\bar{\Psi}_j^{i_D}(x_n)\Psi(y_1)\prod_{i_D}\Psi_j^{i_D}(y_1)\cdots\Psi(y_n)\prod_{i_D}\Psi_j^{i_D}(y_n)|0\rangle \times$$

$$\langle 0|\omega^*(x_1)\prod_{i_D}\omega_j^{i_D *}(x_1)\cdots\omega^*(x_n)\prod_{i_D}\omega_j^{i_D *}(x_n)\omega(y_1)\prod_{i_D}\omega_j^{i_D}(y_1)\cdots\omega(y_n)\prod_{i_D}\omega_j^{i_D}(y_n)|0\rangle_o \tag{3.92}$$

onde a notação $\langle 0|\bullet|0\rangle$ significa que a média é tomada com respeito às teorias de sine-Gordon com acoplamento, e $\langle 0|\bullet|0\rangle_o$ significa que a média é tomada em relação às teorias livres de massa nula. Devido à quantização com métrica oposta para os campos livres com massa nula, os operadores ω e $\omega_j^{i_D}$ geram funções de Wightman constantes

$$\langle 0|\omega^*(x_1)\cdots\omega^*(x_n)\omega(y_1)\cdots\omega(y_n)|0\rangle_o = 1 \tag{3.93}$$

$$\langle 0|\omega_j^{i_D *}(x_1)\cdots\omega_j^{i_D *}(x_n)\omega^*(x_1)\omega_j^{i_D}(y_1)\cdots\omega_j^{i_D}(y_n)|0\rangle_o = 1 \tag{3.94}$$

A propriedade de decomposição de aglomerados (*cluster decomposition property*) não é violada, já que os operadores ω e $\omega_j^{i_D}$ não obedecem a regras de seleção de carga fermiônica nem de quiralidade, e se reduzem à identidade no espaço de estados de Hilbert. Seguindo a Ref. [19], os estados no espaço de Hilbert provido de norma positiva semi-definida $\mathcal{H}$ podem ser entendidos como classes equivalentes - *moduli* $\ell_\mu|0\rangle$ e $\ell_\mu^{i_D}|0\rangle$ -, de tal maneira que o espaço de Hilbert $\mathcal{H}'$ do modelo é um sub-espaço próprio de $\mathcal{H}$, dado pelo coset, ou espaço quociente,

$$\mathcal{H}' = \frac{\mathcal{H}}{h_o}, \tag{3.95}$$

onde h_o é o sub-espaço de Hilbert de norma zero gerado pelas correntes longitudinais ℓ_μ e $\ell_\mu^{i_D}$.

O campo de Fermi (3.84) satisfaz à versão quântica da equação de movimento clássica (3.5)

$$i\,\gamma^\mu \partial_\mu\ \psi_j(x) = -g^2(N-1) \vdots \mathcal{J}_\mu\ \gamma^\mu \psi_j(x) \vdots + g^2 \sum_{i_D=1}^{N-1} \lambda_{jj}^{i_D} \vdots \mathcal{J}_\mu^{i_D}\ \gamma^\mu \psi_j(x) \vdots - M\psi_j(x) \tag{3.96}$$

onde $\vdots(\bullet)\vdots$ assinala um produto normal adequadamente definido pelo limite simétrico

$$\vdots A(x)B(x)\vdots \doteq \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\left\{A(x+\varepsilon)B(x)+A(x-\varepsilon)B(x)\right\}, \tag{3.83}$$

e as correntes são dadas por

$$\mathcal{J}_\mu = -\frac{\beta}{2\pi} \in_{\mu\nu} \partial^\nu \tilde{\Phi}\,, \tag{3.97}$$

$$\mathcal{J}_\mu^{i_D} = -\frac{\gamma}{2\pi} \in_{\mu\nu} \partial^\nu \tilde{\Phi}^{i_D}\,. \tag{3.98}$$

Em (3.96), M é uma constante que pode ser infinita, finita, ou zero, dependendo da dimensão de escala do operador de massa (3.58) ser maior, igual ou menor que a unidade [7, 16]. Para $g = 0$ obtemos o valor canônico $D = 1$.

Para $g = 0$, e usando (3.69), as soluções de operador (3.84) correspondem aos operadores de sóliton de Mandelstam que descrevem N campos livres de Fermi com massa

$$\Psi_j(x) \equiv \Psi_j^{(0)} = \left(\frac{\mu_0}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} : e^{2i\sqrt{\pi}\left(\gamma^5\tilde{\Phi}_j(x) + \int_{x^1}^{\infty} \partial_0 \tilde{\Phi}_j\left(x^0, z^1\right) dz^1\right)} : \tag{3.99}$$

3.4.1 Modelo com Massa Nula

Para férmions com massa nula $(m_0 = 0)$ o modelo é uma teoria invariante de escala com dimensão de escala anômala, descrita por N campos livres com massa nula $\tilde{\Phi}, \tilde{\Phi}_{i_D}$. Para o cômputo das funções de Wightman gerais para os campos de Fermi com massa nula, vamos introduzir as variáveis de cone de luz

$$u = x^0 + x^1 \,,\, v = x^0 - x^1 . \tag{3.100}$$

Em termos dessas variáveis os campos pseudo-escalar e escalar podem ser escritos, respectivamente, como

$$\tilde{\Phi}(x) = \Phi(v) - \Phi(u), \tag{3.101}$$

$$\Phi(x) = \Phi(v) + \Phi(u), \tag{3.102}$$

com

$$\in^{\mu\nu} \partial_\nu \tilde{\Phi} = \partial^\mu \Phi . \tag{3.103}$$

Neste caso, a solução de operador (3.84) é escrita em termos dos campos da seguinte forma

$$\Psi(x) = \left(\frac{\mu^{2d}}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} : e^{i\left\{\left(\frac{2\pi}{N\beta} + \gamma^5 \frac{\beta}{2}\right)\Phi(v)\right\}} :: e^{i\left\{\left(\frac{2\pi}{N\beta} - \gamma^5 \frac{\beta}{2}\right)\Phi(u)\right\}} :, \tag{3.104}$$

$$\hat{\Psi}_j(x) =: e^{i\sum_{iD}\lambda_{jj}^{iD}\left\{\left(\frac{2\pi}{\gamma}+\gamma^5\frac{\gamma}{2}\right)\Phi_{iD}(v)\right\}} :: e^{i\sum_{iD}\lambda_{jj}^{iD}\left\{\left(\frac{2\pi}{\gamma}-\gamma^5\frac{\gamma}{2}\right)\Phi_{iD}(u)\right\}} :, \tag{3.105}$$

As funções de Wightman gerais para as mesmas componentes espinoriais são dadas por

$$\langle 0|\psi_j(x_1)\cdots\psi_j(x_n)\psi_j^*(\overline{x}_1)\cdots\psi_j^*(\overline{x}_n)|0\rangle =$$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \prod_{i<k}^{n}\left(\left[i(v_i-v_k)\right]^{d+\frac{1}{2}\gamma^5}\left[i(u_i-u_k)\right]^{d-\frac{1}{2}\gamma^5}\right)\times$$

$$\times\prod_{i<k}^{n}\left(\left[i(\overline{v}_i-\overline{v}_k)\right]^{d+\frac{1}{2}\gamma^5}\left[i(\overline{u}_i-\overline{u}_k)\right]^{d-\frac{1}{2}\gamma^5}\right)\times$$

$$\times\prod_{i,k}^{n}\left(\left[i(v_i-\overline{v}_k)\right]^{-d-\frac{1}{2}\gamma^5}\left[i(u_i-\overline{u}_k)\right]^{-d+\frac{1}{2}\gamma^5}\right), \tag{3.106}$$

onde a dimensão de escala d do campo de Fermi é dada por

$$d = \left(\frac{\beta^2}{16\pi}+\frac{\pi}{N^2\beta^2}\right)+\frac{(N-1)}{N}\left(\frac{\gamma^2}{16\pi}+\frac{\pi}{\gamma^2}\right). \tag{3.107}$$

Para $g=0$, $d=1/2$, recuperamos de (3.106) as funções de Wightman para N campos de Fermi livres com massa nula.

3.5. Descrição Mecânico-Estatística

Nesta seção consideraremos, no espaço Euclidiano bidimensional, o sistema mecânico-estatístico associado à teoria bosonizada efetiva. A função de partição é dada (por implícito, o "til" será omitido na notação) por:

$$\mathcal{Z}=\frac{1}{\mathcal{Z}_0}\int d\boldsymbol{\mu}_{\text{o}}\; e^{-m'_{\text{o}}\int d^2z\sum_{j=1}^{N}\cos\left(\beta\,\tilde{\Phi}(z)+\gamma\sum_{i_D}\lambda_{jj}^{i_D}\tilde{\Phi}_{i_D}(z)\right)}, \tag{3.108}$$

onde $d\boldsymbol{\mu}_{\text{o}}$ é a medida de probabilidade gaussiana para um campo livre

$$d\boldsymbol{\mu}_{\text{o}}=\mathcal{D}\Phi e^{-S^{(0)}(\tilde{\Phi})}\prod_{i_D=1}^{N-1}\mathcal{D}\Phi_{i_D}e^{-S_{i_D}^{(0)}(\Phi_{i_D})}, \tag{3.109}$$

os $S^{(0)}$ são as ações Euclidianas de campo livre correspondentes, $\mathcal{D}\Phi$ é a medida de Lebesgue formal e

$$\mathcal{Z}_0=\int d\boldsymbol{\mu}_{\text{o}}\,. \tag{3.110}$$

Expandindo a exponencial da ação de interação na fórmula de Gell Mann-Low (3.108) em uma série de potências da massa nua m'_0, o termo de interação pode ser tratado como uma perturbação nas teorias de campo livre correspondentes, definidas pelas ações $S^{(0)}$.

3.5.1. Função de Partição

Vamos partir da seguinte definição

$$\Xi_j(z) = \beta\tilde{\Phi}(x) + \gamma \sum_{i_D} \lambda_{jj}^{i_D} \tilde{\Phi}_{i_D}(x). \tag{3.111}$$

Seguindo o procedimento de hábito [26, 27], expandindo as exponenciais em potências de m_0' e usando a expansão multinomial, obtemos

$$\exp\left\{-m_0' \sum_{j=1}^{N} \int d^2 z \cos \Xi_j(z)\right\} = \sum_{n_j=0}^{\infty} \frac{(-m_0')^{n_j}}{n_j!} \left(\sum_{j=1}^{N} \int d^2 z \cos \Xi_j(z)\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m_o')^n}{n!} \sum_{m_1, m_2, \cdots, m_N} \frac{(n!)\,\delta_{n, m_1+m_2+\cdots+m_N}}{m_1! m_2! \cdots m_N!} \prod_{j=1}^{N} \left(\int d^2 z \cos \Xi_j(z)\right)^{m_j}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(m_o')^n}{n!} \sum_{m_1, m_2, \cdots, m_N} \frac{(n!)\,\delta_{n, m_1+m_2+\cdots+m_N}}{m_1! m_2! \cdots m_N!} \prod_{j=1}^{N} \left(\int \prod_{k_j=1}^{m_j} d^2 z_{k_j} \cos \Xi_j\left(z_{k_j}\right)\right)$$

(3.112)

onde a soma $\sum_{m_1, m_2, \cdots, m_N}$ utiliza todos os valores inteiros positivos de m_j para os quais

$$\sum_{j=1}^{N} m_j = n \tag{3.113}$$

Em termos da exponencial de Ξ_j a expansão (3.112) pode ser escrita como

$$\exp\left\{-m_0' \sum_{j=1}^{N} \int d^2 z \cos \Xi_j(z)\right\} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(m_{o}'\right)^{n}}{n!} \sum_{m_1, m_2, \cdots, m_N} \frac{(n!)\,\delta_{n, m_1+m_2+\cdots+m_N}}{m_1! m_2! \cdots m_N!} \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{1}{2^{m_j}} \sum\nolimits_{\left\{\alpha_{k_j}\right\}_{m_j}} \int \prod_{k_j=1}^{m_j} d^2 z_{k_j} e^{i \sum_{k_j=1}^{m_j} \alpha_{k_j} \Xi_j\left(z_{k_j}\right)} \right)^{m_j}$$

onde $\alpha_{k_j} = \pm 1$, e $\sum_{\left\{\alpha_{k_j}\right\}_{m_j}}$ soma sobre todas as possibilidades existentes no conjunto $\left\{\alpha_1, \cdots, \alpha_{m_j}\right\}$. Desta maneira, a função de partição resulta ser

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{\mathcal{Z}_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-m_{o}'\right)^{n}}{2^{n}\,(n!)} \sum_{m_1, m_2, \cdots, m_N} \frac{(n!)\,\delta_{n, m_1+m_2+\cdots+m_N}}{m_1! m_2! \cdots m_N!} \left(\prod_{j=1}^{N} \int \prod_{k_j=1}^{m_j} d^2 z_{k_j} \sum\nolimits_{\left\{\alpha_{k_j}\right\}_{m_j}} \right) \times$$

$$\int \mathcal{D}\Phi\, e^{-S^{(0)}(\Phi)} e^{\int d^2 z\, J(z) \Phi(z)} \int \prod_{i_D=1}^{N-1} \mathcal{D}\Phi_{i_D} e^{-S^{(0)}_{i_D}\left(\Phi_{i_D}\right)} e^{\int d^2 z_{k_j} \sum_{i_D} J^{i_D}(z) \Phi_{i_D}(z)} ,$$

(3.114)

onde

$$J(z) = i\beta \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{k_j=1}^{m_j} \alpha_{k_j} \delta^{(2)}\left(z - z_{k_j}\right) \right), \tag{3.115}$$

$$J^{i_D}(z) = i\,\gamma \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{k_j=1}^{m_j} \alpha_{k_j} \lambda_{jj}^{i_D} \delta^{(2)}\left(z - z_{k_j}\right) \right). \tag{3.116}$$

Efetuando agora a integração funcional sobre os campos $\tilde{\Phi}$ e $\tilde{\Phi}_{i_D}$, obtemos

$$\mathcal{Z}=\frac{1}{\mathcal{Z}_0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-m_0'\right)^n}{2^n\left(n!\right)}\sum_{m_1,m_2,\cdots,m_N}\frac{\left(n!\right)\delta_{n,m_1+m_2+\cdots+m_N}}{m_1!m_2!\cdots m_N!}\left(\prod_{j=1}^{N}\int\prod_{k_j=1}^{m_j}d^2z_{k_j}\sum\nolimits_{\left\{\alpha_{k_j}\right\}_{m_j}}\right)\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{\beta^2}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{j'=1}^{N}\sum_{k_j=1}^{m_j}\sum_{\bar{k}_{j'}=1}^{m_{j'}}\alpha_k\alpha_{\bar{k}_{j'}}D_0\left(z_{k_j}-z_{\bar{k}_{j'}}\right)\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{\gamma^2}{2}\sum_{i_D=1}^{N-1}\sum_{j'=1}^{N}\sum_{k_j=1}^{m_j}\sum_{\bar{k}_{j'}=1}^{m_{j'}}\alpha_k\alpha_{k_{j'}}\lambda_{jj}^{i_D}\lambda_{j'j'}^{i_D}D_0\left(z_{k_j}-z_{\bar{k}_{j'}}\right)\right\},\qquad(3.117)$$

onde

$$D_0\left(z\right)=\lim_{\mu^2\to 0}\Delta\left(z;\mu\right)=-\frac{1}{4\pi}\ln\left\{-\mu^2\left(\left|z\right|^2+\varepsilon^2\right)\right\}\qquad(3.118)$$

é a função de Green de massa nula, regularizada no ultravioleta e no infravermelho, correspondente ao operador Laplaciano bidimensional. Faremos os cálculos na presença de μ^2, passando no final ao limite $\mu^2\to 0$. As contribuições do cut-off μ^2 no infravermelho na Eq. (3.117) podem ser fatoradas, e serão dadas por

$$f\left(\mu^2\right)=\left(\mu^2\right)^{\frac{\beta^2}{8\pi}\left(\sum_{j=1}^{N}\sum_{k_j=1}^{m_j}\alpha_{k_j}\right)^2}\left(\mu^2\right)^{\frac{\gamma^2}{8\pi}\sum_{i_D=1}^{N-1}\left(\sum_{j=1}^{N}\sum_{k_j=1}^{m_j}\alpha_{k_j}\lambda_{jj}^{i_D}\right)^2}\qquad(3.119)$$

No limite $\mu^2\to 0$, as contribuições não-nulas à função de partição (3.117) são aquelas com m_j par que podem satisfazer à regra de seleção

$$\sum_{k_j=1}^{m_j}\alpha_{k_j}=0.\qquad(3.120)$$

Na Eq. (3.117), para $j = j'$ e $k_j = \overline{k}_j$, os termos dependentes de ε, que correspondem à auto-energia das cargas no gás, podem ser fatorados:

$$\prod_{j=1}^{N} \left(|\varepsilon|^2 \right)^{\frac{2m_j}{8\pi}\left(\beta^2 + \gamma^2 \frac{(N-1)}{N} \right)} = \left(|\varepsilon|^2 \right)^{\frac{2n}{8\pi}\left(\beta^2 + \gamma^2 \frac{(N-1)}{N} \right)} \tag{3.121}$$

e removidos pela renormalização da "fugacidade"

$$z = \frac{m'_{\mathrm{o}}}{2} \left(|\varepsilon|^2 \right)^{\frac{1}{8\pi}\left(\beta^2 + \gamma^2 \frac{(N-1)}{N} \right)} \tag{3.122}$$

A função de partição corresponde à expansão de um multigás, e é dada por

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{\mathcal{Z}_0} \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} \sum_{2m_1, 2m_2, \cdots, 2m_N} \frac{(n!)\,\delta_{n, 2m_1 + 2m_2 + \cdots + 2m_N}}{2m_1!\,2m_2!\cdots 2m_N!} \left(\prod_{j=1}^{N} \int \prod_{k_j=1}^{2m_j} d^2 z_{k_j} \sum\nolimits_{\left\{ \alpha_{k_j} \right\}_{2m_j}} \right) \times$$

$$\times\ \exp\left\{ \frac{1}{8\pi} \left(\beta^2 + \frac{\gamma^2 (N-1)}{N} \right) \sum_{j=1}^{N} \sum_{k_j \neq \overline{k}_j}^{2m_j} \alpha_{k_j} \alpha_{\overline{k}_j} \ln\left(\left| z_{k_j} - z_{\overline{k}_j} \right|^2 + |\varepsilon|^2 \right) \right\} \times$$

$$\times\ \exp\left\{ \frac{1}{8\pi} \left(\beta^2 - \frac{\gamma^2}{N} \right) \sum_{j \neq j'}^{N} \sum_{k_j=1}^{2m_j} \sum_{\overline{k}_{j'}=1}^{2m_{j'}} \alpha_{k_j} \alpha_{\overline{k}_{j'}} \ln\left(\left| z_{k_j} - z_{\overline{k}_{j'}} \right|^2 + |\varepsilon|^2 \right) \right\}. \tag{3.123}$$

O primeiro termo na exponencial em (3.123) corresponde à energia de interação entre as cargas no gás associadas à mesma espécie de campo de Fermi. O último termo na exponencial em (3.123) é devido à energia de interação entre as cargas no gás associadas a espécies de campo de Fermi diferentes. Para

$g=0$ $\left(\beta^2 = 4\pi/N,\ \gamma^2 = 4\pi\right)$ este último campo desaparece e a função de partição é fatorável em um produto de N funções de partição que descrevem o sistema mecânico-estatístico de N teorias de campos de Fermi independentes, livres e com massa:

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{\mathcal{Z}_0}\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} \sum_{2m_1, 2m_2, \cdots, 2m_N} \frac{(n!)\,\delta_{n,2m_1+2m_2+\cdots+2m_N}}{2m_1!2m_2!\cdots 2m_N!} \prod_{j=1}^{N} \mathcal{Z}^{(2m_j)}, \tag{3.124}$$

onde

$$\mathcal{Z}^{(2m_j)} = \int \prod_{k_j=1}^{2nm} d^2 z_{k_j} \sum_{\{\alpha_{k_j}\}_{2m_j}} \exp\left\{\frac{1}{2}\sum_{k_j \neq \bar{k}_j}^{2m_j} \alpha_{k_j}\alpha_{\bar{k}_j} \ln\left(\left|z_{k_j} - z_{\bar{k}_j}\right|^2 + |\varepsilon|^2\right)\right\}. \tag{3.125}$$

3.5.2. Equação de Estado

Seguindo o procedimento padrão [19, 26], para obtermos a equação de estado do sistema mecânico estatístico descrito pela função de partição (3.123), consideraremos o sistema confinado em um volume finito $\mathcal{V} = \pi R^2$. O limite termodinâmico será calculado ao final. Para eliminar a dependência do volume na função de partição, faremos a mudança de variáveis $z_{k_j} \to \hat{z}_{k_j} = z_{k_j}/R$. Usando a regra de seleção (3.120) e o vínculo (3.113), a função de partição (3.123) pode agora ser escrita como

$$\mathcal{Z} = \frac{1}{\mathcal{Z}_0}\sum_{n=0}^{\infty} z^{2n} \left(\frac{\mathcal{V}}{\pi}\right)^{2n\left[1-\frac{1}{8\pi}\left(\beta^2 + \gamma^2\frac{(N-1)}{N}\right)\right]} \times$$

$$\sum_{2m_1,2m_2,\cdots,2m_N} \frac{(n!)\,\delta_{n,2m_1+2m_2+\cdots+2m_N}}{2m_1!2m_2!\cdots 2m_N!}\left(\prod_{j=1}^{N}\int\prod_{k_j=1}^{2m_j} d^2 z_{k_j}\sum\nolimits_{\{\alpha_{k_j}\}_{2m_j}}\right)\times$$

$$\times\ \exp\left\{\frac{1}{8\pi}\left(\beta^2+\frac{\gamma^2(N-1)}{N}\right)\sum_{j=1}^{N}\sum_{k_j\neq\bar{k}_j}^{2m_j}\alpha_{k_j}\alpha_{\bar{k}_j}\ \ln\left(\left|\hat{z}_{k_j}-\hat{z}_{\bar{k}_j}\right|^2+|\hat{\varepsilon}|^2\right)\right\}\times$$

$$\times\ \exp\left\{\frac{1}{8\pi}\left(\beta^2+\frac{\gamma^2}{N}\right)\sum_{j\neq j'}^{N}\sum_{k_j=1}^{2m_j}\sum_{\bar{k}_{j'}=1}^{2m_{j'}}\alpha_{k_j}\alpha_{\bar{k}_{j'}}\ \ln\left(\left|\hat{z}_{k_j}-\hat{z}_{\bar{k}_{j'}}\right|^2+|\hat{\varepsilon}|^2\right)\right\}. \qquad (3.126)$$

Se definirmos o potencial

$$\Omega=-KT\ln\mathcal{Z}\,, \qquad (3.127)$$

a pressão será dada por

$$\mathcal{P}=-\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\mathcal{Z}}\right)=KT\frac{1}{\mathcal{Z}}\left(\frac{\partial\mathcal{Z}}{\partial\mathcal{V}}\right). \qquad (3.128)$$

A variação de (3.5.19) em relação ao volume conduz à seguinte equação de estado

$$\mathcal{P}\mathcal{V}=\left(1-\frac{D}{2}\right)\left\langle\mathcal{N}\right\rangle KT\,, \qquad (3.129)$$

onde D é a dimensão de escala do operador de massa (3.68) e $\left\langle\mathcal{N}\right\rangle$ é o número esperado de partículas

$$\left\langle\mathcal{N}\right\rangle=\frac{1}{\mathcal{Z}}\sum_{n=0}^{\infty}z^{2n}\left(2n\right)\left(\frac{\mathcal{V}}{\pi}\right)^{2n\left[1-\frac{1}{8\pi}\left(\beta^2+\gamma^2\frac{(N-1)}{N}\right)\right]}\times$$

$$\sum_{2m_1, 2m_2, \cdots, 2m_N} \frac{(n!)\,\delta_{n,2m_1+2m_2+\cdots+2m_N}}{2m_1!\,2m_2!\cdots 2m_N!} \left(\prod_{j=1}^{N} \int \prod_{k_j=1}^{2m_j} d^2 z_{k_j} \sum\nolimits_{\{\alpha_{k_j}\}_{2m_j}} \right) \times$$

$$\times\ \exp\left\{ \frac{1}{8\pi} \left(\beta^2 + \frac{\gamma^2 (N-1)}{N} \right) \sum_{j=1}^{N} \sum_{k_j \neq \bar{k}_j}^{2m_j} \alpha_{k_j} \alpha_{\bar{k}_j} \ln\left(\left| \hat{z}_{k_j} - \hat{z}_{\bar{k}_j} \right|^2 + |\hat{\varepsilon}|^2 \right) \right\} \times$$

$$\times\ \exp\left\{ \frac{1}{8\pi} \left(\beta^2 + \frac{\gamma^2}{N} \right) \sum_{j \neq j'}^{N} \sum_{k_j=1}^{2m_j} \sum_{\bar{k}_{j'}=1}^{2m_{j'}} \alpha_{k_j} \alpha_{\bar{k}_{j'}} \ln\left(\left| \hat{z}_{k_j} - \hat{z}_{\bar{k}_{j'}} \right|^2 + |\hat{\varepsilon}|^2 \right) \right\}. \qquad (3.130)$$

A equação de estado (3.129) mostra uma transição de fase de Kosterlitz-Thouless (K-T) [22, 27] no valor crítico

$$D_c = 2, \qquad (3.131)$$

ou seja,

$$\left(\beta^2 + \frac{\gamma^2 (N-1)}{N} \right) = 8\pi\ . \qquad (3.132)$$

A equação de estado (3.129) descreve o comportamento do sistema mecânico-estatístico definido pela função de partição (3.126), que está associada à teoria bosônica definida pela Lagrangiana (3.67). Entretanto, pode-se dizer com segurança que a Lagrangiana (3.67) somente corresponde à versão bosonizada do modelo fermiônico para operadores de massa com dimensão $D < 2$ [8], de forma que, para curtas distâncias, a perturbação de massa se torna desprezível. Na região crítica da equação de estado, a desigualdade (3.74) é violada, significando que, para curtas distâncias, o modelo principia a ser afastado do ponto fixo, e portanto não pode ser considerado como uma perturbação do modelo fermiônico de massa nula, que é invariante de escala. O sistema mecânico-estatístico associado com a teoria bosonizada efetiva que descreve o modelo fermiônico original está restrito à região

$D < 2$, e o ponto crítico para a transição de fase K-T reside fora do domínio onde o mapeamento férmion-bóson pode ser realizado[5].

Para $N = 2$ a equação de estado (3.129) se reduz àquela obtida na Ref. [19]. Para $g = 0$ a equação de estado (3.129) é dada por

$$\mathcal{P}\mathcal{V} = \frac{1}{2}\langle\mathcal{N}\rangle KT \tag{3.133}$$

e corresponde à equação de estado do gás de Coulomb padrão [27]

3.6. Simetria de Calibre Local

Consideraremos neste capítulo a QED_2 com N sabores de campos de Fermi com auto-interação quártica entre diferentes espécies de férmions, que é definida pela Lagrangiana

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4}\left(\mathcal{F}_{\mu\nu}\right)^2 + \sum_{j=1}^{N}\bar{\psi}_j(x)\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} + e\gamma^{\mu}\mathcal{G}_{\mu} - m_0\right)\psi_j(x) + \\ g^2\sum_{j<k}^{N}\left(\bar{\psi}_j(x)\gamma^{\mu}\psi_j(x)\right)\left(\bar{\psi}_k(x)\gamma_{\mu}\psi_k(x)\right) \tag{3.134}$$

onde o tensor de intensidade de campo é dado por

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_{\nu}\mathcal{G}_{\mu} - \partial_{\mu}\mathcal{G}_{\nu} \ . \tag{3.135}$$

Seguindo o mesmo procedimento usado na seção 3.3, após desacoplar a auto-interação quártica, a Lagrangiana pode ser escrita como

---

[5] A teoria de sine-Gordon padrão exibe uma transição de fase K-T para $\beta^2 = 8\pi$. A correspondência estabelecida por Coleman [44, 8] entre a teoria de sine-Gordon e o modelo de Thirring padrão vigora apenas para $\beta^2 < 8\pi$ $(\mathrm{D}<2)$.

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4}\left(\mathcal{F}_{\mu\nu}\right)^2 + \sum_{j=1}^{N} \overline{\psi}_j(x)\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} + \gamma^{\mu}\left(g^2\mathcal{B}_{\mu} + e\,\mathcal{A}_{\mu}\right) - m_0\right)\psi_j(x) + \frac{g^2}{2}\sum_{j=1}^{N}\left(\mathcal{B}_j^{\mu}\right)^2$$

$$-\frac{1}{2}\frac{g^2}{(N-1)}\left(\sum_{j=1}^{N}\mathcal{B}_j^{\mu}\right)^2 \tag{3.136}$$

Para forçarmos o desacoplamento dos campos de Fermi e dos campos vetoriais $\mathcal{A}_{\mu}$ e $\mathcal{G}_{\mu}$ na Lagrangiana efetiva, introduzimos a parametrização

$$\mathcal{B}_{+}^{j} = \frac{1}{g^2} U_j^{-1}\; i\partial_{+} U_j \tag{3.137}$$

$$\mathcal{B}_{-}^{j} = \frac{1}{g^2} V_j\; i\partial_{-} V_j^{-1}, \tag{3.138}$$

$$\mathcal{A}_{+} = \frac{1}{e} U_g^{-1}\; i\partial_{+} U_g, \tag{3.139}$$

$$\mathcal{A}_{-} = \frac{1}{e} V_g\; i\partial_{-} V_g^{-1}. \qquad (3.140).$$

(O subscrito g é usado aqui para caracterizar os campos associados com os graus de liberdade de calibre.) O desacoplamento é obtido pelas rotações fermiônicas simultâneas

$$\psi_{(1)_j} = V_j V_g\; \psi_{(1)_j}^{(0)} \tag{3.141}$$

$$\psi_{(2)_j} = U_j^{-1} U_g^{-1}\; \psi_{(2)_j}^{(0)}. \tag{3.142}$$

Definindo

$$D_{\pm}\left(\mathcal{B}^{j},\mathcal{A}\right)=\left(i\partial_{\pm}+g^{2}\mathcal{B}_{\pm}^{j}+e\mathcal{A}_{\pm}\right) \tag{3.143}$$

e introduzindo na integral funcional as $2N$ identidades

$$1=\int\mathcal{D}U_{j}\mathcal{D}U_{g}\left[\det D_{+}\left(U_{j}U_{g}\right)\right]\delta\left(g^{2}\mathcal{B}_{+}^{j}+e\mathcal{A}_{+}-U_{j}^{-1}U_{g}^{-1}\ i\partial_{+}U_{j}U_{g}\right), \tag{3.144}$$

$$1=\int\mathcal{D}V_{j}\mathcal{D}V_{g}\left[\det D_{-}\left(V_{j}V_{g}\right)\right]\delta\left(g^{2}\mathcal{B}_{-}^{j}+e\mathcal{A}_{-}-V_{j}V_{g}\ i\partial_{-}V_{j}^{-1}V_{g}^{-1}\right), \tag{3.145}$$

a troca de variáveis de $\left(\mathcal{B}_{\pm}^{j},\mathcal{A}_{\pm}\right)$ para $\left(U_{j}U_{g},V_{j}V_{g}\right)$ é realizada pela integração sobre as componentes dos campos vetoriais $\mathcal{B}_{\pm}^{j}$ e $\mathcal{A}_{\pm}$. Procedendo às rotações quirais fermiônicas (3.141) e (3.142), levando em consideração a alteração correspondente na medida de integração [15], e usando uma regularização invariante de calibre, obtemos que

$$\left(\prod_{j}\mathcal{D}\bar{\psi}_{j}\mathcal{D}\psi_{j}\right)\left(\prod_{j}\mathcal{D}\mathcal{B}_{\pm}^{j}\right)\mathcal{D}\mathcal{A}_{\pm}=\left(\prod_{j}\mathcal{D}\bar{\psi}_{j}^{(0)}\mathcal{D}\psi_{j}^{(0)}\right)\left(\prod_{j}\mathcal{D}U_{j}\mathcal{D}V_{j}\right)\mathcal{D}U_{g}\mathcal{D}V_{g}\prod_{j}\mathcal{J}_{j}\left[U_{j}V_{j}U_{g}V_{g}\right] \tag{3.146}$$

com

$$\mathcal{J}\left[U_{j}V_{j}U_{g}V_{g}\right]=e^{-i\Gamma\left[U_{j}V_{j}U_{g}V_{g}\right]}=e^{-i\Gamma\left[G_{j}G_{g}\right]} \tag{3.147}$$

onde G_{j} e G_{g} são campos invariantes de calibre definidos por

$$G_{j}=U_{j}V_{j} \tag{3.148}$$

$$G_g = U_g V_g\,. \tag{3.149}$$

Usando a decomposição (3.36) para o campo vetorial auxiliar $\mathcal{B}_\mu$, e decompondo o campo de calibre como

$$\mathcal{A}^\mu = \frac{1}{e}\left(\in^{\mu\nu}\,\partial_\nu\tilde{\phi}_g + \partial^\mu\zeta_g\right), \tag{3.150}$$

os campos de Bose $\left(U_j, V_j, U_g, V_g\right)$ são dados por

$$U_j = e^{-i\left(\tilde{\phi}_j + \zeta_j\right)} \tag{3.151}$$

$$V_j = e^{-i\left(\tilde{\phi}_j - \zeta_j\right)} \tag{3.152}$$

$$U_j = e^{-i\left(\tilde{\phi}_j + \zeta_j\right)} \tag{3.153}$$

$$U_j = e^{-i\left(\tilde{\phi}_j + \zeta_j\right)}. \tag{3.154}$$

A Lagrangiana de Maxwell é dada por

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{8e^2}\left\{\partial_+\left(G_g\ i\partial_- G_g^{-1}\right)\right\}^2 = \frac{1}{2e^2}\left(\Box\tilde{\phi}_g\right)^2. \tag{3.155}$$

Usando a decomposição (3.47) – (3.49), a Lagrangiana efetiva bosonizada pode ser escrita como

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\left(\partial_{\mu}\tilde{\varphi}\right)^{2}+\frac{1}{2}\sum_{i_D}\left(\partial_{\mu}\tilde{\varphi}_{i_D}\right)^{2}+\frac{\pi}{2Ne^{2}}\left(\Box\tilde{\phi}'_{g}\right)^{2}+\frac{1}{2}\left(\partial_{\mu}\tilde{\phi}'\right)^{2}+\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\tilde{\phi}'\Box\tilde{\phi}'_{g}-$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i_D}\left(\partial_{\mu}\tilde{\phi}'_{i_D}\right)^{2}-\frac{1}{2}\left(\partial_{\mu}\zeta'\right)^{2}+\frac{1}{2}\sum_{i_D}\left(\partial_{\mu}\zeta'_{i_D}\right)^{2}-$$

$$-m'_{0}\sum_{j=1}^{N}\cos\left\{2\sqrt{\frac{\pi}{N}}\tilde{\varphi}+2\sqrt{\frac{\pi}{N}}\tilde{\phi}'_{g}+\frac{2}{\sqrt{N}}\frac{g\sqrt{(N-1)}}{\sqrt{1-\frac{g^{2}(N-1)}{\pi}}}\tilde{\phi}'+\sum_{i_D=1}^{N-1}\lambda_{jj}^{i_D}\left(2\sqrt{\pi}\tilde{\varphi}_{i_D}+2\frac{g}{\sqrt{1+\frac{g^{2}}{\pi}}}\varphi'_{i_D}\right)\right\},$$

(3.156)

onde

$$\alpha^{2}=\frac{g^{2}\left(N-1\right)}{1-\frac{g^{2}(N-1)}{\pi}}, \tag{3.157}$$

os campos $\tilde{\phi}'$, $\tilde{\phi}'_{i_D}$, ζ' e ζ'_{i_D} são definidos por (3.54) – (3.57), e

$$\tilde{\phi}'_{g}=\sqrt{\frac{N}{\pi}}\tilde{\phi}_{g}. \tag{3.158}$$

O campo ζ_{g} é uma excitação pura de calibre, e não aparece na Lagrangiana invariante de calibre bosonizada. Vamos considerar o seguinte termo na Lagrangiana (3.156)

$$\mathcal{L}\left(\tilde{\phi}'_{g},\tilde{\phi}\right)=\frac{\pi}{2Ne^{2}}\left(\Box\tilde{\phi}'_{g}\right)^{2}-\frac{1}{2}\left(\partial_{\mu}\tilde{\phi}'_{g}\right)^{2}+\frac{1}{2}\left(\partial_{\mu}\tilde{\phi}'\right)^{2}+\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\tilde{\phi}'\Box\tilde{\phi}'_{g}. \tag{3.159}$$

Os campos $\tilde{\phi}'$ e $\tilde{\phi}'_{g}$ podem ser desacoplados pela introdução do novo campo

$$\tilde{\vartheta}=\tilde{\phi}'-\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\tilde{\phi}'_{g}, \tag{3.160}$$

e obtemos

$$\mathcal{L}\left(\tilde{\phi}'_g, \tilde{\phi}'\right) = \mathcal{L}\left(\tilde{\vartheta}, \tilde{\phi}''_g\right) = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \tilde{\vartheta}\right)^2 + \frac{1}{2m_*^2}\left(\Box \tilde{\phi}''_g\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \tilde{\phi}''_g\right)^2, \tag{3.161}$$

onde definimos

$$\tilde{\phi}''_g = \left(1 - \frac{g^2\left(N-1\right)}{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} \tilde{\phi}'_g, \tag{3.162}$$

e o parâmetro de massa m_* é dado por

$$m_*^2 = \left(\frac{e^2 N}{\pi}\right)\left(1 - \frac{g^2\left(N-1\right)}{\pi}\right)^{-1}. \tag{3.163}$$

Para $g^2 = 0$ obtemos a massa do campo de calibre da QED_2 com N campos de Fermi [23].

Com a finalidade de eliminar a relação quártica na Lagrangiana para o campo $\tilde{\phi}''_g$ em (3.161), consideraremos as seguintes identidades entre integrais funcionais

$$\int \mathcal{D}\tilde{\phi}''_g \exp\left(i\int d^2 z \left\{\frac{1}{2m_*^2}\left(\Box\tilde{\phi}''_g\right)^2 + \tilde{\phi}''_g \Box \tilde{\phi}''_g\right\}\right) = \tag{3.164}$$

$$\int \mathcal{D}\tilde{\Xi}\; \mathcal{D}\tilde{\phi}''_g \exp\left(i\int d^2 z \left\{-\frac{1}{2}\tilde{\Xi}^2 + \frac{1}{m_*}\left(\Box\, \tilde{\Xi}\right)\tilde{\phi}''_g + \frac{1}{2}\tilde{\phi}''_g \Box \tilde{\phi}''_g\right\}\right) = \tag{3.165}$$

$$\int \mathcal{D}\tilde{\Sigma}\ \mathcal{D}\tilde{\phi}_g''\exp\left(i\int d^2z\left\{-\ \frac{1}{2}m_*{}^2\tilde{\Sigma}^2\ +\ \left(\Box\ \tilde{\Sigma}\right)\tilde{\phi}_g''\ +\ \frac{1}{2}\tilde{\phi}_g''\Box\tilde{\phi}_g''\right\}\right)= \tag{3.166}$$

$$\int \mathcal{D}\tilde{\Sigma}\ \mathcal{D}\tilde{\eta}\ \exp\left(i\int d^2z\left\{\frac{1}{2}\tilde{\eta}\Box\tilde{\eta}\ -\ \frac{1}{2}\left(\tilde{\Sigma}\Box\tilde{\Sigma}\ +\ m_*{}^2\tilde{\Sigma}^2\right)\right\}\right), \tag{3.167}$$

onde, para passarmos de (3.166) para (3.167) definimos o campo

$$\tilde{\Sigma}=\frac{1}{m_*}\ \tilde{\Xi}\,, \tag{3.168}$$

e para irmos de (3.166) para (3.167), o desacoplamento dos campos $\tilde{\Sigma}$ e $\tilde{\phi}_g''$ é obtido pela definição do novo campo

$$\tilde{\eta}=\tilde{\phi}_g''-\tilde{\Sigma}\,. \tag{3.169}$$

A Lagrangiana bosonizada será então escrita como

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}=&\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\tilde{\varphi}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\tilde{\vartheta}\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{i_D}\left(\partial_\mu\tilde{\phi}_{i_D}'\right)^2-\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\zeta'\right)^2+\frac{1}{2}\sum_{i_D}\left(\partial_\mu\zeta_{i_D}'\right)^2\\
&-\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\tilde{\eta}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\tilde{\Sigma}\right)^2-\frac{1}{2}m_*^2\tilde{\Sigma}^2\\
&-m_0'\sum_{j=1}^{N}\cos\left\{2\sqrt{\frac{\pi}{N}}\tilde{\varphi}+2\frac{\alpha}{\sqrt{N}}\tilde{\vartheta}+\frac{1}{\sqrt{N}}\sqrt{\frac{4\pi}{1-\frac{g^2(N-1)}{\pi}}}\left(\tilde{\Sigma}+\tilde{\eta}\right)+\sum_{i_D=1}^{N-1}\lambda_{jj}^{i_D}\left(2\sqrt{\pi}\tilde{\varphi}_{i_D}+2\frac{g}{\sqrt{1+\frac{g^2}{\pi}}}\tilde{\phi}_{i_D}'\right)\right\}
\end{aligned} \tag{3.170}$$

Para obter a teoria bosonizada em termos dos graus de liberdade bosônicos reais, vamos empregar agora as transformações canônicas

$$\mathcal{B}\tilde{\Phi} = 2\sqrt{\frac{\pi}{N}}\tilde{\varphi} + 2\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\tilde{\vartheta}\,, \tag{3.171}$$

$$\mathcal{B}\tilde{\xi} = 2\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\tilde{\varphi} - 2\sqrt{\frac{\pi}{N}}\tilde{\vartheta}\,, \tag{3.172}$$

com

$$\beta^2 = \frac{4\pi}{N}\left(\frac{1}{1-\frac{g^2}{\pi}(N-1)}\right), \tag{3.173}$$

e

$$\gamma\;\tilde{\Phi}_{i_D} = 2\sqrt{\pi}\tilde{\varphi}_{i_D} + 2\frac{g}{\sqrt{1+\frac{g^2}{\pi}}}\tilde{\phi}'_{i_D}\,, \tag{3.174}$$

$$\gamma\;\tilde{\xi}_{i_D} = 2\frac{g}{\sqrt{1+\frac{g^2}{\pi}}}\tilde{\varphi}'_{i_D} + 2\sqrt{\pi}\tilde{\phi}'_{i_D} +\,, \tag{3.175}$$

com

$$\gamma^2 = \frac{4\pi}{1+\frac{g^2}{\pi}}\,. \tag{3.176}$$

A Lagrangiana efetiva bosonizada será então dada finalmente por

$$\mathcal{L}_{ef} = \delta\mathcal{L}_{o} + \hat{\mathcal{L}}, \tag{3.177}$$

onde

$$\delta\mathcal{L}_{o} = -\frac{1}{2}\left(\partial_{\mu}\zeta'\right)^{2} + \frac{1}{2}\left(\partial_{\mu}\tilde{\xi}\right)^{2} + \frac{1}{2}\sum_{i_D=1}^{N-1}\left(\partial_{\mu}\zeta_{i_D}\right)^{2} - \frac{1}{2}\sum_{i_D=1}^{N-1}\left(\partial_{\mu}\tilde{\xi}_{i_D}\right)^{2}, \tag{3.178}$$

e

$$\hat{\mathcal{L}} = -\frac{1}{2}\left(\partial_{\mu}\tilde{\eta}\right)^{2} + \frac{1}{2}\left(\partial_{\mu}\tilde{\Phi}\right)^{2} + \frac{1}{2}\sum_{i_D=1}^{N-1}\left(\partial_{\mu}\tilde{\Phi}_{i_D}\right)^{2} + \frac{1}{2}\left(\partial_{\mu}\tilde{\Sigma}\right)^{2} - \frac{1}{2}m_{*}^{2}\tilde{\Sigma}^{2}$$

$$-m'_{0}\sum_{j=1}^{N}\cos\left(\beta\,\tilde{\Sigma} + \beta\left(\tilde{\Phi} + \tilde{\eta}\right) + \gamma\sum_{i_D=1}^{N-1}\lambda_{jj}^{i_D}\tilde{\Phi}_{i_D}\right). \tag{3.179}$$

3.6.1. Solução de Operador, Álgebra de Campo Invariante de Calibre e Espaço de Hilbert

Seguindo o mesmo procedimento observado na seção 3.4, o campo vetorial auxiliar $\mathcal{B}_{j}^{\mu}$ (3.36) e o campo de calibre $\mathcal{A}_{\mu}$ (3.150) podem ser escritos como

$$\mathcal{B}_{j}^{\mu} = \left(N-1\right)\frac{\beta}{2\pi}\in^{\mu\nu}\partial_{\nu}\tilde{\Sigma} + \frac{\gamma}{2\pi}\sum_{i_D}\lambda_{jj}^{i_D}\in^{\mu\nu}\partial_{\nu}\tilde{\Phi}_{i_D} + L^{\mu} + \ell^{\mu} + \sum_{i_D}\ell_{j}^{i_D\mu}\ , \tag{3.180}$$

$$\mathcal{A}_{\mu} = \frac{1}{m_{*}}\in_{\mu\nu}\partial^{\nu}\left(\tilde{\Sigma} + \tilde{\eta}\right), \tag{3.181}$$

onde as correntes longitudinais de norma zero são

$$L_\mu = (N-1)\frac{\beta}{2\pi} \in_{\mu\nu} \partial^\nu \left(\tilde{\eta} + \tilde{\Phi}\right), \tag{3.182}$$

$$\ell_\mu = \frac{1}{g}\sqrt{\frac{N-1}{N}}\partial_\mu \left(\xi + \zeta'\right), \tag{3.183}$$

$$\ell_{\mu j}^{i_D} = \frac{1}{g}\lambda_{jj}^{i_D}\partial_\mu \left(\xi_{i_D} + \zeta'_{i_D}\right). \tag{3.184}$$

O operador de Fermi é dado por

$$\psi_j =: e^{i\gamma^5 \frac{\beta}{2}\left(\tilde{\Sigma}+\tilde{\eta}\right)} : \left(\Psi(x)\prod_{i_D=1}^{N-1}\Psi_j^{i_D}(x)\right)\left(\omega(x)\prod_{i_D=1}^{N-1}\omega_j^{i_D}(x)\right). \tag{3.185}$$

O espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, não-invariante de calibre e com métrica indefinida, contém estados de norma zero gerados pelas correntes ℓ_μ, $\ell_{\mu j}^{i_D}$ e L_μ. O subespaço de Hilbert $\mathcal{H}''$, com norma positiva, é o espaço quociente

$$\mathcal{H}'' = \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}_0}, \tag{3.186}$$

onde $\mathcal{H}_0$ é o subespaço com norma zero gerado pelas correntes ℓ_μ, $\ell_{\mu j}^{i_D}$ e L_μ.

A sub-álgebra de campos invariante de calibre é gerada pelo conjunto de operadores locais $\left\{\mathcal{B}_j^\mu = \mathcal{J}_j^\mu,\ \mathcal{F}_{\mu\nu}\right\}$ e pelos operadores bilocais definidos formalmente como

$$D_j(x,y) \sim \psi_j^\dagger(x) e^{-ie\int_x^y \mathcal{A}_\mu dz^\mu} \psi_j(y). \tag{3.187}$$

Usando a independência de escolha do caminho de integração (a menos de uma fase representada por um *c-number*) para a exponencial [45, 8, 23], os operadores bilocais são dados (a menos de um fator constante de normalização) por:

$$D_j\left(x,y\right)=:e^{i\left\{\frac{\beta}{2}\left(\gamma_y^5\,\tilde{\Sigma}(y)-\gamma_x^5\,\tilde{\Sigma}(x)\right)-\frac{2\pi}{N\beta}\int_x^y\epsilon_{\mu\nu}\partial^\nu\tilde{\Sigma}(z)dz^\mu\right\}}:\times$$

$$\left(\prod_{i_D=1}^{N-1}:\Psi_j^{i_D^{\,*}}\left(x\right)\Psi_j^{i_D}\left(y\right):\right)\sigma^*\left(x\right)\sigma\left(y\right), \tag{3.188}$$

onde

$$\sigma\left(x\right)=:e^{i\left\{\gamma^5\frac{\beta}{2}\left(\tilde{\Phi}(x)+\tilde{\eta}(x)\right)+\frac{2\pi}{N\beta}\int_x^\infty\epsilon^{\mu\nu}\partial^\nu\left(\tilde{\Phi}(z)+\tilde{\eta}(z)\right)dz^\mu\right\}}:. \tag{3.189}$$

O operador (3.189) é a generalização dos "operadores unitários constantes" obtidos por Lowenstein e Swieca [6] para a QED_2 . Assim como na QED_2 padrão [6, 23], a decomposição de aglomerados (*cluster decomposition*) é violada, uma vez que o operador $\sigma_{(\alpha)}$ ($\alpha=1,2$ refere-se ao índice do spinor) gera uma quantidade infinita de vácuos dotados com a carga e a quiralidade do campo fermiônico de Thirring Ψ (3.85),

$$\sigma_{(1)}^{n_1}\sigma_{(2)}^{n_2}\left|0\right\rangle=\left|n_1,n_2\right\rangle. \tag{3.190}$$

A decomposição de aglomerados é restaurada se introduzimos uma superposição coerente [6]

$$\left|\theta_1,\theta_2\right\rangle=\sum_{n_1,n_2=0}^{\infty}e^{-i\,n_1\theta_1}e^{-i\,n_2\theta_2}\left|n_1,n_2\right\rangle, \tag{3.191}$$

de forma tal que

$$\sigma_{(\alpha)}\left|\theta_1,\theta_2\right\rangle = e^{i\theta_\alpha}\left|\theta_1,\theta_2\right\rangle . \tag{3.192}$$

Em cada um dos setores irredutíveis teremos

$$\sigma_{(1)}^{*}\sigma_{(2)} = e^{-i(\theta_2-\theta_1)} , \tag{3.193}$$

e a álgebra de campos é isomorfa à álgebra dos campos de sine-Gordon $\tilde{\Sigma}$ e $\tilde{\Phi}_{i_D}$. Dentro da abordagem funcional, o gerador funcional das funções de Wightman invariantes de calibre é dado em termos da teoria bosonizada definida pela Lagrangiana $(\theta = \theta_2 - \theta_1)$:

$$\mathcal{L}_{ef} = \frac{1}{2}\sum_{i_D=1}^{N-1}\left(\partial_\mu\tilde{\Phi}_{i_D}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\tilde{\Sigma}\right)^2 - \frac{1}{2}m_*^2\tilde{\Sigma}^2 - m_o'\sum_{j=1}^{N}\cos\left(\beta\tilde{\Sigma} + \gamma\sum_{i_D=1}^{N-1}\lambda_{jj}^{i_D}\tilde{\Phi}_{i_D} + \theta\right). \tag{3.194}$$

Para $g^2 = 0$ obtemos de (3.194) a Lagrangiana bosonizada da QED_2 com N campos de Fermi com sabor, já discutida nas Refs. [23, 16]

3.7. Observações Conclusivas sobre o Capítulo 3

Com o emprego da redução Abeliana da teoria WZW, foi analisada aqui a bosonização funcional do modelo bidimensional de férmions com interação de Thirring entre espécies, ou sabores, diferentes. Da mesma forma que na abordagem de operadores desenvolvida na Ref [28], na presente abordagem funcional só necessitamos conhecer as correspondências férmion-bóson para campos livres, para que se proceda a bosonização da teoria de interação. O uso de campos vetoriais auxiliares introduz graus de liberdade bosônicos redundantes que não são campos intrínsecos que descrevam o conteúdo físico do modelo. O modelo bosonizado resultante está definido em um espaço de Hilbert de métrica positiva, e corresponde a N campos de sine-Gordon acoplados $\left\{\tilde{\Phi}, \tilde{\Phi}_{i_D}\right\}$. A solução de operador para as equações de movimento quânticas é construída através da abordagem funcional, e é dada em termos de operadores de sóliton de Mandelstam generalizados. As correspondências férmion-bóson obtidas por Halpern [28] para a interação corrente-corrente com simetria $U(1)$ são generalizadas para o caso da interação de Thirring entre espécies diferentes de férmions. Chegou-se à descrição mecânico-estatística da teoria bosonizada efetiva através da obtenção da função de partição correspondente e respectiva equação de estado. Foi discutida a extensão do modelo para uma simetria de calibre local, apresentando-se naturalmente aí o mecanismo de blindagem de carga (*charge screening*), com simetria $U(1)$, próprio ao campo de Thirring, como generalização dos resultados apresentados nas Refs. [19, 16, 23]

Dentro da presente abordagem funcional, necessita-se somente saber, para reconstruir a solução de operador para as equações de movimento quânticas, as correspondências férmion-bóson para campos livres.

Para concluir este capítulo, é importante apresentar algumas ressalvas relacionadas aos problemas de regularização e fatoração da função de partição. Na Ref. [17] foi discutida, dentro do formalismo funcional, a estrutura bosônica do modelo com interação entre duas $(N=2)$ espécies diferentes de campos de férmions com massa. Nessa mesma Ref. [17] foi obtida a função de partição específica, e a conclusão principal foi que "para um valor específico da constante de acoplamento $\left(g^2 = 2\pi/3,\ \beta_- = 0\right)$, um dos campos de bóson ($\tilde{\Phi}_-$ em nossa notação) torna-se um campo livre com métrica negativa (um campo fantasma – *ghost field*), ao passo que o outro $\left(\tilde{\Phi}_+\right)$ é um campo de sine-Gordon, e o modelo se revela equivalente ao modelo de sine-Gordon usual., com um único campo de bóson. A "equivalência", tal como proposta na Ref. [17], foi estabelecida entre as funções de partição, e não entre os funcionais geradores, e portanto não é conclusiva sobre o isomorfismo entre os correspondentes espaços de estados de Hilbert. Campos escalares livres e com massa nula resultam desacoplados na função de partição, mas o mesmo desacoplamento não ocorre no funcional gerador. Do ponto de vista aqui adotado, esta "equivalência" é uma conclusão errônea, conseqüência apenas da fatoração da função de partição e do descarte do campo livre com massa nula ζ_j (é o campo χ_j na notação da Ref. [17]), e não pode ser considerada como uma propriedade intrínseca do modelo no caso em que $N = 2$. O uso de uma prescrição de regularização que quebra a invariância de calibre local da porção fermiônica da Lagrangiana efetiva (3.21) conduz ao surgimento de uma constante de acoplamento efetiva que depende do parâmetro de regularização. Neste caso, o modelo apresenta regiões "física" e "fantasma" distintas. Na Ref. [19], a estrutura bosônica do modelo com $N = 2$ foi analisada usando-se um parâmetro de regularização arbitrário $\boldsymbol{a}$, o qual está relacionado ao parâmetro de regularização $\boldsymbol{b}$ empregado na Eq. (3.31) pela condição

$$\frac{\boldsymbol{a}}{2\pi} = \frac{1}{4\pi} - \frac{\boldsymbol{b}}{g^2}. \qquad (3.195)$$

O modelo mostra intervalos de validade distintos para a relação entre a constante de acoplamento g^2 e o parâmetro de regularização $\boldsymbol{a}$. Na Ref. [19] o modelo foi considerado para $0 \le \boldsymbol{a} < 1$ e no intervalo

$$0 \le g^2 < \frac{\pi}{1-\boldsymbol{a}}, \quad \frac{g^2\boldsymbol{a}}{\pi} < 1. \quad (3.196)$$

Este intervalo, que inclui a teoria livre como limite, é físico: o modelo não contém campos de sine-Gordon fantasmas. Os dois campos de Bose físicos $\tilde{\Phi}_\pm$ possuem métrica de quantização positiva e a unitariedade não é destruída. O valor $\boldsymbol{a} = 0$ $\left(b = g^2/4\pi\right)$ corresponde a uma regularização que preserva a invariância de calibre local da porção fermiônica da Lagrangiana efetiva (3.21)[6] .

[6] Neste caso os intervalos em que ocorrem fantasmas são $g^2\boldsymbol{a} > 2\pi$ e $g^2 > 2\pi/(1-\boldsymbol{a})$ [19].

Para discutir agora a conclusão da Ref. [17], vamos considerar a bosonização do modelo com um parâmetro de regularização $\boldsymbol{a} < 1$. Neste caso a Lagrangiana bosonizada correspondente a (3.52) é dada por $\left(\tilde{\phi} \equiv \tilde{\phi}_+,\ \tilde{\phi}_{1_D} \equiv \tilde{\phi}_-,\ \text{etc.}\right)$:

$$\mathcal{L}_{ef} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \tilde{\varphi}_+\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \tilde{\varphi}_-\right)^2 + \frac{1}{2g^2}\left(1 + \frac{g^2}{\pi}(\boldsymbol{a}-1)\right)\left(\partial_\mu \tilde{\phi}_+\right)^2 - \frac{1}{2g^2}\left(1 - \frac{g^2}{\pi}(\boldsymbol{a}-1)\right)\left(\partial_\mu \tilde{\phi}_-\right)^2$$

$$-\frac{1}{2g^2}\left(1 - \frac{g^2}{\pi}\boldsymbol{a}\right)\left(\partial_\mu \zeta_+\right)^2 + \frac{1}{2g^2}\left(1 + \frac{g^2}{\pi}\boldsymbol{a}\right)\left(\partial_\mu \zeta_-\right)^2$$

$$-m_o' \cos\left(\sqrt{2\pi}\tilde{\varphi}_+ + \sqrt{2}\tilde{\phi}_+\right)\cos\left(\sqrt{2\pi}\tilde{\varphi}_- + \sqrt{2}\tilde{\phi}_-\right). \qquad (3.197)$$

Vamos agora considerar a região na qual

$$g^2 < \frac{\pi}{(\boldsymbol{a}-1)},\quad \frac{g^2\boldsymbol{a}}{\pi} < 1. \qquad (3.198)$$

A condição (3.198) assegura que nesta região as métricas para os campos $\tilde{\phi}_-$ e ζ_+ estão fixadas. Após realizarmos os escalonamentos de campos e as transformações canônicas, de forma similar a (3.59)-(3.63), os parâmetros de sine-Gordon $\beta_\pm$ serão dados por

$$\beta_\pm^2 = \frac{2\pi^2 \pm 2\pi g^2 \boldsymbol{a}}{\pi \pm g^2(\boldsymbol{a}-1)}. \qquad (3.199)$$

Os parâmetros de sine-Gordon usados na Ref. [17] são obtidos de (3.199) fazendo-se $g^2 \to g^2/2$ e tomando-se o parâmetro de regularização $\boldsymbol{a} = 3$. O valor $g^2\boldsymbol{a} = \pi$, para o qual, numa conclusão superficial e ingênua, $\beta_- = 0$, tornando portanto o campo $\tilde{\Phi}_-$ em um "provável" campo livre (como está proposto na Ref. [17] na análise com base na função de partição), viola a condição (3.192), e o campo ζ_+ em (3.197) não é mais um grau de liberdade dinâmico. Em outras palavras, se se considera a princípio que $g^2\boldsymbol{a} = \pi$, a álgebra de campos de Bose é desvirtuada, e o mapeamento férmion-bóson perde o sentido. Neste caso, os campos livres com massa nula ζ_- e ξ_+ contribuem para as funções de Wightman fermiônicas. O operador de massa é dado agora por

$$m'_o \cos\beta_+\tilde{\Phi}_+ \cos 2\sqrt{\pi}\left(\tilde{\varphi}_- + \tilde{\phi}'_-\right). \quad (3.200)$$

Devido à métrica de quantização oposta dos campos $\tilde{\varphi}_-$ e $\tilde{\phi}'_-$, a combinação de campos $\left(\tilde{\varphi}_- + \tilde{\phi}'_-\right)$ é um campo de norma zero. O espaço de Hilbert resultante contém novas contribuições, oriundas da álgebra redundante de campos de Bose livres e com massa nula, as quais não estão presentes no modelo fermiônico original. Isto também pode ser confirmado facilmente no modelo de férmions com massa nula para o qual as funções de Wightman exatas podem ser calculadas. Para $g^2\boldsymbol{a} = \pi$, a dimensão de escala do operador de massa é dada por

$$D = \frac{\beta_+^2}{4\pi} = \frac{\boldsymbol{a}}{\left(2\boldsymbol{a}-1\right)}. \quad (3.201)$$

Os valores de $\boldsymbol{a}$ para os quais $D < 2$ situam-se em $\boldsymbol{a} < 2/3$, e, portanto, ocorrem fora do intervalo considerado $\boldsymbol{a} > 1$ [7].

[7] O mesmo problema ocorre na bosonização do modelo de Thirring com massa padrão, quando se usa um parâmetro de regularização arbitrário [15]. A escolha de uma regularização de calibre não-invariante implica uma redefinição do parâmetro β da teoria de sine-Gordon, e, por conseqüência, da região de valores para a constante de acoplamento que apresente significado físico. Usando um parâmetro de regularização arbitrário $\boldsymbol{a} > 1$, como o definido pela Eq. (3.195), a Lagrangiana bosonizada é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g^2}\left(1 - \frac{\boldsymbol{a}g^2}{\pi}\right)\left(\partial_\mu\zeta\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\tilde{\varphi}\right)^2 - \frac{1}{2g^2}\left(1 - \frac{g^2}{\pi}\left(\boldsymbol{a}-1\right)\right)\left(\partial_\mu\tilde{\phi}\right)^2 - m'_o\cos\left(2\sqrt{\pi}\tilde{\varphi} + 2\tilde{\phi}\right).$$

Para $g^2\boldsymbol{a} < \pi$ e $g^2\left(\boldsymbol{a}-1\right) < \pi$, o parâmetro de sine-Gordon é dado por

$$\beta^2 = \frac{4\pi\left(\pi - g^2\boldsymbol{a}\right)}{\pi - g^2\left(1-\boldsymbol{a}\right)}.$$

Conclui-se então que, para alcançar os objetivos de exercer controle sobre o efeito dos campos de Bose redundantes, introduzidos quando se utilizam campos vetoriais auxiliares, e de obter o mapeamento férmion-bóson no espaço de estados de Hilbert, a bosonização funcional deve sempre ser realizada sobre o funcional gerador correspondente ao modelo, e não sobre a função de partição do sistema mecânico-estatístico associado ao mesmo. Embora, e mesmo que os campos de Bose com massa nula não gerem contribuições físicas para as funções de Wightman, o método mais apropriado para tratar o problema é o de proceder à bosonização funcional do funcional gerador da teoria, a partir do qual é construído o espaço de Hilbert do modelo, sem desconsiderar, ao longo dos passos intermediários, o papel desempenhado pelos campos de Bose com massa nula "desacoplados".

A mesma conclusão errônea pode resultar quando se considera o valor $g^2\boldsymbol{a} = \pi$, o qual viola a condição (3.196), e para o qual $\beta = 0$. Considerando de início que $g^2\boldsymbol{a} = \pi$, o campo ζ não é um grau de liberdade dinâmico, e a Lagrangiana é dada por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\tilde{\varphi}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\tilde{\phi}\right)^2 - m_0' \cos 2\sqrt{\pi}\left(\tilde{\varphi} + \tilde{\phi}\right),$$

para a qual a dimensão de escala do operador de massa é $D = 0$, devido à métrica oposta para $\tilde{\varphi}$ e $\tilde{\phi}$.

4. Revisão de alguns Modelos de Acoplamento Derivativo (DC)

Dentre os modelos bidimensionais em TQC, aqueles que apresentam em sua densidade Lagrangiana clássica acoplamentos entre correntes fermiônicas vetoriais ou axiais e derivadas de campos escalares ou pseudo-escalares - também chamados de acoplamentos derivativos (*derivative couplings*) - têm sido analisados de forma incompleta na literatura. Em particular, as equivalências entre alguns modelos conhecidos foram conjeturadas, ou mostradas de forma fraca, sem que houvesse uma clara delimitação de sua validade através das correspondências entre os espaços de estados pertinentes a cada modelo. Significativamente, vem sendo há alguns anos suposta, mostrada de forma fraca e amplamente difundida uma equivalência entre o modelo de Thirring e o modelo de Rothe-Stamatescu, exposto pelos autores pela primeira vez em 1975.

Utilizando-se a técnica de bosonização, entre outras, busca-se apresentar na Seção 4.1. uma clarificação definitiva do teor dessa equivalência entre ambos os modelos, e se mostra de forma compacta a natureza da interação quártica de Thirring subjacente às interações resultantes dos acoplamentos derivativos. A título de confirmação dos resultados, recuperam-se as densidades Lagrangianas a partir das soluções de operadores, usando-se as expansões dos produtos de operadores (OPE) em curta distância, segundo Kenneth Wilson, para construir os operadores compostos bosonizados que compõem a densidade Hamiltoniana quântica e obter assim as variáveis canônicas correspondentes.

Para desenvolver na Seção 4.1. uma demonstração de "como" e de "quanto" a interação de Thirring está presente e oculta no modelo DC, será empregado o seguinte roteiro:

- Considera-se a princípio o modelo bidimensional de um campo pseudo-escalar de massa nula que interage, via DC, com um campo de Fermi com massa. Este modelo, adiante referido como MRS, corresponde à modificação do modelo RS, no limite de massa zero para o campo de Bose, de forma a incluir um termo de massa para o campo de Fermi;

- Analisando-se o modelo MRS através do formalismo de operadores, mostra-se que o mesmo é equivalente ao modelo de Thirring com uma interação adicional entre a corrente vetorial e a derivada do campo escalar. A esta extensão do modelo de Thirring será dada a designação de modelo de Schroer-Thirring (ST);
- A solução de operador para as equações de movimento quânticas é dada em termos do operador de Mandelstam para o campo de Fermi do modelo de Thirring, quando este interage, via DC, com um campo escalar.

Na Seção final 4.2. é dado um passo adiante, no sentido de que o modelo estudado através do formalismo de operadores será aquele correspondente à interação entre um campo de Fermi com massa e dois campos de Bose, sendo um deles escalar e o outro pseudo-escalar. Será visto que este modelo apresenta três graus de liberdade, relacionados com dois campos de massa nula, um escalar, e outro pseudo-escalar, e o campo de Thirring, de forma que, introduzindo-se métricas opostas de quantização para os dois campos de Bose, podemos em princípio extrair a seguinte conclusão: o fenômeno que está subjacente à equivalência fraca entre o modelo de Thirring e o setor fermiônico do modelo DC com dois acoplamentos é a propriedade, intrínseca ao modelo MRS, de ser equivalente ao caso particular do modelo ST em que os parâmetros do acoplamento de Thirring e do acoplamento derivativo têm ambos o mesmo valor.

O roteiro de apresentação da Seção 4.2. terá os seguintes passos:

- Usando-se o formalismo de operadores, será revisado o modelo bidimensional que descreve a interação entre um campo de Fermi com massa e dois campos de Bose de massa nula, um escalar e o outro pseudo-escalar, via acoplamentos derivativos.
- O operador de campo de Fermi será escrito em termos do operador de sóliton de Mandelstam, após uma transformação canônica na álgebra de campo de Bose;
- O modelo de acoplamento derivativo (DC) é mapeado então sobre o modelo de Thirring com massa e com duas interações entre a corrente vetorial e as derivadas dos escalares (modelo de Schroer-Thirring (ST));

- O modelo DC no caso do férmion de massa nula pode ser mapeado sobre o modelo RS com massa nula, quando se acrescenta a este uma interação de Thirring (modelo de Rothe-Stamatescu-Thirring com massa nula).;
- Finalmente, é mostrada de forma sucinta e clara a equivalência fraca – no sentido de que somente se revela para uma determinada relação entre os parâmetros de acoplamento de ambos os modelos - entre o setor fermiônico do modelo DC e o modelo de Thirring com massa.

4.1. A Interação de Thirring existente no Modelo Bidimensional com Acoplamento Derivativo entre a Corrente Axial e um Campo Pseudo-escalar

Reexaminamos aqui o modelo bidimensional onde férmions dotados de massa interagem com um campo pseudoescalar de massa nula via um acoplamento derivativo com a corrente axial. Através de uma transformação de campo canônica sobre a álgebra de campo de Bose, é mostrada de forma sumária a interação de Thirring oculta no modelo de acoplamento derivativo-axial, o qual é então mapeado sobre o modelo de Thirring dotado de uma interação adicional [corrente vetorial]↔[derivada escalar] (modelo de Schroer-Thirring). O operador de Fermi é redefinido e reescrito em termos do operador de sóliton de Mandelstam acoplado a um campo escalar livre de massa nula. É apresentada a versão bosonizada completa do modelo derivativo-axial, e seus setores de carga são mapeados sobre os setores de carga do modelo de Thirring com massa. Os operadores compostos bosonizados do Hamiltoniano quântico são obtidos como os operadores dominantes obtidos na expansão de Wilson a curta distância. Este Capítulo diz respeito à Ref. [21].

4.1.1. Escopo e Método

Os modelos bidimensionais com acoplamentos entre espinores e derivadas de escalares têm sido objeto de variadas investigações, sob diferentes abordagens [29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37].

Nas Refs. [34, 35, 36] foi proposta a equivalência entre o modelo de Thirring e um modelo que descreve a interação via acoplamento derivativo entre um campo de Fermi de massa nula e dois campos de Bose de massa nula, sendo um escalar e o outro pseudo-escalar. Para uma certa escolha dos parâmetros de acoplamento, a equivalência entre o setor fermiônico do modelo de acoplamento derivativo (DC) e o modelo de Thirring pode ser estabelecida de forma fraca entre as funções de Green fermiônicas dos modelos correspondentes. Entretanto, a equivalência fraca só ocorre às custas de se introduzir uma quantização de métricas opostas para os campos bosônicos [35, 36], ou considerando-se um termo de interação derivativa com parâmetro de acoplamento imaginário [34]. Na verdade, estas são as únicas maneiras de forçar artificialmente a igualdade entre os graus de liberdade dos dois modelos. Visando estabelecer o isomorfismo entre as funções de Green fermiônicas dos dois modelos , na Ref. [35] os campos de Bose são tomados com métricas opostas, e introduz-se uma combinação especial de *três* graus bosônicos de liberdade para definir *dois* novos campos bosônicos. Deste modo, a solução de operador é reescrita em termos de um campo "espúrio" e do operador de campo de Thirring. Este campo "espúrio" gera funções de Wightman constantes, e o setor fermiônico do modelo DC é mapeado sobre o setor fermiônico do modelo de Thirring. Na Ref. [36], usando-se a mesma relação entre os parâmetros de acoplamento utilizada na Ref. [35], a equivalência fraca entre os dois modelos de massa nula é estabelecida na abordagem funcional.

Na Ref. [37] o modelo que descreve a interação com férmions, via acoplamento derivativo, de um campo pseudo-escalar de massa nula (modelo de Rothe-Stamatescu com massa nula) foi estudado usando-se a abordagem de bosonização suave (*smooth bosonization*), e é sugerida a similaridade entre o modelo de Rothe-Stamatescu no limite de massa nula e o modelo de Thirring. Dentro desta abordagem, a dita similaridade entre os dois modelos provém do fato de que a Lagrangiana do modelo de Thirring – após ser modificada pela introdução de um campo vetorial auxiliar – torna-se "quase" a Lagrangiana do modelo de Rothe-Stamatescu no limite de massa nula, a menos da existência de um campo escalar com métrica indefinida. Contudo, esta conclusão é simplista, e não implica nem a equivalência entre os dois modelos, nem a presença da interação de Thirring no modelo de Rothe-Stamatescu no limite de massa nula. Os aspectos estruturais da bosonização do modelo de Thirring com a utilização de um campo vetorial auxiliar são discutidos na Ref. [15]. A utilização de um campo vetorial auxiliar para reduzir a ação do modelo de Thirring a uma ação quadrática nos campos de Fermi introduz uma álgebra de campo de Bose redundante, que contém mais graus de liberdade do que aqueles necessários à descrição do modelo. E´ mostrado na Ref. [15] que o único efeito dos campos de Bose redundantes desacoplados é o de gerar contribuições constantes às funções de Wightman no espaço de Hilbert de estados [15].

Porém, até o momento, a relação entre o modelo de Thirring e o modelo de acoplamento derivativo não foi suficientemente esclarecida, devido ao entendimento incompleto do verdadeiro papel desempenhado pela auto-interação quártica fermiônica no modelo DC. A abordagem adotada a esse respeito na literatura existente não põe à mostra as reais propriedades físicas do espaço de Hilbert completo do modelo DC bidimensional. Uma demonstração clara, ao nível de operadores, do papel desempenhado pela interação de Thirring subjacente ao modelo DC ainda está ausente da literatura. O principal propósito da presente seção é preencher essa lacuna, ao apresentar uma demonstração da presença da interação de Thirring no modelo DC, procurando delimitar essa prsença com mais clareza. Para este fim, consideraremos o modelo bidimensional de um campo pseudo-escalar de massa nula que interage, via acoplamento derivativo, com um campo de Fermi com massa. Este modelo corresponde ao modelo de Rothe-Stamatescu [30] no limite de massa zero para o campo de Bose, modificado para a inclusão de um termo de massa para o campo de Fermi. Este modelo de Rothe-Stamatescu modificado será referido ao longo deste capítulo como modelo MRS. Analisamos o modelo MRS usando a formulação de operadores, para mostrar explicitamente que *o modelo MRS é equivalente ao modelo de Thirring com uma interação derivativa adicional corrente-vetorial-escalar*. Chamamos este novo modelo de *modelo de Schroer-Thirring*. A interação de Thirring oculta no modelo MRS é mostrada compactamente pela realização de uma transformação canônica sobre os campos de Bose. A solução de operador para as equações de movimento quânticas é então escrita em termos do operador de Mandelstam para o campo de Fermi do modelo de Thirring, que interage, via acoplamento derivativo, com um campo escalar. Os setores de carga do modelo MRS são mapeados sobre os setores de carga do modelo de Thirring com massa.
A Seção (ver Ref. [49]) está organizada desta forma:

- na subseção **4.1.2.** apresentamos a formulação de operador para exibir a interação de Thirring no modelo MRS, e fica estabelecida, ao nível de operadores, a equivalência entre o modelo MRS e o modelo de Schroer-Thirring (ST).
- na subseção **4.1.3.** é apresentada a versão bosonizada completa do modelo. Os operadores bosonizados compostos do Hamiltoniano quântico são calculados como

os operadores dominantes na expansão de Wilson a curta distância para os operadores em um mesmo ponto.

- Na subseção **4.1.4.** são apresentadas as conclusões desta Seção.

4.1.2. Mapeamento entre os Modelos MRS e de Schroer-Thirring (ST)

O modelo bidimensional que descreve um campo de Fermi com massa interagindo com um campo pseudo-escalar de massa nula via um acoplamento derivativo com a corrente axial é definido pela densidade Lagrangiana clássica

$$\mathcal{L}(x)=\bar{\psi}(x)\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m_{0}\right)\psi(x)+\frac{1}{2}\partial_{\mu}\tilde{\phi}(x)\partial^{\mu}\tilde{\phi}(x)+g\left(\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\gamma^{5}\psi(x)\right)\partial_{\mu}\tilde{\phi}(x). \tag{4.1}$$

A Lagrangiana (4.1) descreve o modelo de Rothe-Stamatescu no limite de massa nula para o campo pseudo-escalar, modificado pela inclusão de um termo de massa para o campo de Fermi (modelo MRS). A teoria quântica é definida pelas seguintes equações de movimento

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m_{0}\right)\psi(x)=g\gamma^{\mu}\gamma^{5}N\left[\psi(x)\partial_{\mu}\tilde{\phi}(x)\right], \tag{4.2}$$

$$\Box\tilde{\phi}(x)=-g\partial_{\mu}\vdots\left(\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\gamma^{5}\psi(x)\right)\vdots\,. \tag{4.3}$$

Os pontinhos na Eq. (4.3) significam que a corrente é calculada como o operador dominante na expansão de Wilson para curta distância. e o produto normal em (4.2) é definido pelo limite simétrico [30, 24]

$$N\left[\psi(x)\partial_{\mu}\tilde{\phi}(x)\right]\doteq\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\left\{\partial_{\mu}\tilde{\phi}(x+\varepsilon)\psi(x)+\partial_{\mu}\tilde{\phi}(x-\varepsilon)\psi(x)\right\}. \tag{4.4}$$

Como conseqüência da interação corrente axial – derivada pseudo-escalar, no caso de férmions com massa $(m_0 \neq 0)$ o campo $\tilde{\phi}$ não se mantém livre, devido à não conservação da corrente axial [4] na Eq. (4.3),

$$\Box\tilde{\varphi}(x) = igm_0 \vdots\left(\bar{\psi}(x)\gamma^5\psi(x)\right)\vdots \tag{4.5}$$

Para campos de Fermi de massa nula, o modelo quântico descrito pela Lagrangiana (4.1) (modelo de Rothe-Stamatescu com massa nula) é uma teoria invariante de escala, com dimensão de escala anômala [30]. Assim como ocorre no modelo de Thirring usual [16], para que a teoria descrita pela Lagrangiana (4.1) apresente no respectivo modelo um férmion de massa nula como o ponto fixo a curta distância, a dimensão de escala do operador de massa deve ser

$$D_{\bar{\psi}\psi} < 2\,. \tag{4.6}$$

No que se segue, o termo de massa deverá ser compreendido como uma perturbação no modelo invariante de escala.

A solução de operador para as equações de movimento é dada em termos de exponenciais ordenadas segundo Wick [30, 35, 24],

$$\psi(x) = \mathcal{Z}_\psi^{-\frac{1}{2}} : e^{ig\,\gamma^5\tilde{\phi}(x)} : \psi^{(0)}(x), \tag{4.7}$$

onde $\mathcal{Z}_\psi$ é uma constante de renormalização de função de onda [30, 24], e $\psi^{(0)}$ é o campo de Fermi com massa e livre

[4] No modelo de Schroer [29], que descreve um campo de Fermi com massa interagindo com um campo escalar via um acoplamento derivativo campo escalar - corrente vetorial, o campo escalar permanece livre devido à conservação da corrente vetorial $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$.

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m_0\right)\psi^{(0)}(x) = 0\,. \tag{4.8}$$

A expressão bosonizada para o operador de campo de Fermi livre $\psi^{(0)}$ é dada pelo operador de campo de Mandelstam [38]

$$\psi^{(0)}(x) = \left(\frac{\mu}{2\pi}\right)^{1/2} e^{-i\frac{\pi}{4}\gamma^5} :\exp\left(i\sqrt{\pi}\left\{\gamma^5\tilde{\varphi}(x) + \int_{x^1}^{\infty} \partial_0\, \tilde{\varphi}\left(x^0, z^1\right)dz^1\right\}\right): \tag{4.9}$$

onde μ é um regulador no infravermelho remanescente da teoria livre com massa nula. Para $m_0 = 0$, o campo $\tilde{\varphi}$ é livre e tem massa nula, de modo que podemos escrever

$$\in_{\mu\nu} \partial^{\nu}\tilde{\varphi}(x) = \partial_{\mu}\varphi(x)\,. \tag{4.10}$$

O significado da notação $:(\bullet):$ para os operadores de campo é que o ordenamento de Wick é realizado por um limite de *point-splitting* no qual as singularidades subtraídas são aquelas da teoria livre. Desta forma, as expansões de Wilson para curtas distâncias são realizadas usando-se a função de dois pontos do campo livre de massa nula

$$\left[\Phi^{(+)}(x), \Phi^{(-)}(0)\right]_{x\approx 0} = -\frac{1}{4\pi}\ln\left\{-\mu^2\left(x^2 + i\varepsilon x^0\right)\right\}. \tag{4.11}$$

Com o fim de preservar a simetria de calibre global clássica, a corrente vetorial é calculada pelo procedimento de limite do *point-splitting* regularizado [30, 24]

$$\mathcal{J}^{\mu}(x) = \vdots\left(\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)\right)\vdots = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\bar{\psi}(x+\varepsilon)\gamma^{\mu}\exp\left(-ig\int_{x}^{x+\varepsilon} \in_{\mu\nu} \partial^{\nu}\tilde{\phi}(x)dz^{\mu}\right)\psi(x) - V.E.V.\right\}\,, \tag{4.12}$$

com a constante de renormalização de função de onda $\mathcal{Z}_{\psi}$ dada por [30, 24]

$$\mathcal{Z}_{\psi}\left(x\right)=e^{g^{2}\left[\tilde{\phi}^{(+)}(x+\varepsilon),\ \tilde{\phi}^{(-)}(x)\right]}, \tag{4.13}$$

A corrente vetorial é dada por [30, 24]

$$\mathcal{J}^{\mu}\left(x\right)=j_{f}^{\mu}\left(x\right)-\frac{g}{\pi}\in^{\mu\nu}\partial_{\nu}\tilde{\phi}\left(x\right) \tag{4.14}$$

onde $j_{f}^{\mu}\left(x\right)$ é a corrente de férmion livre

$$j_{f}^{\mu}\left(x\right)=\vdots\left(\overline{\psi}^{(0)}\left(x\right)\gamma^{\mu}\psi^{(0)}\left(x\right)\right)\vdots=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\in^{\mu\nu}\partial_{\nu}\tilde{\varphi}\left(x\right), \tag{4.15}$$

e a corrente axial é

$$\mathcal{J}_{\mu}^{5}\left(x\right)=\in_{\mu\nu}\mathcal{J}^{\nu}\left(x\right)=-\partial_{\mu}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\tilde{\varphi}\left(x\right)+\frac{g}{\pi}\tilde{\phi}\left(x\right)\right). \tag{4.16}$$

Com a expressão (4.16) para a corrente axial, podemos escrever a equação de movimento quântica (4.3) na forma bosonizada

$$\left(1-\frac{g^{2}}{\pi}\right)\Box\tilde{\phi}\left(x\right)=\frac{g}{\sqrt{\pi}}\Box\tilde{\varphi}\left(x\right). \tag{4.17}$$

Para evitar a quantização com métricas opostas para os campos $\tilde{\phi}$ e $\tilde{\varphi}$, consideraremos o modelo definido para g^{2} no domínio

$$\frac{g^2}{\pi} < 1 . \tag{4.18}$$

O operador de massa bosonizado toma a forma

$$\vdots\left(\bar{\psi}(x)\psi(x)\right)\vdots = -\frac{\mu}{\pi} : \cos\left(2\sqrt{\pi}\ \tilde{\varphi}(x) + 2g\ \tilde{\phi}(x)\right): , \tag{4.19}$$

e o termo originado do termo de massa, e que quebra a invariância em relação a γ^5, é dado por

$$\vdots\left(\bar{\psi}(x)\gamma^5\psi(x)\right)\vdots = i\frac{\mu}{\pi} : \sin\left(2\sqrt{\pi}\ \tilde{\varphi}(x) + 2g\ \tilde{\phi}(x)\right): . \tag{4.20}$$

A partir do operador de massa bosonizado (4.19) e da equação de movimento (4.17) podemos ver que, para $m_0 \neq 0$ os campos $\tilde{\varphi}$ e $\tilde{\phi}$ são campos do tipo Sine-Gordon. Para $m_0 = 0$ os campos $\tilde{\varphi}$ e $\tilde{\phi}$ são campos livres com massa nula e a corrente axial (4.16) é conservada na equação de movimento (4.3). No modelo original de Rothe-Stamatescu ($m_0 = 0$), o campo pseudo-escalar $\tilde{\varphi}$ tem massa e a corrente axial possui uma anomalia. Neste caso, o campo $\tilde{\phi}$ mantém-se livre na presença da interação entre as correntes axial e vetorial e a derivada pseudo-escalar, mesmo com massa finita e renormalização de função de onda [30].

Com o objetivo de obtermos uma relação de comutação canônica para o campo $\tilde{\phi}$, procedemos ao escalonamento do campo

$$\tilde{\phi}(x) = \left(1 - \frac{g^2}{\pi}\right)^{-\frac{1}{2}} \tilde{\phi}'(x) . \tag{4.21}$$

Após o escalonamento de campo (4.21), o operador de massa (4.19), a corrente vetorial (4.14) e a equação de movimento (4.17) podem ser rescritos como

$$\vdots\left(\bar{\psi}(x)\psi(x)\right)\vdots = -\frac{\mu}{\pi} : \cos\left(2\sqrt{\pi}\ \tilde{\varphi}(x) + \frac{2g}{\sqrt{1-\frac{g^2}{\pi}}}\tilde{\phi}'(x)\right):, \tag{4.22}$$

$$\mathcal{J}_\mu(x) = -\frac{1}{\pi}\in_{\mu\nu}\partial^\nu\left(\sqrt{\pi}\ \tilde{\varphi}(x) + \frac{g}{\sqrt{1-\frac{g^2}{\pi}}}\tilde{\phi}'(x)\right), \tag{4.23}$$

$$\Box\left(\sqrt{\pi}\ \tilde{\phi}'(x) - \frac{g}{\sqrt{1-\frac{g^2}{\pi}}}\tilde{\varphi}(x)\right) = 0 . \tag{4.24}$$

A dimensão de escala do operador de massa é dada por

$$D_{\bar{\psi}\psi} = \frac{\beta^2}{4\pi}, \tag{4.25}$$

com

$$\beta^2 \doteq \frac{4\pi}{1-\frac{g^2}{\pi}} . \tag{4.26}$$

Em virtude de (4.6) e (4.25), a curta distância a perturbação de massa se torna cada vez mais desprezível para $g^2 < \pi/2$. Note-se que a dimensão de escala do operador de massa é a mesma que a do modelo de Thirring com massa e com parâmetro de acoplamento g. Em termos do campo $\tilde{\phi}'$ o operador de campo de Fermi pode ser reescrito como

$$\psi(x) = \mathcal{Z}_{\psi}^{-1/2} : \exp\left\{ i \frac{g}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{\pi}}} \gamma^5 \tilde{\phi}'(x) \right\} : \psi_0(x). \tag{4.27}$$

Para $m_0 \neq 0$, a combinação entre os campos $\tilde{\varphi}$ e $\tilde{\phi}'$ que aparece nas Eq. (4.22) e (4.23) corresponde a um campo de Sine-Gordon, enquanto que a combinação que aparece na Eq. (4.24) corresponde a um campo livre de massa nula. Levando isto em conta, vamos fazer a seguinte transformação canônica de campo

$$\delta\tilde{\Phi}(x) = \sqrt{\pi}\ \tilde{\varphi}(x) + \frac{g}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{\pi}}} \tilde{\phi}'(x), \tag{4.28}$$

$$\delta\tilde{\xi}(x) = \frac{g}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{\pi}}} \tilde{\varphi}(x) - \sqrt{\pi}\ \tilde{\phi}'(x). \tag{4.29}$$

O valor do parâmetro δ é fixado impondo-se relações de comutação canônicas para os campos $\tilde{\Phi}$ e $\tilde{\xi}$,

$$\frac{\delta^2}{\pi} = \frac{\beta^2}{4\pi} = \frac{1}{1 - \frac{g^2}{\pi}}. \tag{4.30}$$

Os campos $\tilde{\phi}'$ e $\tilde{\varphi}$ podem ser escritos, em termos dos novos campos $\left(\tilde{\Phi}, \tilde{\xi}\right)$, como

$$\tilde{\phi}'(x) = \frac{g}{\sqrt{\pi}} \tilde{\Phi}(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{\delta} \tilde{\xi}(x), \tag{4.31}$$

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\delta} \tilde{\Phi}(x) + \frac{g}{\sqrt{\pi}} \tilde{\xi}(x). \tag{4.32}$$

A equação de movimento (4.24) é agora

$$\square\tilde{\xi}(x) = 0\,, \tag{4.33}$$

e a corrente vetorial (4.23) do modelo MRS pode ser mapeada sobre a corrente do modelo de Thirring

$$\mathcal{J}_\mu(x) \equiv \mathcal{J}_\mu^{Th}(x) = -\frac{\beta}{2\pi} \in_{\mu\nu} \partial^\nu \tilde{\Phi}(x)\,. \tag{4.34}$$

O operador de massa (4.22) é identificado com o operador de massa do modelo de Thirring

$$\vdots\left(\bar{\psi}(x)\psi(x)\right)\vdots \equiv \vdots\left(\bar{\Psi}(x)\Psi(x)\right)\vdots = -\frac{\mu}{\pi} :\cos\beta\,\tilde{\Phi}(x):. \tag{4.35}$$

A interação de Thirring oculta no modelo MRS é compactamente mostrada em nossa abordagem por operadores. Usando o fato de que $\tilde{\xi}$ é um campo livre e sem massa,

$$\in_{\mu\nu} \partial^\nu \tilde{\xi}(x) = \partial_\mu \xi(x)\,, \tag{4.36}$$

o operador de campo de Fermi (4.7) pode ser reescrito em termos da exponencial do campo escalar ξ ordenada segundo Wick

$$\psi(x) = \mathcal{Z}_\psi^{-\frac{1}{2}} :e^{ig\,\xi(x)}: \Psi(x)\,, \tag{4.37}$$

onde Ψ é o operador de campo de Fermi do modelo com massa de Thirring dado pelo operador de sóliton de Mandelstam

$$\Psi(x) = \left(\frac{\mu}{2\pi}\right)^{1/2} e^{-i\frac{\pi}{4}\gamma^5} :\exp\left(i\left\{\gamma^5 \frac{\beta}{2}\tilde{\Phi}(x) \;+\; \frac{2\pi}{\beta}\int_{x^1}^{\infty} \partial_0\tilde{\Phi}\left(x^0, z^1\right)dz^1\right\}\right):. \tag{4.38}$$

Como veremos, o operador de campo (4.37) corresponde ao campo de Fermi do modelo de Thirring, que interage com o campo escalar ξ por intermédio de um acoplamento derivada escalar - corrente vetorial, que aqui chamaremos de *modelo de Schroer-Thirring*. A equação de movimento (4.2) para o campo de Fermi pode ser reescrita como

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m_0\right)\psi(x)=g^2 N\left[\gamma^{\mu}\psi(x)\mathcal{J}_{\mu}^{Th}(x)\right]+g\,N\left[\gamma^{\mu}\psi(x)\partial_{\mu}\xi(x)\right]. \tag{4.39}$$

Vamos apresentar agora o modelo de Schroer-Thirring (ST), que é definido pela densidade Lagrangiana clássica

$$\mathcal{L}(x)=\overline{\psi}(x)\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m_0\right)\psi(x)+\frac{1}{2}\partial_{\mu}\xi(x)\partial^{\mu}\xi(x)+$$

$$\frac{G^2}{2}\left(\overline{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)\right)\left(\overline{\psi}(x)\gamma_{\mu}\psi(x)\right)+g\left(\overline{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)\right)\partial_{\mu}\xi(x). \tag{4.40}$$

A teoria quântica é definida pelas equações de movimento

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m_0\right)\psi(x)=G^2\,\vdots\gamma^{\mu}\psi(x)\left(\overline{\psi}(x)\gamma_{\mu}\psi(x)\right)\vdots+g\gamma^{\mu}N\left[\psi(x)\partial_{\mu}\xi(x)\right], \tag{4.41}$$

$$\Box\xi(x)=-g\,\partial_{\mu}\vdots\left(\overline{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)\right)\vdots=0. \tag{4.42}$$

A solução de operador para as equações de movimento quânticas é dada pela Eq. (4.37) com

$$\beta^2=\frac{4\pi}{1-\frac{G^2}{\pi}} \tag{4.43}$$

O modelo de Schroer [29] é obtido fazendo-se $\beta^2=4\pi\ \left(G=0\right)$.

A partir das equações de movimento (4.39) e (4.41) podemos observar a equivalência entre o modelo MRS com um férmion com massa e o modelo ST. A equação de movimento

(4.39) corresponde a um caso particular do modelo ST, no qual o parâmetro de acoplamento de Thirring e o parâmetro de acoplamento derivativo são os mesmos. Neste caso, a interação de Thirring não pode ser "desligada" para que se obtenha o modelo de Schroer [29]. A equivalência (4.34) implica que o sub-espaço de Hilbert do modelo MRS que é gerado pelas funções de correlação da corrente vetorial $\mathcal{J}_\mu$ é isomorfo ao sub-espaço de Hilbert do modelo de Thirring, que é por sua vez gerado pelas funções de correlação da corrente vetorial $\mathcal{J}_\mu^{Th}$. As funções de Wightman do operador de campo $\psi(x)$ são as mesmas do campo de Fermi $\Psi(x)$ do modelo de Thirring, agora envoltas pela nuvem originada das contribuições do campo livre de massa nula ξ,

$$\langle 0|\psi(x_1)\ldots\psi(x_n)\bar{\psi}(y_1)\ldots\bar{\psi}(y_n)|0\rangle =$$

$$\langle 0|\prod_{j=1}^{n} :e^{ig\,\xi(x_j)}: \prod_{k=1}^{n} :e^{-ig\,\xi(y_k)}:|0\rangle\langle 0|\Psi(x_1)\ldots\Psi(x_n)\bar{\Psi}(y_1)\ldots\bar{\Psi}(y_n)|0\rangle . \qquad (4.44)$$

Em vista da Eq. (4.34), a carga Q e a pseudo-carga Q^5 associadas ao campo de Fermi ψ do modelo MRS são mapeadas sobre as cargas Q_{Th} e Q_{Th}^5 associadas ao campo de Thirring $\Psi(x)$:

$$\left[Q,\psi(x)\right] = -\psi(x) \equiv \left[Q_{Th},\Psi(x)\right] = -\Psi(x), \qquad (4.45)$$

$$\left[Q^5,\psi(x)\right] = -\gamma^5\left(\frac{1}{1-\frac{g^2}{\pi}}\right)\psi(x) \equiv \left[Q_{Th}^5,\Psi(x)\right] = -\gamma^5\frac{\beta^2}{4\pi}\Psi(x). \qquad (4.46)$$

Os setores de carga do modelo MRS são mapeados sobre os setores de carga do modelo de Thirring com massa. O espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ do modelo MRS é um produto direto

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\tilde{\phi}} \otimes \mathcal{H}_{\psi(0)} \qquad (4.47)$$

com as regras de seleção

$$Q\mathcal{H}_{\tilde{\phi}} \neq 0\,, \qquad Q^5\mathcal{H}_{\tilde{\phi}} \neq 0\,, \tag{4.48}$$

$$Q\mathcal{H}_{\psi^{(0)}} \neq 0\,, \quad Q^5\mathcal{H}_{\psi^{(0)}} \neq 0\,, \tag{4.49}$$

e é isomorfo ao espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\xi} \otimes \mathcal{H}_{\Psi} \tag{4.50}$$

com as regras de seleção

$$Q\mathcal{H}_{\xi} \equiv 0\,, \qquad Q^5\mathcal{H}_{\xi} \equiv 0\,, \tag{4.51}$$

$$Q\mathcal{H}_{\Psi} \neq 0\,, \qquad Q^5\mathcal{H}_{\Psi} \neq 0\,, \tag{4.52}$$

Deve-se notar que a corrente de Thirring (4.34) corresponde à corrente vetorial do modelo de Schroer-Thirring, uma vez que esta seja definida com uma prescrição de regularização de calibre na qual a contribuição do campo escalar ξ é eliminada. Aplicando a transformação (4.28) - (4.29) sobre a definição da corrente (4.12) obtém-se

$$\vdots\left(\overline{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)\right)\vdots_{RS} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\overline{\psi}(x+\varepsilon)\gamma^{\mu}e^{-ig^2\frac{\beta}{2\pi}\int_x^{x+\varepsilon}\epsilon_{\mu\nu}\partial^{\nu}\tilde{\Phi}(z)dz^{\mu}\,+\,ig\int_x^{x+\varepsilon}\partial_{\mu}\xi(z)dz^{\mu}}\psi(x) - V.E.V.\right\}$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\overline{\Psi}(x+\varepsilon)\gamma^{\mu}e^{-ig^2\frac{\beta}{2\pi}\int_x^{x+\varepsilon}\epsilon_{\mu\nu}\partial^{\nu}\tilde{\Phi}(z)dz^{\mu}}\Psi(x) - V.E.V.\right\} \equiv \vdots\left(\overline{\Psi}(x)\gamma^{\mu}\Psi(x)\right)\vdots_{Th}\,. \tag{4.53}$$

A partir de (4.53) podemos observar a prescrição de regularização apropriada para o cálculo da corrente vetorial do modelo de Thirring. Uma prescrição geral para a definição de corrente do modelo de Schroer-Thirring é dada por

$$\vdots\left(\overline{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)\right)\vdots_{ST} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\overline{\psi}(x+\varepsilon)\gamma^{\mu}e^{-iG^2\frac{\beta}{2\pi}\int_x^{x+\varepsilon}\in_{\mu\nu}\partial^{\nu}\tilde{\Phi}(z)dz^{\mu}\ -\ iag\int_x^{x+\varepsilon}\gamma^5\in_{\mu\nu}\partial^{\nu}\xi(z)dz^{\mu}}\psi(x) - V.E.V.\right\},$$

(4.54)

onde a é um parâmetro arbitrário e $\psi(x)$ é dado por (4.37) fazendo-se

$$\beta^2 = \frac{4\pi}{\sqrt{1-\frac{G^2}{\pi}}} \tag{4.55}$$

Levando-se em conta o fato de que o modelo é invariante de escala a pequenas distâncias, a localidade da teoria assegura a independência de percurso da integral de linha na fórmula de Mandelstam, a qual pode ser escrita como uma integral de linha sobre uma corrente conservada

$$j^{\mu}(x) = \partial_{\nu}f^{\nu\mu}(x), \tag{4.56}$$

com

$$f^{\nu\mu}(x) = -\in^{\nu\mu}\tilde{\Phi}(x), \tag{4.57}$$

e obtemos

$$\mathcal{J}^{\mu}(x)_{ST} = -\frac{\beta}{2\pi}\in^{\mu\nu}\partial_{\nu}\tilde{\Phi}(x) - \frac{g}{2\pi}(a+1)\partial^{\mu}\xi(x). \tag{4.58}$$

A corrente de Thirring é obtida fazendo-se $a=-1$. E recupera-se a corrente correspondente ao modelo de Schroer fazendo-se $a=1$ e $\beta^2 = 4\pi$.

4.1.3. A Densidade Hamiltoniana Quântica Bosonizada

Apresentaremos neste capítulo a Lagrangiana bosonizada completa do modelo MRS. Tal como no caso da teoria de férmion livre com massa nula [24], consideraremos antes a Hamiltoniana quântica bosonizada. Os operadores compostos bosonizados da Hamiltoniana quântica são obtidos como os operadores dominantes na expansão de Wilson a curta distância para os produtos de operadores no mesmo ponto [39].

A partir da Lagrangiana (4.1), o momento canônico clássico $\pi_{\tilde{\phi}}$ conjugado ao campo $\tilde{\phi}$ é dado formalmente pela expressão

$$\pi_{\tilde{\phi}}(x) = \partial^0\tilde{\phi}(x) + g\ \bar{\psi}(x)\gamma^0\gamma^5\psi(x). \tag{4.59}$$

Para $m_0 = 0$, a densidade Hamiltoniana quântica do modelo invariante de escala é obtida da Hamiltoniana clássica, substituindo-se os campos clássicos por seus respectivos operadores quânticos, e é dada em termos dos produtos de operadores normalmente ordenados

$$\mathcal{H}(x) = \frac{1}{2}:\left(\partial_0\tilde{\phi}(x)\right)^2: + \frac{1}{2}:\left(\partial_1\tilde{\phi}(x)\right)^2: - i\,\vdots\left(\bar{\psi}(x)\gamma^1\partial_1\psi(x)\right)\vdots - g:\left(\bar{\psi}(x)\gamma^1\gamma^5\psi(x)\right)\partial_1\tilde{\phi}(x): \tag{4.60}$$

com a corrente axial dada pela Eq. (4.16). Em termos das componentes espinoriais ψ_α $(\alpha = 1,\ 2)$, o termo cinético do campo de Fermi na Hamiltoniana (4.60) pode ser escrito como

$$h(x) = -i\,\vdots\left(\bar{\psi}(x)\gamma^1\partial_1\psi(x)\right)\vdots = \sum_{\alpha=1}^{2}(-1)^{\alpha+1} h_\alpha(x) \tag{4.61}$$

onde

$$h_\alpha(x) = i \vdots \psi_\alpha^\dagger(x)\partial_1\psi_\alpha(x) \vdots \tag{4.62}$$

Calcularemos agora o operador composto $h_\alpha(x)$ como o termo dominante na expansão de Wilson a curta distância para o produto de operadores num mesmo ponto, utilizando a mesma regularização que foi empregada no cálculo da corrente fermiônica. Iniciando, consideremos o limite de *point-splitting* (ver definição em Apêndice iii)

$$h_\alpha(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{h_\alpha(x;\varepsilon) + h.c. - V.E.V.\right\} \tag{4.63}$$

onde $h_\alpha(x;\varepsilon)$ é definido pelo produto a curta distância de operadores

$$h_\alpha(x;\varepsilon) = \frac{i}{2}\left(:\psi_\alpha^\dagger(x+\varepsilon)e^{-ig\int_{-\infty}^{x+\varepsilon}\epsilon_{\mu\nu}\partial^\nu\tilde{\phi}(x)dz^\mu}:\right)\left(:e^{ig\int_{-\infty}^{x}\epsilon_{\mu\nu}\partial^\nu\tilde{\phi}(z)dz^\mu}\partial_1\psi_\alpha(x):\right) \tag{4.64}$$

Com a solução de operador (4.7), o produto de operadores (4.64) pode ser escrito em termos das exponenciais do campo $\tilde{\phi}$, ordenadas segundo Wick, como

$$h_\alpha(x;\varepsilon) = \mathcal{Z}_\psi^{-1}(\varepsilon)\left\{\left(:e^{-ig\left(\gamma_{\alpha\alpha}^5\tilde{\phi}(x+\varepsilon) + \int_{-\infty}^{x+\varepsilon}\epsilon_{\mu\nu}\partial^\nu\tilde{\phi}(z)dz^\mu\right)}::e^{ig\left(\gamma_{\alpha\alpha}^5\tilde{\phi}(x) + \int_{-\infty}^{x}\epsilon_{\mu\nu}\partial^\nu\tilde{\phi}(z)dz^\mu\right)}:\right)h_\alpha^{(0)}(x;\varepsilon)\right.$$

$$\left. -\frac{g}{2}\gamma_{\alpha\alpha}^5\left(:e^{-ig\left(\gamma_{\alpha\alpha}^5\tilde{\phi}(x+\varepsilon) + \int_{-\infty}^{x+\varepsilon}\epsilon_{\mu\nu}\partial^\nu\tilde{\phi}(z)dz^\mu\right)}::e^{ig\left(\gamma_{\alpha\alpha}^5\tilde{\phi}(x) + \int_{-\infty}^{x}\epsilon_{\mu\nu}\partial^\nu\tilde{\phi}(z)dz^\mu\right)}\partial_1\tilde{\phi}(x):\right)\psi_\alpha^{(0)\dagger}(x+\varepsilon)\psi_\alpha^{(0)}(x)\right\}$$
$$\tag{4.65}$$

Onde $h_\alpha^{(0)}(x;\varepsilon)$ é a contribuição do termo cinético do campo de Fermi livre

$$h_{\alpha}^{(0)}(x;\varepsilon)=\frac{i}{2}\psi_{\alpha}^{(0)\dagger}(x+\varepsilon)\partial_1\psi_{\alpha}^{(0)}(x) \tag{4.66}$$

No cálculo de (4.65) usaremos que

$$\left(\gamma_{\alpha\alpha}^{5}\varepsilon^{\mu}\partial_{\mu}+\varepsilon^{\mu}\in_{\mu\nu}\partial^{\nu}\right)\tilde{\phi}(x)=\mp\varepsilon^{\pm}\partial_{\pm}\tilde{\phi}(x),\quad \alpha=1,2\,, \tag{4.67}$$

e que, se $[B,A]=$número clássico, comutável ($c-number$),

$$e^{-B}A=Ae^{-B}-[B,A]e^{-B}\,, \tag{4.68}$$

$$\left(:e^{-ia\Phi(x)}:\right)\left(:e^{ia\Phi(y)}\partial_1\Phi(y):\right)=$$

$$e^{a^2D^{(+)}(x-y)}\left\{:e^{-ia\left[\Phi(x)\,-\,\Phi(y)\right]}\partial_1\Phi(y):-ia\left(\partial_{y^1}D^{(+)}(x-y)\right):e^{-ia\left[\Phi(x)\,-\,\Phi(y)\right]}:\right\}, \tag{4.69}$$

onde

$$D^{(+)}(x)=\left[\Phi^{(+)}(x),\Phi^{(-)}(0)\right]. \tag{4.70}$$

Procedendo à ordenação normal das exponenciais do campo $\tilde{\phi}$, podemos decompor (4.65) como se segue

$$h_{\alpha}(x;\varepsilon)=h_{\alpha}^{(I)}(x;\varepsilon)+h_{\alpha}^{(II)}(x;\varepsilon)+h_{\alpha}^{(III)}(x;\varepsilon), \tag{4.71}$$

onde

$$h_{\alpha}^{(I)}(x;\varepsilon)=:e^{\pm ig\,\varepsilon^{\pm}\,\partial_1\tilde{\phi}(x)}:h_{\alpha}^{(0)}(x;\varepsilon), \tag{4.72}$$

$$h_{\alpha}^{(II)}(x;\varepsilon)=-\frac{g}{2}\left(\psi_{\alpha}^{(0)\dagger}(x+\varepsilon)\psi_{\alpha}^{(0)}(x)\right):e^{\pm ig\,\varepsilon^{\pm}\,\partial_{\pm}\tilde{\phi}(x)}\partial_1\tilde{\phi}(x):, \tag{4.73}$$

$$h_{\alpha}^{(III)}\left(x;\varepsilon\right)=i\frac{g^{2}}{2}\gamma_{\alpha\alpha}^{5}F_{\alpha}\left(\varepsilon\right)\left(\psi_{\alpha}^{(0)\dagger}\left(x+\varepsilon\right)\psi_{\alpha}^{(0)}\left(x\right)\right):e^{\pm ig\ \varepsilon^{\pm}\ \partial_{\pm}\tilde{\phi}(x)}:, \tag{4.74}$$

e onde a função singular $F_{\alpha}\left(\varepsilon\right)$ é dada pelo comutador

$$F_{\alpha}\left(\varepsilon\right)=\left[\left(\gamma_{\alpha\alpha}^{5}\tilde{\phi}^{(+)}\left(x+\varepsilon\right)+\int_{-\infty}^{x+\varepsilon}\in_{\mu\nu}\partial^{\nu}\tilde{\phi}^{(+)}\left(z\right)dz^{\mu}\right),\ \partial_{1}\tilde{\phi}^{(-)}\left(x\right)\right]=-\frac{1}{2\pi\varepsilon^{\pm}}. \tag{4.75}$$

Vamos considerar o termo $h^{(I)}$. Para calcular a contribuição de campo livre $h^{(0)}\left(x\right)$, dada pela Eq. (4.66), faremos uso das seguintes relações

$$\varepsilon^{\mu}\partial_{\mu}\varphi_{\ell,\,r}\left(x\right)=\mp\frac{1}{2}\varepsilon^{\pm}\partial_{\pm}\tilde{\varphi}\left(x\right), \tag{4.76}$$

$$\partial_{1}\varphi_{\ell,\,r}\left(x\right)=-\frac{1}{2}\partial_{\pm}\tilde{\varphi}\left(x\right), \tag{4.77}$$

correspondendo, respectivamente, a $\alpha=1,2$. Usando (4.68) e fazendo a ordenação normal das exponenciais do campo $\tilde{\varphi}$, as contribuições de férmion livre são dadas por [24]

$$\begin{aligned}h_{\alpha}^{(0)}\left(x;\varepsilon\right)=&-\frac{i}{4\sqrt{\pi}\ \varepsilon^{\pm}}:e^{\pm i\sqrt{\pi}\ \varepsilon^{\pm}\ \partial_{\pm}\tilde{\varphi}(x)}\partial_{\pm}\tilde{\varphi}\left(x\right):\\&+\left(\frac{1}{\varepsilon^{\pm}}\right)\left[\varphi_{\ell,\,r}^{(+)}\left(x+\varepsilon\right),\partial_{1}\varphi_{\ell,\,r}^{(-)}\left(x\right)\right]:e^{\pm i\sqrt{\pi}\ \varepsilon^{\pm}\ \partial_{\pm}\tilde{\varphi}(x)}:\end{aligned} \tag{4.78}$$

onde

$$\left[\varphi_{\ell,\,r}^{(+)}\left(x+\varepsilon\right),\partial_{1}\varphi_{\ell,\,r}^{(-)}\left(x\right)\right]=\frac{\pm1}{4\pi\ \varepsilon^{\pm}}. \tag{4.79}$$

Expandindo a primeira exponencial em (4.78) em potências de ε até a primeira ordem e a segunda exponencial até a segunda ordem, obtemos

$$h_{\alpha}^{(0)}(x;\varepsilon) = \pm\frac{1}{8} :\left(\partial_{\pm}\tilde{\varphi}(x)\right)^2 : \pm\frac{1}{4\pi\left(\varepsilon^{\pm}\right)^2} + \mathcal{O}(\varepsilon). \tag{4.80}$$

Introduzindo (4.80) em (4.72), para que calculemos o operador dominante na expansão em ε de $h^{(I)}(x;\varepsilon)$, precisamos reter termos até a segunda ordem em ε nas exponenciais

$$\begin{aligned} h_{\alpha}^{(I)}(x) &= h_{\alpha}^{(I)}(x;\varepsilon) + h.c. - V.E.V. = \\ &\pm\frac{1}{8} :\left(\partial_{\pm}\tilde{\varphi}(x)\right)^2 : \mp\frac{1}{8}\left(\frac{g^2}{\pi}\right) :\left(\partial_{\pm}\tilde{\phi}(x)\right)^2 :. \end{aligned} \tag{4.81}$$

Combinando as contribuições das duas componentes espinoriais, o operador dominante $h^{(I)}(x)$ é dado por

$$\begin{aligned} h^{(I)}(x) &= h_1^{(I)}(x) - h_2^{(I)}(x) \\ &= \frac{1}{2}\left\{ :\left(\partial_0\tilde{\varphi}(x)\right)^2 : + :\left(\partial_1\tilde{\varphi}(x)\right)^2 : \right\} - \frac{1}{2}\left(\frac{g^2}{\pi}\right)\left\{ :\left(\partial_0\tilde{\phi}(x)\right)^2 : + :\left(\partial_1\tilde{\phi}(x)\right)^2 : \right\}. \end{aligned} \tag{4.82}$$

O primeiro termo em (4.82) corresponde à Hamiltoniana bosonizada do campo de Fermi livre de massa nula. O termo proporcional a g^2 em (4.82) é a correção quântica à parte livre da Lagrangiana do campo $\tilde{\phi}$.

Vamos agora considerar o segundo termo $h^{(II)}$. Precisamos calcular o produto de operadores do campo fermiônico livre que aparece na Eq. (4.73). Usando (4.76) e aplicando a ordenação normal à exponencial, obtém-se

$$\psi_{\alpha}^{(0)\dagger}(x+\varepsilon)\psi_{\alpha}^{(0)} = \frac{1}{2i\pi\ \varepsilon^{\pm}} : e^{\pm i\sqrt{\pi}\ \varepsilon^{\pm}\partial_{\pm}\tilde{\varphi}(x)} : \tag{4.83}$$

Introduzindo o potencial pseudo-escalar $\tilde{\mathcal{J}}$,

$$\tilde{\mathcal{J}}\left(\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\tilde{\varphi}\left(x\right)+\frac{g}{\pi}\tilde{\phi}\left(x\right), \tag{4.84}$$

de forma que a corrente axial possa ser escrita como

$$\mathcal{J}_{\mu}^{5}\left(x\right)=-\partial_{\mu}\tilde{\mathcal{J}}\left(x\right), \tag{4.85}$$

e usando (4.83), podemos escrever (4.73) como

$$h_{\alpha}^{(II)}\left(x;\varepsilon\right)=\frac{g}{4\pi}\gamma_{\alpha\alpha}^{5}\left(\frac{i}{\varepsilon^{\pm}}\right):e^{\pm i\pi\ \varepsilon^{\pm}\partial_{\pm}\tilde{\mathcal{J}}(x)}\partial_{1}\tilde{\phi}\left(x\right):. \tag{4.86}$$

Expandindo a exponencial em (4.86) em potências de ε até a primeira ordem, têm-se

$$h_{\alpha}^{(II)}\left(x\right)=h_{\alpha}^{(II)}\left(x;\varepsilon\right)+h.c.-V.E.V.=\pm\frac{g}{\pi}:\left(\partial_{\pm}\tilde{\mathcal{J}}\left(x\right)\partial_{1}\tilde{\phi}\left(x\right)\right):+\mathcal{O}\left(\varepsilon\right). \tag{4.87}$$

O operador dominante na segunda contribuição $h^{(II)}\left(x\right)=h_{1}^{(II)}\left(x\right)-h_{2}^{(II)}\left(x\right)$ é dado então por

$$h^{(II)}\left(x\right)=-g:\partial^{1}\tilde{\mathcal{J}}\left(x\right)\partial_{1}\tilde{\phi}\left(x\right):=g:\left(\overline{\psi}\left(x\right)\gamma^{1}\gamma^{5}\psi\left(x\right)\right)\partial_{1}\tilde{\phi}\left(x\right): \tag{4.88}$$

Como era esperado a partir da solução de operador (4.7), a contribuição (4.88) cancela o termo correspondente na Hamiltoniana (4.60).

Finalmente, vamos considerar o termo $h^{(III)}$. Usando (4.83), (4.84) e (4.75), podemos escrever (4.74) como se segue

$$h_{\alpha}^{(III)}\left(x;\varepsilon\right)=\pm\left(\frac{g^{2}}{8\pi^{2}}\right)\frac{1}{\left(\varepsilon^{\pm}\right)^{2}}:e^{\pm i\pi\ \varepsilon^{\pm}\partial_{\pm}\tilde{\mathcal{J}}(x)}:. \tag{4.89}$$

Expandindo a exponencial em potências de ε até a segunda ordem, resulta que

$$h_\alpha^{(III)}(x;\varepsilon) = \mp\frac{g^2}{16} :\left(\partial_\pm \tilde{\mathcal{J}}(x)\right)^2: + g^2\left(\frac{i}{8\pi\ \varepsilon^\pm}\right)\partial_\pm \tilde{\mathcal{J}}(x) \pm \frac{g^2}{8\pi^2\left(\varepsilon^\pm\right)^2} + \mathcal{O}(\varepsilon)\,. \tag{4.90}$$

Obtém-se então

$$h_\alpha^{(III)}(x) = h_\alpha^{(III)}(x;\varepsilon) + h.c. - V.E.V. = \mp\frac{g^2}{8} :\left(\partial_\pm \tilde{\mathcal{J}}(x)\right)^2:. \tag{4.91}$$

O termo dominante $h^{(III)}(x)$ é dado então por

$$h^{(III)}(x) = -\frac{g^2}{4}\left\{:\left(\partial_0 \tilde{\mathcal{J}}(x)\right)^2: + :\left(\partial_1 \tilde{\mathcal{J}}(x)\right)^2:\right\}, \tag{4.92}$$

e corresponde à contribuição da interação de Thirring à Hamiltoniana quântica. Coletando todos os termos (4.82)-(4.88)-(4.92), a forma bosonizada do termo fermiônico cinético é dada por

$$h(x) = i\vdots\left(\overline{\psi}(x)\gamma^1\partial_1\psi(x)\right)\vdots =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{:\left(\partial_0\tilde{\varphi}(x)\right)^2: + :\left(\partial_1\tilde{\varphi}(x)\right)^2:\right\} - \frac{1}{2}\left(\frac{g^2}{\pi}\right)\left\{:\left(\partial_0\tilde{\phi}(x)\right)^2: + :\left(\partial_1\tilde{\phi}(x)\right)^2:\right\}$$

$$+g:\left(\overline{\psi}(x)\gamma^1\gamma^5\psi(x)\right)\partial_1\tilde{\phi}(x): - \frac{g^2}{4}\left\{:\left(\partial_0 \tilde{\mathcal{J}}(x)\right)^2: + :\left(\partial_1 \tilde{\mathcal{J}}(x)\right)^2:\right\}. \tag{4.93}$$

Introduzindo a perturbação de massa, a Hamiltoniana quântica bosonizada total (4.60) é dada por

$$\mathcal{H}_{bos}(x)=\frac{1}{2}\left\{:\left(\partial_0\tilde{\varphi}(x)\right)^2:+:\left(\partial_1\tilde{\varphi}(x)\right)^2:\right\}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{g^2}{\pi}\right)\left\{:\left(\partial_0\tilde{\phi}(x)\right)^2:+:\left(\partial_1\tilde{\phi}(x)\right)^2:\right\}$$

$$-\frac{g^2}{4}\left\{:\left(\partial_0\tilde{\mathcal{J}}(x)\right)^2:+:\left(\partial_1\tilde{\mathcal{J}}(x)\right)^2:\right\}+m_0':\cos\left(2\sqrt{\pi}\ \tilde{\varphi}(x)+2g\ \tilde{\phi}(x)\right): \tag{4.94}$$

onde $m_0' = \mu m_0/\pi$. A densidade Lagrangiana bosonizada correspondente é

$$\mathcal{L}_{bos}(x)=\frac{1}{2}:\partial^\mu\tilde{\varphi}(x)\partial_\mu\tilde{\varphi}(x):+\frac{1}{2}\left(1-\frac{g^2}{\pi}\right):\left(\partial^\mu\tilde{\phi}(x)\partial_\mu\tilde{\phi}(x)\right):$$

$$-\frac{g^2}{4}:\partial_\mu\tilde{\mathcal{J}}(x)\partial^\mu\tilde{\mathcal{J}}(x):-m_0':\cos\left(2\sqrt{\pi}\ \tilde{\varphi}(x)+2g\ \tilde{\phi}(x)\right):, \tag{4.95}$$

onde $\tilde{\mathcal{J}}$ é dado por (4.84). Na teoria bosonizada, o novo momento linear $\Pi_{\tilde{\phi}}$ conjugado ao campo $\tilde{\phi}$ é dado por

$$\Pi_{\tilde{\phi}}(x)=\left(1-\frac{g^2}{\pi}\right)\partial_0\tilde{\phi}(x)-\left(\frac{g}{\pi}\right)\frac{g^2}{2}\partial_0\tilde{\mathcal{J}}(x), \tag{4.96}$$

e o momento linear $\Pi_{\tilde{\varphi}}$ associado com o campo $\tilde{\varphi}$ é

$$\Pi_{\tilde{\varphi}}(x)=\partial_0\tilde{\varphi}(x)-\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)\frac{g^2}{2}\partial_0\tilde{\mathcal{J}}(x). \tag{4.97}$$

Assim, tem-se que

$$:\Pi_{\tilde{\varphi}}(x)\partial_0\tilde{\varphi}(x):+:\Pi_{\tilde{\phi}}(x)\partial_0\tilde{\phi}(x):=:\left(\partial_0\tilde{\varphi}(x)\right)^2:+\left(1-\frac{g^2}{\pi}\right):\left(\partial_0\tilde{\phi}(x)\right)^2:-\frac{g^2}{2}:\left(\partial_0\tilde{\mathcal{J}}(x)\right)^2: \tag{4.98}$$

A partir da Lagrangiana bosonizada obtemos as seguintes equações de movimento acopladas

$$\Box\,\tilde{\varphi}(x)-\left(\frac{g^2}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\Box\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\tilde{\varphi}(x)+\frac{g}{\pi}\tilde{\phi}(x)\right)=2\sqrt{\pi}\;m_0'\,:\sin\left(2\sqrt{\pi}\;\tilde{\varphi}(x)+2g\;\tilde{\phi}(x)\right): \tag{4.99}$$

$$\left(1-\frac{g^2}{\pi}\right)\Box\,\tilde{\phi}(x)-\left(\frac{g^2}{2}\right)\frac{g}{\pi}\,\Box\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\tilde{\varphi}(x)+\frac{g}{\pi}\tilde{\phi}(x)\right)=2g\;m_0'\,:\sin\left(2\sqrt{\pi}\;\tilde{\varphi}(x)+2g\;\tilde{\phi}(x)\right): \tag{4.100}$$

Em concordância com a equação de movimento bosonizada (4.17). Reescalonando o campo $\tilde{\phi}$ por (4.21) e aplicando a transformação canônica (4.28)-(4.29), a densidade Lagrangiana bosonizada (4.95) pode ser reescrita como

$$\mathcal{L}_{bos}(x)=\frac{1}{2}:\partial^{\mu}\tilde{\xi}(x)\partial_{\mu}\tilde{\xi}(x):+\frac{1}{2}:\partial^{\mu}\tilde{\Phi}(x)\partial_{\mu}\tilde{\Phi}(x):$$

$$+\;\frac{g^2}{4}:\left(\frac{\beta}{2\pi}\in_{\mu\nu}\partial^{\nu}\tilde{\Phi}(x)\right)\left(\frac{\beta}{2\pi}\in^{\mu\rho}\partial_{\rho}\tilde{\Phi}(x)\right):-m_0'\,:\cos\beta\;\tilde{\Phi}(x):. \tag{4.101}$$

A Lagrangiana (4.101) corresponde à Lagrangiana do modelo de Thirring e a um campo livre de massa nula "desacoplado". Embora o campo $\tilde{\xi}$ se desacople na Lagrangiana bosonizada, e, logo, a função de partição resulte fatorável

$$Z[0]=Z_{\tilde{\xi}}[0]\times Z_{\tilde{\Phi}}$$

o campo ξ não pode ser desacoplado no funcional gerador, e portanto contribui para as funções de Wightman do campo de Fermi (4.44).

4.1.4. Observações Conclusivas sobre a Seção 4.1

Utilizando a formulação de operadores, analisamos o modelo de Rothe-Stamatescu com um campo pseudo-escalar de massa nula que interage com um campo de Fermi com massa. A interação de Thirring oculta no modelo MRS é compactamente exibida pela aplicação de uma transformação canônica na álgebra de campo de Bose. A presente abordagem torna fácil exteriorizar a equivalência entre o modelo MRS e o modelo de Schroer-Thirring, i.e., o modelo de Thirring com uma interação adicional corrente vetorial – derivada escalar. Desta forma, fica estabelecido o isomorfismo para um caso particular do modelo de Schroer-Thirring para o qual o parâmetro de acoplamento de Thirring e o parâmetro de acoplamento derivativo são os mesmos $\left(G^2 = g^2\right)$. Os setores de carga do modelo MRS são mapeados sobre os setores de carga do modelo de Thirring. A Hamiltoniana quântica bosonizada é obtida como o operador dominante na expansão em ε para os produtos de operadores no mesmo ponto.

Conforme ressaltado na Ref. [29], férmions acoplados a partículas com massa de repouso nula não podem ser auto-estados do operador de massa. O conceito de “infrapartículas” foi introduzido por Schroer na Ref. [29], para descrever uma partícula que interage com um campo escalar de massa nula e que perde seu espectro de massa discreto por conseqüência da radiação no infravermelho. No modelo de Schroer padrão [29] a solução de operadores é dada por (4.37), tomando-se $\beta^2 = 4\pi$:

$$\psi(x) = \mathcal{Z}_{\psi}^{1/2} :e^{ig\xi(x)}: \psi^{(0)}(x). \tag{4.102}$$

Seguindo a abordagem de Schroer [29], os campos $\psi(x)$ e $\psi^{(0)}(x)$ não podem ser representados no mesmo espaço de Hilbert com métrica positivo-definida. Com base na positividade do espaço de Hilbert, o modelo não admite um espectro de massa discreto. O campo $\psi^{(0)}(x)$ não é o campo assintótico correspondente a $\psi(x)$. E mais, de acordo com a Ref. [40], a invariância de fase é quebrada espontaneamente no modelo de Schroer. A corrente vetorial é dada por

$$\tilde{\mathcal{J}}(x) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \in^{\mu\nu} \partial_\nu \tilde{\varphi}(x) - \frac{g}{\pi} \partial^\mu \xi(x) . \tag{4.103}$$

O campo escalar de massa nula $\xi(x)$ não comuta com a carga

$$\mathcal{Q} = g \int \mathcal{J}_0(z) dz^1 = \mathcal{Q}_{\psi^{(0)}} + \mathcal{Q}_\xi , \tag{4.104}$$

que atua como o gerador de transformações de fase, e logo

$$\mathcal{Q}\, \mathcal{H}_\xi \neq 0 . \tag{4.105}$$

Temos as seguintes relações de comutação

$$\left[i\mathcal{Q},\ :e^{ig\ \xi(x)}: \right] = -i \frac{g^2}{\pi} :e^{ig\ \xi(x)}: , \tag{4.106}$$

$$\left[i\mathcal{Q},\ \psi^{(0)}(x) \right] = -ig\psi^{(0)}(x) , \tag{4.107}$$

$$\left[i\mathcal{Q},\ \psi(x) \right] = -i \left(1 + \frac{g^2}{\pi} \right) \psi(x) . \tag{4.108}$$

Porém, como

$$\left[\mathcal{Q},\ \xi(x) \right] = -\frac{g^2}{\pi} , \tag{4.109}$$

conclui-se que a invariância global de calibre é quebrada espontaneamente, e $\xi(x)$ é o bóson de Nambu-Goldstone correspondente a essa quebra [40]. De (4.107) e (4.108) resulta que os campos $\psi(x)$ e $\psi^{(0)}(x)$ transformam-se de forma diversa, e o campo $\psi^{(0)}(x)$ não pode ser identificado como o campo assintótico de $\psi(x)$. De acordo com a abordagem alternativa introduzida na referência [40], usando-se uma formulação de métrica indefinida é possível introduzir formalmente um operador composto $e^{-ig\,\xi}\psi$ que exibe um espectro de massa e cujo campo assintótico é $\psi^{(0)}$. Neste caso

$$\left[\mathcal{Q},\ e^{-ig\,\xi}\psi\right] \equiv \left[\mathcal{Q},\ \psi^{(0)}\right]. \tag{4.110}$$

Contudo, o procedimento adotado na Ref. [40] para contornar o problema da infrapartícula no modelo de Schroer tem implicações no problema, matemática e estruturalmente delicado, de como seria possível definir no setor de carga da álgebra de campo intrínseca o operador composto $e^{-ig\,\xi}\psi$, uma vez que a carga $\mathcal{Q}_\xi$ é trivializada [41, 43] quando é feita a restrição do espaço $\mathcal{H}$ para o espaço $\mathcal{H}_{\psi^{(0)}}$:

$$\mathcal{Q}_\xi \mathcal{H} \neq 0, \quad \mathcal{Q}_\xi \mathcal{H}_{\psi^{(0)}} = 0. \tag{4.111}$$

No caso especial do modelo ST que está sendo considerado – que é equivalente ao modelo MRS -, o problema é bem diferente, uma vez que não existem férmions livres e com massa envolvidos. A solução de operadores é dada em termos de um campo escalar livre de massa nula e do campo de Thirring

$$\psi(x) = :e^{ig\,\xi(x)}:\Psi(x), \tag{4.112}$$

e a corrente vetorial é dada por

$$\mathcal{J}^\mu(x) = -\frac{\beta}{2\pi}\in^{\mu\nu}\partial_\nu\tilde{\Phi}(x). \tag{4.113}$$

Temos então

$$\left[\mathcal{Q},\ \xi(x)\right]=0\,, \tag{4.114}$$

$$\left[\mathcal{Q},\ \psi(x)\right]\equiv\left[\mathcal{Q},\ \Psi(x)\right]. \tag{4.115}$$

Os setores de carga são os mesmos do campo de Thirring

$$\mathcal{Q}\equiv\ \mathcal{Q}_{\Psi}\,, \tag{4.116}$$

e o campo $\xi(x)$ comuta com o gerador das transformações globais de calibre. Tendo em vista as regras de seleção

$$\mathcal{Q}\ \mathcal{H}_{\xi}=0=\mathcal{Q}^{5}\ \mathcal{H}_{\xi} \tag{4.117}$$

e

$$\mathcal{Q}\mathcal{H}\equiv\ \mathcal{Q}\mathcal{H}_{\Psi}\,, \tag{4.118}$$

Pode-se definir o campo de Thirring com carga pela transformação

$$\Psi(x)=\ :e^{-ig\ \xi(x)}\psi(x):. \tag{4.119}$$

Pelo menos neste caso particular do modelo ST o espectro de massa corresponde ao do modelo de Thirring com massa. Esta é uma das razões fisicamente justificáveis pelas quais o modelo de Schroer padrão não pode ser recuperado a partir deste caso particular do modelo ST.

Finalizando esta Seção, faremos algumas observações sobre o modelo de um campo de Fermi com massa que interage, via um acoplamento derivativo, com dois campos de Bose, sendo um escalar e o outro um pseudo-escalar. Este modelo corresponde ao modelo MRS, definido pela Lagrangiana (4.1), com uma interação adicional corrente vetorial – derivada escalar (interação de Schroer):

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + g'\left(\bar{\psi}\ \gamma^{\mu}\psi\right)\partial_{\mu}\eta\ . \tag{4.120}$$

Devido à natureza vetorial do acoplamento g', o campo escalar η permanece livre e sem massa. Na visão da presente abordagem por operadores, o modelo exibe três graus de liberdade: dois campos escalares com massa nula e o campo de Thirring. Ao introduzir a quantização com métricas opostas para os dois campos escalares, podemos concluir que a propriedade intrínseca do modelo MRS, segundo a qual o mesmo é equivalente ao caso especial, analisado acima, do modelo de Schroer-Thirring, é o fenômeno subjacente que permite que se estabeleça a equivalência fraca entre o modelo de Thirring e o setor fermiônico do modelo de acoplamento derivativo com duas interações de acoplamento derivativo, como é proposto nas Refs. [34, 35, 36]. Entretanto, ao nível de operadores, diversos aspectos estruturais e algébricos da equivalência fraca entre os dois modelos, como se obtém nas Refs. [35, 36] permaneceram ainda obscuros. A clarificação desses aspectos será objeto da seção seguinte, conforme já foi antecipado.

4.2. Revisitando o Modelo Bidimensional de Acoplamento Derivativo com Dois Campos de Bose

Usando a abordagem por operadores, reexaminamos o modelo bidimensional que descreve um campo de Fermi com massa que interage, via acoplamentos derivativos, com dois campos de Bose – um deles escalar, o outro pseudo-escalar -, ambos com massa nula (ver Ref. [48]). Aplicando uma transformação canônica sobre a álgebra de campo de Bose, o operador de campo de Fermi é escrito em termos do operador de sóliton de Mandelstam, e o modelo de acoplamento derivativo (DC) é mapeado sobre o modelo de Thirring com massa e com duas interações entre corrente vetorial e derivada (pseudo-) escalar (modelo de Schroer-Thirring). O modelo DC com férmion de massa nula pode ser mapeado sobre o modelo Rothe-Stamatescu com massa nula e com uma interação de Thirring (modelo Rothe-Stamatescu-Thirring com massa nula). Nesta abordagem é exibida de maneira compacta a equivalência entre o setor fermiônico do modelo DC e o modelo de Thirring com massa.

4.2.1. Escopo e Método

A equivalência entre o modelo de Thirring com massa nula e o modelo DC que descreve as interação entre férmions e dois campos de Bose de massa nula, um deles escalar e o outro pseudo-escalar, via acoplamentos derivativos, foi discutido nas Refs. [34, 35, 36]. Fica estabelecida naqueles trabalhos, de forma fraca e para uma certa escolha dos parâmetros de acoplamento, a equivalência entre o setor fermiônico do modelo DC e o modelo de Thirring, através das funções de Green dos modelos correspondentes. Esta equivalência fraca só se opera às expensas de, ou se introduzir uma quantização de métrica oposta para os campos bosônicos [35, 36], ou se considerar um termo do acoplamento derivativo apresentando parâmetro de acoplamento imaginário [34]. Fazendo-se essas escolhas, as funções de Green do modelo DC são mapeadas sobre aquelas do modelo de Thirring que são obtidas nas soluções de Klaiber e de Johnson [42]. Na verdade – devemos enfatizar mais uma vez -, somente dessa forma se consegue obter, embora artificialmente, a igualdade entre os graus de liberdade dos dois modelos.

Na Ref, [35] a conexão entre os dois modelos é analisada usando-se o formalismo de operadores para comparar as soluções de operador correspondentes. Com o propósito de estabelecer uma correspondência entre as soluções de operadores dos modelos DC e de Thirring com massa nula, consideram-se os campos de Bose como possuindo métrica oposta. Assim – como já foi assinalado acima, na Seção 4.1 -, introduz-se uma combinação dos *três* graus de liberdade originais para definir *dois* novos campos bosônicos. Após essa redefinição dos campos de Bose, a solução de operador é dada em termos de um campo "espúrio" e do operador de campo de Thirring. Entretanto, o artifício empregado na Ref. [35], de se introduzir uma redefinição de campos de Bose para se obter a redução dos graus de liberdade, não faz sentido no caso do modelo DC de férmions com massa, uma vez que pressupõe que os campos bosônicos sejam livres e de massa nula. Para férmions com massa, a álgebra de Bose contém dois campos do tipo sine-Gordon, pseudo-escalares, e um outro escalar de massa nula. A redefinição de campos usada na Ref. [35] combina esses três graus de liberdade para definir o campo de sóliton de sine-Gordon, eliminando portanto o operador de massa.

Na Ref. [36] o modelo DC com férmions de massa nula foi analisado usando-se a abordagem funcional. Estabelece-se então a equivalência entre as funções de dois pontos fermiônicas do modelo DC e do modelo de Thirring, por uma relação apropriada entre os parâmetros de acoplamento dos dois modelos. Através da imposição de quantização de métrica oposta para os campos de Bose e dessa relação entre os parâmetros de acoplamento constrói-se então um mapeamento um-para-um entre as soluções de operadores dos dois modelos. Entretanto, a equivalência estabelecida na Ref. [36] somente opera para férmions de massa nula. Na Ref. [34], a equivalência entre o modelo de Thirring e o modelo DC é utilizada para investigar as divergências ultravioletas e a renormalizabilidade da perturbação de massa no modelo de Thirring.

Recentemente, com o fim de se obter um claro entendimento sobre o papel real desempenhado pela interação fermiônica quártica nos modelos DC, foi discutido na Ref. [21], no formalismo de operadores, o modelo que descreve um campo pseudo-escalar de massa nula que interage com férmions com massa via um *acoplamento entre a corrente axial e a derivada pseudo-escalar*. Este modelo corresponde ao modelo de Rothe-Stamatescu [30] no limite de massa zero para o campo pseudo-escalar, modificado com a inclusão de um termo de massa para o campo de Fermi (*modelo de Rothe-Stamatescu modificado – MRS*). Mostrou-se que a presença da interação de Thirring é uma propriedade intrínseca do modelo MRS. Esta interação foi exibida de forma compacta pela aplicação de uma transformação canônica nos campos de Bose. A solução de operador para as equações de movimento quânticas foi escrita em termos do operador de campo de Fermi, na forma dada por Mandelstam, que interage com um campo escalar via um *acoplamento entre a corrente vetorial e a derivada escalar* (*modelo de Schroer-Thirring*). A corrente vetorial é mapeada sobre a corrente de Thirring, de forma tal que os setores de carga do modelo MRS são mapeados sobre os setores de carga do modelo de Thirring. Deste modo, o operador bosonizado de massa do modelo DC é mapeado sobre o operador de massa do modelo de Thirring. A bosonização completa do modelo é realizada calculando-se os operadores compostos na densidade Hamiltoniana bosonizada como sendo os operadores de ordem dominante nas expansões de Wilson a curta distância [21].

Não obstante os resultados obtidos de equivalência fraca entre o modelo DC e o modelo de Thirring, do nosso ponto de vista vários aspectos algébricos e estruturais desta equivalência, conforme proposta nas Refs. [34, 35, 36], permanecem ainda obscuros, e a propriedade subjacente ao modelo DC que propicia a dita correspondência nunca foi claramente exposta dentro do formalismo de operadores. Uma demonstração ao nível de operador que exiba compactamente a interação de Thirring que há por trás do modelo DC nunca foi apresentada, e um claro entendimento desta equivalência fraca no formalismo de operadores continua ausente da literatura. Um dos objetivos deste capítulo do trabalho é preencher essa lacuna.

Nesta Seção, portanto, iremos generalizar os resultados da Seção 4.1 (ver Refs. [21, 49]) e reanalisar o modelo DC empregando a abordagem por operadores. O modelo DC aqui apresentado corresponde à generalização do modelo considerado na Seção 4.1, na medida em que é incluído um novo grau de liberdade do campo escalar de massa nula que interage com o campo de Fermi com massa via uma interação da corrente vetorial com a derivada escalar. Mostra-se que o modelo DC é equivalente ao modelo de Thirring com massa e com dois acoplamentos derivativos com a corrente vetorial (*Schroer-Thirring model*). *A equivalência entre o modelo DC e o modelo Schroer-Thirring fica assim estabelecida ao nível de operadores sem que se imponham condições, de um lado, sobre a natureza dos campos bosônicos, e de outro, sobre os parâmetros de acoplamento*. Seguindo uma abordagem diferente daquelas seguidas nas Refs. [35, 36], a interação de Thirring oculta no modelo DC é exposta pela aplicação de uma transformação canônica sobre a álgebra de campo de Bose. A solução de operador para as equações de movimento quânticas do modelo DC corresponde ao operador de campo de Fermi do modelo de Thirring, na forma dada por Mandelstam, interagindo com dois campos bosônicos escalares livres via acoplamentos entre a corrente vetorial e as derivadas escalares. A interação de Thirring não é afetada pela introdução do acoplamento entre a corrente vetorial e a derivada escalar correspondente ao modelo de Schroer [29], e é uma propriedade intrínseca ao modelo RS com massa nula [21]. O limite para parâmetro de acoplamento zero é bem definido e o modelo de Schroer [29], assim como o modelo de Rothe-Stamatescu [30], são recuperados corretamente. A equivalência fraca entre o setor fermiônico do modelo DC e o modelo de Thirring fica estabelecida para certos valores dos parâmetros de acoplamento. Dentro da presente abordagem, a equivalência fraca entre os dois modelos é mostrada de forma compacta, sem a redução artificial do número de graus de liberdade bosônicos.

A Seção está organizada da seguinte maneira: na subseção 4.2.2 apresentamos a formulação de operadores para o modelo DC e se estabelece a equivalência com o *modelo de Schroer-Thirring*. Na subseção 4.2.3 discute-se a equivalência fraca entre o modelo DC e o modelo de Thirring com massa. Contrariamente ao que é feito na Ref. [35], a correspondência entre as funções de Wightman fermiônicas dos dois modelos é feita sem que se reduza o número de graus de liberdade, e é consistente com a introdução do termo de massa para o campo de Fermi. Na subseção 4.2.4 discute-se o modelo DC com férmions de massa nula e sua conexão com o modelo de Rothe-Stamatescu com massa nula que contém uma interação de Thirring (*modelo de Rothe-Stamatescu-Thirring com massa nula*). A conclusão é apresentada na subseção 4.2.5.

4.2.2. Solução de Operador em termos do Campo de Thirring

A densidade Lagrangiana clássica que define o modelo bidimensional de um campo de Fermi com massa que interage por meio de acoplamento derivativo com dois campos de Bose de massa nula é dada por [34, 35, 36][1]

$$\mathcal{L}(x)=\bar{\psi}(x)\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m_{0}\right)\psi(x)+\frac{1}{2}\partial_{\mu}\eta(x)\partial^{\mu}\eta(x)+\frac{1}{2}\partial_{\mu}\tilde{\phi}(x)\partial^{\mu}\tilde{\phi}(x)+$$
$$+g\left(\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)\right)\partial_{\mu}\eta(x)+\tilde{g}\left(\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\gamma^{5}\psi(x)\right)\partial_{\mu}\tilde{\phi}(x) \tag{4.121}$$

onde $\eta(x)$ é um campo *escalar* e $\tilde{\phi}(x)$ é um campo *pseudo-escalar*. Exceto pela presença de um campo bosônico de massa nula desacoplado, para $g=0$ este modelo corresponde ao modelo de Rothe-Stamatescu (RS) [30] no limite de massa zero do campo pseudo-escalar $\tilde{\phi}$, além disso modificado pela inclusão de um termo de massa para o campo fermiônico (modelo MRS [21]); e para $\tilde{g}=0$ o mesmo modelo corresponde ao modelo de Schroer [29]. As equações de movimento que definem a teoria quântica são

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-m_{0}\right)\psi(x)=gN\left[\gamma^{\mu}\psi(x)\partial_{\mu}\eta(x)\right]+\tilde{g}N\left[\gamma^{\mu}\gamma^{5}\psi(x)\partial_{\mu}\tilde{\phi}(x)\right] \tag{4.122}$$

$$\Box\eta(x)=-g\,\partial_{\mu}\vdots\left(\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)\right)\vdots=0\,, \tag{4.123}$$

[1] As convenções usadas aqui são: $\gamma^{0}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\gamma^{1}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix},\gamma^{5}=\gamma^{0}\gamma^{1},\gamma^{\mu}\gamma^{5}=\epsilon^{\mu\nu}\gamma_{\nu}$,

$g^{00}=-g^{11}=1,\ \epsilon_{01}=\epsilon^{10}=1$

$$\Box\tilde{\phi}(x) = -\tilde{g}\,\partial_\mu \vdots\left(\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)\right)\vdots . \tag{4.124}$$

A notação $\vdots(\bullet)\vdots$ nas Eqs. (4.123) e (4.124) traduz o fato de que a corrente é calculada como o termo de ordem dominante na expansão de Wilson a curta distância [38], e os produtos normais em (4.122) são definidos pelo limite simétrico [30, 16]

$$N\left[\psi(x)\partial_\mu\Phi(x)\right] \doteq \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\left\{\partial_\mu\Phi(x+\varepsilon)\psi(x)+\partial_\mu\Phi(x-\varepsilon)\psi(x)\right\}. \tag{4.125}$$

Resulta da conservação da corrente vetorial na Eq. (4.123) que o campo escalar η é livre e de massa nula. E como conseqüência da interação da corrente axial com a derivada pseudo-escalar, no caso de férmions com massa $(m_0 \neq 0)$, o campo pseudo-escalar $\tilde{\phi}$ não pode mais ser livre devido à não conservação da corrente axial na Eq. (4.124):

$$\Box\tilde{\phi}(x) = i\tilde{g}\, m_0 \vdots\left(\overline{\psi}(x)\gamma^5\psi(x)\right)\vdots \tag{4.126}$$

Para campos de Fermi de massa nula o modelo descrito pela Lagrangiana (4.121) é uma teoria invariante de escala com dimensão de escala anômala [30]. Tal como no modelo de Thirring padrão [8], para que a teoria descrita pela Lagrangiana (4.121) tenha como ponto fixo em curta distância o modelo com férmion de massa nula, a dimensão de escala do operador de massa deverá ser

$$D_{\overline{\psi}\psi} < 2 . \tag{4.127}$$

Deste ponto em diante o termo de massa deve ser entendido como uma perturbação no modelo invariante de escala [21].

A solução de operador para as equações de movimento quânticas é dada em termos das exponenciais ordenadas segundo Wick [30, 35, 16]

$$\psi(x) = \mathcal{Z}_\psi^{-\frac{1}{2}} : \exp i\left\{g\ \eta(x) + \tilde{g}\ \gamma^5 \tilde{\phi}(x)\right\} : \psi^{(0)}(x), \qquad (4.128)$$

onde $\mathcal{Z}_\psi$ é uma constante de renormalização de função de onda [30, 16], e $\psi^{(0)}(x)$ é o campo de Fermi livre com massa, solução da equação

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_0\right)\psi^{(0)}(x) = 0\,. \qquad (4.129)$$

A expressão bosonizada para o campo de Fermi livre com massa é dada pelo operador de campo de Mandelstam

$$\psi^{(0)}(x) = \left(\frac{\mu}{2\pi}\right)^{1/2} e^{-i\frac{\pi}{4}\gamma^5} : \exp\left(i\sqrt{\pi}\left\{\gamma^5 \tilde{\varphi}(x) \ + \int_{x^1}^{\infty} \partial_0\ \tilde{\varphi}\left(x^0, z^1\right) dz^1\right\}\right) :, \qquad (4.130)$$

onde μ é um regulador no infravermelho remanescente da teoria livre de massa nula. Para $m_0 = 0$ pode-se usar o resultado, válido em duas dimensões,

$$\in_{\mu\nu} \partial^\nu \tilde{\varphi} = \partial_\mu \varphi \qquad (4.131)$$

A notação $:(\bullet):$ utilizada nos operadores de campo significa que a ordenação de Wick é realizada por um procedimento limite de *point-splitting* em que as singularidades subtraídas são as da teoria livre. Desta forma, as expansões de Wilson a curta distância são realizadas usando-se as funções de dois pontos do campo escalar livre com massa [16]

$$\left[\Phi^{(+)}(x), \Phi^{(-)}(0)\right]_{x\approx 0} = -\frac{1}{4\pi} \ln\left\{-\mu^2\left(x^2 + i\varepsilon x^0\right)\right\}. \qquad (4.132)$$

Os problemas no infravermelho do campo bidimensional escalar livre de massa nula serão ignorados, uma vez que as regras de seleção presentes nas exponenciais de Wick garantem a construção de um sub-espaço de Hilbert com métrica positiva [8, 43] para o setor fermiônico do modelo.

A corrente vetorial é calculada pelo procedimento regularizado de limite de *point-splitting*

$$J^{\mu}(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} f(\varepsilon)\Big\{\bar{\psi}(x+\varepsilon)\gamma^{\mu}\exp\Big(-i\int_{x}^{x+\varepsilon}\Big[g\,\gamma^{5}\in_{\mu\nu}\partial^{\nu}\eta(x)$$

$$+\ \tilde{g}\in_{\mu\nu}\partial^{\nu}\tilde{\phi}(z)\Big]dz^{\mu}\Big)\psi(x) - V.E.V.\Big\}$$

(4.133)

com a constante de renormalização de função de onda dada por

$$\mathcal{Z}_{\psi}(\varepsilon) = \exp\Big\{\tilde{g}^{2}\Big[\tilde{\phi}^{(+)}(x+\varepsilon),\tilde{\phi}^{(-)}(x)\Big] + g^{2}\Big[\eta^{(+)}(x+\varepsilon),\eta^{(-)}(x)\Big]\Big\},$$

(4.134)

e onde $f(\varepsilon)$ é uma constante de renormalização apropriada. A corrente vetorial é dada por

$$J^{\mu}(x) = j_{f}^{\mu}(x) - \frac{g}{\pi}\partial^{\mu}\eta(x) - \frac{\tilde{g}}{\pi}\in^{\mu\nu}\partial_{\nu}\tilde{\phi}(x), \qquad (4.135)$$

onde $j_{f}^{\mu}(x)$ é a corrente fermiônica livre

$$j_{f}^{\mu}(x) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\in^{\mu\nu}\partial_{\nu}\tilde{\varphi}(x), \qquad (4.136)$$

e a corrente axial é

$$J_{\mu}^{5}(x) = \in_{\mu\nu}J^{\nu}(x) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\partial_{\mu}\tilde{\varphi}(x) - \frac{g}{\pi}\in_{\mu\nu}\partial^{\nu}\eta(x) - \frac{\tilde{g}}{\pi}\partial_{\nu}\tilde{\phi}(x).$$

(4.137)

A forma bosonizada das equações de movimento quânticas (4.123) e (4.124) é

$$\left(1-\frac{g^2}{\pi}\right)\Box\eta(x)=0, \tag{4.138}$$

$$\left(1-\frac{\tilde{g}^2}{\pi}\right)\Box\tilde{\phi}(x)=\frac{\tilde{g}}{\sqrt{\pi}}\Box\tilde{\varphi}(x) \tag{4.139}$$

O operador de massa bosonizado assume a forma

$$\vdots\left(\bar{\psi}(x)\psi(x)\right)\vdots=-\frac{\mu}{\pi}:\cos\left(2\sqrt{\pi}\tilde{\varphi}(x)+2\tilde{g}\;\tilde{\phi}(x)\right): \tag{4.140}$$

e o termo que se origina da massa do férmion, e é invariante sob a aplicação do fator quiral γ^5, é dado por

$$\vdots\left(\bar{\psi}(x)\gamma^5\psi(x)\right)\vdots=i\frac{\mu}{\pi}:\sin\left(2\sqrt{\pi}\tilde{\varphi}(x)+2\tilde{g}\;\tilde{\phi}(x)\right):. \tag{4.141}$$

Para $m_0=0$ a corrente axial é conservada. Neste caso, os campos pseudo-escalares $\tilde{\varphi}$ e $\tilde{\phi}$ são ambos livres e de massa nula. Note-se que o campo escalar η é um campo escalar livre de massa nula mesmo quando $m_0\neq 0$. A partir do operador de massa bosonizado (4.140) e da equação de movimento (4.139) percebemos que, para $m_0\neq 0$, os campos $\tilde{\varphi}$ e $\tilde{\phi}$ são campos do tipo sine-Gordon. O operador de massa é independente do campo escalar livre η associado com o parâmetro de acoplamento g da interação corrente vetorial - derivada escalar (modelo de Schroer) na Lagrangiana

(4.121). Desta forma o operador de massa comuta trivialmente com a carga Q_η definida por

$$Q_\eta = -\frac{g}{\pi}\int \partial_0 \ \eta(x)\, dx^1 . \tag{4.142}$$

Para assegurarmos relações de comutação canônicas entre os campos $\tilde{\phi}$ e η, definimos o escalonamento dos campos

$$\tilde{\phi}(x) = \left(1 - \frac{\tilde{g}^2}{\pi}\right)^{-1/2} \tilde{\phi}'(x), \tag{4.143}$$

$$\eta(x) = \left(1 - \frac{\tilde{g}^2}{\pi}\right)^{-1/2} \eta'(x), \tag{4.144}$$

com $g^2 < \pi$ e $\tilde{g}^2 < \pi$ [21]. O operador de massa (4.140), a corrente vetorial (4.135) e as equações de movimento (4.138) - (4.139) podem ser reescritos como

$$\vdots\left(\bar{\psi}(x)\psi(x)\right)\vdots = -\frac{\mu}{\pi} : \cos\left(2\sqrt{\pi}\tilde{\varphi}(x) + \frac{2\tilde{g}}{\sqrt{1-\tilde{g}/\pi}}\tilde{\phi}'(x)\right):, \tag{4.145}$$

$$J_\mu(x) = -\frac{g}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-g^2/\pi}}\partial_\mu \eta(x) - \frac{1}{\pi}\in_{\mu\nu} \partial^\nu \left(\sqrt{\pi}\tilde{\varphi}(x) + \frac{\tilde{g}}{\sqrt{1-\tilde{g}^2/\pi}}\tilde{\phi}'(x)\right), \tag{4.146}$$

$$\Box \eta'(x) = 0 , \tag{4.147}$$

$$\square\left(\sqrt{\pi}\tilde{\phi}'(x)-\frac{\tilde{g}}{\sqrt{1-\tilde{g}^2/\pi}}\tilde{\varphi}(x)\right)=0. \qquad (4.148)$$

A dimensão de escala do operador de massa é dada por

$$D_{\bar{\psi}\psi}=\frac{\tilde{\beta}^2}{4\pi}, \qquad (4.149)$$

com $\tilde{\beta}^2$ definido por

$$\tilde{\beta}^2 \doteq \frac{4\pi}{1-\tilde{g}^2/\pi}. \qquad (4.150)$$

A consistência com (4.127) exige também que $\tilde{g}^2<\pi/2$. A dimensão de escala do operador de massa é a mesma que no caso do modelo de Thirring com massa e com parâmetro de acoplamento $\tilde{g}^2$. Como se mostra na Ref. [21], isto é conseqüência do fato de que a existência da interação de Thirring é uma propriedade intrínseca do modelo MRS. Em termos dos campos reescalonados $\tilde{\phi}'$ e η', o operador de campo de Fermi pode ser reescrito como

$$\psi(x)=\mathcal{Z}^{-1/2}:\exp i\left(\frac{g}{\sqrt{1-g^2/\pi}}\eta'(x)+\frac{\tilde{g}}{\sqrt{1-\tilde{g}^2/\pi}}\gamma^5\tilde{\phi}'(x)\right):\psi^{(0)}(x). \qquad (4.151)$$

Para $m_0\neq 0$ os campos $\tilde{\varphi}$ e $\tilde{\phi}$ não são livres, enquanto que o campo η é livre e de massa nula. Observando-se a expressão bosonizada para o operador de massa (4.145), nota-se que o campo de sóliton de sine-Gordon seria uma combinação dos campos $\tilde{\varphi}$ e $\tilde{\phi}$. Assim, por conta das combinações entre os campos pseudo-escalares $\tilde{\varphi}$ e $\tilde{\phi}'$ que aparecem nas Eqs. (4.145), (4.146), (4.148), e seguindo o mesmo procedimento introduzido na Ref. [21], definimos as transformações canônicas de campo

$$\tilde{\delta}\ \tilde{\Phi}(x) = \sqrt{\pi}\tilde{\varphi}(x) + \frac{\tilde{g}}{\sqrt{1-\tilde{g}^2/\pi}}\tilde{\phi}'(x), \tag{4.152}$$

$$\tilde{\delta}\ \tilde{\xi}(x) = \frac{\tilde{g}}{\sqrt{1-\tilde{g}^2/\pi}}\tilde{\varphi}(x) - \sqrt{\pi}\tilde{\phi}'(x). \tag{4.153}$$

Impondo relações da comutação canônicas para os campos $\tilde{\Phi}$ e $\tilde{\xi}$, resulta o parâmetro $\tilde{\delta}$ ser determinado pela condição

$$\tilde{\delta}^2 = \frac{\tilde{\beta}^2}{4} = \frac{\pi}{1-\tilde{g}^2/\pi}. \tag{4.154}$$

A transformação de campo (4.152) – (4.153) é consistente com a introdução da perturbação de massa, uma vez que não associa o campo $\tilde{\eta}$ com os campos $\tilde{\varphi}$ e $\tilde{\phi}$. Os campos $\left(\tilde{\phi}', \tilde{\varphi}\right)$ podem ser escritos em termos dos novos campos $\left(\tilde{\Phi}, \tilde{\xi}\right)$ como

$$\tilde{\phi}'(x) = \frac{\overline{g}}{\sqrt{\pi}}\tilde{\Phi}(x) - \frac{\sqrt{\pi}}{\tilde{\delta}}\tilde{\xi}(x), \tag{4.155}$$

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{\tilde{\delta}}\tilde{\Phi}(x) + \frac{\overline{g}}{\sqrt{\pi}}\tilde{\xi}(x). \tag{4.156}$$

A equação de movimento (4.148) se reduz então a

$$\Box\tilde{\xi}(x) = 0. \tag{4.157}$$

A corrente vetorial (4.146) pode ser reescrita como

$$J_\mu(x) = \eta_\mu(x) + \mathcal{J}_\mu^{Th}(x), \tag{4.158}$$

onde

$$\eta_\mu(x) = -\frac{g}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-g^2/\pi}}\partial_\mu\ \eta(x). \tag{4.159}$$

e a corrente de Thirring é dada por

$$\mathcal{J}_\mu^{Th}(x) = -\frac{\tilde{\beta}}{2\pi}\in_{\mu\nu}\partial^\nu\tilde{\Phi}(x). \tag{4.160}$$

Como ocorre no caso do modelo MRS [21], o campo ξ não contribui para a corrente fermiônica. Usando o fato de que o campo ξ é livre e de massa nula,

$$\in_{\mu\nu}\partial^\nu\tilde{\xi}(x) = \partial_\mu\xi(x), \tag{4.161}$$

e usando (4.155) – (4.156), o campo de Fermi (4.128) pode ser reescrito como

$$\psi(x) = \mathcal{Z}_\psi^{-1/2} :\exp\left\{i\left[\frac{g}{\sqrt{1-g^2/\pi}}\eta'(x) + \tilde{g}\xi(x)\right]\right\}:\Psi(x), \tag{4.162}$$

onde Ψ é o operador de campo de Fermi do modelo de Thirring com massa dado pelo operador de Mandelstam [24]

$$\Psi(x) = \left(\frac{\mu}{2\pi}\right)^{1/2} e^{-i\frac{\pi}{4}\gamma^5} :\exp\left(i\left\{\gamma^5\frac{\tilde{\beta}}{2}\tilde{\Phi}(x)\ +\ 2\pi\ \tilde{\beta}^{-1}\int_{x^1}^{\infty}\partial_0\tilde{\Phi}\left(x^0,z^1\right)dz^1\right\}\right):. \tag{4.163}$$

O operador de massa bosonizado (4.145) é dado agora por

$$\vdots\left(\bar{\psi}(x)\psi(x)\right)\vdots \equiv \vdots\left(\bar{\Psi}(x)\Psi(x)\right)\vdots = -\frac{\mu}{\pi}:\cos\left[\tilde{\beta}\,\tilde{\Phi}(x)\right]:. \qquad (4.164)$$

A interação de Thirring não é afetada pela introdução do acoplamento corrente vetorial – derivada escalar correspondente ao modelo de Schroer (acoplamento por g), o que implica ser a interação de Thirring uma propriedade intrínseca do modelo RS com massa nula. A equação de movimento (4.122) para o campo de Fermi pode ser reescrita como

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m_0\right)\psi(x) = \tilde{g}^2 N\left[\gamma^{\mu}\psi(x)\mathcal{J}_{\mu}^{Th}(x)\right] + N\left[\gamma^{\mu}\psi(x)\left\{\overline{g}\partial_{\mu}\xi(x) + g\partial_{\mu}\eta(x)\right\}\right]. \qquad (4.165)$$

A equação (4.165) é a equação de movimento para o modelo de Thirring com massa e com dois acoplamentos corrente vetorial – derivada escalar, ou seja, o modelo aqui chamdo de modelo de Schroer-Thirring [21].

As funções de Wightman do operador de campo de Fermi $\psi(x)$ são as mesmas do campo de Fermi $\Psi(x)$ do modelo de Thirring, estas envoltas agora pelas contribuições dos campos livres η' e ξ

$$\begin{gathered}\langle 0|\psi(x_1)\cdots\psi(x_n)\bar{\psi}(y_1)\cdots\bar{\psi}(y_n)|0\rangle = \\ \mathcal{W}(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)\times\langle 0|\Psi(x_1)\cdots\Psi(x_n)\bar{\Psi}(y_1)\cdots\bar{\Psi}(y_n)|0\rangle,\end{gathered} \qquad (4.166)$$

onde

$$\mathcal{W}(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n) =$$

$$\langle 0 | \prod_{j=1}^{n} : \exp\left(i \frac{g}{\sqrt{1 - g^2/\pi}} \; \eta'\left(x_j\right) \; + \tilde{g}\, \xi\left(x_j\right) \right) :$$

$$\times \prod_{k=1}^{n} : \exp\left(-i \frac{g}{\sqrt{1 - g^2/\pi}} \; \eta'\left(y_k\right) \; + \tilde{g} \; \xi\left(y_k\right) \right) : | 0 \rangle \tag{4.167}$$

Para $g = 0$ obtemos a partir de (4.166) as funções de Wightman do campo de Fermi do modelo MRS [21], e para $\tilde{g} = 0$ $\left(\tilde{\beta}^2 = 4\pi\right)$ as funções de Wightman do modelo de Schroer [29] são totalmente recuperadas.

4.2.3. Equivalência Fraca do Modelo DC com o Modelo de Thirring

Tendo em vista a Eq. (4.166), pode ser estabelecido um mapeamento um-para-um entre as funções de Wightman fermiônicas do modelo DC e as do modelo de Thirring com massa, pela imposição de que a exponencial ordenada segundo Wick da combinação de campos de Bose livres

$$\Omega(x) = g\eta(x) + \overline{g}\xi(x), \tag{4.168}$$

produza estados infinitamente não-localizados

$$\mathcal{W}\left(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\right) = 1. \tag{4.169}$$

O conjunto de campos $\left\{\tilde{\phi}, \eta, \psi\right\}$ constitui a estrutura matemática intrínseca do modelo, e gera a álgebra de campo local intrínseca $\mathfrak{F}$ que define o modelo. A quantização da métrica para esses campos deve emergir como uma conseqüência de uma condição algébrica estrutural intrínseca ao modelo. É possível, por um “tour de force”, obter-se a equivalência fraca entre o modelo DC e o modelo de Thirring, empregando-se o artifício de impor quantização com métrica oposta para os campos η e ξ. Isto quer dizer claramente que se assume desde o começo que o termo cinético para o campo η na Lagrangiana (4.121) possui sinal negativo. Neste caso a equação de movimento (4.138) resulta substituída por

$$\left(-1-\frac{g^2}{\pi}\right)\Box\,\eta(x)=0\,. \tag{4.170}$$

Obtém-se o campo canônico η' após se escalonar o campo como

$$\eta'(x)=\left(1+\frac{g^2}{\pi}\right)^{1/2}\eta(x), \tag{4.171}$$

de tal forma que

$$\langle 0|\eta'(x)\eta'(y)|0\rangle=-\langle 0|\xi(x)\xi(y)|0\rangle\,. \tag{4.172}$$

O operador de campo de Fermi (4.162) pode ser reescrito como

$$\psi(x)=\omega(x)\Psi(x), \tag{4.173}$$

onde

$$\omega(x)=:e^{i\,\Omega(x)}:=:\exp\left(i\left\{\tilde{g}\;\xi(x)+\frac{g}{\sqrt{1+g^2/\pi}}\eta(x)\right\}\right):. \tag{4.174}$$

Assim, o operador $\Omega(x)$ comutaria com si mesmo:

$$\left[\Omega(x),\Omega(y)\right]=0,\ \forall(x,y), \tag{4.175}$$

desde que os parâmetros g e $\tilde{g}$ não sejam independentes, e exibam a relação

$$\left(1-\frac{\tilde{g}^2}{\pi}\right)\left(1+\frac{g^2}{\pi}\right)=1\,. \tag{4.176}$$

A relação (4.129) entre os parâmetros de acoplamento é similar a uma das relações obtidas na Ref. [35][2]. A condição (4.129) implica

$$\frac{g^2}{\pi}=\frac{\tilde{\beta}^2}{4\pi}-1\,. \tag{4.177}$$

Sob estas hipóteses o operador exponencial $\omega(x)$, por si mesmo, gera funções de Wightamn constantes. Uma vez que o operador $\omega(x)$ comuta consigo mesmo e também com o campo de Thirring $\Psi(x)$, as funções de Wightman genéricas geradas pelo campo de Fermi (4.126) são isomorfas àquelas geradas pelo campo de Thirring.

O espaço de Hilbert do modelo DC padrão, conforme definido pela Lagrangiana (4.121), é uma representação da álgebra de campo local $\mathfrak{F}$, gerada pelos campos intrínsecos $\left\{\tilde{\phi},\eta,\bar{\psi},\psi\right\}\equiv\left\{\tilde{\Phi},\eta,\xi\right\}$, ou seja,

$$\mathcal{H}=\mathfrak{F}\left|0\right\rangle. \tag{4.178}$$

No modelo modificado, em que atribuímos quantização com métrica negativa ao campo η, o espaço de Hilbert de estados é uma representação da álgebra de campos $\mathfrak{F}'$, i.e., $\mathcal{H}'=\mathfrak{F}'\left|0\right\rangle$. O operador $\omega(x)$ não comuta com a corrente vetorial $J^{\mu}\in\mathfrak{F}'$, dada

[2] Uma expressão similar para o campo de Fermi em termos do operador de Mandelstam foi obtida na Ref. [35]. Neste caso o campo "espúrio" σ que gera funções de Wightman constantes é definido em termos de uma combinação dos três campos $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\phi}$ e $\tilde{\eta}$. Contudo, como no modelo com férmions com massas os campos $\tilde{\varphi}$ e $\tilde{\phi}$ são campos de sine-Gordon e $\tilde{\eta}$ permanece livre e de massa nula, a redefinição de campos usada na Ref. [35] mostra-se desprovida de sentido. A relação (4.176) entre os parâmetros de acoplamento é obtida na Ref. [35] com o campo $\tilde{\phi}$ quantizado com métrica negativa e para a condição $\tilde{\beta}^2<4\pi$.

por (4.158), e resulta ser o portador da carga Q_η. Isto implica que *o operador* $\omega(x)$ *não se reduz à identidade em todo o espaço de Hilbert* $\mathcal{H}'$, mas apenas ao operador identidade em um sub-espaço próprio de estados $\mathcal{H}'_{Th}$, definido pelo conjunto de funções de Wightman do operador de campo de Fermi ψ. No sub-espaço de Hilbert $\mathcal{H}'_{Th}$ a independência da posição do operador $\omega(x)$ pode ser expressa na forma fraca como

$$\langle 0|\omega(x_1)\cdots\omega(x_\ell)\omega(x_1')\cdots\omega(x_\ell')\psi(y_1)\cdots\psi(y_n)\bar{\psi}(z_1)\cdots\bar{\psi}(z_n)|0\rangle =$$

$$\langle 0|\Psi(y_1)\cdots\Psi(y_n)\bar{\Psi}(z_1)\cdots\bar{\Psi}(z_n)|0\rangle. \tag{4.179}$$

Como os campos de Bose η e ξ pertencem à álgebra de campo $\mathfrak{F}'$, pode-se definir em $\mathcal{H}'$ o campo de Thirring

$$\Psi(x) = \psi(x)\omega^{-1}(x), \tag{4.180}$$

e a corrente de Thirring

$$\mathcal{J}^\mu_{Th}(x) = J^\mu(x) - \eta^\mu(x), \tag{4.181}$$

de tal forma que o sub-espaço de Hilbert $\mathcal{H}'_{Th}$ seja gerado a partir da sub-álgebra de campo $\mathfrak{F}'_{Th}\left\{\Psi, \mathcal{J}^\mu_{Th}\right\} \subset \mathfrak{F}'\{\psi, \eta, \xi\}$. No modelo DC padrão, definido pela Lagrangiana (4.121), a equivalência fraca com o modelo de Thirring não pode ser estabelecido em termos dos operadores de campo que definem a álgebra de campo local intrínseca $\mathfrak{F}$.

4.2.4. O Modelo DC com Férmions de Massa Nula: Equivalência com o Modelo Rothe-Stamatescu com Massa Nula

Consideraremos neste capítulo a relação entre o modelo DC com férmion de massa nula e o modelo de Thirring com massa nula e parâmetro de acoplamento g. Usaremos uma abordagem alternativa, que consiste em introduzir uma transformação de campo canônica que só se aplica ao modelo DC com férmions de massa nula. Iniciamos considerando a solução de operador (4.128) para $m_0 = 0$. Neste caso, o campo $\tilde{\varphi}$ é livre e de massa nula, e usando que

$$\varphi(x) = \int_{x^1}^{\infty} \partial_0 \tilde{\varphi}\left(x^0, z^1\right) dz^1 , \tag{4.182}$$

podemos escrever o campo de Fermi como

$$\psi(x) = \left(\frac{\mu}{2\pi}\right)^{1/2} : e^{i\left[\frac{g}{\sqrt{1-g^2/\pi}}\eta'(x) + \gamma^5 \frac{\tilde{g}}{\sqrt{1-\tilde{g}^2/\pi}}\tilde{\phi}'(x)\right]} :: e^{i\sqrt{\pi}\left[\gamma^5\tilde{\varphi}(x) + \varphi(x)\right]} :, \tag{4.183}$$

e a corrente vetorial (4.135) pode ser reescrita como

$$J_\mu(x) = \phi_\mu(x) - \frac{1}{\pi}\partial_\mu\left(\sqrt{\pi}\varphi(x) + \frac{g}{\sqrt{1-g^2/\pi}}\eta'(x)\right), \tag{4.184}$$

onde

$$\phi_\mu(x) = -\frac{1}{\pi}\frac{\tilde{g}}{\sqrt{1-\tilde{g}^2/\pi}} \in_{\mu\nu} \partial^\nu \tilde{\phi}'(x) . \tag{4.185}$$

Aplicaremos agora uma transformação canônica sobre os campos escalares de massa nula η' e φ, com dependência do parâmetro de acoplamento g

$$\delta\,\Sigma(x) = \sqrt{\pi}\varphi(x) + \frac{g}{\sqrt{1-g^2/\pi}}\eta'(x), \tag{4.186}$$

$$\delta\,\zeta(x) = \frac{g}{\sqrt{1-g^2/\pi}}\varphi(x) - \sqrt{\pi}\eta'(x), \tag{4.187}$$

com

$$\delta^2 = \frac{\pi}{1-g^2/\pi}. \tag{4.188}$$

O operador de campo de Fermi (4.183) pode ser reescrito como

$$\psi(x) =: \exp\left(i\gamma^5\left[g\tilde{\zeta}(x) + \frac{\tilde{g}}{\sqrt{1-\tilde{g}^2/\pi}}\tilde{\phi}'(x)\right]\right) : \Psi(x), \tag{4.189}$$

onde $\Psi(x)$ é o operador de campo de Fermi do modelo de Thirring com massa nula

$$\Psi(x) = :\exp\left(i\frac{\beta}{2}\gamma^5\tilde{\Sigma}(x) \; + \; i\,\frac{2\pi}{\beta}\Sigma(x)\right): \tag{4.190}$$

com

$$\frac{4\pi}{\beta^2} = \frac{1}{1-g^2/\pi}. \tag{4.191}$$

A corrente vetorial (4.184) é dada por

$$J_\mu(x) = \phi_\mu(x) + J_\mu^{Th}(x), \tag{4.192}$$

onde a corrente de Thirring é

$$J_{\mu}^{Th}(x) = -\frac{2}{\beta} \in_{\mu\nu} \partial^{\nu} \tilde{\Sigma}(x). \tag{4.193}$$

O campo $\zeta(x)$ não contribui para a corrente fermiônica. Para $\tilde{g} = 0$, o campo de Fermi (4.183) corresponde à solução de operador do modelo de Rothe-Stamatescu com uma interação de Thirring (*modelo de Rothe-Stamatescu com massa nula*). A equação de movimento (4.122) agora é dada por

$$i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x) = g^2 N\left[\gamma^{\mu}\psi(x) J_{\mu}^{Th}(x)\right] + N\left[\gamma^{\mu}\gamma^5\psi(x)\left\{g\,\partial_{\mu}\tilde{\zeta}(x) + \tilde{g}\,\partial_{\mu}\tilde{\phi}(x)\right\}\right]. \tag{4.194}$$

Deve ser enfatizado aqui que a transformação definida pelas Eqs. (4.186) - (4.187) somente pode ser implementadas no modelo com férmions de massa nula, desde que na Eq. (4.184) usou-se o fato de que o campo φ é um campo livre de massa nula. Para $m_0 = 0$, em conseqüência das conservações das correntes tanto vetorial quanto axial, os campos η, φ e ϕ são livres e de massa nula. Para férmions com massa o campo $\tilde{\varphi}$ é um campo do tipo sine-Gordon, enquanto que o campo η permanece livre e de massa nula. Neste caso a transformação (4.186) - (4.187) não se aplica, uma vez que combina um campo livre com um campo interagente. Na verdade, a transformação (4.186) - (4.187) elimina o operador de massa. Para férmions de massa nula pode-se reescrever a transformação (4.186) - (4.187) em termos dos campos pseudo-escalares correspondentes, e o termo de massa pode ser escrito como

$$:\cos\left(2\sqrt{\pi}\tilde{\varphi}(x) + 2\tilde{g}\,\tilde{\phi}(x)\right):=:\cos\left(\beta\,\tilde{\Sigma}(x) + 2g\,\tilde{\zeta}(x) + \tilde{g}\,\partial_{\mu}\tilde{\phi}(x)\right). \tag{4.195}$$

Isto explica porque a redefinição de campo introduzida na Ref. [35] resulta sem significado para férmions com massa.

4.2.4.1. Equivalência Fraca com o Modelo de Thirring com Massa Nula

A equivalência fraca com o modelo de Thirring com massa nula pode ser estabelecida considerando-se o campo ϕ quantizado com métrica negativa de forma que

$$\tilde{\phi}' = \sqrt{1+\frac{\tilde{g}}{\pi}}\tilde{\phi}\,. \tag{4.196}$$

O operador de campo de Fermi é dado em termos da exponencial de Wick da combinação de campos

$$\tilde{\theta}(x) = g\tilde{\zeta}(x) + \frac{\tilde{g}}{\sqrt{1+\frac{\tilde{g}}{\pi}}}\tilde{\phi}'(x)\,, \tag{4.197}$$

da forma seguinte

$$\psi(x) =: e^{i\gamma^5\tilde{\theta}(x)} : \Psi(x)\,. \tag{4.198}$$

A exponencial do campo $\tilde{\theta}(x)$ na ordenação de Wick gera funções de Wightman constantes, desde que obriguemos as constantes de acoplamento a estarem relacionadas de acordo com a expressão

$$\left(1+\frac{\tilde{g}^2}{\pi}\right)\left(1-\frac{\tilde{g}^2}{\pi}\right) = 1\,. \tag{4.199}$$

acarretando que[3]

$$\frac{\tilde{g}^2}{\pi} = \frac{4\pi}{\beta^2} - 1 . \tag{4.200}$$

Neste caso as funções de Wightman do campo de Fermi (4.128) são isomorfas àquelas do modelo de Thirring com massa nula e constante de acoplamento g.

4.2.5. Observações Conclusivas sobre a Seção 4.2

A presença no modelo DC de uma interação de Thirring "oculta" é uma propriedade intrínseca ao modelo, e independente de qualquer relação entre os parâmetros de acoplamento g e $\tilde{g}$. O modelo DC é isomorfo ao modelo de Schroer acrescido de uma interação de Thirring (modelo de Schroer-Thirring). Pode-se estabelecer a equivalência fraca entre este modelo e o modelo de Thirring sem a necessidade de reduzir o número de graus de liberdade. Consegue-se este resultado partindo de um modelo DC modificado, no qual os campos bosônicos entram com métrica oposta. Neste modelo, as funções de Wightman genéricas do operador de campo de Fermi são isomorfas àquelas encontradas no modelo de Thirring. Portanto, para férmions de massa nula, o modelo DC pode ser mapeado sobre o modelo de Rothe-Stamatescu-Thirring de massa nula.

[3] A relação (4.8) entre as constantes de acoplamento foi obtida na Ref. [35] com o campo η quantizado com métrica negativa, com a condição $\beta^2 > 4\pi$.

5. APÊNDICE

Alguns Modelos Solúveis em Duas Dimensões

(*Obs.: Os textos entre aspas são traduções diretas de trechos dos trabalhos citados*)

i. Walter E. Thirring, *Ann. Phys.,* **3,** 91 (1958): "A Soluble Relativistic Field Theory"

- "Todos os exemplos teóricos que poderiam ser analisados em detalhe (N.B.:em *1958*) são essencialmente não-relativistas. Esses modelos solúveis são: a teoria escalar neutra estática, a teoria de par independente de spin isotópico, o modelo de Lee, e variações. no presente trabalho, nos propusemos resolver um modelo de uma teoria de campos relativista, descrevendo um campo espinorial auto-interagente em uma dimensão espacial e uma temporal"
- "fomos levados a esse modelo unicamente pela intenção de encontrar o modelo mais simples de campos relativísticos interagentes. E, como a redução da quantidade de campos não simplifica o problema suficientemente – a teoria $\lambda\phi^4$ não é solúvel – tivemos que recorrer à redução da dimensionalidade do problema".
- "sucede também que campos de Fermi são fundamentalmente mais simples que campos de Bose: mesmo para um espaço de dimensão nula - a teoria $\lambda\phi^4$ (e.g. o oscilador anarmônico) não pode ser resolvida em termos de funções conhecidas, ao passo que o problema correspondente, no caso dos campos de Fermi, é trivial".
- "Assim, o caso não trivial mais simples parece ser o de um campo de Fermi unidimensional com uma interação $\lambda\bar{\psi}\psi\bar{\psi}\psi$, que, apesar de considerável complexidade, vem a ser solúvel".

- "a teoria em uma dimensão (espacial) certamente será completamente diferente desta mesma teoria em três dimensões, tal como foi tratada por Heisenberg (*Z. Naturforsch.* **9A,** 292 (1954) "**.**

LAGRANGIANA DE THIRRING:

$$\mathcal{L}_T = \bar{\psi}\left(i\not{\partial}\right)\psi + \frac{1}{2}g\left(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\right)^2$$

A equação de movimento se escreve

$$i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi + g\, j^{\mu}\gamma_{\mu}\psi = 0\,,$$

onde

$$j^{\mu}\left(x\right) = \bar{\psi}\left(x\right)\gamma_{\mu}\psi\left(x\right).$$

A quantização do problema foi cabalmente resolvida por Klaiber [*Boulder Lectures on Theoretical Physics, 1967* (ed. Gordon and Breach, N.Y., 1968], usando o método de operadores.

A representação do operador fermiônico apresentada na análise realizada por Swieca [*Fortschritte der Physik* **25**, 303 (1977)] é

$$\psi\left(x\right) = \sqrt{\frac{\mu}{2\pi}} : \exp i\left\{\alpha\varphi\left(x\right) + \beta\gamma_5\tilde{\varphi}\left(x\right)\right\} : \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},$$

com as relações

$$\partial_{\mu}\varphi = \varepsilon_{\mu\nu}\partial^{\nu}\tilde{\varphi};$$

$$j_\mu = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_\mu \tilde{\varphi}\,;$$

$$\Box \tilde{\varphi} = 0\,;$$

$$\alpha - \beta = -\frac{g}{\sqrt{\pi}}\,,$$

sendo o parâmetro μ a massa reguladora no infravermelho, associada com φ.

O spin s – número quântico de estados que se transformam em duas dimensões analogamente a espinores – toma valores contínuos

$$s = \frac{\alpha\beta}{2\pi}\,,$$

logo, no caso de um férmion canônico com spin $s = 1/2$ obtém-se

$$j_\mu(x) = -\frac{\beta}{\pi} \varepsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \varphi(x)$$

e

$$\frac{\beta^2}{\pi} = \frac{1}{1 - \frac{g}{\pi}}\,.$$

ii. Julian Schwinger, *Phys. Rev.* **128,** 2425 (1962)**:** "Gauge Theory and Mass II" (1962) – QED_2

- "A invariância de calibre de um campo vetorial não requer necessariamente a existência de uma partícula física sem massa".
- "Apresentaremos neste trabalho um modelo específico para o qual uma solução exata afirma essa possibilidade lógica: é a situação física, embora não encontrável na natureza, da eletrodinâmica em uma dimensão espacial, na qual o campo de Dirac dotado de carga não possui uma constante de massa associada".

LAGRANGIANA DO MODELO VETORIAL DE SCHWINGER:

$$\mathcal{L}_S = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \overline{\psi}\left(i\not{\partial} + e\sqrt{\pi}\not{A}\right)\psi$$

As equações de movimento quânticas são

$$i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x) + eN\left[\gamma^{\mu} A_{\mu}(x)\psi(x)\right] = 0\,;$$

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} + eJ^{\nu} = 0\,,$$

(a segunda é a equação de Maxwell com conservação da corrente vetorial J^{μ}),

onde

$$F^{\mu\nu} = \partial^{\mu} A^{\nu} - \partial^{\nu} A^{\mu}$$

e

$$J^{\nu} = N\left[\bar{\psi}\gamma^{\nu}\psi\right]$$

onde $N[\bullet]$ representa o produto normal adequadamente definido por Schwinger.

A corrente vetorial axial tem sua divergência dada pela anomalia de Adler-Bell-Jackiw [S. L. Adler, *Phys. Ver.* **177**, 2426 (1969); J. S. Bell and R. Jackiw, *Nuovo Cimento A*, **60**, 47 (1969)]:

$$\partial_{\mu} J_5^{\mu} = \frac{e}{2\pi} \varepsilon_{\mu\nu} F^{\mu\nu} .$$

No calibre de Lorentz $\partial_{\mu} A^{\mu} = 0$, e usando o Ansatz

$$A_{\mu} = -\frac{\sqrt{\pi}}{e}\left(\tilde{\partial}_{\mu}\tilde{\Sigma} + \partial^{\mu}\eta\right),$$

onde

$$\tilde{\partial}_{\mu} = \varepsilon_{\mu\nu}\partial^{\nu},$$

o tensor de campo será

$$F_{\mu\nu} = -\frac{\sqrt{\pi}}{e}\left(\partial_{\mu}\tilde{\partial}_{\nu} - \partial_{\nu}\tilde{\partial}_{\mu}\right)\tilde{\Sigma} = \frac{\sqrt{\pi}}{e}\varepsilon_{\mu\nu}\Box\,\tilde{\Sigma},$$

As correntes vetorial e axial serão, respectivamente,

$$J^{\mu} \equiv \bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\tilde{\partial}^{\mu}\Phi$$

e

$$J_5^{\mu} \equiv \bar{\psi}\gamma^{\mu}\gamma^{5}\psi = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\partial^{\mu}\Phi\,.$$

As equações de Maxwell podem ser escritas então na forma seguinte:

$$\tilde{\partial}^{\nu}\left(\Box + \frac{e^2}{\pi}\right)\tilde{\Sigma} - \frac{e^2}{\sqrt{\pi}}L^{\nu} = 0\,,$$

onde

$$L_{\mu} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\tilde{\partial}_{\mu}h = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\tilde{\partial}_{\mu}\left(\varphi + \eta\right).$$

Como

$$\tilde{\partial}_{\mu}L_{\mu} = 0 \;\therefore\; \Box\left(\Box + \frac{e^2}{\pi}\right)\tilde{\Sigma} = 0\,,$$

$\tilde{\Sigma}$ pode ser, em geral, uma combinação entre um campo com massa e um campo sem massa, logo, podemos considerar, sem perda de generalidade, que

$$\left(\Box + \frac{e^2}{\pi}\right)\tilde{\Sigma} = 0\,,$$

Isto é, considerar que $\tilde{\Sigma}$ é um campo livre com massa $e/\sqrt{\pi}$.

Desta forma, o campo de calibre adquiriu massa, sem perder a invariância de calibre, por um mecanismo de Higgs dinâmico.

Algumas observações:

- Os campos de Bose η e $\tilde{\eta}$ possuem métrica indefinida, portanto, não estão associados a estados de energia ou momento linear, e não possuem significado físico;

- A invariância de calibre é dada em termos de $\tilde{\Sigma}$ e $(\tilde{\eta}+\tilde{\varphi})$;

- O campo de Bose $\tilde{\Sigma}$ define o espectro físico do Hamiltoniano como sendo o espaço de Fock dos mésons livres pseudo-escalares com massa $e/\sqrt{\pi}$, resultantes da "absorção" dos bósons de Goldstone φ pelo campo de calibre A_μ, através do mecanismo de Higgs;
- O vácuo é infinitamente degenerado, e o valor esperado no vácuo (V.E.V.) de ψ é não-nulo, o que configura uma quebra espontânea de simetria $U(1)\times\tilde{U}(1)$. Que aqui é permitida, apesar do teorema de Coleman-Mermin-Wagner, devido à massa nula dos férmions;
- Os campos físicos são $A_\mu,\psi,\bar{\psi}$, e nenhum mais.

iii. Walter E. Thirring, Julius E. Wess, *Ann. Phys.*, **27,** 331-337 (1964): "Solution of a Field Theoretical Model in One Space-One Time Dimension"

- "Investigaremos a seguir uma teoria de férmions com massa nula interagindo com uma partícula vetorial com massa, em duas dimensões. Estando a partícula vetorial acoplada a uma corrente conservada, não é necessário exigir a condição de Lorentz. É bem conhecido que, neste caso, os quanta de energia negativa são efetivamente desacoplados, e podem ser descartados".
- "Esta teoria tem as seguintes vantagens:
    a) Todas as componentes do campo vetorial são quantidades canônicas. Logo, as equações para o gerador das funções de Green podem ser deduzidas diretamente;
    b) Todas as funções de Green são funções finitas do espaço e do tempo, e nunca lidaremos com quantidades infinitas;"
- "Os resultados da teoria dependem do processo de limite que define a corrente. Adotaremos o que, em particular, foi adotado por Schwinger (*point-splitting*) no trabalho anteriormente referido, que é

$$j_{\mu}(x) = e \lim_{\varepsilon\to\pm 0} \psi^{\dagger}(x+\vec{\varepsilon}/2)\alpha_{\mu}\psi(x-\vec{\varepsilon}/2)\exp\left(ieA^{\rho}(x)\vec{\varepsilon}_{\rho}\right),$$

onde $\vec{\varepsilon}$ é um vetor que se aproxima de zero por um sentido e pelo sentido oposto, assegurando-se com esta definição a Hermiticidade da corrente. Todos os termos invariantes de calibre e de Lorentz são absorvidos na polarização do vácuo, e não precisarão ser subtraídos por regularização. Em duas dimensões, isto leva naturalmente à renormalização da massa do bóson vetorial."
- "O conteúdo da teoria está implícito no funcional gerador

$$G(J,\eta,\eta') = T\langle 0|\exp\left\{i\int dy\left[A^{\mu}(y)J_{\mu}(y)+\eta^{\dagger}(y)\psi(y)+\psi^{\dagger}(y)\eta(y)\right]\right\}|0\rangle\text{"}$$

- "O espaço de Hilbert físico é gerado pela aplicação de potências de $A, \psi, \psi^{\dagger}$ sobre o vácuo."

LAGRANGIANA DO MODELO DE THIRRING-WESS:

$$\mathcal{L}_{TW} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ - eA\!\!\!/\right)\psi + \frac{1}{2} m_0^2 A_\mu A^\mu$$

Ao nível clássico o modelo é definido pelas equações de movimento (equações acopladas de Dirac-Proca):

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m_0^2 A^\nu + eJ^\nu = 0 \ ,$$

$$\left(i\partial\!\!\!/ + eA\!\!\!/\right)\psi = 0$$

onde, como de costume,

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \ ;$$

$$J^\nu = \bar{\psi}\gamma^\nu \psi \ .$$

Usando para o campo de férmion o Ansatz

$$\psi_\alpha(x) = \left(\frac{\bar{\mu}}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-i\frac{\pi}{4}\gamma^5_{\alpha\alpha}\right] : \exp\left[i\Phi_\alpha(x)\right] : ,$$

onde

$$\bar{\mu} = \left(\frac{e}{2\sqrt{\pi}}\right)^\gamma$$

($\gamma \approx 0,5772...$ é a constante de Euler-Mascheroni), $:\bullet:$ representa o produto normal – ordenado segundo Wick -, e

$$\Phi_\alpha(x) = \gamma^5_{\alpha\alpha}\left[\alpha\Sigma(x) + \beta\phi(x)\right] + \frac{\pi}{\beta}\int_{x^1}^{\infty} dy^1 \partial_0 \phi\left(x^0, y^1\right).$$

O Hamiltoniano bosonizado correspondente ao modelo será

$$H = \frac{1}{2}\int : \pi_\Sigma^2 + \pi_\phi^2 + \left(\partial_1\Sigma\right)^2 + m^2\Sigma^2 + \left(\partial_1\phi\right)^2 :,$$

contendo um campo livre de massa nula ϕ e um campo livre Σ com massa $m = \sqrt{\frac{e^2}{\pi} + m_0^2}$ dada pela equação

$$\Box\,\Sigma(x) + \left(m_0^2 + \frac{e^2}{\pi}\right)\Sigma(x) = 0\,.$$

Foi mostrado por Lowenstein e Swieca [*Ann. Phys.* **68**, 172 (1971)] como este modelo, no limite $m_0 \to 0$, e calculado de forma apropriada, resulta no modelo de Schwinger para a QED_2 .

iv. Roman W. Jackiw, Ramamurti Rajaraman, *Phys. Rev. Lett.*, **53,** 1219 (1984)**:** “Vector-Meson Mass Generation by Chiral Anomalies” ($a_{JR} \geq 1$)

- "Mostramos que o modelo de Schwinger quiral em 1+1 dimensões, que é anômalo, resulta numa teoria consistente e unitária, embora não invariante de calibre. O modelo é exatamente solúvel e contém um bóson livre com massa, além de excitações harmônicas".
- "Exploramos o fato de que o determinante fermiônico, assim como a anomalia, possuem alguma arbitrariedade associada à regularização das contribuições de radiação fermiônicas";
- "Neste modelo simples, a presença da anomalia, em conjunto com a demanda por uma teoria unitária consistente que permita a interpretação de partícula, força a quebra espontânea de simetria de calibre, através da geração de massa para o bóson de calibre".

LAGRANGIANA DO MODELO DE SCHWINGER QUIRAL:

$$\mathcal{L}_{Sq} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \bar{\psi}\left[i\not{\partial} + e\sqrt{\pi}\not{A}\left(1 + i\gamma^5\right)\right]\psi \,,$$

onde

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1 \,.$$

A ação efetiva se escreve, no caso Abeliano, como

$$W[A] = \frac{a_{JR} e^2}{2} \int d^2 x A^\mu A_\mu - \frac{e^2}{2} \int\int \left(g^{\mu\lambda} + \varepsilon^{\mu\lambda}\right) A_\lambda \frac{\tilde{\partial}_\mu \tilde{\partial}_\nu}{\Box} \left(g^{\nu\rho} + \varepsilon^{\nu\rho}\right) A_\rho$$

Passaremos adiante a considerar a QED_2 (Abeliana) como um caso particular da QCD_2, para resumir todas as potencialidades do modelo de Schwinger quiral e do parâmetro de Jackiw-Rajaraman a_{JR}.

- Anomalias

a) Julius Wess, Bruno Zumino, *Phys. Lett.* **37B,** 95 (1971) – "Consequences of Anomalous Ward Identities"

b) Edward Witten, *Nucl. Phys.* **B223,** 422 (1983)**:** "Global Aspects of Current Algebra"; *Comm. Math. Phys.* **92,** 455 (1984)**:** "Non-Abelian Bosonization in Two Dimensions"

c) Alexander M. Polyakov, Paul B. Wiegmann, *Phys. Lett.* **141B,** 223 (1984)**:** "Goldstone Fields in Two Dimensions with Multivalued Actions"

A idéia de se representar férmions em termos de exponenciais de campos bosônicos tem um papel fundamental na busca de ações efetivas que possibilitem uma descrição fenomenológica da interação de férmions com um potencial confinante. Partindo de um Ansatz quadridimensional e do trabalho de Wess-Zumino (1971), Witten considerou, em duas dimensões, para o caso de férmions de massa nula, a seguinte ação (ação de Wess-Zumino-Witten (WZW)):

$$S_{WZW} = nS_{P\sigma M} + nS_{WZ} \,.$$

ou

$$S_{WZW} = n\Gamma\left[g\right],$$

onde

$$S_{WZ} = \frac{1}{4\pi}\int_0^1 d\tau \int d^2x\varepsilon^{\mu\nu}\,\mathrm{Tr}\left[g_r^{-1}\partial_r g_r g_r^{-1}\partial_\nu g_r\right]$$

é o termo de Wess-Zumino, e

$$S_{P\sigma M} = \frac{1}{8\pi}\int d^2x \, \mathrm{Tr}\, \partial^{\mu} g^{-1} \partial_{\mu} g$$

é a ação do modelo sigma principal.

Polyakov e Wiegman obtiveram a partir daí a identidade

$$\Gamma[AB] = \Gamma[A] + \Gamma[B] + \frac{1}{4\pi}\int d^2x \left(g^{\mu\nu} + \varepsilon^{\mu\nu}\right) \mathrm{Tr}\left(A^{-1}\partial_{\mu}A\right)\left(B\partial_{\nu}B^{-1}\right),$$

que, na redução ao caso abeliano, é simplesmente

$$\Gamma[AB] = \Gamma[A] + \Gamma[B] + \frac{1}{4\pi}\int d^2x \left(A^{-1}\partial_{+}A\right)\left(B\partial_{-}B^{-1}\right).$$

6. Referências

[1] W. Thirring, J. E. Wess, *Ann. Phys*. **27**, 331 (1964).

[2] C. R. Hagen, *Nuovo Cimento **B*** **51**, 169 (1967).

[3] N. Nakanishi, *Progr. Theor. Phys.* **58**, 1580 (1977).

[4] M. Bander, M., *Phys. Rev. **D*** **13-6**, 1566 (1976).

[5] M. Kaku, *Phys. Rev. **D 12***, 2330 (1975).

[6] J. H. Lowenstein, J. A. Swieca, *Ann. Phys*. **68**, 172 (1971).

[7] K. D. Rothe, J. A. Swieca, *Phys. Rev. **D*** **15**, 1675 (1977).

[8] J. A. Swieca, *Fortschritte der Physik* **25**, 303 (1977).

[9] S. A. Dias, R. A. Casana, *Int. Journ. Mod. Phys. **A*** **15**, 4603 (2000).

[10] R. Jackiw, R. Rajaraman, *Phys. Rev. Lett*. **54**, 1219 (1985).

[11] E. Witten , *Commun. Math. Phys.* **92**, 455 (1984).

[12] A. M. Polyakov and P. B. Wiegmann, *Phys. Lett. **B*** **131**, 121 (1983); *Phys. Lett. **B*** **141**, 223 (1984).

[13] R.L.P.G. do Amaral, L. V. Belvedere, K. D. Rothe and F.G. Scholtz, *Ann. Phys.* **262**, 132 (1997).

[14] L. V. Belvedere, R.L.P.G. do Amaral and K. D. Rothe, *Int. J. Mod. Phys. **A*** **14**, 1163(1999).

[15] L. V. Belvedere, *J. Phys. **A*** **33**, 2755 (2000).

[16] E. Abdalla, M. C. Abdalla and K. D. Rothe, *Non-Perturbative Methods in 2 Dimensional Quantum Field Theory* (*World Scientific, Singapore, 1991*).

[17] J. Sakamoto and Y. Heike, *Prog. Theor. Phys*. **100**, 399 (1998).

[18] J. Sakamoto and B. R. Poudel, *Prog. Theor. Phys.* **104**, 237 (2000).

[19] L. V. Belvedere and R. L. P. G. Amaral, *Phys. Rev. **D*** **62**, 065009 (2000).

[20] J. Wess and B. Zumino, *Phys. Lett. **B*** **37**, 95 (1971); E. Witten, *Nucl. Phys. **B*** **223**, 422 (1983); *Comm. Math. Phys.* **92**, 455 (1984).

[21] L. V. Belvedere and A. F. Rodrigues, aceito para publicação em *Ann. Phys*., DOI: 10.1016/j.aop.2006.05.008

[22] J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, *J. Phys **C*** **6**, 1181 (1973).

[23] L. V. Belvedere, J. A. Swieca, K. D. Rothe and B. Schroer, *Nucl. Phys.* ***B*** **153**, 112 (1979); L. V. Belvedere, *Nucl. Phys.* ***B*** **276**, 197 (1986).
[24] S. Mandelstam, *Phys. Rev.* ***D*** **11**, 3026 (1975).
[25] R. Köberle, V. Kurak and J. A. Swieca, *Phys. Rev* ***D*** **20**, 897 (1979)
[26] J. Fröhlich, "*Non-Perturbative Quantum Field Theory*", *Advanced Series in Mathematical Physics, Vol. 15, World Scientific*, 1992; J. Fröhlich, Comm. Math. Phys. **47**, 233 (1976); S. Samuel, *Phys. Rev.* ***D*** **18**, 1916 (1978); E. C. Marino, *Phys. Lett*. ***A*** **105**, 215 (1984), *Nucl. Phys*. ***B*** **251**, 227 (1985); L. V. Belvedere, *J. Phys.* ***A*** **24**, 4549 (1991); M. C. D. Barrozo and L. V. Belvedere, *Phys. Rev*. ***D*** **53**, 2037 (1996).
[27] E. C. Marino and J. A. Swieca, *Nucl. Phys*. ***B*** **170**, 175 (1980)
[28] M. B. Halpern, *Phys. Rev*. ***D*** **12**, 1684 (1975)
[29] B. Schroer, *Fortschritte der Physik* **11**, 1 **(**1963**)**.
[30] K. D. Rothe and I. O. Stamatescu, *Ann. of Phys. (NY)* **95**, 202 (1975).
[31] M. El Afioni, M. Gomes and R. Köberle, *Phys Rev.* ***D*** **19**, 1144 (1979).
[32] M. El Afioni, M. Gomes and R. Köberle, *Phys Rev.* ***D*** **19**, 1791 (1979).
[33] Carlos Farina and Arvind Vaidya, *Phys. Rev.* ***D*** **32**, 2243 (1985).
[34] A. J. da Silva, M. Gomes and R. Köberle, *Phys. Rev* ***D*** **34**, 504 (1986).
[35] M.Gomes and A. J. Silva, *Phys. Rev.* ***D*** **34**, 3916 (1986).
[36] R. Banerjee, *Phys. Rev.* ***D*** **37**, 3778 (1988).
[37] T. Ikehashi, *Phys. Lett.* ***B*** **313**, 103 (1993).
[38] K. Wilson, *Phys. Rev.* **179**, 1499 (1969).
[39] N. Nakanishi, *Prog. Theor. Phys.* **57** (1977) 269; N. Nakanishi, *Prog, Theor. Phys.* **57**, 1079 (1977).
[40] G. Morchio, D. Pierotti and F. Strocchi, *Ann. Phys. (N.Y.)* **188**, 217 (1988).
[41] C. G. Carvalhaes, L. V. Belvedere, H, Boschi Filho and C. P. Natividade, *Ann. Phys. (N.Y.)* **258**, 210 (1997); C. G. Carvalhaes, L. V. Belvedere, R. L. P. G. Amaral and N. A. Lemos, *Ann. Phys.* **269**, 1 (1998).
[42] B. Klaiber, *in Lectures on Theoretical Physics*, *Boulder Lectures, 1967*, p. 141 (ed. Gordon and Breach, NY, 1968); K. Johnson, *Nuovo Cimento* **20**, 773 (1961)

[43] A. S. Wightman, “High Energy Electromagnetic Interactions and Field Theory”, *in Cargèse Lectures on Theoretical Physics, edited by M. Lévy* (*Gordon and Breach, NY, 1967*)

[44] S. Coleman, *Phys. Rev.* ***D*** **11**, 2088 (1975)

[45] N. K. Nielsen and B. Schroer, *Phys. Lett.* ***B*** **66**, 475 (1977)

[46] L. V. Belvedere and A. F. Rodrigues, *Ann. Phys.* **317**, 423 (2005)

[47] L. V. Belvedere and A. F. Rodrigues, “Functional Integral Approach of the Two-Dimensional Massive Fermion Model with Thirring Interaction among Different Species”, em preparo para publicação

[48] L. V. Belvedere and A. F. Rodrigues, *J. Phys.* ***A***: *Math. Theor.* **40**, 5193 (2007)