

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE
INSTITUTO DE FÍSICA

**Gravastares e Buracos Negros como
consequência da Teoria da
Relatividade Geral**

por

Pedro Senna Rocha

Tese apresentada como requisito parcial para
obtenção do título de Doutor em Física

Orientadora: **Dra. Maria de Fátima Alves da Silva**
Co-Orientador: **Dr. Roberto Chan**

Niterói - Rio de Janeiro
2009

*Dedico esta tese
a humanidade.*

Agradecimentos

- A minha esposa Danielle de Azevedo Martins Senna Rocha e ao meu filho Davi Martins Rocha;
- Aos meus pais Ana Senna e José Carlos Rocha, aos meus irmãos Mateus Rocha e Mariana Rocha e seus respectivos companheiros(as), a atual esposa do meu pai, Maria das Graças, e à minha família;
- A Maria de Fátima Alves da Silva pela amizade, excelente orientação e quem me ajudou bastante a dar o formato final desta tese, além do suporte teórico presencial e à distância, sempre que eu precisei, para que pudesse desenvolver este trabalho;
- Ao Roberto Chan pela amizade e por todo suporte teórico presencial e à distância, o que me ajudou bastante nos trabalhos que desenvolvemos juntos e que resultou nesta tese, além da oportunidade de pós doutorado no Observatório Nacional;
- Ao Anzhong Wang pela amizade e por todas as oportunidades de trabalho dadas a mim em seu grupo de pesquisa, pela oportunidade de realização de pós doutorado na UERJ e em Baylor (inclusive, com uma bolsa aprovada pelo CNPq para realização de pós doutorado na UERJ) e todo suporte teórico presencial e à distância através de e-mails, de fundamental importância para que eu conseguisse desenvolver os trabalhos que resultaram nesta tese;
- Ao Alexandre Yasuda Miguelote pela amizade e pela parceria nas longas horas de cálculo analítico e numérico do trabalho que resultou no meu primeiro artigo na área de relatividade geral;

- Ao amigo Carlos Frederico Brandt por ter sido o responsável por me apresentar ao grupo de pesquisa com o qual tenho trabalhado desde 2007 e pelas teses e cadernos com notas de aula de relatividade geral que me ajudaram bastante na compreensão desta teoria.
- Ao Jaime Villas da Rocha pela amizade e pelas dicas do Maple quando eu havia começado a utilizar este software no primeiro trabalho que resultou nesta tese, além da oportunidade de tê-lo avaliando este trabalho e ao Nilton Oscar Santos pela amizade e troca de informações.
- Ao Antônio Zelaquett Khoury e ao colegiado da pós graduação em Física da Universidade Federal Fluminense pela oportunidade de defender este trabalho, o qual tive imenso prazer em desenvolver.
- À Maria Emília Guimarães, ao James Skea e ao Jailson Alcaniz pela oportunidade de tê-los avaliando meu trabalho e por todas as dicas e sugestões.
- Ao Luiz Wagner Pereira Biscainho do departamento de Engenharia Elétrica da COPPE-UFRJ e seus alunos de Mestrado/Doutorado do Laboratório de Processamento de Sinais pela amizade, auxílio e sabatina que me ajudou muito no meu exame de qualify. O Luiz, inclusive, pela troca de idéias sobre diferentes aplicações de processamento digital de sinais de audio e pela constante troca de informações no tema desde que nos conhecemos, em 2003;
- Ao Mayrton Bahia, Cássia Fontes e todos os professores com os quais tive o imenso prazer de conhecer e colaborar no curso de Produção Fonográfica da Universidade Estácio de Sá, pela amizade e oportunidade de apresentar o tema do meu qualify para mais de 100 alunos e professores no ano de 2007 e pela troca de idéias a respeito de educação a distância e aplicações de Inteligência Artificial em audio digital;
- Aos amigos Eduardo Hollauer e Renato Barcellos (UFF) pela minha volta ao meio acadêmico;
- Aos meus amigos da Acerp/TV Brasil pela motivação e excelente ambiente de trabalho, o que ajudou-me a concluir esta tese;

- À Ângela de Fátima da Silva Rosa e ao Alessandro Deolindo da Conceição da Campus 156 Copiadora LTDA.
- À Biblioteca do Instituto de Física da Universidade Federal Fluminense e todos os funcionários.
- À Valéria e ao Rafael da Secretaria de Pós Graduação do Instituto de Física da Universidade Federal Fluminense.
- A todos os meus alunos e a todos os meus amigos que, por motivos de espaço, não pude colocar os nomes aqui;
- A todos os cientistas, cujas contribuições foram de fundamental importância para o desenvolvimento deste trabalho;
- Ao povo brasileiro pelo suporte financeiro concedido através do CNPq;
- A DEUS, que acredito ser o criador desta obra maravilhosa que é a Natureza e seus mistérios, sem o qual não existiria esta tese.

Resumo

Modelos dinâmicos de protótipos de gravastares são construídos e estudados. Os três modelos apresentados neste trabalho são gravastares de três camadas de Visser e Wiltshire, nos quais uma camada infinitesimal divide o espaço-tempo em duas regiões. No primeiro modelo, é estudado o caso em que a equação de estado da casca fina é $p = \rho$, o espaço-tempo exterior é dado pela métrica de Schwarzschild e o espaço-tempo interno é dado pela métrica de de Sitter. No segundo modelo, a casca fina é generalizada pela equação de estado $p = (1 - \gamma)\sigma$, a região exterior é dada pela métrica de Schwarzschild e a região interior é dada pela métrica de de Sitter. No terceiro modelo, a casca fina possui a mesma equação de estado do segundo modelo, o exterior é dado pela métrica de Schwarzschild e o interior é preenchido por um fluido de energia escura anisotrópica. Encontra-se em todos estes modelos estudados que, em alguns casos, representam gravastares estáveis do tipo “excursão limitada”, nos quais a camada fina está oscilando entre dois raios finitos, enquanto que nos outros casos eles colapsam formando buracos negros ou estrelas normais. No espaço de parâmetros, a região de gravastares estáveis e de gravastares do tipo “excursão ligada” é muito pequena em comparação com a região dos buracos negros, apesar de não ser completamente nula. Portanto, apesar da existência de gravastares não poder ser completamente excluída da análise deste trabalho, o oposto também não é possível, ou seja, mesmo se gravastares existirem, eles não excluem a existência de buracos negros como proposto pelo trabalho de Mazur e Mottola.

Abstract

Dynamical models of prototype gravastars are constructed and studied. The three models presented in this work are the Visser and Wiltshire three layer gravastars, in which an infinitely thin spherical shell divides the hole space-time in two regions. In the first model, it is studied the case where the equation of state of the thin shell is $p = \rho$, the exterior spacetime is Schwarzschild and the internal region is de Sitter. In the second model, the thin shell are generalized by an equation of state $p = (1 - \gamma)\sigma$, the exterior region is Schwarzschild and the interior region is de Sitter. In the third model, the thin shell has the same equation of state as the second model, the exterior is Schwarzschild and the interior is filled with an anisotropic dark energy fluid. It is found in all these models that in some cases they represent the “bounded excursion” stable gravastars, where the thin shell is oscillating between two finite radii, while in the other cases they collapse until the formation of black holes or normal stars. In the phase space, the region for both stable gravastars and “bounded excursion” gravastars is very small in comparison to that for black holes, although it is not completely empty. Therefore, although the existence of gravastars can not be completely excluded from current analysis, the opposite is not possible either, that is, even if gravastars exist, they do not exclude the existence of black holes, as proposed in the work of Mazur and Mottola.

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Introdução	1
1.2	Os buracos negros	2
1.3	Quando a mecânica dos buracos negros encontra a termodinâmica	7
1.4	Gravastars como modelos alternativos aos Buracos Negros	12
1.5	Escopo da tese	19
2	Métricas	21
2.1	A métrica de Schwarzschild	21
2.1.1	Obtendo a forma da métrica de Schwarzschild	22
2.1.2	Os um-formas de curvatura	25
2.1.3	Resolvendo para o Tensor de Curvatura	28
2.1.4	As equações de vácuo	29
2.2	A métrica de de Sitter	32
2.2.1	Obtendo a métrica de de Sitter	33
3	O modelo de Mazur-Mottola , o modelo de Visser-Wiltshire e o mo- delo de Lobo	37
3.1	Introdução	37
3.2	O modelo de Mazur e Mottola	38
3.3	O modelo de Matt Visser e David Wiltshire	46
3.3.1	Camada Dinâmica	50
3.3.2	Leis de Conservação	51
3.4	A equação mestra	53
3.4.1	Dedução	53
3.4.2	Invertendo o potencial	54
3.4.3	Especialização da geometria do gravastar	56
3.5	O modelo de Lobo para estrelas de energia escura	58

3.5.1	Estrelas de energia escura: Equações da estrutura	59
3.5.2	Modelos específicos	61
3.5.3	Estabilidade de estrelas de energia escura	64
4	Análise dinâmica da estabilidade do modelo de Visser-Wiltshire	71
4.1	Formação de estrelas de vácuo gravitante a partir do colapso gravitacional	71
4.1.1	$m = 0$ e $\Lambda \neq 0$	72
4.1.2	$\Lambda = 0$ e $m \neq 0$	73
4.1.3	$m \neq 0$ e $\Lambda \neq 0$	75
4.2	Conclusões	77
5	Generalização da equação de estado da camada fina	81
5.1	Formação de estrelas de vácuo gravitante e buracos negros por colapso gravitacional de protótipo de estrelas de vácuo gravitante	81
5.1.1	$m = 0$	83
5.1.2	$\Lambda = 0$	87
5.1.3	$m \neq 0$ e $\Lambda \neq 0$	91
5.2	Conclusões	92
6	Estrelas de vácuo gravitante estáveis de energia escura anisotrópica	103
6.1	Protótipo dinâmico do modelo de gravastar de energia escura . .	104
6.2	Classificações de Matéria, Energia Escura, e Energia Fantasma para fluidos anisotrópicos	107
6.3	Buraco negro ou dispersão da matéria	110
6.4	Estrela de vácuo gravitante ou estrela normal	111
6.5	Buraco negro ou estrela de vácuo gravitante fantasma	111
6.6	Conclusões	112
7	Conclusão	137
7.1	Considerações finais	137
7.2	Perspectivas e trabalhos futuros	138
7.2.1	Ajuste numérico de modelos de energia escura aos conjuntos de dados observacionais	143
	Relatividade Geral Básica	147
A.1	Geometria	147
A.2	Derivada Covariante	148

A.3 Geodésicas	149
A.4 Isometrias e Vetores de Killing	149
A.5 Equações de Einstein	150
A.6 Dinâmica dos Fluidos Básica	150
A.7 Equilíbrio Hidrostático	151
A.8 Termodinâmica Básica	152
A.9 Equações de Tolman	152
A.10Casca esféricas finas	153
Técnicas computacionais	157
B.1 Computação Algébrica	158
B.2 Computação Numérica	160
B.2.1 Root	160
B.3 Alguns códigos utilizados no trabalho	162
B.3.1 Potential.h (para rodar no ROOT)	162
B.3.2 gravgraficomacro.C (para rodar no ROOT)	163
B.3.3 gravastargrafmacro.C (para rodar no ROOT)	164
B.3.4 gravastarblackhole.C (para rodar no ROOT)	166
B.3.5 gravastar.h (para estudo do colapso)	171
B.3.6 gravastar.cpp (para estudo do colapso)	172
B.3.7 Potentialgen.h (para rodar no ROOT)	181
B.3.8 gravastarblackhole1.C (para rodar no ROOT)	181
B.3.9 PotentialLobo.h (para rodar no ROOT)	191
B.3.10gravastarblackholeLoboII.C (para rodar no ROOT)	204
Bibliografia	219

Lista de Figuras

1.1	(a) O diagrama de Penrose para a solução de vácuo de Schwarzschild. A região II é a região onde $r > a(\tau)$. (b) O diagrama de Penrose para a solução de de Sitter. A região I é a região onde $r < a(\tau)$. Uma casca infinitesimal localizada em $r = a(\tau)$ conecta estas duas regiões para a formação de um espaço-tempo dinâmico de um protótipo de gravastar, como mostra a figura 1.2.	15
1.2	O diagrama de Penrose para a solução dada pela equação (1.9). A casca infinitesimal em $r = a(\tau)$ conecta as duas regiões I e II mostradas na figura 1.1 para formar o espaço-tempo de um protótipo de gravastar.	16
4.1	O potencial $V(R)$ para $m = 0$. A linha superior é para $L = 2.0 > L_c \simeq 0.9588$, a linha do meio para $L = L_c$, e a linha inferior para $L = 0.5 < L_c$	73
4.2	O movimento da casca $R(\tau)$ em função do tempo próprio, τ , para $m = 0$. A linha superior é para $L = 2.0 > L_c \simeq 0.9588$, a linha do meio para $L = L_c$, e a linha inferior para $L = 0.5 < L_c$	74
4.3	O potencial $V(R)$ para $\Lambda = 0$ (ou $L = \infty$). A linha superior é para $m < m_c \simeq 10^{-0.286}$, a linha do meio para $m = m_c$, e a linha inferior é para $m > m_c$	75
4.4	O movimento da casca $R(\tau)$ em função do seu tempo próprio τ para $\Lambda = 0$. A linha superior é para $m < m_c \simeq 10^{-0.286}$, a linha do meio para $m = m_c$, e a linha inferior para $m > m_c$	76
4.5	O potencial $V(R)$ para $m = 10^{-0.286}$ e $L = 2.5 \times 10^5$, que é sempre negativo.	77
4.6	O potencial $V(R)$ para $m = 10^{-4}$ e $L = 2.5 \times 10^5$	78
4.7	A evolução de $R(\tau)$ em função do tempo próprio τ para $m = 10^{-4}$ e $L = 2.5 \times 10^5$	78

4.8	O potencial $V(R)$ para a formação de uma estrela de vácuo gravitante em um colapso realístico, após a estrela estabilizar-se no ponto mínimo $R = R_{static}$, onde $V(R = R_{static}) = 0 = V'(R = R_{static})$.	79
4.9	O potencial $V(R)$ para $m = 1.0$ e $L = 3.0$.	79
4.10	O potencial $V(R)$ para $m = 10^{-4}$ e $L = 3.0$.	80
5.1	A função R_c definida na equação (5.17) para $m = 0$.	85
5.2	A função L_c definida na equação (5.18) para $m = 0$, onde $L_{min} = 1/\sqrt{2}$.	86
5.3	O potencial $V(R)$ para $m = 0$ e $\gamma = 0.5$. A linha superior é para $L > L_c$, a linha do meio para $L = L_c$, e a linha inferior para $L < L_c$.	86
5.4	A função R_c definida na equação (5.21) para $\Lambda = 0$.	87
5.5	A função m_c definida na equação (5.22) para $\Lambda = 0$.	88
5.6	O potencial $V(R)$ para $\gamma = 0.5$. A linha superior é para $m < m_c$, a linha do meio é para $m = m_c$, e a linha inferior é para $m > m_c$.	88
5.7	O potencial $V(R)$ para $\gamma = 3.0$. A linha superior é para $m < m_c$, a linha do meio é para $m = m_c$, e a linha inferior é para $m > m_c$.	90
5.8	O potencial $V(R)$ para $\gamma = 0$ com alguns valores de L próximos do ponto crítico $L = L_c$. As curvas, a partir da linha superior para a linha inferior, representam L_1 a L_4 , respectivamente.	94
5.9	O potencial $V(R)$ para $\gamma = 0$ com alguns valores de m próximos do ponto crítico $m = m_c$. As curvas, a partir da linha superior para a linha inferior, representam m_1 a m_4 , respectivamente.	94
5.10	O potencial $V(R)$ para $\gamma = 0.4$ com alguns valores de L próximos do ponto crítico $L = L_c$. As curvas, a partir da linha superior para a linha inferior, representam L_1 a L_4 , respectivamente.	95
5.11	O potencial $V(R)$ para $\gamma = 0.4$ com alguns valores de m próximos do ponto crítico $m = m_c$. As curvas, a partir da linha superior para a linha inferior, representam m_1 a m_4 , respectivamente.	95
5.12	O potencial $V(R)$ para $\gamma = 0.7$.	96
5.13	O potencial $V(R)$ para $\gamma = 0.8$.	96
5.14	O potencial $V(R)$ para $\gamma = 0.9$.	97
5.15	O potencial $V(R)$ para $\gamma = 0.95$.	97
5.16	O potencial $V(R)$ para $\gamma = 0.95$ próximo do seu ponto mínimo.	98
5.17	O potencial $V(R)$ para $\gamma = 0.9999$.	98
5.18	O potencial $V(R)$ para $\gamma = 0.9999$ próximo do seu ponto mínimo.	99
5.19	O potencial $V(R)$ para $\gamma = 1.7$. As curvas, da linha superior para inferior, representam m_1 a m_4 , respectivamente.	99

5.20	O potencial $V(R)$ para $\gamma = 1.7$. As curvas, da linha inferior para a linha superior representam L_4 a L_1 , respectivamente, onde as curvas L_1 e L_2 coincidem. Qualquer curva de potencial onde $L > L_c$ irá coincidir com a curva de potencial onde $L = L_c$	100
5.21	O potencial $V(R)$ para $\gamma = 3.0$. As curvas, da linha superior para inferior, representam m_1 a m_4 , respectivamente.	100
5.22	O potencial $V(R)$ para $\gamma = 3.0$. As curvas, da linha inferior para a linha superior representam L_4 a L_1 , respectivamente, onde as curvas L_1 e L_2 coincidem. Qualquer curva de potencial onde $L > L_c$ irá coincidir com a curva de potencial onde $L = L_c$	101
5.23	O potencial $V(R)$ para $\gamma = 5.0$. As curvas, da linha superior para inferior, representam m_1 a m_4 , respectivamente.	101
5.24	O potencial $V(R)$ para $\gamma = 5.0$. As curvas, da linha inferior para a linha superior representam L_4 a L_1 , respectivamente, onde as curvas L_1 e L_2 coincidem. Qualquer curva de potencial onde $L > L_c$ irá coincidir com a curva de potencial onde $L = L_c$	102
6.1	Nesta figura mostramos os intervalos de ω para os quais as condições fraca e forte de energia são independentes da coordenada R e do parâmetro b . A condição $\rho + p_r > 0$ é violada para $\omega < -1$ e satisfeita para $\omega > -1$, quaisquer que sejam os valores de R e b . As condições $\rho + p_t > 0$ e $\rho + p_r + 2p_t > 0$ são satisfeitas para $\omega < -1$ e $-1/3 < \omega < 0$, para quaisquer valores de R e b . Para outros intervalos de ω a análise das condições de energia dependem de uma relação complexa entre R e b	109
6.2	(a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = -1$, $\omega = 0.1$, $b = 0.000001$ and $m_c = 0.000866559$. Caso A	115
6.3	(a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 0$, $\omega = 0.1$, $b = 0.000001$ e $m_c = 0.0087291$. Caso A	115
6.4	(a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 7/4$, $\omega = 0.1$, $b = 0.000001$ e $m_c = 0.84374$. Caso B	116
6.5	(a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 3$, $\omega = 0.1$, $b = 0.000001$ e $m_c = 0.51205$. Caso C	116

6.6	(a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = -1$, $\omega = 0.1$, $b = 0.000002$ e $m_c = 0.0012876042$. Caso A	117
6.7	(a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 0$, $\omega = 0.1$, $b = 0.000002$ e $m_c = 0.0115153$. Caso A	117
6.8	(a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 7/4$, $\omega = 0.1$, $b = 0.000002$ e $m_c = 0.843415$. Caso B	118
6.9	(a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 3$, $\omega = 0.1$, $b = 0.000002$ e $m_c = 0.51211$. Caso C	118
6.10	(a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = -1$, $\omega = 0.1$, $b = 0.0001$ e $m_c = 0.0120041542$. Caso A	119
6.11	(a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 0$, $\omega = 0.1$, $b = 0.0001$ e $m_c =$ 0.0546980 . Caso A	119
6.12	(a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 7/4$, $\omega = 0.1$, $b = 0.0001$ e $m_c = 0.84269$. Caso B	120
6.13	(a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 3$, $\omega = 0.1$, $b = 0.0001$ e $m_c =$ 0.51206 . Caso C	120
6.14	(a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = -1$, $\omega = 0.1$, $b = 0.05$ e $m_c =$ 0.3271379593 . Caso A	121
6.15	(a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 0$, $\omega = 0.1$, $b = 0.05$ e $m_c =$ 0.4923412 . Caso A	121
6.16	(a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 7/4$, $\omega = 0.1$, $b = 0.05$ e $m_c =$ 0.67527 . Caso B	122
6.17	(a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 3$, $\omega = 0.1$, $b = 0.05$ e $m_c = 0.50247$. Caso C	122

6.18(a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = -1$, $\omega = 0.2$, $b = 0.05$ e $m_c =$ 0.3357901746 . Caso A	123
6.19(a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 0$, $\omega = 0.2$, $b = 0.05$ e $m_c =$ 0.499554 . Caso A	123
6.20(a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 7/4$, $\omega = 0.2$, $b = 0.05$ e $m_c =$ 0.66938 . Caso B	124
6.21(a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 3$, $\omega = 0.2$, $b = 0.05$ e $m_c = 0.50195$. Caso C	124
6.22(a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = -1$, $\omega = 1.5$, $b = 0.01$ e $m_c =$ 0.2097639045 . Caso G	125
6.23(a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 0$, $\omega = 1.5$, $b = 0.01$ e $m_c = 0.3775$. Caso G	125
6.24(a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 7/4$, $\omega = 1.5$, $b = 0.01$ e $m_c =$ 0.75153 . Caso H	126
6.25(a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 3$, $\omega = 1.5$, $b = 0.01$ e $m_c = 0.50833$. Caso I	126
6.26(a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = -1$, $\omega = 3$, $b = 0.01$ e $m_c =$ 0.2552945103 . Caso G	127
6.27(a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 0$, $\omega = 3$, $b = 0.01$ e $m_c = 0.426756$. Caso G	127
6.28(a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 7/4$, $\omega = 3$, $b = 0.01$ e $m_c = 0.72185$. Caso H	128
6.29(a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 3$, $\omega = 3$, $b = 0.01$ e $m_c = 0.50661$. Caso I	128

6.30(a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = -1$, $\omega = 5$, $b = 0.01$ e $m_c =$ 0.3033168157 . Caso G	129
6.31(a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 0$, $\omega = 5$, $b = 0.01$ e $m_c = 0.472267$. Caso G	129
6.32(a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 7/4$, $\omega = 5$, $b = 0.01$ e $m_c = 0.68998$. Caso H	130
6.33(a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 3$, $\omega = 5$, $b = 0.01$ e $m_c = 0.50436$. Caso I	130
6.34(a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = -1$, $\omega = 10$, $b = 0.000001$ e $m_c = 0.0025477672$. Caso G	131
6.35(a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 0$, $\omega = 10$, $b = 0.000001$ e $m_c = 0.018559$. Caso G	131
6.36(a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 7/4$, $\omega = 10$, $b = 0.000001$ e $m_c = 0.84370$. Caso H	132
6.37(a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 3$, $\omega = 10$, $b = 0.000001$ e $m_c = 0.51208$. Caso I	132
6.38(a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 3$, $\omega = -1.5$, $b = 0.01$ e $m_c =$ 0.51211 . Caso K	133
6.39(a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 7/4$, $\omega = -1.5$, $b = 0.01$ e $m_c = 0.83759$. Caso L	133
6.40(a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = -1$, $\omega = -1.5$, $b = 0.01$ e $m_c = 0.50574$. Caso J	134
6.41(a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = -1$, $\omega = -1.5$, $b = 0.01$ e $m_c = 0.163176025$. Caso J	134

6.42 (a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 0$, $\omega = -1.5$, $b = 0.01$ e $m_c =$ 0.51735. Caso J	135
6.43 (a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 0$, $\omega = -1.5$, $b = 0.01$ e $m_c =$ 0.150217075. Caso J	135

Lista de Tabelas

5.1	Alguns valores de R_c e L_c como função de γ para $\Lambda \neq 0$ and $m = 0$.	85
5.2	Alguns valores de R_c e m_c como funções de γ para $\Lambda = 0$ e $m \neq 0$.	89
5.3	Alguns valores de m_c e L_c obtidos numericamente como função de γ no caso geral onde $\Lambda \neq 0$ e $m \neq 0$.	91
6.1	Esta tabela resume a classificação do campo de matéria no interior, baseada nas condições de energia [133], onde assumimos que $\rho \geq 0$.	108
6.2	Esta tabela resume a classificação da matéria na camada fina, baseada nas condições de energia [133]. A última coluna indica os valores particulares para o parâmetro γ , onde assumimos que $\rho \geq 0$.	108
6.3	Esta tabela resume todos os tipos possíveis de energia do fluido interior e da camada. As estruturas estáveis são representadas pelos números das figuras em negrito.	114

Capítulo 1

Introdução

1.1 Introdução

Buracos negros são objetos compactos previstos pela teoria da relatividade geral de Einstein como o estado final do colapso estelar de objetos supermassivos (se a massa colapsante não for suficientemente grande, o estado final de um colapso pode resultar em um outro objeto compacto, como uma anã branca ou uma estrela de nêutrons). Os buracos negros são bem conhecidos e, de uma forma geral, bem aceitos não apenas pela comunidade científica, mas também pelo público em geral.

Esta popularidade dos buracos negros pode ser atestada pela grande quantidade de séries e filmes de ficção científica, além dos livros e programas de divulgação científica que abordam o tema.

Como exemplos desta popularidade poderia citar o livro de Kip S. Thorne, *Black Holes and Time Warps: Einstein's Outrageous Legacy* (W.W. Norton & Company, 1995), onde temos toda história das descobertas envolvendo os buracos negros, os populares livros de Stephen Hawking intitulados *Uma breve história do tempo*, *O Universo em uma casca de noz* e *Uma nova história do tempo*, os programas de TV como os da série *Universe* do History Channel, os vídeos de divulgação científica da Scientific American (*exploração do espaço, novo guia visual do Universo*) e da BBC (*Stephen Hawking's Universe*), além da

enorme quantidade de vídeos disponíveis no youtube, incluindo aulas dadas no MIT, Stanford, entre outras Universidades no mundo e seminários dados por Físicos e Astrônomos como Alex Filippenko, Kip Thorne, George Ellis, Sean Carroll, Sylvester Gates, David Gross, entre outros.

Apesar do sucesso deste objeto compacto, existem algumas peculiaridades com relação ao mesmo que faz com que cientistas busquem alternativas com relação ao estado final do colapso de uma estrela (gravastars, holostars, entre outros).

Uma destas peculiaridades é que a detecção de buracos negros se baseia em observações indiretas e demanda uma exploração minuciosa das mesmas, incluindo as formas de ondas gravitacionais emitidas por eles. A princípio, tal detecção pode nunca ser conclusiva e pode até mesmo ser fundamentalmente impossível [1]. Embora haja evidências astronômicas muito fortes de sua existência, nenhuma observação direta do horizonte de eventos de um buraco negro foi feita. Antes de colocarmos em questão outros aspectos que levaram alguns cientistas a proporem modelos alternativos aos buracos negros, daremos um panorama geral dos mesmos do ponto de vista histórico.

1.2 Os buracos negros

A história dos buracos negros remonta a John Michell em 1784. Ele descobriu, utilizando a mecânica Newtoniana e a descrição corpuscular da luz, que a velocidade de escape $\sqrt{\frac{2GM}{R}}$ de uma massa esférica pode ser maior do que c , a velocidade da luz no vácuo, se $\frac{M}{R}$ for suficientemente grande. John Michell argumentou que estes objetos deveriam ser invisíveis pois a luz não poderia escapar dos mesmos e, como não havia nada nas leis da física conhecidas no século XVIII que impedisse a existência destes objetos, Michell especulou que o Universo deveria conter um grande número de estrelas escuras, cada qual invisível pois os corpúsculos de luz emitidos de sua superfície eram inexoravel-

mente puxados para baixo devido ao seu enorme campo gravitacional. Michell publicou sua previsão de que estrelas escuras deveriam existir no *Royal Society of London* no dia 27 de Novembro de 1783 [2].

Trinta anos após, Pierre Simon Laplace popularizou a mesma previsão na primeira edição de seu livro *Le System du Monde* sem fazer a devida referência a Michell. No entanto, na terceira edição de seu livro, Pierre Simon de Laplace tirou o conceito de estrela escura do seu livro, inclusive nas edições posteriores do mesmo. Isto se deu após a descoberta de Thomas Young da interferência da luz, o que levou os cientistas da época a abandonarem o modelo corpuscular da luz em favor do modelo ondulatório, descrito por Christiaan Huygens.

Apenas após a formulação da teoria da relatividade geral por Einstein em 1915 foi possível o retorno do conceito que viria a se tornar buraco negro, como conhecemos hoje.

Isto porque logo após Albert Einstein ter concluído seu trabalho da teoria da relatividade geral em 1915, o astrofísico alemão Karl Schwarzschild encontrou a solução de vácuo esféricamente simétrico das equações de campo de Einstein [3].

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (1.1)$$

onde a função $f(r)$ é dada por

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r}, \quad (1.2)$$

em unidades geométricas, ou seja, onde $c = G = 1$ (é muito comum o uso de unidades geométricas em relatividade geral). A métrica é singular nos pontos $r = 0$ e $r = r_H \equiv 2M$. Todavia, a natureza destas singularidades é diferente. Em particular, a singularidade em $r = 0$ é genérica e a curvatura do espaço-tempo diverge neste ponto, ao passo que a singularidade em $r = r_H$ é removível através de uma transformação de coordenadas. Uma partícula teste pontual irá cair livremente através de $r = r_H$ sem experimentar nada especial. Esta superfície

costuma ser chamada de horizonte de eventos. Os estudos das propriedades de tais horizontes são de importância fundamental, e já foi encontrada uma conexão profunda entre gravitação e termodinâmica [4] que veremos ainda neste capítulo.

Posteriormente, ficou claro que a solução de Schwarzschild poderia descrever um buraco negro estático, sem rotação e sem carga elétrica, embora na época de seu trabalho o termo buraco negro ainda não existisse. O termo buraco negro foi introduzido mais tarde por John Archibald Wheeler e antes disso os hoje conhecidos buracos negros eram chamados de estrelas colapsadas [5].

Curiosamente, em 1939, Einstein publicou um artigo na revista *Annals of Mathematics* onde tentou provar que a existência de buracos negros era impossível [6]. Logo após a publicação deste trabalho de Einstein, ainda em 1939, J. Robert Oppenheimer e seu aluno Hartland S. Snyder utilizaram a teoria da relatividade geral para analisar o colapso gravitacional de uma estrela e descobriram que a matéria colapsante com massa suficientemente grande poderia formar um buraco negro [7].

A estrutura de estrelas relativísticas e o fenômeno do colapso gravitacional são de fundamental importância em astrofísica e têm atraído bastante atenção na comunidade científica desde o surgimento da teoria geral da relatividade. No que tange à construção de modelos teóricos de estrelas relativísticas, podemos nos referir aos trabalhos pioneiros de Schwarzschild (já comentado) [3], de Tolman [8], e de Oppenheimer e Volkoff [9].

Enquanto Schwarzschild [3] considerou soluções analíticas descrevendo uma estrela de densidade uniforme, Tolman [8] desenvolveu um método fornecendo soluções explícitas para esferas estáticas de fluido, e que provaram ser importantes para o estudo da estrutura estelar.

Oppenheimer e Volkoff [9], pela escolha conveniente de soluções específicas de Tolman, estudaram o equilíbrio gravitacional de estrelas de nêutrons, uti-

lizando a equação de estado para um gás de Fermi frio, conseqüentemente iniciando os fundamentos da teoria relativística de estruturas estelares.

Existe uma vasta literatura [10] sobre o tema, entretanto, merecem citação os trabalhos de Chandrasekhar [11] na construção dos modelos das anãs brancas levando-se em consideração efeitos relativísticos na equação de estado de degenerescência eletrônica, onde ele descobriu que nenhuma anã branca poderia ter uma massa acima do que ~ 1.2 massas solares, que foi chamado de limite de Chandrasekhar. Um outro trabalho importante é de Baade e Zwicky [12], onde inventou-se o conceito de estrela de nêutrons, e identificaram objetos astronômicos denotados como supernovas, como representações de um colapso de uma estrela ordinária em uma estrela de nêutrons. Longe de fazermos uma revisão exaustiva, podemos também nos referir aos trabalhos de Wyman, onde em um artigo [13] coordenadas isotrópicas foram utilizadas para resolver as equações relativísticas de um fluido perfeito com densidade de energia constante, e em outro artigo [14], uma análise crítica das soluções de Tolman foi feita; Buchdahl [15] e Bondi [16] generalizaram o interior da solução de Schwarzschild para esferas estáticas mais gerais na forma de desigualdades envolvendo a concentração de massa, a densidade de energia central e a pressão central; Leibovitz [17] também generalizou algumas das soluções de Tolman aplicando uma abordagem mais física; a descoberta dos pulsares por Hewish e colaboradores [18], a idéia adiantada por Gold [19] de que pulsares poderiam ser estrelas de nêutrons em rotação, e que foi posteriormente confirmada por observações, e os modelos idealizados de estrelas de nêutrons em rotação [20]. É também interessante notar que Bayin encontrou novas soluções para esferas de fluidos estáticos [21], explorando as equações de campo dependentes do tempo para esferas de fluidos radiantes [22], e posterior generalização para esferas de fluido anisotrópico [23].

Foi apenas após 1960 que o colapso gravitacional e os buracos negros

começaram a ser seriamente estudados e isto se deveu, principalmente, à descoberta de objetos astrofísicos tais como quasares, pulsares e fontes compactas de raios X que revigoraram a reflexão sobre o destino das estrelas após o colapso.

Os quasares (*Quasi Stellar Radio Sources*), por exemplo, foram descobertos em 1961 como intensas fontes de rádio, com aparência ótica aproximadamente estelar, azuladas.

Estes são objetos extremamente compactos e luminosos, emitindo mais energia do que centenas de galáxias juntas, isto é, até um trilhão de vezes mais brilhantes do que o Sol. Os quasares também são fortes fontes de rádio, variáveis, e seus espectros apresentam linhas largas com efeito Doppler indicando que eles estão se afastando a velocidades muito altas, de até alguns décimos da velocidade da luz.

O primeiro quasar a ter seu espectro identificado foi o 3C273 em 1963 por Schmidt. Em 1964, Salpeter e Zel'dovich propuseram que os quasares são galáxias com buracos negros fortemente ativos nos seus centros.

No modelo mais aceito, o buraco negro central acreta gás e estrelas da sua vizinhança, emitindo intensa radiação enquanto a matéria se acelera, espiralam no disco de acreção. Parte da matéria é ejetada por conservação de momentum angular. Quando o buraco negro consome toda a matéria circundante, ele deixa de emitir [24].

As décadas de 1960 e 1970, também conhecidas como era de ouro, foram bastante frutíferas no que diz respeito às descobertas envolvendo colapso estelar e os buracos negros como estado final.

Apenas para não passar esta fase em branco, podemos citar que em 1963, Kerr encontrou uma solução assimétrica das equações de Einstein no vácuo que depois descobriu-se ser a métrica de um buraco negro em rotação e Penrose, utilizando topologia, estudou com afinco o problema da singularidade.

Os cientistas também viram que os buracos negros não continham cabelos (frase de John Wheeler), o que significava que independentemente da forma da estrela colapsante, o produto final sempre era perfeitamente esférico¹ e depende apenas de três parâmetros: massa, momento angular e carga.

Vários físicos e matemáticos estavam envolvidos nesta fase de importantes descobertas envolvendo os buracos negros incluindo Wheeler, Carter, Hawking, Penrose, Israel, Zel'dovich, Chandrasekhar, Sciama, Kip Thorne, e vários outros.

No entanto, foi na década de 1970 que, pela primeira vez, foi feita uma tentativa de estudar os buracos negros usando a teoria quântica de campos com importantes consequências nos trabalhos que seriam publicados a partir de então. O ano era 1974. Foi quando Stephen Hawking, utilizando teoria de campos em espaços curvos descobriu que os buracos negros emitem radiação de corpo negro [25].

1.3 Quando a mecânica dos buracos negros encontra a termodinâmica

Hawking provou em 1971 um teorema sobre buracos negros que diz que em qualquer interação, a área da superfície de um buraco negro nunca pode decrescer. Se vários buracos negros estão presentes, é a soma das áreas das superfícies que nunca pode decrescer [26].

A lei do aumento da área parece muito com a segunda lei da termodinâmica para o aumento da entropia e J. Bekenstein, inspirado pelo trabalho de Stephen Hawking tentou desenvolver a termodinâmica de buracos negros [27, 28, 29, 30]. Todavia, em relatividade geral clássica não há estado de equilíbrio envolvendo buracos negros. Se um buraco negro é colocado em um banho térmico,

¹Há de se tomar cuidado, pois pode parecer que estamos sugerindo que a simetria esférica é preservada, quando isso não é verdade. O buraco negro de Kerr é um exemplo disso.

ele continuará absorvendo radiação sem nunca entrar em equilíbrio.

Esta situação mudou quando Stephen Hawking, levando em consideração efeitos quânticos, mostrou que buracos negros irradiam [25, 31, 32].

O estudo da termodinâmica de buracos negros possui grande importância no desenvolvimento da teoria de campos em espaços curvos. O estudo de fundos curvos expandiram nossa compreensão sobre a teoria quântica de campos em geral. A relação entre as quantidades termodinâmicas e as propriedades geométricas do horizonte de eventos trouxeram uma clara indicação de que existe uma relação entre as propriedades da geometria do espaço-tempo e algum tipo de física quântica.

Voltando ao trabalho de Stephen Hawking, foi aplicando a teoria quântica de campos no espaço curvo de um buraco negro que ele encontrou que o mesmo emite radiação eletromagnética com temperatura dada por

$$T = \frac{\hbar\kappa}{2\pi k_B c}, \quad (1.3)$$

onde $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, sendo h a constante de Planck, κ a gravidade superficial e k_B a constante de Boltzmann. No caso de um buraco negro de Schwarzschild esta expressão torna-se:

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi G k_B m}. \quad (1.4)$$

Inserindo os valores das constantes na equação acima obtemos que

$$T \approx 10^{-7}(m_{sol}/m)K, \quad (1.5)$$

onde $K = \frac{\sigma \hbar^4 c^6}{256 G^2 k_B^4}$.

A fórmula mostra que a temperatura de um buraco negro com aproximadamente a mesma massa do sol é extremamente baixa. Isto ocorre pois a temperatura cresce com a massa decrescente e, então, possui capacidade térmica negativa, isto é, perdendo massa por radiação aumenta sua temperatura.

A perda de energia quando o buraco negro irradia é dada pela lei de Stefan-Boltzmann,

$$-\frac{\dot{E}}{A} = \sigma T^4, \quad (1.6)$$

onde σ é a constante de Stefan-Boltzmann e o ponto representa a diferenciação em relação ao tempo. A integração desta equação nos dá a massa em função do tempo:

$$m(t) = (m_0^3 - 3Kt)^{\frac{1}{3}}, \quad (1.7)$$

onde $m_0 \equiv m(0)$. Verifica-se que no instante $t = m_0^3/3K$ o buraco negro evapora completamente.

Hawking também mostrou que o buraco negro possui uma entropia, S , dada por

$$S = \frac{1}{4} \frac{k_B c^3}{G \hbar} A, \quad (1.8)$$

onde A é a área do horizonte de eventos do buraco negro.

A entropia do buraco negro vem em adição à entropia ordinária da matéria. Esta entropia completa a visão do buraco negro como um sistema interagente termodinâmico.

A radiação do buraco negro recebeu o nome de radiação Hawking, embora o homenageado não concorde com isso, como disse no filme de divulgação científica *O Universo de Stephen Hawking - Buracos Negros*, produzido pela BBC na década de 90.

Esta radiação é devida ao processo aleatório de flutuação do vácuo quântico próximo do horizonte. Portanto, o buraco negro está emitindo quantidades iguais de matéria e antimatéria. Se uma estrela em nosso universo que consiste praticamente de matéria, e não de antimatéria, está colapsando em um buraco negro, grandes quantidades de informação são perdidas neste processo. Observando também a equação (1.8), vemos que a razão de uma quantidade

macroscópica (A) por uma quantidade microscópica (\hbar) assegura que o buraco negro possui enorme entropia.

Note que durante a evaporação do buraco negro (emissão de quanta térmico), a massa decresce pela conservação da energia e A e S também. Isto viola o teorema da área de Hawking. Todavia, um dos postulados do teorema da área é que a matéria obedece a condição de energia forte, que requer que um observador local sempre meça densidades de energia positivas e que não haja quaisquer fluxos de energia do tipo espaço. A evaporação de buracos negros pode ser entendida como a criação de pares partícula-antipartícula no campo gravitacional do buraco negro, um membro do par indo para dentro do buraco negro e o outro para fora em direção ao infinito. Na criação de pares, o par de partículas materializam-se com uma separação do tipo espaço e, efetivamente, há um fluxo de energia do tipo espaço.

O teorema de área da relatividade geral clássica é substituída por uma segunda lei generalizada da termodinâmica, ou seja, em qualquer interação, a soma das entropias de todos os buracos negros mais a entropia da matéria fora dos buracos negros nunca decresce.

Esta descoberta da radiação quântica de Hawking e da entropia do buraco negro que é proporcional à área do horizonte de eventos do buraco negro deu suporte à idéia de que existe uma profunda conexão entre os buracos negros e a termodinâmica. Esta relação interessante foi primeiramente manifestada quando Jacobson deduziu as equações de campo de Einstein a partir da primeira lei da termodinâmica assumindo a proporcionalidade da entropia e da área do horizonte para todos os horizontes locais de aceleração [33]. Para espaços-tempos estáticos esféricamente simétricos e espaços-tempos estacionários e assimétricos, Padmanabhan e colaboradores mostraram que as equações de Einstein no horizonte dão origem à primeira lei da termodinâmica [34, 35]. Tais considerações foram posteriormente generalizadas para gravi-

dade de Lovelock [36]. Em [37], por outro lado, as equações de campo gravitacional para a teoria não-linear $f(R)$ foram deduzidas a partir da primeira lei da termodinâmica adicionando algumas correções no regime fora do equilíbrio.

Para o espaço de de Sitter também existe a temperatura de Hawking e a entropia associada com os horizontes de eventos cosmológicos e suas leis da termodinâmica [38]. Neste espaço, o horizonte de eventos coincide com o horizonte aparente. Para modelos cosmológicos mais gerais, horizontes de eventos podem não existir, mas horizontes aparentes sempre existem de forma que é possível se ter temperatura e entropia de Hawking associados com horizontes aparentes. Dentro desta linha, a conexão entre a primeira lei da termodinâmica de horizontes aparentes e as equações de Friedmann na teoria de Einstein, com e sem o termo de Gauss-Bonnet, assim como na teoria de Lovelock, foi encontrada [39]. Mais recentemente, foi encontrado que isto também é verdadeiro para a cosmologia do cenário de branas [40]. Em [41], com a ajuda de uma nova função do tipo massa, foi mostrada que a primeira lei da termodinâmica de horizontes aparentes em equilíbrio pode ser deduzida a partir das equações de Friedmann em várias teorias da gravidade, incluindo a de Einstein, a escalar-tensorial, as teorias $f(R)$ não-lineares, e Lovelock.

A possibilidade de emissão de radiação Hawking por buracos negros levamos a um paradoxo da perda de informação. Para compreensão do paradoxo da perda de informação por buracos negros, imaginemos uma estrela preparada em um estado puro, de forma a termos a máxima informação sobre seu estado. O problema aparece quando percebemos que, no processo de colapso estelar, formação de buraco negro e subsequente completa evaporação, acabamos com um estado térmico misto, perdendo informação sobre a estrela original. O Universo sofreria assim, uma perda líquida de informação, sendo, portanto, incompatível com a mecânica quântica. Em 1997, Stephen Hawking, John Preskill e Kip Thorne fizeram uma aposta. Enquanto Hawking e Thorne acre-

ditavam que toda informação depositada nos buracos negros estaria definitivamente perdida, Preskill defendia que a natureza teria algum mecanismo ainda desconhecido que permitiria recuperá-la. Em julho do ano de 2004, em uma conferência internacional sobre relatividade geral, em Dublin, Irlanda, Stephen Hawking declarou publicamente ter mudado de opinião e que, portanto buracos negros não seriam destruidores irremediáveis de informação. Este problema da perda de informação dos buracos negros permanece em aberto e, provavelmente, apenas será resolvido com o desenvolvimento de uma teoria quântica da gravitação. Atualmente, uma teoria promissora como uma teoria quântica da gravidade é a teoria M e um bom resumo da história da teoria quântica da gravidade pode ser encontrado no texto de Carlo Rovelli apresentado em julho de 2000 no nono encontro Marcel Grossmann em Roma [42].

1.4 Gravastars como modelos alternativos aos Buracos Negros

Embora tenhamos fortes evidências experimentais e teóricas a respeito da existência dos buracos negros, muitos problemas paradoxais a respeito dos mesmos existem [43]. Além disso, foi dito recentemente que dados observacionais podem oferecer argumentos muito fortes em favor da existência de horizontes de eventos, mas não podem provar sua existência de forma fundamental (direta) [1]. Estes fatos frequentemente motivam autores a vislumbrarem novas alternativas, nas quais o estado final de um colapso estelar são estrelas massivas sem horizontes. Como exemplos de tais modelos podemos citar gravastars [44, 45, 46], superfluido de Bose [47], estrelas escuras [48] e holostars [49, 50, 51, 52, 53, 54]. Existem vários outros modelos propostos além destes, mas dentre os modelos alternativos aos buracos negros, os gravastars receberam atenção especial [55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62], parcialmente devido à conexão existente entre a constante cosmológica e o nosso universo acelerado

[63], embora seja muito difícil distinguir observacionalmente tais objetos dos buracos negros [64].

O modelo de gravastar foi proposto por Mazur e Mottola [44, 45, 46]. Neste modelo, e no trabalho relacionado desenvolvido por Laughlin e colaboradores, o vácuo quântico sofre uma transição de fase no local ou próximo do local onde se esperaria formar o horizonte de eventos. O modelo denotado como gravastar (*gravitational vacuum star*), consiste de um objeto compacto com um interior de condensado de de Sitter, governado por uma equação de estado dada por $p = -\rho$, casada a uma casca de espessura finita com equação de estado $p = \rho$. Esta casca, por sua vez, está casada a uma solução exterior de vácuo de Schwarzschild. A casca substitui tanto o horizonte de de Sitter como o horizonte de Schwarzschild. Portanto, este modelo de gravastar não possui singularidade na origem e nenhum horizonte de eventos, já que sua superfície rígida está localizada em um raio levemente maior do que o raio de Schwarzschild e menor do que o horizonte de de Sitter. Já foi argumentado que não há forma de distinguir um buraco negro de Schwarzschild de um gravastar a partir de dados observacionais [1]. Também foi mostrado por Mazur e Mottola que gravastars são termodinamicamente estáveis. Modelos relacionados, analisados em um diferente contexto também foram considerados por Dymnikova [65, 66, 67, 68, 69].

No modelo original de Mazur e Mottola (MM) [44], gravastars consistem em cinco camadas: um caroço interno $0 < r < r_1$, descrito pelo espaço-tempo de de Sitter cuja métrica veremos no próximo capítulo, uma camada intermediária fina de fluido rígido $r_1 < r < r_2$, uma região externa $r > r_2$, descrita pela solução de Schwarzschild, e duas cascas infinitesimais, aparecendo, respectivamente, nas hipersuperfícies $r = r_1$ e $r = r_2$. Pela escolha apropriada dos parâmetros livres envolvidos, pode ser mostrado que as duas cascas podem ter apenas tensões com sinais opostos [44]. Visser and Wiltshire (VW) argumentaram que

o modelo de cinco camadas de Mazur e Mottola pode ser simplificado para modelos de três camadas [70], e isto será visto no capítulo 3, no qual as duas cascas infinitesimais mais a camada intermediária fina de fluido rígido são substituídas por uma única camada infinitesimal, de modo que a função $f(r)$ na métrica de Schwarzschild e de de Sitter são, respectivamente, dadas por

$$f(r) = \begin{cases} 1 - \frac{2M}{r}, & r > a(\tau), \\ 1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2, & r < a(\tau), \end{cases} \quad (1.9)$$

onde $r = a(\tau)$ é uma hipersuperfície do tipo tempo, na qual a casca esférica infinitesimal está localizada e τ denota o tempo próprio da casca fina. A constante $l \equiv \sqrt{3/\Lambda}$ denota o raio de de Sitter. Na hipersuperfície $r = a(\tau)$ as condições de junção de Israel nos dá

$$\frac{1}{2}\dot{a}^2 + V(a) = 0, \quad (1.10)$$

onde o ponto acima da variável denota sua derivada com respeito ao tempo próprio τ da casca fina. Portanto, na região $r > a(\tau)$ o espaço-tempo é localmente Schwarzschild, enquanto que na região $r < a(\tau)$ é localmente de Sitter. Estas duas regiões estão conectadas através de uma casca dinâmica infinitesimal localizada em $r = a(\tau)$ para formar um novo espaço-tempo de um gravastar (ver Figuras 1.1 e 1.2).

Para estudar a dinâmica da equação (1.10), podem-se seguir dois diferentes caminhos: um é prescrever um potencial $V(a)$ e deixar a equação de estado da casca como a deduzida, e a outra é prescrever uma equação de estado da camada e deixar o potencial $V(a)$ como deduzido. Visser e Wiltshire seguiram a primeira aproximação, e estudaram em detalhes o caso onde

$$V(a_0) = 0, \quad V'(a_0) = 0, \quad V''(a_0) > 0, \quad (1.11)$$

onde o primo denota diferenciação ordinária com relação ao argumento indicado. Se e somente se existe um a_0 para o qual as condições acima são satisfeitas, o modelo é dito estável. Entre outras coisas, Visser e Wiltshire encontraram

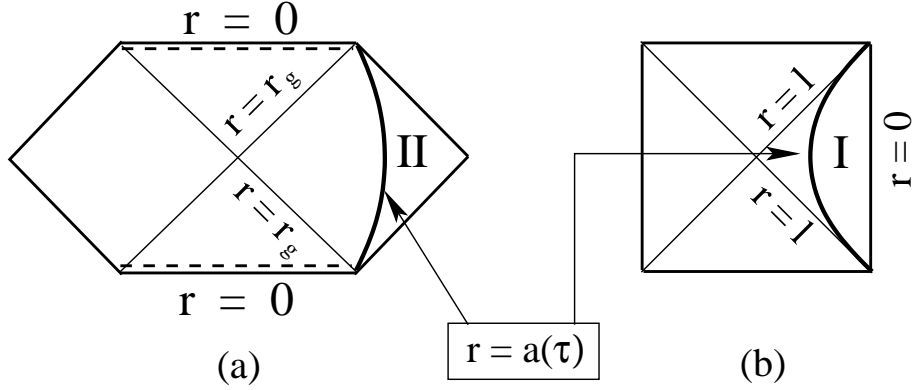


Figura 1.1: (a) O diagrama de Penrose para a solução de vácuo de Schwarzschild. A região II é a região onde $r > a(\tau)$. (b) O diagrama de Penrose para a solução de de Sitter. A região I é a região onde $r < a(\tau)$. Uma casca infinitesimal localizada em $r = a(\tau)$ conecta estas duas regiões para a formação de um espaço-tempo dinâmico de um protótipo de gravastar, como mostra a figura 1.2.

que há muitas equações de estado para as quais as configurações de gravastar são estáveis, enquanto outras não são [70]. Carter estudou o mesmo problema e encontrou novas equações de estado para as quais o gravastar é estável [71], enquanto De Benedictis *et al* [72] e Chirenti e Rezzolla [73] investigaram a estabilidade do modelo original de Mazur e Mottola contra perturbações axiais, e encontraram que gravastars são estáveis a estas perturbações. Chirenti e Rezzolla também mostraram que seus modos quasi-normais diferem das de um buraco negro com a mesma massa, e assim poderiam ser utilizados para discernir um gravastar de um buraco negro.

Como Visser e Wiltshire notaram, há uma noção menos restrigente de estabilidade, chamado de modelos “bounded excursion”, nos quais existem dois raios a_1 e a_2 tais que

$$V(a_1) = 0, \quad V'(a_1) \leq 0, \quad V(a_2) = 0, \quad V'(a_2) \geq 0, \quad (1.12)$$

com $V(a) < 0$ para $a \in (a_1, a_2)$, onde $a_2 > a_1$.

Configurações com interior de de Sitter possuem uma longa história que podemos encontrar, por exemplo, no trabalho de Dymnikova e Galaktionov

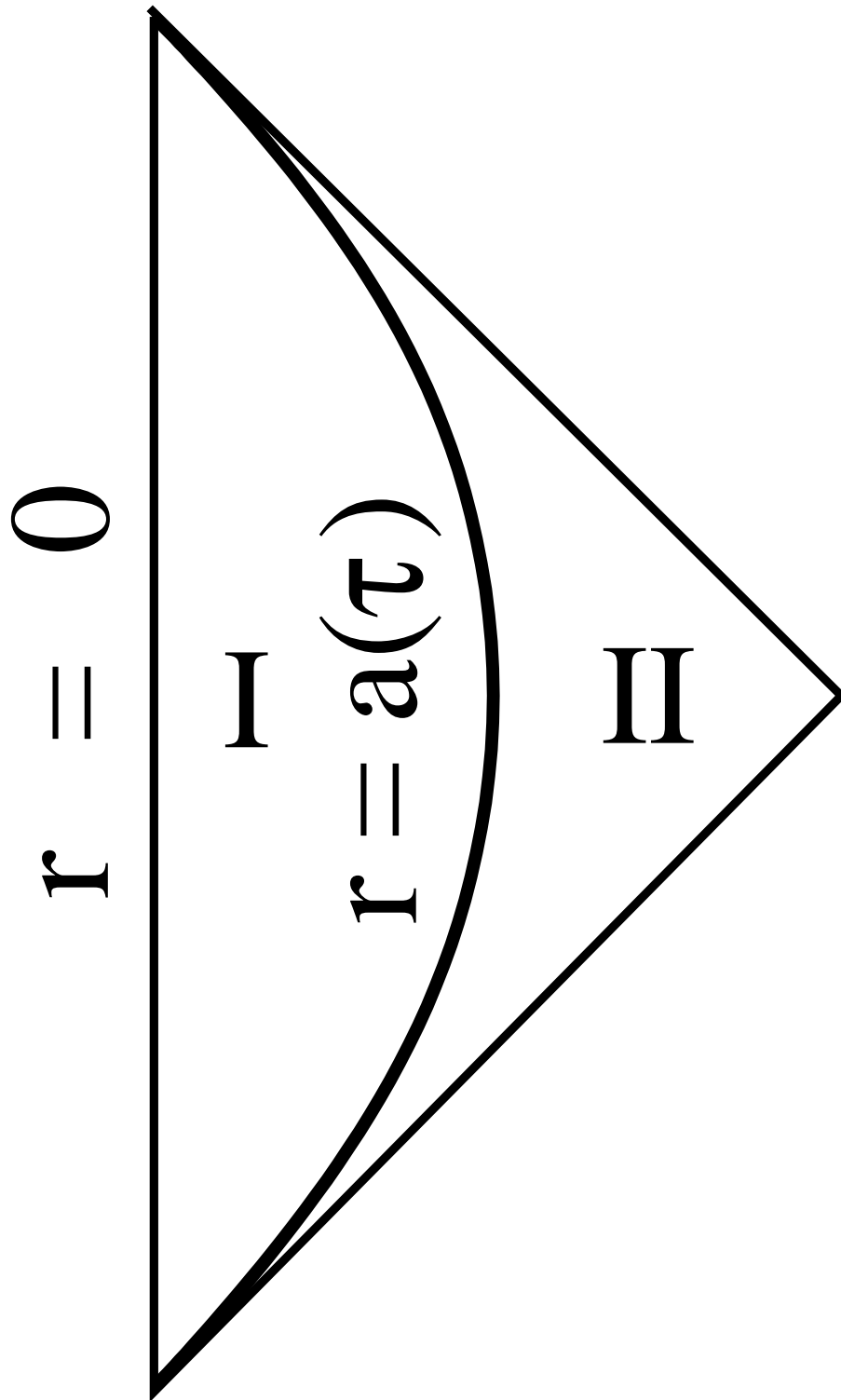


Figura 1.2: O diagrama de Penrose para a solução dada pela equação (1.9). A casca infinitesimal em $r = a(\tau)$ conecta as duas regiões *I* e *II* mostradas na figura 1.1 para formar o espaço-tempo de um protótipo de gravastar.

[74].

Outros modelos alternativos aos gravastares também foram propostos [75]. Entre eles, podemos encontrar uma estrela escura de Chaplygin [76], um gravastar suportado por eletrodinâmica não-linear [77] e um gravastar com pressão anisotrópica contínua [78]. Adicionalmente, Lobo [79] estudou dois modelos para um fluido de energia escura. Um deles descreve uma densidade de energia homogênea e o outro descreve uma densidade de energia monotonamente decrescente, embora ambos estejam com pressão anisotrópica como veremos no capítulo 3. Para fazer a junção com o espaço-tempo de Schwarzschild exterior, Lobo introduziu uma casca fina entre os espaços-tempos interior e exterior.

No trabalho de Lobo, um modelo matemático generalizando o modelo de Mazur-Mottola, ou o modelo de Visser-Wiltshire foi proposto, onde o interior de de Sitter é substituído por uma solução anisotrópica governada pela equação de estado, $p_r = \omega\rho$ com a componente anisotrópica tangencial sendo obtida a partir das equações de campo, adicionada a uma solução exterior dada pelo vácuo de Schwarzschild. Para construir um modelo análogo ao gravastar é necessário escolher valores para os parâmetros que violem as condições de energia forte, violando ou não a condição de energia nula.

A motivação de Lobo para implementar esta generalização veio do fato de que observações recentes confirmaram que o Universo está em uma fase de expansão acelerada. Evidências desta expansão cosmológica têm sido mostradas independentemente a partir de observações de supernovas do tipo Ia (SNe Ia) [80, 81] e a partir da radiação cósmica de microondas de fundo [82, 83]. Um possível candidato proposto para esta aceleração cósmica é precisamente a energia escura, um fluido cósmico parametrizado por uma equação de estado $\omega \equiv p/\rho < -1/3$, onde p é a pressão espacialmente homogênea e ρ a densidade de energia escura. A constante cosmológica pode ser interpretada como um fluido com $\omega = -1$.

Como enfatizado nas referências [87, 88], em um diferente contexto, uma sutileza precisa ser apontada: A noção de energia escura é a de um fluido cósmico espacialmente homogêneo, todavia, ela pode ser estendida a espaços-tempos esfericamente assimétricos pela consideração de que a pressão na equação de estado da energia escura é uma pressão radial negativa, e as pressões transversais podem ser determinadas através das equações de campo. Neste contexto, a generalização do modelo de gravastar com a inclusão de uma solução interior governada pela equação de estado, $p = \omega\rho$ com $\omega < -1/3$, será denotada por um gravastar de energia escura ou simplesmente por uma estrela de energia escura em concordância com a definição de Chapline² [104]. Lobo explorou algumas configurações, impondo escolhas específicas para a função de massa. Posteriormente explorou a estabilidade dinâmica da camada de transição destes modelos com relação a perturbações linearizadas em torno de soluções estáticas, aplicando o formalismo de estabilidade geral desenvolvido por ele e Paulo Crawford [105], e que também foi aplicado no contexto da estabilidade de buracos de verme fantasmas (phantom wormholes) [106], e posteriormente analisou a identidade da evolução para extrair algum insight físico considerando a equação de balanço da pressão na interface de junção. A estrela de energia escura mostrada no trabalho de Lobo pode possivelmente ter uma origem nas flutuações de densidade no fundo cosmológico. É incerto como tais inhomogeneidades na energia escura podem ser formadas. Todavia uma explicação possível pode ser inferida na referência [107], onde a equação de estado de energia escura foi generalizada para incluir um termo inhomogêneo dependendo do parâmetro de Hubble, possivelmente resultando na nucleação de uma estrela de energia escura através de uma perturbação de densidade.

²Observe que esta equação de estado corresponde a um fluido isotrópico. No caso de um fluido anisotrópico, como o considerado no trabalho de Lobo, ambas as componentes de pressão são relevantes na definição da energia escura [132].

1.5 Escopo da tese

As contribuições desta tese foram publicadas em três artigos no Journal of Cosmology and Astroparticle Physics nos anos de 2008 [108, 109] e 2009 [110] e serão apresentadas nos capítulos 4, 5 e 6.

Esta tese está organizada da seguinte forma:

- No capítulo 2 veremos as métricas de Schwarzschild e de de Sitter.
- No capítulo 3, discutiremos o modelo de Mazur e Mottola e o modelo de Visser e Wiltshire para gravastar, além do modelo de Lobo para estrela de energia escura.
- No capítulo 4 veremos que a existência de gravastares não excluem a existência de buracos negros.
- No capítulo 5 generalizaremos a equação da camada e os resultados do capítulo 4 ao caso onde a equação de estado da camada infinitesimal é dada por $p = (1 - \gamma)\sigma$ com γ sendo uma constante.
- No capítulo 6 estudaremos a formação de gravastar e buraco negro a partir de estrelas escuras de fluido anisotrópico.
- No capítulo 7 temos a conclusão final desta tese e as perspectivas de trabalhos futuros.

Esta tese também contém dois apêndices com um resumo da Relatividade Geral e com um resumo sobre as ferramentas computacionais utilizadas para os cálculos numéricos e para geração dos respectivos gráficos do presente trabalho.

Capítulo 2

Métricas

Neste capítulo estudaremos as métricas de Schwarzschild e de de Sitter que serão utilizadas nos capítulos posteriores.

2.1 A métrica de Schwarzschild

Em 1916 Schwarzschild encontrou a primeira solução exata das equações de Einstein no vácuo. A solução representa o campo fora de uma massa esfericamente simétrica. A solução de Schwarzschild tem importância fundamental na compreensão da Relatividade Geral por permitir o cálculo exato de vários fenômenos como a precessão de órbitas planetárias e o encurvamento da luz em torno do Sol.

A métrica de Schwarzschild¹ é dada por

$$ds^2 = f(r)dt^2 - \frac{1}{f(r)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\varphi^2), \quad (2.1)$$

onde a função $f(r)$ é dada por

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r}, \quad (2.2)$$

em unidades geométricas, nas quais $c = 1 = G$. A métrica é singular em $r = 0$ e em $r = r_H \equiv 2M$. Todavia, a natureza destas singularidades é diferente. Em

¹Ao longo de todo este capítulo será adotado a assinatura $+ - - -$.

particular a singularidade em $r = 0$ é genérica e a curvatura do espaço-tempo diverge nela, ao passo que a singularidade em $r = r_H$ é apenas devida a escolha das coordenadas e pode desaparecer após transformações. Uma partícula teste pontual irá cair livremente através de $r = r_H$ sem experimentar nada especial. Esta superfície costuma ser chamada de horizonte de eventos. Os estudos das propriedades de tais horizontes são de importância fundamental, e já foi encontrada uma conexão profunda entre gravitação e termodinâmica [4]. A descoberta da radiação quântica de Hawking [25, 31, 32] e da entropia do buraco negro, que é proporcional à área do horizonte de eventos do buraco negro [27, 28, 29, 30, 31, 32], dão suporte a esta idéia. Esta relação interessante foi primeiramente percebida quando Jacobson deduziu as equações de campo de Einstein a partir da primeira lei da termodinâmica, assumindo a proporcionalidade da entropia e da área do horizonte para todos os horizontes locais de aceleração [33]. Para espaços-tempos estáticos, esfericamente simétricos e espaços-tempos estacionários e assimétricos, Padmanabhan e colaboradores mostraram que as equações de Einstein no horizonte dão origem à primeira lei da termodinâmica [34, 35]. Tais considerações foram posteriormente generalizadas para gravidade de Lovelock [36]. Em [37], por outro lado, as equações de campo gravitacionais para a teoria não-linear $f(R)$ foram deduzidas a partir da primeira lei da termodinâmica, adicionando algumas correções fora do regime de equilíbrio.

2.1.1 Obtendo a forma da métrica de Schwarzschild

Para obtenção da forma da métrica que representa o campo fora de um corpo esfericamente simétrico, consideremos inicialmente a forma limite que esta métrica deve tomar. Muito distante do corpo (para $r \rightarrow \infty$), esperamos que a métrica assuma a forma de uma métrica de Minkowski. Como estamos supondo simetria esférica, expressaremos a métrica de Minkowski em coordena-

das esféricas:

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\text{sen}^2\theta d\phi^2 \quad (2.3)$$

Para obtenção da forma geral de uma métrica esfericamente simétrica e independente do tempo que, no limite quando $r \rightarrow \infty$ reduz-se à equação (2.3), consideraremos em primeiro lugar a condição de independência temporal. Se a métrica é estática, devemos ser capazes de fazer $dt \rightarrow -dt$ sem afetar a métrica, o que nos diz que a métrica não deve possuir termos mistos como $dt dr, dt d\theta$ ou $dt d\phi$. Logo, podemos escrever a forma geral da métrica que queremos encontrar como:

$$ds^2 = g_n dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j \quad (2.4)$$

Também impomos que os componentes da métrica sejam independentes do tempo, ou seja, que $\frac{\partial g_{ab}}{\partial t} = 0$. Uma métrica estática satisfaz estas condições.

O próximo passo é pensar como a simetria esférica afeta a forma de uma métrica. Uma métrica esfericamente simétrica é aquela na qual podemos fazer $d\theta \rightarrow -d\theta$ e $d\phi \rightarrow -d\phi$ sem alterar a forma da métrica. Da mesma forma, termos mistos envolvendo $d\theta$ e $d\phi$ como $dr d\theta, dr d\phi$ e $d\theta d\phi$ podem ser eliminados da métrica, pois poderiam ser afetados pelas transformações $d\theta \rightarrow -d\theta$ e $d\phi \rightarrow -d\phi$. Logo, chegamos a uma métrica diagonal. Cada termo da métrica pode ser multiplicado por uma função que só depende de r e obtemos:

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - C(r)r^2d\theta^2 - D(r)r^2\text{sen}^2\theta d\phi^2 \quad (2.5)$$

A simetria esférica sempre permite que os termos angulares assumam a forma normal de $d\Omega^2 = r^2d\theta^2 + r^2\text{sen}^2\theta d\phi^2$, logo fazemos $C = D$ e escrevemos a métrica como:

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - C(r)(r^2d\theta^2 + r^2\text{sen}^2\theta d\phi^2) \quad (2.6)$$

Podemos agora fazer uma mudança da coordenada radial para eliminarmos C . Fazendo $\rho = r\sqrt{C(r)}$, temos que $\rho^2 = Cr^2$ e a parte angular da métrica pode ser escrita como:

$$C(r)(r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2\theta d\phi^2) = Cr^2 d\theta^2 + Cr^2 \text{sen}^2\theta d\phi^2 = \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \text{sen}^2\theta d\phi^2 \quad (2.7)$$

Temos também que

$$d\rho = \frac{1}{2\sqrt{C}} dCr + \sqrt{C} dr = \sqrt{C} \left(\frac{r}{2C} \frac{dC}{dr} r + 1 \right) \quad (2.8)$$

Elevando ao quadrado e resolvendo para dr^2 encontramos que:

$$dr^2 = \frac{1}{C} \left(1 + \frac{r}{2C} \frac{dC}{dr} \right)^{-2} d\rho^2. \quad (2.9)$$

Agora redefinimos a função $B(r)$ para $B_1(r) = \frac{1}{C} \left(1 + \frac{r}{2C} \frac{dC}{dr} \right)^{-2} B$ de forma a termos $Bdr^2 = B_1 d\rho^2$. Podemos, então, reescrever a equação (2.6) como

$$ds^2 = A_1 dt^2 - B_1 d\rho^2 - \rho^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (2.10)$$

onde A_1 é uma função de ρ .

Até aqui não foi imposta nenhuma restrição à forma dos coeficientes, a menos que eles devem tender a um quando $r \rightarrow \infty$. Podemos então reescrever a equação (2.10) substituindo os rótulos das funções coeficientes e fazendo $\rho \rightarrow r$ de modo que a métrica fica na forma:

$$ds^2 = A dt^2 - B dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \quad (2.11)$$

A última restrição a ser imposta é que a métrica deve preservar a assinatura e isto é feito escrevendo as funções dos coeficientes como exponenciais, pois assim garante-se que sejam funções positivas. Logo fazemos $A = e^{2\nu(r)}$ e $B = e^{2\lambda(r)}$. Isto nos dá a métrica estática e esfericamente simétrica mais geral para esta escolha de coordenadas, ou seja,

$$ds^2 = e^{2\nu(r)} dt^2 - e^{2\lambda(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2), \quad (2.12)$$

2.1.2 Os um-formas de curvatura

Agora prosseguiremos utilizando o método de tétrede ortonormal para encontrarmos a solução. Devemos, portanto, calcular as um-formas de curvatura e os coeficientes de rotação de Ricci que estão relacionados pela expressão

$$\Gamma_{\hat{b}}^{\hat{a}} = \Gamma_{\hat{b}\hat{c}}^{\hat{a}} \omega^{\hat{c}}. \quad (2.13)$$

Definimos, então as seguintes bases um-formas:

$$\omega^{\hat{t}} = e^{\nu(r)} dt, \omega^{\hat{r}} = e^{\lambda(r)} dr, \omega^{\hat{\theta}} = r d\theta, \omega^{\hat{\phi}} = r \operatorname{sen}\theta d\phi. \quad (2.14)$$

Portanto temos:

$$dt = e^{-\nu(r)} d\omega^{\hat{t}}, dr = e^{-\lambda(r)} \omega^{\hat{r}}, d\theta = \frac{1}{r} \omega^{\hat{\theta}}, d\phi = \frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \omega^{\hat{\phi}}. \quad (2.15)$$

A derivada exterior de cada uma das bases um-formas é dada por:

$$d\omega^{\hat{t}} = d(e^{\nu(r)} dt) = \frac{d\nu}{dr} e^{\nu(r)} dr \wedge dt = \frac{d\nu}{dr} e^{-\lambda(r)} \omega^{\hat{r}} \wedge \omega^{\hat{t}} \quad (2.16)$$

$$d\omega^{\hat{r}} = d(e^{\lambda(r)} dr) = \frac{d\lambda}{dr} e^{\lambda(r)} dr \wedge dr = 0 \quad (2.17)$$

$$d\omega^{\hat{\theta}} = d(r d\theta) = dr \wedge d\theta = \frac{e^{-\lambda(r)}}{r} \omega^{\hat{r}} \wedge \omega^{\hat{\theta}} \quad (2.18)$$

$$d\omega^{\hat{\phi}} = d(r \operatorname{sen}\theta d\phi) = \operatorname{sen}\theta dr \wedge d\phi + r \cos\theta d\theta \wedge d\phi = \frac{e^{-\lambda(r)}}{r} \omega^{\hat{r}} \wedge \omega^{\hat{\phi}} + \frac{\cot\theta}{r} \omega^{\hat{\theta}} \wedge \omega^{\hat{\phi}} \quad (2.19)$$

A equação de primeira estrutura de Cartan para as nossas coordenadas assume a forma

$$d\omega^{\hat{a}} = -\Gamma_{\hat{b}}^{\hat{a}} \wedge \omega^{\hat{b}} = -\Gamma_{\hat{t}}^{\hat{a}} \wedge \omega^{\hat{t}} - \Gamma_{\hat{r}}^{\hat{a}} \wedge \omega^{\hat{r}} - \Gamma_{\hat{\theta}}^{\hat{a}} \wedge \omega^{\hat{\theta}} - \Gamma_{\hat{\phi}}^{\hat{a}} \wedge \omega^{\hat{\phi}}. \quad (2.20)$$

Logo:

$$d\omega^{\hat{t}} = -\Gamma_{\hat{t}}^{\hat{t}} \wedge \omega^{\hat{t}} - \Gamma_{\hat{r}}^{\hat{t}} \wedge \omega^{\hat{r}} - \Gamma_{\hat{\theta}}^{\hat{t}} \wedge \omega^{\hat{\theta}} - \Gamma_{\hat{\phi}}^{\hat{t}} \wedge \omega^{\hat{\phi}}, \quad (2.21)$$

$$d\omega^{\hat{r}} = -\Gamma_{\hat{t}}^{\hat{r}} \wedge \omega^{\hat{t}} - \Gamma_{\hat{r}}^{\hat{r}} \wedge \omega^{\hat{r}} - \Gamma_{\hat{\theta}}^{\hat{r}} \wedge \omega^{\hat{\theta}} - \Gamma_{\hat{\phi}}^{\hat{r}} \wedge \omega^{\hat{\phi}}, \quad (2.22)$$

$$d\omega^{\hat{\theta}} = -\Gamma_{\hat{t}}^{\hat{\theta}} \wedge \omega^{\hat{t}} - \Gamma_{\hat{r}}^{\hat{\theta}} \wedge \omega^{\hat{r}} - \Gamma_{\hat{\theta}}^{\hat{\theta}} \wedge \omega^{\hat{\theta}} - \Gamma_{\hat{\phi}}^{\hat{\theta}} \wedge \omega^{\hat{\phi}}, \quad (2.23)$$

$$d\omega^{\hat{\phi}} = -\Gamma_{\hat{t}}^{\hat{\phi}} \wedge \omega^{\hat{t}} - \Gamma_{\hat{r}}^{\hat{\phi}} \wedge \omega^{\hat{r}} - \Gamma_{\hat{\theta}}^{\hat{\phi}} \wedge \omega^{\hat{\theta}} - \Gamma_{\hat{\phi}}^{\hat{\phi}} \wedge \omega^{\hat{\phi}}, \quad (2.24)$$

Comparando a equação (2.21) com a equação (2.16), obtemos que:

$$\Gamma_{\hat{t}}^{\hat{t}} = \Gamma_{\hat{\theta}}^{\hat{t}} = \Gamma_{\hat{\phi}}^{\hat{t}} = 0 \quad (2.25)$$

e

$$\Gamma_{\hat{r}}^{\hat{t}} = \frac{d\nu}{dr} e^{-\lambda(r)} \omega^{\hat{t}}. \quad (2.26)$$

Utilizando a equação (2.13), conclui-se que $\Gamma_{\hat{r}\hat{t}}^{\hat{t}} = \frac{d\nu}{dr} e^{-\lambda(r)}$. Como a equação (2.17) se anula e não dá qualquer informação, prosseguimos comparando (2.18) e (2.23) e encontramos que

$$\Gamma_{\hat{t}}^{\hat{\theta}} = \Gamma_{\hat{\theta}}^{\hat{\theta}} = \Gamma_{\hat{\phi}}^{\hat{\theta}} = 0 \quad (2.27)$$

e

$$\Gamma_{\hat{r}}^{\hat{\theta}} = \frac{e^{-\lambda(r)}}{r} \omega^{\hat{\theta}}. \quad (2.28)$$

Novamente, utilizando a equação (2.13) conclui-se que $\Gamma_{\hat{\theta}\hat{r}}^{\hat{\theta}} = \frac{e^{-\lambda(r)}}{r}$.

Agora compara-se (2.19) e (2.24) e encontra-se que

$$\Gamma_{\hat{t}}^{\hat{\phi}} = \Gamma_{\hat{\phi}}^{\hat{\phi}} = 0, \quad (2.29)$$

$$\Gamma_{\hat{r}}^{\hat{\phi}} = \frac{e^{-\lambda(r)}}{r} \omega^{\hat{\phi}}. \quad (2.30)$$

e

$$\Gamma_{\hat{\theta}}^{\hat{\phi}} = \frac{\cot \theta}{r} \omega^{\hat{\phi}}, \quad (2.31)$$

onde

$$\Gamma_{\hat{r}\hat{\phi}}^{\hat{\phi}} = \frac{e^{-\lambda(r)}}{r} \quad (2.32)$$

e

$$\Gamma_{\hat{\theta}\hat{\phi}}^{\hat{\phi}} = \frac{\cot \theta}{r}. \quad (2.33)$$

Retornando agora ao caso da equação (2.17), utilizaremos considerações de simetria para utilizar as um-formas de curvatura. Podemos definir para subir ou descer índices, olhando para a métrica da equação (2.12) :

$$\eta_{\hat{a}\hat{b}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Portanto, temos as seguintes relações:

$$\Gamma_{\hat{r}}^{\hat{t}} = \eta^{\hat{t}\hat{t}}\Gamma_{\hat{t}\hat{r}} = \Gamma_{\hat{t}\hat{r}} = -\Gamma_{\hat{r}\hat{t}} = -\eta_{\hat{r}\hat{r}}\Gamma_{\hat{t}}^{\hat{r}} = \Gamma_{\hat{t}}^{\hat{r}}. \quad (2.35)$$

$$\Gamma_{\hat{r}}^{\hat{\theta}} = \eta^{\hat{\theta}\hat{\theta}}\Gamma_{\hat{\theta}\hat{r}} = -\Gamma_{\hat{\theta}\hat{r}} = \Gamma_{\hat{r}\hat{\theta}} = \eta_{\hat{r}\hat{r}}\Gamma_{\hat{\theta}}^{\hat{r}} = -\Gamma_{\hat{\theta}}^{\hat{r}}. \quad (2.36)$$

$$\Gamma_{\hat{r}}^{\hat{\phi}} = \eta^{\hat{\phi}\hat{\phi}}\Gamma_{\hat{\phi}\hat{r}} = -\Gamma_{\hat{\phi}\hat{r}} = \Gamma_{\hat{r}\hat{\phi}} = \eta_{\hat{r}\hat{r}}\Gamma_{\hat{\phi}}^{\hat{r}} = -\Gamma_{\hat{\phi}}^{\hat{r}}. \quad (2.37)$$

E das equações (2.25) e (2.26) concluímos que

$$\Gamma_{\hat{t}}^{\hat{r}} = \Gamma_{\hat{r}}^{\hat{t}} = \frac{d\nu}{dr}e^{-\lambda(r)}\omega^{\hat{t}} \Rightarrow \Gamma_{\hat{t}\hat{t}}^{\hat{r}} = \frac{d\nu}{dr}e^{-\lambda(r)}. \quad (2.38)$$

Utilizando as equações (2.27) e (2.28) obtemos

$$\Gamma_{\hat{\theta}}^{\hat{r}} = -\Gamma_{\hat{r}}^{\hat{\theta}} = \frac{e^{-\lambda(r)}}{r}\omega^{\hat{\theta}} \Rightarrow \Gamma_{\hat{\theta}\hat{\theta}}^{\hat{r}} = \frac{-e^{-\lambda(r)}}{r}. \quad (2.39)$$

e, finalmente, utilizando as equações (2.29),(2.30) e (2.31) obtemos

$$\Gamma_{\hat{\phi}}^{\hat{r}} = -\Gamma_{\hat{r}}^{\hat{\phi}} = \frac{e^{-\lambda(r)}}{r}\omega^{\hat{\phi}} \Rightarrow \Gamma_{\hat{\phi}\hat{\phi}}^{\hat{r}} = \frac{-e^{-\lambda(r)}}{r}. \quad (2.40)$$

2.1.3 Resolvendo para o Tensor de Curvatura

Calcularemos agora os componentes do tensor de curvatura, utilizando a segunda equação de estrutura de Cartan, dada por:

$$\Omega_{\hat{b}}^{\hat{a}} = d\Gamma_{\hat{b}}^{\hat{a}} + \Gamma_{\hat{c}}^{\hat{a}} \wedge \Gamma_{\hat{b}}^{\hat{c}} = \frac{1}{2} R_{\hat{b}\hat{c}\hat{d}}^{\hat{a}} \omega^{\hat{c}} \wedge \omega^{\hat{d}} \quad (2.41)$$

Calcularemos explicitamente uma das duas formas da curvatura. Considere $\Omega_{\hat{t}}^{\hat{r}} = d\Gamma_{\hat{t}}^{\hat{r}} + \Gamma_{\hat{c}}^{\hat{r}} \wedge \Gamma_{\hat{t}}^{\hat{c}}$. Para a soma, temos:

$$\Gamma_{\hat{c}}^{\hat{r}} \wedge \Gamma_{\hat{t}}^{\hat{c}} = \Gamma_{\hat{t}}^{\hat{r}} \wedge \Gamma_{\hat{t}}^{\hat{t}} + \Gamma_{\hat{r}}^{\hat{r}} \wedge \Gamma_{\hat{t}}^{\hat{r}} + \Gamma_{\hat{\theta}}^{\hat{r}} \wedge \Gamma_{\hat{t}}^{\hat{\theta}} + \Gamma_{\hat{\phi}}^{\hat{r}} \wedge \Gamma_{\hat{t}}^{\hat{\phi}} = 0. \quad (2.42)$$

já que $\Gamma_{\hat{t}}^{\hat{t}} = \Gamma_{\hat{r}}^{\hat{r}} = \Gamma_{\hat{\theta}}^{\hat{\theta}} = \Gamma_{\hat{\phi}}^{\hat{\phi}} = 0$. Portanto

$$\Omega_{\hat{t}}^{\hat{r}} = d\Gamma_{\hat{t}}^{\hat{r}} = d\left(\frac{d\nu}{dr} e^{-\lambda(r)} \omega^{\hat{t}}\right) = d\left(\frac{d\nu}{dr} e^{\nu(r)-\lambda(r)} dt\right) = \quad (2.43)$$

$$\frac{d^2\nu}{dr^2} e^{\nu(r)-\lambda(r)} dr \wedge dt + \left(\frac{d\nu}{dr}\right)^2 e^{\nu(r)-\lambda(r)} dr \wedge dt - \left(\frac{d\nu}{dr}\right) \left(\frac{d\lambda}{dr}\right) e^{\nu(r)-\lambda(r)} dr \wedge dt.$$

Utilizando a equação (2.15) para inverter os diferenciais e escrevê-los em termos das bases de um-formas, chegamos à seguinte expressão:

$$\Omega_{\hat{t}}^{\hat{r}} = \left[\frac{d^2\nu}{dr^2} + \left(\frac{d\nu}{dr}\right)^2 - \left(\frac{d\nu}{dr}\right) \left(\frac{d\lambda}{dr}\right) \right] e^{-2\lambda(r)} \omega^{\hat{r}} \wedge \omega^{\hat{t}} \quad (2.44)$$

Agora escreveremos a curvatura em termos dos componentes do tensor de Riemann, utilizando a expressão $\Omega_{\hat{b}}^{\hat{a}} = \frac{1}{2} R_{\hat{b}\hat{c}\hat{d}}^{\hat{a}} \omega^{\hat{c}} \wedge \omega^{\hat{d}}$.

Temos então:

$$\Omega_{\hat{t}}^{\hat{r}} = \frac{1}{2} R_{\hat{t}\hat{c}\hat{d}}^{\hat{r}} \omega^{\hat{c}} \wedge \omega^{\hat{d}} = \frac{1}{2} R_{\hat{t}\hat{r}\hat{t}}^{\hat{r}} \omega^{\hat{r}} \wedge \omega^{\hat{t}} = \frac{1}{2} R_{\hat{t}\hat{t}\hat{r}}^{\hat{r}} \omega^{\hat{t}} \wedge \omega^{\hat{r}} \quad (2.45)$$

Utilizando o fato de que $\omega^{\hat{t}} \wedge \omega^{\hat{r}} = -\omega^{\hat{r}} \wedge \omega^{\hat{t}}$ escrevemos a equação (2.45) como:

$$\Omega_{\hat{t}}^{\hat{r}} = \frac{1}{2} R_{\hat{t}\hat{r}\hat{t}}^{\hat{r}} \omega^{\hat{r}} \wedge \omega^{\hat{t}} - \frac{1}{2} R_{\hat{t}\hat{t}\hat{r}}^{\hat{r}} \omega^{\hat{r}} \wedge \omega^{\hat{t}} = \frac{1}{2} (R_{\hat{t}\hat{r}\hat{t}}^{\hat{r}} - R_{\hat{t}\hat{t}\hat{r}}^{\hat{r}}) \omega^{\hat{r}} \wedge \omega^{\hat{t}} \quad (2.46)$$

Podemos simplificar ainda mais a equação (2.46) utilizando as simetrias do tensor de Riemann:

$$R_{\hat{t}\hat{t}\hat{r}}^{\hat{r}} = \eta^{\hat{r}\hat{r}} R_{\hat{r}\hat{t}\hat{t}\hat{r}} = -R_{\hat{r}\hat{t}\hat{t}\hat{r}} = R_{\hat{r}\hat{t}\hat{r}\hat{t}} = \eta_{\hat{r}\hat{r}} R_{\hat{t}\hat{r}\hat{t}}^{\hat{r}} = -R_{\hat{t}\hat{r}\hat{t}}^{\hat{r}} \quad (2.47)$$

e então obtemos:

$$\Omega_{\hat{t}}^{\hat{r}} = \frac{1}{2} (R_{\hat{t}\hat{r}\hat{t}}^{\hat{r}} - R_{\hat{t}\hat{t}\hat{r}}^{\hat{r}}) \omega^{\hat{r}} \wedge \omega^{\hat{t}} = \frac{1}{2} (R_{\hat{t}\hat{r}\hat{t}}^{\hat{r}} + R_{\hat{t}\hat{t}\hat{r}}^{\hat{r}}) \omega^{\hat{r}} \wedge \omega^{\hat{t}} = R_{\hat{t}\hat{r}\hat{t}}^{\hat{r}} \omega^{\hat{r}} \wedge \omega^{\hat{t}}. \quad (2.48)$$

Comparando a equação (2.48) com a equação (2.44) vemos que:

$$R_{\hat{t}\hat{r}\hat{t}}^{\hat{r}} = \left[\frac{d^2\nu}{dr^2} + \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^2 - \left(\frac{d\nu}{dr} \right) \left(\frac{d\lambda}{dr} \right) \right] e^{-2\lambda(r)}. \quad (2.49)$$

Procedendo desta forma encontramos os seguintes componentes, diferentes de zero, do tensor de Riemann:

$$R_{\hat{t}\hat{r}\hat{t}}^{\hat{r}} = \left[\frac{d^2\nu}{dr^2} + \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^2 - \left(\frac{d\nu}{dr} \right) \left(\frac{d\lambda}{dr} \right) \right] e^{-2\lambda(r)}, \quad (2.50)$$

$$R_{\hat{\theta}\hat{i}\hat{\theta}}^{\hat{t}} = R_{\hat{\phi}\hat{t}\hat{\phi}}^{\hat{t}} = -\frac{1}{r} \frac{d\nu}{dr} e^{-2\lambda}, \quad (2.51)$$

$$R_{\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}}^{\hat{r}} = R_{\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}}^{\hat{r}} = \frac{1}{r} \frac{d\lambda}{dr} e^{-2\lambda}, \quad (2.52)$$

$$R_{\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}}^{\hat{\theta}} = \frac{1 - e^{-2\lambda}}{r^2} \quad (2.53)$$

e todos os outros componentes diferentes de zero podem ser encontrados utilizando as simetrias do tensor de Riemann.

2.1.4 As equações de vácuo

Agora calcularemos os componentes do tensor de Ricci para obtermos as equações de vácuo. Isto é feito calculando $R_{\hat{a}\hat{b}} = R_{\hat{a}\hat{c}\hat{b}}^{\hat{c}}$. Para o primeiro termo temos:

$$R_{\hat{t}\hat{t}} = R_{\hat{t}\hat{t}\hat{t}}^{\hat{t}} + R_{\hat{t}\hat{r}\hat{t}}^{\hat{r}} + R_{\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}}^{\hat{\theta}} + R_{\hat{t}\hat{\phi}\hat{t}}^{\hat{\phi}} = \left[\frac{d^2\nu}{dr^2} + \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^2 - \left(\frac{d\nu}{dr} \right) \left(\frac{d\lambda}{dr} \right) + \frac{2}{r} \frac{d\nu}{dr} \right] e^{-2\lambda(r)}. \quad (2.54)$$

Como $R_{\hat{r}\hat{r}\hat{t}}^{\hat{t}} = -R_{\hat{t}\hat{r}\hat{t}}^{\hat{r}}$ obtém-se que

$$R_{\hat{r}\hat{r}} = - \left[\frac{d^2\nu}{dr^2} + \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^2 - \left(\frac{d\nu}{dr} \right) \left(\frac{d\lambda}{dr} \right) + \frac{2}{r} \frac{d\nu}{dr} \right] e^{-2\lambda(r)}. \quad (2.55)$$

Da mesma forma temos:

$$R_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = R_{\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}}^{\hat{t}} + R_{\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}}^{\hat{r}} + R_{\hat{\theta}\hat{\theta}\hat{\theta}}^{\hat{\theta}} + R_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}}^{\hat{\phi}} = -\frac{1}{r} \frac{d\nu}{dr} e^{-2\lambda} + \frac{1}{r} \frac{d\lambda}{dr} e^{-2\lambda} + \frac{1 - e^{-2\lambda}}{r^2} \quad (2.56)$$

e

$$R_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = R_{\hat{\phi}\hat{t}\hat{\phi}}^{\hat{t}} + R_{\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}}^{\hat{r}} + R_{\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}}^{\hat{\theta}} + R_{\hat{\phi}\hat{\phi}\hat{\phi}}^{\hat{\phi}} = -\frac{1}{r} \frac{d\nu}{dr} e^{-2\lambda} + \frac{1}{r} \frac{d\lambda}{dr} e^{-2\lambda} + \frac{1 - e^{-2\lambda}}{r^2}. \quad (2.57)$$

Obtemos as equações de vácuo² escolhendo cada componente do tensor de Ricci como sendo zero. Para encontrarmos as formas funcionais de $\nu(r)$ e de $\lambda(r)$, utilizaremos as equações (2.54) e (2.55) e as igualaremos a zero, o que dá:

$$\left[\frac{d^2\nu}{dr^2} + \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^2 - \left(\frac{d\nu}{dr} \right) \left(\frac{d\lambda}{dr} \right) + \frac{2}{r} \frac{d\nu}{dr} \right] e^{-2\lambda(r)} = 0, \quad (2.58)$$

$$\left[\frac{d^2\nu}{dr^2} + \left(\frac{d\nu}{dr} \right)^2 - \left(\frac{d\nu}{dr} \right) \left(\frac{d\lambda}{dr} \right) + \frac{2}{r} \frac{d\nu}{dr} \right] e^{-2\lambda(r)} = 0. \quad (2.59)$$

Subtraindo a equação (2.59) da equação (2.58) obtemos

$$\frac{d\nu}{dr} + \frac{d\lambda}{dr} = 0. \quad (2.60)$$

Isto implica que a soma destas funções é uma constante:

$$\nu + \lambda = k, \quad (2.61)$$

onde k é uma constante.

Mudando a coordenada temporal para $t \rightarrow te^k$, temos que $dt \rightarrow dt e^k$, $dt^2 \rightarrow dt^2 e^{2k} \Rightarrow e^{2\nu} dt^2 \rightarrow e^{2(\nu+k)} dt^2$. Em outras palavras, transformamos $\nu \rightarrow \nu + k$, e então, $\nu + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\nu$.

Agora utilizamos este resultado para substituímos ν por $-\lambda$ na equação (2.59) e, assim, obtemos:

$$\frac{d^2\lambda}{dr^2} - 2 \left(\frac{d\lambda}{dr} \right)^2 + \frac{2}{r} \frac{d\lambda}{dr} = 0. \quad (2.62)$$

²As equações de campo de Einstein para o vácuo são dadas por $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0$.

Para resolvermos a equação (2.62), consideremos a derivada segunda de $re^{-2\lambda}$:

$$(re^{-2\lambda})'' = \left(e^{-2\lambda} - 2r \frac{d\lambda}{dr} e^{-2\lambda} \right)' = \left(-4 \frac{d\lambda}{dr} e^{-2\lambda} - 2r \frac{d^2\lambda}{dr^2} e^{-2\lambda} + 4r \left(\frac{d\lambda}{dr} \right)^2 e^{-2\lambda} \right). \quad (2.63)$$

Igualando a equação (2.63) a zero, vemos que esta é uma outra forma de escrever a equação (2.62)

$$-4 \frac{d\lambda}{dr} e^{-2\lambda} - 2r \frac{d^2\lambda}{dr^2} e^{-2\lambda} + 4r \left(\frac{d\lambda}{dr} \right)^2 e^{-2\lambda} = 0. \quad (2.64)$$

Dividindo a equação (2.64) por $e^{-2\lambda}$ obtemos:

$$-4 \frac{d\lambda}{dr} - 2r \frac{d^2\lambda}{dr^2} + 4r \left(\frac{d\lambda}{dr} \right)^2 = 0. \quad (2.65)$$

Dividindo agora a equação (2.65) por $-2r$ obtemos:

$$\frac{d^2\lambda}{dr^2} - 2 \left(\frac{d\lambda}{dr} \right)^2 + \frac{2}{r} \frac{d\lambda}{dr} = 0 \quad (2.66)$$

Retornando para $(re^{-2\lambda})'' = (e^{-2\lambda} - 2r \frac{d\lambda}{dr} e^{-2\lambda})'$, como esta expressão se anula por ser equivalente à equação (2.62), podemos integrá-la, dando uma constante

$$(re^{-2\lambda})' = const. \quad (2.67)$$

Voltando agora à equação (2.56), obtemos outra das equações de vácuo. Escolhendo-a como sendo igual a zero:

$$R_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = -\frac{1}{r} \frac{d\nu}{dr} e^{-2\lambda} + \frac{1}{r} \frac{d\lambda}{dr} e^{-2\lambda} + \frac{1 - e^{-2\lambda}}{r^2} = 0. \quad (2.68)$$

Multiplicando, agora, a equação (2.68) por r^2 obtemos:

$$-r \frac{d\nu}{dr} e^{-2\lambda} + r \frac{d\lambda}{dr} e^{-2\lambda} + 1 - e^{-2\lambda} = 0 \quad (2.69)$$

Lembrando que $\nu = -\lambda$ chegamos à

$$2r \frac{d\lambda}{dr} e^{-2\lambda} + 1 - e^{-2\lambda} = 0, \quad (2.70)$$

que pode ser reescrita na forma:

$$-2r \frac{d\lambda}{dr} e^{-2\lambda} + e^{-2\lambda} = 1. \quad (2.71)$$

O lado esquerdo da equação (2.71) é nada menos do que $(re^{-2\lambda})'$, logo vemos que $(re^{-2\lambda})' = 1$, cuja integral nos dá:

$$re^{-2\lambda} = r - 2m, \quad (2.72)$$

onde $2m$ é uma constante de integração. Esta constante está relacionada à massa. Dividindo a equação (2.72) por r encontramos que:

$$e^{-2\lambda} = 1 - \frac{2m}{r}. \quad (2.73)$$

Observe que tínhamos a forma original da métrica dada por $ds^2 = e^{2\nu(r)} dt^2 - e^{2\lambda(r)} dr^2 - r^2(d\theta^2 - \sin^2\theta d\phi^2)$. Utilizando $\nu = -\lambda$, obtemos os coeficientes da métrica de Schwarzschild que estávamos procurando:

$$e^{2\nu} = 1 - \frac{2m}{r} \quad (2.74)$$

e

$$e^{2\lambda} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \quad (2.75)$$

2.2 A métrica de de Sitter

O primeiro modelo cosmológico discutido por Albert Einstein foi o modelo estático (ou estacionário) que também era considerado na física pré-relativística [111]. A razão para este modelo ser construído, em torno de 1917, era que nesta época não se conhecia o universo além da Via Láctea e pouco se sabia a respeito das velocidades relativas de objetos astronômicos.

Einstein viu que não havia solução satisfatória correspondendo ao modelo estático. A razão física para este resultado é o fato de que as forças gravitacionais atrativas não podem ser equilibradas por tensões de forma que seja

compatível com as equações de campo. Einstein então, ao constatar isto, escreveu suas equações de campo introduzindo um termo cosmológico.

O resultado era que havia agora uma solução independente do tempo descrevendo um modelo estático. A razão é que possuímos agora forças atrativas e repulsivas, tornando possível um equilíbrio. Todavia, posteriormente foi encontrado que esta solução é instável. A explicação para esta instabilidade é simples: Com o aumento da distância r de duas partículas, a força atrativa decresce com r^{-2} , enquanto que o termo associado à constante cosmológica, que exerce um efeito repulsivo, cresce com r^2 . Mais ainda, uma dificuldade lógica apresentou-se quando de Sitter encontrou uma solução das equações de campo de Einstein com constante cosmológica sem conter quaisquer fontes materiais. Einstein notou que, para ter o princípio de Mach completamente incorporado nas equações de campo, não deveria existir nenhuma solução destas equações sem fontes e disse que a introdução da constante cosmológica em suas equações havia sido o maior erro de sua vida.

Hoje sabemos que o universo está em expansão acelerada e a constante cosmológica voltou a ser introduzida nas equações de Einstein como uma candidata à energia escura, ou seja, o componente do universo que age exercendo um efeito repulsivo. Dessa forma, a importância da métrica de de Sitter torna-se evidente para a compreensão de modelos inspirados no fato de que observações astronômicas apontam para um universo composto, em sua maior parte, de energia escura.

Veremos a seguir como a métrica de de Sitter pode ser obtida a partir da métrica de Friedmann-Robertson-Walker.

2.2.1 Obtendo a métrica de de Sitter

Para modelarmos o comportamento do Universo em larga-escala de modo que as equações de Einstein sejam satisfeitas, iniciamos modelando a matéria e

energia do universo por um fluido perfeito. As partículas no fluido representam os aglomerados de galáxias e o fluido é descrito por uma densidade média ρ e pressão P . Mais ainda, em coordenadas comóveis, $\dot{t} = 1$ e $\dot{x}_\mu = 0$, que fornecem $w^\mu = (1, 0, 0, 0)$, temos:

$$T_b^a = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -P \end{pmatrix}. \quad (2.76)$$

Utilizando a métrica de Robertson-Walker,

$$ds^2 = dt^2 - \frac{a^2(t)}{1 - kr^2} dr^2 - a^2(t)r^2 d\theta^2 - a^2(t)r^2 \text{sen}^2\theta d\phi^2, \quad (2.77)$$

onde $a(t)$ é o fator de escala e k é a constante de curvatura, podemos deduzir os componentes do tensor de curvatura da forma usual. A partir desta métrica podemos encontrar os componentes do tensor de Einstein e utilizar as equações de campo modificadas, isto é, $G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$. Obtemos, então, as equações:

$$\frac{3}{a^2}(k + \dot{a}^2) - \Lambda = 8\pi\rho, \quad (2.78)$$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{\dot{a}}(k + \dot{a}^2) - \Lambda = -8\pi P. \quad (2.79)$$

Um caso especial pode ser obtido fazendo-se $k = 0$ na métrica dada pela equação (2.77). Como no modelo de de Sitter não há nem matéria e nem radiação, fazendo-se $\rho = P = 0$ obtemos que a métrica, neste caso, é dada por

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dr^2 - a^2(t)r^2 d\theta^2 - a^2(t)r^2 \text{sen}^2\theta d\phi^2, \quad (2.80)$$

onde $a(t)$ satisfaz a equação

$$\frac{3\dot{a}^2}{a^2} - \Lambda = 0, \quad (2.81)$$

donde

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{\dot{a}}\dot{a}^2 - \Lambda = 0. \quad (2.82)$$

Da equação (2.81) obtemos

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\Lambda}{3} \quad (2.83)$$

e, tomando a raiz quadrada nos dois lados, obtemos:

$$\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} \quad (2.84)$$

Podemos agora integrar a equação (2.84) para obter

$$a(t) = Ce^{\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t} = Ce^{t/l}, \quad (2.85)$$

onde C é uma constante de integração e $l \equiv \sqrt{3/\Lambda}$.

Para o universo de de Sitter, o elemento de linha torna-se

$$ds^2 = dt^2 - C^2 e^{2t/l} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \text{sen}^2 \theta d\phi^2). \quad (2.86)$$

Fazendo a transformação

$$r_1 = Ce^{t/l} r, \quad (2.87)$$

obtemos a métrica

$$ds^2 = dt^2 - \left(dr_1 - \frac{r_1 dt}{l} \right)^2 + r_1^2 d\Omega^2, \quad (2.88)$$

onde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\phi^2$.

Agora, fazemos a transformação

$$t = t_1 + \frac{1}{2} l \log \left(\frac{r_1^2}{l^2} - 1 \right) \quad (2.89)$$

e encontramos finalmente a forma mais conhecida da métrica de de Sitter, ou seja:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_1^2}{l^2} \right) dt_1^2 + \left(1 - \frac{r_1^2}{l^2} \right)^{-1} dr_1^2 + r_1^2 d\Omega^2. \quad (2.90)$$

Observe que podemos escrever, em apenas uma equação, a métrica de de Sitter e a métrica de Schwarzschild na forma:

$$ds^2 = f(r)dt^2 - \frac{1}{f(r)}dr^2 - r^2d\Omega^2, \quad (2.91)$$

com $f(r) = 1 - \frac{2m}{r}$ para a métrica de Schwarzschild e com $f(r) = 1 - \frac{r^2}{l^2}$ para a métrica de de Sitter.

Para o espaço de de Sitter também existe temperatura de Hawking e entropia associadas com os horizontes de eventos cosmológicos e suas leis termodinâmicas [38]. Neste espaço-tempo, os horizontes de eventos coincidem com o horizonte aparente. Para modelos cosmológicos mais gerais, os horizontes de eventos podem não existir, mas horizontes aparentes sempre existem. Portanto, é possível ter temperatura de Hawking e entropia associadas com horizontes aparentes. Ao longo desta linha, a conexão entre a primeira lei da termodinâmica de horizontes aparentes e as equações de Friedmann na teoria de Einstein, com e sem o termo de Gauss-Bonnet, assim como na teoria de Lovelock, foram encontrados [39]. Mais recentemente, foi verificado que isto também é verdade em cosmologia de brana [40]. Em [41], com a ajuda de uma nova função do tipo massa, foi mostrado que a primeira lei da termodinâmica de horizontes aparentes em equilíbrio podem ser deduzidas a partir das equações de Friedmann em várias teorias da gravidade, incluindo a de Einstein, tensor-escalar, $f(R)$, e Lovelock.

No próximo capítulo estudaremos os modelos de Mazur-Mottola e de Visser-Wiltshire para gravastares, e de Francisco Lobo para uma estrela de energia escura.

Capítulo 3

O modelo de Mazur-Mottola, o modelo de Visser-Wiltshire e o modelo de Lobo

3.1 Introdução

Neste capítulo daremos um panorama geral sobre as estrelas de vácuo gravitante e estrelas de energia escura, a motivação para estudá-las e os resultados mais recentes da literatura que serviram de inspiração para os trabalhos apresentados nos capítulos 4,5 e 6.

O modelo de gravastar foi proposto por Emil Mottola e Pawel Mazur como uma proposta para substituir o modelo dos buracos negros. Ao invés de termos uma estrela contraindo e colapsando até a matéria chegar a uma singularidade coberta por um horizonte, o modelo de gravastar sugere que uma estrela em processo de colapso gravitacional forçaria o próprio espaço-tempo a sofrer uma transição de fase que iria prevenir a continuação do colapso. Assim, a estrela se transformaria em um vácuo quântico esférico rodeado por uma forma de matéria super densa.

No modelo de Mazur e Mottola, o conceito de condensado de Bose-Einstein em sistemas gravitacionais é estendido para um objeto compacto com interior de de Sitter (com equação de estado $p = -\rho < 0$), e uma região externa do

gravastar consistindo de uma camada fina, mas não infinitesimal, de matéria rígida ($p = \rho$), que chamaremos de envelope. O exterior do gravastar é circundado por um espaço-tempo de Schwarzschild ($p = \rho = 0$).

Em adição a estas três regiões, o modelo requer duas cascas infinitesimais com densidades de superfície σ_{\pm} e tensões θ_{\pm} . Estas camadas infinitesimais compensam as descontinuidades na pressão nas interfaces entre a região interna de de Sitter e o envelope, e entre o envelope e o exterior de Schwarzschild, e estabilizam esta construção de 5 camadas, introduzindo pressões anisotrópicas do tipo função delta.

É possível substituir as camadas infinitesimais e o envelope por uma única camada, já que o uso de tais cascas é apenas uma abstração matemática e, de fato, esta foi a proposta de Matt Visser e colaboradores que veremos neste capítulo.

Em seguida veremos o modelo de estrelas de energia escura, de Lobo, proposto como uma generalização do modelo de gravastar.

3.2 O modelo de Mazur e Mottola

Estrelas frias superdensas com massas acima de um valor crítico sofrem um rápido colapso gravitacional. Devido à impossibilidade de interrupção deste colapso de fluido com qualquer equação de estado conhecida para matéria de alta densidade, uma espécie de consenso foi desenvolvido no qual uma estrela colapsante deve inevitavelmente atingir, em um tempo próprio finito, uma condição singular que, se coberta por um horizonte de eventos, chamamos de buraco negro.

Uma característica própria de um buraco negro é o seu horizonte de eventos, a superfície tipo-nula de área finita na qual raios de luz direcionados para fora pairam indefinidamente. Por simplicidade, consideremos um buraco negro de Schwarzschild e, portanto, sem carga e sem rotação, cujo elemento de linha,

estático e esfericamente simétrico, pode ser colocado na forma¹

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{h(r)} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) . \quad (3.1)$$

As funções $f(r)$ e $h(r)$ são iguais neste caso, e

$$f_s(r) = h_s(r) = 1 - \frac{r_H}{r}, \quad r_H \equiv \frac{2GM}{c^2} . \quad (3.2)$$

No horizonte de eventos, $r = r_H$, a métrica (3.1) torna-se singular. Como os invariantes de curvatura local permanecem regulares em $r = r_H$, uma partícula teste caindo através do horizonte não experimenta nada catastrófico lá (se M é grande o bastante).

O modelo que Mazur e Mottola chegam é de um condensado de baixa temperatura de bósons massivos interagindo, fracamente aprisionados em uma cavidade auto-consistentemente gerada, cuja camada de fronteira pode ser descrita por uma casca fina. A suposição requerida para uma solução deste tipo existir é que a gravidade, ou seja, o espaço-tempo tem que sofrer uma transição de fase de vácuo quântico na vizinhança de $r = r_H$. Nesta região as flutuações quânticas de ponto zero dominam o tensor energia-momentum, e tornam-se grandes o bastante para influenciar a geometria, não importando a composição da matéria sofrendo o colapso gravitacional. Quando o limite causal $p = \rho$ é alcançado, o espaço-tempo interior torna-se instável possibilitando a formação de um condensado de Bose-Einstein gravitacional (gravastar), descrito por um parâmetro de ordem macroscópico não nulo na descrição efetiva de baixa energia. Como um condensado é um estado quântico com entropia zero, um modelo de um condensado frio repulsivo, como o estado final não singular de um colapso gravitacional, provê uma resolução para o paradoxo da informação, o que é completamente consistente com os princípios quânticos [112]. As regiões interior e exterior são separadas por uma camada superficial

¹Aqui preservamos a notação usada no artigo original de Mazur e Mottola [44].

fina próxima de $r = r_H$ onde o condensado de vácuo desordena. Qualquer entropia na configuração pode residir somente nas excitações desta camada de fronteira. Uma revisão sobre outros modelos de quase buracos negros pode ser vista em [113].

Modelo do condensado de vácuo gravitacional (gravastar). Em um tratamento de campo médio efetivo para um fluido perfeito em repouso descrito pela métrica (3.1), qualquer objeto estático e esfericamente simétrico deve, obrigatoriamente, satisfazer as equações de Einstein (adotando $c = 1$),

$$-G^t_t = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r(1-h)] = -8\pi G T^t_t = 8\pi G \rho, \quad (3.3)$$

$$G^r_r = \frac{h}{rf} \frac{df}{dr} + \frac{1}{r^2} (h-1) = 8\pi G T^r_r = 8\pi G p, \quad (3.4)$$

junto com a equação de conservação da energia,

$$\nabla_a T^a_r = \frac{dp}{dr} + \frac{\rho+p}{2f} \frac{df}{dr} + 2 \frac{p-p_\perp}{r} = 0, \quad (3.5)$$

que assegura que os outros componentes das equações de Einstein são satisfeitos. Na situação esfericamente simétrica geral, a pressão tangencial $p_\perp \equiv T^\theta_\theta = T^\phi_\phi$ não é necessariamente igual à pressão normal radial $p = T^r_r$. Todavia, para o objetivo de desenvolver primeiramente a possibilidade mais simples, o modelo se restringe ao caso isotrópico onde $p_\perp = p$. Neste caso temos três equações de primeira ordem para quatro funções desconhecidas de r , que são f, h, ρ , e p . O sistema se torna fechado quando uma equação de estado para o fluido relacionando p e ρ é especificado. Devido às considerações vistas anteriormente, três diferentes regiões, com três diferentes equações de estado, são consideradas, ou seja:

$$\begin{aligned} \text{I. Interior :} & \quad 0 \leq r < r_1, \quad \rho = -p, \\ \text{II. Casca Fina :} & \quad r_1 < r < r_2, \quad \rho = +p, \\ \text{III. Exterior :} & \quad r_2 < r, \quad \rho = p = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Na região interior, $\rho = -p$ é uma constante como consequência de (3.5). Chamando esta constante de $\rho_v = 3H_0^2/8\pi G$ e impondo que a origem é livre de

qualquer singularidade de massa, então o interior caracteriza o espaço-tempo de de Sitter em coordenadas estáticas, ou seja

$$\text{I.} \quad f(r) = C h(r) = C (1 - H_0^2 r^2), \quad 0 \leq r \leq r_1, \quad (3.7)$$

onde C é uma constante arbitrária, correspondendo à liberdade de redefinir a coordenada temporal do interior.

A única solução no vácuo exterior que se aproxima do espaço-tempo plano quando $r \rightarrow \infty$ é uma região do espaço-tempo de Schwarzschild (3.2), ou seja,

$$\text{III.} \quad f(r) = h(r) = 1 - \frac{2GM}{r}, \quad r_2 \leq r. \quad (3.8)$$

A constante de integração M é a massa total do objeto.

A única região que não é vácuo é a região II. Definindo a variável adimensional w por $w \equiv 8\pi Gr^2 p$, pode-se reescrever as equações (3.3)-(3.5) com $\rho = p$ na forma,

$$\frac{dr}{r} = \frac{dh}{1 - w - h}, \quad (3.9)$$

$$\frac{dh}{h} = -\frac{1 - w - h}{1 + w - 3h} \frac{dw}{w}, \quad (3.10)$$

sendo $p \propto w/r^2$. A equação Eq. (3.10) pode ser resolvida apenas de forma numérica em geral. Todavia, é possível obtermos uma solução analítica no limite de casca fina, $0 < h \ll 1$. Para este limite podemos fazer $h = 0$ no lado direito da equação (3.10), na ordem dominante, e integrá-la imediatamente para obter

$$h \equiv 1 - \frac{2m}{r} \simeq \epsilon \frac{(1+w)^2}{w} \ll 1, \quad (3.11)$$

na região II, onde ϵ é uma constante de integração. Devido à condição $h \ll 1$, im-
pomos $\epsilon \ll 1$, com w de ordem unitária. Fazendo uso das equações (3.9),(3.10) e (3.11) temos

$$\frac{dr}{r} \simeq -\epsilon dw \frac{(1+w)}{w^2}. \quad (3.12)$$

Devido à aproximação $\epsilon \ll 1$, o raio r dificilmente muda dentro da região II, e dr é da ordem de ϵdw . A função desconhecida restante f é dada por $f = (r/r_1)^2(w_1/w)f(r_1) \simeq (w_1/w)f(r_1)$ para ϵ pequeno, mostrando que f também é da ordem de ϵ em todo lugar dentro da região II e suas vizinhanças.

Em cada uma das duas interfaces nos pontos $r = r_1$ e $r = r_2$ a métrica tridimensional induzida deve, obrigatoriamente, ser contínua. Portanto r e $f(r)$ são contínuos nas interfaces, e

$$f(r_2) \simeq \frac{w_1}{w_2} f(r_1) = \frac{Cw_1}{w_2} (1 - H_0^2 r_1^2) = 1 - \frac{2GM}{r_2}. \quad (3.13)$$

Na ordem dominante em $\epsilon \ll 1$ esta relação implica que

$$r_1 \simeq \frac{1}{H_0} \simeq 2GM \simeq r_2. \quad (3.14)$$

Assim as interfaces descrevendo as fronteiras de fase em r_1 e r_2 são muito próximas dos horizontes de eventos clássicos do interior de de Sitter e do exterior de Schwarzschild.

O significado de $0 < \epsilon \ll 1$ é que ambas f e h são da ordem de ϵ na região II, mas não se anulam em lugar algum. Portanto, não há qualquer horizonte de eventos e t é um tempo global. Um fóton experimenta um desvio para o azul muito grande, $\mathcal{O}(\epsilon^{-\frac{1}{2}})$, mas finito, caindo na casca a partir do infinito. A espessura própria da casca entre estas fronteiras é

$$\ell = \int_{r_1}^{r_2} dr h^{-\frac{1}{2}} \simeq r_s \epsilon^{\frac{1}{2}} \int_{w_2}^{w_1} dw w^{-\frac{3}{2}} \sim \epsilon^{\frac{1}{2}} r_s, \quad (3.15)$$

e muito pequeno para $\epsilon \rightarrow 0$. Devido à expressão (3.14), a densidade de energia de vácuo constante no interior é somente a massa total M dividida pelo volume, ou seja, $\rho_v \simeq 3M/4\pi r_s^3$, na ordem dominante de ϵ . A energia dentro da camada por sua vez,

$$E_{\text{II}} = 4\pi \int_{r_1}^{r_2} \rho r^2 dr \simeq \epsilon M \int_{w_2}^{w_1} \frac{dw}{w} (1+w) \sim \epsilon M, \quad (3.16)$$

é extremamente pequena.

Embora $f(r)$ seja contínua através das interfaces em r_1 e r_2 , a descontinuidade nas equações de estado não levam a descontinuidades em $h(r)$ e na primeira derivada de $f(r)$ em geral. Definindo o vetor normal unitário apontado para fora das interfaces, $n^b = \delta_r^b \sqrt{h(r)}$, e a curvatura extrínseca $K_a^b = \nabla_a n^b$, as condições de junção de Israel determinam a energia de tensão da superfície η e a tensão da superfície σ nas interfaces para serem dadas pelas descontinuidades na curvatura intrínseca através de [114]

$$[K_t^t] = \left[\frac{\sqrt{h} df}{2f dr} \right] = 4\pi G(\eta - 2\sigma), \quad (3.17)$$

$$[K_\theta^\theta] = [K_\phi^\phi] = \left[\frac{\sqrt{h}}{r} \right] = -4\pi G\eta. \quad (3.18)$$

Como h e suas descontinuidades são da ordem de ϵ , a densidade de energia nas superfícies, η , é da ordem de $\epsilon^{\frac{1}{2}}$, enquanto as tensões superficiais são da ordem $\epsilon^{-\frac{1}{2}}$. A possibilidade mais simples de fazer junção destas regiões é impor que as densidades superficiais de energia de cada interface se anulam. De (3.18) esta condição implica que $h(r)$ também é contínua através das interfaces, o que leva às relações,

$$h(r_1) = 1 - H_0^2 r_1^2 \simeq \epsilon \frac{(1 + w_1)^2}{w_1}, \quad (3.19)$$

$$h(r_2) = 1 - \frac{2GM}{r_2} \simeq \epsilon \frac{(1 + w_2)^2}{w_2}, \quad (3.20)$$

$$\frac{f(r_2)}{h(r_2)} = 1 \simeq \frac{w_1 f(r_1)}{w_2 h(r_2)} = C \left(\frac{1 + w_1}{1 + w_2} \right)^2. \quad (3.21)$$

De (3.12) $dw/dr < 0$, de modo que $w_2 < w_1$ e $C < 1$. Neste caso de energias superficiais se anulando, $\eta = 0$, e as tensões superficiais são determinadas por (3.17) e (3.18), ou seja :

$$\sigma_1 \simeq -\frac{1}{32\pi G^2 M} \frac{(3 + w_1)}{(1 + w_1)} \left(\frac{w_1}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.22)$$

$$\sigma_2 \simeq \frac{1}{32\pi G^2 M} \frac{w_2}{(1 + w_2)} \left(\frac{w_2}{\epsilon} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.23)$$

na ordem dominante em ϵ em r_1 e r_2 , respectivamente. A tensão superficial negativa na interface interna é equivalente à pressão tangencial positiva, o que implica uma força direcionada para fora na casca fina devido ao vácuo repulsivo dentro dela. A tensão superficial positiva na interface externa corresponde ao caso mais familiar de uma força direcionada para dentro exercida na casca fina.

Com relação à estabilidade, Mazur e Mottola argumentaram que este modelo de gravastar é termodinamicamente estável e não emite radiação Hawking devido à ausência de um horizonte de eventos. Mazur e Mottola também mostraram que não há paradoxo de informação na formação de um gravastar a partir de uma progenitora pelo fato de não requerer uma enorme geração ou remoção de entropia.

Como o espaço-tempo exterior no modelo de Mazur e Mottola é Schwarzschild, um gravastar não pode ser distinguido de um buraco negro através de observações de explosões de raio X [1]². Todavia, para a casca com sua equação de estado de máxima rigidez $p = \rho$, onde a velocidade do som é igual à velocidade da luz, poderia se esperar a produção de frentes de choque explosivos de dentro para fora no processo de formação. A dinâmica ativa da casca pode produzir outros efeitos que poderiam distinguir gravastares de buracos negros observacionalmente, possivelmente provendo um acelerador de partículas mais eficiente e aparato central para fontes astrofísicas energéticas. O espectro da radiação gravitacional para um gravastar poderia mostrar as suas frequências fundamentais de vibração, e, portanto, ser bem diferente das de um buraco negro clássico.

Previsões quantitativas de tais assinaturas astrofísicas irão exigir uma investigação de várias das suposições e extensão do modelo simples apresentado

²Mesmo considerando efeitos quânticos, só se poderia, a princípio, fazer distinções entre gravastares e buracos negros a distâncias da ordem do diâmetro de um núcleo atômico, a partir de $r = r_H$.

por Mazur e Mottola em várias direções. Embora a equação de estado $p = \rho$ seja fortemente sugerida tanto pelo limite da causalidade característica de uma transição de fase relativística, como pela correspondência da entropia do fluido com S_{BH} quando a região interna do gravastar é contraída a zero, esta equação de estado que tem sido assumida aqui não é deduzida a partir de primeiros princípios. O conhecimento de excitações efetivas na casca é necessário para determinar o potencial químico μ , e onde a estimativa da entropia é precisa, ou mais apropriada para ser considerada como um limite superior da entropia de um gravastar. O desprezo da polarização de vácuo $p = \rho/3 < 0$ no modelo apresentado leva a alguma liberdade em fazer a junção nas duas interfaces e nas tensões superficiais (3.22) e (3.23), que podem ser diferentes em detalhes ou não apresentá-los em um tratamento mais completo. Uma análise completa da estabilidade dinâmica do objeto, incluindo o movimento das interfaces ou das camadas de fronteira que as substituem requer, no mínimo, uma descrição de campo médio consistente dos efeitos quânticos nesta região de transição. Embora considerações teóricas gerais indicam que efeitos quânticos não-locais possam estar presentes na vizinhança de horizontes de eventos clássicos, uma discussão detalhada de como estes efeitos podem alterar a visão clássica do colapso gravitacional a um buraco negro não foi tentado por Mazur-Motolla. Por último, a distinção das assinaturas de *gravastars* comparadas aos buracos negros clássicos em ambientes astrofísicos realísticos, tais como na presença de massas próximas ou discos de acreção dependerá dos detalhes dos modos dinâmicos de superfície, bem como a extensão do modelo estático esfericamente simétrico apresentado aqui para inclusão de campos magnéticos e rotação³.

Pode-se considerar que o modelo apresentado aqui é o exemplo mais simples de uma alternativa física à formação de um buraco negro clássico, consistente

³Recentemente, foi proposto uma forma de distinguir um gravastar de um buraco negro através de propriedades termodinâmicas e eletromagnéticas de discos de acreção [115].

com princípios quânticos, que é livre de qualquer singularidade interior ou de paradoxo de informação. Esforços teóricos e observacionais adicionais são necessários para estabelecer objetos compactos, frios e escuros propostos aqui como estados finais estáveis do colapso gravitacional.

Finalmente, olhemos para o interior da região de de Sitter com $p = -\rho$ e que pode também ser interpretado como um espaço-tempo cosmológico, com o horizonte do universo em expansão substituído por uma interface de fase quântica. A possibilidade de que o valor da densidade de energia de vácuo na teoria efetiva de baixas energias possa depender dinamicamente do estado de um condensado gravitacional pode prover um novo paradigma para a energia escura cosmológica no Universo. A proposta de que outros parâmetros no modelo padrão de física de partículas possa depender da densidade de energia de vácuo dentro de um gravastar foi discutido por Bjorken [116].

3.3 O modelo de Matt Visser e David Wiltshire

O modelo de gravastar de Mazur e Mottola, como vimos anteriormente, é uma construção matemática com cinco partes, entre as quais encontram-se duas camadas infinitesimais como descrito abaixo:

- Um vácuo externo de Schwarzschild, com densidade de energia, $\rho = 0$, e pressão, $p = 0$.
- Uma camada infinitesimal, com densidade superficial σ_+ e tensão de superfície ϑ_+ ; com raio $r_+ \gtrsim 2M$.
- uma camada relativamente fina com espessura finita de matéria rígida (envelope) com equação de estado $p = \rho$; até $r = 2M$ onde o horizonte se formaria em condições normais.
- Uma segunda camada infinitesimal; com raio $r_- \lesssim 2M$, e com densidade

superficial σ_- e tensão superficial ϑ_- .

- Um interior de de Sitter, com $p = -\rho$.

As duas camadas infinitesimais são utilizadas para confinar a matéria rígida em uma camada de transição indo até $r = 2M$, enquanto a densidade de energia no vácuo de de Sitter é escolhida de forma a satisfazer

$$\frac{4\pi}{3}\rho(2M)^3 = M. \quad (3.24)$$

Com o objetivo de estudar dinamicamente a estabilidade gravitacional de um gravastar, Visser e Wiltshire simplificaram o modelo com cinco partes combinando a camada fina de matéria rígida e as duas camadas infinitesimais em uma única camada infinitesimal obtendo assim um modelo com 3 partes:

- Um vácuo externo de Schwarzschild, $\rho = 0 = p$.
- Uma camada infinitesimal, com densidade superficial σ e tensão superficial ϑ ; com raio $a \gtrsim 2M$.
- Um interior de de Sitter, $p = -\rho$.

Para evitar a formação de um horizonte de eventos, devemos exigir que

$$\frac{4\pi}{3}\rho(2M)^3 \lesssim M. \quad (3.25)$$

Quanto mais próximo estivermos de saturar esta relação, mais próximo estaremos do cenário de Mazur e Mottola e mais próximo estaremos de atribuir toda massa do gravastar para a energia do vácuo de de Sitter.

A seguir veremos a análise da estabilidade dinâmica deste modelo simplificado de Visser-Wiltshire.

O modelo matemático

Considere a métrica:

$$ds_{\pm}^2 = -f_{\pm} dt^2 + \frac{dr^2}{f_{\pm}} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (3.26)$$

onde os índices + e – indicam os espaços-tempos externo e interno à camada, respectivamente, sendo $f_+ = 1 - \frac{2m}{r}$ e $f_- = 1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2$.

Embora menos geral do que a classe de todas as geometrias estáticas e esfericamente simétricas, esta classe restrita de métricas é mais do que o suficiente para nossas necessidades atuais e inclui tanto a métrica de Schwarzschild como a métrica de de Sitter. Assumiremos que as duas geometrias deste tipo estão conectadas ao longo de uma hipersuperfície do tipo-tempo em $r = a(t)$, com vetor normal do tipo-espaço, n^a . Considerando um ponto com θ e ϕ fixos e fazendo uso da definição

$$-d\tau^2 = - \left[1 - \frac{2m(a(t))}{a(t)} \right] dt^2 + \frac{1}{1 - 2m(a(t))/a(t)} \left[\frac{da(t)}{dt} \right]^2 dt^2. \quad (3.27)$$

A posição da hipersuperfície do tipo-tempo pode ser reparametrizada em termos de τ , o tempo próprio ao longo desta hipersuperfície, e, desta forma, determinar $a(\tau)$. Para compreender a dinâmica da hipersuperfície, adotaremos o formalismo da camada fina de Israel–Lanczos [114] de modo que podemos, então, aplicar as condições de junção para relacionar a descontinuidade na curvatura extrínseca com a tensão-energia da superfície, S_{ab} , localizada na camada através das equações:

$$[[K_{ab}]] = -8\pi \left[S_{ab} - \frac{1}{2} S h_{ab} \right]; \quad [[K_{ab} - K h_{ab}]] = -8\pi S_{ab}. \quad (3.28)$$

Aqui $[[X]]$ denota a descontinuidade em X através da camada, isto é $[[X]] = X_+ - X_-$. $K_{ab} = h_a^c h_b^d \nabla_c n_d$ são as curvaturas extrínsecas na camada fina e $h_{ab} = g_{ab} - n_a n_b$ é a métrica induzida na camada, dada por

$$h_{ab} dx^a dx^b = -d\tau^2 + a(\tau)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (3.29)$$

Camada estática

Por simplicidade, vamos primeiramente assumir que a camada é estática. A curvatura extrínseca pode ser calculada diretamente a partir da definição dada.

Em um sistema ortonormal o tensor de energia-momentum é dado por $S_{\hat{a}\hat{b}} = \text{diag}(\sigma, -\vartheta, -\vartheta)$, e manipulações algébricas nos levam a

$$\left[\left[\sqrt{1 - 2m(a)/a} \ a^{-1} \right] \right] = -4\pi\sigma, \quad (3.30)$$

e

$$\left[\left[\frac{1 - m(a)/a - m'(a)}{a \sqrt{1 - 2m(a)/a}} \right] \right] = -8\pi\vartheta. \quad (3.31)$$

Portanto, há apenas duas componentes algebricamente independentes da curvatura extrínseca e elas podem ser relacionadas à densidade superficial e à tensão superficial.

A equação (3.30) pode ser reescrita como

$$\sqrt{1 - 2m_+/a} = \sqrt{1 - 2m_-/a} - 4\pi\sigma a, \quad (3.32)$$

onde foi utilizada a notação $m_+ \equiv m(a_+)$ e $m_- \equiv m(a_-)$. Ao elevarmos os dois lados da equação (3.32) ao quadrado e a rearranjarmos obteremos

$$8\pi\sigma a^2 \sqrt{1 - 2m_-/a} = 16\pi^2 \sigma^2 a^3 + 2(m_+ - m_-). \quad (3.33)$$

Elevando novamente ao quadrado obtemos

$$16\pi^2 \sigma^2 a^4 + 4m_+ m_- = [8\pi^2 \sigma^2 a^3 + (m_+ + m_-)]^2. \quad (3.34)$$

Se quisermos resolver a equação (3.34) para a como uma função dos outros parâmetros, estaremos lidando com uma equação do sexto grau. Do contrário, se a resolvermos para qualquer um dos outros parâmetros m_+ , m_- , ou σ a equação é do segundo grau. A equação (3.34) pode ser simplificada se for expressa em termos de $m_s = 4\pi\sigma a^2$, que representa a massa da camada fina.

Dessa forma é obtida uma “equação mestra” [estática], que relaciona diretamente as três massas (m_+ , m_- , e m_s) e a localização radial da camada, a :

$$m_s^2 + 4m_+m_- = [m_s^2/(2a) + (m_+ + m_-)]^2. \quad (3.35)$$

A equação mestra (3.35) é apenas uma das equações a serem resolvidas. Há ainda a equação de tensão superficial. De várias formas, a melhor aproximação para a camada estática é prescritiva: escolhem-se as geometrias no interior e no exterior arbitrariamente, depois escolhe-se a , e, então, calcula-se a densidade de energia na camada σ e a tensão superficial ϑ das equações (3.30) e (3.31). Obviamente, esta análise não oferece qualquer informação sobre a estabilidade; estamos simplesmente assumindo uma camada estática.

Iremos em seguida generalizar estes cálculos para o caso dinâmico.

3.3.1 Camada Dinâmica

Agora adicionamos dependência temporal permitindo à camada mover-se radialmente, de modo que o tempo próprio, τ , nos pontos da camada é dado por (3.27). Segue de (3.27) que a quadrivelocidade de um ponto na hipersuperfície (para um θ e ϕ fixos) é

$$V^a = \left(\frac{\sqrt{\Delta + \dot{a}^2}}{\Delta}, \dot{a}, 0, 0 \right), \quad (3.36)$$

onde $\Delta \equiv 1 - 2m(a)/a$, $\dot{a} = da/d\tau$ e escolhemos τ para estar apontando para o futuro com relação a t . A normal unitária à camada é obtida de (3.36) utilizando a condição de ortogonalidade, $n_a V^a = 0$, dando

$$n^a = \left(\frac{\dot{a}}{\Delta}, \sqrt{\Delta + \dot{a}^2}, 0, 0 \right). \quad (3.37)$$

Os componentes não-nulos da curvatura extrínseca são:

$$K_{\hat{\tau}\hat{\tau}} = -A \quad (3.38)$$

e

$$K_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = K_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = \frac{1}{a} \sqrt{\Delta + \dot{a}^2}. \quad (3.39)$$

onde A é a magnitude da quadri-aceleração da camada.

Impondo as condições de junção, similarmente ao caso da camada estática, temos

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi a} \left[\left[\sqrt{1 - 2m(a)/a + \dot{a}^2} \right] \right], \quad (3.40)$$

e

$$\vartheta = -\frac{1}{8\pi} \left[\left[\frac{\sqrt{1 - 2m(a)/a + \dot{a}^2}}{a} + A \right] \right], \quad (3.41)$$

Como a classe restrita de geometrias que estamos considerando possui um vetor tipo-tempo de Killing, $k^a = (\partial/\partial t)^a$, a quadriaceleração é facilmente calculada. Seguindo a referência [117], p. 183, podemos utilizar

$$\frac{d}{d\tau}(k_a V^a) = -A\dot{a}, \quad (3.42)$$

e

$$\frac{d}{d\tau}(k_a V^a) = -\frac{d}{d\tau} \left\{ \sqrt{1 - 2m/a + \dot{a}^2} \right\}, \quad (3.43)$$

que fornece a relação simples

$$A = \frac{\ddot{a} - \{m/a\}'}{\sqrt{1 - 2m/a + \dot{a}^2}}. \quad (3.44)$$

Isto dá uma quadri-aceleração da camada em termos de uma combinação de propriedades cinemática (\ddot{a} , \dot{a}) e gravitacional ($m(a)/a$).

Substituindo (3.44) em (3.41) temos então

$$\vartheta = -\frac{1}{8\pi a} \left[\left[\frac{1 - m/a - m' + \dot{a}^2 + a\ddot{a}}{\sqrt{1 - 2m/a + \dot{a}^2}} \right] \right]. \quad (3.45)$$

Agora temos fórmulas explícitas para a densidade de energia (3.40) e a tensão de superfície (3.45).

3.3.2 Leis de Conservação

Através da conservação da energia é fácil verificar, por manipulação simples, que (3.40) e (3.45) podem ser combinadas em

$$\frac{d}{d\tau}(\sigma a^2) = \vartheta \frac{d}{d\tau}(a^2). \quad (3.46)$$

Notemos que, em geral, se espera que o lado direito da equação (3.46) seja suplementado por um termo da forma

$$\text{termo de fluxo} = [[T_{ab}V^a n^b]] , \quad (3.47)$$

correspondendo à descontinuidade líquida no fluxo de momentum, $F_a = T_{ab} V^b$, atravessando a fronteira da casca. Tal termo está ausente no caso da classe especial de métricas (3.26) considerada aqui, para as quais

$$\rho = -p_r = \frac{1}{4\pi} \frac{m'}{r^2}, \quad (3.48)$$

e

$$p_t = -\frac{1}{8\pi} \frac{m''}{r}. \quad (3.49)$$

Como a densidade é igual ao negativo da pressão radial, quando restringido ao plano $r-t$, $T_{ab} \propto g_{ab}$. Mas como V^a e n^a estão no plano $r-t$ isto implica que

$$T_{ab}V^a n^b \propto g_{ab}V^a n^b = 0, \quad (3.50)$$

e os termos de fluxo nos dois lados da camada automaticamente se anulam. Isto é uma característica especial da classe de geometrias “suficientemente gerais” (3.26). Ao contrário, na geometria esfericamente simétrica geral, este termo de fluxo pode ser bem complexo para se trabalhar.

Consequentemente, se estivermos com uma equação de estado para a camada $\sigma = \sigma(\vartheta)$, [ou $\vartheta = \vartheta(\sigma)$], podemos formalmente integrar a equação de conservação (3.46) para determinarmos $\sigma(a)$ como função de a . Uma vez que temos esta função, toda a dinâmica será encapsulada em uma única equação dinâmica (3.40), o resultado sendo verdadeiro, sujeito somente à restrição da métrica ser “suficientemente geral” (3.26).

3.4 A equação mestra

3.4.1 Dedução

Primeiramente começaremos reescrevendo a equação do σ dinâmico (3.40) como

$$\left[\left[\sqrt{1 - 2m(a)/a + \dot{a}^2} \right] \right] = -4\pi\sigma(a) a, \quad (3.51)$$

onde estamos agora tomando dependência temporal arbitrária na forma de \dot{a} .

Ou seja,

$$\sqrt{1 - 2m_+(a)/a + \dot{a}^2} = \sqrt{1 - 2m_-(a)/a + \dot{a}^2} - 4\pi\sigma(a) a. \quad (3.52)$$

Uma série de passos idênticos aos utilizados para chegar de (3.32) para (3.35) agora nos dá

$$m_s^2(1 + \dot{a}^2) + 4m_+m_- = \left[\frac{m_s^2}{2a} + (m_+ + m_-) \right]^2, \quad (3.53)$$

onde, como antes, $m_s = 4\pi\sigma a^2$ é a massa da camada fina. Esta “equação mestra” dinâmica é da forma de uma “equação de energia” para uma partícula não relativística,

$$\frac{1}{2}\dot{a}^2 + V(a) = E, \quad (3.54)$$

com “potencial”

$$V(a) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{4m_+(a)m_-(a)}{m_s^2(a)} - \left[\frac{m_s(a)}{2a} + \frac{(m_+(a) + m_-(a))}{m_s(a)} \right]^2 \right\}, \quad (3.55)$$

e “energia” $E = 0$.

Haverá então uma solução estritamente estável para a camada (estável em oposição às oscilações radiais esfericamente simétricas) se e somente se há algum $m_s(a)$ e algum a_0 tal que tenhamos simultaneamente

$$V(a_0) = 0; \quad V'(a_0) = 0; \quad V''(a_0) > 0. \quad (3.56)$$

Num pequeno vislumbre neste cálculo relativístico, observamos que, como $E \equiv 0$, a situação onde $V(a) \equiv 0$, que na mecânica não-relativística corresponde ao

equilíbrio neutro, é agora convertido em uma situação de equilíbrio estável (já que agora, como não se é livre para aumentar a “energia” E , tem-se que $\dot{a} \equiv 0$).

Há uma noção menos restrigente de estabilidade que é também útil, a noção de “excursão limitada”. Suponha que tenhamos $a_2 > a_1$ tal que

$$V(a_1) = 0; \quad V'(a_1) \leq 0; \quad V(a_2) = 0; \quad V'(a_2) \geq 0; \quad (3.57)$$

com $V(a) < 0$ para $a \in (a_1, a_2)$. Nesta situação, o movimento da camada permanece limitado pelo intervalo (a_1, a_2) . Embora não seja estritamente estável, já que a camada se move de fato, esta noção de “excursão limitada” reflete de maneira mais precisa alguns dos aspectos de estabilidade que surgem naturalmente em mecânica não-relativística. Em particular, é simplesmente uma versão do critério de estabilidade padrão para órbitas em torno do ponto fixo que existiria se fôssemos livres para especificar arbitrariamente a constante E no lado direito da equação (3.54), e corresponde a órbitas em torno do ponto fixo que são “estáveis mas não assintoticamente estáveis”. No presente contexto, perturbando o potencial e adicionando uma pequena contribuição negativa

$$V(a) \rightarrow V(a) - \epsilon^2 \quad (3.58)$$

irá genericamente converter um potencial estritamente estável a um potencial exibindo “excursão limitada”.

3.4.2 Invertendo o potencial

Suponhamos que agora tomemos o potencial $V(a)$, e as massas $m_{\pm}(a)$ como dadas. A equação (3.55) então leva a uma equação quadrática para $m_s^2(a)$:

$$m_s^2(a) = 2a^2 \left\{ 1 - 2V(a) - \frac{m_+(a)}{a} - \frac{m_-(a)}{a} \right. \\ \left. \pm \sqrt{1 - 2V(a) - \frac{2m_+(a)}{a}} \sqrt{1 - 2V(a) - \frac{2m_-(a)}{a}} \right\}. \quad (3.59)$$

É importante notarmos que não escolhemos uma equação específica do estado da camada; nós somente assumimos que alguma equação de estado existe. Como sabemos, ocorre que ao resolvermos uma equação quadrática, há sempre um risco de que algumas das raízes sejam não-físicas. Neste caso, o sinal (+) é não físico e o sinal (-) é o ramo físico de interesse. Isto pode ser verificado de forma mais simples escolhendo-se $m_+(a) = m_-(a)$ em cujo caso a geometria do espaço-tempo é completamente contínua através da localização da camada, de forma que sua massa m_s (e densidade de energia superficial σ e tensão superficial ϑ) seja obrigatoriamente zero. Assim, a densidade de energia superficial $\sigma(a)$ é dada pela expressão

$$\sigma(a) = \pm \frac{\sqrt{2}}{4\pi a} \sqrt{1 - 2V(a) - \frac{m_+(a)}{a} - \frac{m_-(a)}{a} - \sqrt{1 - 2V(a) - \frac{2m_+(a)}{a}} \sqrt{1 - 2V(a) - \frac{2m_-(a)}{a}}}. \quad (3.60)$$

Podemos agora, notando que o conteúdo do sinal do radical exterior da equação acima é um quadrado perfeito, extrair a raiz quadrada. O sinal total é determinado pela escolha única que leva à expressão acima, sendo a equação de compatibilidade entre as equações (3.54) e (3.51). Isso agora nos dá:

$$\sigma(a) = -\frac{1}{4\pi a} \left\{ \sqrt{1 - 2V(a) - \frac{2m_+(a)}{a}} - \sqrt{1 - 2V(a) - \frac{2m_-(a)}{a}} \right\} \quad (3.61)$$

$$= -\frac{1}{4\pi a} \left[\left[\sqrt{1 - 2V(a) - \frac{2m(a)}{a}} \right] \right]. \quad (3.62)$$

Há uma sutileza onde devemos estar atentos quando fazemos a comparação entre as equações (3.51) com (3.62). Ao passo que na equação (3.51) estamos simplesmente determinando a densidade de energia na casca, se acontece de ter “velocidade” \dot{a} no raio a , aqui em (3.62) estamos determinando algo consideravelmente mais poderoso baseado em uma análise totalmente dinâmica, ou seja, o que a densidade de energia superficial deveria ser como uma função do

parâmetro a para ser compatível com o potencial especificado $V(a)$. Indo além, da equação de conservação

$$\vartheta = \sigma + \frac{1}{2} a \frac{d\sigma}{da}, \quad (3.63)$$

podemos calcular $\vartheta(a)$. Analiticamente, o resultado é

$$\vartheta(a) = -\frac{1}{8\pi a} \left[\left[\frac{1 - 2V(a) - m(a)/a - aV'(a) - m'(a)}{\sqrt{1 - 2V(a) - 2m(a)/a}} \right] \right]. \quad (3.64)$$

Lembre-se que $m_{\pm}(a)$ e $V(a)$ são, nesta fase, funções arbitrárias que nós continuamos livres para prescrever. Estas expressões para $\sigma(a)$ e $\vartheta(a)$, equações (3.62) e (3.64), agora determinam a equação de estado parametricamente. Em resumo

- Escolhemos uma equação de estado na forma de um $\sigma(\vartheta)$ específico e integramos a equação de conservação para determinarmos $\sigma(a)$ (e, portanto, $m_s(a)$ e portanto $V(a)$);
- ou escolhemos um potencial da forma $V(a)$ e parametricamente extraímos a equação de estado correspondente utilizando o algoritmo apresentado.

3.4.3 Especialização da geometria do gravastar

Especializando agora a um modelo específico de gravastar, que simplifica o modelo de Mazur–Mottola para uma camada fina separando as duas regiões:

- Fora, uma região de Schwarzschild $T_{ab} = 0$.
- Dentro, uma região de de Sitter $T_{ab} \propto g_{ab}$.

Assim m_+ e m_- não são mais arbitrários. A partir do que, assumimos poder simplesmente escrever $m_+ = M$, a massa total externa do sistema, enquanto

$$m_- = (4\pi/3)\rho a^3 = ka^3, \quad (3.65)$$

onde ρ é a densidade de energia do vácuo de de Sitter e introduzimos o parâmetro k simplesmente para minimizar a aparição explícita de fatores de $4\pi/3$. Tomando $V(a)$ arbitrariamente, nossa análise prévia implica

$$\sigma(a) \equiv \frac{1}{4\pi a} \left\{ \sqrt{1 - 2V(a) - 2ka^2} - \sqrt{1 - 2V(a) - \frac{2M}{a}} \right\}, \quad (3.66)$$

que para $\vartheta(a)$ fornece:

$$\vartheta(a) \equiv \frac{1}{8\pi a} \left\{ \frac{1 - 2V(a) - a V'(a) - 4ka^2}{\sqrt{1 - 2V(a) - 2ka^2}} - \frac{1 - 2V(a) - a V'(a) - M/a}{\sqrt{1 - 2V(a) - 2M/a}} \right\} \quad (3.67)$$

Estes são agora pares de equações paramétricas determinando a equação de estado de qualquer modelo Mazur–Mottola de três camadas (ou modelo de Visser–Wiltshire) com geometria exterior Schwarzschild e geometria interior de Sitter em termos de um potencial livremente prescrito $V(a)$. Se desejamos que o sistema seja estritamente estável em algum a_0 , então precisamos forçar a equação (3.56). Há dois exemplos óbvios de tal comportamento:

- $V(a) \equiv 0$, um caso degenerado, mas fisicamente importante, correspondendo a $\dot{a} \equiv 0$.
- $V(a) = \frac{1}{2}(a - a_0)^2 f(a)$, onde $f(a)$ é uma função positiva arbitrária que é regular em a_0 . Nesta situação a estabilidade é em um sentido trivial: A equação mestra possui uma única solução em $a = a_0$ e $\dot{a} = 0$, e todas as possibilidades de movimento são excluídas.

Mais geralmente poderíamos considerar casos de “excursão limitada” escolhendo $V(a) = \frac{1}{2}(a - a_0)^2 f(a) - \epsilon^2$. Para ϵ suficientemente pequeno haverá raízes distintas a_1 e a_2 onde $V(a) = 0$, com $a_1 < a_0 < a_2$. O movimento da camada será de uma “excursão limitada” e forçado a permanecer no intervalo (a_1, a_2) .

Estas observações são agora o bastante para garantirmos que existem várias classes de potenciais $V(a)$ — e várias classes de equações de estado $\sigma(\vartheta)$ — para as quais o sistema é estável em oposição a oscilações radiais. Obviamente há

também várias classes de potencial para as quais o sistema é instável. Dependendo da visão de um cientista a respeito do modelo de gravastar, isto pode ser interpretado como boas ou más notícias [70].

Nos capítulos 4 e 5 exploraremos em detalhes a estabilidade de gravastars utilizando modelos de três camadas como o proposto por Matt Visser e Wiltshire. Antes de prosseguirmos apresentando as contribuições desta tese, iremos examinar o modelo de Lobo para estrelas de energia escura, cuja métrica foi utilizada no trabalho que será apresentado no capítulo 6.

3.5 O modelo de Lobo para estrelas de energia escura

No trabalho de Lobo [79], um modelo matemático generalizando o modelo de Mazur-Mottola, ou o modelo de Visser-Wiltshire, foi proposto, onde o interior de de Sitter é substituído por uma solução governada pela equação de estado da energia escura, $p_r = \omega\rho$, com ω escolhido convenientemente, casado com uma solução exterior dada pelo vácuo de Schwarzschild. A motivação de Lobo para implementar esta generalização veio do fato de que observações recentes confirmaram que o Universo está em uma fase de expansão acelerada. Evidências desta expansão cosmológica tem sido mostradas independentemente a partir de observações de supernovas do tipo Ia (SNe Ia) [118, 119, 120] e a partir da radiação cósmica de microondas de fundo [121]. Uma possível explicação para esta aceleração cósmica é precisamente a energia escura, um fluido cósmico parametrizado por uma equação de estado $\omega \equiv p/\rho < -1/3$, onde p é a pressão espacialmente homogênea e isotrópica, e ρ é a densidade de energia escura.

Como enfatizado nas referências [87, 88], em um diferente contexto, uma sutileza precisa ser apontada: A noção de energia escura é a de um fluido cósmico espacialmente homogêneo, todavia, ela pode ser estendida a espaços-tempos esfericamente assimétricos pela consideração de que a pressão na equação

de estado da energia escura é uma pressão radial negativa, e as pressões transversais podem ser determinadas através das equações de campo. Neste contexto, a generalização do modelo de gravastar com a inclusão de uma solução interior governada pela equação de estado, $p_r = \omega\rho$ com a condição de energia forte violada, será denotada por um gravastar de energia escura ou simplesmente por uma estrela de energia escura. Lobo explorou algumas configurações, impondo escolhas específicas para a função de massa. Posteriormente explorou a estabilidade dinâmica da camada de transição destes modelos com relação a perturbações linearizadas em torno de soluções estáticas, aplicando o formalismo de estabilidade geral desenvolvido por ele e Paulo Crawford [105], e que também foi aplicado no contexto da estabilidade de buracos de verme fantasmas (phantom wormholes) [106]. A estrela de energia escura mostrada no trabalho de Lobo pode, possivelmente, ter uma origem nas flutuações de densidade no fundo cosmológico. É incerto como tais inhomogeneidades na energia escura podem ser formadas. Todavia uma explicação possível pode ser inferida da referência [107], onde a equação de estado de energia escura foi generalizada para incluir um termo inhomogêneo dependendo do parâmetro de Hubble, possivelmente resultando na nucleação de uma estrela de energia escura através de uma perturbação de densidade.

3.5.1 Estrelas de energia escura: Equações da estrutura

Considere o espaço-tempo interior, sem perda de generalidade, dado pela seguinte métrica:

$$ds^2 = -\exp\left[-2\int_r^\infty g(\tilde{r})d\tilde{r}\right] dt^2 + \frac{dr^2}{1-2m(r)/r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (3.68)$$

onde $g(r)$ e $m(r)$ são funções arbitrárias da coordenada radial, r . A função $m(r)$ é a massa quase local, e é denotada como função de massa. O fator $g(r)$ está relacionado à aceleração devido à gravidade medida localmente,

através da seguinte relação: $\mathcal{A} = \sqrt{1 - 2m(r)/r} g(r)$ [122, 123]. A convenção utilizada é que $g(r)$ é positivo para uma atração gravitacional dirigido de fora para dentro e negativo para uma repulsão gravitacional de dentro para fora. Note que equivalentemente pode-se considerar uma função $\Phi(r)$, definida como $\Phi(r) = -\int_r^\infty g(\tilde{r}) d\tilde{r}$, e chamada de função de deslocamento para o vermelho devido à sua relação com o desvio para o vermelho gravitacional [124].

O tensor momentum-energia para uma distribuição anisotrópica da matéria é dada por

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p_t)U_\mu U_\nu + p_t g_{\mu\nu} + (p_r - p_t)\chi_\mu\chi_\nu, \quad (3.69)$$

onde U^μ é a quadrivelocidade, χ^μ é o vetor do tipo-espaço unitário na direção radial, ou seja, $\chi^\mu = \sqrt{1 - 2m/r} \delta^\mu_r$. $\rho(r)$ é a densidade de energia, $p_r(r)$ é a pressão radial medida na direção de χ^μ , e $p_t(r)$ é a pressão transversal medida na direção ortogonal a χ^μ .

Assim, a equação de campo de Einstein, $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$, onde $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein, fornece as seguintes relações

$$m' = 4\pi r^2 \rho, \quad (3.70)$$

$$g = \frac{m + 4\pi r^3 p_r}{r(r - 2m)}, \quad (3.71)$$

$$p'_r = -\frac{(\rho + p_r)(m + 4\pi r^3 p_r)}{r(r - 2m)} + \frac{2}{r}(p_t - p_r), \quad (3.72)$$

onde o primo denota uma derivada com relação à coordenada radial, r . A equação (3.72) envolve as pressões anisotrópicas da equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV).

Agora, utilizando a equação de estado, $p_r = \omega\rho$, e levando-se em consideração as equações (3.70) e (3.71), temos a seguinte relação

$$g(r) = \frac{m + \omega r m'}{r(r - 2m)}. \quad (3.73)$$

Utilizando a equação de estado da energia escura $p_r = \omega\rho$, a equação (3.72),

em termos das pressões principais, toma a forma

$$p'_r = -p_r \left(\frac{1 + \omega}{\omega} \right) \frac{m + \omega r m'}{r (r - 2m)} + \frac{2}{r} (p_t - p_r), \quad (3.74)$$

que levando-se em consideração a equação (3.70), pode ser expressa na forma equivalente

$$\Delta = \frac{\omega}{8\pi r^2} \left[m'' r - 2m' + \left(\frac{1 + \omega}{\omega} \right) m' r g \right]. \quad (3.75)$$

$\Delta = p_t - p_r$ é denotado como fator de anisotropia, já que é uma medida da anisotropia da pressão do fluido compreendendo a estrela. $\Delta = 0$ corresponde ao caso particular de pressão isotrópica. Note que Δ/r representa uma força devida à natureza anisotrópica do modelo estelar, que é repulsiva, ou seja, sendo direcionada de dentro para fora se $p_t > p_r$, e atrativa se $p_t < p_r$.

Agora temos em mãos quatro equações que são as equações de campo (3.70)-(3.72) e (3.73), com cinco funções desconhecidas de r , isto é, $\rho(r)$, $p_r(r)$, $p_t(r)$, $g(r)$ e $m(r)$. Obter soluções explícitas das equações de campo de Einstein é extremamente difícil devido a não-linearidade das equações, embora o problema seja matematicamente bem definido. Todavia, seguindo o mesmo caminho de outro trabalho [88], Lobo adotou uma abordagem onde uma escolha específica da função de massa $m(r)$ é admitida e, através da equação (3.73), $g(r)$ é determinado, fornecendo assim expressões explícitas para os componentes do tensor momentum-energia. Nos casos específicos que seguem, consideraremos que a densidade de energia é positiva e finita em todos os pontos no interior da estrela.

3.5.2 Modelos específicos

Densidade de energia constante

Considere o caso específico de uma densidade de energia constante, $\rho(r) = \rho_0$, de modo que a equação (3.70) fornece a seguinte função de massa:

$$m(r) = \frac{4\pi\rho_0}{3} r^3. \quad (3.76)$$

Assim, usando a equação (3.73), encontra-se que $g(r)$ é dado por

$$g(r) = \frac{Ar(1 + 3\omega)}{1 - 2Ar^2}, \quad (3.77)$$

onde, por simplicidade, a definição $A = 4\pi\rho_0/3$ é usada. Note que para $\omega < -1/3$, temos uma repulsão gravitacional de dentro para fora, $g(r) < 0$, que é de se esperar em modelos de gravastar.

A métrica do espaço-tempo para esta solução toma a seguinte forma:

$$ds^2 = - (1 - 2Ar^2)^{-(1+3\omega)/2} dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2Ar^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (3.78)$$

Os componentes do tensor momentum-energia são dados por $p_r = \omega\rho_0$ e

$$p_t = \omega\rho_0 \left[1 + \frac{(1 + \omega)(1 + 3\omega)Ar^2}{2\omega(1 - 2Ar^2)} \right], \quad (3.79)$$

enquanto que o fator de anisotropia é:

$$\Delta = \frac{3}{8\pi}(1 + \omega)(1 + 3\omega)\frac{A^2r^2}{1 - 2Ar^2}. \quad (3.80)$$

Verifica-se que $\Delta < 0$ para $-1 < \omega < -1/3$ e $\Delta > 0$ para $\omega < -1$. Note que $\Delta = 0$ na origem, $r = 0$, como era de se esperar. Para $\omega = -1$, então $\Delta = 0$ também é verificado para r arbitrário. Esta condição posterior é também deduzida da equação (3.72), onde levando-se em consideração que $p_r = \omega\rho$ para $p_r = \text{const}$, verifica-se que $p_t = p_r$.

Função de massa de Tolman-Matse-Whitman

Considere a seguinte escolha para a função de massa, dada por:

$$m(r) = \frac{b_0r^3}{2(1 + 2b_0r^2)}, \quad (3.81)$$

onde b_0 é uma constante não-negativa. b_0 pode ser determinado das condições de regularidade e do caráter finito da densidade de energia na origem $r = 0$, e é dado por $b_0 = 8\pi\rho_c/3$, onde ρ_c é a densidade de energia em $r = 0$.

Esta escolha da função de massa representa uma densidade de energia monotonicamente decrescente no interior da estrela, e foi utilizada anteriormente na análise de esferas de fluidos isotrópicos por Matese e Whitman [125] como caso específico da solução de Tolman do tipo-IV [8], e posteriormente por Finch e Skea [126]. Modelos estelares anisotrópicos, com suas respectivas aplicações em astrofísica, foram analisados na referência [127], pela consideração de um caso específico da função de massa de Matese-Whitman. Os resultados numéricos obtidos mostram que os parâmetros físicos básicos do modelo, tais como massa e raio, podem descrever objetos astrofísicos realísticos como estrelas de nêutrons [127].

Utilizando a equação (3.73), $g(r)$ é dado por

$$g(r) = \left(\frac{b_0 r}{2}\right) \left[\frac{(1+3\omega) + (1+\omega)2b_0 r^2}{(1+b_0 r^2)(1+2b_0 r^2)} \right]. \quad (3.82)$$

Note que $g(r) > 0$, para $\omega > -(1+2b_0 r^2)/(3+2b_0 r^2)$, indicando uma atração gravitacional de fora para dentro; da curva verifica-se que, quantitativamente, $g(r)$ é positivo para valores de ω na vizinhança de $-1/3$. Agora, para ser uma solução de gravastar, é necessário que a aceleração local devida à gravidade da solução interior seja repulsiva, de forma que a região mencionada anteriormente para a qual $g(r) > 0$ é necessariamente excluída.

A métrica do espaço-tempo para esta solução é

$$ds^2 = -(1+b_0 r^2)^{(1-\omega)/2} (1+2b_0 r^2)^\omega dt^2 + \left(\frac{1+2b_0 r^2}{1+b_0 r^2}\right) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (3.83)$$

Os componentes do tensor momentum-energia são dados por

$$\begin{aligned} p_r &= \omega\rho = \left(\frac{\omega b_0}{8\pi}\right) \left[\frac{3+2b_0 r^2}{(1+2b_0 r^2)^2} \right] \\ p_t &= -\left(\frac{b_0}{8\pi}\right) \left[\frac{\omega(3+2b_0 r^2)}{(1+2b_0 r^2)^2} \right] + \left(\frac{b_0^2 r^2}{32\pi}\right) \times \\ &\quad \times \left\{ (1+\omega)(3+2b_0 r^2) [(1+3\omega) + 2b_0 r^2(1+\omega)] \right. \\ &\quad \left. - 8\omega(5+2b_0 r^2)(1+b_0 r^2) \right\} / [(1+2b_0 r^2)^3(1+b_0 r^2)]. \end{aligned} \quad (3.84)$$

O fator de anisotropia toma a seguinte forma

$$\Delta = \frac{b_0^2 r^2}{32\pi} \left\{ (1 + \omega)(3 + 2b_0 r^2) [(1 + 3\omega) + 2b_0 r^2(1 + \omega)] - 8\omega(5 + 2b_0 r^2)(1 + b_0 r^2) \right\} / [(1 + 2b_0 r^2)^3(1 + b_0 r^2)], \quad (3.85)$$

onde verifica-se que $\Delta > 0$. Para o caso particular de $\omega = -1$, o fator de anisotropia reduz-se a

$$\Delta = \left(\frac{b_0^2 r^2}{4\pi} \right) \frac{(5 + 2b_0 r^2)}{(1 + 2b_0 r^2)^3}. \quad (3.86)$$

3.5.3 Estabilidade de estrelas de energia escura

Condições de junção

No trabalho de Lobo, as estrelas de energia escura foram modeladas pela junção de uma solução interior governada por uma equação de estado, $p = \omega\rho$ com $\omega < -1/3$, com uma solução de vácuo de Schwarzschild exterior com $p = \rho = 0$, na interface de junção Σ , com raio de junção a . A métrica de Schwarzschild, como já visto, é dada por

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (3.87)$$

que possui um horizonte de eventos em $r_H = 2M$. Para evitar o horizonte de eventos, o raio de junção está fora de $2M$, ou seja, $a > 2M$. Vamos mostrar a seguir que M , neste contexto, pode ser interpretado como a massa total da estrela de energia escura⁴. Embora Lobo tenha afirmado que poderia-se também impor condições regulares e de fronteira, e seus respectivos vínculos [122, 129], no centro e na superfície da estrela de energia escura, sem a presença de cascas finas, foi mostrado por outros autores que isso não é verdade [75, 132]..

Utilizando o formalismo de Darmois-Israel [114], o tensor momentum-energia da superfície de junção Σ , S_j^i , é dado pelas equações de Lanczos, $S_j^i =$

⁴De uma forma análoga, modelos de buracos de verme atravessáveis foram construídos na referência [128] e a análise da estabilidade de buracos de verme fantasmas foi feita na referência [106].

$-\frac{1}{8\pi}(\kappa_j^i - \delta_j^i \kappa_k^k)$. κ_j^i é definido pela descontinuidade das curvaturas extrínsecas, K_j^i , através da interface de junção, ou seja, $\kappa_{ij} = K_{ij}^+ - K_{ij}^-$. A curvatura extrínseca é definida como $K_{ij} = n_{\mu;\nu} e_{(i)}^\mu e_{(j)}^\nu$, onde n^μ é o quadrivetor unitário normal a Σ , e $e_{(i)}^\mu$ são os componentes dos vetores na base holonômica, tangentes a Σ . Utilizando as métricas (3.68) e (3.87), os componentes não triviais da curvatura extrínseca são dados por [105]

$$K_{\tau}^{\tau+} = \frac{\frac{M}{a^2} + \ddot{a}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{a} + \dot{a}^2}}, \quad (3.88)$$

$$K_{\tau}^{\tau-} = \frac{\frac{m+\omega am'}{a^2} + \ddot{a} - \frac{(1+\omega)m'\dot{a}^2}{(a-2m)}}{\sqrt{1 - \frac{2m(a)}{a} + \dot{a}^2}}, \quad (3.89)$$

e

$$K_{\theta}^{\theta+} = \frac{1}{a} \sqrt{1 - \frac{2M}{a} + \dot{a}^2}, \quad (3.90)$$

$$K_{\theta}^{\theta-} = \frac{1}{a} \sqrt{1 - \frac{2m(a)}{a} + \dot{a}^2}, \quad (3.91)$$

onde o ponto denota uma derivada com relação ao tempo próprio, τ , e o primo denota uma derivada com relação a a . A equação (3.73) calculada em a foi usada para eliminar $g(r)$ da equação (3.89). Na análise que segue, o mesmo procedimento será aplicado, de forma que na dedução da equação mestra, que dita as regiões de estabilidade, só faremos uso da função de massa $m(r)$. Assim, as equações de Lanczos fornecem as tensões de superfície dadas por

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi a} \left(\sqrt{1 - \frac{2M}{a} + \dot{a}^2} - \sqrt{1 - \frac{2m}{a} + \dot{a}^2} \right), \quad (3.92)$$

$$\mathcal{P} = \frac{1}{8\pi a} \left(\frac{1 - \frac{M}{a} + \dot{a}^2 + a\ddot{a}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{a} + \dot{a}^2}} - \frac{1 + \omega m' - \frac{m}{a} + \dot{a}^2 + a\ddot{a} + \frac{\dot{a}^2 m'(1+\omega)}{1-2m/a}}{\sqrt{1 - \frac{2m}{a} + \dot{a}^2}} \right), \quad (3.93)$$

onde σ e \mathcal{P} são a densidade de energia da superfície e a pressão tangencial de superfície, respectivamente.

Devemos também usar a conservação da identidade dada por $S_{j|i}^i = [T_{\mu\nu}e_{(j)}^\mu n^\nu]_-^+$, onde $[X]_\pm^\pm$ denota a descontinuidade através da superfície da interface, ou seja, $[X]_\pm^\pm = X^+|_\Sigma - X^-|_\Sigma$. O termo de fluxo do momentum no lado direito corresponde à descontinuidade líquida no fluxo do momentum $F_\mu = T_{\mu\nu}U^\nu$ que penetra na casca.

Note que $S_{\tau|i}^i = -[\dot{\sigma} + 2\dot{a}(\sigma + \mathcal{P})/a]$, e o termo de fluxo é dado por [105]

$$\left[T_{\mu\nu}e_{(j)}^\mu n^\nu\right]_-^+ = -\frac{(\rho + p_r)\dot{a}\sqrt{1 - 2m/a + \dot{a}^2}}{1 - 2m/a}, \quad (3.94)$$

onde ρ e p_r podem ser deduzidos das equações (3.70)-(3.71), respectivamente, calculadas no raio de junção, a . Portanto, utilizando estas relações pode-se mostrar que

$$\sigma' = -\frac{2}{a}(\sigma + \mathcal{P}) + \Xi, \quad (3.95)$$

onde Ξ , definido por conveniência de notação, é dado por

$$\Xi = -\frac{1}{4\pi a} \frac{m'(1 + \omega)}{(a - 2m)} \sqrt{1 - \frac{2m}{a} + \dot{a}^2}, \quad (3.96)$$

usando a equação (3.73) calculada em a . Note que o termo de fluxo é zero quando $\omega = -1$, que reduz à análise de Visser e Wiltshire [70] vista anteriormente.

Levando-se em consideração as equações (3.92), (3.93) e a equação (3.96), então a equação (3.95) finalmente toma a forma

$$\sigma' = \frac{1}{4\pi a^2} \left(\frac{1 - \frac{3M}{a} + \dot{a}^2 - a\ddot{a}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{a} + \dot{a}^2}} - \frac{1 - \frac{3m}{a} + m' + \dot{a}^2 - a\ddot{a}}{\sqrt{1 - \frac{2m}{a} + \dot{a}^2}} \right), \quad (3.97)$$

que, calculada para a solução estática, $a = a_0$, tem um papel fundamental na determinação das regiões de estabilidade. (Uma análise da estabilidade linearizada de cascas finas esfericamente simétricas e de cascas finas de buracos de verme onde o termo de fluxo é zero foram estudados na referência [130]).

A massa da superfície da casca fina é dada por $m_s = 4\pi a^2 \sigma$. Rearranjando a equação (3.92), calculada na solução estática $a = a_0$, obtém-se a massa total da estrela, dada por

$$M = m(a_0) + m_s(a_0) \left[\sqrt{1 - \frac{2m(a_0)}{a_0}} - \frac{m_s(a_0)}{2a_0} \right]. \quad (3.98)$$

Utilizando $m_s = 4\pi a^2 \sigma$, e levando-se em consideração a derivada radial de σ' , a equação (3.95) pode ser rearranjada para fornecer a seguinte relação

$$\left(\frac{m_s}{2a} \right)'' = \Upsilon - 4\pi \sigma' \eta, \quad (3.99)$$

com o parâmetro η definido como $\eta = \mathcal{P}'/\sigma'$, e Υ dado por

$$\Upsilon \equiv \frac{4\pi}{a} (\sigma + \mathcal{P}) + 2\pi a \Xi'. \quad (3.100)$$

A equação (3.99) irá desempenhar um papel fundamental na determinação das regiões de estabilidade das respectivas soluções. η é utilizado como uma parametrização do equilíbrio estável, de modo que não há necessidade de especificar uma equação de estado da superfície. O parâmetro $\sqrt{\eta}$ é normalmente interpretado como a velocidade do som, de modo que espera-se que $0 < \eta \leq 1$, baseado na condição de que a velocidade do som não deve exceder a velocidade da luz. A interpretação física de η na presença de matéria exótica pode ser visto na referência [130].

É interessante também analisar a evolução da identidade dada por: $[T_{\mu\nu} n^\mu n^\nu]_\pm^\pm = \bar{K}^i_j S^j_i$, onde $\bar{K}^i_j = (K_j^{i+} + K_j^{i-})/2$. A evolução da identidade fornece a seguinte relação

$$\begin{aligned} p_r + \frac{(\rho + p_r)\dot{a}^2}{1 - 2m/a} = & -\frac{1}{a} \left(\sqrt{1 - \frac{2M}{a}} + \dot{a}^2 \right. \\ & \left. + \sqrt{1 - \frac{2m}{a}} + \dot{a}^2 \right) \mathcal{P} + \frac{1}{2} \left(\frac{M/a^2 + \ddot{a}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{a}} + \dot{a}^2} \right. \\ & \left. + \frac{m + \omega am' + \ddot{a}a^2 + \frac{(1+\omega)am'\dot{a}^2}{1-2m/a}}{a^2 \sqrt{1 - \frac{2m}{a}} + \dot{a}^2} \right) \sigma. \end{aligned} \quad (3.101)$$

É interessante obtermos uma equação governando o comportamento da pressão radial em termos das tensões de superfície na fronteira de junção, na solução estática $a = a_0$, com $\dot{a} = \ddot{a} = 0$. Da equação (3.101), temos a seguinte equação de balanço da pressão

$$p_r(a_0) = -\frac{1}{a_0} \left(\sqrt{1 - \frac{2M}{a_0}} + \sqrt{1 - \frac{2m}{a_0}} \right) \mathcal{P} + \frac{1}{2a_0^2} \left(\frac{M}{\sqrt{1 - \frac{2M}{a_0}}} + \frac{m + \omega a_0 m'}{\sqrt{1 - \frac{2m}{a_0}}} \right) \sigma. \quad (3.102)$$

A equação (3.102) relaciona a pressão radial interior à casca em termos de uma combinação de sua densidade de energia σ e pressão tangencial \mathcal{P} , dadas pelas equações (3.92) e (3.93), calculadas na solução estática, e quantidades geométricas. Para ganhar algum *insight* na análise, considere uma densidade de energia de superfície zero, $\sigma = 0$. Assim, a equação (3.102) reduz-se à

$$p_r(a_0) = -\frac{2}{a_0} \sqrt{1 - \frac{2M}{a_0}} \mathcal{P}. \quad (3.103)$$

Como a pressão interior atuando na casca é negativa $p_r(a_0) < 0$, ou seja, é uma tensão radial, então uma pressão positiva tangencial superficial, $\mathcal{P} > 0$, é necessária para segurar a casca fina contra o colapso.

Dedução da equação mestra

A equação (3.92) pode ser rearranjada para fornecer a equação de movimento da casca fina, ou seja, $\dot{a}^2 + V(a) = 0$, com o potencial dado por

$$V(a) = F(a) - \left[\frac{m_s(a)}{2a} \right]^2 - \left[\frac{aG(a)}{m_s(a)} \right]^2. \quad (3.104)$$

onde, por conveniência de notação, os fatores $F(a)$ e $G(a)$ são definidos como

$$F(a) = 1 - \frac{m(a) + M}{a} \quad \text{and} \quad G(a) = \frac{M - m(a)}{a}. \quad (3.105)$$

Linearizando em torno de uma solução estável localizada em a_0 , consideremos a expansão em série de Taylor de $V(a)$ em torno de a_0 em segunda ordem,

dado por

$$V(a) = V(a_0) + V'(a_0)(a - a_0) + \frac{1}{2}V''(a_0)(a - a_0)^2 + O[(a - a_0)^3]. \quad (3.106)$$

Calculado na solução estática, em $a = a_0$, verifica-se que $V(a_0) = 0$ e $V'(a_0) = 0$. Da condição $V'(a_0) = 0$, extrai-se a seguinte relação útil de equilíbrio

$$\Gamma \equiv \left(\frac{m_s}{2a_0}\right)' = \left(\frac{a_0}{m_s}\right) \left[F' - 2 \left(\frac{a_0 G}{m_s}\right) \left(\frac{a_0 G}{m_s}\right)' \right], \quad (3.107)$$

que será utilizada na determinação da equação mestra, responsável por ditar as configurações de equilíbrio estáveis.

A solução é estável se e somente se $V(a)$ possui um mínimo local em a_0 e $V''(a_0) > 0$ é verificado. Assim, da última condição de estabilidade, pode-se deduzir que a equação mestra, dada por

$$\eta_0 \frac{d\sigma^2}{da} \Big|_{a_0} > \Theta, \quad (3.108)$$

pelo uso da equação (3.99), onde $\eta_0 = \eta(a_0)$ e Θ é definida por

$$\Theta \equiv \frac{1}{2\pi} \left[\sigma \Upsilon + \frac{1}{2\pi a_0} (\Gamma^2 - \Psi) \right], \quad (3.109)$$

com

$$\Psi = \frac{F''}{2} - \left[\left(\frac{aG}{m_s}\right)' \right]^2 - \left(\frac{aG}{m_s}\right) \left(\frac{aG}{m_s}\right)''. \quad (3.110)$$

Agora, a partir da equação mestra encontramos que as regiões de equilíbrio estável são dadas pelas seguintes desigualdades:

$$\eta_0 > \Omega, \quad \text{se} \quad \frac{d\sigma^2}{da} \Big|_{a_0} > 0, \quad (3.111)$$

$$\eta_0 < \Omega, \quad \text{se} \quad \frac{d\sigma^2}{da} \Big|_{a_0} < 0, \quad (3.112)$$

com a definição

$$\Omega \equiv \Theta \left(\frac{d\sigma^2}{da} \Big|_{a_0} \right)^{-1}. \quad (3.113)$$

Nos próximos três capítulos, utilizando as ferramentas apresentadas neste capítulo, mostraremos que a existência de gravastars não excluem a existência de buracos negros.

Capítulo 4

Análise dinâmica da estabilidade do modelo de Visser-Wiltshire

4.1 Formação de estrelas de vácuo gravitante a partir do colapso gravitacional

Para nos mantermos o mais próximo possível às idéias de Mazur e Motolla, consideraremos a casca fina feita de um fluido rígido, $\sigma = -\vartheta$, onde σ e ϑ denotam, respectivamente, a densidade de energia superficial e a tensão na camada. Então, encontramos que [70]

$$\sigma = \sigma_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^4, \quad (4.1)$$

onde σ_0 e a_0 são constantes de integração, e possuem dimensões de densidade de energia superficial e comprimento, respectivamente. É fácil verificar que o potencial que satisfaz a equação (1.10) pode ser colocado na forma

$$V(R) = -\frac{1}{2} \left(-1 + \frac{m}{R} + \frac{1}{4R^6} + m^2 R^4 + \frac{R^2}{2L^2} - \frac{mR^7}{L^2} + \frac{R^{10}}{4L^4} \right), \quad (4.2)$$

onde

$$m \equiv \frac{M}{k^{1/3}}, \quad R \equiv \frac{a}{k^{1/3}}, \quad L \equiv \frac{l}{k^{1/3}}, \quad (4.3)$$

com $k \equiv 4\pi a_0^4 \sigma_0$. Portanto, para quaisquer constantes m e L dadas, as equações (1.10) e (4.2) determinam unicamente o estado final da evolução de um protótipo de estrela de vácuo gravitante (gravastar). Dependendo do valor inicial R_0 , o

colapso pode formar um buraco negro, uma estrela de vácuo gravitante, um espaço de Minkowski, ou um espaço de de Sitter. No último caso, a casca fina primeiramente colapsa para um raio finito mínimo diferente de zero e então expande para o infinito. Para garantir que, inicialmente, o espaço-tempo não possui qualquer tipo de horizontes (cosmológicos ou de eventos), devemos restringir R_0 à faixa,

$$2m < R_0 < L, \quad (4.4)$$

correspondentemente $R_0 \in (2m, l)$. Quando $m = 0 = \Lambda$, a casca fina desaparece, e todo o espaço é Minkowski. Logo, a seguir não será considerado este caso, e iniciaremos com o caso onde $m = 0$ e $\Lambda \neq 0$.

4.1.1 $m = 0$ e $\Lambda \neq 0$

Neste caso, o espaço-tempo fora da casca fina é plano, e a massa da casca compensa completamente a energia do espaço-tempo interno de de Sitter. Da equação (4.2) encontramos que

$$V(R) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4R^6} - \frac{R^2}{2L^2} - \frac{R^{10}}{4L^4} \right). \quad (4.5)$$

Então, pode ser mostrado que as equações $V(R) = 0$ e $V'(R) = 0$ possuem a solução explícita,

$$L = L_c \equiv \left[\frac{5}{3} \left(\frac{4}{5} \right)^{8/3} \right]^{1/2} \simeq 0.9588, \quad R = R_{min} \equiv \left(\frac{4}{5} \right)^{1/3}. \quad (4.6)$$

Para $L < L_c$ o potencial $V(R)$ é estritamente negativo como mostra a figura (4.1). Como resultado, se a estrela começa a colapsar em $R = R_0$, ela colapsará continuamente até $R = 0$, onde um espaço-tempo de Minkowski é formado, como mostrado pela linha inferior da figura (4.2). Quando $L = L_c \simeq 0.9588$, desde que $R_0 < L_c$, podemos ver que, similarmente ao caso anterior, a estrela colapsará até o centro $R = 0$ e transforma todo o espaço-tempo em Minkowski, como mostrado na linha do meio na figura (4.2). Para $L > L_c$, o potencial

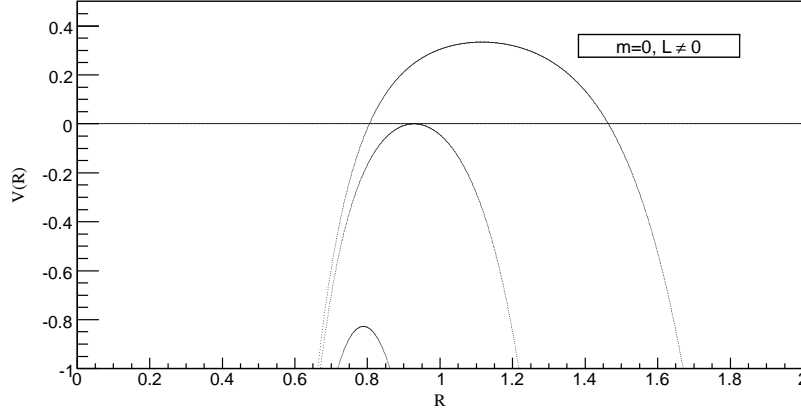


Figura 4.1: O potencial $V(R)$ para $m = 0$. A linha superior é para $L = 2.0 > L_c \simeq 0.9588$, a linha do meio para $L = L_c$, e a linha inferior para $L = 0.5 < L_c$.

$V(R)$ é positivo entre R_1 e R_2 , onde $R_{1,2}$ são as duas raízes reais da equação $V(R, L > L_c) = 0$ com $R_2 > R_1 > 0$. Neste caso, se a estrela começa a colapsar com $R_0 < R_1$, como pode ser visto na figura (4.1), ela colapsará até $R = 0$, quando um espaço-tempo de Minkowski finalmente é formado. Se começa a colapsar com $R_0 > R_2$, irá primeiro colapsar para $R = R_2$ e então começa a expandir até $R = \infty$, e finalmente todo o espaço-tempo será de Sitter, como mostrado na linha superior da figura (4.2).

4.1.2 $\Lambda = 0$ e $m \neq 0$

Neste caso a equação (4.2) dá,

$$V(R) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{m}{R} - \frac{1}{4R^6} - m^2 R^4 \right), \quad (4.7)$$

a partir da qual encontramos que as equações $V(R) = 0$ e $V'(R) = 0$ possuem solução explícita,

$$m = m_c \equiv \frac{3}{4} \left(\frac{4}{5} \right)^{5/3} \simeq 10^{-0.286}, \quad R = R_c \equiv \left(\frac{3}{4m_c} \right)^{1/5} = \left(\frac{5}{4} \right)^{1/3}. \quad (4.8)$$

Para $m > m_c$ o potencial $V(R)$ é estritamente negativo como mostrado na figura (4.3). Então, o colapso sempre forma buracos negros, como mostra claramente

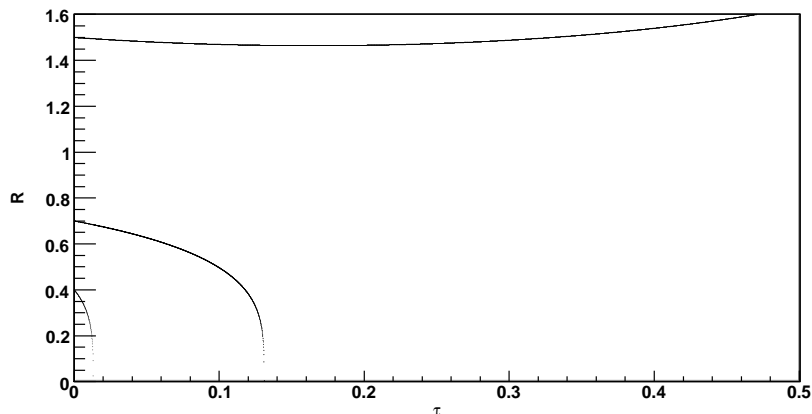


Figura 4.2: O movimento da casca $R(\tau)$ em função do tempo próprio, τ , para $m = 0$. A linha superior é para $L = 2.0 > L_c \simeq 0.9588$, a linha do meio para $L = L_c$, e a linha inferior para $L = 0.5 < L_c$.

a linha inferior na figura (4.4). Para $m = m_c$, há duas diferentes possibilidades, dependendo da escolha do raio inicial R_0 . Em particular, se a estrela começa a colapsar com $R_0 > R_c$, o colapso irá aproximar-se assintoticamente do raio mínimo R_c . Uma vez que colapsa a este ponto, a casca irá parar de colapsar e permanecerá neste ponto para sempre, como pode ser visto na linha do meio da figura (4.4). Todavia, neste caso este ponto é instável e quaisquer pequenas perturbações levarão a estrela a expandir para sempre e deixar para trás um espaço-tempo plano de de Sitter, ou levarão a estrela ao colapso até $R = 0$, onde um buraco negro de Schwarzschild finalmente será formado. Por outro lado, se a estrela começa a colapsar com $2m_c < R_0 < R_c$, como mostrado pela figura (4.3), a estrela irá colapsar até um buraco negro ser formado. Para $m < m_c$, o potencial $V(R)$ possui um máximo positivo, e a equação $V(R, m < m_c) = 0$ possui duas raízes positivas $R_{1,2}$ com $R_2 > R_1 > 0$. Como no caso anterior, agora também há duas possibilidades dependendo da escolha do raio inicial R_0 . Se $R_0 > R_2$, a estrela irá primeiro colapsar ao seu raio mínimo $R = R_2$ e então expandirá para o infinito, onde um espaço-tempo de Minkowski será finalmente formado, como mostrado na linha superior da figura (4.4). Se $2m < R_0 < R_1$, a

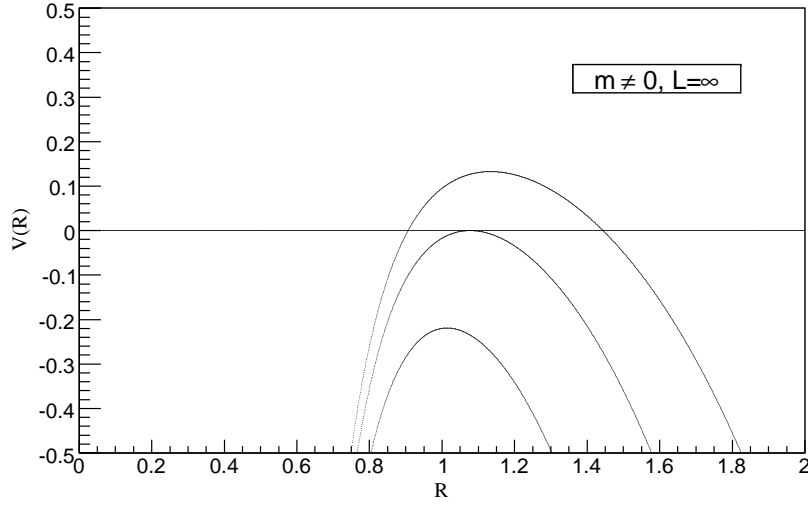


Figura 4.3: O potencial $V(R)$ para $\Lambda = 0$ (ou $L = \infty$). A linha superior é para $m < m_c \simeq 10^{-0.286}$, a linha do meio para $m = m_c$, e a linha inferior é para $m > m_c$.

estrela colapsará continuamente até $R = 0$, e um buraco negro será finalmente formado.

4.1.3 $m \neq 0$ e $\Lambda \neq 0$

Neste caso, da equação (4.2) encontra-se que as equações $V(R) = 0$ e $V'(R) = 0$ possuem solução da forma, $m = m_c(L)$ para qualquer L . A dependência exata de m_c em função de L não pode ser dada explicitamente. No que segue, portanto, consideraremos alguns casos representativos.

$$m = 10^{-0.286}, \quad L = 2.5 \times 10^5$$

Se escolhermos $m = m_c \simeq 10^{-0.286}$ e gradualmente alterarmos a constante cosmológica, encontramos que o potencial $V(R)$ torna-se completamente negativo, como mostrado pela figura (4.5). Logo, para qualquer R_0 dado com $2m < R_0 < L$, a estrela sempre colapsará para formar um buraco negro. Comparando este caso com o caso $m = m_c$ e $\Lambda = 0$, encontramos que a presença da constante cosmológica faz com que o colapso tenha mais chances de formar buracos negros

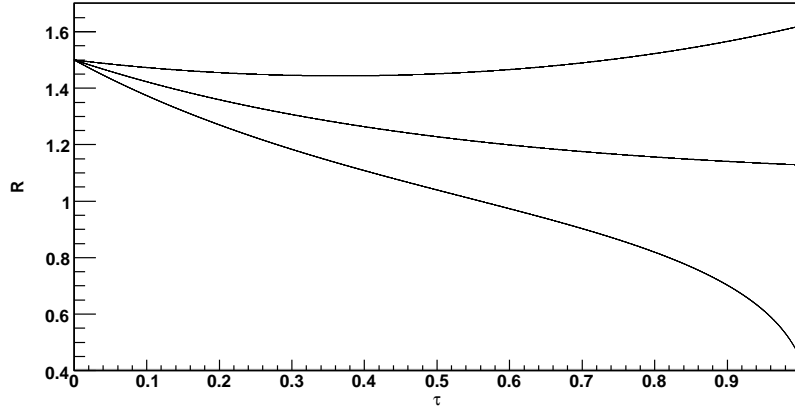


Figura 4.4: O movimento da casca $R(\tau)$ em função do seu tempo próprio τ para $\Lambda = 0$. A linha superior é para $m < m_c \simeq 10^{-0.286}$, a linha do meio para $m = m_c$, e a linha inferior para $m > m_c$.

do que estrelas de vácuo gravitante.

$$m = 10^{-4}, \quad L = 2.5 \times 10^5$$

Se mantivermos L fixo, por exemplo, $L = 2.5 \times 10^5$, e variarmos m para baixo, encontramos que, para $m = 10^{-4}$, o potencial toma a forma dada pela figura (4.6), a partir da qual podemos ver três das quatro raízes reais de $V(R) = 0$, digamos, R_i , onde $R_{i+1} > R_i$. Se escolhermos $R_0 > R_4$, então a estrela irá primeiro colapsar para $R = R_4$, e então expandirá para o infinito formando um espaço de de Sitter. Todavia, se escolhermos $R_2 < R_0 < R_3$, o colapso irá oscilar entre $R = R_2$ e $R = R_3$ ¹. Tal possibilidade é mostrada na figura (4.7). Isto é exatamente o chamado modelo “excursão ligada” mencionado por Matt Visser e Wiltshire em seu trabalho [70] e visto no capítulo anterior, mas não foi estudado na literatura. Obviamente, em uma situação realística, a estrela emitirá partículas e ondas gravitacionais, e o potencial deve ser auto-ajustado para produzir um mínimo em $R = R_{static}$ onde $V(R = R_{static}) = 0 = V'(R = R_{static})$ [ver figura (4.8)], quando uma estrela de vácuo gravitante finalmente é formada

¹Note que $R_2 > 2m$ e $R_3 < L$.

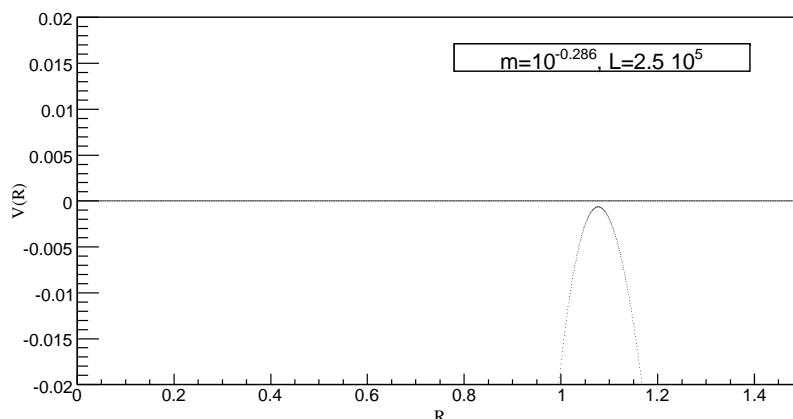


Figura 4.5: O potencial $V(R)$ para $m = 10^{-0.286}$ e $L = 2.5 \times 10^5$, que é sempre negativo.

[70].

Embora tal forma de potencial seja bastante difícil de encontrar no espaço de parâmetros m e L , sua medição não é zero. Então, não podemos excluir completamente a existência de estrelas de vácuo gravitante. Todavia, encontra-se que é fácil encontrar potenciais que levam à formação de buracos negros. As figuras (4.9) e (4.10) são para $m = 1.0$ e $L = 3.0$, e $m = 10^{-4}$ e $L = 3.0$, respectivamente. Destas figuras vemos que, escolhendo apropriadamente o valor do raio inicial R_0 , o colapso sempre formará buracos negros. Do contrário, nestes casos estrelas de vácuo gravitante não podem ser formados, não importa como R_0 é escolhido. Por outro lado, não somos capazes de encontrar valores de m e L para os quais apenas estrelas de vácuo gravitante podem ser formados.

4.2 Conclusões

Neste capítulo foi feito um estudo do problema da estabilidade de estrelas de vácuo gravitante através da construção de modelos dinâmicos de três camadas de Visser e Wiltshire [70], que consiste de um espaço de de Sitter interno, uma casca esférica infinitesimal de um fluido rígido, e um espaço-tempo de

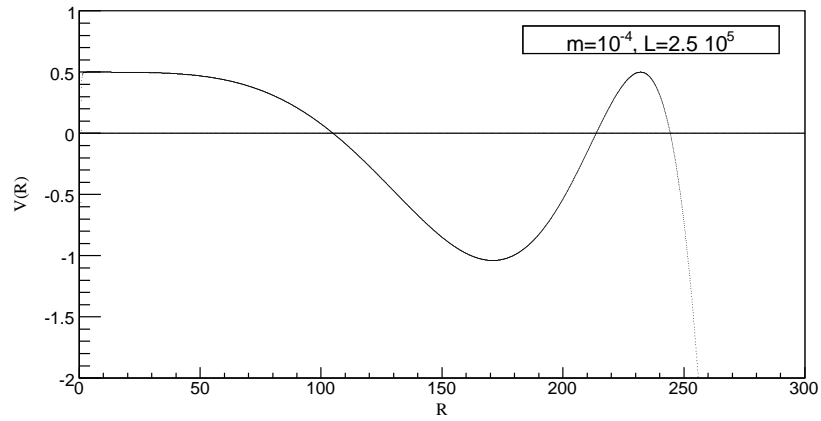


Figura 4.6: O potencial $V(R)$ para $m = 10^{-4}$ e $L = 2.5 \times 10^5$.

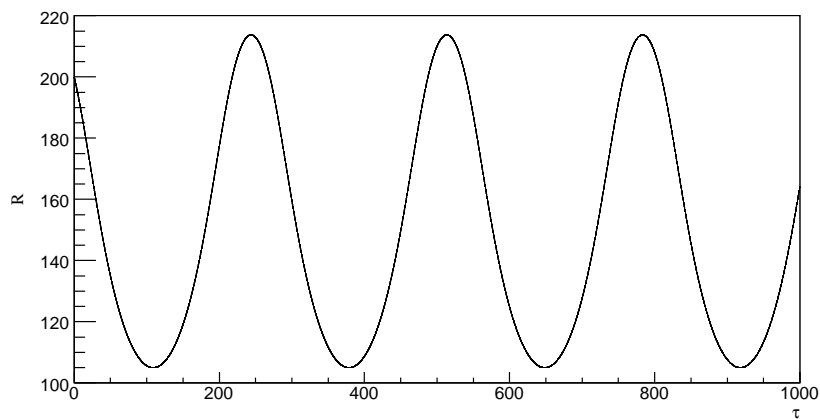


Figura 4.7: A evolução de $R(\tau)$ em função do tempo próprio τ para $m = 10^{-4}$ e $L = 2.5 \times 10^5$.

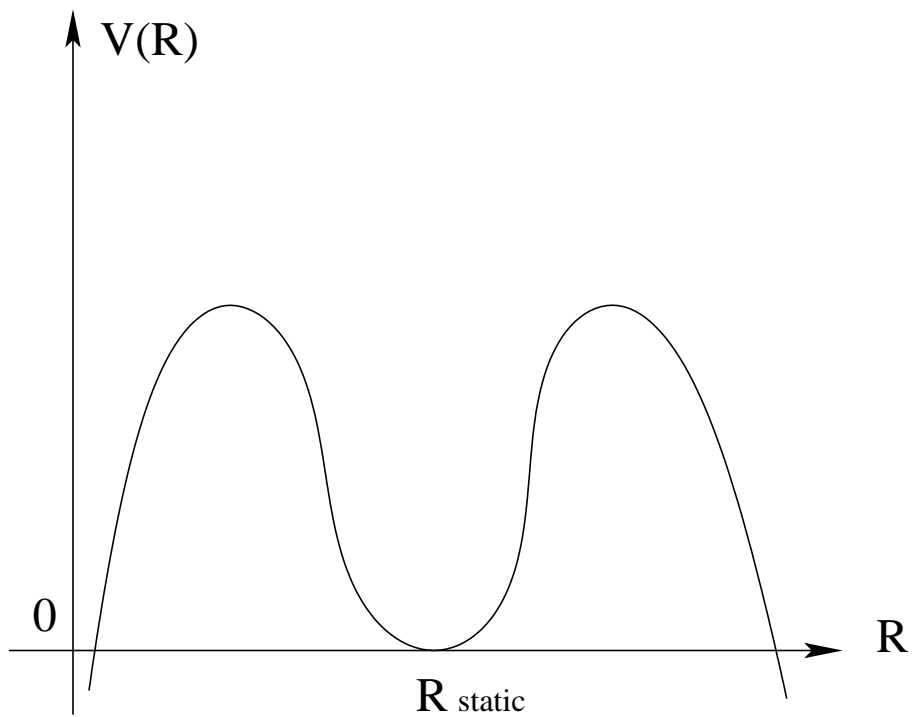


Figura 4.8: O potencial $V(R)$ para a formação de uma estrela de vácuo gravitante em um colapso realístico, após a estrela estabilizar-se no ponto mínimo $R = R_{static}$, onde $V(R = R_{static}) = 0 = V'(R = R_{static})$.

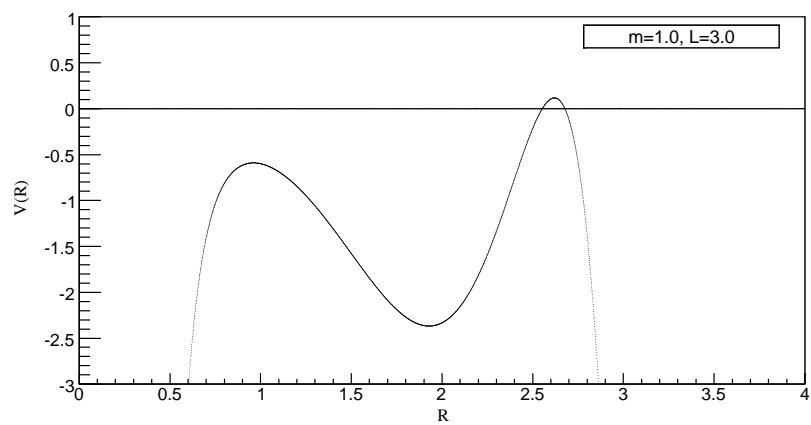


Figura 4.9: O potencial $V(R)$ para $m = 1.0$ e $L = 3.0$.

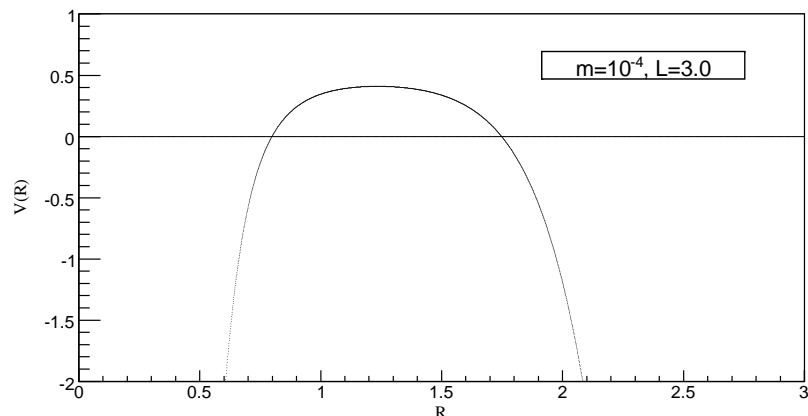


Figura 4.10: O potencial $V(R)$ para $m = 10^{-4}$ e $L = 3.0$.

Schwarzschild externo. Mostrou-se explicitamente que o resultado final do colapso de um protótipo de estrela de vácuo gravitante pode ser um buraco negro, uma “excursão ligada” estável de estrela de vácuo gravitante, um espaço-tempo de Minkowski, ou um espaço-tempo de de Sitter, dependendo da massa total m do sistema, da constante cosmológica Λ , e da posição inicial R_0 da casca dinâmica. Todas estas possibilidades possuem medições diferentes de zero no espaço de parâmetros m , Λ e R_0 , embora a região das estrelas de vácuo gravitante seja muito pequena em comparação a dos buracos negros. Portanto, pode-se concluir deste estudo que mesmo que a existência de estrelas de vácuo gravitante não possa ser completamente excluída nestes modelos dinâmicos, estas não excluem a existência de buracos negros.

Capítulo 5

Generalização da equação de estado da camada fina

5.1 Formação de estrelas de vácuo gravitante e buracos negros por colapso gravitacional de protótipo de estrelas de vácuo gravitante

Para espaços-tempos dados pelas métricas gerais,

$$ds^2 = \begin{cases} c_- (-c_- f_- dv_- + 2dr_-) dv_- + r_-^2 d^2\Omega, & r < a(\tau), \\ c_+ (-c_+ f_+ dv_+ + 2dr_+) dv_+ + r_+^2 d^2\Omega, & r > a(\tau), \end{cases} \quad (5.1)$$

Lake encontrou que as condições de junção de Israel levam a duas equações independentes [131],

$$\dot{a}^2 = \left(\frac{a}{2M}\right)^2 (f_+ - f_-)^2 - \frac{1}{2}(f_+ + f_-) + \left(\frac{M}{2a}\right)^2, \quad (5.2)$$

$$\dot{M} + 8\pi a \dot{a} p = 4\pi a^2 [T_{\alpha\beta} u^\alpha n^\beta], \quad (5.3)$$

onde $M \equiv 4\pi a^2 \sigma$, σ denotando a densidade de energia da casca, e p sua pressão. Neste capítulo continuaremos considerando o caso onde dentro da casca o espaço-tempo é de Sitter, e fora é Schwarzschild, digamos

$$f_+(r) = 1 - \frac{2\mathcal{M}}{r}, \quad f_-(r) = 1 - \left(\frac{r}{l}\right)^2, \quad (5.4)$$

como no caso estudado no capítulo anterior [108]. A grande diferença é a equação de estado da casca fina, que será agora generalizada, tomada como

sendo

$$p = (1 - \gamma)\sigma, \quad (5.5)$$

onde γ é uma constante. Quando $\gamma = 0$ obtemos o caso especial que foi estudado anteriormente [108]. Como

$$T_{\mu\nu}^+ = 0, \quad T_{\mu\nu}^- = \Lambda g_{\mu\nu}^-, \quad (5.6)$$

encontra-se

$$[T_{\mu\nu} u^\mu n^\nu] = T_{\mu\nu}^+ u^{+\mu} n^{+\nu} - T_{\mu\nu}^- u^{-\mu} n^{-\nu} = 0. \quad (5.7)$$

Então, da equação (5.3) obtém-se

$$\frac{\dot{\sigma}}{\sigma} = -2(2 - \gamma)\frac{\dot{a}}{a}, \quad (5.8)$$

que tem a solução geral,

$$\sigma = \sigma_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^{2(2-\gamma)}. \quad (5.9)$$

Escolhendo

$$\mathcal{M} = mL_0, \quad a(\tau) = R(\tau)L_0, \quad l = LL_0, \quad (5.10)$$

onde

$$L_0 \equiv \left(4\pi\sigma_0 a_0^{2(2-\gamma)}\right)^{-\frac{1}{2\gamma-3}}, \quad (5.11)$$

encontramos que a equação (5.2) pode ser colocada na forma,

$$\frac{1}{2}R^{*2} + V(R, m, L, \gamma) = 0, \quad (5.12)$$

onde $R^* \equiv dR/d(L_0^{-1}\tau)$, e

$$V(R, m, L, \gamma) = -\frac{1}{2} \left\{ -1 + \frac{m}{R} + \frac{1}{4}R^{4\gamma-6} + m^2 R^{4(1-\gamma)} + \frac{R^2}{2L^2} - \frac{mR^{7-4\gamma}}{L^2} + \frac{R^{10-4\gamma}}{4L^4} \right\}. \quad (5.13)$$

Portanto, para quaisquer constantes m , L e γ , a equação (5.13) representa a generalização da equação (4.2), a partir da generalização da equação de estado da camada fina. Novamente, dependendo do valor inicial R_0 , o colapso

pode formar um buraco negro, uma estrela de vácuo gravitante, um espaço de Minkowski, ou um espaço de de Sitter.

No capítulo anterior analisamos a estabilidade dinâmica do modelo original de estrelas de vácuo gravitante. No presente capítulo, além de generalizarmos este modelo, considerando uma camada fina com equação de estado mais geral, buscamos estender o estudo analítico o máximo possível, utilizando o tratamento numérico apenas quando a abordagem analítica se esgota.

Por isso, da equação (5.13), encontramos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(R, m, L, \gamma)}{\partial R} = & \frac{m}{2} \left(\frac{1}{R^2} + (7 - 4\gamma) \frac{R^{6-4\gamma}}{L^2} \right) - 2m^2 (1 - \gamma) R^{3-4\gamma} - \frac{R}{2L^2} \\ & + \frac{1}{4} (3 - 2\gamma) R^{4\gamma-7}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Como ambas equações, $V = 0$ e $\partial V(R, m, L, \gamma)/\partial R = 0$, são quadráticas em m , podemos facilmente encontrar m destas duas equações, que é dado por

$$\begin{aligned} m_c(R, L, \gamma) = & \frac{1}{2L^2 (-5L^2 R^{4\gamma} + 4L^2 \gamma R^{4\gamma} - 3R^8)} (-8R^{4\gamma+1}L^4 + 8R^{4\gamma+1}L^4\gamma \\ & - 3R^{11} - 4R^{8\gamma-5}L^4\gamma + 5R^{8\gamma-5}L^4 \\ & + 2R^{4\gamma+3}L^2 - 4R^{4\gamma+3}L^2\gamma), \quad (V = V' = 0). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Substituindo esta expressão em $V = 0$ encontramos seis funções $L(R, \gamma)$. Devido à complexidade destas expressões não colocaremos aqui sua forma explícita. Ao invés disso, a seguir consideraremos alguns casos particulares

5.1.1 $m = 0$

Neste caso, o espaço-tempo fora da casca fina é plano, e a massa da casca compensa completamente a energia do espaço tempo interno de de Sitter. Da equação (5.13) encontramos que

$$V(R, L, \gamma) = -\frac{1}{2} \left\{ -1 + \frac{1}{4} R^{4\gamma-6} + \frac{R^2}{2L^2} + \frac{R^{10-4\gamma}}{4L^4} \right\}. \quad (5.16)$$

Então, $V'(R) = 0$ leva a,

$$(2\gamma - 3)L^4 + 2R^{4(2-\gamma)}L^2 - (2\gamma - 5)R^{8(2-\gamma)} = 0, \quad (5.17)$$

que possui solução real apenas para $\gamma < 3/2$ ou $\gamma \geq 5/2$, e a solução correspondente é dada por

$$L_c = \left| \frac{2\gamma - 5}{2\gamma - 3} \right|^{1/2} R_c^{2(2-\gamma)}, \quad \gamma \notin [3/2, 5/2]. \quad (5.18)$$

Substituindo a expressão acima na equação $V(R) = 0$, encontra-se

$$R_c = \left| \frac{2(\gamma - 2)}{2\gamma - 5} \right|^{\frac{1}{3-2\gamma}}. \quad (5.19)$$

As figuras (5.1), (5.2) e a Tabela (5.1) mostram as funções de $R_c(\gamma)$ e $L_c(\gamma)$, onde, para $\gamma \in [3/2, 5/2)$, as equações $V(R, L, \gamma) = 0$ e $V'(R, L, \gamma) = 0$ não possuem valores reais. Em particular, quando $\gamma = 0.5$ obtém-se que $L_c \approx 0.9185586537$ e $R_c \approx 0.8660254039$. Para $L < L_c$ o potencial é estritamente negativo como mostrado na figura (5.3). Assim, se a estrela começa a colapsar em $R = R_0$, ela irá colapsar continuamente até $R = 0$, quando um espaço-tempo de Minkowski será formado. Quando $L = L_c$, e como $R_0 < L_c$, podemos ver que, a estrela irá colapsar até o centro e transformará todo espaço-tempo em Minkowski. Para $L > L_c$, o potencial $V(R)$ é positivo entre R_1 e R_2 , onde $R_{1,2}$ são as duas raízes reais da equação $V(R, L > L_c) = 0$ com $R_2 > R_1 > 0$. Neste caso, se a estrela começa a colapsar com $R_0 < R_1$, como pode ser visto da figura (5.3), ela irá colapsar para $R = 0$ quando um espaço-tempo de Minkowski finalmente será formado. Se a estrela começa a colapsar com $R_0 > R_2$, ela irá primeiro colapsar para $R = R_2$ e então começará a expandir até $R = \infty$, e todo espaço-tempo será, finalmente, de Sitter.

Deve-se notar que neste caso sempre temos $V''(R_c, L_c, \gamma) < 0$, ou seja, nenhuma estrela estável existe.

Tabela 5.1: Alguns valores de R_c e L_c como função de γ para $\Lambda \neq 0$ and $m = 0$.

γ	R_c	L_c
0.0	0.9283177667	0.9587624669
0.1	0.9199519160	0.9535623390
0.2	0.9100298584	0.9473109395
0.3	0.8981404718	0.9397043233
0.4	0.8837277541	0.9303202778
0.5	0.8660254039	0.9185586537
0.6	0.8439546889	0.9035435931
0.7	0.8159607706	0.8839575014
0.8	0.7797433156	0.8577474304
0.9	0.7318025503	0.8215821352
1.0	0.6666666667	0.7698003592
1.1	0.5756295655	0.6922956261
1.2	0.4452231361	0.5703420705
1.3	0.2598914458	0.3713508347
1.4	0.0482828420	0.08734694771
2.6	0.4428889922	0.8012163331
2.7	0.5933418502	0.8478077860
2.8	0.6857500883	0.8784631649
2.9	0.7485495080	0.9002622198
3.0	0.7937005260	0.9164864251
5.0	0.9742903329	0.9881107444

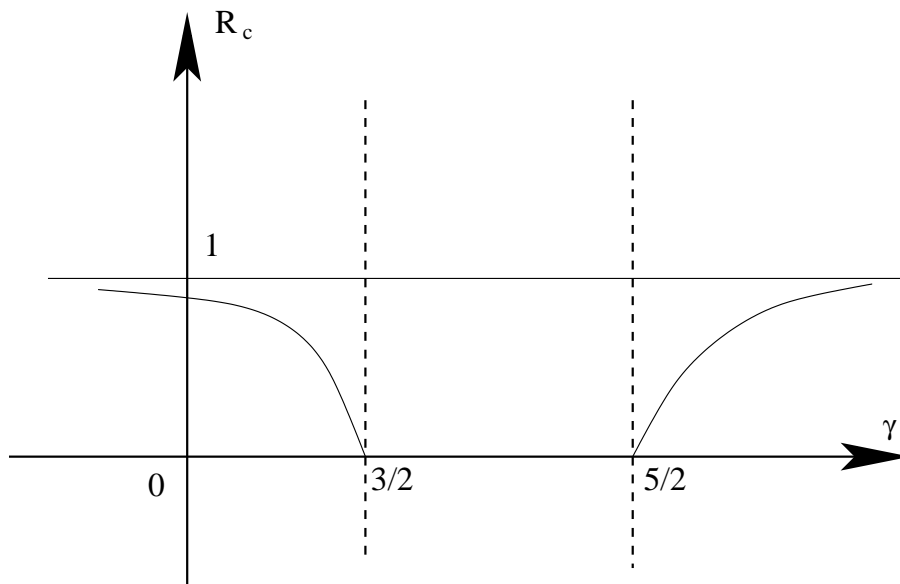


Figura 5.1: A função R_c definida na equação (5.17) para $m = 0$.

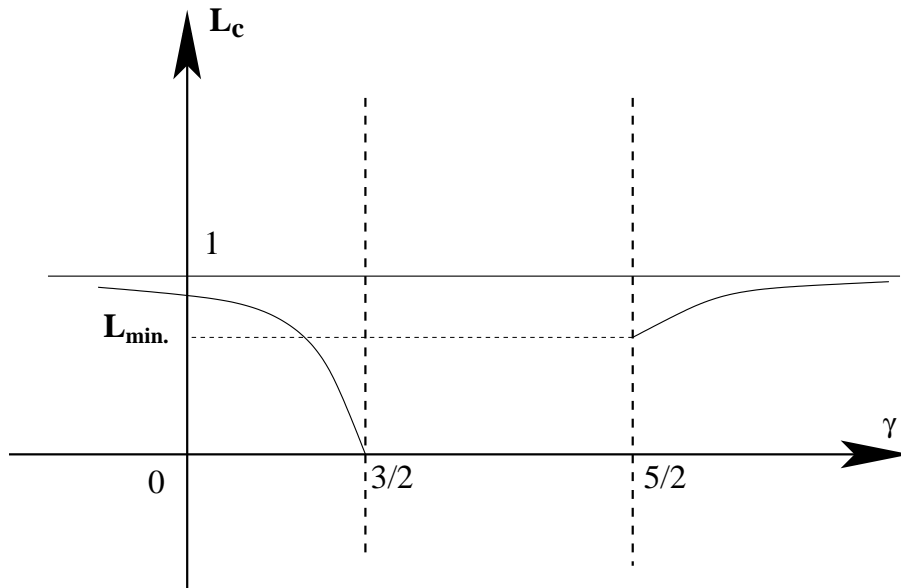


Figura 5.2: A função L_c definida na equação (5.18) para $m = 0$, onde $L_{min} = 1/\sqrt{2}$.

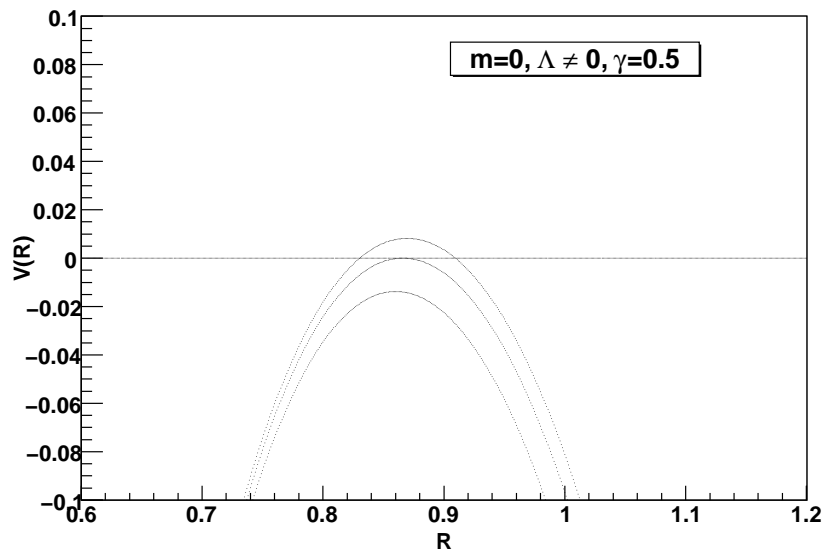


Figura 5.3: O potencial $V(R)$ para $m = 0$ e $\gamma = 0.5$. A linha superior é para $L > L_c$, a linha do meio para $L = L_c$, e a linha inferior para $L < L_c$.

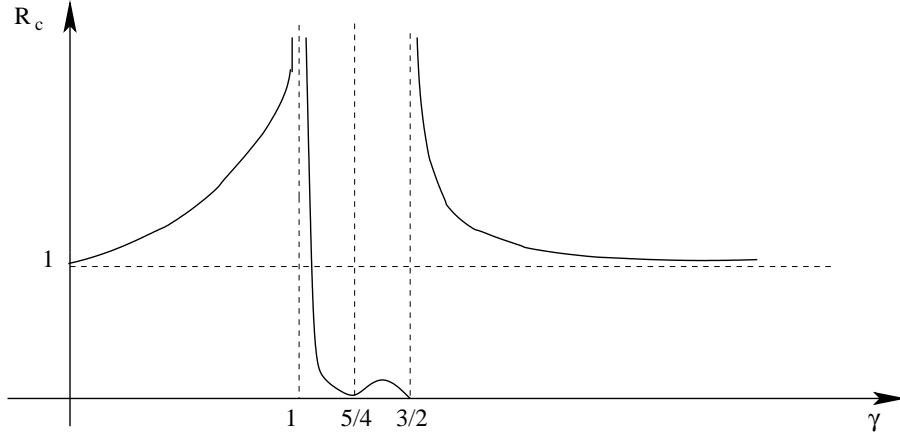


Figura 5.4: A função R_c definida na equação (5.21) para $\Lambda = 0$.

5.1.2 $\Lambda = 0$

Neste caso, a equação (5.13) reduz-se à

$$V(R, m, \gamma) = \frac{1}{8R^6} (4R^6 - 4mR^5 - R^{4\gamma} - 4R^{10-4\gamma}m^2), \quad (5.20)$$

a partir da qual encontramos que as equações $V(R) = 0$ e $V'(R) = 0$ possuem as soluções explícitas,

$$R_c(\gamma) = \left| \frac{4 - 4\gamma}{5 - 4\gamma} \right|^{\frac{1}{(2\gamma-3)}}, \quad (5.21)$$

$$m_c = \frac{1}{2} \sqrt{R_c^{2(4\gamma-5)} + \frac{4}{5-4\gamma} R_c^{4\gamma-4}}. \quad (5.22)$$

As figuras (5.4) e (5.5) mostram a dependência de R_c e m_c em γ . Os resultados obtidos no capítulo anterior são recuperados quando $\gamma = 0$ [108]. Alguns casos representativos são $\gamma = 0.5$ e $\gamma = 3.0$. Para $\gamma = 0.5$, encontramos que $m_c \approx 0.5443310540$ e $R_c \approx 1.224744871$, e para $\gamma = 3.0$ encontramos que $m_c \approx 0.5120894280$ e $R_c \approx 1.045515917$. Em ambos os casos, para $m > m_c$ o potencial $V(R)$ é estritamente negativo como mostram as figuras (5.6) e (5.7). Portanto, o colapso sempre forma buracos negros. Para $m = m_c$, existem duas diferentes possibilidades, dependendo da escolha do raio inicial R_0 . Em particular, se a estrela começa a colapsar com $R_0 > R_c$, o colapso irá se aproximar

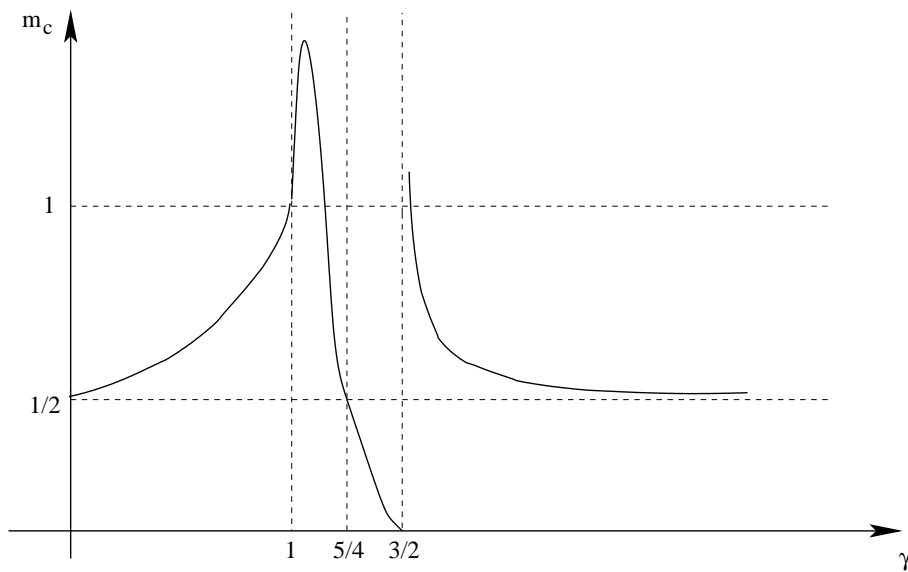


Figura 5.5: A função m_c definida na equação (5.22) para $\Lambda = 0$.

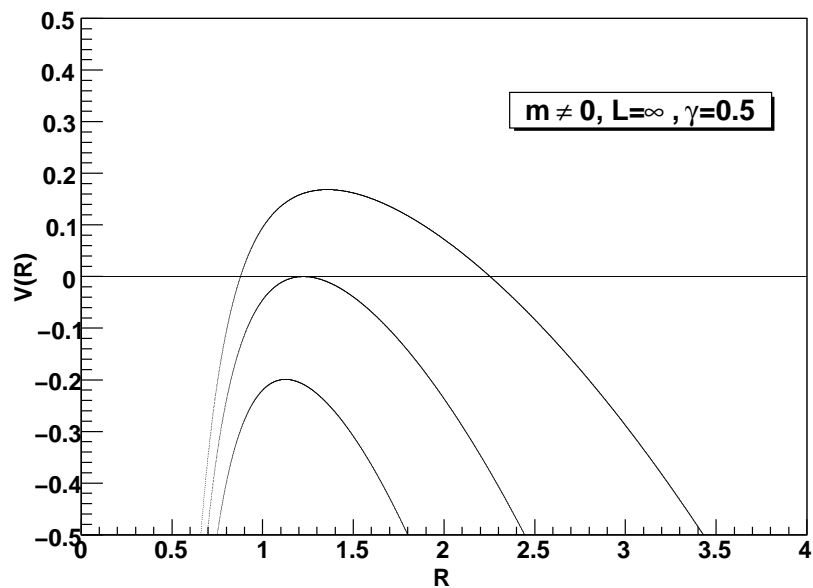


Figura 5.6: O potencial $V(R)$ para $\gamma = 0.5$. A linha superior é para $m < m_c$, a linha do meio é para $m = m_c$, e a linha inferior é para $m > m_c$.

Tabela 5.2: Alguns valores de R_c e m_c como funções de γ para $\Lambda = 0$ e $m \neq 0$

γ	R_c	m_c
0.0	1.077217345	0.5170643255
0.1	1.091490000	0.5199536485
0.2	1.110255191	0.5236577775
0.3	1.135692224	0.5285215890
0.4	1.171542463	0.5350989795
0.5	1.224744871	0.5443310540
0.6	1.309606309	0.5579387820
0.7	1.460581840	0.5794043665
0.8	1.784674184	0.6169244095
0.9	2.840468889	0.6956250340
1.0	∞	1.000000000
1.1	1.475575893	1.660022879
1.2	0.09921256570	1.190550789
1.3	0.01134023029	0.1360827636
1.4	0.007415771480	0.006591796870
1.5	Indefinido	Indefinido
1.6	3.625777848	14.80525970
1.7	3.017962339	1.043246245
1.8	1.867291683	0.7407438105
1.9	1.501970633	0.6398928165
2.0	1.333333333	0.5925925920
3.0	1.045515917	0.5120894280
4.0	1.017554577	0.5045725165
1.0×10^5	1.000000000	0.5000000000

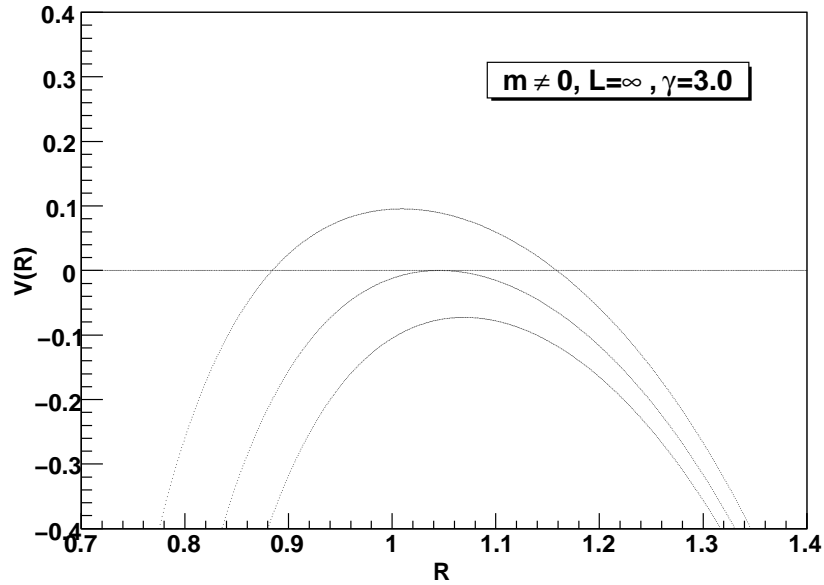


Figura 5.7: O potencial $V(R)$ para $\gamma = 3.0$. A linha superior é para $m < m_c$, a linha do meio é para $m = m_c$, e a linha inferior é para $m > m_c$.

assintoticamente do raio mínimo R_c . Uma vez que colapsa para este ponto, a casca irá parar de colapsar e permanecerá neste ponto para sempre. Porém, neste caso, este ponto é instável e quaisquer perturbações levarão a estrela a expandir para sempre e deixar para trás um espaço-tempo plano, ou levarão a estrela a colapsar até $R = 0$, quando um buraco negro de Schwarzschild finalmente será formado. Por outro lado, se a estrela começa a colapsar com $2m_c < R_0 < R_c$ como mostrado nas figuras (5.6) e (5.7), a estrela irá colapsar até um buraco negro ser formado. Para $m < m_c$, os potenciais $V(R)$ para cada caso possuem um máximo positivo, e a equação $V(R, m < m_c) = 0$ possui duas raízes positivas $R_{1,2}$ com $R_2 > R_1 > 0$. Há aqui duas possibilidades dependendo da escolha do raio inicial R_0 . Se $R_0 > R_2$, a estrela irá primeiro colapsar até o raio mínimo $R = R_2$ e posteriormente expandirá para o infinito, quando um espaço-tempo de Minkowski será finalmente formado. Se $2m < R_0 < R_1$, a estrela irá colapsar continuamente até $R = 0$, e um buraco negro será finalmente

Tabela 5.3: Alguns valores de m_c e L_c obtidos numericamente como função de γ no caso geral onde $\Lambda \neq 0$ e $m \neq 0$

γ	m_c	L_c
0.0	0.5170643255	2.8743398
0.1	0.5199536485	3.1000618
0.2	0.5236577775	3.3917341
0.3	0.5285215890	3.7828681
0.4	0.5350989795	4.3336020
0.5	0.5443310540	5.1626297
0.6	0.5579387820	6.5372013
0.7	0.5794043665	9.1891232
0.8	0.6169244095	15.8955019
0.9	0.6956250340	47.7590095
0.95	0.7788797565	166.7543222
0.99	0.9200729380	3906.8991705
0.991	0.9259539055	4823.955200
0.992	0.9320895460	6107.378535
0.993	0.9385115510	7981.5666867
0.994	0.9452603485	10873.01788
0.995	0.9523894295	15675.49526
0.996	0.9599731720	24531.28407
0.997	0.9681226815	43701.09808
0.998	0.9770238615	98596.55052
0.999	0.9870615640	395877.877549
0.9999	0.9982370395	0.3980357873×10^8
1.7	1.043246242	0.6064576241×10^8
3.0	0.5120894280	10410.51705
5.0	0.5023884065	6235.986909

formado.

Deve ser notado que, similarmente ao último caso, agora sempre temos $V''(R_c, m_c, \gamma) < 0$, que significa que nenhuma estrela estável existe neste caso também.

5.1.3 $m \neq 0$ e $\Lambda \neq 0$

Como mencionado anteriormente, a expressão analítica para L_c no caso presente é muito complicada para escrever aqui. Iremos, portanto, estudá-la nu-

mericamente. Nossa estratégia principal será começar com m_c obtido no caso $\Lambda = 0$, e então ir alterando gradualmente Λ . Fazemos o gráfico do potencial $V(R, m_c(\gamma), L, \gamma)$ como função de R para qualquer γ dado, pelo ajuste fino de L até encontrarmos o potencial característico de uma estrela de vácuo gravitante ou uma excursão ligada [veja as figuras (5.8), (5.9), (5.10) e (5.11)]. O valor L_c , como mostrado na tabela (5.3), é obtido numericamente e um gravastar estável é encontrado para um par específico (m_c, γ) .

Pode ser mostrado que ambos os tipos de estrelas de vácuo gravitante podem ser formados para $\gamma \in [0, 1)$. Mas para $\gamma \geq 1$, encontramos que para quaisquer valores de L e m somente buracos negros podem ser formados. Por exemplo, veja as figuras (5.19), (5.20), (5.21), (5.22), (5.23) e (5.24). Em particular, quando $\gamma \rightarrow 1$, encontramos que $L_c \rightarrow \infty$. Isto pode ser visto na tabela (5.3) e nas figuras (5.12), (5.13), (5.14), (5.15), (5.16), (5.17) e (5.18).

Nos casos em que podemos ter os dois tipos de estrelas de vácuo gravitante, é sempre possível encontrarmos configurações onde buracos negros são formados. Isto mostra claramente que mesmo que estrelas de vácuo gravitante existam, elas não excluem a existência de buracos negros.

5.2 Conclusões

Neste capítulo, foi generalizado o estudo feito no capítulo anterior no problema de estrelas de vácuo gravitante estáveis através da construção de modelos de três camadas de Visser-Wiltshire [70], que consiste de um espaço interno de de Sitter, uma casca dinâmica infinitesimal de um fluido perfeito com equação de estado $p = (1 - \gamma)\sigma$, e um espaço-tempo externo de Schwarzschild. Foi mostrado explicitamente que o final do colapso de um protótipo de estrela de vácuo gravitante pode ser um buraco negro, uma excursão limitada estável, uma estrela de vácuo gravitante estável, um espaço-tempo de Minkowski, ou um espaço-tempo de de Sitter, dependendo da massa total do sistema m , da constante

cosmológica Λ , e da posição inicial R_0 da casca fina dinâmica. Todas essas possibilidades possuem medições diferentes de zero no espaço de parâmetros m , $\Lambda(\neq 0)$, $\gamma(< 1)$ e R_0 , embora a região das estrelas de vácuo gravitante sejam muito pequenas em comparação aos dos buracos negros. Quando $\gamma \geq 1$ mesmo com $\Lambda \neq 0$, somente buracos negros são encontrados. Logo, pode-se concluir que embora a existência de estrelas de vácuo gravitante não possa ser completamente excluída destes modelos dinâmicos, elas não excluem a existência de buracos negros.

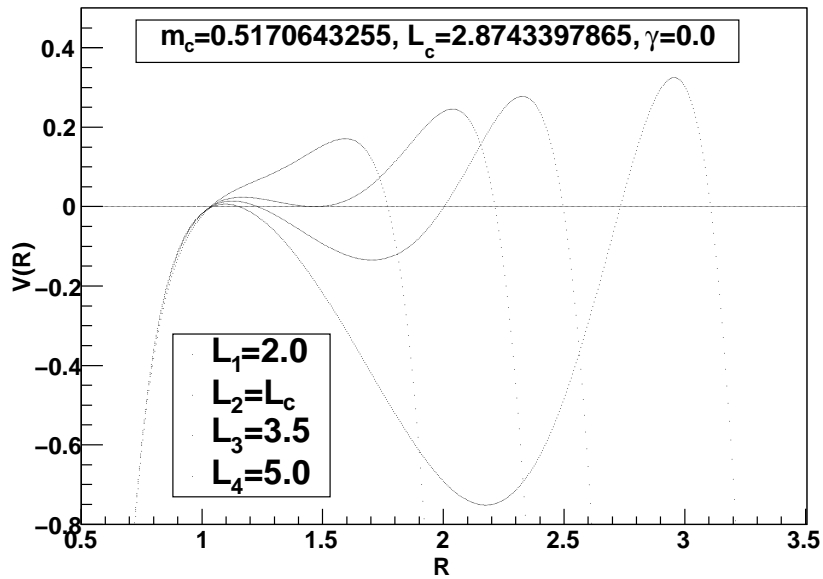


Figura 5.8: O potencial $V(R)$ para $\gamma = 0$ com alguns valores de L próximos do ponto crítico $L = L_c$. As curvas, a partir da linha superior para a linha inferior, representam L_1 a L_4 , respectivamente.

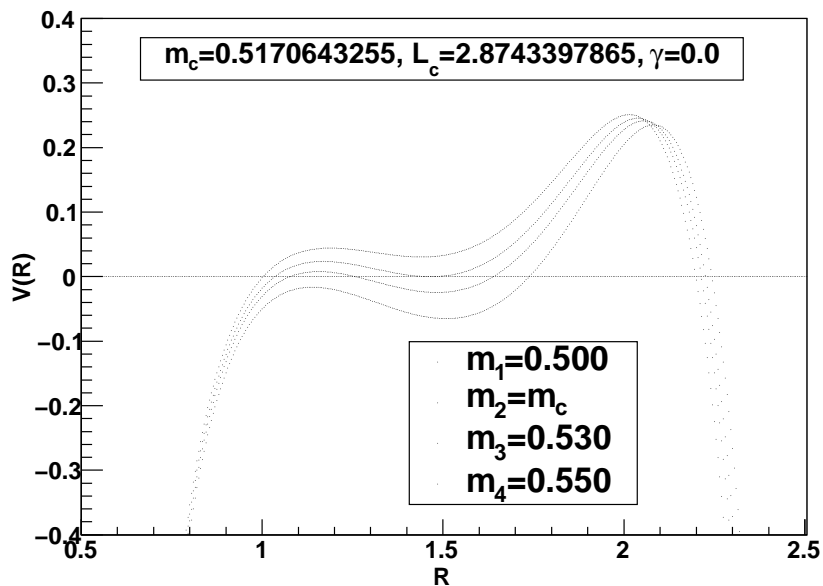


Figura 5.9: O potencial $V(R)$ para $\gamma = 0$ com alguns valores de m próximos do ponto crítico $m = m_c$. As curvas, a partir da linha superior para a linha inferior, representam m_1 a m_4 , respectivamente.

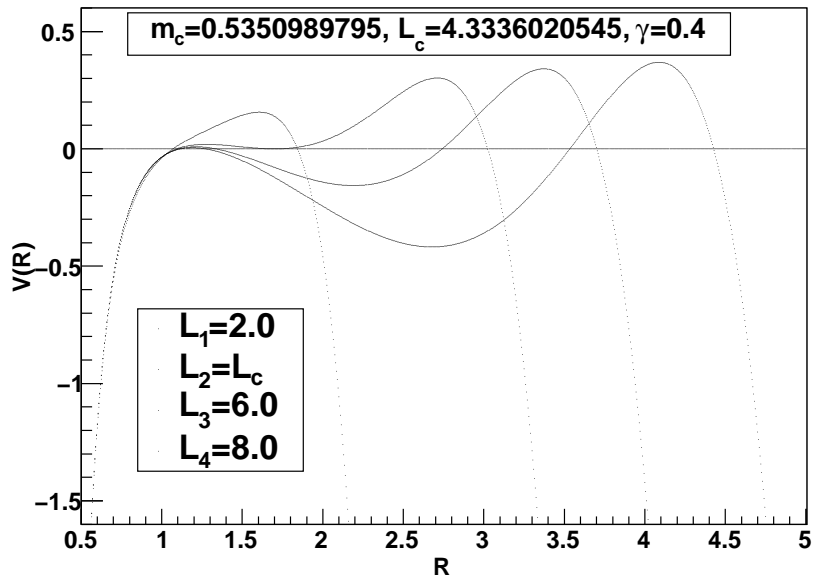


Figura 5.10: O potencial $V(R)$ para $\gamma = 0.4$ com alguns valores de L próximos do ponto crítico $L = L_c$. As curvas, a partir da linha superior para a linha inferior, representam L_1 a L_4 , respectivamente.

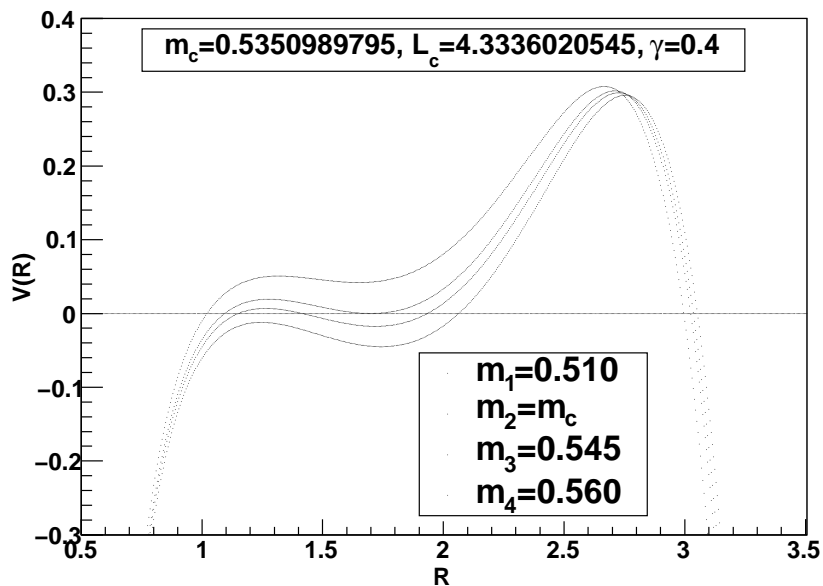


Figura 5.11: O potencial $V(R)$ para $\gamma = 0.4$ com alguns valores de m próximos do ponto crítico $m = m_c$. As curvas, a partir da linha superior para a linha inferior, representam m_1 a m_4 , respectivamente.

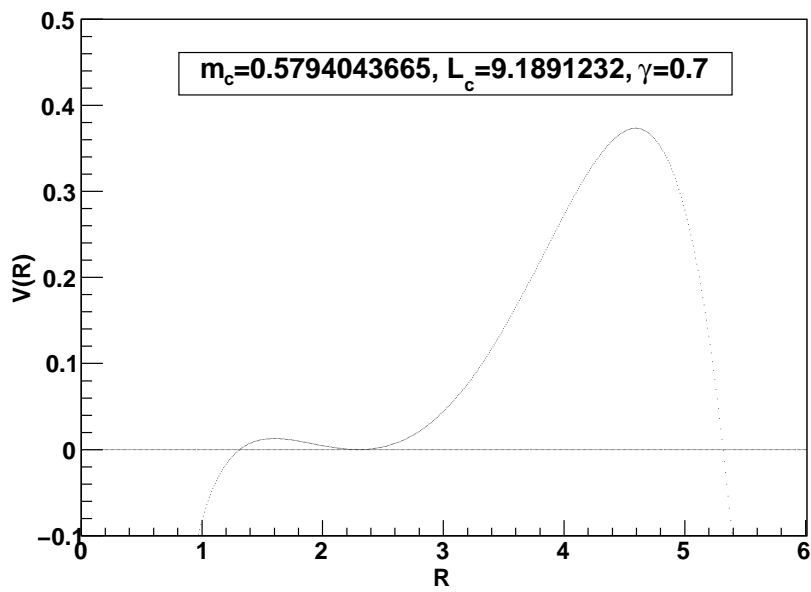


Figura 5.12: O potencial $V(R)$ para $\gamma = 0.7$

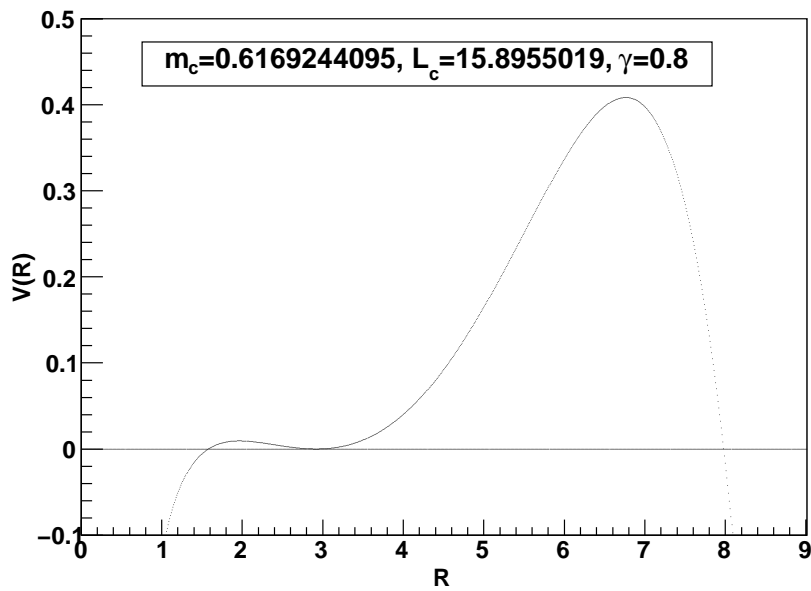


Figura 5.13: O potencial $V(R)$ para $\gamma = 0.8$.

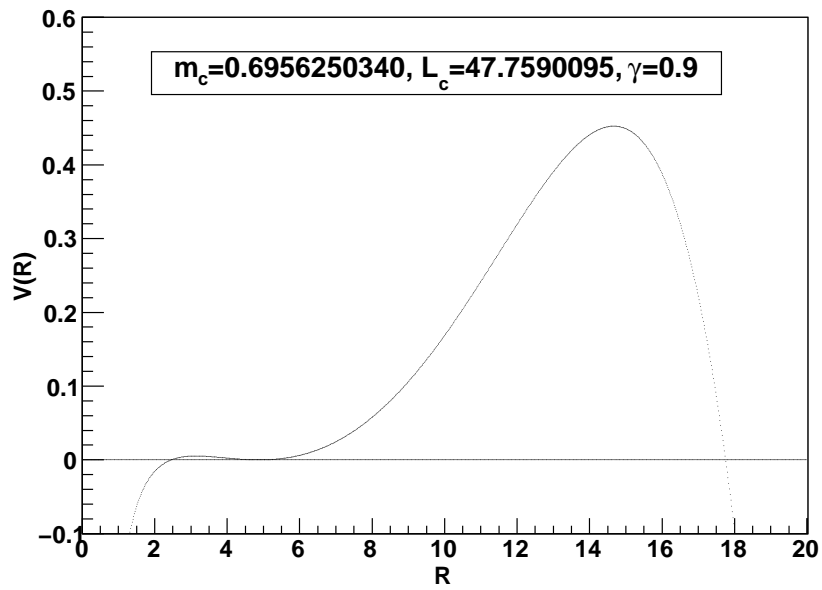


Figura 5.14: O potencial $V(R)$ para $\gamma = 0.9$.

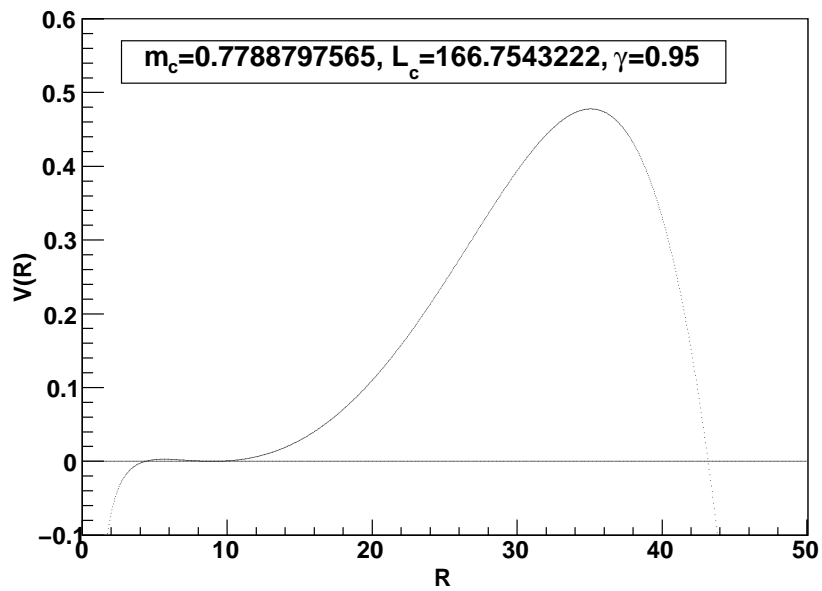


Figura 5.15: O potencial $V(R)$ para $\gamma = 0.95$.

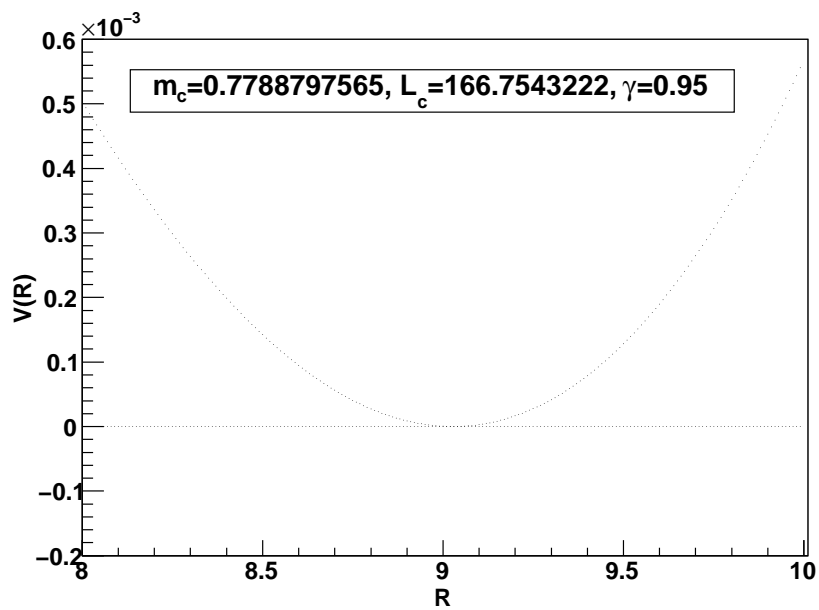


Figura 5.16: O potencial $V(R)$ para $\gamma = 0.95$ próximo do seu ponto mínimo.

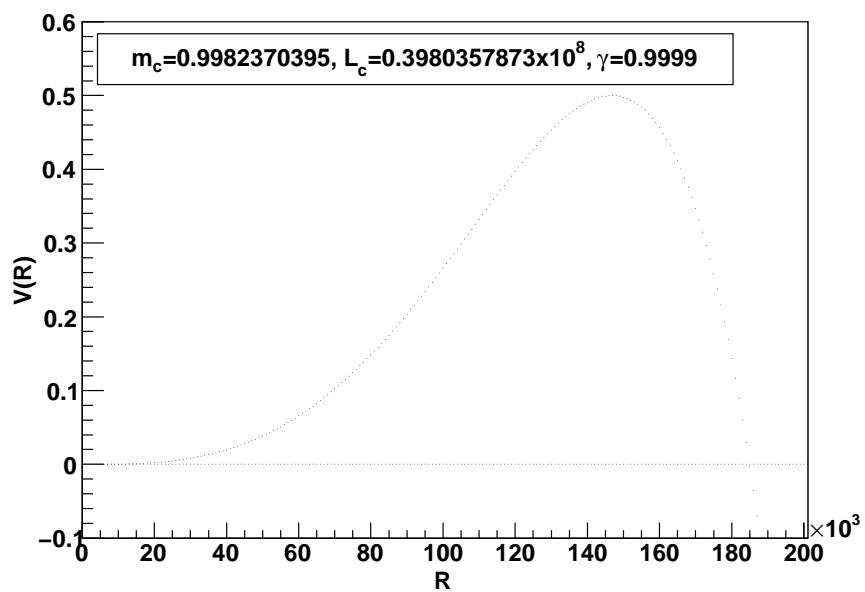


Figura 5.17: O potencial $V(R)$ para $\gamma = 0.9999$

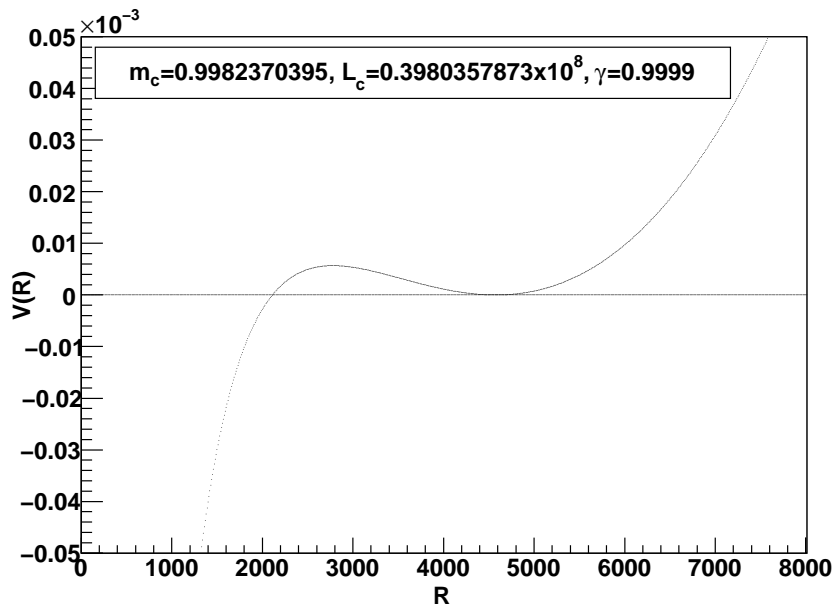


Figura 5.18: O potencial $V(R)$ para $\gamma = 0.9999$ próximo do seu ponto mínimo.

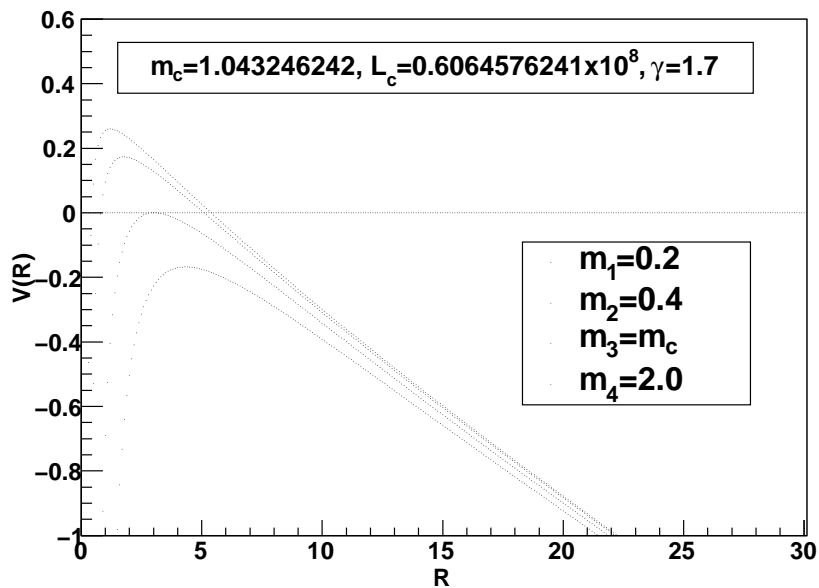


Figura 5.19: O potencial $V(R)$ para $\gamma = 1.7$. As curvas, da linha superior para inferior, representam m_1 a m_4 , respectivamente.

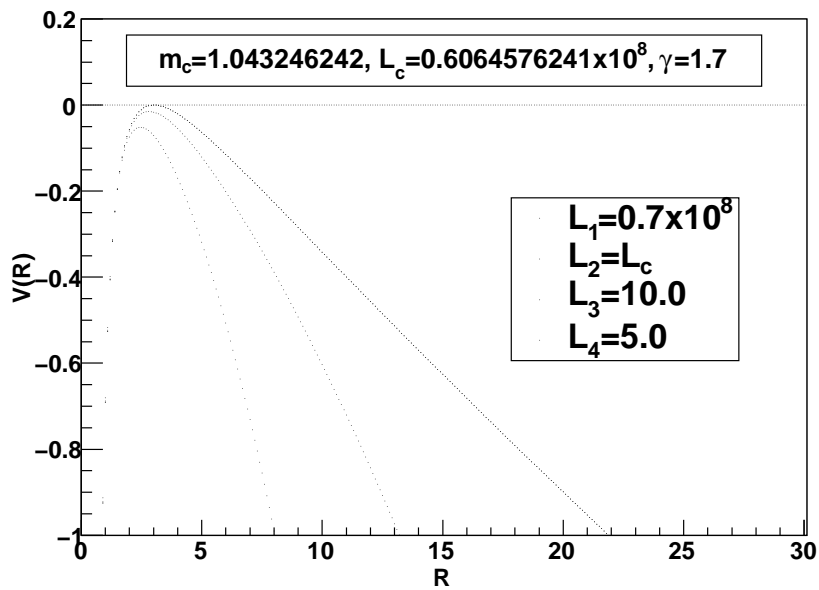


Figura 5.20: O potencial $V(R)$ para $\gamma = 1.7$. As curvas, da linha inferior para a linha superior representam L_4 a L_1 , respectivamente, onde as curvas L_1 e L_2 coincidem. Qualquer curva de potencial onde $L > L_c$ irá coincidir com a curva de potencial onde $L = L_c$

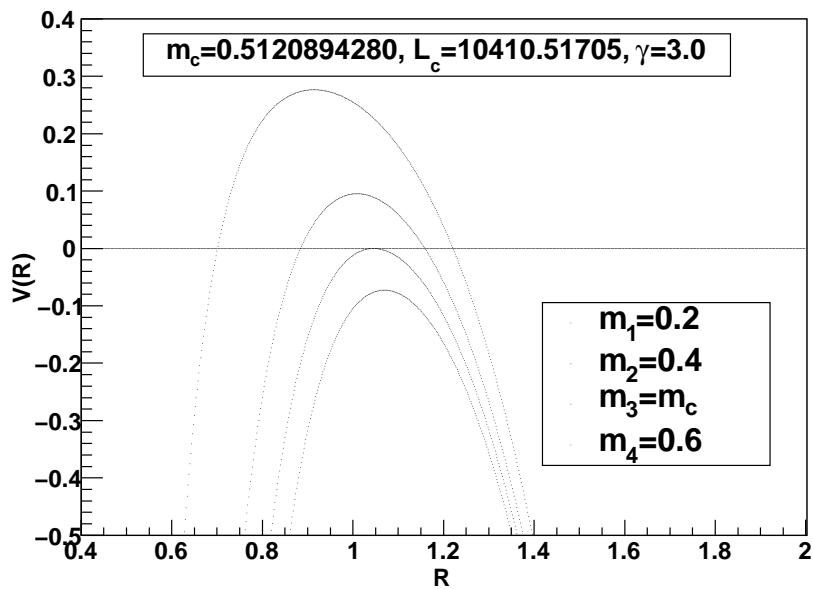


Figura 5.21: O potencial $V(R)$ para $\gamma = 3.0$. As curvas, da linha superior para inferior, representam m_1 a m_4 , respectivamente.

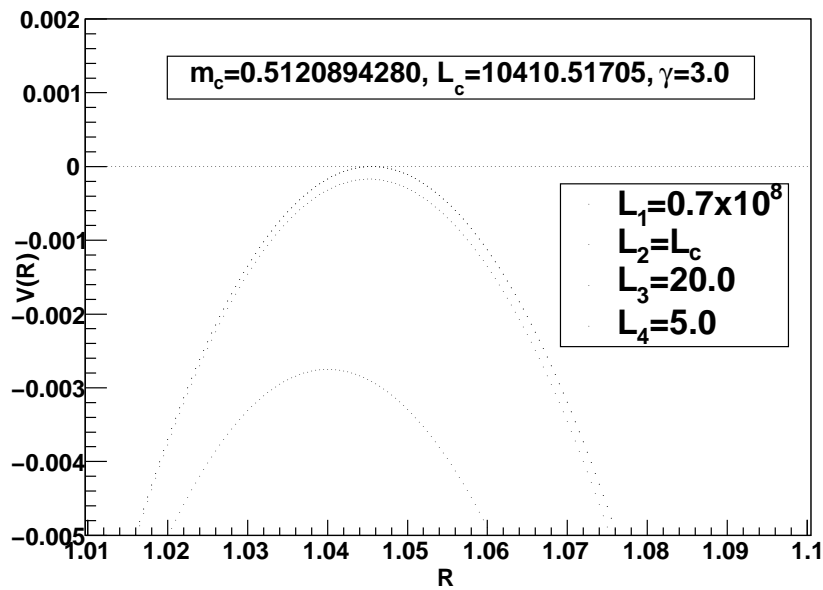


Figura 5.22: O potencial $V(R)$ para $\gamma = 3.0$. As curvas, da linha inferior para a linha superior representam L_4 a L_1 , respectivamente, onde as curvas L_1 e L_2 coincidem. Qualquer curva de potencial onde $L > L_c$ irá coincidir com a curva de potencial onde $L = L_c$.

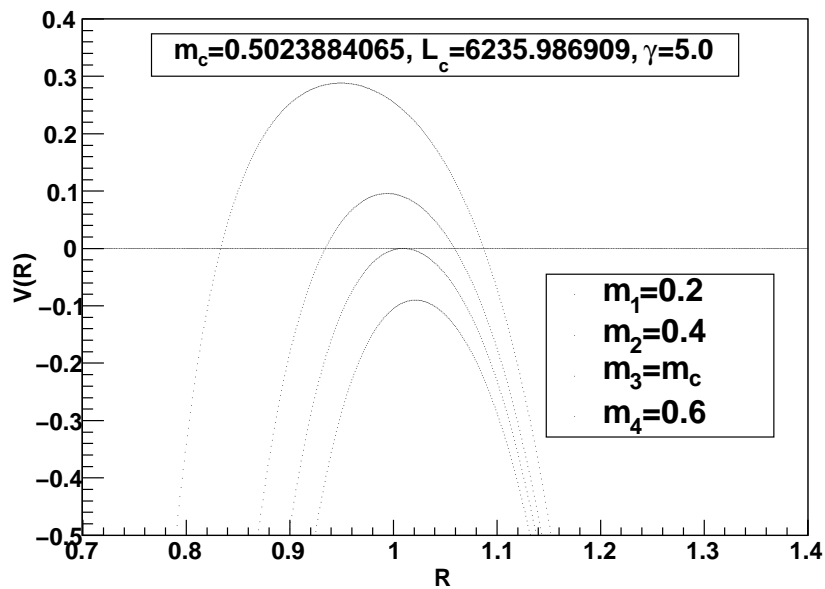


Figura 5.23: O potencial $V(R)$ para $\gamma = 5.0$. As curvas, da linha superior para inferior, representam m_1 a m_4 , respectivamente.

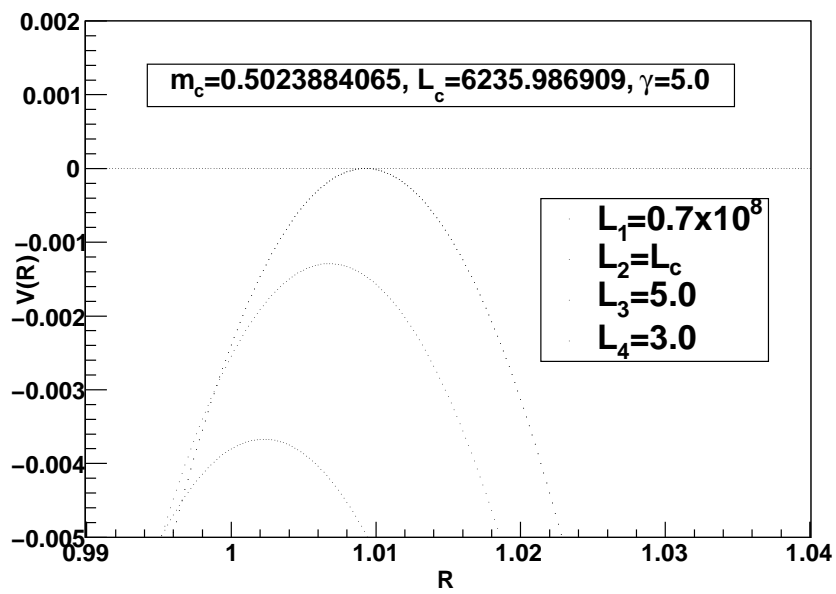


Figura 5.24: O potencial $V(R)$ para $\gamma = 5.0$. As curvas, da linha inferior para a linha superior representam L_4 a L_1 , respectivamente, onde as curvas L_1 e L_2 coincidem. Qualquer curva de potencial onde $L > L_c$ irá coincidir com a curva de potencial onde $L = L_c$.

Capítulo 6

Estrelas de vácuo gravitante estáveis de energia escura anisotrópica

Neste capítulo, generalizaremos os trabalhos dos dois capítulos anteriores [108, 109] para o caso onde a equação de estado da casca infinitesimal é dada por $p = (1-\gamma)\sigma$ com γ sendo uma constante, o interior consiste de um fluido de energia fantasma [79], enquanto o exterior continua sendo o espaço descrito pela métrica de Schwarzschild. Iremos primeiramente construir modelos dinâmicos de três camadas, e então mostraremos que ambos os tipos de gravastars e buracos negros existem para várias situações [110]. Este capítulo é organizado como segue: Primeiramente apresentaremos as métricas dos espaços-tempos interior e exterior, e escreveremos o movimento da casca fina na forma da equação $\frac{1}{2}\dot{a}^2 + V(a) = 0$. Posteriormente mostraremos as definições de energia escura e de energia fantasma para o fluido interior e para a casca. Em seguida discutiremos a formação de buracos negros a partir da energia padrão e da energia fantasma para analisarmos a formação do gravastar ou da estrela normal a partir de energia padrão ou fantasma. Posteriormente estudaremos casos especiais onde não podemos ter modelos "excursão limitada" para finalmente apresentaremos as conclusões obtidas com este trabalho.

6.1 Protótipo dinâmico do modelo de gravastar de energia escura

O fluido interior é feito de uma energia escura anisotrópica com uma métrica dada pelo modelo de Lobo visto no capítulo 3 [79]

$$ds_-^2 = -f_1 dt^2 + f_2 dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (6.1)$$

onde $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2$, e

$$\begin{aligned} f_1 &= (1 + br^2)^{\frac{1-\omega}{2}} (1 + 2br^2)^\omega, \\ f_2 &= \frac{1 + 2br^2}{1 + br^2}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

onde ω é uma constante, e seu significado físico pode ser visto da equação (6.3). Como a massa é dada por $\bar{m}(r) = br^3/[2(1 + 2br^2)]$ então temos que $b > 0$. A densidade de energia correspondente ρ , as pressões radial e tangencial p_r e p_t são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} p_r &= \omega\rho = \left(\frac{\omega b}{8\pi}\right) \left(\frac{3 + 2br^2}{(1 + 2br^2)^2}\right), \\ p_t &= -\left(\frac{b}{8\pi}\right) \left(\frac{\omega(3 + 2br^2)}{(1 + 2br^2)^2}\right) + \frac{b^2 r^2}{32\pi [(1 + 2br^2)^3(1 + br^2)]} \times \\ &\quad \left\{ (1 + \omega)(3 + 2br^2) [(1 + 3\omega) + 2br^2(1 + \omega)] \right. \\ &\quad \left. - 8\omega(5 + 2br^2)(1 + br^2) \right\}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

O espaço-tempo exterior é dado pela métrica de Schwarzschild

$$ds_+^2 = -f dv^2 + f^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (6.4)$$

onde $f = 1 - 2m/r$. A métrica da hipersuperfície na camada é dada por

$$ds_\Sigma^2 = -d\tau^2 + R^2(\tau)d\Omega^2. \quad (6.5)$$

Como $ds_-^2 = ds_+^2 = ds_\Sigma^2$, encontramos que $r_\Sigma = r_\Sigma = R$, e

$$f_1 \dot{t}^2 - f_2 \dot{R}^2 = 1, \quad (6.6)$$

$$f \dot{v}^2 - \frac{\dot{R}^2}{f} = 1, \quad (6.7)$$

onde o ponto denota a diferenciação ordinária com relação ao tempo próprio. Por outro lado, os vetores normais interior e exterior à camada fina são dados por

$$\begin{aligned} n_{\alpha}^{-} &= (-\dot{R}, \dot{t}, 0, 0), \\ n_{\alpha}^{+} &= (-\dot{R}, \dot{v}, 0, 0). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Logo, a curvatura extrínseca interior e exterior são dadas por

$$\begin{aligned} K_{\tau\tau}^{-} &= \frac{1}{2}(1 + bR^2)^{-\omega/2}\dot{t} \left\{ \left[4(1 + bR^2)^{\omega/2}bR^2\dot{R}^2 + 2(1 + bR^2)^{\omega/2}\dot{R}^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. (1 + 2bR^2)^{\omega}\sqrt{1 + bR^2}bR^2\dot{t}^2 - (1 + 2bR^2)^{\omega}\sqrt{1 + bR^2}\dot{t}^2 \right] (2bR^2\omega + 2bR^2 + 3\omega + 1) - \right. \\ &\quad \left. 2(1 + bR^2)^{\omega/2}(1 + 2bR^2)\dot{R}^2 \right\} (1 + 2bR^2)^{-2}(1 + bR^2)^{-1}bR + \dot{R}\ddot{t} - \ddot{R}\dot{t}, \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$K_{\theta\theta}^{-} = \frac{\dot{t}(1 + bR^2)R}{1 + 2bR^2}, \quad (6.10)$$

$$K_{\phi\phi}^{-} = K_{\theta\theta}^{-} \sin^2(\theta), \quad (6.11)$$

$$K_{\tau\tau}^{+} = \dot{v}(4m^2\dot{v}^2 - 4mR\dot{v}^2 - 3R^2\dot{R}^2 + R^2\dot{v}^2)(2m - R)^{-1}mR^{-3} + \dot{R}\ddot{v} - \ddot{R}\dot{v}, \quad (6.12)$$

$$K_{\theta\theta}^{+} = -\dot{v}(2m - R), \quad (6.13)$$

$$K_{\phi\phi}^{+} = K_{\theta\theta}^{+} \sin^2(\theta). \quad (6.14)$$

Novamente consideramos

$$[K_{\theta\theta}] = K_{\theta\theta}^{+} - K_{\theta\theta}^{-} = -M, \quad (6.15)$$

onde M é a massa da camada, e encontramos que

$$M = \dot{v}(2m - R) + \frac{\dot{t}(1 + bR^2)R}{1 + 2bR^2}. \quad (6.16)$$

Então, utilizando as equações (6.6) e (6.7) em (6.16) obtemos

$$M = -R \left(1 - \frac{2m}{R} + \dot{R}^2 \right)^{1/2} + R \frac{\left[1 + bR^2 + \dot{R}^2(1 + 2bR^2) \right]^{1/2}}{(1 + bR^2)^{-(\omega+1)/4}(1 + 2bR^2)^{(\omega+2)/2}}. \quad (6.17)$$

Para mantermos as idéias de Mazur e Mottola o mais fiel possível, consideramos a camada fina como consistindo de um fluido com uma equação de estado,

$p = (1 - \gamma)\sigma$, onde σ e p denotam, respectivamente, a energia da superfície e pressão da camada e γ é uma constante. Logo, a equação do movimento da camada é dada por [131]

$$\dot{M} + 8\pi R\dot{R}p = 4\pi R^2[T_{\alpha\beta}u^\alpha n^\beta] = \pi R^2 \left(T_{\alpha\beta}^+ u_+^\alpha n_+^\beta - T_{\alpha\beta}^- u_-^\alpha n_-^\beta \right), \quad (6.18)$$

onde u^α é a quadrivelocidade. Como o fluido interior é anisotrópico e o exterior é vácuo, obtemos

$$\dot{M} + 8\pi R\dot{R}(1 - \gamma)\sigma = 0. \quad (6.19)$$

Lembrando que $\sigma = M/(4\pi R^2)$, encontramos que a equação (6.19) possui a solução

$$M = kR^{2(\gamma-1)}, \quad (6.20)$$

onde k é uma constante de integração. Substituindo a equação (6.20) na equação (6.17), e reescalando m , b e R como

$$\begin{aligned} m &\rightarrow mk^{-\frac{1}{2\gamma-3}}, \\ b &\rightarrow bk^{\frac{2}{2\gamma-3}}, \\ R &\rightarrow Rk^{-\frac{1}{2\gamma-3}}, \end{aligned} \quad (6.21)$$

encontramos que a mesma pode ser escrita na forma da equação (1.10) com a substituído por R , e, então,

$$\begin{aligned} V(R, m, \omega, b, \gamma) &= -\frac{1}{2R^2 b_2 \left[b_2^{(\omega+1)} - b_1^{(\omega+1)/2} \right]^2} \left\{ b_2^{(\omega+2)} R^{4(\gamma-1)} b_1^{(\omega+1)/2} \right. \\ &\quad - 2b_2^{(3\omega+4)/2} R^{2(\gamma-1)} b_1^{(\omega+1)/4} \left[b_2^{(-\omega)} b_1^{(\omega+1)/2} R^2 - b_2^{-(\omega+1)} b_1^{(\omega+3)/2} R^2 \right. \\ &\quad \left. \left. - 2b_2^{(-\omega)} b_1^{(\omega+1)/2} mR + b_1 R^2 + b_2 R^2 + 2b_2 mR + b_2 R^{4(\gamma-1)} \right]^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + b_2^{(\omega+2)} R^2 b_1^{(\omega+1)/2} - b_2^{(2\omega+3)} R^2 - 2b_2^{(\omega+2)} mR b_1^{(\omega+1)/2} \right. \\ &\quad \left. + 2b_2^{(2\omega+3)} mR + b_2^{(2\omega+3)} R^{4(\gamma-1)} - b_1^{(\omega+2)} R^2 + b_2^{(\omega+1)} b_1^{(\omega+3)/2} R^2 \right\} \end{aligned} \quad (6.22)$$

onde

$$b_1 \equiv 1 + bR^2, \quad b_2 \equiv 1 + 2bR^2. \quad (6.24)$$

Claramente, para quaisquer constantes dadas m , ω , b e γ , a equação (6.23) determina unicamente o potencial de um protótipo de uma estrela de energia escura, generalizando a idéia da estrela de vácuo gravitante. Dependendo do valor inicial R_0 , também aqui o colapso pode formar um buraco negro, uma estrela de vácuo gravitante, um espaço-tempo de Minkowski ou um espaço-tempo preenchido por um fluido fantasma. No último caso, a camada fina primeiramente colapsa para um raio mínimo diferente de zero para posteriormente expandir para infinito. Para garantir que inicialmente o espaço-tempo não possui qualquer tipo de horizonte (cosmológico ou de eventos), devemos restringir R_0 à faixa,

$$R_0 > 2m, \quad (6.25)$$

onde R_0 é o raio inicial do colapso. Quando $m = 0 = b$, a camada fina desaparece, e todo o espaço-tempo é de Minkowski. Então, não iremos considerar este caso.

Como o potencial dado pela equação (6.23) é bastante complexo para ser estudado analiticamente, estudaremos o mesmo numericamente.

6.2 Classificações de Matéria, Energia Escura, e Energia Fantasma para fluidos anisotrópicos

Recentemente, a classificação de matéria, energia escura e energia fantasma para um fluido anisotrópico foi explicitada e discutida em termos das condições de energia [132]. Tal classificação é necessária para sistemas onde a anisotropia é importante, e os componentes de pressão podem ter contribuições bem distintas no que se refere à atratividade do fluido considerado. Neste capítulo, esta classificação é utilizada para o estudo do colapso gravitacional de protótipos dinâmicos de gravastars, ou melhor, estrelas de energia escura, construídos na seção anterior. Em particular, definimos energia escura como um fluido que viola a condição de energia forte (SEC). Da equação de Ray-

Tabela 6.1: Esta tabela resume a classificação do campo de matéria no interior, baseada nas condições de energia [133], onde assumimos que $\rho \geq 0$.

Matéria	Condição 1	Condição 2	Condição 3
Matéria Normal	$\rho + p_r + 2p_t \geq 0$	$\rho + p_r \geq 0$	$\rho + p_t \geq 0$
Energia Escura	$\rho + p_r + 2p_t < 0$	$\rho + p_r \geq 0$	$\rho + p_t \geq 0$
Energia Fantasma Repulsiva	$\rho + p_r + 2p_t < 0$	$\rho + p_r < 0$	$\rho + p_t \geq 0$
Energia Fantasma Repulsiva	$\rho + p_r + 2p_t < 0$	$\rho + p_r \geq 0$	$\rho + p_t < 0$
Energia Fantasma Repulsiva	$\rho + p_r + 2p_t < 0$	$\rho + p_r < 0$	$\rho + p_t < 0$
Energia Fantasma Atrativa	$\rho + p_r + 2p_t \geq 0$	$\rho + p_r < 0$	$\rho + p_t \geq 0$
Energia Fantasma Atrativa	$\rho + p_r + 2p_t \geq 0$	$\rho + p_r \geq 0$	$\rho + p_t < 0$
Energia Fantasma Atrativa	$\rho + p_r + 2p_t \geq 0$	$\rho + p_r < 0$	$\rho + p_t < 0$

Tabela 6.2: Esta tabela resume a classificação da matéria na camada fina, baseada nas condições de energia [133]. A última coluna indica os valores particulares para o parâmetro γ , onde assumimos que $\rho \geq 0$.

Matéria	Condição 1	Condição 2	γ
Matéria Normal	$\sigma + 2p \geq 0$	$\sigma + p \geq 0$	-1 or 0
Energia Escura	$\sigma + 2p < 0$	$\sigma + p \geq 0$	7/4
Energia Fantasma Repulsiva	$\sigma + 2p < 0$	$\sigma + p < 0$	3
Energia Fantasma Atrativa	$\sigma + 2p \geq 0$	$\sigma + p < 0$	Não é possível

chaudhuri, podemos ver que a energia escura definida desta forma sempre exerce efeito divergente em geodésicas nulas ou do tipo-tempo. Por outro lado, definimos energia fantasma como um fluido que viola, pelo menos, uma das condições de energia nulas (NEC's). Iremos também distinguir a energia fantasma que satisfaz a SEC da energia fantasma que não satisfaz a SEC. À energia fantasma que satisfaz a SEC chamaremos de energia fantasma atrativa, enquanto que à energia fantasma que não a satisfaz chamaremos de energia fantasma repulsiva. Esta classificação é resumida na tabela (6.1).

Tendo em vista a completeza, na tabela (6.2) aplicamos esta classificação no campo de matéria localizada na camada fina enquanto que na tabela (6.3) combinamos todos os resultados das tabelas (6.1) e (6.2) e apresentamos todas as possibilidades.

Considerando as equações (6.1) e (6.3) para descrever estrelas de energia

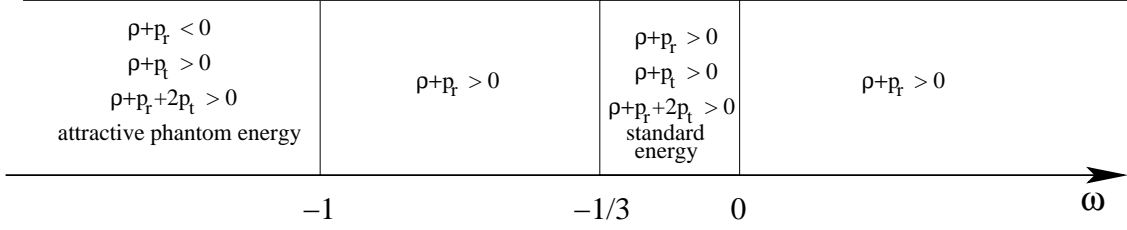


Figura 6.1: Nesta figura mostramos os intervalos de ω para os quais as condições fraca e forte de energia são independentes da coordenada R e do parâmetro b . A condição $\rho + p_r > 0$ é violada para $\omega < -1$ e satisfeita para $\omega > -1$, quaisquer que sejam os valores de R e b . As condições $\rho + p_t > 0$ e $\rho + p_r + 2p_t > 0$ são satisfeitas para $\omega < -1$ e $-1/3 < \omega < 0$, para quaisquer valores de R e b . Para outros intervalos de ω a análise das condições de energia dependem de uma relação complexa entre R e b .

escura devemos analisar cuidadosamente os intervalos do parâmetro ω que de fato fornecem os fluidos esperados. Pode ser mostrado que a condição $\rho + p_r > 0$ é violada para $\omega < -1$ e satisfeita para $\omega > -1$, para quaisquer valores de R e b . As condições $\rho + p_t > 0$ e $\rho + p_r + 2p_t > 0$ são satisfeitas para $\omega < -1$ e $-1/3 < \omega < 0$, para quaisquer valores de R e b . Para outros intervalos de ω as condições de energia dependem de relações bem complexas envolvendo R e b . Veja a figura (6.1). Isto nos fornece um exemplo explícito no qual a definição de energia escura deve ser tratada com muita cautela. Um outro caso foi mencionado na referência [132]. Note que no artigo [79], onde a solução foi utilizada pela primeira vez para modelar estrela de energia escura, o autor apresentou um caso particular com $\omega = -0.5$. Todavia, é simples ver graficamente que, para este valor de ω as condições fraca e forte de energia são satisfeitas para qualquer valor positivo do parâmetro b e da coordenada R . Assim, a solução correspondente não representa uma estrela de energia escura como afirmado pelo autor. Tomando vários valores de ω no intervalo $-1 < \omega < -1/3$ e $\omega > 0$, não fomos capazes de encontrar qualquer caso em que exista interior com energia escura.

Para satisfazer a condição de energia forte, $\sigma + 2p \geq 0$, para a camada e assumindo que $p = (1 - \gamma)\sigma$ devemos ter que $\gamma \leq 3/2$. Por outro lado, para

satisfazer a condição de energia nula, $\sigma + p \geq 0$, obtemos $\gamma \leq 2$. Na discussão a seguir, iremos utilizar somente alguns valores particulares do parâmetro γ que são analisados neste capítulo. Veja a tabela (6.2).

Na próxima seção iremos discutir três possibilidades físicas para o tipo de sistema que pode ser formado a partir do estudo do potencial $V(R, m, \omega, b, \gamma)$: (a) Um buraco negro ou dispersão da matéria, (b) Gravastar ou estrela normal e (c) Buraco negro ou gravastar fantasma.

6.3 Buraco negro ou dispersão da matéria

Se $m > m_c$ o potencial $V(R)$ é estritamente negativo como mostram as figuras (6.4), (6.5), (6.8), (6.9), (6.12), (6.13), (6.16), (6.17), (6.20), (6.21), (6.24), (6.25), (6.28), (6.29), (6.32), (6.33), (6.36), (6.37), (6.38) e (6.39). Então, o colapso sempre forma buracos negros. Para $m = m_c$, há duas diferentes possibilidades, dependendo da escolha do raio inicial R_0 . Em particular, se a estrela começa a colapsar com $R_0 > R_c$, ela irá se aproximar do raio mínimo R_c . Uma vez que ela atinge este ponto, a camada irá parar de colapsar. Todavia, este ponto é instável e quaisquer pequenas perturbações levarão a estrela a se expandir para sempre e deixar para trás um espaço plano, ou colapsar até $R = 0$, quando um buraco negro de Schwarzschild é finalmente formado. Por outro lado, se a estrela começa a colapsar com $2m_c < R_0 < R_c$ como mostrado nestas figuras, a estrela colapsará até um buraco negro ser formado. Para $m < m_c$, os potenciais $V(R)$ para cada caso possui um máximo positivo, e a equação $V(R, m < m_c) = 0$ possui duas raízes positivas $R_{1,2}$ com $R_2 > R_1 > 0$. Há também duas possibilidades aqui, dependendo da escolha do raio inicial R_0 . Se $R_0 > R_2$, a estrela irá primeiro contrair ao seu raio mínimo $R = R_2$ e então expandirá para o infinito quando um espaço-tempo de Minkowski é finalmente formado. Se $2m < R_0 < R_1$, a estrela irá colapsar continuamente até $R = 0$, e um buraco negro finalmente será formado.

6.4 Estrela de vácuo gravitante ou estrela normal

Neste caso o potencial toma a forma dada pelas figuras (6.2), (6.3), (6.6), (6.7), (6.10), (6.11), (6.14), (6.15), (6.18), (6.19), (6.22), (6.23), (6.26), (6.27), (6.30), (6.31), (6.34) e (6.35), a partir das quais pode ser visto que $V(R) = 0$ agora podendo ter uma, duas ou três raízes reais, dependendo da massa da camada. Para $m > m_c$ temos, digamos, R_i , onde $R_{i+1} > R_i$. Se escolhermos $R_0 > R_3$ (para $m = m_c$ temos $R_2 = R_3$), então a estrela não será permitida nesta região devido ao potencial ser maior que zero. Todavia, se escolhermos $R_1 < R_0 < R_2$, o colapso irá oscilar entre $R = R_1$ e $R = R_2$. Tal possibilidade é mostrada nestas figuras. Este é exatamente o modelo chamado de "excursão limitada" mencionado no artigo de Matt Visser e Wiltshire [70], e estudado em detalhes nos dois capítulos anteriores [108, 109]. Obviamente, em uma situação realística, a estrela emitirá tanto ondas gravitacionais como partículas de modo que o potencial será auto-ajustado para produzir um mínimo em $R = R_{static}$, onde $V(R = R_{static}) = 0 = V'(R = R_{static})$, quando uma estrela de vácuo gravitante ou uma estrela normal é finalmente formada [70, 108, 109], embora em [108, 109] o potencial tenda a $-\infty$ quando R tende a ∞ . Aqui existe uma grande diferença, já que o potencial agora tende a $+\infty$ quando R tende a ∞ . Assim, nos casos estudados aqui não temos situações em que a estrela expande deixando para trás um espaço-tempo plano, como em [108, 109].

6.5 Buraco negro ou estrela de vácuo gravitante fantasma

Neste caso o potencial toma a forma dada pelas figuras (6.40), (6.41), (6.42) e (6.43). Repare que temos a mesma forma do potencial nas figuras (6.40) e (6.42), onde há apenas a possibilidade de formação de buracos negros ou dispersão. Já nos casos mostrados nas figuras (6.41) e (6.43) vemos que o

potencial da curva inferior contém duas raízes reais R_1 e R_2 . Se escolhermos $R_0 > R_2$, então novamente a existência da estrela não será permitida nesta região, pois o potencial é maior do que zero. Todavia, se escolhermos $R_1 < R_0 < R_2$, o colapso irá oscilar entre $R = R_1$ e $R = R_2$ e temos a formação de gravastar. Se $R_0 < R_1$ o sistema irá colapsar até $R = 0$, quando um buraco negro de Schwarzschild finalmente é formado.

6.6 Conclusões

Neste capítulo, estudamos o problema da estabilidade de estrelas de energia escura contruídas semelhantemente às estrelas vácuo gravitante, através da construção de modelos de três camadas dinâmicas, como os de Visser e Wiltshire [70], que consiste em um fluido fantasma interno, uma camada fina dinâmica de fluido perfeito com equação de estado $p = (1 - \gamma)\sigma$, e um espaço de Schwarzschild externo.

Deve ser notado que, embora fluidos fantasmas tenham sido bastante utilizados para explicar a aceleração cósmica do universo, modelos microscópicos destes, tanto para fluidos perfeitos como para fluidos anisotrópicos, ainda não foram construídos, se é que poderão ser algum dia.

Foi mostrado explicitamente que o final do colapso pode ser um buraco negro, uma "excursão ligada" estável de estrela de vácuo gravitante (gravastar), um espaço-tempo de Minkowski, ou um espaço-tempo fantasma, dependendo da massa total m do sistema, do parâmetro ω , da constante b , do parâmetro γ e da posição inicial R_0 da camada dinâmica. Todas essas possibilidades possuem contagens diferentes de zero no espaço de parâmetros m , b , ω , γ e R_0 , embora a região das estrelas de vácuo gravitante seja bastante pequena em comparação com a região de buracos negros. Todos os resultados podem ser resumidos na tabela (6.3). Um resultado interessante que pode ser deduzido da tabela (6.3) é que podemos ter formação de buracos negros mesmo com um

interior de energia fantasma para qualquer valor de γ . Os resultados obtidos neste capítulo confirmam mais uma vez as previsões obtidas nos dois capítulos anteriores: *mesmo que a existência de estrelas de vácuo gravitante não possam ser completamente excluídas destes modelos dinâmicos, os resultados obtidos aqui indicam que, mesmo que estas estrelas realmente existam, elas não excluem a existência de buracos negros.*

Tabela 6.3: Esta tabela resume todos os tipos possíveis de energia do fluido interior e da camada. As estruturas estáveis são representadas pelos números das figuras em negrito.

Caso	Energia Interior	Energia da Camada	Figuras	Estruturas
A	Padrão	Padrão	6.2,6.3, 6.6,6.7, 6.10, 6.11, 6.14,6.15, 6.18,6.19	Estrela Normal
B	Padrão	Escura	6.4,6.8, 6.12,6.16, 6.20	Buraco Negro ou Dispersão
C	Padrão	Fantasma Repulsiva	6.5,6.9, 6.13,6.17, 6.21	Buraco Negro ou Dispersão
D	Escura	Padrão	—	Interior não encontrado
E	Escura	Escura	—	Interior não encontrado
F	Escura	Fantasma Repulsiva	—	Interior não encontrado
G	Fantasma Repulsiva	Escura	6.22,6.23, 6.26,6.27, 6.30,6.31, 6.35,6.34,	Gravastar
H	Fantasma Repulsiva	Escura	6.24,6.28, 6.32,6.36	Buraco Negro ou Dispersão
I	Fantasma Repulsiva	Fantasma Repulsiva	6.25,6.29, 6.33,6.37	Buraco Negro ou Dispersão
J	Fantasma Atrativa	Padrão	6.41, 6.43, 6.40, 6.42	Gravastar ou Buraco Negro
K	Fantasma Atrativa	Escura	6.38	Buraco Negro ou Dispersão
L	Fantasma Atrativa	Fantasma Repulsiva	6.39	Buraco Negro ou Dispersão

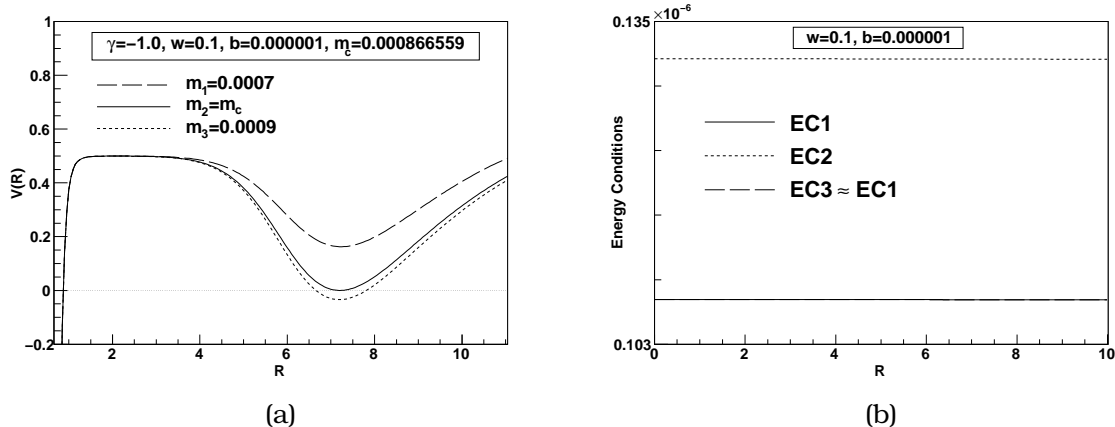


Figura 6.2: (a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = -1$, $\omega = 0.1$, $b = 0.000001$ and $m_c = 0.000866559$. **Caso A**

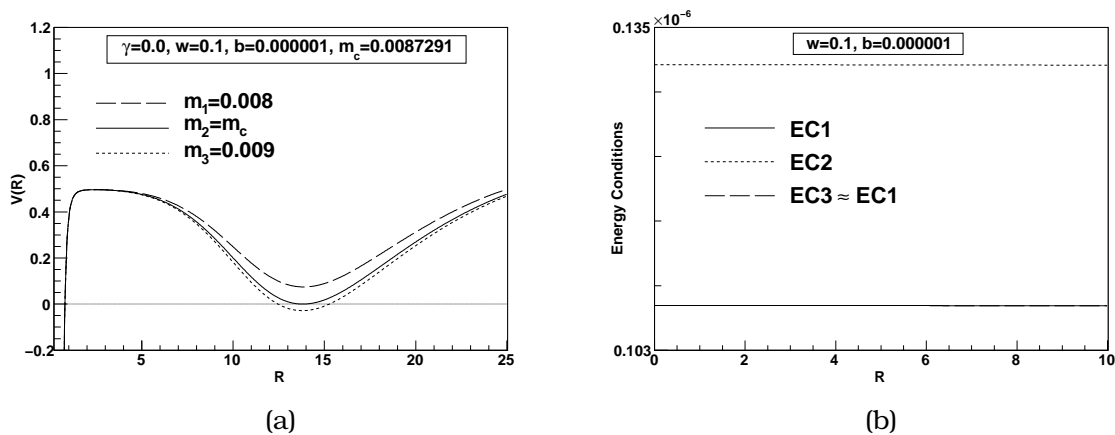
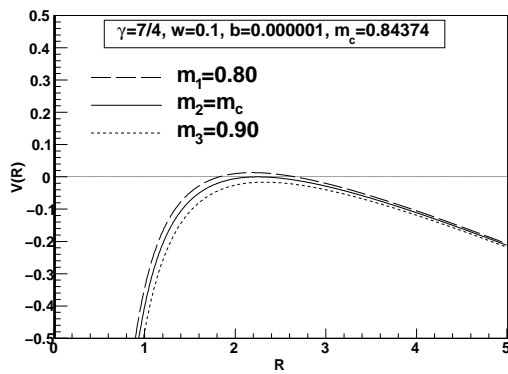
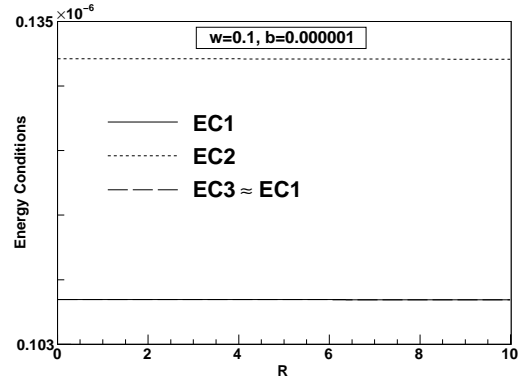


Figura 6.3: (a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 0$, $\omega = 0.1$, $b = 0.000001$ e $m_c = 0.0087291$. **Caso A**

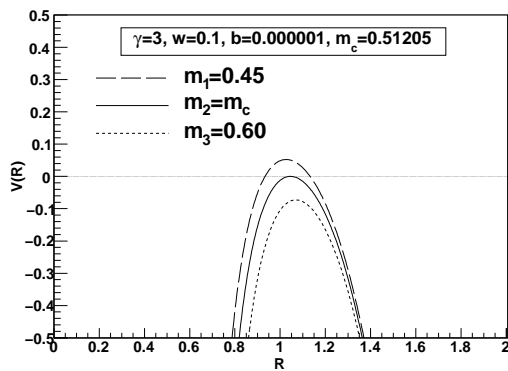


(a)

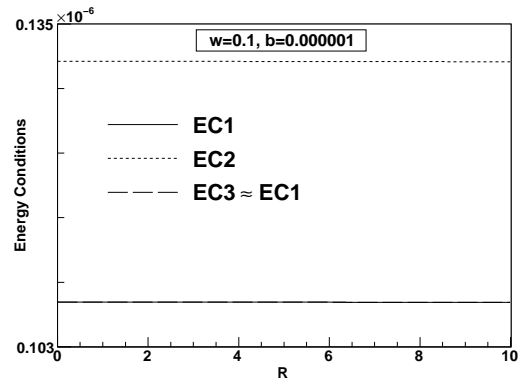


(b)

Figura 6.4: (a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 7/4$, $\omega = 0.1$, $b = 0.000001$ e $m_c = 0.84374$. **Caso B**

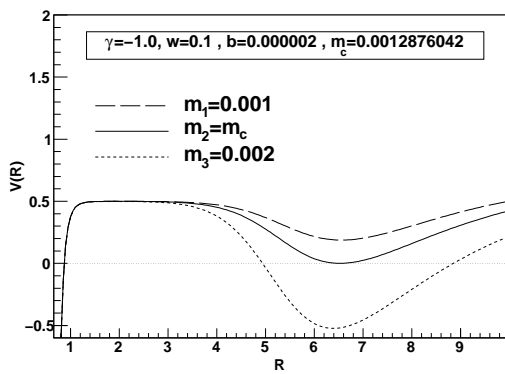


(a)

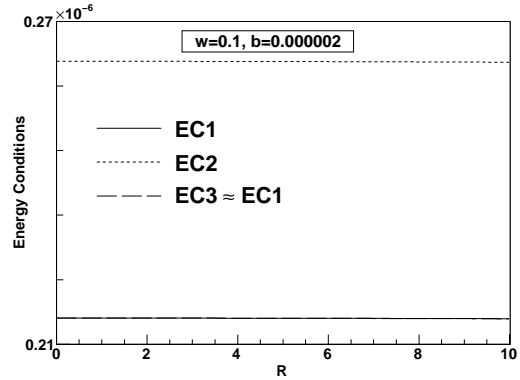


(b)

Figura 6.5: (a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 3$, $\omega = 0.1$, $b = 0.000001$ e $m_c = 0.51205$. **Caso C**



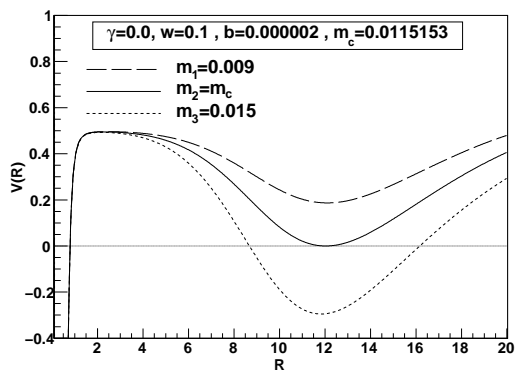
(a)



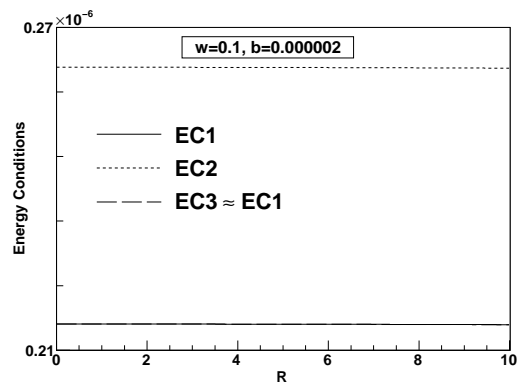
(b)

Figura 6.6: (a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = -1$, $\omega = 0.1$, $b = 0.000002$ e $m_c = 0.0012876042$.

Caso A



(a)



(b)

Figura 6.7: (a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 0$, $\omega = 0.1$, $b = 0.000002$ e $m_c = 0.0115153$.

A

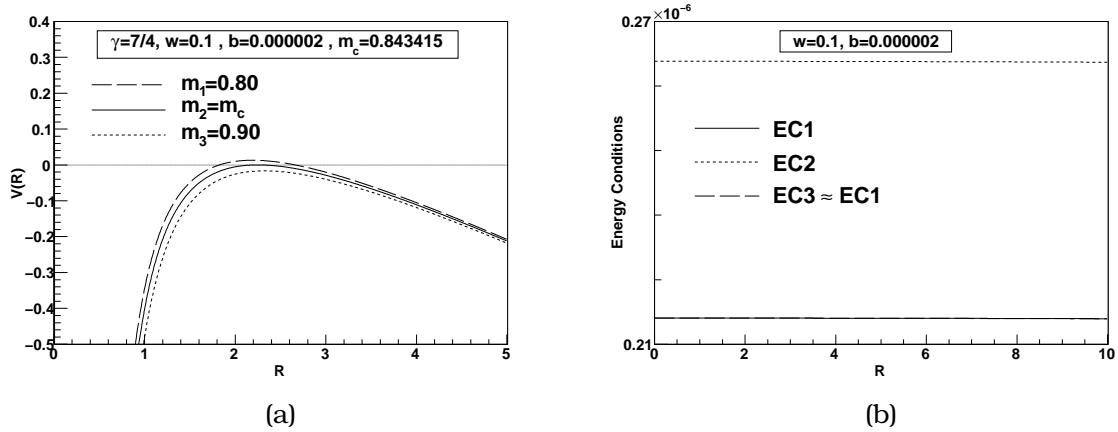


Figura 6.8: (a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 7/4$, $\omega = 0.1$, $b = 0.000002$ e $m_c = 0.843415$. **Caso B**

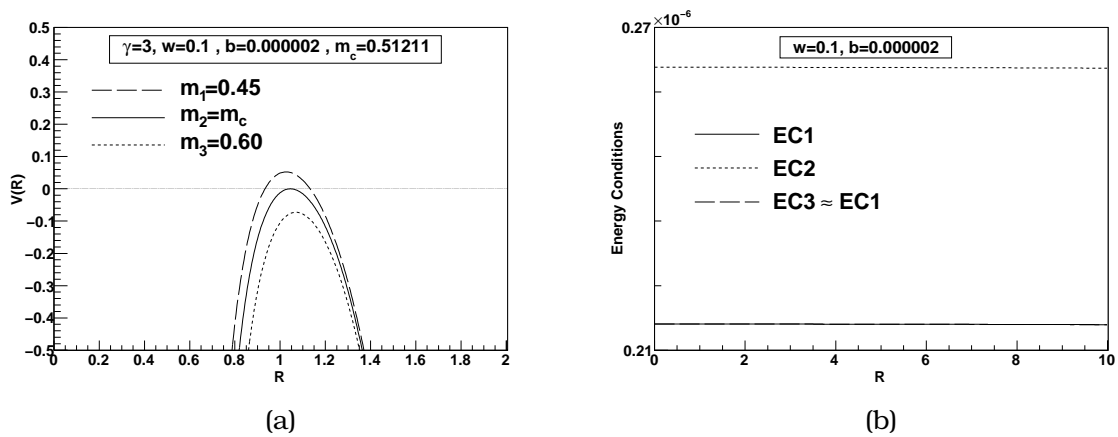
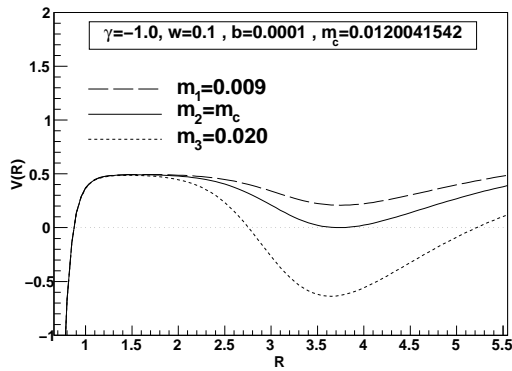
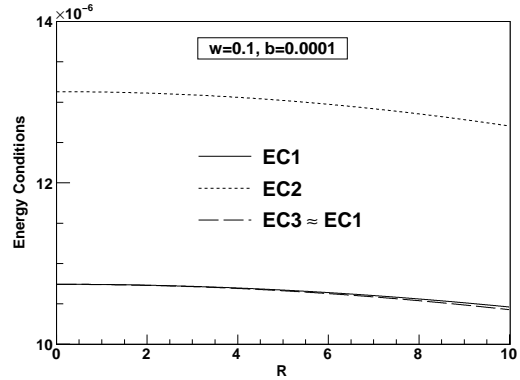


Figura 6.9: (a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 3$, $\omega = 0.1$, $b = 0.000002$ e $m_c = 0.51211$. **Caso C**

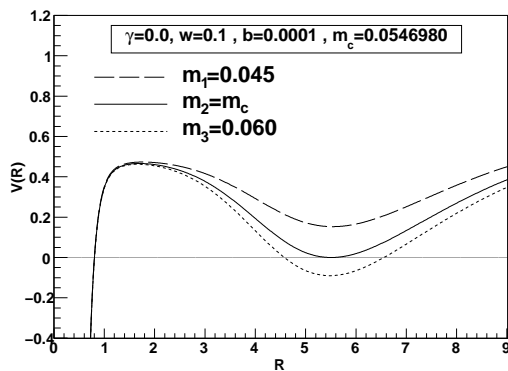


(a)

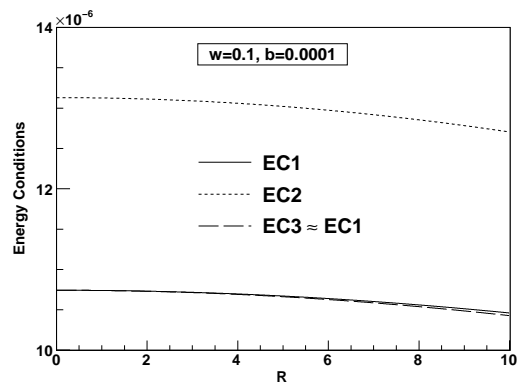


(b)

Figura 6.10: (a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = -1$, $\omega = 0.1$, $b = 0.0001$ e $m_c = 0.0120041542$. **Caso A**

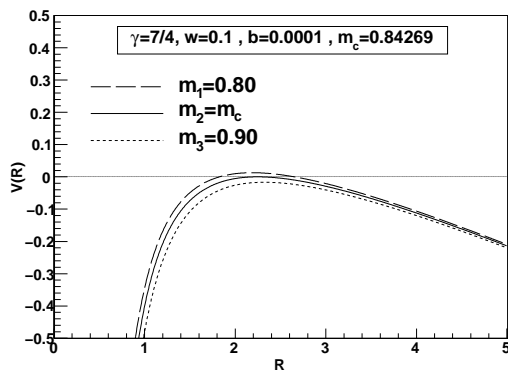


(a)

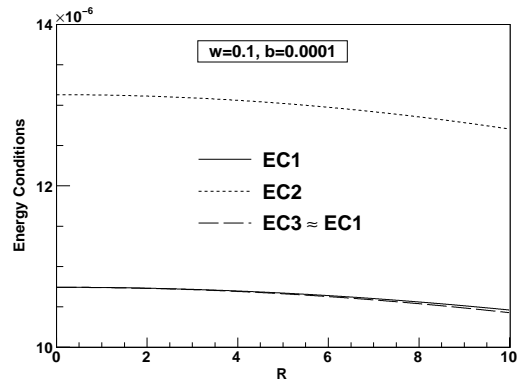


(b)

Figura 6.11: (a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 0$, $\omega = 0.1$, $b = 0.0001$ e $m_c = 0.0546980$. **Caso A**

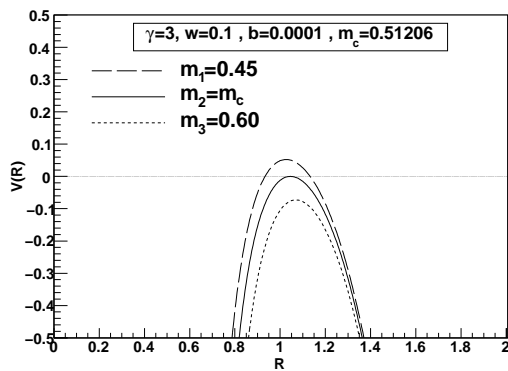


(a)

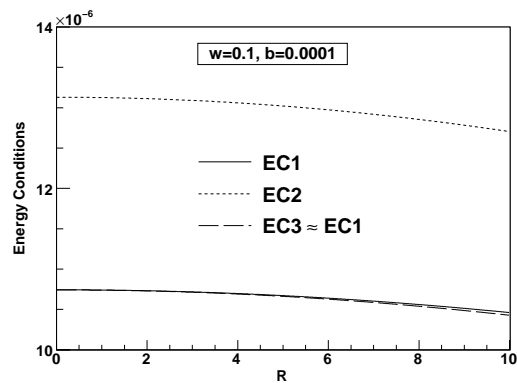


(b)

Figura 6.12: (a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 7/4$, $\omega = 0.1$, $b = 0.0001$ e $m_c = 0.84269$. **Caso B**

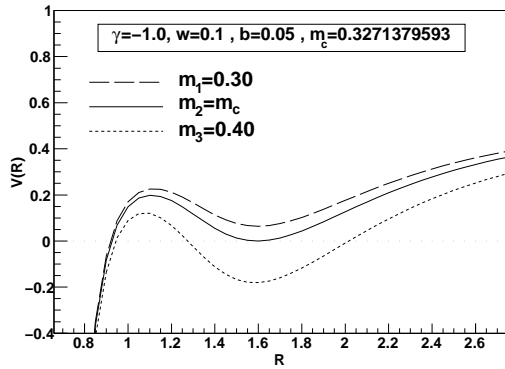


(a)

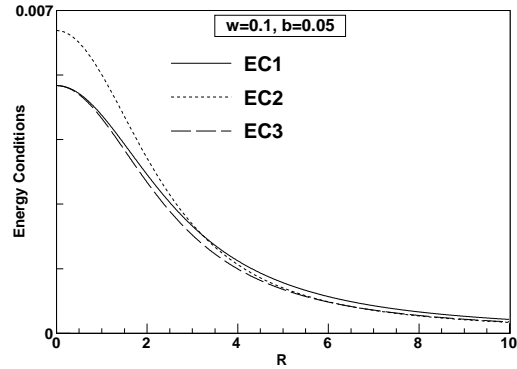


(b)

Figura 6.13: (a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 3$, $\omega = 0.1$, $b = 0.0001$ e $m_c = 0.51206$. **Caso C**



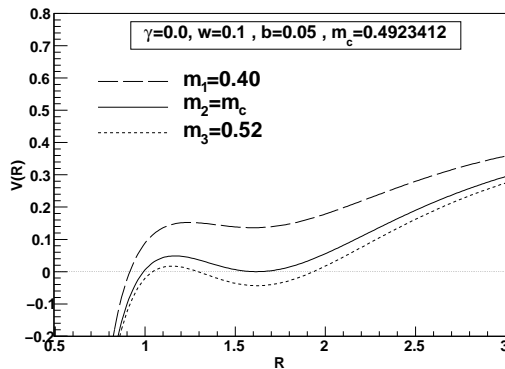
(a)



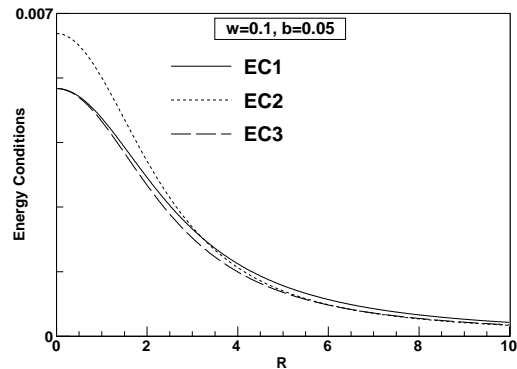
(b)

Figura 6.14: (a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = -1$, $\omega = 0.1$, $b = 0.05$ e $m_c = 0.3271379593$.

Caso A



(a)



(b)

Figura 6.15: (a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 0$, $\omega = 0.1$, $b = 0.05$ e $m_c = 0.4923412$. **Caso A**

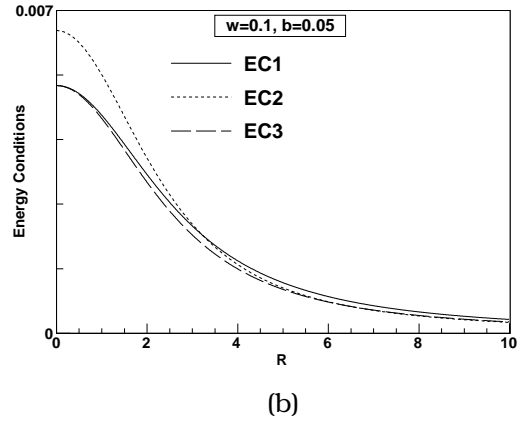
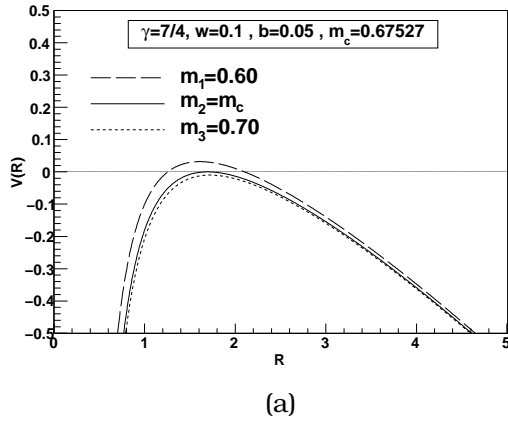


Figura 6.16: (a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 7/4$, $\omega = 0.1$, $b = 0.05$ e $m_c = 0.67527$. **Caso B**

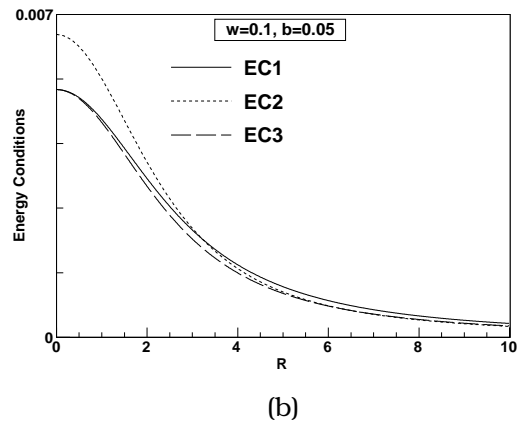
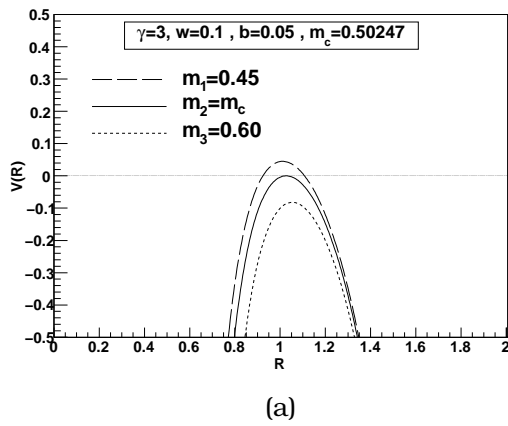
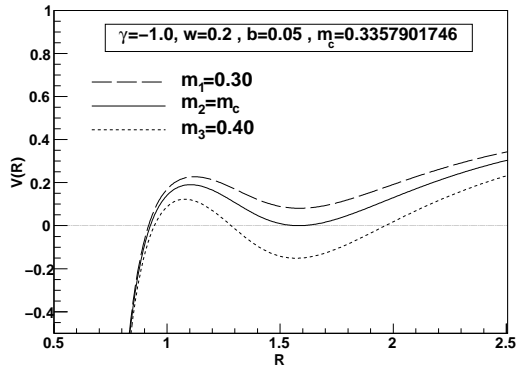
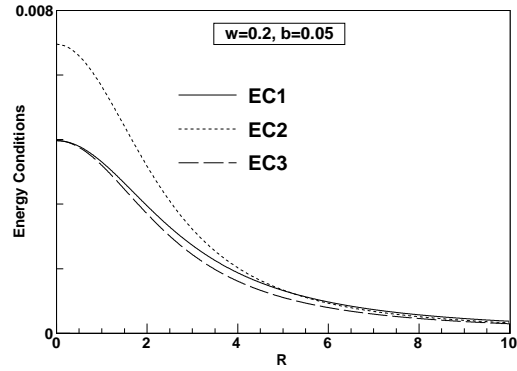


Figura 6.17: (a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 3$, $\omega = 0.1$, $b = 0.05$ e $m_c = 0.50247$. **Caso C**

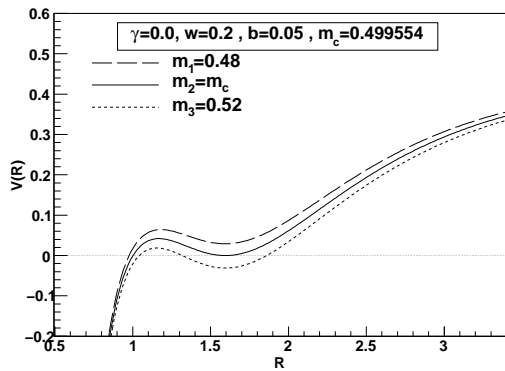


(a)

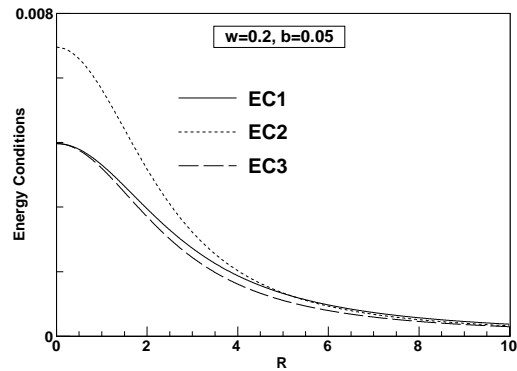


(b)

Figura 6.18: (a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = -1$, $\omega = 0.2$, $b = 0.05$ e $m_c = 0.3357901746$. **Caso A**



(a)



(b)

Figura 6.19: (a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 0$, $\omega = 0.2$, $b = 0.05$ e $m_c = 0.499554$. **Caso A**

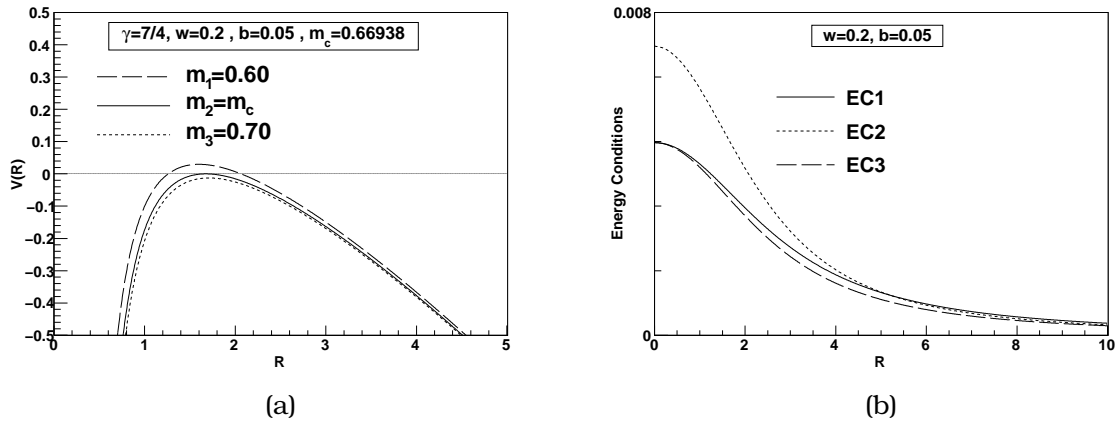


Figura 6.20: (a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 7/4$, $\omega = 0.2$, $b = 0.05$ e $m_c = 0.66938$. **Caso B**

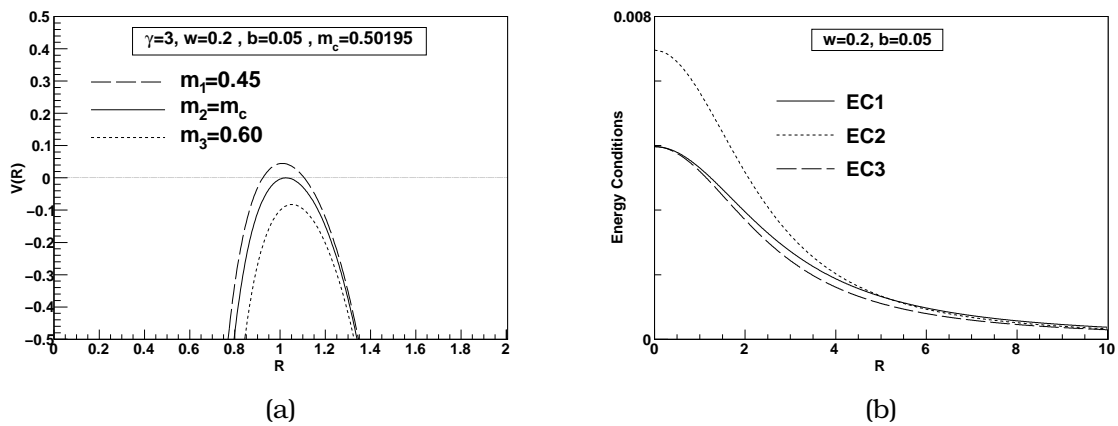


Figura 6.21: (a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 3$, $\omega = 0.2$, $b = 0.05$ e $m_c = 0.50195$. **Caso C**

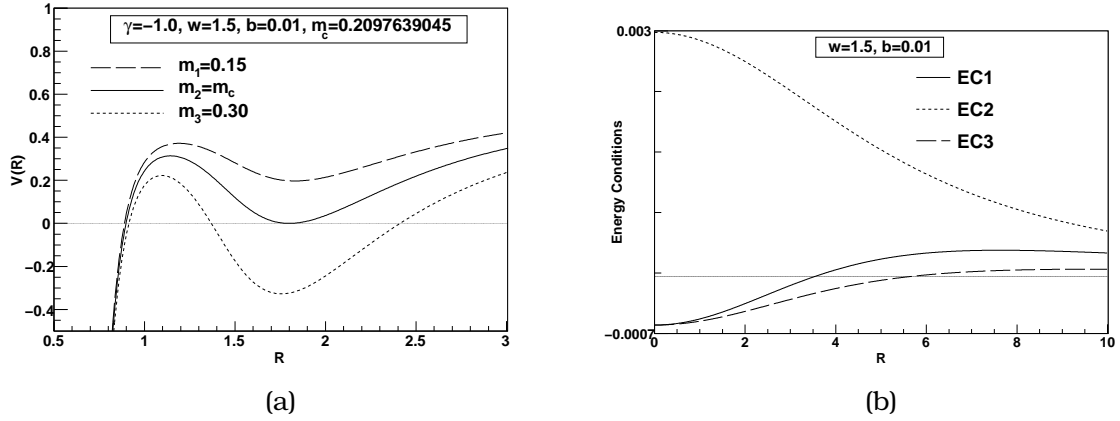


Figura 6.22: (a) O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = -1$, $\omega = 1.5$, $b = 0.01$ e $m_c = 0.2097639045$. **Caso G**

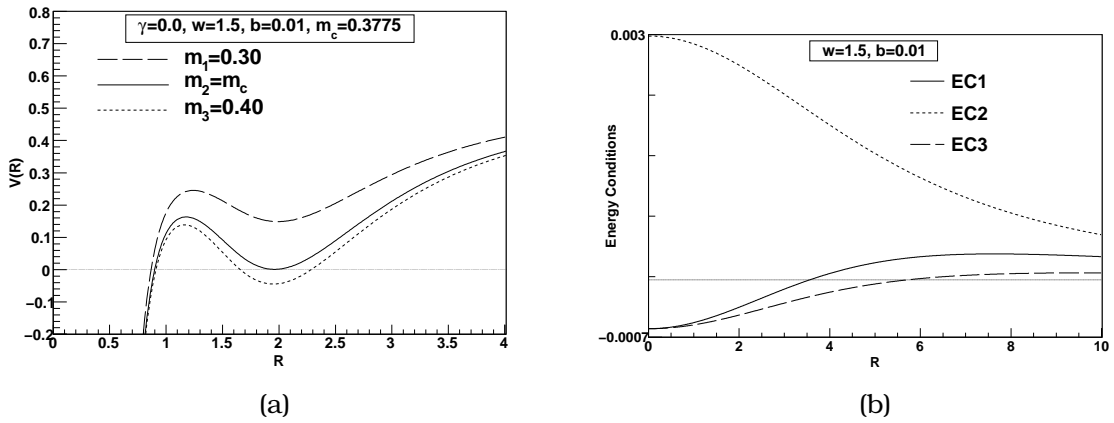


Figura 6.23: (a) O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 0$, $\omega = 1.5$, $b = 0.01$ e $m_c = 0.3775$. **Caso G**

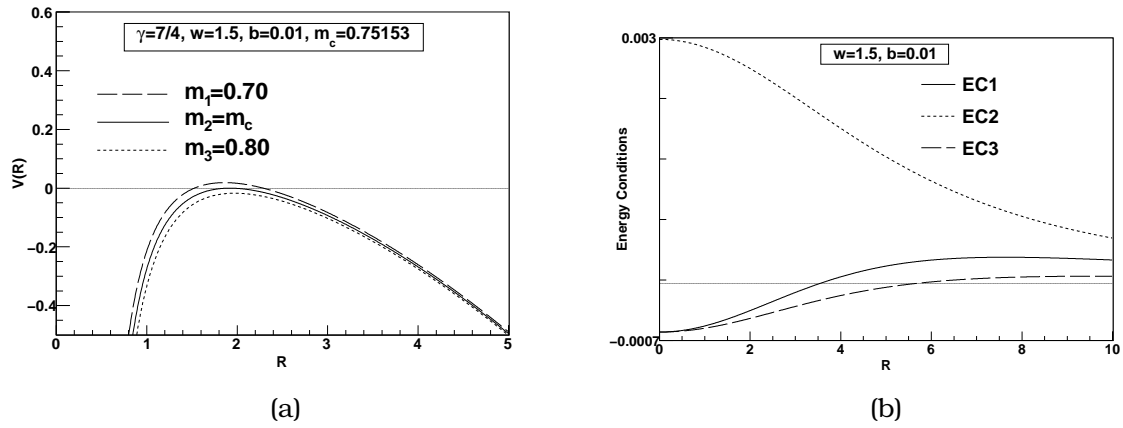


Figura 6.24: (a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 7/4$, $\omega = 1.5$, $b = 0.01$ e $m_c = 0.75153$. **Caso H**

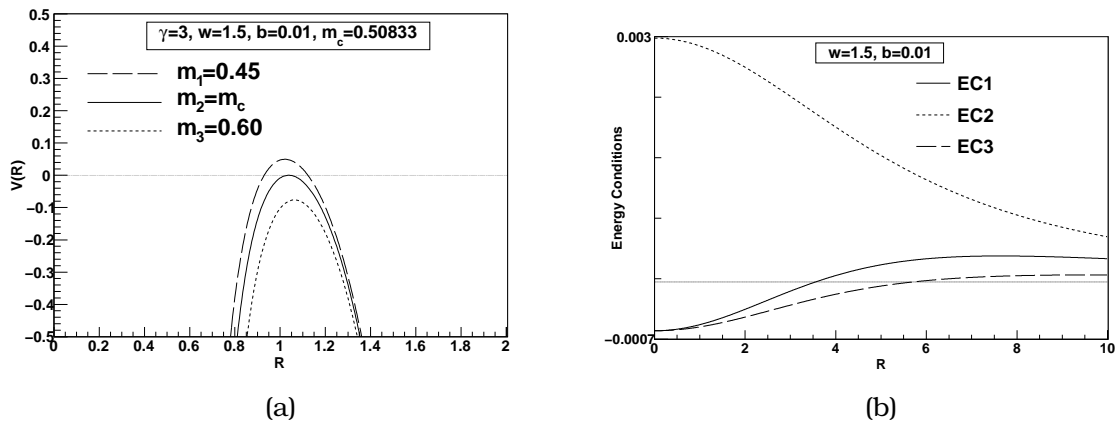


Figura 6.25: (a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 3$, $\omega = 1.5$, $b = 0.01$ e $m_c = 0.50833$. **Caso I**

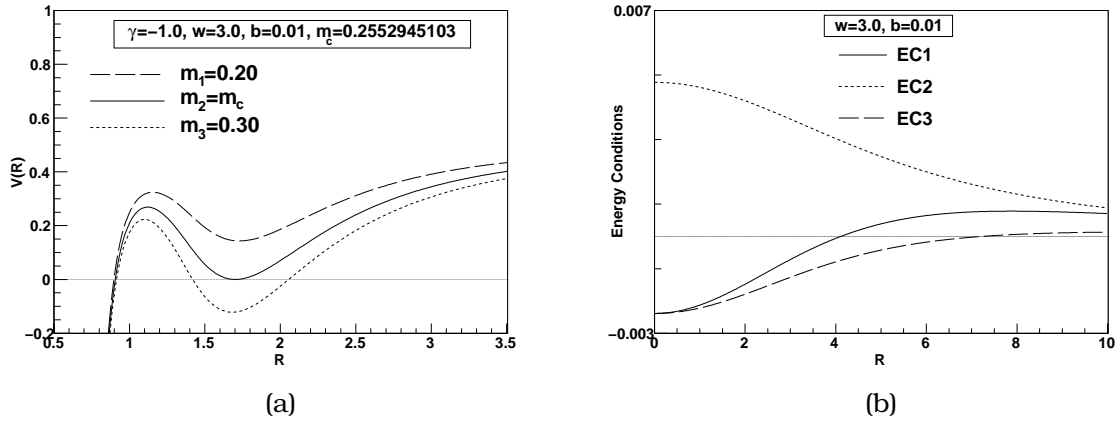


Figura 6.26: (a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = -1$, $\omega = 3$, $b = 0.01$ e $m_c = 0.2552945103$. **Caso G**

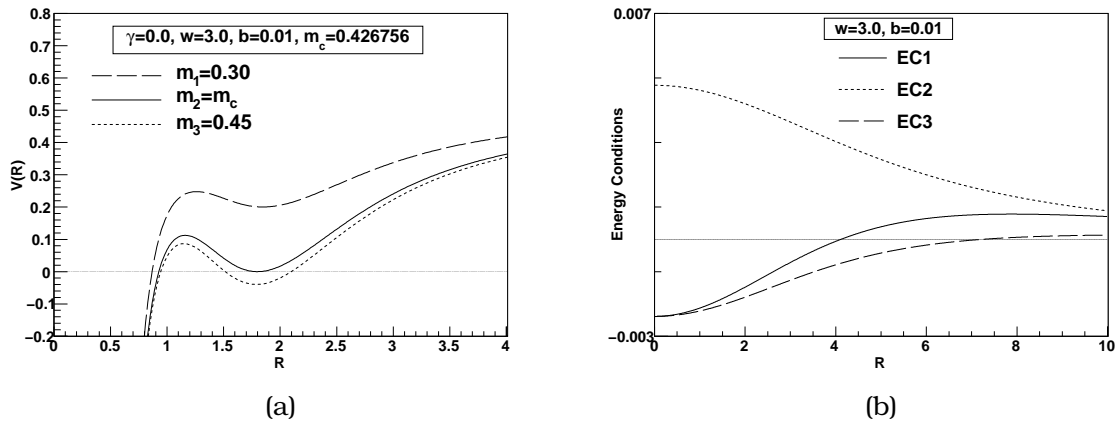


Figura 6.27: (a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 0$, $\omega = 3$, $b = 0.01$ e $m_c = 0.426756$. **Caso G**

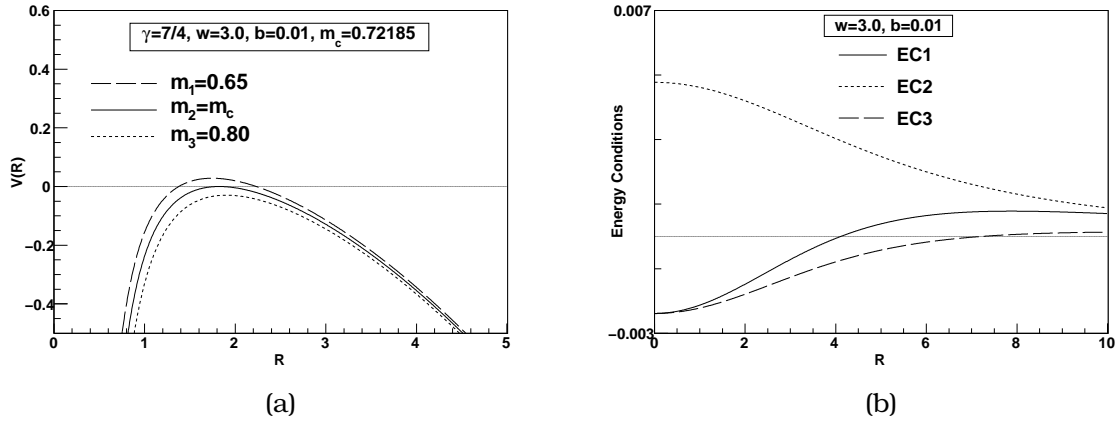


Figura 6.28: (a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 7/4$, $\omega = 3$, $b = 0.01$ e $m_c = 0.72185$. **Caso H**

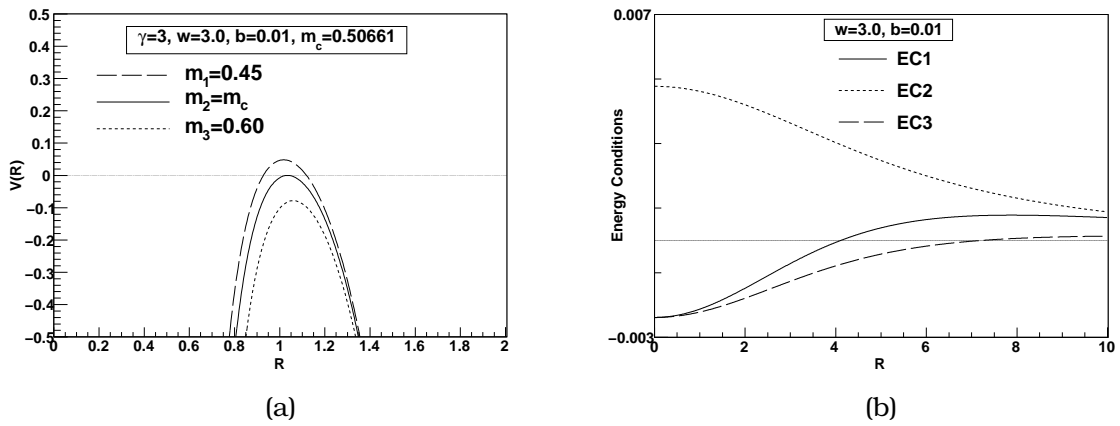


Figura 6.29: (a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 3$, $\omega = 3$, $b = 0.01$ e $m_c = 0.50661$. **Caso I**

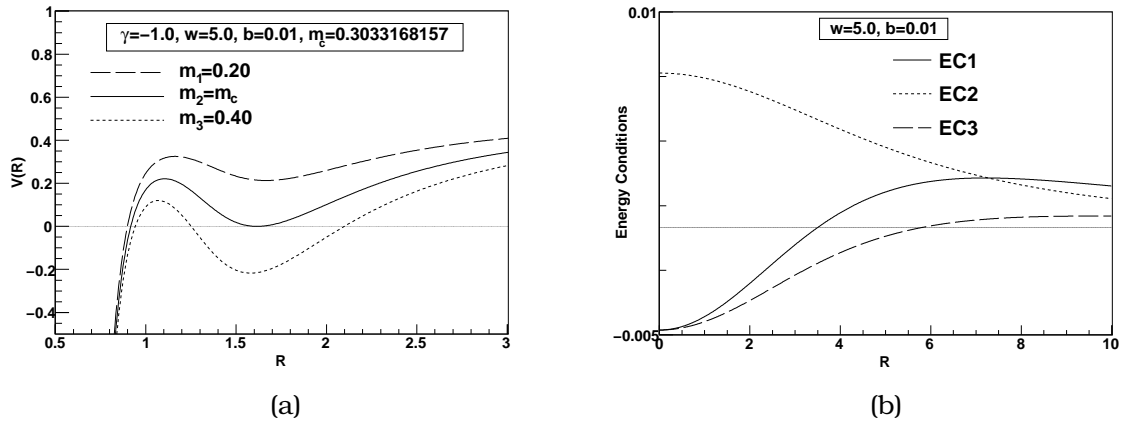


Figura 6.30: (a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = -1$, $\omega = 5$, $b = 0.01$ e $m_c = 0.3033168157$. **Caso G**

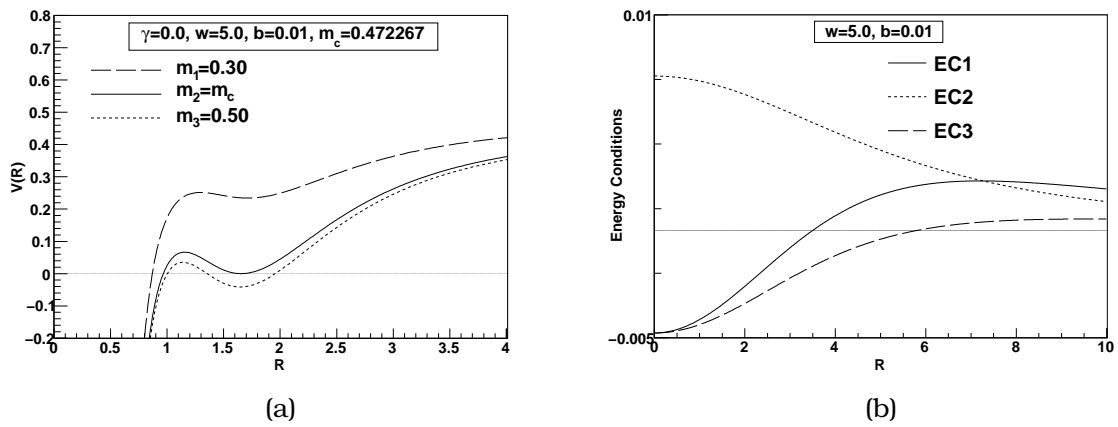


Figura 6.31: (a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 0$, $\omega = 5$, $b = 0.01$ e $m_c = 0.472267$. **Caso G**

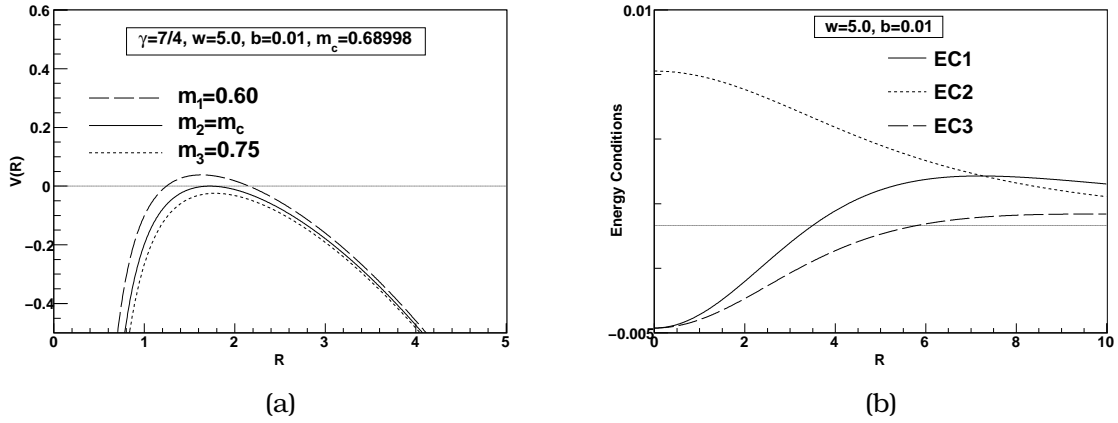


Figura 6.32: (a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 7/4$, $\omega = 5$, $b = 0.01$ e $m_c = 0.68998$. **Caso H**

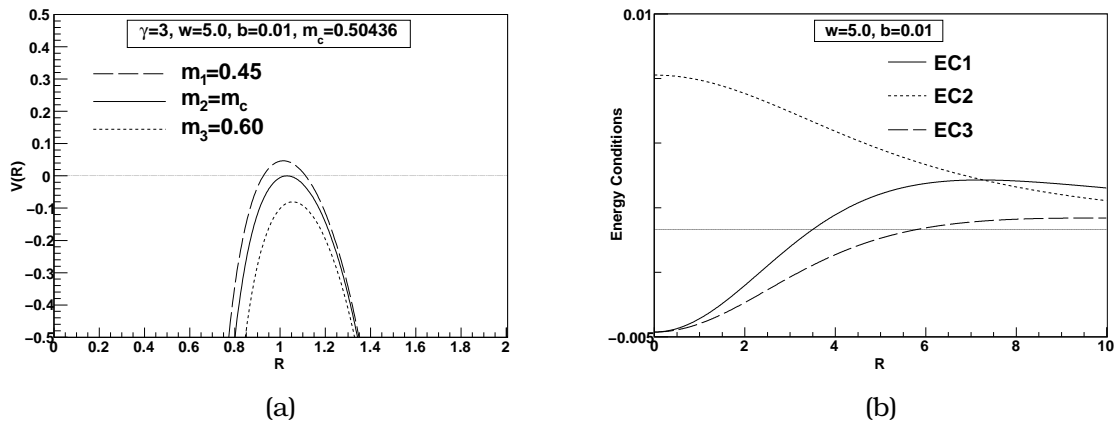


Figura 6.33: (a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 3$, $\omega = 5$, $b = 0.01$ e $m_c = 0.50436$. **Caso I**

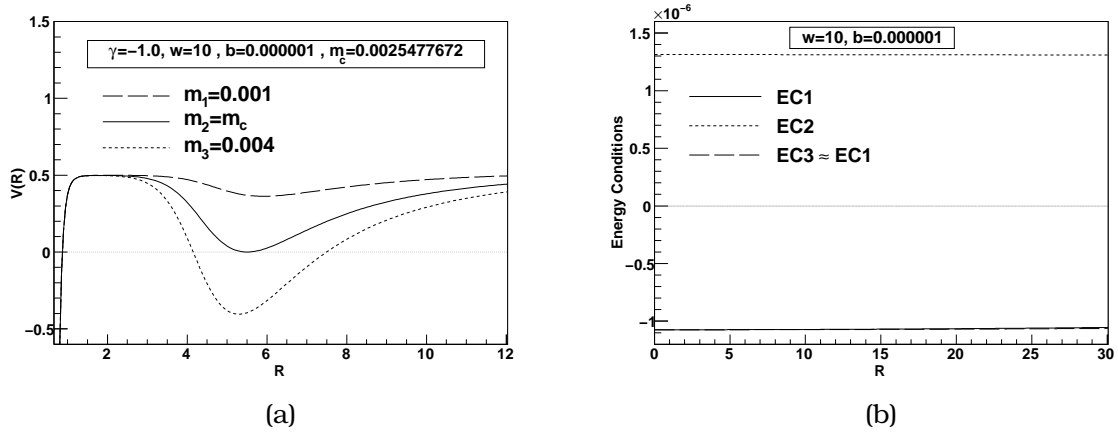


Figura 6.34: (a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = -1$, $\omega = 10$, $b = 0.000001$ e $m_c = 0.0025477672$. **Caso G**

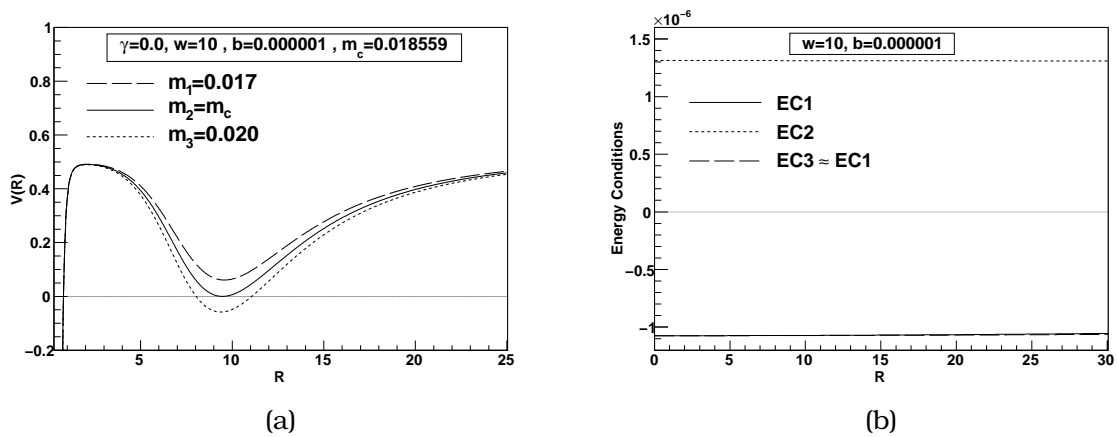


Figura 6.35: (a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 0$, $\omega = 10$, $b = 0.000001$ e $m_c = 0.018559$. **Caso G**

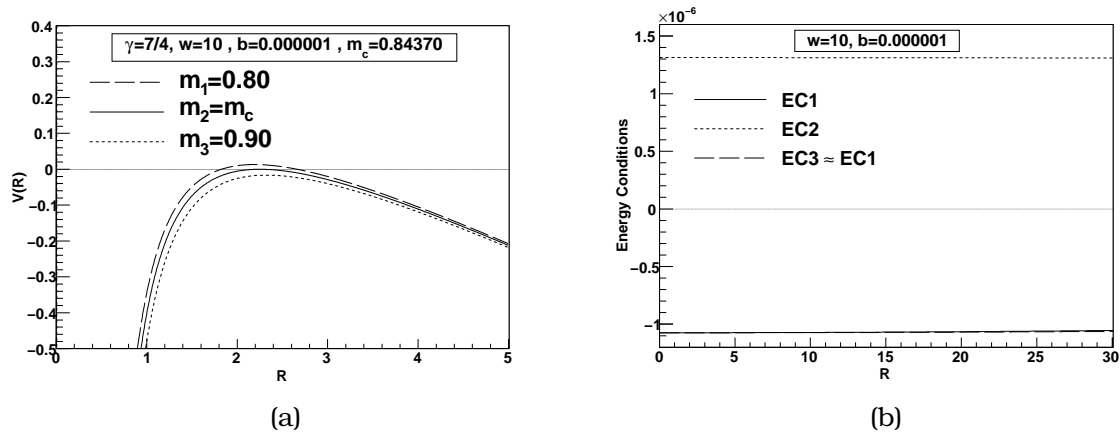


Figura 6.36: (a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 7/4$, $\omega = 10$, $b = 0.000001$ e $m_c = 0.84370$. **Caso H**

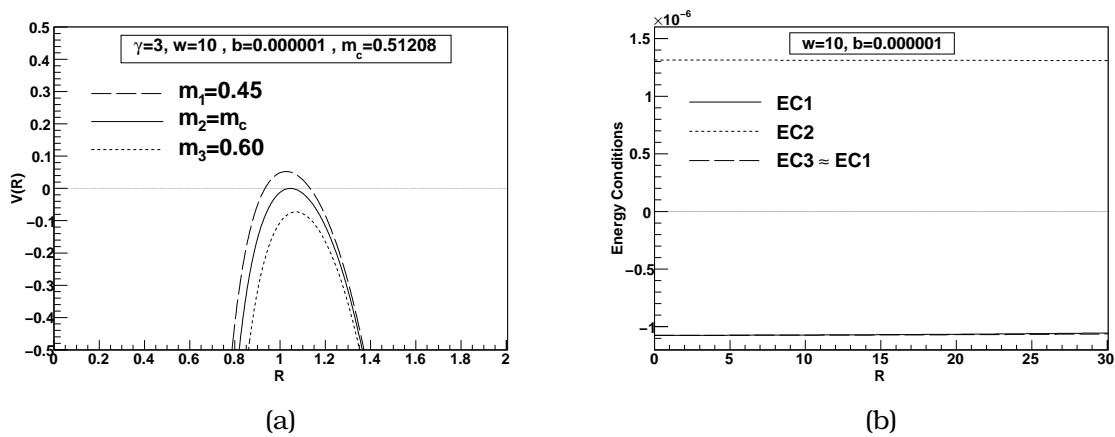
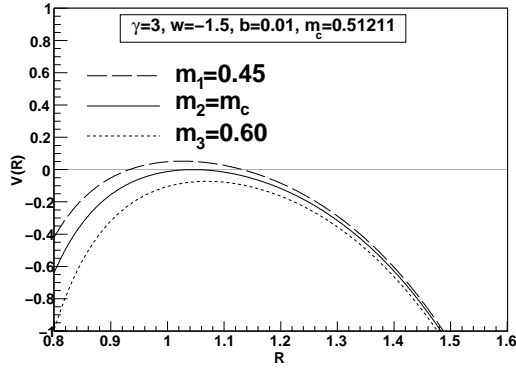
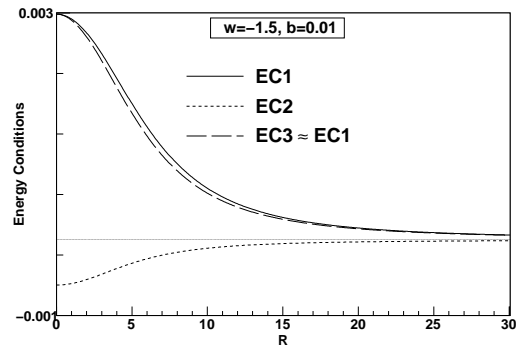


Figura 6.37: (a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 3$, $\omega = 10$, $b = 0.000001$ e $m_c = 0.51208$. **Caso I**

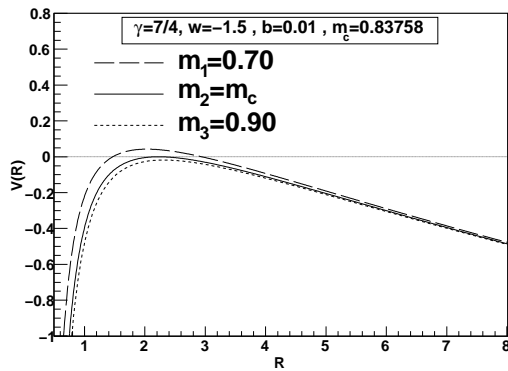


(a)

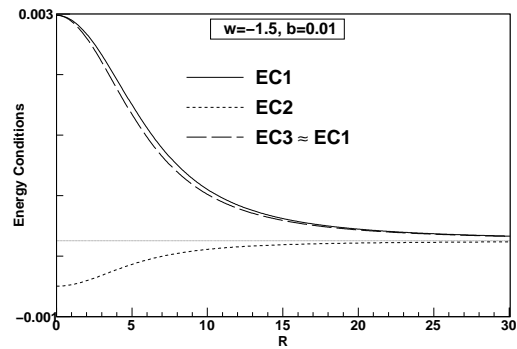


(b)

Figura 6.38: (a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 3$, $\omega = -1.5$, $b = 0.01$ e $m_c = 0.51211$. **Caso K**

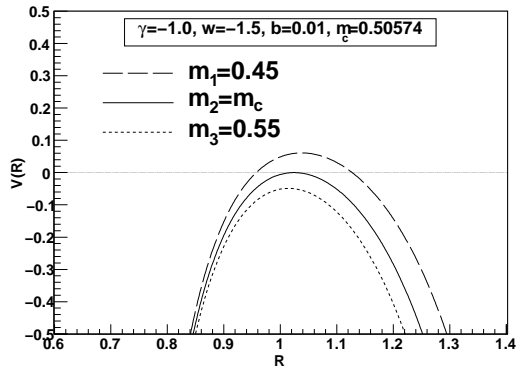


(a)

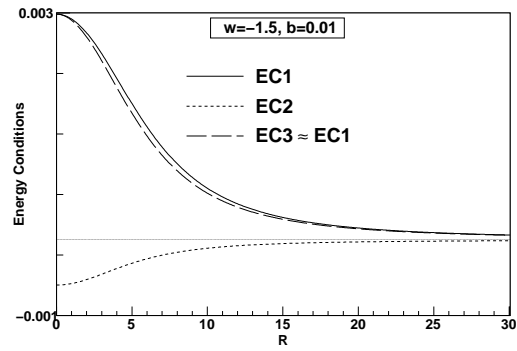


(b)

Figura 6.39: (a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 7/4$, $\omega = -1.5$, $b = 0.01$ e $m_c = 0.83759$. **Caso L**

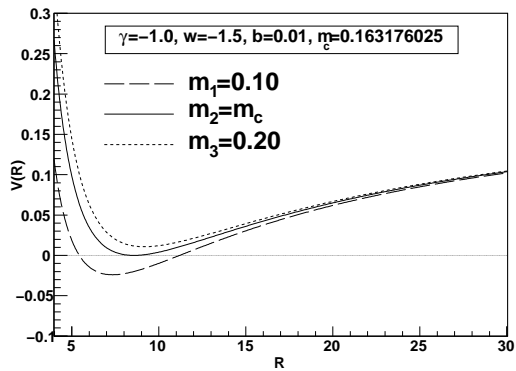


(a)

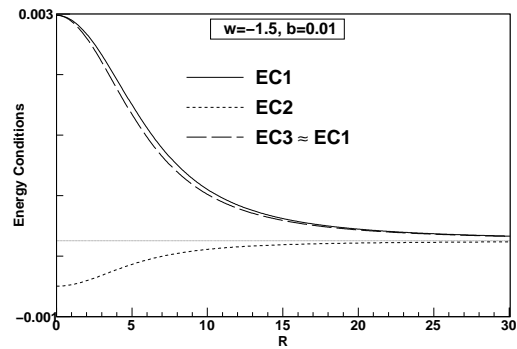


(b)

Figura 6.40: (a) O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = -1$, $\omega = -1.5$, $b = 0.01$ e $m_c = 0.50574$. **Caso J**

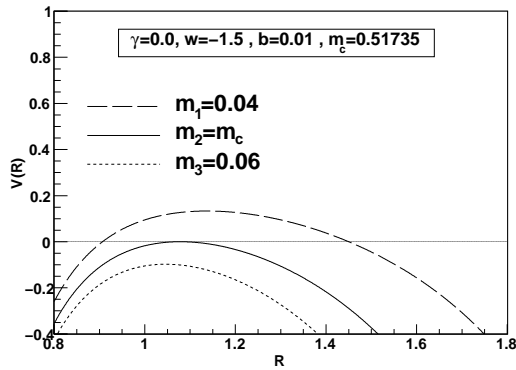


(a)

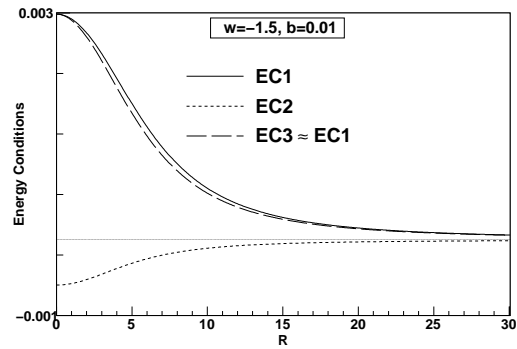


(b)

Figura 6.41: (a) O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = -1$, $\omega = -1.5$, $b = 0.01$ e $m_c = 0.163176025$. **Caso J**

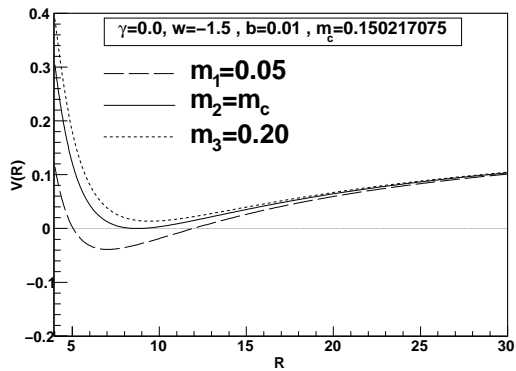


(a)

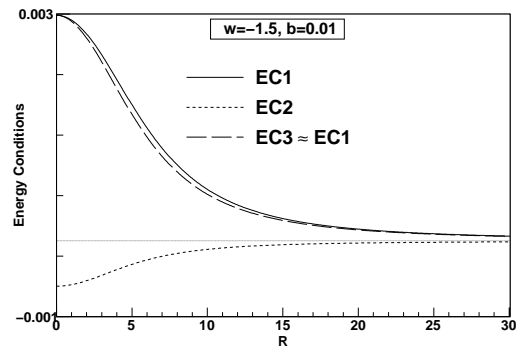


(b)

Figura 6.42: (a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 0$, $\omega = -1.5$, $b = 0.01$ e $m_c = 0.51735$. **Caso J**



(a)



(b)

Figura 6.43: (a)O potencial $V(R)$ e (b) as condições de energia $EC1 \equiv \rho + p_r + 2p_t$, $EC2 \equiv \rho + p_r$ e $EC3 \equiv \rho + p_t$, para $\gamma = 0$, $\omega = -1.5$, $b = 0.01$ e $m_c = 0.150217075$. **Caso J**

Capítulo 7

Conclusão

7.1 Considerações finais

No presente trabalho estudamos o colapso gravitacional de um protótipo de gravastar utilizando um modelo de três camadas, no qual uma casca infinitamente fina de fluido rígido separa o espaço-tempo interno de de Sitter do espaço-tempo externo de Schwarzschild [108]. Encontramos que em alguns casos, o colapso formará buracos negros e em outros formará modelos “bounded excursion”, entre outras possibilidades. No espaço de fase, a região para a formação de gravastares é muito pequena em comparação a região para a formação de buracos negros, mas não vazia. Logo, embora a existência de gravastares não possa ser excluída do ponto de vista do colapso gravitacional, nossos resultados indicam que, mesmo que gravastares existam, eles não excluem a existência de buracos negros.

Generalizando os resultados descritos acima para o caso onde a equação de estado da casca infinitamente fina é dada por $p = (1 - \gamma)\sigma$ com γ sendo uma constante, nós [109] estudamos sistematicamente o colapso gravitacional de protótipo de gravastares. Note que quando $\gamma = 0$, obtemos o primeiro caso. Após construirmos modelos dinâmicos de três camadas, mostramos explicitamente que, quando $\gamma < 1$ e $\Lambda \neq 0$, ambos os tipos de gravastares estáveis, segundo classificação de Visser e Wiltshire, e buracos negros existem. Todavia,

quando $\gamma \geq 1$, somente encontramos buracos negros. Novamente verificamos que a região de gravastares e a região de buracos negros no espaço de fase não são vazias, embora a região de gravastares seja muito menor do que a região de buracos negros.

Por último, investigamos configurações diferentes para o fluido interior (desde a matéria normal até energia escura fantasma), para a equação de estado do fluido da camada fina do tipo de $p = (1 - \gamma)\sigma$. Para isso consideramos o interior dado pela métrica de Francisco Lobo e o exterior de Schwarzschild [110]. Já iniciamos estudos para espaços-tempos exteriores de Schwarzschild com constante cosmológica e de Vaidya. A consideração da região externa como sendo descrita pela solução de Vaidya é muito importante pois esta pode representar um fluxo de radiação emergente [134].

Em um colapso real sempre se espera que o corpo que está colapsando emita ondas gravitacionais e matéria. Logo, para modelar a radiação de matéria a partir do colapso gravitacional, o primeiro passo seria substituir a solução de Schwarzschild pela solução de Vaidya no espaço-tempo exterior do protótipo de gravastar colapsante. Ao fazermos isso, seremos capazes de estudar sistematicamente e compreender os efeitos da equação de estado da camada fina, assim como os efeitos da radiação de matéria durante o colapso.

7.2 Perspectivas e trabalhos futuros

A continuação do trabalho iniciado e apresentado nesta tese tem como objetivos (a) estudos numéricos de gravastares estáveis e buracos negros, (b) métodos numéricos altamente efetivos e eficazes na análise de modelos teóricos inspirados em teoria das supercordas/teoria-M e na análise de dados observacionais da descoberta recente da aceleração cósmica do Universo.

No trabalho que resultou nesta tese foi desenvolvido um código numérico em C++ bastante poderoso para estudo da formação e da estabilidade de protótipos

de gravastares e buracos negros. Continuaremos a investigar estes problemas, incluindo o estudo da formação de estrelas em teorias alternativas a Relatividade Geral de Einstein como, por exemplo, as teorias $f(R)$, mas iremos nos concentrar primeiramente em diferentes protótipos de gravastares para o estudo do colapso gravitacional. Tanto computação algébrica como computação numérica estarão sendo exaustivamente utilizados para este fim.

Na primeira parte investigaremos sistematicamente vários protótipos de gravastares cujo estudo dinâmico pode ser feito. Como exemplo podemos citar configurações em que temos três regiões distintas de espaço-tempo: uma região interna com a solução de de Sitter, uma camada fina constituída de fluido perfeito e o exterior sendo a solução de Vaidya. Uma outra configuração possível é a seguinte: um fluido de energia escura no interior, cujo espaço-tempo é dado por uma das soluções de estrela de energia escura de Lobo [79], uma camada fina de fluido perfeito e novamente um espaço-tempo exterior de Vaidya.

Posteriormente iniciaremos um estudo que envolve não apenas o uso e a implementação, mas também a melhoria de métodos numéricos altamente eficientes e eficazes, existentes ou não, tanto para análise de dados observacionais como para simulações cosmológicas. Entre os métodos a serem abordados por este projeto estão os métodos de Monte Carlo via cadeias de Markov e a rotina Gadget-2, que é utilizada, por exemplo, para simulações em cosmologia. Um dos nossos objetivos principais será a análise de diferentes modelos de energia escura quando comparados aos dados observacionais.

Utilizando estes programas numéricos, podemos também estudar as relações entre as taxas de crescimento da expansão e estrutura do Universo, assim como as perturbações lineares e não lineares de campos de matéria. Estes estudos têm por objetivo estender e validar os modelos de energia escura ao compará-los com os dados observacionais, inclusive fazendo novas previsões, além de auxiliar na quebra da degenerescência de parâmetros.

Estes problemas aqui propostos, aparentemente independentes entre si, estão profundamente relacionados, já que a atenção dada aos gravatares recentemente se deve muito à conexão entre a constante cosmológica e o universo em expansão acelerada. A seguir, será feita uma breve descrição de cada um destes problemas para posteriormente estabelecermos, de forma clara, as próximas metas a serem cumpridas.

Aceleração Cósmica do Universo

Uma das descobertas marcantes na última década foi o fato de que nosso Universo está em uma fase de expansão acelerada, primeiramente observado a partir de medidas de supernova do Tipo Ia [118, 119, 120]. A análise da radiação cósmica de fundo (CMB - Cosmic Microwave Background Radiation) [121] e da estrutura em larga escala [135] confirmam isto. Apesar da atual aceleração do Universo ser algo bem estabelecido por evidências observacionais, a física por trás desta aceleração permanece um completo mistério [63]. Como a natureza precisa e a origem da aceleração cósmica possuem profundas implicações, entendê-las é um dos maiores desafios da cosmologia moderna. Como citado pelo “Dark Energy Task Force”(DETF) [136]: *“A maioria dos especialistas acredita que nada menos do que uma revolução na nossa compreensão da física fundamental será necessária para alcançar um pleno entendimento da aceleração cósmica.”*

Dentro do contexto da Relatividade Geral, para levarmos em consideração tal expansão, precisamos introduzir um componente exótico de matéria que possui uma grande pressão negativa e interage com outros componentes de matéria fracamente, se há algum. Este componente invisível é usualmente chamado de energia escura (DE-*dark energy*). Observações astronômicas recentes indicam que nosso Universo é plano e consiste em aproximadamente 70% de energia escura, 25% de matéria escura, e 5% de matéria bariônica e radiação.

Um candidato para a energia escura é a constante cosmológica positiva Λ , que é bem consistente com todas as observações feitas [63, 118, 119, 120, 121, 135]. Embora a introdução de Λ possa ser a resolução mais simples para a crise, quando consideramos sua origem física, estamos penetrando em outros problemas sérios: (a) Apesar da constante cosmológica ser considerada como uma simples constante gravitacional adicional, ela entra nas equações de Einstein exatamente da mesma forma do que uma contribuição de energia de vácuo. A única assinatura observacional deles são seus efeitos no espaço-tempo, que são fisicamente indistinguíveis. Portanto, a constante cosmológica efetiva medida é a soma das duas, $\Lambda_{eff.} = \Lambda_{bare} + \Lambda_{vacuum}$, onde o valor teórico de Λ_{vacuum} da teoria quântica de campos [137] excede os limites observacionais em torno de 120 ordens de magnitude. Portanto, um cancelamento em 120 ordens de magnitude é necessário. Esta discrepância entre o valor teórico e o valor observacional é notoriamente conhecido como o problema da constante cosmológica [138]. (b) A correspondente densidade de energia $\rho_{\Lambda,obs}$ é comparável com a da matéria somente recentemente. Caso contrário, as galáxias nunca haveriam se formado. Considerando o fato de que a densidade de energia da matéria depende do tempo, deve-se explicar o porque de somente *agora* ambos serem da mesma ordem, o chamado problema da coincidência. (c) Uma vez que Λ_{obs} domina a evolução do Universo, ele dominará para sempre gerando um Universo que acelera [139]. Outros problemas com um Universo assintótico de de Sitter no futuro pode ser encontrado em [140].

Como visto a pouco, modelos dramaticamente distintos têm sido propostos, tanto pela adição de um novo componente da matéria total do Universo, como quintessência [141], ou pela modificação da Relatividade Geral, como por exemplo, o modelo de Brana DGP [142], e mais recentemente a gravidade $f(R)$ não-linear [143], para citarmos apenas alguns deles. Para maiores detalhes pode-se consultar os artigos de revisão [63]. Todavia, nenhum modelo teórico

convicente tem sido construído. Por exemplo, o modelo Brana DGP esbarra com o problema de fantasmas [144, 145] e da inconsistência se comparado às observações [146], enquanto os potenciais utilizados em quintessência usualmente não possuem justificativa natural em teoria de campo [147]. De fato, todos eles são não-renormalizáveis no sentido convencional, e têm que ser interpretados como potenciais efetivos de baixa energia de uma forma ad hoc. Os modelos $f(R)$ podem ser manuseados para passarem por todos os rigorosos testes no sistema solar e na Terra, mas eles são degenerados no sentido de que eles podem ser pensados como Relatividade Geral com um campo escalar adicional conformalmente acoplado à toda matéria [148]. Adicionalmente, eles também são afligidos pela falta de naturalidade, fantasmas, instabilidades e modos superluminais [149].

Na segunda parte nos dedicaremos à implementação e melhoria de métodos numéricos efetivos e altamente eficientes, tais como o método de Monte Carlo por cadeia de Markov (MCMC - Monte Carlo Markov Chain) e o programa GADGET-2, que nos permitirá estudar as relações entre as taxas de expansão e de crescimento de estruturas, além do estudo de perturbações lineares e não-lineares dos campos de matéria. Estes estudos irão estender e validar modelos de energia escura a partir de conjuntos de dados observacionais para futuras previsões, quebra de degenerescência de parâmetros, redução de erros estatísticos, e diagnosticar possíveis sistemáticas.

Nos anos anteriores, Dr. Wang e seu grupo de pesquisa implementaram dois códigos numéricos efetivos e altamente eficientes [150, 151, 152, 153, 154], um deles sendo baseado no programa publicamente disponível MINUIT do CERN, e o outro sendo baseado no pacote COSMOMC [155] utilizando o método MCMC. Neste projeto, eu pretendo melhorar o código MCMC, e também implementar outros métodos numéricos como, por exemplo, adicionando código ao GADGET-2 [156] para calcular perturbações lineares e não-lineares de densi-

dade de campos de matéria no universo.

7.2.1 Ajuste numérico de modelos de energia escura aos conjuntos de dados observacionais

Como mencionado anteriormente, todas as observações feitas são consistentes com a Constante Cosmológica. Devido a este fato marcante, um grande número de projetos ambiciosos tem tido como foco a distinção de Constante Cosmológica com relação aos modelos de energia escura dinâmicos [136]. Todavia, para termos Λ como modelo viável, devemos resolver o problema da Constante Cosmológica. Como esta está intimamente relacionada a gravidade quântica, espera-se que sua solução venha também da gravidade quântica. No presente, a teoria de Supercordas/Teoria M é nossa melhor aposta para uma consistente teoria quântica da gravidade, então é natural perguntar-nos o que a teoria de Supercordas/Teoria M tem a nos dizer sobre a constante cosmológica.

Recentemente, Wang e seus colaboradores investigaram este problema [157, 158] dentro da teoria-M heterótica de Horava-Witten (HW) em S^1/Z_2 [159], e encontraram que a constante cosmológica efetiva em cada uma das duas Branas pode ser facilmente diminuída para seu valor observacional corrente utilizando o mecanismo de larga dimensão extra. Uma característica marcante do modelo é que, em contraste com a Relatividade Geral, o domínio desta Constante Cosmológica efetiva é somente temporário. Devido à interação do bulk e da brana, o Universo estará em sua fase de desaceleração novamente, onde todos os problemas conectados com um Universo de de Sitter num futuro distante [140] são resolvidos.

Generalizando as investigações anteriores para teoria de supercordas [160], Wang e Santos encontraram que o mesmo mecanismo também é aplicável a todas as cinco versões da teoria de supercordas [161, 162]. Adicionalmente, a aceleração transiente tardia do Universo também ocorre genericamente nesta

configuração [154]. Portanto, *mundos brana da teoria de supercordas/Teoria M em S^1/Z_2 provêm um mecanismo embutido para resolver o problema da Constante Cosmológica, e provêm uma aceleração transiente genérica tardia do universo.*

Neste projeto de pesquisa, eu devo ajustar numericamente estes modelos aos conjuntos de dados observacionais, e estudar perturbações lineares e não lineares dos campos de matéria e as relações entre as taxas de crescimento da expansão e estrutura. Tais estudos irão estender e validar modelos com o conjunto de dados observacionais para futuras previsões, quebra de degenerescência de parâmetros, redução de erros estatísticos e diagnosticar possíveis sistemáticas.

Para tal, devo primeiramente me familiarizar com os dois códigos numéricos efetivos e altamente eficientes, recentemente desenvolvidos por Dr. Wang e seu grupo [150, 151, 152, 153, 154], um destes códigos é baseado no pacote publicamente disponível MINUIT do CERN, e o outro é baseado no pacote COSMOMC [155] utilizando o método MCMC. Posteriormente, deverei melhorar estes códigos.

Dentro da visão de cosmologia de Branas, desvios significativos vêm do universo primordial [163]. Tais investigações requerem observações amarradas ao Universo de alto redshift, tal como a radiação cósmica de fundo (denotado aqui por CMB, que vem do inglês Cosmic Microwave Background Radiation) e oscilação acústica bariônica (BAO - baryon acoustic oscillation). Vínculos de dados de CMB e de dados da nucleossíntese primordial (BBN) restringem a fração de energia escura do universo primordial para uma baixa porcentagem [164]. Embora esta seja bem pequena, ela pode ter efeitos significativos tanto no crescimento linear como no crescimento não linear das perturbações [165]. Para lidar com estas perturbações devo implementar código utilizando a rotina de N-corpos GADGET-2 [156].

Certamente, nossos estudos ao longo desta direção não estão restritos somente a modelos inspirados na teoria de supercordas ou na teoria M. Podemos igualmente aplicar nossos métodos numéricos para estudar quaisquer outros modelos de energia escura.

Relatividade Geral Básica

Para um estudo mais aprofundado dos temas a seguir, recomendo a leitura das referências [10, 111, 166]. Segue, de forma bem sucinta, conceitos e relações que foram utilizados ao longo desta tese.

A.1 Geometria

A geometria do espaço-tempo é descrita pela métrica

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (\text{A.1})$$

onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico. A curvatura do espaço-tempo é definido através do tensor de curvatura de Riemann

$$R_{\tau\sigma\beta\gamma} = g_{\tau\alpha} R^\alpha_{\sigma\beta\gamma}, \quad (\text{A.2})$$

definido por

$$R^\alpha_{\delta\beta\gamma} = \partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\beta\delta} - \partial_\beta \Gamma^\alpha_{\delta\gamma} + \Gamma^\alpha_{\rho\gamma} \Gamma^\rho_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha_{\rho\beta} \Gamma^\rho_{\gamma\delta}, \quad (\text{A.3})$$

onde

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} [\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}] \quad (\text{A.4})$$

são os símbolos de Christoffel. Uma contração de dois índices dá o *tensor de Ricci*

$$R_{\alpha\beta} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\alpha\nu\beta} \quad (\text{A.5})$$

e uma contração adicional do tensor de Ricci dá o escalar de curvatura

$$\mathcal{R} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}. \quad (\text{A.6})$$

A.2 Derivada Covariante

A derivada covariante ∇_μ de um campo Y (em geral, Y pode ser um tensor de qualquer ordem) é definida por

$$DY = (\nabla_\mu Y)dx^\mu \equiv Y_{;\mu}dx^\mu, \quad (\text{A.7})$$

onde DY é uma diferença infinitesimal entre o valor do campo Y no ponto $x^\mu + dx^\mu$ e a quantidade $Y(x^\mu)$ paralelamente deslocada de x^μ para $x^\mu + dx^\mu$. Portanto, DY consiste em duas partes: uma é a mudança de Y devido ao deslocamento paralelo e a outra é a diferença $dY = Y(x^\mu + dx^\mu) - Y(x^\mu)$ devido a dependência funcional em x^μ . A última parte está basicamente relacionada à diferenciação parcial ordinária. A diferença devido ao deslocamento paralelo está relacionada a curvatura do espaço-tempo e depende da natureza tensorial de Y . Para um escalar, um vetor e um tensor de segunda ordem temos:

- escalar φ

$$\varphi_{;\mu} = \varphi_{,\mu}, \quad (\text{A.8})$$

- vetor V_μ

$$V_{\mu;\nu} = V_{\mu,\nu} - \Gamma_{\mu\nu}^\rho V_\rho, \quad V^\mu_{;\nu} = V^\mu_{,\nu} + \Gamma_{\rho\nu}^\mu V^\rho. \quad (\text{A.9})$$

- tensor $A_{\mu\nu}$

$$A_{\mu\nu;\rho} = A_{\mu\nu,\rho} - \Gamma_{\mu\rho}^\sigma A_{\sigma\nu} - \Gamma_{\nu\rho}^\sigma A_{\mu\sigma}, \quad A^{\mu\nu}_{;\rho} = A^{\mu\nu}_{,\rho} + \Gamma_{\sigma\rho}^\mu A^{\sigma\nu} + \Gamma_{\sigma\rho}^\nu A^{\mu\sigma}. \quad (\text{A.10})$$

O d'Alembertiano covariante é dado por

$$\square \equiv g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu = \frac{1}{\sqrt{-\det g}} \partial_\mu \left(\sqrt{-\det g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \right). \quad (\text{A.11})$$

Aqui foi utilizada a convenção usual na qual um subscrito $,\mu$ denota uma derivada parcial ordinária e $;\mu$ denota a derivada covariante.

A.3 Geodésicas

Geodésicas são as “linhas mais curtas possíveis” que podem ser desenhadas em geometria curva. Dado um operador derivada covariante ∇_μ , definimos uma *geodésica* como sendo uma curva sobre a qual o vetor tangente é paralelamente propagado ao longo dele mesmo, ou seja, uma curva cuja tangente u^μ satisfaz a equação

$$u^\nu u^\mu_{;\nu} = 0. \quad (\text{A.12})$$

Uma partícula massiva move-se ao longo de uma geodésica do tipo tempo, u_μ sendo sua quadrivelocidade. Uma partícula sem massa se move ao longo de uma geodésica nula em cujo caso o vetor u_μ é tipo nulo.

A.4 Isometrias e Vetores de Killing

Um campo vetorial k^μ que gera grupo de isometrias de um parâmetro, ou seja, grupo de um parâmetro de transformações que deixam a métrica invariante, é chamado um *vetor de Killing*. Um vetor de Killing k^μ satisfaz a equação de Killing

$$k_{(\mu;\nu)} \equiv k_{\mu;\nu} + k_{\nu;\mu} = 0. \quad (\text{A.13})$$

É conveniente representar o vetor de Killing k^μ como um operador diferencial k ,

$$k = k^\mu \partial_\mu. \quad (\text{A.14})$$

Para um campo vetorial k , as coordenadas locais podem ser encontradas tais que

$$k = \frac{\partial}{\partial x}, \quad (\text{A.15})$$

onde x é uma destas coordenadas, e.g., $x^1 \equiv x$. Em tal sistema de coordenadas, $k^\mu = \delta_1^\mu$ e

$$k_{(\mu;\nu)} = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x} = 0. \quad (\text{A.16})$$

Portanto, podemos dizer que k_μ é um vetor de Killing se $g_{\mu\nu}$ é independente de x .

A.5 Equações de Einstein

A Relatividade Geral relaciona a geometria do espaço-tempo a matéria através das equações de campo de Einstein. As equações de Einstein com constante cosmológica são dadas por

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} - g_{\mu\nu}\Lambda = -8\pi T_{\mu\nu}, \quad (\text{A.17})$$

onde $T_{\mu\nu}$ é o *tensor energia-momentum* e Λ é a constante cosmológica. A constante cosmológica foi introduzida por Einstein em 1917, sendo tratada como um termo associado à estrutura do espaço-tempo. Como explicado no capítulo 2, após a descoberta de de Sitter de uma solução das equações de campo sem conter quaisquer fontes materiais, Einstein retirou o termo de suas equações dizendo que a introdução da constante cosmológica havia sido o maior erro de sua vida. Entretanto, após a recente descoberta de que nosso Universo encontra-se em expansão acelerada, a constante cosmológica voltou às equações de campo de Einstein como uma possível candidata a energia escura, costumando aparecer no lado direito das equações, ou seja,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} = -8\pi T_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Lambda. \quad (\text{A.18})$$

A.6 Dinâmica dos Fluidos Básica

Considere um fluido relativístico gravitante perfeito. Denotamos por u_μ , p , ρ , n , e σ a velocidade, pressão, densidade de energia, número da densidade de partículas, e a densidade de entropia do fluido. O tensor energia-momentum

de um fluido perfeito é dado por

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)u_\mu u_\nu - pg_{\mu\nu}, \quad (\text{A.19})$$

onde $g_{\mu\nu}$ é o tensor métrico com a assinatura Lorentziana (+ - - -). Portanto, nesta convenção, temos

$$u^\mu u_\mu = g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = 1. \quad (\text{A.20})$$

A conservação do número de partículas é descrita pela equação de continuidade

$$(nu^\mu)_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}nu^\mu) = 0. \quad (\text{A.21})$$

A conservação energia-momentum,

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0, \quad (\text{A.22})$$

aplicada à (A.19) leva à generalização relativística da equação de Euler, isto é

$$(p + \rho)u^\nu u_{\mu;\nu} - \partial_\mu p + u_\mu u^\nu \partial_\nu p = 0. \quad (\text{A.23})$$

A.7 Equilíbrio Hidrostático

Das equações de Euler (A.23) podemos deduzir a condição de equilíbrio hidrostático. Podemos utilizar o sistema de referência comóvel no qual a velocidade do fluido toma a forma

$$u^\mu = \frac{\delta_0^\mu}{\sqrt{g_{00}}}; \quad u_\mu = \frac{g_{\mu 0}}{\sqrt{g_{00}}}. \quad (\text{A.24})$$

No equilíbrio, a métrica é estática; todas as componentes são independentes do tempo, e as componentes misturadas g_{0i} são zero. A equação (A.23) então fornece

$$(\rho + p)\Gamma_{\mu 0}^0 u^0 u_0 = (\rho + p)\frac{1}{2}g^{00}\partial_\mu g_{00} = -\partial_\mu p \quad (\text{A.25})$$

ou

$$\partial_\mu p = -(\rho + p)g_{00}^{-1/2}\partial_\mu g_{00}^{1/2}. \quad (\text{A.26})$$

A.8 Termodinâmica Básica

Considere um fluido que não esteja em rotação consistindo de N partículas em equilíbrio a uma temperatura diferente de zero. Um ensemble canônico é sujeito ao vínculo de que o número de partículas

$$\int_{\Sigma} n u^{\mu} d\Sigma_{\mu} = N \quad (\text{A.27})$$

deve ser fixo. A hipersuperfície do tipo espaço Σ que contém o fluido é ortogonal ao campo vetorial de Killing de translação temporal ξ^{μ} . No equilíbrio ξ^{μ} está relacionado a velocidade do fluido.

$$\xi^{\mu} = \xi u^{\mu}; \quad \xi = (\xi^{\mu} \xi_{\mu})^{1/2}. \quad (\text{A.28})$$

Pode ser mostrado que estas, e somente estas, configurações estarão em equilíbrio para as quais a energia livre assume um mínimo. A energia livre canônica é definida como

$$F = M - \int_{\Sigma} T \sigma \xi^{\mu} d\Sigma_{\mu}, \quad (\text{A.29})$$

onde M é a massa total como medida a partir do infinito. A densidade de entropia é obtida utilizando a relação termodinâmica padrão, ou seja,

$$\sigma = \frac{1}{T}(p + \rho - \mu n). \quad (\text{A.30})$$

A.9 Equações de Tolman

A temperatura T e o potencial químico μ são quantidades locais dependentes da métrica. Sua dependência espaço-temporal pode ser deduzida a partir da equação de equilíbrio hidrostático (A.26) e a identidade termodinâmica (relação de Gibbs-Duhem)

$$d\frac{p}{T} = n d\frac{\mu}{T} - \rho d\frac{1}{T}. \quad (\text{A.31})$$

A condição crucial é que o fluxo de calor e a difusão deveria anular

$$\frac{\mu}{T} = \text{const}, \quad (\text{A.32})$$

o que pode ser deduzido da condição física de que a taxa da mudança de entropia com o número de partículas em uma densidade de energia fixa deve ser constante, ou seja,

$$\left. \frac{\partial \sigma}{\partial n} \right|_{\rho} = \text{const}, \quad (\text{A.33})$$

onde ‘const’ é independente de ρ . De (A.30) e (A.31) obtemos

$$d\sigma = \frac{1}{T}d\rho - \frac{\mu}{T}dn \quad (\text{A.34})$$

e então

$$\left. \frac{\partial \sigma}{\partial n} \right|_{\rho} = -\frac{\mu}{T}. \quad (\text{A.35})$$

a partir da qual (A.32) imediatamente segue. Depois, a equação (A.32), junto com (A.26) e (A.31), implica nas bem conhecidas equações de Tolman, isto é

$$Tg_{00}^{1/2} = T_0; \quad \mu g_{00}^{1/2} = \mu_0, \quad (\text{A.36})$$

onde T_0 e μ_0 são constantes iguais, respectivamente, à temperatura e ao potencial químico no infinito. Em um ensemble grand-canônico, T_0 e μ_0 podem ser escolhidos arbitrariamente. Em um ensemble canônico, μ_0 é um funcional implícito de ξ devido ao vínculo (A.27) que o número total de partículas deve ser fixo.

A.10 Cascas esféricas finas

O estudo das cascas esféricas finas é de fundamental importância em relatividade geral e cosmologia. A junção de poeira com a métrica de Schwarzschild por Oppenheimer e Snyder permitiu os primeiros *insights* na natureza do colapso gravitacional. Desde o trabalho de Israel [114], o formalismo tem sido

aplicado em diversos contextos. Para um aprofundamento neste tema recomendando as referências [167] a [191]. Neste t3pico apenas ser3o mostrados os resultados principais utilizados nesta tese.

Uma hipersuperf3cie do tipo-tempo Σ que divide o espa3o-tempo em duas variedades quadridimensionais distintas V^+ e V^- , representa a hist3ria da casca fina se seu 3-tensor de curvatura extr3nseca K_{ij} possui uma descontinuidade quando Σ 3 atravessado, $[K_{ij}] \equiv K_{ij}^+ - K_{ij}^- \neq 0$.

O 3-tensor da energia da superf3cie intr3nseca da casca S_{ij} 3 dada pelas equa33es de Lanczos que podem ser escritas na forma:

$$-8\pi S_{ij} = \gamma_{ij} - g_{ij}\gamma, \quad (\text{A.37})$$

onde γ_{ij} 3 a m3trica intr3nseca de Σ , $\gamma \equiv g^{ab}\gamma_{ab}$, e $\gamma_{ij} \equiv [K_{ij}]$. Em termos da tangente a casca u^i , a densidade de superf3cie pr3pria 3 definida pela equa33o de autovalor:

$$S_i^j u^i = -\sigma u^j \quad (\text{A.38})$$

com $u^i u_i = -1$. Das equa33es (A.37) e (A.38) segue que

$$-8\pi\sigma = \gamma_{ij} u^i u^j + \gamma. \quad (\text{A.39})$$

Para uma casca esf3rica a m3trica intr3nseca pode ser dada em termos de coordenadas com3veis como:

$$ds_\Sigma^2 = R^2(\tau)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - d\tau^2, \quad (\text{A.40})$$

onde $u^i \equiv (\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\tau}) = (0, 0, 1)$ e \dot{x} denota $\frac{dx}{d\tau}$. Das equa33es (A.39) e (A.40) segue que:

$$\gamma_{\theta\theta} = -4\pi R^2\sigma \equiv -M(\tau), \quad (\text{A.41})$$

a partir da qual obtemos

$$K_{\theta\theta}^2|^+ = \frac{1}{4M^2(\tau)}(K_{\theta\theta}^2|^+ - K_{\theta\theta}^2|^+ - M^2(\tau))^2. \quad (\text{A.42})$$

Escreva a métrica nas quadrigemetrias V^+ e V^- como

$$ds_{\pm}^2 = (2cdvdr - c^2 f dv^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2))_{\pm} \quad (\text{A.43})$$

onde $c = c(v, r)$ e $f = f(v, r)$. Para uma simultâneo encaixe de Σ em V^+ e V^- segue das equações (A.40) e (A.43) que $r_{\Sigma} = R(\tau)$, $\theta^+ = \theta^-$, $\phi^+ = \phi^-$, e

$$(c^2 f b^2 - 2c\dot{R}\dot{v}) |^{\pm} = 1. \quad (\text{A.44})$$

Com $K_{ij} \equiv -\eta_{\alpha} \delta \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi^j}, \xi^j$ sendo as coordenadas intrínsecas de Σ e n_{α} os vetores unitários normais a Σ , segue da equação (A.43) que

$$K_{\theta\theta} = \pm R(\tau)(cf\dot{v} - \dot{R}), \quad (\text{A.45})$$

onde $(n_v, n_r, n_{\theta}, n_{\phi}) = \pm c(-\dot{R}, \dot{v}, 0, 0)$. Da equação (A.44) temos:

$$cf\dot{v} - \dot{R} = \pm(\dot{R}^2 + f)^{1/2}. \quad (\text{A.46})$$

Inserindo as equações (A.45) e (A.46) na equação (A.42) obtém-se a equação do movimento:

$$\dot{R}^2 = \left(\frac{R}{2M}\right)^2 (f_+ - f_-)^2 - \frac{1}{2}(f_+ + f_-) + \left(\frac{M}{2R}\right)^2. \quad (\text{A.47})$$

Note que a equação (A.47) segue diretamente das equações de Lanczos (A.37), da simetria esférica e da forma da métrica (equação (A.43)) dos espaços-tempos envolventes. Em particular, nenhuma forma do 3-tensor da energia de superfície intrínseca S_{ij} foi utilizado. Para obtenção de $M(\tau)$ (e assim a história de Σ) devemos, através do uso das equações de campo, relacionar uma forma explícita do 3-tensor S_{ij} ao pulo através de Σ dos tensores momentum-energia dos espaços-tempos envolventes. A partir das equações de Gauss-Codazzi, das equações de campo de Einstein, e das equações de Lanczos, segue que

$$S_{i,j}^j = - \left[T_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \xi^i} n^{\beta} \right] \quad (\text{A.48})$$

Para um fluido ideal de pressão de superfície P ,

$$S_{ij} = (\sigma + P)u_i u_j + P g_{ij}, \quad (\text{A.49})$$

de modo que

$$\dot{M} + 8\pi R\dot{R}P = 4\pi R^2[T_{\alpha\beta}u^\alpha n^\beta] \quad (\text{A.50})$$

Esta expressão é claramente invariante sob a mudança $T_{\alpha\beta} \rightarrow T_{\alpha\beta} - \Lambda g_{\alpha\beta}$. Se $[T_{\alpha\beta}u^\alpha n^\beta] = P = 0$, então com condições iniciais dadas a informação governando a história da casca de poeira é completamente determinada pela equação (A.47). Mais geralmente, das equações (A.37) e (A.40) segue que

$$8\pi P = \frac{1}{2}(\gamma - \gamma_{ij}u^i u^j) = -\gamma_{\tau\tau} + 4\pi\sigma, \quad (\text{A.51})$$

e da equação (A.43) temos

$$K_{\tau\tau} = \pm \left(-\frac{\ddot{v}}{\dot{v}} - \frac{\dot{v}c}{2} \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\dot{c}}{c} - \left(\frac{\partial c}{\partial r} \right) \left(\frac{1 + c\dot{R}\dot{v}}{c^2\dot{v}} \right) \right) \quad (\text{A.52})$$

e

$$4\pi R^2[T_{\alpha\beta}u^\alpha n^\beta] = \pm \frac{R^2}{2} \left[-\frac{c\dot{v}^2}{R} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\dot{v}^2}{c} A + \frac{\dot{R}}{c} B \right], \quad (\text{A.53})$$

onde

$$A = -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial v} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial v^2} + \frac{fc}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial v \partial r} + \frac{c}{4} \left(\frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial c}{\partial r} - \frac{\partial c}{\partial v} \frac{\partial f}{\partial r} \right) - f \frac{\partial c}{\partial v} \frac{\partial c}{\partial r} \quad (\text{A.54})$$

e

$$B = (cf\dot{v} - \dot{R}) \left(\frac{2}{R} \frac{\partial c}{\partial r} - \frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} \right) \quad (\text{A.55})$$

para $(n^v, n^r, n^\theta, n^\phi) = \pm(\dot{v}, cf\dot{v} - \dot{R}, 0, 0)$.

Técnicas Computacionais

Em 1916 Einstein propôs suas equações de campo. Elas são um conjunto de 10 equações diferenciais parciais não lineares para a métrica do espaço-tempo $g_{\mu\nu}$. Einstein, inclusive, achou que seria impossível encontrar uma solução exata das equações, ficando surpreso quando Schwarzschild encontrou uma solução exata de suas equações, obviamente fazendo suposições que tornam possível resolvê-las como estaticidade e simetria esférica. Podemos dizer que foi com Schwarzschild que iniciou-se o estudo das soluções exatas das equações de campo de Einstein e este continua sendo um intenso campo de pesquisa na área da relatividade geral atualmente, tendo importantes implicações no estudo do colapso gravitacional.

Porém, em geral, a complexidade das equações de campo de Einstein torna a solução, na imensa maioria dos casos, uma tarefa bastante árdua. Apenas com o surgimento dos computadores foi possível um grande avanço nesta área da relatividade geral (assim como em outras áreas da física), pois foram criados métodos e ferramentas de cálculo numérico e algébrico para este fim¹.

O objetivo deste apêndice é dar um panorama geral do estado da arte da aplicação de computação algébrica e numérica em relatividade geral tomando como base os trabalhos desenvolvidos nos capítulos 4, 5 e 6 da presente tese.

¹Recomendo aos interessados em se aprofundarem em aplicações de computação algébrica e numérica na relatividade geral recorrerem às referências [192] a [206].

B.1 Computação Algébrica

O campo de computação algébrica é basicamente o campo de pesquisa da utilização de computadores realizando cálculos algébricos.

O programa mais antigo conhecido capaz de realizar cálculos algébricos em um computador foi escrito em 1953 e era capaz de calcular derivadas simbolicamente. Em torno de 1960, o LISP de John McCarthy já encontrava-se disponível, mas apenas em meados da década de 1960 que começaram a ser desenvolvidos sistemas algébricos mais poderosos. Este desenvolvimento pode ser dividido em duas frentes. Uma das frentes tinha basicamente a motivação teórica dos cientistas da computação sem necessariamente ambicionar a resolução de problemas práticos como na outra frente de pesquisa, consistindo principalmente de físicos teóricos buscando resposta para problemas reais entre os quais se destaca o cálculo dos diagramas de Feynman na eletrodinâmica quântica. Um outro exemplo desta frente foi o software CAMAL de Barton e Fitch para cálculos em Mecânica Celeste e o LAM (Lisp Algebraic Manipulator) de Ray d' Inverno designado para cálculos básicos relacionados às soluções exatas das equações de campo de Einstein. É oportuno citar que as duas frentes de pesquisa contribuíram bastante para a evolução dos softwares de computação algébrica. Basta dizer que, em torno de 1985, foi estimado a existência de 100 sistemas de computação algébrica [193, 194] e nos dias de hoje este número é ainda maior. Dois softwares de computação algébrica foram utilizados exaustivamente nos trabalhos apresentados nos capítulos 4, 5 e 6 desta tese: O MAXIMA e o MAPLE.

MAXIMA

O MAXIMA é um software livre, de código fonte aberto em C/C++ podendo ser compilado em vários sistemas incluindo Windows, Linux, e MacOS X.

O MAXIMA originou-se do software MACSYMA, o lendário sistema de computação

algébrica desenvolvido no MIT (Massachusetts Institute of Technology) na década de 1960 e que inspirou sistemas comerciais amplamente utilizados nos dias de hoje como MAPLE e MATHEMATICA.

O MAXIMA é um sistema de manipulação simbólica de expressões e também incorpora alguns algoritmos para cálculo numérico incluindo diferenciação, integração, resolução de equações diferenciais, transformações de Laplace, matrizes, vetores e tensores e muito mais, podendo inclusive fazer gráficos bidimensionais e tridimensionais.

O MAXIMA era mantido por William Schelter desde 1982 até ser passado adiante em 2001. Em 1998 ele obteve permissão para lançar o código fonte sob a licença GPL (GNU General Public License).

O MAXIMA, atualmente, está sendo constantemente atualizado para consertos de bugs, melhoria do código e documentação.

Nesta tese, o MAXIMA foi principalmente utilizado nos capítulos 4 e 5 para manipulações algébricas e comparações com os resultados obtidos a mão (sem computadores) e com os obtidos no MAPLE.

MAPLE

O MAPLE é um software proprietário, bastante utilizado pela comunidade acadêmica e com uma vasta literatura disponível para quem quiser aplicá-lo a pesquisa e ao ensino².

O MAPLE foi bastante utilizado nesta tese, principalmente na busca de gravatares, com métodos analíticos, gráficos e numéricos, geração de códigos fontes em Fortran e C das funções analíticas obtidas para posteriores cálculos numéricos e conversão da sintaxe das equações obtidas no MAPLE para LATEX utilizadas na redação de artigos comparando-se sempre os resultados obtidos por este com os resultados obtidos por outros meios (a mão, com o MAXIMA ou

²Para os interessados em conhecer o MAPLE, deixo as referências [207] a [225] como ponto de partida.

com o ROOT).

B.2 Computação Numérica

Muitos dos casos apresentados nesta tese não puderam ser analisados analiticamente devido a enorme complexidade na forma das equações e funções envolvidas. Entre os métodos numéricos utilizados no presente trabalho estão a resolução de equações diferenciais pelo método de diferenças finitas e métodos gráficos.

A linguagem de programação utilizada foi o C/C++ no linux utilizando o ambiente integrado de desenvolvimento (IDE) KDevelop no Linux Fedora Core 9 e o software ROOT do CERN.

Esta seção de computação numérica será dividida em duas partes. Na primeira delas será apresentado, de forma sucinta, o ROOT e na segunda parte serão mostrados alguns dos códigos em C/C++ utilizados para obtermos os resultados apresentados nesta tese.

B.2.1 Root

A maior parte dos gráficos e dos cálculos numéricos utilizados na presente tese foram feitos com o software ROOT desenvolvido no CERN que é utilizado principalmente por físicos de partículas para análise de dados do Large Hadron Collider (LHC). O sistema anterior utilizado pelos físicos do CERN, o software PAW, era baseado em Fortran e a migração para o ROOT, escrito em C++ tendo como base o paradigma da programação orientada a objetos [226, 227, 228, 229, 230, 231], se deu principalmente pelos desafios a serem enfrentados pelo LHC com o enorme volume de dados para análise.

O sistema ROOT fornece uma série de ferramentas orientadas a objetos com toda funcionalidade necessária para manuseio e análise de imensas quantidades de dados de forma bastante eficiente. O paradigma da programação orien-

tada a objetos, amplamente utilizada hoje em dia, vem aos poucos substituindo o paradigma da programação estruturada que ainda é utilizada por vários pesquisadores do meio acadêmico [232, 233, 234, 235, 236]. Longe deste apêndice ser um resumo de programação orientada a objetos, pode-se basicamente dizer que é um tipo de programação que facilita a reutilização do código e linguagens orientadas a objetos como Java, C++ e Smalltalk tem implementadas aspectos de orientação a objetos como encapsulamento, herança e polimorfismo [237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248].

Voltando ao ROOT, possuindo os dados definidos como um conjunto de objetos, métodos de armazenamento especializados são utilizados para terem acesso direto ao atributos separados dos objetos selecionados, sem ter que tocar a massa de dados. Temos como gerar gráficos em 1,2 e 3 dimensões, técnicas de ajuste de curvas, otimização, histogramas e muitas outras funcionalidades que permitem a facilidade de um sistema de análise que pode processar os dados, inclusive, interativamente utilizando um interpretador em C++ chamado CINT. Podemos escrever macros para serem interpretados pelo CINT ou podemos compilar o código escrito em C++ usando as bibliotecas do ROOT. Adicionalmente existe, inclusive, um projeto em andamento onde poderemos fazer computação algébrica utilizando a sintaxe do C++ (muito útil se levarmos em consideração que basta conhecermos uma única linguagem para desenvolvermos rotinas em computação algébrica e em computação numérica) com a parte numérica sendo feita utilizando-se as rotinas do ROOT [249].

O ROOT, além de tudo, é um sistema com código fonte aberto, ou seja, podemos estender sua funcionalidade adicionando novas bibliotecas com os algoritmos que desenvolvemos o que o torna uma excelente ferramenta para aquisição de dados, simulações e análise numérica.

B.3 Alguns códigos utilizados no trabalho

O objetivo desta seção é mostrar alguns dos códigos utilizados na construção dos gráficos e no cálculo numérico. Todos os códigos foram escritos em C/C++³.

No capítulo 4 apresentamos um modelo dinâmico simples de gravastar, onde pudemos calcular analiticamente os potenciais apenas no caso em que $m = 0$ e $L \neq \infty$ e no caso em que $m \neq 0$ e $L = \infty$. Encontrar um gravastar não foi uma tarefa simples, pois com o modelo que tínhamos até o momento em que o trabalho apresentado no capítulo 4 foi concluído, tivemos que chutar valores de m e L com a restrição $2m < R_0 < L$ para encontrarmos um dos dois tipos de gravastares de Visser-Wiltshire. Diria que foi muita sorte encontrarmos um gravastar do tipo *bounded excursion* com os dados que tínhamos em mãos na época. Apenas com a generalização da camada fina pudemos ter uma idéia melhor de como encontrar potenciais que satisfaziam as condições de Visser-Wiltshire e, assim, encontrar um dos dois tipos de gravastar como os apresentados nos capítulos 5 e 6. Para gerar os gráficos do potencial em função de R foi utilizado o software ROOT e a dinâmica da camada foi estudada numericamente utilizando diferenças finitas (gráficos $R \times \tau$ apresentados no capítulo 4)⁴.

A seguir mostrarei alguns scripts para gerar no ROOT os gráficos $V(R) \times R$ e uma das versões dos códigos fontes para estudo do colapso gravitacional e geração dos gráficos $R \times \tau$ apresentados no capítulo 4. Todos os demais gráficos apresentados nos capítulos 5 e 6 foram feitos de forma semelhante.

B.3.1 Potential.h (para rodar no ROOT)

```
Double_t Potential(Double_t m, Double_t L, Double_t R)
{
    Double_t a1=-1.0 + (m/R) + (1.0/(4.0*pow(R,6))) + (pow(R,2)/(2.0*L));
    Double_t a2=pow(m,2)*pow(R,4)-((m*pow(R,7))/pow(L,2))+ (pow(R,10)/(4.0*pow(L,4)));
```

³Para os interessados em conhecer a linguagem C/C++, recomendo a leitura das referências [250] a [342].

⁴Os gráficos $R \times \tau$ apresentados no capítulo 4 não foram apresentados nos capítulos (e nos respectivos artigos) posteriores por não apresentarem novas informações relevantes para o trabalho desenvolvido nesta tese.

```

    return -0.5*(a1+a2);
}
Double_t PotentialLInf(Double_t m, Double_t R)
{
    Double_t a1=-1.0 + (m/R) + (1.0/(4.0*pow(R,6)));
    Double_t a2=pow(m,2)*pow(R,4);
    return -0.5*(a1+a2);
}

```

B.3.2 gravgraficomacro.C (para rodar no ROOT)

```

{
Int_t n=1000000;
Double_t x[1000000], y[1000000], d1,d2;

i=0;
FILE* arq;
arq=fopen("/home/pedroc/root/macros/R.txt","r");
if (i<n)
{
do
{
fscanf(arq,"%lf %lf\n",&d1,&d2);
y[i]=d1;
x[i]=d2;
i++;
}
while(i<n && !feof(arq));
}
fclose(arq);

TGraph * gr1 = new TGraph (n,x,y);
TCanvas * c1 = new TCanvas("c1","",200,10,600,400);
gr1->SetTitle("m=1, L=10");
gr1->GetXaxis()->SetTitle("t");
gr1->GetYaxis()->SetTitle("R");
gr1->GetXaxis()->CenterTitle();
gr1->GetYaxis()->CenterTitle();
gr1->Draw("AC");
gPad->SetFillColor(0);
c1->Print("R_1.eps");

i=0;
arq=fopen("/home/pedroc/root/macros/dRdt.txt","r");
if (i<n)
{
do
{
fscanf(arq,"%lf %lf\n",&d1,&d2);
y[i]=d1;
x[i]=d2;
i++;
}
while(i<n && !feof(arq));
}
}

```



```

fclose(arq);

TGraph * gr2 = new TGraph (n,x,y);
TCanvas * c2 = new TCanvas("c2","",200,10,600,400);
gr2->SetTitle("m=1, L=10");
gr2->GetXaxis()->SetTitle("t");
gr2->GetYaxis()->SetTitle("dR/dt");
gr2->GetXaxis()->CenterTitle();
gr2->GetYaxis()->CenterTitle();
gr2->Draw("AC");
gPad->SetFillColor(0);
c2->Print("dRdt_1.eps");

i=0;

arq=fopen("/home/pedroc/root/macros/d2Rdt2.txt","r");
if (i<n)
{
do
{
fscanf(arq,"%lf %lf\n",&d1,&d2);
y[i]=d1;
x[i]=d2;
i++;
}
while(i<n && !feof(arq));
}
fclose(arq);

TGraph * gr3 = new TGraph (n,x,y);
TCanvas * c3 = new TCanvas("c3","",200,10,600,400);
gr3->SetTitle("m=1, L=10");
gr3->SetTitle("");
gr3->GetXaxis()->SetTitle("t");
gr3->GetYaxis()->SetTitle("d^{2}R/dt^{2}");
gr3->GetXaxis()->CenterTitle();
gr3->GetYaxis()->CenterTitle();
gr3->Draw("AC");
gPad->SetFillColor(0);
c3->Print("d2Rdt2_1.eps");

}

```

B.3.3 gravastargrafmacro.C (para rodar no ROOT)

```

{
Int_t n=1000000;
Double_t x[1000000], y[1000000], d1,d2;

//Rxt

i=0;
FILE* arq;
arq=fopen("/home/pedroc/gravastarmacros/R.txt","r");
if (i<n)
{
do

```

```

        {
            fscanf(arq, "%lf %lf\n", &d1, &d2);
            x[i]=d2;
            y[i]=d1;
            i++;
        }
        while(!feof(arq));
    }
fclose(arq);

TGraph * gr1 = new TGraph (n,x,y);
TCanvas * c1 = new TCanvas("c1", "", 200, 10, 600, 400);
gr1->SetTitle("");
gr1->GetXaxis()->SetTitle("t");
gr1->GetYaxis()->SetTitle("R");
gr1->GetYaxis()->SetLimits(0,2);
gr1->Draw("AP");
c1->Print("R.eps");

// dR/dt X t

i=0;
arq=fopen("/home/pedroc/gravastarmacros/dRdt.txt", "r");
if (i<n)
{
    do
    {
        fscanf(arq, "%lf %lf\n", &d1, &d2);
        x[i]=d2;
        y[i]=d1;
        i++;
    }
    while(!feof(arq));
}

fclose(arq);

TGraph * gr2 = new TGraph (n,x,y);
TCanvas * c2 = new TCanvas("c2", "", 200, 10, 600, 400);
gr2->SetTitle("");
gr2->GetXaxis()->SetTitle("t");
gr2->GetYaxis()->SetTitle("dR/dt");
gr2->GetXaxis()->CenterTitle();
gr2->GetYaxis()->CenterTitle();
gr2->Draw("AP");
c2->Print("dRdt.eps");

//d2R/dt2 X t

i=0;

arq=fopen("/home/pedroc/gravastarmacros/d2Rdt2.txt", "r");
if (i<n)
{
    do
    {
        fscanf(arq, "%lf %lf\n", &d1, &d2);
        x[i]=d2;
        y[i]=d1;
        i++;
    }
    while(!feof(arq));
}

```

```

    }
    fclose(arq);

TGraph * gr3 = new TGraph (n,x,y);
TCanvas * c3 = new TCanvas("c3","",200,10,600,400);
gr3->SetTitle("");
gr3->GetXaxis()->SetTitle("t");
gr3->GetYaxis()->SetTitle("d^{2}R/dt^{2}");
gr3->GetXaxis()->CenterTitle();
gr3->GetYaxis()->CenterTitle();
gr3->Draw("AP");
c3->Print("d2Rdt2.eps");

}

```

B.3.4 gravastarblackhole.C (para rodar no ROOT)

```

{
Int_t i=0,n=10000;

Double_t R1[1000000],R2[1000000],R3[1000000],R4[1000000],R5[1000000],R6[1000000],R7[1000000],
V1[1000000],V2[1000000],V3[1000000],V4[1000000],V5[1000000],V6[1000000],V7[1000000],O[1000000],m,l;

O[0]=0.0;
R7[0]=R6[0]=R5[0]=R4[0]=R3[0]=R2[0]=R1[0]=0.000001;
for(i=1;i<n;i++)
{
R7[i]=R6[i]=R5[i]=R4[i]=/*R2[i]=*/R1[i]=0.0001*i;
R2[i]=0.001*i;
R3[i]=0.001*i;
O[i]=0.0;
}

for(i=0;i<n;i++)
{
/*m=1.0;
l=10.0;
V1[i]=Potential(m,l,R1[i]);

m=1.0e-4;
l=1.0e4;
V2[i]=Potential(m,l,R2[i]);
*/
m=1.0e-4;
l=2.5e5;
V3[i]=Potential(m,l,R3[i]);

/*
m=1.0e-4;
l=1.0;
V4[i]=Potential(m,l,R4[i]);

m=pow(10,-0.2864562648505);
l=2.5e5;
V5[i]=Potential(m,l,R5[i]);

m=pow(10,-0.2864562648505);
l=100.0;
V6[i]=Potential(m,l,R6[i]);

m=pow(10,-0.2864562648505);

```

```

V7[i]=PotentialLInf(m,R7[i]);
*/
}

//Cria Grficos V em funo de R
/*
TCanvas * c1 = new TCanvas("c1","",10,40,800,600);
TGraph * gr1 = new TGraph (n,R1,V1);
gr1->SetTitle("\it{m}=1, \it{L}=10");
gr1->GetXaxis()->SetLimits(0,8);
gr1->GetYaxis()->SetLimits(-70,10);
gr1->GetXaxis()->SetTitle(" \it{R}");
gr1->GetYaxis()->SetTitle(" \it{V(R)}");
gr1->GetXaxis()->CenterTitle();
gr1->GetYaxis()->CenterTitle();
gr1->SetMinimum(-70.0);
gr1->SetMaximum(10.0);
gr1->SetMarkerStyle(1);
gr1->SetMarkerColor(1);
gr1->SetLineColor(1);
gr1->Draw("Ap");
gPad->SetFillColor(0);
TGraph * gr11 = new TGraph (n,R1,O);
gr11->SetTitle("");
gr11->GetXaxis()->SetLimits(-1,8);
gr11->GetYaxis()->SetLimits(-70,10);
gr11->GetXaxis()->SetTitle(" \it{R}");
gr11->GetYaxis()->SetTitle(" \it{V(R)}");
gr11->GetXaxis()->CenterTitle();
gr11->GetYaxis()->CenterTitle();
gr11->SetMinimum(-70.0);
gr11->SetMaximum(10.0);
gr11->SetMarkerStyle(1);
gr11->SetMarkerColor(1);
gr11->SetLineColor(1);
gr11->Draw("p");
gPad->SetFillColor(0);
c1->Print("V1.eps");
*/

TCanvas * c2 = new TCanvas("c2","",10,40,800,600);
TGraph * gr2 = new TGraph (n,R2,V2);
gr2->SetTitle("m=10^{-4}, L=10^4");
//gr2->GetXaxis()->SetLimits(0,80);
//gr2->GetYaxis()->SetLimits(-10,1);
gr2->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr2->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr2->GetXaxis()->CenterTitle();
gr2->GetYaxis()->CenterTitle();
//gr2->SetMinimum(-10.0);
//gr2->SetMaximum(1.0);
gr2->SetMarkerStyle(1);
gr2->SetMarkerColor(1);
gr2->SetLineColor(1);
gr2->Draw("Ap");
gPad->SetFillColor(0);
TGraph * gr21 = new TGraph (n,R2,O);
gr21->SetTitle("");
//gr21->GetXaxis()->SetLimits(0,100);
//gr21->GetYaxis()->SetLimits(-50,10);
gr21->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr21->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr21->GetXaxis()->CenterTitle();

```

```

gr21->GetYaxis()->CenterTitle();
//gr21->SetMinimum(-10.0);
//gr21->SetMaximum(1.0);
gr21->SetMarkerStyle(1);
gr21->SetMarkerColor(1);
gr21->SetLineColor(1);
gr21->Draw("p");
gPad->SetFillColor(0);
c2->Print("V2.eps");

/*

TCanvas * c3 = new TCanvas("c3","",10,40,800,600);
TGraph * gr3 = new TGraph (n,R3,V3);
gr3->SetTitle("m=10^{-4}, L=2.5 10^5");
gr3->GetXaxis()->SetLimits(0,300);
gr3->GetYaxis()->SetLimits(-2,1);
gr3->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr3->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr3->GetXaxis()->CenterTitle();
gr3->GetYaxis()->CenterTitle();
gr3->SetMinimum(-2.0);
gr3->SetMaximum(1.0);
gr3->SetMarkerStyle(1);
gr3->SetMarkerColor(1);
gr3->SetLineColor(1);
gr3->Draw("Ap");
gPad->SetFillColor(0);
TGraph * gr31 = new TGraph (n,R3,0);
gr31->SetTitle("");
gr31->GetXaxis()->SetLimits(0,300);
gr31->GetYaxis()->SetLimits(-2,1);
gr31->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr31->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr31->GetXaxis()->CenterTitle();
gr31->GetYaxis()->CenterTitle();
gr31->SetMinimum(-2.0);
gr31->SetMaximum(1.0);
gr31->SetMarkerStyle(1);
gr31->SetMarkerColor(1);
gr31->SetLineColor(1);
gr31->Draw("p");
gPad->SetFillColor(0);
c3->Print("V3.eps");

TCanvas * c4 = new TCanvas("c4","",10,40,800,600);
TGraph * gr4 = new TGraph (n,R4,V4);
gr4->SetTitle("m=10^{-4}, L=1");
gr4->GetXaxis()->SetLimits(0,1.5);
gr4->GetYaxis()->SetLimits(-0.4,0.2);
gr4->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr4->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr4->GetXaxis()->CenterTitle();
gr4->GetYaxis()->CenterTitle();
gr4->SetMinimum(-0.4);
gr4->SetMaximum(0.2);
gr4->SetMarkerStyle(1);
gr4->SetMarkerColor(1);
gr4->SetLineColor(1);
gr4->Draw("Ap");
gPad->SetFillColor(0);
TGraph * gr41 = new TGraph (n,R4,0);
gr41->SetTitle("");
gr41->GetXaxis()->SetLimits(0,1.5);
gr41->GetYaxis()->SetLimits(-0.4,0.2);

```

```

gr41->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr41->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr41->GetXaxis()->CenterTitle();
gr41->GetYaxis()->CenterTitle();
gr41->SetMinimum(-0.4);
gr41->SetMaximum(0.2);
gr41->SetMarkerStyle(1);
gr41->SetMarkerColor(1);
gr41->SetLineColor(1);
gr41->Draw("p");
gPad->SetFillColor(0);
c4->Print("V4.eps");

TCanvas * c5 = new TCanvas("c5","",10,40,800,600);
TGraph * gr5 = new TGraph(n,R5,V5);
gr5->SetTitle("m=10^{-0.286}, L=2.5 10^{5}");
gr5->GetXaxis()->SetLimits(0,3);
gr5->GetYaxis()->SetLimits(-0.04,0.02);
gr5->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr5->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr5->GetXaxis()->CenterTitle();
gr5->GetYaxis()->CenterTitle();
gr5->SetMinimum(-0.04);
gr5->SetMaximum(0.02);
gr5->SetMarkerStyle(1);
gr5->SetMarkerColor(1);
gr5->SetLineColor(1);
gr5->Draw("Ap");
gPad->SetFillColor(0);
TGraph * gr51 = new TGraph(n,R5,0);
gr51->SetTitle("");
gr51->GetXaxis()->SetLimits(0,3);
gr51->GetYaxis()->SetLimits(-0.04,0.02);
gr51->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr51->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr51->GetXaxis()->CenterTitle();
gr51->GetYaxis()->CenterTitle();
gr51->SetMinimum(-0.04);
gr51->SetMaximum(0.02);
gr51->SetMarkerStyle(1);
gr51->SetMarkerColor(1);
gr51->SetLineColor(1);
gr51->Draw("p");
gPad->SetFillColor(0);
c5->Print("V5.eps");

TCanvas * c6 = new TCanvas("c6","",10,40,800,600);
TGraph * gr6 = new TGraph(n,R6,V6);
gr6->SetTitle("m=10^{-0.286}, L=100");
gr6->GetXaxis()->SetLimits(0,30);
gr6->GetYaxis()->SetLimits(-3500,10);
gr6->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr6->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr6->GetXaxis()->CenterTitle();
gr6->GetYaxis()->CenterTitle();
gr6->SetMinimum(-3500.0);
gr6->SetMaximum(10.0);
gr6->SetMarkerStyle(1);
gr6->SetMarkerColor(1);
gr6->SetLineColor(1);
gr6->Draw("Ap");
gPad->SetFillColor(0);

```

```

TGraph * gr6l = new TGraph (n,R6,O);
gr6l->SetTitle("");
gr6l->GetXaxis()->SetLimits(0,30);
gr6l->GetYaxis()->SetLimits(-3500,10);
gr6l->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr6l->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr6l->GetXaxis()->CenterTitle();
gr6l->GetYaxis()->CenterTitle();
gr6l->SetMinimum(-3500.0);
gr6l->SetMaximum(10.0);
gr6l->SetMarkerStyle(1);
gr6l->SetMarkerColor(1);
gr6l->SetLineColor(1);
gr6l->Draw("p");
gPad->SetFillColor(0);
c6->Print("V6.eps");

TCanvas * c6zoom = new TCanvas("c6zoom","",10,40,800,600);
TGraph * gr6zoom = new TGraph (n,R6,V6);
gr6zoom->SetTitle("m=10^{-0.286}, L=100 with Zoom");
gr6zoom->GetXaxis()->SetLimits(0,30);
gr6zoom->GetYaxis()->SetLimits(-1,0.1);
gr6zoom->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr6zoom->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr6zoom->GetXaxis()->CenterTitle();
gr6zoom->GetYaxis()->CenterTitle();
gr6zoom->SetMinimum(-1.0);
gr6zoom->SetMaximum(0.1);
gr6zoom->SetMarkerStyle(1);
gr6zoom->SetMarkerColor(1);
gr6zoom->SetLineColor(1);
gr6zoom->Draw("Ap");
gPad->SetFillColor(0);
TGraph * gr6lzoom = new TGraph (n,R6,O);
gr6lzoom->SetTitle("");
gr6lzoom->GetXaxis()->SetLimits(0,30);
gr6lzoom->GetYaxis()->SetLimits(-1,0.1);
gr6lzoom->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr6lzoom->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr6lzoom->GetXaxis()->CenterTitle();
gr6lzoom->GetYaxis()->CenterTitle();
gr6lzoom->SetMinimum(-1.0);
gr6lzoom->SetMaximum(0.1);
gr6lzoom->SetMarkerStyle(1);
gr6lzoom->SetMarkerColor(1);
gr6lzoom->SetLineColor(1);
gr6lzoom->Draw("p");
gPad->SetFillColor(0);
c6zoom->Print("V6zoom.eps");

TCanvas * c7 = new TCanvas("c7","",10,40,800,600);
TGraph * gr7 = new TGraph (n,R7,V7);
gr7->SetTitle("m=10^{-0.286}, {L}=10^{6}");
gr7->GetXaxis()->SetLimits(0.5,1.5);
gr7->GetYaxis()->SetLimits(-0.02,0.02);
gr7->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr7->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr7->GetXaxis()->CenterTitle();
gr7->GetYaxis()->CenterTitle();
gr7->SetMinimum(-0.02);
gr7->SetMaximum(0.02);
gr7->SetMarkerStyle(1);
gr7->SetMarkerColor(1);

```

```

gr7->SetLineColor(1);
gr7->Draw("Ap");
gPad->SetFillColor(0);
TGraph * gr71 = new TGraph (n,R7,0);
gr71->SetTitle("");
gr71->GetXaxis()->SetLimits(0.5,1.5);
gr71->GetYaxis()->SetLimits(-0.001,0.001);
gr71->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr71->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr71->GetXaxis()->CenterTitle();
gr71->GetYaxis()->CenterTitle();
gr71->SetMinimum(-0.02);
gr71->SetMaximum(0.02);
gr71->SetMarkerStyle(1);
gr71->SetMarkerColor(1);
gr71->SetLineColor(1);
gr71->Draw("p");
gPad->SetFillColor(0);
c7->Print("V7.eps");

*/
}

```

B.3.5 gravastar.h (para estudo do colapso)

```

#ifndef GRAVASTAR_H
#define GRAVASTAR_H

#include <math.h>

double Potential(double m, double L, double R)
{
    double a1=-1.0 + (m/R) + (1.0/(4.0*pow(R,6))) + (pow(R,2)/(2.0*L));
    double a2=pow(m,2)*pow(R,4)-((m*pow(R,7))/pow(L,2)+pow(R,10)/(4.0*pow(L,4)));
    return -0.5*(a1+a2);
}

double PotentialLInf(double m, double R)
{
    double a1=-1.0 + (m/R) + (1.0/(4.0*pow(R,6)));
    double a2=pow(m,2)*pow(R,4);
    return -0.5*(a1+a2);
}

double d2Rdt2pot(double m, double L, double R, double dRdt)
{
    double a1=Potential(m,L,R)/(sqrt(-2.0*Potential(m,L,R)))*dRdt;
    double a2=-0.5*(-1.0-(m/pow(R,2.0))-(1.5/pow(R,7.0))-(R/L)+
(4.0*pow(m,2.0)*pow(R,3.0))-((7.0*m*pow(R,6.0))/pow(L,2.0))+
(2.5*pow(R,9.0))/pow(L,4.0));

    return a1*a2;
}

double d2Rdt2inf(double m, double R, double dRdt)
{
    double a1=PotentialLInf(m,R)/(sqrt(-2.0*PotentialLInf(m,R)))*dRdt;
    double a2=-0.5*(-(m/pow(R,2.0))-(1.5/pow(R,7.0))+(4.0*pow(m,2.0)*pow(R,3.0)));

    return a1*a2;
}

```



```
#endif
```

B.3.6 gravastar.cpp (para estudo do colapso)

```
/*
 * Copyright (C) 2007 by pedro rocha
 * pedroc@localhost.localdomain
 *
 * This program is free software; you can redistribute it and/or modify
 * it under the terms of the GNU General Public License as published by
 * the Free Software Foundation; either version 2 of the License, or
 * (at your option) any later version.
 *
 * This program is distributed in the hope that it will be useful,
 * but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
 * MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the
 * GNU General Public License for more details.
 *
 * You should have received a copy of the GNU General Public License
 * along with this program; if not, write to the
 * Free Software Foundation, Inc.,
 * 59 Temple Place - Suite 330, Boston, MA 02111-1307, USA.
 */

#ifdef HAVE_CONFIG_H
#include <config.h>
#endif

#include <iostream>
#include <cstdlib>
#include "gravastar.h"

using namespace std;

void generateDataR(double m, double L, double hr, double R0)
{
    double R=R0,dRdt=0.0,d2Rdt2=0.0;
    FILE * arq1;
    bool trocasinal=false;
    double potential=0.0;
    double potentialbef=0.0;
    double V; // para armazenar valor do potencial a ser impresso no arquivo de dados
    double lastR=R0; //para guardar o valor de R antes do potencial mudar de sinal
    unsigned long int i=0;
    char namefile1[15];
    strcpy(namefile1,"R.txt");
    arq1 = fopen(namefile1,"w");

    unsigned long int n=0;

    while(R>0.0 && n<10000 && R<1.0e7)
    {
        potentialbef=potential(m,L,lastR);
        potential=potential(m,L,R);

        //verify if the signal of the potential changes
        if((potentialbef<0.0 && potential>0.0))
        {
            trocasinal=true;
            R=lastR;
        }
    }
}
```

```

    }
else
    {
        trocasinal=false;
    }

//se troca de sinal e dR/dt era negativo, dR/dt passa a ser positivo
if(trocasinal && dRdt<0.0)
{
dRdt=sqrt(-2.0*potentialbef);
d2Rdt2=d2Rdt2pot(m,L,R,dRdt);
trocasinal=false;
V=potentialbef;
}
//se troca de sinal e dR/dt era positivo, dR/dt passa a ser negativo
else if(trocasinal && dRdt>0.0)
{
dRdt=-sqrt(-2.0*potentialbef);
d2Rdt2=d2Rdt2pot(m,L,R,dRdt);
trocasinal=false;
V=potentialbef;
}
else if(!trocasinal && dRdt<0.0)
{
dRdt=-sqrt(-2.0*potential);
d2Rdt2=d2Rdt2pot(m,L,R,dRdt);
V=potential;
}
else if(!trocasinal && dRdt>0.0)
{
dRdt=sqrt(-2.0*potential);
d2Rdt2=d2Rdt2pot(m,L,R,dRdt);
V=potential;
}
else if (dRdt==0.0)//i am studing collapse
{
dRdt=-sqrt(-2.0*potential);
d2Rdt2=d2Rdt2pot(m,L,R,dRdt);
trocasinal=false;
V=potential;
}

lastR=R; //atualiza lastR
trocasinal=false;

fprintf(arq1,"%lf %lf\n",R,i*hr); // imprime R em funcao de t

R+=hr*dRdt; //atualiza R
i++;
n++;
}

fclose(arq1);
}

void generateDataRLInf(double m, double hr, double R0, char* nomearq)
{
double R=R0,dRdt=0.0,d2Rdt2=0.0;
FILE * arq1;
bool trocasinal=false;
double potential=0.0;

```

```

double potentialbef=0.0;
double V; // para armazenar valor do potencial a ser impresso no arquivo de dados
double lastR=R0; //para guardar o valor de R antes do potencial mudar de sinal
unsigned long int i=0;
    char namefile1[15];
    strcpy(namefile1,nomearg);
    //strcpy(namefile1,"R.txt");
    arq1 = fopen(namefile1,"w");

unsigned long int n=0;

while(R>0.0 && n<10000 && R<1.0e7)
{
    potentialbef=PotentialLInf(m,lastR);
    potential=PotentialLInf(m,R);

    //verify if the signal of the potential changes
    if((potentialbef<0.0 && potential>0.0))
    {
        trocasinal=true;
        R=lastR;
    }
    else
    {
        trocasinal=false;
    }

    //se troca de sinal e dR/dt era negativo, dR/dt passa a ser positivo
    if(trocasinal && dRdt<0.0)
    {
        dRdt=sqrt(-2.0*potentialbef);
        d2Rdt2=d2Rdt2inf(m,R,dRdt);
        trocasinal=false;
        V=potentialbef;
    }
    //se troca de sinal e dR/dt era positivo, dR/dt passa a ser negativo
    else if(trocasinal && dRdt>0.0)
    {
        dRdt=-sqrt(-2.0*potentialbef);
        d2Rdt2=d2Rdt2inf(m,R,dRdt);
        trocasinal=false;
        V=potentialbef;
    }
    else if(!trocasinal && dRdt<0.0)
    {
        dRdt=-sqrt(-2.0*potential);
        d2Rdt2=d2Rdt2inf(m,R,dRdt);
        V=potential;
    }
    else if(!trocasinal && dRdt>0.0)
    {
        dRdt=sqrt(-2.0*potential);
        d2Rdt2=d2Rdt2inf(m,R,dRdt);
        V=potential;
    }
    else if (dRdt==0.0)//i am studing collapse
    {
        dRdt=-sqrt(-2.0*potential);
        d2Rdt2=d2Rdt2inf(m,R,dRdt);
        trocasinal=false;
        V=potential;
    }
}

```

```

    lastR=R; //atualiza lastR
    trocasinal=false;

    fprintf(arq1,"%lf %lf\n",R,i*hr); // imprime R em funcao de t

    R+=hr*dRdt; //atualiza R
    i++;
    n++;
}

fclose(arq1);
}

void EvaluateR(unsigned long int n,double m, double L, double hr, double R0)
{
    double R=R0,dRdt=0.0,d2Rdt2=0.0;
    FILE * arq1,* arq2,* arq3, *arq4;
    bool trocasinal=false;
    double potential=0.0;
    double potentialbef=0.0;
    double V; // para armazenar valor do potencial a ser impresso no arquivo de dados
    double lastR=R0; //para guardar o valor de R antes do potencial muda de sinal

    char namefile1[15],namefile2[15],namefile3[15],namefile4[15];
    strcpy(namefile1,"R.txt");
    strcpy(namefile2,"dRdt.txt");
    strcpy(namefile3,"d2Rdt2.txt");
    strcpy(namefile4,"potential.txt");
    arq1 = fopen(namefile1,"w");
    arq2 = fopen(namefile2,"w");
    arq3 = fopen(namefile3,"w");
    arq4 = fopen(namefile4,"w");

    for(unsigned long int i=0;i<n;i++)
    {
        potentialbef=Potential(m,L,lastR);
        potential=Potential(m,L,R);

        //verify if the signal of the potential changes
        if((potentialbef<0.0 && potential>0.0))
        {
            trocasinal=true;
            R=lastR;
        }
        else
        {
            trocasinal=false;
        }

        //se troca de sinal e dR/dt era negativo, dR/dt passa a ser positivo
        if(trocasinal && dRdt<0.0)
        {
            dRdt=sqrt(-2.0*potentialbef);
            d2Rdt2=d2Rdt2pot(m,L,R,dRdt);
            trocasinal=false;
            V=potentialbef;
        }
        //se troca de sinal e dR/dt era positivo, dR/dt passa a ser negativo
        else if(trocasinal && dRdt>0.0)

```

```

    {
    dRdt=-sqrt(-2.0*potentialbef);
    d2Rdt2=d2Rdt2pot(m,L,R,dRdt);
    trocasinal=false;
    V=potentialbef;
    }
    else if(!trocasinal && dRdt<0.0)
    {
    dRdt=-sqrt(-2.0*potential);
    d2Rdt2=d2Rdt2pot(m,L,R,dRdt);
    V=potential;
    }
    else if(!trocasinal && dRdt>0.0)
    {
    dRdt=sqrt(-2.0*potential);
    d2Rdt2=d2Rdt2pot(m,L,R,dRdt);
    V=potential;
    }
    else if (dRdt==0.0)//i am studing collapse
    {
    dRdt=-sqrt(-2.0*potential);
    d2Rdt2=d2Rdt2pot(m,L,R,dRdt);
    trocasinal=false;
    V=potential;
    }
}

lastR=R; //atualiza lastR
trocasinal=false;

fprintf(arq1,"%lf %lf\n",R,i*hr); // imprime R em funcao de t
fprintf(arq2,"%lf %lf\n",dRdt,i*hr); // imprime dR/dt em funcao de t
fprintf(arq3,"%lf %lf\n",d2Rdt2,i*hr); // imprime d2R/dt2 em funcao de t
fprintf(arq4,"%lf %lf %lf %lf\n",R,dRdt,V,i*hr); // imprime V em funcao de R e t

R+=hr*dRdt; //atualiza R

}

fclose(arq1);
fclose(arq2);
fclose(arq3);
}

void EvaluateRInf(unsigned long int n,double m, double hr, double R0)
{
double R=R0,dRdt=0.0,d2Rdt2=0.0;
FILE * arq1,* arq2,* arq3;
bool trocasinal=false;
double potential=0.0;
double potentialbef=0.0;
double lastR=R0; //para guardar o valor de R antes do potencial muda de sinal
double Rc=pow(5.0/4.0,1.0/3.0);

char namefile1[15],namefile2[15],namefile3[15];
strcpy(namefile1,"R.txt");
strcpy(namefile2,"dRdt.txt");
strcpy(namefile3,"d2Rdt2.txt");
arq1 = fopen(namefile1,"w");
arq2 = fopen(namefile2,"w");

```

```

    arq3 = fopen(namefile3,"w");

unsigned long int i=0;

while (R>Rc)
{
    potentialbef=PotentialLInf(m,lastR);
    potential=PotentialLInf(m,R);

    //verify if the signal of the potential changes
    if((potentialbef<0.0 && potential>0.0))
    {
        trocasinal=true;
        R=lastR;
    }
    else
    {
        trocasinal=false;
    }

    //se troca de sinal e dR/dt era negativo, dR/dt passa a ser positivo
    if(trocasinal && dRdt<0.0)
    {
        dRdt=sqrt(-2.0*potentialbef);
        d2Rdt2=d2Rdt2inf(m,R,dRdt);
        trocasinal=false;
    }
    //se troca de sinal e dR/dt era positivo, dR/dt passa a ser negativo
    else if(trocasinal && dRdt>0.0)
    {
        dRdt=-sqrt(-2.0*potentialbef);
        d2Rdt2=d2Rdt2inf(m,R,dRdt);
        trocasinal=false;
    }
    else if(!trocasinal && dRdt<0.0)
    {
        dRdt=-sqrt(-2.0*potential);
        d2Rdt2=d2Rdt2inf(m,R,dRdt);
    }
    else if(!trocasinal && dRdt>0.0)
    {
        dRdt=sqrt(-2.0*potential);
        d2Rdt2=d2Rdt2inf(m,R,dRdt);
    }
    else if (dRdt==0.0)//i am studing collapse
    {
        dRdt=-sqrt(-2.0*potentialbef);
        d2Rdt2=d2Rdt2inf(m,R,dRdt);
        trocasinal=false;
    }
}

lastR=R; //atualiza lastR
trocasinal=false;

fprintf(arq1,"%lf %lf\n",R,i*hr); // imprime R em funcao de t
fprintf(arq2,"%lf %lf\n",dRdt,i*hr); // imprime dR/dt em funcao de t
fprintf(arq3,"%lf %lf\n",d2Rdt2,i*hr); // imprime d2R/dt2 em funcao de t

R+=hr*dRdt; //atualiza R
i++;
}

```

```

    fclose(arq1);
    fclose(arq2);
    fclose(arq3);
}

int main(int argc, char *argv[])
{
    unsigned long int n;
    double m,L,hr,R0;

    //m=1.0, L=10.0
    /*
    n=1000000;
    m=1.0;
    L=10.0;
    R0=2.000001;
    hr=0.000001;

    /**/

    //m=1.0, L=10.0
    /*
    n=1000000;
    m=1.0;
    L=10.0;
    R0=3.000000;
    hr=0.000001;
    */
    /*
    m=1.0;
    L=10.0;
    R0=9.5;
    hr=0.0005;
    */
    /*
    /**/

    //m=1.0, L=10.0
    /*
    n=1000000;
    m=1.0;
    L=10.0;
    R0=4.000000;
    hr=0.000001;
    */
    /**/

    //m=1.0, L=10.0
    /* n=1000000;
    m=1.0;
    L=10.0;
    R0=7.000000;
    hr=0.000001;
    */
    /**/

    // m= 10^-4 , L=10^-4
    /*
    n=1000000;

```

```

m=1e-4;
L=1e4;
R0=55.0000;
hr=0.00002;

m=1e-4;
L=1e4;
R0=55.00;
hr=0.002;

*/

/* m= 10^-4 , L=250000 */

/*
n=1000000;
m=1e-4;
L=250000.0;
R0=200.000;
hr=0.005;
*/

/* m= 10^-4 , L=250000 */

/*
n=1000000;
m=1e-4;
L=250000.0;
R0=300.000;
hr=0.00005;
*/

/* m= 10^-4 , L=250000 */

/*
n=1000000;
m=1e-4;
L=250000.0;
R0=350.000;
hr=0.00005;
*/

/* m= 10^-4 , L=250000 */
/*
m=1e-4;
L=250000.0;
R0=200.0;
hr=0.1;
*/
//

/* m= 10^-4 , L=1 */
/*
n=1000000;
m=1e-4;
L=1.0;
R0=0.50;
hr=0.00000001;
*/

```



```

/*
  m=1e-4;
  L=1.0;
  R0=0.50;
  hr=0.00001;
*/

/* m= 10^-0.286 , L=2.5 10^5 */

/*
  n=1000000;
  m=pow(10.0,-0.286);
  L=2.5e5;
  R0=1.5;
  hr=0.000001;
*/

/* m= 10^-0.286 , L=100 */

/*
  n=1000000;
  m=pow(10.0,-0.286);
  L=100.0;
  R0=5.0;
  hr=0.000001;
*/

// EvaluateR(n,m,L,hr,R0);

/* m= 10^-0.286 , L=inf */

/*
  n=1000000;
  m=pow(10.0,-0.286);
  R0=100.0;
  hr=0.000001;
*/

char nomearq[15];
strcpy(nomearq,"Rmc.txt");
m=pow((3.0/4.0)*(pow((12.0/25.0),5.0)),(1.0/6.0));
printf("%lf\n",m);
hr=0.0001;
R0=1.5;

generateDataRLInf(m,hr,R0,nomearq);

strcpy(nomearq,"R07.txt");
m=0.7;
printf("%lf\n",m);
hr=0.0001;
R0=1.5;

generateDataRLInf(m,hr,R0,nomearq);

strcpy(nomearq,"R04.txt");
m=0.4;
printf("%lf\n",m);

```

```

hr=0.0001;
R0=1.5;

generateDataRLInf(m,hr,R0,nomearg);

//EvaluateRInf(n,m,hr,R0);

//generateDataR(m,L,hr,R0);

return EXIT_SUCCESS;
}

```

B.3.7 Potentialgen.h (para rodar no ROOT)

```

Double_t Potential (Double_t R,Double_t m,Double_t L,Double_t d)
{
return (0.1e1 / 0.2e1 - (0.1e1 / R - pow(R, (Double_t) (7 - 4 * d)) * pow(L, -0.2e1))
* m / 0.2e1 - m * m * pow(R, (Double_t) (4 - 4 * d)) / 0.2e1 - R * R * pow(L, -0.2e1)
/ 0.4e1 - pow(R, (Double_t) (10 - 4 * d)) * pow(L, -0.4e1) / 0.8e1 - pow(R, (Double_t)
(4 * d - 6)) / 0.8e1);
}

Double_t PotentialMzero(Double_t R, Double_t l, Double_t d)
{
return(0.1e1 / 0.2e1 - R * R * pow(l, -0.2e1) / 0.4e1 - pow(R, (double) (10 - 4 * d))
* pow(l, -0.4e1) / 0.8e1 - pow(R, (double) (4 * d - 6)) / 0.8e1);
}

Double_t PotentialLINF (Double_t R, Double_t m, Double_t d)
{
return(-(0.2e1 * m * pow(R, 0.5e1) + pow(pow(R, d), 0.4e1) + 0.2e1 *
pow(pow(R, d), 0.2e1) * pow(R, 0.3e1)) * (0.2e1 * m * pow(R, 0.5e1) +
pow(pow(R, d), 0.4e1) - 0.2e1 * pow(pow(R, d), 0.2e1) * pow(R, 0.3e1)) *
pow(R, -0.6e1) * pow(pow(R, d), -0.4e1) / 0.8e1);
}

```

B.3.8 gravastarblackhole1.C (para rodar no ROOT)

```

//Double_t Potential (Double_t R,Double_t m,Double_t l,Double_t d)
//Double_t PotentialMzero(Double_t R, Double_t l, Double_t d)
//Double_t PotentialLINF (Double_t R, Double_t m, Double_t d)
{
Int_t i=0,n=100000;

Double_t R1[1000000],R2[1000000],R3[1000000],R4[1000000],R5[1000000],R6[1000000],R7[1000000],
R8[1000000],R9[1000000],R10[1000000],R11[1000000],R12[1000000],
V1[1000000],V2[1000000],V3[1000000],V4[1000000],V5[1000000],V6[1000000],V7[1000000],
O[1000000],V8[1000000],V9[1000000],
V10[1000000],V11[1000000],V12[1000000],m,l,d;

O[0]=0.0;
R12[0]=R11[0]=R10[0]=R9[0]=R8[0]=R7[0]=R6[0]=R5[0]=R4[0]=R3[0]=R2[0]=R1[0]=0.0001;
for(i=1;i<n;i++)
{
R12[i]=R11[i]=R10[i]=R9[i]=R8[i]=R7[i]=R6[i]=R5[i]=R4[i]=/*R2[i]=*/R1[i]=0.001*i;
R2[i]=0.001*i;
R3[i]=0.001*i;
}
}

```

```

O[i]=0.0;
}

for (i=1;i<n;i++)
{

// gamma=0, mc=0.5170643255, Lc=2.8743397865
//m=0.5170643255;l=2.8743397865;d=0.0;

//d=0.1;m=0.5199536485;l=3.1000618;
//d=0.2;m=0.5236577775;l=3.3917341;
//d=0.3;m=0.5285215890;l=3.7828681;
//d=0.4;m=0.5350989795;l=4.3336020;
//d=0.5;m=0.5443310540;l=5.1626297;
//d=0.6;m=0.5579387820;l=6.5372013;
//d=0.7;m=0.5794043665;l=9.1891232;
//d=0.8;m=0.6169244095;l=15.8955019;
//d=0.9;m=0.6956250340;l=47.7590095;
d=0.95;m=0.7788797565;l=166.7543222;
//d=0.99;m=0.9200729380;l=3906.8991705;

//m=0.5350989795;l=4.3336020545;d=0.4;
V7[i]=Potential (R7[i],m,l,d);
}

/*
for (i=1;i<n;i++)
{
m=0.545; //m + delta m
// l=2.8743397865;d=0.0;
// l=4.3336020545;d=0.4;
V8[i]=Potential (R8[i],m,l,d);
}

for (i=1;i<n;i++)
{
m=0.56; //m - delta m
// l=2.8743397865;d=0.0;
l=4.3336020545;d=0.4;
V9[i]=Potential (R9[i],m,l,d);
}

for (i=1;i<n;i++)
{
m=0.51; //m - delta m
// l=2.8743397865;d=0.0;
l=4.3336020545;d=0.4;
V10[i]=Potential (R10[i],m,l,d);
}
*/
/*
for (i=1;i<n;i++)
{

m=0.5170643255;
//m=0.5350989795;
l=3.5;d=0.0; //l + delta l
V8[i]=Potential (R8[i],m,l,d);
}
for (i=1;i<n;i++)
{

// gamma=0, mc=0.5170643255, Lc=2.8743397865

```

```

// m=0.5170643255;
//m=0.5350989795;
l=5.0;d=0.0; //l - delta l
  V9[i]=Potential(R9[i],m,l,d);
}

for(i=1;i<n;i++)
{
  m=0.5170643255;
//m=0.5350989795;
  l=2.0;d=0.0;
//l=4.3336020545;d=0.4;
  V10[i]=Potential(R10[i],m,l,d);
}
*/

/*m=1.0;
l=10.0;
V1[i]=Potential(m,l,R1[i]);

m=1.0e-4;
l=1.0e4;
V2[i]=Potential(m,l,R2[i]);
*/
/*
m=1.0e-4;
l=2.5e5;
V3[i]=Potential(m,l,R3[i]);
*/
/*
m=1.0e-4;
l=1.0;
V4[i]=Potential(m,l,R4[i]);

m=pow(10,-0.2864562648505);
l=2.5e5;
V5[i]=Potential(m,l,R5[i]);

m=pow(10,-0.2864562648505);
l=100.0;
V6[i]=Potential(m,l,R6[i]);

m=pow(10,-0.2864562648505);
V7[i]=PotentialLInf(m,R7[i]);
}
*/

//GRAFICOS comparando m>mc, m=mc e m<mc
/*

//m=pow((3.0/4.0)*(pow((12.0/25.0),5.0)),(1.0/6.0));
//m=0.5443310540;
//d=0.5;
  m=0.5120894285;
  d=3.0;
  V7[i]=PotentialLINF(R7[i],m,d);
}

for(i=1;i<n;i++)
{

```

```

//m=0.7;
m=0.6;
d=3.0;
V8[i]=PotentialLINF(R8[i],m,d);
}

for(i=1;i<n;i++)
{
m=0.4;
d=3.0;
V9[i]=PotentialLINF(R9[i],m,d);
}

*/

/*
//GRAFICOS comparando L>Lc, L=Lc, L<Lc

//l=0.9185586537;
//d=0.5;
//V10[i]=PotentialMzero(R10[i],l,d);
l=0.9164864247;
d=3.0;
V10[i]=PotentialMzero(R10[i],l,d);

}

for(i=1;i<n;i++)
{
//l=0.93;
//d=0.5;
//V11[i]=PotentialMzero(R11[i],l,d);
l=0.94;
d=3.0;
V11[i]=PotentialMzero(R11[i],l,d);
}

for(i=1;i<n;i++)
{
//l=0.90;
//d=0.5;
//V12[i]=PotentialMzero(R12[i],l,d);
l=0.90;
d=3.0;
V12[i]=PotentialMzero(R12[i],l,d);
}
*/

//Cria Grficos V em funo de R
/*
TCanvas * c1 = new TCanvas("c1","",10,40,800,600);
TGraph * gr1 = new TGraph(n,R1,V1);
gr1->SetTitle("\it{m}=1, \it{L}=10");
gr1->GetXaxis()->SetLimits(0,8);
gr1->GetYaxis()->SetLimits(-70,10);
gr1->GetXaxis()->SetTitle(" \it{R}");
gr1->GetYaxis()->SetTitle(" \it{V(R)}");
gr1->GetXaxis()->CenterTitle();
gr1->GetYaxis()->CenterTitle();
gr1->SetMinimum(-70.0);
gr1->SetMaximum(10.0);
gr1->SetMarkerStyle(1);

```

```

gr1->SetMarkerColor(1);
gr1->SetLineColor(1);
gr1->Draw("Ap");
gPad->SetFillColor(0);
TGraph * gr11 = new TGraph (n,R1,O);
gr11->SetTitle("");
gr11->GetXaxis()->SetLimits(-1,8);
gr11->GetYaxis()->SetLimits(-70,10);
gr11->GetXaxis()->SetTitle(" \it{R}");
gr11->GetYaxis()->SetTitle(" \it{V(R)}");
gr11->GetXaxis()->CenterTitle();
gr11->GetYaxis()->CenterTitle();
gr11->SetMinimum(-70.0);
gr11->SetMaximum(10.0);
gr11->SetMarkerStyle(1);
gr11->SetMarkerColor(1);
gr11->SetLineColor(1);
gr11->Draw("p");
gPad->SetFillColor(0);
c1->Print("V1.eps");
*/
/*
TCanvas * c2 = new TCanvas("c2","",10,40,800,600);
TGraph * gr2 = new TGraph (n,R2,V2);
gr2->SetTitle("m=10^{-4}, L=10^4");
//gr2->GetXaxis()->SetLimits(0,80);
//gr2->GetYaxis()->SetLimits(-10,1);
gr2->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr2->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr2->GetXaxis()->CenterTitle();
gr2->GetYaxis()->CenterTitle();
//gr2->SetMinimum(-10.0);
//gr2->SetMaximum(1.0);
gr2->SetMarkerStyle(1);
gr2->SetMarkerColor(1);
gr2->SetLineColor(1);
gr2->Draw("Ap");
gPad->SetFillColor(0);
TGraph * gr21 = new TGraph (n,R2,O);
gr21->SetTitle("");
//gr21->GetXaxis()->SetLimits(0,100);
//gr21->GetYaxis()->SetLimits(-50,10);
gr21->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr21->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr21->GetXaxis()->CenterTitle();
gr21->GetYaxis()->CenterTitle();
//gr21->SetMinimum(-10.0);
//gr21->SetMaximum(1.0);
gr21->SetMarkerStyle(1);
gr21->SetMarkerColor(1);
gr21->SetLineColor(1);
gr21->Draw("p");
gPad->SetFillColor(0);
c2->Print("V2.eps");

/*
TCanvas * c3 = new TCanvas("c3","",10,40,800,600);
TGraph * gr3 = new TGraph (n,R3,V3);
gr3->SetTitle("m=10^{-4}, L=2.5 10^5");
gr3->GetXaxis()->SetLimits(0,300);
gr3->GetYaxis()->SetLimits(-2,1);
gr3->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr3->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr3->GetXaxis()->CenterTitle();

```

```

gr3->GetYaxis()->CenterTitle();
gr3->SetMinimum(-2.0);
gr3->SetMaximum(1.0);
gr3->SetMarkerStyle(1);
gr3->SetMarkerColor(1);
gr3->SetLineColor(1);
gr3->Draw("Ap");
gPad->SetFillColor(0);
TGraph * gr31 = new TGraph (n,R3,0);
gr31->SetTitle("");
gr31->GetXaxis()->SetLimits(0,300);
gr31->GetYaxis()->SetLimits(-2,1);
gr31->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr31->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr31->GetXaxis()->CenterTitle();
gr31->GetYaxis()->CenterTitle();
gr31->SetMinimum(-2.0);
gr31->SetMaximum(1.0);
gr31->SetMarkerStyle(1);
gr31->SetMarkerColor(1);
gr31->SetLineColor(1);
gr31->Draw("p");
gPad->SetFillColor(0);
c3->Print("V3.eps");

TCanvas * c4 = new TCanvas("c4","",10,40,800,600);
TGraph * gr4 = new TGraph (n,R4,V4);
gr4->SetTitle("m=10^{-4}, L=1");
gr4->GetXaxis()->SetLimits(0,1.5);
gr4->GetYaxis()->SetLimits(-0.4,0.2);
gr4->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr4->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr4->GetXaxis()->CenterTitle();
gr4->GetYaxis()->CenterTitle();
gr4->SetMinimum(-0.4);
gr4->SetMaximum(0.2);
gr4->SetMarkerStyle(1);
gr4->SetMarkerColor(1);
gr4->SetLineColor(1);
gr4->Draw("Ap");
gPad->SetFillColor(0);
TGraph * gr41 = new TGraph (n,R4,0);
gr41->SetTitle("");
gr41->GetXaxis()->SetLimits(0,1.5);
gr41->GetYaxis()->SetLimits(-0.4,0.2);
gr41->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr41->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr41->GetXaxis()->CenterTitle();
gr41->GetYaxis()->CenterTitle();
gr41->SetMinimum(-0.4);
gr41->SetMaximum(0.2);
gr41->SetMarkerStyle(1);
gr41->SetMarkerColor(1);
gr41->SetLineColor(1);
gr41->Draw("p");
gPad->SetFillColor(0);
c4->Print("V4.eps");

TCanvas * c5 = new TCanvas("c5","",10,40,800,600);
TGraph * gr5 = new TGraph (n,R5,V5);
gr5->SetTitle("m=10^{-0.286}, L=2.5 10^5");
gr5->GetXaxis()->SetLimits(0,3);
gr5->GetYaxis()->SetLimits(-0.04,0.02);

```

```

gr5->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr5->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr5->GetXaxis()->CenterTitle();
gr5->GetYaxis()->CenterTitle();
gr5->SetMinimum(-0.04);
gr5->SetMaximum(0.02);
gr5->SetMarkerStyle(1);
gr5->SetMarkerColor(1);
gr5->SetLineColor(1);
gr5->Draw("Ap");
gPad->SetFillColor(0);
TGraph * gr5l = new TGraph (n,R5,0);
gr5l->SetTitle("");
gr5l->GetXaxis()->SetLimits(0,3);
gr5l->GetYaxis()->SetLimits(-0.04,0.02);
gr5l->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr5l->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr5l->GetXaxis()->CenterTitle();
gr5l->GetYaxis()->CenterTitle();
gr5l->SetMinimum(-0.04);
gr5l->SetMaximum(0.02);
gr5l->SetMarkerStyle(1);
gr5l->SetMarkerColor(1);
gr5l->SetLineColor(1);
gr5l->Draw("p");
gPad->SetFillColor(0);
c5->Print("V5.eps");

```

```

TCanvas * c6 = new TCanvas("c6","",10,40,800,600);
TGraph * gr6 = new TGraph (n,R6,V6);
gr6->SetTitle("m=10^{-0.286}, L=100");
gr6->GetXaxis()->SetLimits(0,30);
gr6->GetYaxis()->SetLimits(-3500,10);
gr6->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr6->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr6->GetXaxis()->CenterTitle();
gr6->GetYaxis()->CenterTitle();
gr6->SetMinimum(-3500.0);
gr6->SetMaximum(10.0);
gr6->SetMarkerStyle(1);
gr6->SetMarkerColor(1);
gr6->SetLineColor(1);
gr6->Draw("Ap");
gPad->SetFillColor(0);
TGraph * gr6l = new TGraph (n,R6,0);
gr6l->SetTitle("");
gr6l->GetXaxis()->SetLimits(0,30);
gr6l->GetYaxis()->SetLimits(-3500,10);
gr6l->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr6l->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr6l->GetXaxis()->CenterTitle();
gr6l->GetYaxis()->CenterTitle();
gr6l->SetMinimum(-3500.0);
gr6l->SetMaximum(10.0);
gr6l->SetMarkerStyle(1);
gr6l->SetMarkerColor(1);
gr6l->SetLineColor(1);
gr6l->Draw("p");
gPad->SetFillColor(0);
c6->Print("V6.eps");

```

```

TCanvas * c6zoom = new TCanvas("c6zoom","",10,40,800,600);
TGraph * gr6zoom = new TGraph (n,R6,V6);

```



```

gr6zoom->SetTitle("m=10^{-0.286}, L=100 with Zoom");
gr6zoom->GetXaxis()->SetLimits(0,30);
gr6zoom->GetYaxis()->SetLimits(-1,0.1);
gr6zoom->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr6zoom->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr6zoom->GetXaxis()->CenterTitle();
gr6zoom->GetYaxis()->CenterTitle();
gr6zoom->SetMinimum(-1.0);
gr6zoom->SetMaximum(0.1);
gr6zoom->SetMarkerStyle(1);
gr6zoom->SetMarkerColor(1);
gr6zoom->SetLineColor(1);
gr6zoom->Draw("Ap");
gPad->SetFillColor(0);
TGraph * gr6lzoom = new TGraph (n,R6,O);
gr6lzoom->SetTitle("");
gr6lzoom->GetXaxis()->SetLimits(0,30);
gr6lzoom->GetYaxis()->SetLimits(-1,0.1);
gr6lzoom->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr6lzoom->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr6lzoom->GetXaxis()->CenterTitle();
gr6lzoom->GetYaxis()->CenterTitle();
gr6lzoom->SetMinimum(-1.0);
gr6lzoom->SetMaximum(0.1);
gr6lzoom->SetMarkerStyle(1);
gr6lzoom->SetMarkerColor(1);
gr6lzoom->SetLineColor(1);
gr6lzoom->Draw("p");
gPad->SetFillColor(0);
c6zoom->Print("V6zoom.eps");

*/

TCanvas * c7 = new TCanvas("c7","",10,40,800,600);
TGraph * gr7 = new TGraph (n,R7,V7);
gr7->SetTitle("m_{c}=0.7788797565, L_{c}=166.7543222, #gamma=0.95");
//gr7->GetXaxis()->SetLimits(0.5,2.7);
//gr7->GetYaxis()->SetLimits(-0.4,0.4);
gr7->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr7->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr7->GetXaxis()->CenterTitle();
gr7->GetYaxis()->CenterTitle();
//gr7->SetMinimum(-0.5);
//gr7->SetMaximum(0.5);
gr7->SetMarkerStyle(1);
gr7->SetMarkerColor(1);
gr7->SetLineColor(1);
gr7->Draw("Ap");
gPad->SetFillColor(0);

TGraph * gr7l = new TGraph (n,R7,O);
gr7l->SetTitle("");
//[gr7l->GetXaxis()->SetLimits(0.5,1.5);
//gr7l->GetYaxis()->SetLimits(-0.001,0.001);
//gr7l->GetXaxis()->SetLimits(0.5,2.7);
//gr7l->GetYaxis()->SetLimits(-0.4,0.4);
gr7l->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr7l->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr7l->GetXaxis()->CenterTitle();
gr7l->GetYaxis()->CenterTitle();
gr7l->SetMarkerStyle(1);
gr7l->SetMarkerColor(1);
gr7l->SetLineColor(1);

```

```

gr71->Draw("p");
gPad->SetFillColor(0);

/*
TGraph * gr72 = new TGraph (n,R8,V8);
gr72->SetTitle("");
//gr72->GetXaxis()->SetLimits(0.5,1.1);
//gr72->GetYaxis()->SetLimits(-0.001,0.001);
//gr72->GetXaxis()->SetLimits(0.5,2.7);
//gr72->GetYaxis()->SetLimits(-0.4,0.4);
gr72->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr72->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr72->GetXaxis()->CenterTitle();
gr72->GetYaxis()->CenterTitle();
gr72->SetMarkerStyle(1);
gr72->SetMarkerColor(1);
gr72->SetLineColor(1);
gr72->Draw("p");
gPad->SetFillColor(0);

TGraph * gr73 = new TGraph (n,R9,V9);
gr73->SetTitle("");
//gr73->GetXaxis()->SetLimits(0.5,1.5);
//gr73->GetYaxis()->SetLimits(-0.001,0.001);
//gr73->GetXaxis()->SetLimits(0.5,2.7);
//gr73->GetYaxis()->SetLimits(-0.4,0.4);
gr73->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr73->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr73->GetXaxis()->CenterTitle();
gr73->GetYaxis()->CenterTitle();
gr73->SetMarkerStyle(1);
gr73->SetMarkerColor(1);
gr73->SetLineColor(1);
gr73->Draw("p");
gPad->SetFillColor(0);

TGraph * gr74 = new TGraph (n,R10,V10);
gr74->SetTitle("");
//gr74->GetXaxis()->SetLimits(0.5,2.7);
//gr74->GetYaxis()->SetLimits(-0.4,0.4);
//gr74->GetXaxis()->SetLimits(0.5,1.5);
//gr74->GetYaxis()->SetLimits(-0.001,0.001);
gr74->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr74->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr74->GetXaxis()->CenterTitle();
gr74->GetYaxis()->CenterTitle();
gr74->SetMarkerStyle(1);
gr74->SetMarkerColor(1);
gr74->SetLineColor(1);
gr74->Draw("p");
gPad->SetFillColor(0);

TLegend *legend = new TLegend(0.6083333,0.1530612,0.8583333,0.4047619,NULL,"brNDC");
legend->SetFillColor(0);
legend->AddEntry(gr74,"L_{1}=2.0","p");
legend->AddEntry(gr72,"L_{2}=L_{c}","p");
legend->AddEntry(gr73,"L_{3}=3.5","p");
legend->AddEntry(gr7,"L_{4}=5.0","p");
legend->Draw();
*/
/*
c7->Print("V7.eps");

```

```

TCanvas * c8 = new TCanvas("c8","",10,40,800,600);
TGraph * gr8 = new TGraph (n,R10,V10);
gr8->SetTitle("m=0, #Lambda #neq 0, #gamma=3.0");
gr8->GetXaxis()->SetLimits(0,2);
//gr8->GetYaxis()->SetLimits(-0.001,0.001);
gr8->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr8->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr8->GetXaxis()->CenterTitle();
gr8->GetYaxis()->CenterTitle();
gr8->SetMinimum(-0.5);
gr8->SetMaximum(0.5);
gr8->SetMarkerStyle(1);
gr8->SetMarkerColor(1);
gr8->SetLineColor(1);
gr8->Draw("Ap");
gPad->SetFillColor(0);

TGraph * gr81 = new TGraph (n,R10,0);
gr81->SetTitle("");
//[gr71->GetXaxis()->SetLimits(0.5,1.5);
//gr71->GetYaxis()->SetLimits(-0.001,0.001);
gr81->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr81->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr81->GetXaxis()->CenterTitle();
gr81->GetYaxis()->CenterTitle();
gr81->SetMarkerStyle(1);
gr81->SetMarkerColor(1);
gr81->SetLineColor(1);
gr81->Draw("p");
gPad->SetFillColor(0);

TGraph * gr82 = new TGraph (n,R11,V11);
gr82->SetTitle("");
//gr82->GetXaxis()->SetLimits(0.5,1.1);
//gr82->GetYaxis()->SetLimits(-0.001,0.001);
gr82->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr82->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr82->GetXaxis()->CenterTitle();
gr82->GetYaxis()->CenterTitle();
gr82->SetMarkerStyle(1);
gr82->SetMarkerColor(1);
gr82->SetLineColor(1);
gr82->Draw("p");
gPad->SetFillColor(0);

TGraph * gr83 = new TGraph (n,R12,V12);
gr83->SetTitle("");
//gr83->GetXaxis()->SetLimits(0.5,1.5);
//gr83->GetYaxis()->SetLimits(-0.001,0.001);
gr83->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr83->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr83->GetXaxis()->CenterTitle();
gr83->GetYaxis()->CenterTitle();
gr83->SetMarkerStyle(1);
gr83->SetMarkerColor(1);
gr83->SetLineColor(1);
gr83->Draw("p");
gPad->SetFillColor(0);

//c7->Print("V7.eps");

```

```
*/
}
```

B.3.9 PotentialLobo.h (para rodar no ROOT)

```
Double_t PotentialLobo2geral(Double_t R,Double_t x,Double_t w,Double_t b,Double_t m)
{
  Double_t pi=4.0*atan(1.0);
  Double_t b1=1.0+b*pow(R,2.0);
  Double_t b2=1.0+2.0*b*pow(R,2.0);
  Double_t retorno=0;

  if(x==0.0 && w==-1.5 && b==0.01)
  {
    return(pow(R, -0.2e1) / b2 * (-pow(b2, 0.5e0) * pow(b1, -0.2500000000e0) * pow(R, -0.4e1)
    + 0.2e1 * pow(b2, -0.2500000000e0) * pow(R, -0.2e1) * pow(b1, -0.1250000000e0) *
    sqrt((-pow(b2, 0.15e1) * pow(b1, 0.7500000000e0) * pow(R, 0.6e1) + pow(b2, 0.25e1) *
    pow(b1, -0.2500000000e0) * pow(R, 0.6e1) - 0.2e1 * pow(b2, 0.25e1) *
    pow(b1, -0.2500000000e0) * m * pow(R, 0.5e1) + b1 * pow(R, 0.6e1) * b2 - b2 * b2 * pow(R, 0.6e1)
    + 0.2e1 * b2 * b2 * m * pow(R, 0.5e1) + b2 * b2) / b2 * pow(R, -0.4e1)) - pow(b2, 0.5e0) *
    R * R * pow(b1, -0.2500000000e0) + 0.10e1 * R * R + 0.2e1 * pow(b2, 0.5e0) * m * R *
    pow(b1, -0.2500000000e0) - 0.20e1 * m * R - 0.10e1 * pow(R, -0.4e1) + pow(b1, 0.5e0) * R *
    R - pow(b2, -0.5e0) * pow(b1, 0.7500000000e0) * R * R) * pow(pow(b1, -0.2500000000e0) -
    pow(b2, -0.5e0), -0.2e1) / 0.2e1);
  }

  if(x==-1.0 && w==10 && b==0.000001)
  {
    return(pow(R, -0.2e1) / b2 * (-pow(b2, 0.12e2) * pow(b1, 0.11e2 / 0.2e1) * pow(R, -0.8e1)
    + 0.2e1 * pow(b2, 0.17e2) * pow(R, -0.4e1) * pow(b1, 0.11e2 / 0.4e1) *
    sqrt(-(pow(b2, -0.10e2) * pow(b1, 0.13e2 / 0.2e1) * pow(R, 0.6e1) - pow(b2, -0.9e1) *
    pow(b1, 0.11e2 / 0.2e1) * pow(R, 0.6e1) + 0.2e1 * pow(b2, -0.9e1) *
    pow(b1, 0.11e2 / 0.2e1) * m * pow(R, 0.5e1) - b1 * pow(R, 0.6e1) * b2 + b2 *
    b2 * pow(R, 0.6e1) - 0.2e1 * b2 * b2 * m * pow(R, 0.5e1) - b2 * b2 * pow(R, -0.4e1))
    / b2 * pow(R, -0.4e1)) - pow(b2, 0.12e2) * R * R * pow(b1, 0.11e2 / 0.2e1) +
    pow(b2, 0.23e2) * R * R + 0.2e1 * pow(b2, 0.12e2) * m * R * pow(b1, 0.11e2 / 0.2e1)
    - 0.2e1 * pow(b2, 0.23e2) * m * R - pow(b2, 0.23e2) * pow(R, -0.8e1) + pow(b1, 0.12e2)
    * R * R - pow(b2, 0.11e2) * pow(b1, 0.13e2 / 0.2e1) * R * R) *
    pow(-pow(b1, 0.11e2 / 0.2e1) + pow(b2, 0.11e2), -0.2e1) / 0.2e1);
  }

  else if(x==-1.0 && w==0.1 && b==0.000001)
  {
    return (pow(R, -0.2e1) / b2 * (-pow(b2, 0.21e1) * pow(b1, 0.55e0) * pow(R, -0.8e1)
    + 0.2e1 * pow(b2, 0.215e1) * pow(R, -0.4e1) * pow(b1, 0.275e0) *
    sqrt(-(pow(b2, -0.1e0) * pow(b1, 0.155e1) * pow(R, 0.6e1) - pow(b2, 0.9e0) *
    pow(b1, 0.55e0) * pow(R, 0.6e1) + 0.2e1 * pow(b2, 0.9e0) * pow(b1, 0.55e0) * m
    * pow(R, 0.5e1) - b1 * pow(R, 0.6e1) * b2 + b2 * b2 * pow(R, 0.6e1) - 0.2e1 * b2
    * b2 * m * pow(R, 0.5e1) - b2 * b2 * pow(R, -0.4e1)) / b2 * pow(R, -0.4e1)) -
    pow(b2, 0.21e1) * R * R * pow(b1, 0.55e0) + pow(b2, 0.32e1) * R * R + 0.2e1 *
    pow(b2, 0.21e1) * m * R * pow(b1, 0.55e0) - 0.2e1 * pow(b2, 0.32e1) * m * R -
    pow(b2, 0.32e1) * pow(R, -0.8e1) + pow(b1, 0.21e1) * R * R - pow(b2, 0.11e1) *
    pow(b1, 0.155e1) * R * R) * pow(-pow(b1, 0.55e0) + pow(b2, 0.11e1), -0.2e1) / 0.2e1);
  }

  else if(x==-1.0 && w==0.1 && b==0.000002)
  {
    return (pow(R, -0.2e1) / b2 * (-pow(b2, 0.21e1) * pow(b1, 0.5500000000e0) *
    pow(R, -0.8e1) + 0.2e1 * pow(b2, 0.2150000000e1) * pow(R, -0.4e1) *
    pow(b1, 0.2750000000e0) * sqrt(-(pow(b2, -0.1e0) * pow(b1, 0.1550000000e1)
    * pow(R, 0.6e1) - pow(b2, 0.9e0) * pow(b1, 0.5500000000e0) * pow(R, 0.6e1)
    + 0.2e1 * pow(b2, 0.9e0) * pow(b1, 0.5500000000e0) * m
    * pow(R, 0.5e1) - b1 * pow(R, 0.6e1) * b2 + b2 * b2 * pow(R, 0.6e1) - 0.2e1 * b2
    * b2 * m * pow(R, 0.5e1) - b2 * b2 * pow(R, -0.4e1)) / b2 * pow(R, -0.4e1)) -
    pow(b2, 0.21e1) * R * R * pow(b1, 0.5500000000e0) + pow(b2, 0.32e1) * R * R + 0.2e1 *
    pow(b2, 0.21e1) * m * R * pow(b1, 0.5500000000e0) - 0.2e1 * pow(b2, 0.32e1) * m * R -
    pow(b2, 0.32e1) * pow(R, -0.8e1) + pow(b1, 0.21e1) * R * R - pow(b2, 0.11e1) *
    pow(b1, 0.1550000000e1) * R * R) * pow(-pow(b1, 0.5500000000e0) + pow(b2, 0.11e1), -0.2e1) / 0.2e1);
  }
}
```

```

+ 0.2e1 * pow(b2, 0.9e0) * pow(b1, 0.5500000000e0) * m * pow(R, 0.5e1) - b1
* pow(R, 0.6e1) * b2 + b2 * b2 * pow(R, 0.6e1) - 0.2e1 * b2 * b2 * m *
pow(R, 0.5e1) - b2 * b2 * pow(R, -0.4e1) / b2 * pow(R, -0.4e1) - pow(b2, 0.21e1)
* R * R * pow(b1, 0.5500000000e0) + pow(b2, 0.32e1) * R * R + 0.2e1 * pow(b2, 0.21e1)
* m * R * pow(b1, 0.5500000000e0) - 0.2e1 * pow(b2, 0.32e1) * m * R - pow(b2, 0.32e1)
* pow(R, -0.8e1) + pow(b1, 0.21e1) * R * R - pow(b2, 0.11e1) * pow(b1, 0.1550000000e1)
* R * R) * pow(-pow(b1, 0.5500000000e0) + pow(b2, 0.11e1), -0.2e1) / 0.2e1);
}

else if(x== -1.0 && w==0.1 && b==0.0001)
{
return (pow(R, -0.2e1) / b2 * (-pow(b2, 0.21e1) * pow(b1, 0.5500000000e0) *
pow(R, -0.8e1) + 0.2e1 * pow(b2, 0.2150000000e1) * pow(R, -0.4e1) *
pow(b1, 0.2750000000e0) * sqrt(-(pow(b2, -0.1e0) * pow(b1, 0.1550000000e1)
* pow(R, 0.6e1) - pow(b2, 0.9e0) * pow(b1, 0.5500000000e0) * pow(R, 0.6e1)
+ 0.2e1 * pow(b2, 0.9e0) * pow(b1, 0.5500000000e0) * m * pow(R, 0.5e1) -
b1 * pow(R, 0.6e1) * b2 + b2 * b2 * pow(R, 0.6e1) - 0.2e1 * b2 * b2 * m
* pow(R, 0.5e1) - b2 * b2 * pow(R, -0.4e1)) / b2 * pow(R, -0.4e1)) -
pow(b2, 0.21e1) * R * R * pow(b1, 0.5500000000e0) + pow(b2, 0.32e1) *
R * R + 0.2e1 * pow(b2, 0.21e1) * m * R * pow(b1, 0.5500000000e0) - 0.2e1 *
pow(b2, 0.32e1) * m * R - pow(b2, 0.32e1) * pow(R, -0.8e1) + pow(b1, 0.21e1) *
R * R - pow(b2, 0.11e1) * pow(b1, 0.1550000000e1) * R * R) *
pow(-pow(b1, 0.5500000000e0) + pow(b2, 0.11e1), -0.2e1) / 0.2e1);
}

else if(x== -1.0 && w==0.1 && b==0.05)
{
return (pow(R, -0.2e1) / b2 * (-pow(b2, 0.21e1) * pow(b1, 0.5500000000e0) *
pow(R, -0.8e1) + 0.2e1 * pow(b2, 0.2150000000e1) * pow(R, -0.4e1) *
pow(b1, 0.2750000000e0) * sqrt(0.1e1 / b2 * pow(R, -0.4e1) * (-pow(b2, -0.1e0)
* pow(b1, 0.1550000000e1) * pow(R, 0.6e1) + pow(b2, 0.9e0) *
pow(b1, 0.5500000000e0) * m * pow(R, 0.5e1) + b1 * pow(R, 0.6e1) * b2
- b2 * b2 * pow(R, 0.6e1) + 0.2e1 * b2 * b2 * m * pow(R, 0.5e1) + b2 *
b2 * pow(R, -0.4e1))) - pow(b2, 0.21e1) * R * R * pow(b1, 0.5500000000e0)
+ pow(b2, 0.32e1) * R * R + 0.2e1 * pow(b2, 0.21e1) * m * R *
pow(b1, 0.5500000000e0) - 0.2e1 * pow(b2, 0.32e1) * m * R - pow(b2, 0.32e1)
* pow(R, -0.8e1) + pow(b1, 0.21e1) * R * R - pow(b2, 0.11e1) *
pow(b1, 0.1550000000e1) * R * R) * pow(pow(b1, 0.5500000000e0) - pow(b2, 0.11e1), -0.2e1) / 0.2e1);
}

else if(x== -1.0 && w==0.2 && b==0.05)
{
return(pow(R, -0.2e1) / b2 * (-pow(b2, 0.22e1) * pow(b1, 0.6000000000e0) *
pow(R, -0.8e1) + 0.2e1 * pow(b2, 0.2300000000e1) * pow(R, -0.4e1) *
pow(b1, 0.3000000000e0) * sqrt(0.1e1 / b2 * pow(R, -0.4e1) *
(-pow(b2, -0.2e0) * pow(b1, 0.1600000000e1) * pow(R, 0.6e1) + pow(b2, 0.8e0)
* pow(b1, 0.6000000000e0) * pow(R, 0.6e1) - 0.2e1 * pow(b2, 0.8e0) *
pow(b1, 0.6000000000e0) * m * pow(R, 0.5e1) + b1 * pow(R, 0.6e1) * b2 - b2
* b2 * pow(R, 0.6e1) + 0.2e1 * b2 * b2 * m * pow(R, 0.5e1) + b2 * b2 *
pow(R, -0.4e1))) - pow(b2, 0.22e1) * R * R * pow(b1, 0.6000000000e0) +
pow(b2, 0.34e1) * R * R + 0.2e1 * pow(b2, 0.22e1) * m * R *
pow(b1, 0.6000000000e0) - 0.2e1 * pow(b2, 0.34e1) * m * R - pow(b2, 0.34e1)
* pow(R, -0.8e1) + pow(b1, 0.22e1) * R * R - pow(b2, 0.12e1) *
pow(b1, 0.1600000000e1) * R * R) * pow(pow(b1, 0.6000000000e0)
- pow(b2, 0.12e1), -0.2e1) / 0.2e1);
}

else if(x== -1.0 && w==1.5 && b==0.01)
{
return(pow(R, -0.2e1) / b2 * (-pow(b2, 0.35e1) * pow(b1, 0.1250000000e1)
* pow(R, -0.8e1) + 0.2e1 * pow(b2, 0.4250000000e1) * pow(R, -0.4e1) *
pow(b1, 0.6250000000e0) * sqrt(0.1e1 / b2 * pow(R, -0.4e1) * (-pow(b2, -0.15e1)
* pow(b1, 0.2250000000e1) * pow(R, 0.6e1) + pow(b2, -0.5e0) * pow(b1, 0.1250000000e1) *
pow(R, 0.6e1) - 0.2e1 * pow(b2, -0.5e0) * pow(b1, 0.1250000000e1) * m *

```

```

pow(R, 0.5e1) + b1 * pow(R, 0.6e1) * b2 - b2 * b2
* pow(R, 0.6e1) + 0.2e1 * b2 * b2 * m * pow(R, 0.5e1) + b2 * b2 *
pow(R, -0.4e1)) - pow(b2, 0.35e1) * R * R * pow(b1, 0.1250000000e1)
+ pow(b2, 0.60e1) * R * R + 0.2e1 * pow(b2, 0.35e1) * m * R
* pow(b1, 0.1250000000e1) - 0.2e1 * pow(b2, 0.60e1) * m * R -
pow(b2, 0.60e1) * pow(R, -0.8e1) + pow(b1, 0.35e1) * R * R -
pow(b2, 0.25e1) * pow(b1, 0.2250000000e1) * R * R * pow(pow(b1, 0.1250000000e1)
- pow(b2, 0.25e1), -0.2e1) / 0.2e1);
}

else if(x== -1.0 && w==3.0 && b==0.01)
{
return(pow(R, -0.2e1) / b2 * (-pow(b2, 0.50e1) * pow(b1, 0.2000000000e1)
* pow(R, -0.8e1) + 0.2e1 * pow(b2, 0.6500000000e1) * pow(R, -0.4e1) *
pow(b1, 0.1000000000e1) * sqrt(0.1e1 / b2 * pow(R, -0.4e1) *
(-pow(b2, -0.30e1) * pow(b1, 0.3000000000e1) * pow(R, 0.6e1)
+ pow(b2, -0.20e1) * pow(b1, 0.2000000000e1) * pow(R, 0.6e1) -
0.2e1 * pow(b2, -0.20e1) * pow(b1, 0.2000000000e1) * m * pow(R, 0.5e1)
+ b1 * pow(R, 0.6e1) * b2 - b2 * b2 * pow(R, 0.6e1) + 0.2e1 * b2
* b2 * m * pow(R, 0.5e1) + b2 * b2 * pow(R, -0.4e1)) - pow(b2, 0.50e1)
* R * R * pow(b1, 0.2000000000e1) + pow(b2, 0.90e1) * R * R + 0.2e1
* pow(b2, 0.50e1) * m * R * pow(b1, 0.2000000000e1) - 0.2e1 *
pow(b2, 0.90e1) * m * R - pow(b2, 0.90e1) * pow(R, -0.8e1) + pow(b1, 0.50e1)
* R * R - pow(b2, 0.40e1) * pow(b1, 0.3000000000e1) * R * R) *
pow(pow(b1, 0.2000000000e1) - pow(b2, 0.40e1), -0.2e1) / 0.2e1);
}

else if(x== -1.0 && w==5.0 && b==0.01)
{
return(pow(R, -0.2e1) / b2 * (-pow(b2, 0.70e1) * pow(b1, 0.3000000000e1) *
pow(R, -0.8e1) + 0.2e1 * pow(b2, 0.9500000000e1) * pow(R, -0.4e1) *
pow(b1, 0.1500000000e1) * sqrt(0.1e1 / b2 * pow(R, -0.4e1) * (-pow(b2, -0.50e1)
* pow(b1, 0.4000000000e1) * pow(R, 0.6e1) + pow(b2, -0.40e1) * pow(b1, 0.3000000000e1)
* pow(R, 0.6e1) - 0.2e1 * pow(b2, -0.40e1) * pow(b1, 0.3000000000e1) *
m * pow(R, 0.5e1) + b1 * pow(R, 0.6e1) * b2 - b2 * b2 * pow(R, 0.6e1)
+ 0.2e1 * b2 * b2 * m * pow(R, 0.5e1) + b2 * b2 * pow(R, -0.4e1))) -
pow(b2, 0.70e1) * R * R * pow(b1, 0.3000000000e1) + pow(b2, 0.130e2) *
R * R + 0.2e1 * pow(b2, 0.70e1) * m * R * pow(b1, 0.3000000000e1) -
0.2e1 * pow(b2, 0.130e2) * m * R - pow(b2, 0.130e2) * pow(R, -0.8e1) +
pow(b1, 0.70e1) * R * R - pow(b2, 0.60e1) * pow(b1, 0.4000000000e1) * R
* R) * pow(pow(b1, 0.3000000000e1) - pow(b2, 0.60e1), -0.2e1) / 0.2e1);
}

else if(x==(7./4.) && w==5.0 && b==0.01)
{
return (-pow(R, -0.2e1) / b2 * (pow(b2, 0.70e1) * pow(b1, 0.3000000000e1)
* pow(R, 0.3000000000e1) - 0.2e1 * pow(b2, 0.9500000000e1) *
pow(R, 0.1500000000e1) * pow(b1, 0.1500000000e1) * sqrt(-0.1e1 / b2 *
pow(R, -0.4e1) * (pow(b2, -0.50e1) * pow(b1, 0.4000000000e1) * pow(R, 0.6e1)
- pow(b2, -0.40e1) * pow(b1, 0.3000000000e1) * pow(R, 0.6e1) + 0.2e1 *
pow(b2, -0.40e1) * pow(b1, 0.3000000000e1) * m * pow(R, 0.5e1) - b1 *
pow(R, 0.6e1) * b2 + b2 * b2 * pow(R, 0.6e1) - 0.2e1 * b2 * b2 * m *
pow(R, 0.5e1) - b2 * b2 * pow(R, 0.7000000000e1))) + pow(b2, 0.70e1)
* R * R * pow(b1, 0.3000000000e1) - pow(b2, 0.130e2) * R * R - 0.2e1 *
pow(b2, 0.70e1) * m * R * pow(b1, 0.3000000000e1) + 0.2e1 * pow(b2, 0.130e2)
* m * R + pow(b2, 0.130e2) * pow(R, 0.3000000000e1) - pow(b1, 0.70e1) * R
* R + pow(b2, 0.60e1) * pow(b1, 0.4000000000e1) * R * R) *
pow(pow(b1, 0.3000000000e1) - pow(b2, 0.60e1), -0.2e1) / 0.2e1);
}

else if(x==(7./4.) && w==3.0 && b==0.01)
{
return(-pow(R, -0.2e1) / b2 * (pow(b2, 0.50e1) * pow(b1, 0.2000000000e1) *
pow(R, 0.3000000000e1) - 0.2e1 * pow(b2, 0.6500000000e1) * pow(R, 0.1500000000e1)
* pow(b1, 0.1000000000e1) * sqrt(-0.1e1 / b2 * pow(R, -0.4e1) *

```

```

(pow(b2, -0.30e1) * pow(b1, 0.3000000000e1) * pow(R, 0.6e1) - pow(b2, -0.20e1)
 * pow(b1, 0.2000000000e1) * pow(R, 0.6e1) + 0.2e1 * pow(b2, -0.20e1) *
pow(b1, 0.2000000000e1) * m * pow(R, 0.5e1) - b1 * pow(R, 0.6e1) * b2 + b2
 * b2 * pow(R, 0.6e1) - 0.2e1 * b2 * b2 * m * pow(R, 0.5e1) - b2 * b2 *
pow(R, 0.7000000000e1))) + pow(b2, 0.50e1) * R * R * pow(b1, 0.2000000000e1)
 - pow(b2, 0.90e1) * R * R - 0.2e1 * pow(b2, 0.50e1) * m * R *
pow(b1, 0.2000000000e1) + 0.2e1 * pow(b2, 0.90e1) * m * R + pow(b2, 0.90e1)
 * pow(R, 0.3000000000e1) - pow(b1, 0.50e1) * R * R + pow(b2, 0.40e1)
 * pow(b1, 0.3000000000e1) * R * R) * pow(pow(b1, 0.2000000000e1) -
pow(b2, 0.40e1), -0.2e1) / 0.2e1);
}

else if(x==(7./4.) && w==1.5 && b==0.01)
{
return(-pow(R, -0.2e1) / b2 * (pow(b2, 0.35e1) * pow(b1, 0.1250000000e1)
 * pow(R, 0.3000000000e1) - 0.2e1 * pow(b2, 0.4250000000e1) *
pow(R, 0.1500000000e1) * pow(b1, 0.6250000000e0) * sqrt(-0.1e1 / b2
 * pow(R, -0.4e1) * (pow(b2, -0.15e1) * pow(b1, 0.2250000000e1) *
pow(R, 0.6e1) - pow(b2, -0.5e0) * pow(b1, 0.1250000000e1) * pow(R, 0.6e1)
 + 0.2e1 * pow(b2, -0.5e0) * pow(b1, 0.1250000000e1) * m * pow(R, 0.5e1)
 - b1 * pow(R, 0.6e1) * b2 + b2 * b2 * pow(R, 0.6e1) - 0.2e1 * b2 * b2 *
m * pow(R, 0.5e1) - b2 * b2 * pow(R, 0.7000000000e1))) + pow(b2, 0.35e1)
 * R * R * pow(b1, 0.1250000000e1) - pow(b2, 0.60e1) * R * R - 0.2e1 *
pow(b2, 0.35e1) * m * R * pow(b1, 0.1250000000e1) + 0.2e1 * pow(b2, 0.60e1)
 * m * R + pow(b2, 0.60e1) * pow(R, 0.3000000000e1) - pow(b1, 0.35e1)
 * R * R + pow(b2, 0.25e1) * pow(b1, 0.2250000000e1) * R * R) *
pow(pow(b1, 0.1250000000e1) - pow(b2, 0.25e1), -0.2e1) / 0.2e1);
}

else if(x==(7./4.) && w==0.2 && b==0.05)
{
return(-pow(R, -0.2e1) / b2 * (pow(b2, 0.22e1) * pow(b1, 0.6000000000e0)
 * pow(R, 0.3000000000e1) - 0.2e1 * pow(b2, 0.2300000000e1) *
pow(R, 0.1500000000e1) * pow(b1, 0.3000000000e0) * sqrt(-0.1e1 / b2
 * pow(R, -0.4e1) * (pow(b2, -0.2e0) * pow(b1, 0.1600000000e1) * pow(R, 0.6e1)
 - pow(b2, 0.8e0) * pow(b1, 0.6000000000e0) * pow(R, 0.6e1) + 0.2e1 * pow(b2, 0.8e0)
 * pow(b1, 0.6000000000e0) * m * pow(R, 0.5e1) - b1 * pow(R, 0.6e1) * b2 + b2 *
b2 * pow(R, 0.6e1) - 0.2e1 * b2 * b2 * m * pow(R, 0.5e1) - b2 * b2 *
pow(R, 0.7000000000e1))) + pow(b2, 0.22e1) * R * R * pow(b1, 0.6000000000e0)
 - pow(b2, 0.34e1) * R * R - 0.2e1 * pow(b2, 0.22e1) * m * R *
pow(b1, 0.6000000000e0) + 0.2e1 * pow(b2, 0.34e1) * m * R + pow(b2, 0.34e1)
 * pow(R, 0.3000000000e1) - pow(b1, 0.22e1) * R * R + pow(b2, 0.12e1) *
pow(b1, 0.1600000000e1) * R * R) * pow(pow(b1, 0.6000000000e0) -
pow(b2, 0.12e1), -0.2e1) / 0.2e1);
}

else if(x==(7./4.) && w==0.1 && b==0.05)
{
return(-pow(R, -0.2e1) / b2 * (pow(b2, 0.21e1) * pow(b1, 0.5500000000e0)
 * pow(R, 0.3000000000e1) - 0.2e1 * pow(b2, 0.2150000000e1) * pow(R, 0.1500000000e1)
 * pow(b1, 0.2750000000e0) * sqrt(-0.1e1 / b2 * pow(R, -0.4e1) * (pow(b2, -0.1e0)
 * pow(b1, 0.1550000000e1) * pow(R, 0.6e1) - pow(b2, 0.9e0) * pow(b1, 0.5500000000e0)
 * pow(R, 0.6e1) + 0.2e1 * pow(b2, 0.9e0) * pow(b1, 0.5500000000e0) * m *
pow(R, 0.5e1) - b1 * pow(R, 0.6e1) * b2 + b2 * b2 * pow(R, 0.6e1) - 0.2e1
 * b2 * b2 * m * pow(R, 0.5e1) - b2 * b2 * pow(R, 0.7000000000e1))) +
pow(b2, 0.21e1) * R * R * pow(b1, 0.5500000000e0) - pow(b2, 0.32e1) *
R * R - 0.2e1 * pow(b2, 0.21e1) * m * R * pow(b1, 0.5500000000e0) +
0.2e1 * pow(b2, 0.32e1) * m * R + pow(b2, 0.32e1) *
pow(R, 0.3000000000e1) - pow(b1, 0.21e1) * R * R + pow(b2, 0.11e1)
 * pow(b1, 0.1550000000e1) * R * R) * pow(pow(b1, 0.5500000000e0)
 - pow(b2, 0.11e1), -0.2e1) / 0.2e1);
}

else if(x==(7./4.) && w==0.1 && b==0.0001)
{

```

```

return(-pow(R, -0.2e1) / b2 * (pow(b2, 0.21e1) * pow(b1, 0.5500000000e0)
* pow(R, 0.3000000000e1) - 0.2e1 * pow(b2, 0.2150000000e1) * pow(R, 0.1500000000e1)
* pow(b1, 0.2750000000e0) * sqrt(-0.1e1 / b2 * pow(R, -0.4e1) * (pow(b2, -0.1e0)
* pow(b1, 0.1550000000e1) * pow(R, 0.6e1) - pow(b2, 0.9e0) *
pow(b1, 0.5500000000e0) * pow(R, 0.6e1) + 0.2e1 * pow(b2, 0.9e0) *
pow(b1, 0.5500000000e0) * m * pow(R, 0.5e1) - b1 * pow(R, 0.6e1) * b2 + b2 *
b2 * pow(R, 0.6e1) - 0.2e1 * b2 * b2 * m * pow(R, 0.5e1) - b2 * b2
* pow(R, 0.7000000000e1))) + pow(b2, 0.21e1) * R * R *
pow(b1, 0.5500000000e0) - pow(b2, 0.32e1) * R * R - 0.2e1 * pow(b2, 0.21e1)
* m * R * pow(b1, 0.5500000000e0) + 0.2e1 * pow(b2, 0.32e1) * m * R +
pow(b2, 0.32e1) * pow(R, 0.3000000000e1) - pow(b1, 0.21e1) * R * R +
pow(b2, 0.11e1) * pow(b1, 0.1550000000e1) * R * R) *
pow(pow(b1, 0.5500000000e0) - pow(b2, 0.11e1), -0.2e1) / 0.2e1);
}

else if(x==(7./4.) && w==0.1 && b==0.000002)
{
return(-pow(R, -0.2e1) / b2 * (pow(b2, 0.21e1) * pow(b1, 0.5500000000e0)
* pow(R, 0.3000000000e1) - 0.2e1 * pow(b2, 0.2150000000e1) * pow(R, 0.1500000000e1)
* pow(b1, 0.2750000000e0) * sqrt(-0.1e1 / b2 * pow(R, -0.4e1) *
(pow(b2, -0.1e0) * pow(b1, 0.1550000000e1) * pow(R, 0.6e1) - pow(b2, 0.9e0)
* pow(b1, 0.5500000000e0) * pow(R, 0.6e1) + 0.2e1 * pow(b2, 0.9e0) *
pow(b1, 0.5500000000e0) * m * pow(R, 0.5e1) - b1 * pow(R, 0.6e1) * b2
+ b2 * b2 * pow(R, 0.6e1) - 0.2e1 * b2 * b2 * m * pow(R, 0.5e1) - b2 *
b2 * pow(R, 0.7000000000e1))) + pow(b2, 0.21e1) * R * R * pow(b1, 0.5500000000e0)
- pow(b2, 0.32e1) * R * R - 0.2e1 * pow(b2, 0.21e1) * m * R * pow(b1, 0.5500000000e0)
+ 0.2e1 * pow(b2, 0.32e1) * m * R + pow(b2, 0.32e1) * pow(R, 0.3000000000e1)
- pow(b1, 0.21e1) * R * R + pow(b2, 0.11e1) * pow(b1, 0.1550000000e1) * R * R) *
pow(pow(b1, 0.5500000000e0) - pow(b2, 0.11e1), -0.2e1) / 0.2e1);
}

else if(x==(7./4.) && w==0.1 && b==0.000001)
{
return( -pow(R, -0.2e1) / b2 * (pow(b2, 0.21e1) * pow(b1, 0.5500000000e0) *
pow(R, 0.3000000000e1) - 0.2e1 * pow(b2, 0.2150000000e1) * pow(R, 0.1500000000e1)
* pow(b1, 0.2750000000e0) * sqrt(-0.1e1 / b2 * pow(R, -0.4e1) * (pow(b2, -0.1e0)
* pow(b1, 0.1550000000e1) * pow(R, 0.6e1) - pow(b2, 0.9e0) * pow(b1, 0.5500000000e0)
* pow(R, 0.6e1) + 0.2e1 * pow(b2, 0.9e0) * pow(b1, 0.5500000000e0) * m *
pow(R, 0.5e1) - b1 * pow(R, 0.6e1) * b2 + b2 * b2 * pow(R, 0.6e1) - 0.2e1 * b2
* b2 * m * pow(R, 0.5e1) - b2 * b2 * pow(R, 0.7000000000e1))) + pow(b2, 0.21e1)
* R * R * pow(b1, 0.5500000000e0) - pow(b2, 0.32e1) * R * R - 0.2e1 * pow(b2, 0.21e1)
* m * R * pow(b1, 0.5500000000e0) + 0.2e1 * pow(b2, 0.32e1) * m * R + pow(b2, 0.32e1)
* pow(R, 0.3000000000e1) - pow(b1, 0.21e1) * R * R + pow(b2, 0.11e1) *
pow(b1, 0.1550000000e1) * R * R) * pow(pow(b1, 0.5500000000e0) -
pow(b2, 0.11e1), -0.2e1) / 0.2e1);
}

else if(x==(7./4.) && w==10 && b==0.000001)
{
return(-pow(R, -0.2e1) / b2 * (pow(b2, 0.12e2) * pow(b1, 0.11e2 / 0.2e1) *
pow(R, 0.3000000000e1) - 0.2e1 * pow(b2, 0.17e2) * pow(R, 0.1500000000e1) *
pow(b1, 0.11e2 / 0.4e1) * sqrt(-0.1e1 / b2 * pow(R, -0.4e1) * (pow(b2, -0.10e2)
* pow(b1, 0.13e2 / 0.2e1) * pow(R, 0.6e1) - pow(b2, -0.9e1) * pow(b1, 0.11e2 / 0.2e1)
* pow(R, 0.6e1) + 0.2e1 * pow(b2, -0.9e1) * pow(b1, 0.11e2 / 0.2e1) * m *
pow(R, 0.5e1) - b1 * pow(R, 0.6e1) * b2 + b2 * b2 * pow(R, 0.6e1) - 0.2e1
* b2 * b2 * m * pow(R, 0.5e1) - b2 * b2 * pow(R, 0.7000000000e1))) +
pow(b2, 0.12e2) * R * R * pow(b1, 0.11e2 / 0.2e1) - pow(b2, 0.23e2) *
R * R - 0.2e1 * pow(b2, 0.12e2) * m * R * pow(b1, 0.11e2 / 0.2e1) +
0.2e1 * pow(b2, 0.23e2) * m * R + pow(b2, 0.23e2) * pow(R, 0.3000000000e1)
- pow(b1, 0.12e2) * R * R + pow(b2, 0.11e2) * pow(b1, 0.13e2 / 0.2e1) *
R * R) * pow(pow(b1, 0.11e2 / 0.2e1) - pow(b2, 0.11e2), -0.2e1) / 0.2e1);
}

else if(x==(7./4.) && w==-1.5 && b==0.01)
{

```



```

return (pow(R, -0.2e1) / b2 * (-pow(b2, 0.5e0) * pow(b1, -0.2500000000e0)
* pow(R, 0.3000000000e1) + 0.2e1 * pow(b2, -0.2500000000e0) *
pow(R, 0.1500000000e1) * pow(b1, -0.1250000000e0) * sqrt((-pow(b2, 0.15e1)
* pow(b1, 0.7500000000e0) * pow(R, 0.6e1) + pow(b2, 0.25e1) *
pow(b1, -0.2500000000e0) * pow(R, 0.6e1) - 0.2e1 * pow(b2, 0.25e1)
* pow(b1, -0.2500000000e0) * m * pow(R, 0.5e1) + b1 * pow(R, 0.6e1)
* b2 - b2 * b2 * pow(R, 0.6e1) + 0.2e1 * b2 * b2 * m * pow(R, 0.5e1)
+ b2 * b2 * pow(R, 0.7000000000e1)) / b2 * pow(R, -0.4e1)) -
pow(b2, 0.5e0) * R * R * pow(b1, -0.2500000000e0) + 0.10e1 * R * R
+ 0.2e1 * pow(b2, 0.5e0) * m * R * pow(b1, -0.2500000000e0) - 0.20e1
* m * R - 0.10e1 * pow(R, 0.3000000000e1) + pow(b1, 0.5e0) * R * R
- pow(b2, -0.5e0) * pow(b1, 0.7500000000e0) * R * R) *
pow(pow(b1, -0.2500000000e0) - pow(b2, -0.5e0), -0.2e1) / 0.2e1);
}

else if(x==3.0 && w==5.0 && b==0.01)
{
return (-pow(R, -0.2e1) / b2 * (pow(b2, 0.70e1) * pow(b1, 0.3000000000e1)
* pow(R, 0.8e1) - 0.2e1 * pow(b2, 0.9500000000e1) * pow(R, 0.4e1) *
pow(b1, 0.1500000000e1) * sqrt(0.1e1 / b2 * pow(R, -0.4e1) *
(-pow(b2, -0.50e1) * pow(b1, 0.4000000000e1) * pow(R, 0.6e1) +
pow(b2, -0.40e1) * pow(b1, 0.3000000000e1) * pow(R, 0.6e1) -
0.2e1 * pow(b2, -0.40e1) * pow(b1, 0.3000000000e1) * m *
pow(R, 0.5e1) + b1 * pow(R, 0.6e1) * b2 - b2 * b2 * pow(R, 0.6e1)
+ 0.2e1 * b2 * b2 * m * pow(R, 0.5e1) + b2 * b2 * pow(R, 0.12e2)))
+ pow(b2, 0.70e1) * R * R * pow(b1, 0.3000000000e1) -
pow(b2, 0.130e2) * R * R - 0.2e1 * pow(b2, 0.70e1) * m * R *
pow(b1, 0.3000000000e1) + 0.2e1 * pow(b2, 0.130e2) * m * R
+ pow(b2, 0.130e2) * pow(R, 0.8e1) - pow(b1, 0.70e1) * R *
R + pow(b2, 0.60e1) * pow(b1, 0.4000000000e1) * R * R) *
pow(pow(b1, 0.3000000000e1) - pow(b2, 0.60e1), -0.2e1) / 0.2e1);
}

else if(x==3.0 && w==3.0 && b==0.01)
{
return (-pow(R, -0.2e1) / b2 * (pow(b2, 0.50e1) * pow(b1, 0.2000000000e1) *
pow(R, 0.8e1) - 0.2e1 * pow(b2, 0.6500000000e1) * pow(R, 0.4e1) *
pow(b1, 0.1000000000e1) * sqrt(0.1e1 / b2 * pow(R, -0.4e1) *
(-pow(b2, -0.30e1) * pow(b1, 0.3000000000e1) * pow(R, 0.6e1) +
pow(b2, -0.20e1) * pow(b1, 0.2000000000e1) * pow(R, 0.6e1) - 0.2e1
* pow(b2, -0.20e1) * pow(b1, 0.2000000000e1) * m * pow(R, 0.5e1)
+ b1 * pow(R, 0.6e1) * b2 - b2 * b2 * pow(R, 0.6e1) + 0.2e1 * b2
* b2 * m * pow(R, 0.5e1) + b2 * b2 * pow(R, 0.12e2))) +
pow(b2, 0.50e1) * R * R * pow(b1, 0.2000000000e1) - pow(b2, 0.90e1)
* R * R - 0.2e1 * pow(b2, 0.50e1) * m * R * pow(b1, 0.2000000000e1)
+ 0.2e1 * pow(b2, 0.90e1) * m * R + pow(b2, 0.90e1) * pow(R, 0.8e1)
- pow(b1, 0.50e1) * R * R + pow(b2, 0.40e1) *
pow(b1, 0.3000000000e1) * R * R) * pow(pow(b1, 0.2000000000e1)
- pow(b2, 0.40e1), -0.2e1) / 0.2e1);
}

else if(x==3.0 && w==1.5 && b==0.01)
{
return(-pow(R, -0.2e1) / b2 * (pow(b2, 0.35e1) * pow(b1, 0.1250000000e1)
* pow(R, 0.8e1) - 0.2e1 * pow(b2, 0.4250000000e1) * pow(R, 0.4e1) *
pow(b1, 0.6250000000e0) * sqrt(0.1e1 / b2 * pow(R, -0.4e1) *
(-pow(b2, -0.15e1) * pow(b1, 0.2250000000e1) * pow(R, 0.6e1) +
pow(b2, -0.5e0) * pow(b1, 0.1250000000e1) * pow(R, 0.6e1) - 0.2e1 *
pow(b2, -0.5e0) * pow(b1, 0.1250000000e1) * m * pow(R, 0.5e1) + b1
* pow(R, 0.6e1) * b2 - b2 * b2 * pow(R, 0.6e1) + 0.2e1 * b2 * b2 *
m * pow(R, 0.5e1) + b2 * b2 * pow(R, 0.12e2))) + pow(b2, 0.35e1) *
R * R * pow(b1, 0.1250000000e1) - pow(b2, 0.60e1) * R * R - 0.2e1 *
pow(b2, 0.35e1) * m * R * pow(b1, 0.1250000000e1) + 0.2e1 *
pow(b2, 0.60e1) * m * R + pow(b2, 0.60e1) * pow(R, 0.8e1) -
pow(b1, 0.35e1) * R * R + pow(b2, 0.25e1) * pow(b1, 0.2250000000e1)

```

```

* R * R) * pow(pow(b1, 0.1250000000e1) - pow(b2, 0.25e1), -0.2e1)
/ 0.2e1);
}
else if(x==3.0 && w==0.2 && b==0.05)
{
    return(-pow(R, -0.2e1) / b2 * (pow(b2, 0.22e1) * pow(b1, 0.6000000000e0)
    * pow(R, 0.8e1) - 0.2e1 * pow(b2, 0.2300000000e1) * pow(R, 0.4e1) *
pow(b1, 0.3000000000e0) * sqrt(0.1e1 / b2 * pow(R, -0.4e1) * (-pow(b2, -0.2e0)
    * pow(b1, 0.1600000000e1) * pow(R, 0.6e1) + pow(b2, 0.8e0) * pow(b1, 0.6000000000e0)
    * pow(R, 0.6e1) - 0.2e1 * pow(b2, 0.8e0) * pow(b1, 0.6000000000e0) * m *
    pow(R, 0.5e1) + b1 * pow(R, 0.6e1) * b2 - b2 * b2 * pow(R, 0.6e1) + 0.2e1
    * b2 * b2 * m * pow(R, 0.5e1) + b2 * b2 * pow(R, 0.12e2))) + pow(b2, 0.22e1)
    * R * R * pow(b1, 0.6000000000e0) - pow(b2, 0.34e1) * R * R - 0.2e1 *
pow(b2, 0.22e1) * m * R * pow(b1, 0.6000000000e0) + 0.2e1 * pow(b2, 0.34e1)
    * m * R + pow(b2, 0.34e1) * pow(R, 0.8e1) - pow(b1, 0.22e1) * R * R +
pow(b2, 0.12e1) * pow(b1, 0.1600000000e1) * R * R) * pow(pow(b1, 0.6000000000e0)
    - pow(b2, 0.12e1), -0.2e1) / 0.2e1);
}
else if(x==3.0 && w==0.1 && b==0.05)
{
    return(-pow(R, -0.2e1) / b2 * (pow(b2, 0.21e1) * pow(b1, 0.5500000000e0)
    * pow(R, 0.8e1) - 0.2e1 * pow(b2, 0.2150000000e1) * pow(R, 0.4e1) *
    pow(b1, 0.2750000000e0) * sqrt(0.1e1 / b2 * pow(R, -0.4e1) * (-pow(b2, -0.1e0)
    * pow(b1, 0.1550000000e1) * pow(R, 0.6e1) + pow(b2, 0.9e0) * pow(b1, 0.5500000000e0)
    * pow(R, 0.6e1) - 0.2e1 * pow(b2, 0.9e0) * pow(b1, 0.5500000000e0) * m * pow(R, 0.5e1)
    + b1 * pow(R, 0.6e1) * b2 - b2 * b2 * pow(R, 0.6e1) + 0.2e1 * b2 * b2 * m *
    pow(R, 0.5e1) + b2 * b2 * pow(R, 0.12e2))) + pow(b2, 0.21e1) * R * R *
    pow(b1, 0.5500000000e0) - pow(b2, 0.32e1) * R * R - 0.2e1 * pow(b2, 0.21e1) *
    m * R * pow(b1, 0.5500000000e0) + 0.2e1 * pow(b2, 0.32e1) * m * R + pow(b2, 0.32e1)
    * pow(R, 0.8e1) - pow(b1, 0.21e1) * R * R + pow(b2, 0.11e1) * pow(b1, 0.1550000000e1)
    * R * R) * pow(pow(b1, 0.5500000000e0) - pow(b2, 0.11e1), -0.2e1) / 0.2e1);
}
else if(x==3.0 && w==0.1 && b==0.0001)
{
    return(-pow(R, -0.2e1) / b2 * (pow(b2, 0.21e1) * pow(b1, 0.5500000000e0) *
    pow(R, 0.8e1) - 0.2e1 * pow(b2, 0.2150000000e1) * pow(R, 0.4e1) * pow(b1, 0.2750000000e0)
    * sqrt(0.1e1 / b2 * pow(R, -0.4e1) * (-pow(b2, -0.1e0) * pow(b1, 0.1550000000e1) *
    pow(R, 0.6e1) + pow(b2, 0.9e0) * pow(b1, 0.5500000000e0) * pow(R, 0.6e1) - 0.2e1 *
    pow(b2, 0.9e0) * pow(b1, 0.5500000000e0) * m * pow(R, 0.5e1) + b1 * pow(R, 0.6e1) *
    b2 - b2 * b2 * pow(R, 0.6e1) + 0.2e1 * b2 * b2 * m * pow(R, 0.5e1) + b2 * b2 *
    pow(R, 0.12e2))) + pow(b2, 0.21e1) * R * R * pow(b1, 0.5500000000e0) - pow(b2, 0.32e1)
    * R * R - 0.2e1 * pow(b2, 0.21e1) * m * R * pow(b1, 0.5500000000e0) + 0.2e1 * pow(b2, 0.32e1)
    * m * R + pow(b2, 0.32e1) * pow(R, 0.8e1) - pow(b1, 0.21e1) * R * R + pow(b2, 0.11e1) *
    pow(b1, 0.1550000000e1) * R * R) * pow(pow(b1, 0.5500000000e0) -
    pow(b2, 0.11e1), -0.2e1) / 0.2e1);
}
else if(x==3.0 && w==0.1 && b==0.000002)
{
    return(-pow(R, -0.2e1) / b2 * (pow(b2, 0.21e1) * pow(b1, 0.5500000000e0) *
    pow(R, 0.8e1) - 0.2e1 * pow(b2, 0.2150000000e1) * pow(R, 0.4e1) *
    pow(b1, 0.2750000000e0) * sqrt(0.1e1 / b2 * pow(R, -0.4e1) * (-pow(b2, -0.1e0)
    * pow(b1, 0.1550000000e1) * pow(R, 0.6e1) + pow(b2, 0.9e0) *
    pow(b1, 0.5500000000e0) * pow(R, 0.6e1) - 0.2e1 * pow(b2, 0.9e0) *
    pow(b1, 0.5500000000e0) * m * pow(R, 0.5e1) + b1 * pow(R, 0.6e1) * b2 - b2
    * b2 * pow(R, 0.6e1) + 0.2e1 * b2 * b2 * m * pow(R, 0.5e1) + b2 * b2 *
    pow(R, 0.12e2))) + pow(b2, 0.21e1) * R * R * pow(b1, 0.5500000000e0) -
    pow(b2, 0.32e1) * R * R - 0.2e1 * pow(b2, 0.21e1) * m * R *
    pow(b1, 0.5500000000e0) + 0.2e1 * pow(b2, 0.32e1) * m * R + pow(b2, 0.32e1)
    * pow(R, 0.8e1) - pow(b1, 0.21e1) * R * R + pow(b2, 0.11e1) *
    pow(b1, 0.1550000000e1) * R * R) * pow(pow(b1, 0.5500000000e0) -
    pow(b2, 0.11e1), -0.2e1) / 0.2e1);
}
else if(x==3.0 && w==0.1 && b==0.000001)
{
    return(-pow(R, -0.2e1) / b2 * (pow(b2, 0.21e1) * pow(b1, 0.5500000000e0)

```

```

* pow(R, 0.8e1) - 0.2e1 * pow(b2, 0.2150000000e1) * pow(R, 0.4e1) *
pow(b1, 0.2750000000e0) * sqrt(0.1e1 / b2 * pow(R, -0.4e1) *
(-pow(b2, -0.1e0) * pow(b1, 0.1550000000e1) * pow(R, 0.6e1) + pow(b2, 0.9e0)
* pow(b1, 0.5500000000e0) * pow(R, 0.6e1) - 0.2e1 * pow(b2, 0.9e0) *
pow(b1, 0.5500000000e0) * m * pow(R, 0.5e1) + b1 * pow(R, 0.6e1) * b2 -
b2 * b2 * pow(R, 0.6e1) + 0.2e1 * b2 * b2 * m * pow(R, 0.5e1) + b2 * b2 *
pow(R, 0.12e2))) + pow(b2, 0.21e1) * R * R * pow(b1, 0.5500000000e0) -
pow(b2, 0.32e1) * R * R - 0.2e1 * pow(b2, 0.21e1) * m * R *
pow(b1, 0.5500000000e0) + 0.2e1 * pow(b2, 0.32e1) * m * R + pow(b2, 0.32e1)
* pow(R, 0.8e1) - pow(b1, 0.21e1) * R * R + pow(b2, 0.11e1) *
pow(b1, 0.1550000000e1) * R * R) * pow(pow(b1, 0.5500000000e0) -
pow(b2, 0.11e1), -0.2e1) / 0.2e1);
}
else if(x==3.0 && w==10 && b==0.000001)
{
return(-pow(R, -0.2e1) / b2 * (pow(b2, 0.12e2) *
pow(b1, 0.11e2 / 0.2e1) * pow(R, 0.8e1) - 0.2e1 * pow(b2, 0.17e2)
* pow(R, 0.4e1) * pow(b1, 0.11e2 / 0.4e1) * sqrt(0.1e1 / b2 *
pow(R, -0.4e1) * (-pow(b2, -0.10e2) * pow(b1, 0.13e2 / 0.2e1) *
pow(R, 0.6e1) + pow(b2, -0.9e1) * pow(b1, 0.11e2 / 0.2e1) *
pow(R, 0.6e1) - 0.2e1 * pow(b2, -0.9e1) * pow(b1, 0.11e2 / 0.2e1) *
m * pow(R, 0.5e1) + b1 * pow(R, 0.6e1) * b2 - b2 * b2 * pow(R, 0.6e1)
+ 0.2e1 * b2 * b2 * m * pow(R, 0.5e1) + b2 * b2 * pow(R, 0.12e2)))
+ pow(b2, 0.12e2) * R * R * pow(b1, 0.11e2 / 0.2e1) - pow(b2, 0.23e2)
* R * R - 0.2e1 * pow(b2, 0.12e2) * m * R * pow(b1, 0.11e2 / 0.2e1)
+ 0.2e1 * pow(b2, 0.23e2) * m * R + pow(b2, 0.23e2) * pow(R, 0.8e1)
- pow(b1, 0.12e2) * R * R + pow(b2, 0.11e2) * pow(b1, 0.13e2 / 0.2e1)
* R * R) * pow(pow(b1, 0.11e2 / 0.2e1) - pow(b2, 0.11e2), -0.2e1) / 0.2e1);
}

else if(x==3.0 && w== -1.5 && b==0.01)
{
return (pow(R, -0.2e1) / b2 * (-pow(b2, 0.5e0) * pow(b1, -0.2500000000e0)
* pow(R, 0.8e1) + 0.2e1 * pow(b2, -0.2500000000e0) * pow(R, 0.4e1)
* pow(b1, -0.1250000000e0) * sqrt((-pow(b2, 0.15e1) *
pow(b1, 0.7500000000e0) * pow(R, 0.6e1) + pow(b2, 0.25e1) *
pow(b1, -0.2500000000e0) * pow(R, 0.6e1) - 0.2e1 * pow(b2, 0.25e1)
* pow(b1, -0.2500000000e0) * m * pow(R, 0.5e1) + b1 * pow(R, 0.6e1)
* b2 - b2 * b2 * pow(R, 0.6e1) + 0.2e1 * b2 * b2 * m *
pow(R, 0.5e1) + b2 * b2 * pow(R, 0.12e2)) / b2 * pow(R, -0.4e1))
- pow(b2, 0.5e0) * R * R * pow(b1, -0.2500000000e0) + 0.10e1
* R * R + 0.2e1 * pow(b2, 0.5e0) * m * R * pow(b1, -0.2500000000e0)
- 0.20e1 * m * R - 0.10e1 * pow(R, 0.8e1) + pow(b1, 0.5e0) *
R * R - pow(b2, -0.5e0) * pow(b1, 0.7500000000e0) * R *
R) * pow(pow(b1, -0.2500000000e0) - pow(b2, -0.5e0), -0.2e1) / 0.2e1);
}

else if(x== -1 && w== -1.5 && b==0.01)
{
return (pow(R, -0.2e1) / b2 * (-pow(b2, 0.5e0) * pow(b1, -0.2500000000e0)
* pow(R, -0.8e1) + 0.2e1 * pow(b2, -0.2500000000e0) * pow(R, -0.4e1) *
pow(b1, -0.1250000000e0) * sqrt((-pow(b2, 0.15e1) * pow(b1, 0.7500000000e0)
* pow(R, 0.6e1) + pow(b2, 0.25e1) * pow(b1, -0.2500000000e0) *
pow(R, 0.6e1) - 0.2e1 * pow(b2, 0.25e1) * pow(b1, -0.2500000000e0)
* m * pow(R, 0.5e1) + b1 * pow(R, 0.6e1) * b2 - b2 * b2 *
pow(R, 0.6e1) + 0.2e1 * b2 * b2 * m * pow(R, 0.5e1) + b2 * b2 *
pow(R, -0.4e1)) / b2 * pow(R, -0.4e1)) - pow(b2, 0.5e0) * R * R
* pow(b1, -0.2500000000e0) + 0.10e1 * R * R + 0.2e1 *
pow(b2, 0.5e0) * m * R * pow(b1, -0.2500000000e0) - 0.20e1 * m
* R - 0.10e1 * pow(R, -0.8e1) + pow(b1, 0.5e0) * R * R -
pow(b2, -0.5e0) * pow(b1, 0.7500000000e0) * R * R) *
pow(pow(b1, -0.2500000000e0) - pow(b2, -0.5e0), -0.2e1) / 0.2e1);
}

```

```

else
{
    return -pow(R, -0.2e1) / b2 * (pow(b2, (double) (w + 2)) *
pow(b1, (double) w / 0.2e1 + 0.1e1 / 0.2e1) * pow(R, (double)
(4 * x - 4)) - 0.2e1 * pow(b2, 0.2e1 + 0.3e1 / 0.2e1 * (double) w)
* pow(R, (double) (2 * x - 2)) * pow(b1, (double) w / 0.4e1 + 0.1e1 / 0.4e1)
* sqrt(0.1e1 / b2 * pow(R, -0.4e1) * (-pow(b2, -(double) w) *
pow(b1, (double) w / 0.2e1 + 0.3e1 / 0.2e1) * pow(R, 0.6e1) + pow(b2, (double)
(-w + 1)) * pow(b1, (double) w / 0.2e1 + 0.1e1 / 0.2e1) * pow(R, 0.6e1)
- 0.2e1 * pow(b2, (double) (-w + 1)) * pow(b1, (double) w / 0.2e1 + 0.1e1 /
0.2e1) * m * pow(R, 0.5e1) + b1 * pow(R, 0.6e1) * b2 - b2 * b2 * pow(R, 0.6e1)
+ 0.2e1 * b2 * b2 * m * pow(R, 0.5e1) + b2 * b2 * pow(R, (double) (4 * x))))
+ pow(b2, (double) (w + 2)) * R * R * pow(b1, (double) w / 0.2e1 + 0.1e1 / 0.2e1)
- pow(b2, (double) (2 * w + 3)) * R * R - 0.2e1 * pow(b2, (double) (w + 2))
* m * R * pow(b1, (double) w / 0.2e1 + 0.1e1 / 0.2e1) + 0.2e1 * pow(b2, (double)
(2 * w + 3)) * m * R + pow(b2, (double) (2 * w + 3)) * pow(R, (double)
(4 * x - 4)) - pow(b1, (double) (w + 2)) * R * R + pow(b2, (double) (w + 1))
* pow(b1, (double) w / 0.2e1 + 0.3e1 / 0.2e1) * R * R) * pow(pow(b1, (double)
w / 0.2e1 + 0.1e1 / 0.2e1) - pow(b2, (double) (w + 1)), -0.2e1) / 0.2e1;
}
}

//CONDICOES DE ENERGIA

Double_t EC1Lobo2(Double_t R,Double_t w,Double_t b)
{
    Double_t pi=4*atan(1.0);
    Double_t b1=1+b*R*R;
    Double_t b2=1+2*b*R*R;

    if(w==5.0 && b==0.01)
    {
        return -0.6250000000e-3 * (0.160e2 * (0.1e1 + 0.1e-1 * R * R) *
(0.1e1 + 0.2e-1 * R * R) + 0.80e1 * (0.1e1 + 0.1e-1 * R * R) *
pow(0.1e1 + 0.2e-1 * R * R, 0.2e1) - 0.12000e1 * R * R - 0.13200e1 * R * R *
(0.1e1 + 0.2e-1 * R * R) - 0.3600e0 * R * R * pow(0.1e1 + 0.2e-1 * R * R, 0.2e1)
+ 0.400e0 * R * R * (0.1e1 + 0.1e-1 * R * R)) / pi *
pow(0.1e1 + 0.2e-1 * R * R, -0.3e1) / (0.1e1 + 0.1e-1 * R * R);
    }

    if(w==3.0 && b==0.01)
    {
        return -0.6250000000e-3 * (0.80e1 * (0.1e1 + 0.1e-1 * R * R)
* (0.1e1 + 0.2e-1 * R * R) + 0.40e1 * (0.1e1 + 0.1e-1 * R * R) *
pow(0.1e1 + 0.2e-1 * R * R, 0.2e1) - 0.4800e0 * R * R - 0.5600e0
* R * R * (0.1e1 + 0.2e-1 * R * R) - 0.1600e0 * R * R *
pow(0.1e1 + 0.2e-1 * R * R, 0.2e1) + 0.240e0 * R * R *
(0.1e1 + 0.1e-1 * R * R)) / pi * pow(0.1e1 + 0.2e-1 * R * R, -0.3e1)
/ (0.1e1 + 0.1e-1 * R * R);
    }

    if(w==0.2 && b==0.05)
    {
        return -0.3125000000e-2 * (-0.32e1 * (0.1e1 + 0.5e-1 * R * R) *
(0.1e1 + 0.10e0 * R * R) - 0.16e1 * (0.1e1 + 0.5e-1 * R * R) *
pow(0.1e1 + 0.10e0 * R * R, 0.2e1) - 0.480e-1 * R * R - 0.1680e0
* R * R * (0.1e1 + 0.10e0 * R * R) - 0.720e-1 * R * R *
pow(0.1e1 + 0.10e0 * R * R, 0.2e1) + 0.80e-1 * R * R *
(0.1e1 + 0.5e-1 * R * R)) / pi *
pow(0.1e1 + 0.10e0 * R * R, -0.3e1) / (0.1e1 + 0.5e-1 * R * R);
    }
}

```

```

    if(w==0.1 && b==0.05)
    {
        return -0.3125000000e-2 * (-0.36e1 * (0.1e1 + 0.5e-1 * R * R)
* (0.1e1 + 0.10e0 * R * R) - 0.18e1 * (0.1e1 + 0.5e-1 * R * R) *
pow(0.1e1 + 0.10e0 * R * R, 0.2e1) - 0.220e-1 * R * R - 0.1320e0 *
R * R * (0.1e1 + 0.10e0 * R * R) - 0.605e-1 * R * R *
pow(0.1e1 + 0.10e0 * R * R, 0.2e1) + 0.40e-1 * R * R *
(0.1e1 + 0.5e-1 * R * R)) / pi * pow(0.1e1 + 0.10e0 * R * R, -0.3e1) /
(0.1e1 + 0.5e-1 * R * R);
    }

    if(w==0.1 && b==0.0001)
    {
        return -0.6250000000e-5 * (-0.36e1 * (0.1e1 + 0.1e-3 * R * R) *
(0.1e1 + 0.2e-3 * R * R) - 0.18e1 * (0.1e1 + 0.1e-3 * R * R) *
pow(0.1e1 + 0.2e-3 * R * R, 0.2e1) - 0.44e-4 * R * R - 0.264e-3 *
R * R * (0.1e1 + 0.2e-3 * R * R) - 0.121e-3 * R * R *
pow(0.1e1 + 0.2e-3 * R * R, 0.2e1) + 0.8e-4 * R * R * (0.1e1 + 0.1e-3 *
R * R)) / pi * pow(0.1e1 + 0.2e-3 * R * R, -0.3e1) / (0.1e1 + 0.1e-3 * R * R);
    }

    if(w==0.1 && b==0.000002)
    {
        return -0.1250000000e-6 * (-0.36e1 * (0.1e1 + 0.2e-5 * R * R)
* (0.1e1 + 0.4e-5 * R * R) - 0.18e1 * (0.1e1 + 0.2e-5 * R * R) *
pow(0.1e1 + 0.4e-5 * R * R, 0.2e1) - 0.88e-6 * R * R - 0.528e-5 * R
* R * (0.1e1 + 0.4e-5 * R * R) - 0.242e-5 * R * R * pow(0.1e1 +
0.4e-5 * R * R, 0.2e1) + 0.16e-5 * R * R * (0.1e1 + 0.2e-5 * R * R))
/ pi * pow(0.1e1 + 0.4e-5 * R * R, -0.3e1) / (0.1e1 + 0.2e-5 * R * R);
    }

    if(w==0.1 && b==0.000001)
    {
        return -0.6250000000e-7 * (-0.36e1 * (0.1e1 + 0.1e-5 * R
* R) * (0.1e1 + 0.2e-5 * R * R) - 0.18e1 * (0.1e1 + 0.1e-5 * R *
R) * pow(0.1e1 + 0.2e-5 * R * R, 0.2e1) - 0.44e-6 * R * R - 0.264e-5
* R * R * (0.1e1 + 0.2e-5 * R * R) - 0.121e-5 * R * R *
pow(0.1e1 + 0.2e-5 * R * R, 0.2e1) + 0.8e-6 * R * R *
(0.1e1 + 0.1e-5 * R * R)) / pi * pow(0.1e1 + 0.2e-5 * R *
R, -0.3e1) / (0.1e1 + 0.1e-5 * R * R);
    }

    if(w==10 && b==0.000001)
    {
        return -0.6250000000e-7 * (0.36e2 * (0.1e1 + 0.1e-5 * R * R)
* (0.1e1 + 0.2e-5 * R * R) + 0.18e2 * (0.1e1 + 0.1e-5 * R * R)
* pow(0.1e1 + 0.2e-5 * R * R, 0.2e1) - 0.440e-3 * R * R -
0.462e-3 * R * R * (0.1e1 + 0.2e-5 * R * R) - 0.121e-3 * R * R
* pow(0.1e1 + 0.2e-5 * R * R, 0.2e1) + 0.80e-4 * R * R * (0.1e1
+ 0.1e-5 * R * R)) / pi * pow(0.1e1 + 0.2e-5 * R * R, -0.3e1) /
(0.1e1 + 0.1e-5 * R * R);
    }

    if(w==1.5 && b==0.01)
    {
        return -0.6250000000e-3 * (0.20e1 * (0.1e1 + 0.1e-1 * R * R) *
(0.1e1 + 0.2e-1 * R * R) + 0.10e1 * (0.1e1 + 0.1e-1 * R * R) *
pow(0.1e1 + 0.2e-1 * R * R, 0.2e1) - 0.1500e0 * R * R - 0.2000e0 *
R * R * (0.1e1 + 0.2e-1 * R * R) - 0.625e-1 * R * R * pow(0.1e1 + 0.2e-1
* R * R, 0.2e1) + 0.120e0 * R * R * (0.1e1 + 0.1e-1 * R * R)) / pi *
pow(0.1e1 + 0.2e-1 * R * R, -0.3e1) / (0.1e1 + 0.1e-1 * R * R);
    }

```

```

if(w==-1.5 && b==0.01)
{
return (-0.1990445860e-3 * (-0.100e2 * (0.1e1 + 0.1e-1 * R * R) *
(0.1e1 + 0.2e-1 * R * R) - 0.50e1 * (0.1e1 + 0.1e-1 * R * R) *
pow(0.1e1 + 0.2e-1 * R * R, 0.2e1) - 0.300e-1 * R * R - 0.200e-1
* R * R * (0.1e1 + 0.2e-1 * R * R) - 0.25e-2 * R * R * pow(0.1e1
+ 0.2e-1 * R * R, 0.2e1) - 0.120e0 * R * R * (0.1e1 + 0.1e-1 * R * R))
* pow(0.1e1 + 0.2e-1 * R * R, -0.3e1) / (0.1e1 + 0.1e-1 * R * R));
}

else
{
return -(Double_t) (b * (-4 * b1 * b2 - 2 * b1 * b2 * b2 + 4 * w
* b2 * b1 + 2 * w * b2 * b2 * b1 - 4 * b * R * R * w * w - 4 * b *
R * R * b2 * w * w - 6 * b * R * R * b2 * w - b * R * R * b2 * b2 *
w * w - 2 * b * R * R * b2 * b2 * w - 4 * b * R * R * w - 2 * b *
R * R * b2 - b * R * R * b2 * b2 + 8 * b * R * R * w*(4 + b2) * b1)
/ pi * pow((Double_t) b2, (Double_t) (-3)) / b1) / 0.16e2;
}
}

Double_t EC2Lobo2(Double_t R,Double_t w,Double_t b)
{
Double_t pi=4*atan(1.0);
Double_t b1=1+b*R*R;
Double_t b2=1+2*b*R*R;

if(w==5.0 && b==0.01)
{
return 0.7500000000e-2 * (0.3e1 + 0.2e-1 * R * R) / pi * pow(0.1e1 + 0.2e-1 * R * R, -0.2e1);
}

if(w==3.0 && b==0.01)
{
return 0.5000000000e-2 * (0.3e1 + 0.2e-1 * R * R) / pi * pow(0.1e1 + 0.2e-1 * R * R, -0.2e1);
}

if(w==0.2 && b==0.05)
{
return 0.7500000000e-2 * (0.3e1 + 0.10e0 * R * R) / pi * pow(0.1e1 + 0.10e0 * R * R, -0.2e1);
}

if(w==0.1 && b==0.05)
{
return 0.6875000000e-2 * (0.3e1 + 0.10e0 * R * R) / pi * pow(0.1e1 + 0.10e0 * R * R, -0.2e1);
}

if(w==0.1 && b==0.0001)
{
return 0.1375000000e-4 * (0.3e1 + 0.2e-3 * R * R) / pi * pow(0.1e1 + 0.2e-3 * R * R, -0.2e1);
}

if(w==0.1 && b==0.000002)
{
return 0.2750000000e-6 * (0.3e1 + 0.4e-5 * R * R) / pi * pow(0.1e1 + 0.4e-5 * R * R, -0.2e1);
}

if(w==0.1 && b==0.000001)
{
return 0.1375000000e-6 * (0.3e1 + 0.2e-5 * R * R) / pi * pow(0.1e1 + 0.2e-5 * R * R, -0.2e1);
}

if(w==10 && b==0.000001)
{

```

```

    return 0.1375000000e-5 * (0.3e1 + 0.2e-5 * R * R) / pi * pow(0.1e1 + 0.2e-5 * R * R, -0.2e1);
}

if(w==1.5 && b==0.01)
{
return 0.3125000000e-2 * (0.3e1 + 0.2e-1 * R * R) / pi * pow(0.1e1 + 0.2e-1 * R * R, -0.2e1);
}

if(w==-1.5 && b==0.01)
{
return (-0.1990445860e-3 * (0.3e1 + 0.2e-1 * R * R) * pow(0.1e1 + 0.2e-1 * R * R, -0.2e1));
}

else
{
return (Double_t) (b * (2.0 + b2) * (w + 1.0)) / (8.*pi * b2*b2);
}
}

Double_t EC3Lobo2(Double_t R,Double_t w,Double_t b)
{
Double_t pi=4*atan(1.0);
Double_t b1=1.+ (b*R*R);
Double_t b2=1.+ (2.*b*R*R);

if(w==5.0 && b==0.01)
{
return -0.3125000000e-3 * (0.32e2 * (0.1e1 + 0.1e-1 * R * R) * (0.1e1 + 0.2e-1 *
R * R) + 0.16e2 * (0.1e1 + 0.1e-1 * R * R) * pow(0.1e1 + 0.2e-1 * R * R, 0.2e1) -
0.120e1 * R * R - 0.132e1 * R * R * (0.1e1 + 0.2e-1 * R * R) - 0.36e0 * R * R *
pow(0.1e1 + 0.2e-1 * R * R, 0.2e1) + 0.40e0 * R * R * (0.1e1 + 0.1e-1 * R * R))
/ pi * pow(0.1e1 + 0.2e-1 * R * R, -0.3e1) / (0.1e1 + 0.1e-1 * R * R);
}

if(w==3.0 && b==0.01)
{
return -0.3125000000e-3 * (0.16e2 * (0.1e1 + 0.1e-1 * R * R) * (0.1e1 +
0.2e-1 * R * R) + 0.8e1 * (0.1e1 + 0.1e-1 * R * R) * pow(0.1e1 + 0.2e-1 * R
* R, 0.2e1) - 0.48e0 * R * R - 0.56e0 * R * R * (0.1e1 + 0.2e-1 * R * R) -
0.16e0 * R * R * pow(0.1e1 + 0.2e-1 * R * R, 0.2e1) + 0.24e0 * R * R *
(0.1e1 + 0.1e-1 * R * R)) / pi * pow(0.1e1 + 0.2e-1 * R * R, -0.3e1)
/ (0.1e1 + 0.1e-1 * R * R);
}

if(w==0.2 && b==0.05)
{
return -0.1562500000e-2 * (-0.64e1 * (0.1e1 + 0.5e-1 * R * R)
* (0.1e1 + 0.10e0 * R * R) - 0.32e1 * (0.1e1 + 0.5e-1 * R * R) *
pow(0.1e1 + 0.10e0 * R * R, 0.2e1) - 0.480e-1 * R * R - 0.1680e0 *
R * R * (0.1e1 + 0.10e0 * R * R) - 0.720e-1 * R * R * pow(0.1e1 +
0.10e0 * R * R, 0.2e1) + 0.80e-1 * R * R * (0.1e1 + 0.5e-1 * R * R))
/ pi * pow(0.1e1 + 0.10e0 * R * R, -0.3e1) / (0.1e1 + 0.5e-1 * R * R);
}

if(w==0.1 && b==0.05)
{
return -0.1562500000e-2 * (-0.72e1 * (0.1e1 + 0.5e-1 * R * R) *
(0.1e1 + 0.10e0 * R * R) - 0.36e1 * (0.1e1 + 0.5e-1 * R * R) *
pow(0.1e1 + 0.10e0 * R * R, 0.2e1) - 0.220e-1 * R * R - 0.1320e0 *
R * R * (0.1e1 + 0.10e0 * R * R) - 0.605e-1 * R * R * pow(0.1e1 +
0.10e0 * R * R, 0.2e1) + 0.40e-1 * R * R * (0.1e1 + 0.5e-1 * R * R))
/ pi * pow(0.1e1 + 0.10e0 * R * R, -0.3e1) / (0.1e1 + 0.5e-1 * R * R);
}
}

```

```

}

if(w==0.1 && b==0.0001)
{
return -0.3125000000e-5 * (-0.72e1 * (0.1e1 + 0.1e-3 * R * R)
* (0.1e1 + 0.2e-3 * R * R) - 0.36e1 * (0.1e1 + 0.1e-3 * R * R) *
pow(0.1e1 + 0.2e-3 * R * R, 0.2e1) - 0.44e-4 * R * R - 0.264e-3 *
R * R * (0.1e1 + 0.2e-3 * R * R) - 0.121e-3 * R * R * pow(0.1e1 +
0.2e-3 * R * R, 0.2e1) + 0.8e-4 * R * R * (0.1e1 + 0.1e-3 * R * R))
/ pi * pow(0.1e1 + 0.2e-3 * R * R, -0.3e1) / (0.1e1 + 0.1e-3 * R * R);
}

if(w==0.1 && b==0.000002)
{
return -0.6250000000e-7 * (-0.72e1 * (0.1e1 + 0.2e-5 * R * R) *
(0.1e1 + 0.4e-5 * R * R) - 0.36e1 * (0.1e1 + 0.2e-5 * R * R) *
pow(0.1e1 + 0.4e-5 * R * R, 0.2e1) - 0.88e-6 * R * R - 0.528e-5 * R *
R * (0.1e1 + 0.4e-5 * R * R) - 0.242e-5 * R * R * pow(0.1e1 + 0.4e-5
* R * R, 0.2e1) + 0.16e-5 * R * R * (0.1e1 + 0.2e-5 * R * R)) / pi *
pow(0.1e1 + 0.4e-5 * R * R, -0.3e1) / (0.1e1 + 0.2e-5 * R * R);
}

if(w==0.1 && b==0.000001)
{
return -0.3125000000e-7 * (-0.72e1 * (0.1e1 + 0.1e-5 * R * R) *
(0.1e1 + 0.2e-5 * R * R) - 0.36e1 * (0.1e1 + 0.1e-5 * R * R) *
pow(0.1e1 + 0.2e-5 * R * R, 0.2e1) - 0.44e-6 * R * R - 0.264e-5
* R * R * (0.1e1 + 0.2e-5 * R * R) - 0.121e-5 * R * R * pow(0.1e1
+ 0.2e-5 * R * R, 0.2e1) + 0.8e-6 * R * R * (0.1e1 + 0.1e-5 * R * R))
/ pi * pow(0.1e1 + 0.2e-5 * R * R, -0.3e1) / (0.1e1 + 0.1e-5 * R * R);
}

if(w==10 && b==0.000001)
{
return -0.3125000000e-7 * (0.72e2 * (0.1e1 + 0.1e-5 * R * R)
* (0.1e1 + 0.2e-5 * R * R) + 0.36e2 * (0.1e1 + 0.1e-5 * R * R) *
pow(0.1e1 + 0.2e-5 * R * R, 0.2e1) - 0.440e-3 * R * R - 0.462e-3 *
R * R * (0.1e1 + 0.2e-5 * R * R) - 0.121e-3 * R * R * pow(0.1e1
+ 0.2e-5 * R * R, 0.2e1) + 0.80e-4 * R * R * (0.1e1 + 0.1e-5 * R *
R)) / pi * pow(0.1e1 + 0.2e-5 * R * R, -0.3e1) / (0.1e1 + 0.1e-5
* R * R);
}

if(w==1.5 && b==0.01)
{
return -0.3125000000e-3 * (0.40e1 * (0.1e1 + 0.1e-1 * R * R) *
(0.1e1 + 0.2e-1 * R * R) + 0.20e1 * (0.1e1 + 0.1e-1 * R * R) *
pow(0.1e1 + 0.2e-1 * R * R, 0.2e1) - 0.1500e0 * R * R - 0.2000e0 * R
* R * (0.1e1 + 0.2e-1 * R * R) - 0.625e-1 * R * R * pow(0.1e1 +
0.2e-1 * R * R, 0.2e1) + 0.120e0 * R * R * (0.1e1 + 0.1e-1 * R * R))
/ pi * pow(0.1e1 + 0.2e-1 * R * R, -0.3e1) / (0.1e1 + 0.1e-1 * R * R);
}

if(w==-1.5 && b==0.01)
{
return( -0.9952229300e-4 * (-0.200e2 * (0.1e1 + 0.1e-1 * R * R) *
(0.1e1 + 0.2e-1 * R * R) - 0.100e2 * (0.1e1 + 0.1e-1 * R * R) *
pow(0.1e1 + 0.2e-1 * R * R, 0.2e1) - 0.300e-1 * R * R - 0.200e-1 * R
* R * (0.1e1 + 0.2e-1 * R * R) - 0.25e-2 * R * R * pow(0.1e1 + 0.2e-1
* R * R, 0.2e1) - 0.120e0 * R * R * (0.1e1 + 0.1e-1 * R * R)) *
pow(0.1e1 + 0.2e-1 * R * R, -0.3e1) / (0.1e1 + 0.1e-1 * R * R));
}

else

```



```

    {
        return (-(Double_t) (b * (-8 * b1 * b2 - 4 * b1 * b2 * b2 + 8 * w * b2 * b1 +
4 * w * b2 * b2 * b1 - 4 * b * R * R * w * w - 4 * b * R * R * b2 * w * w -
6 * b * R * R * b2 * w - b * R * R * b2 * b2 * w * w - 2 * b * R * R * b2 *
b2 * w - 4 * b * R * R * w - 2 * b * R * R * b2 - b * R * R * b2 * b2 + 8 * b *
R * R * w*(4 + b2) * b1) / pi * pow((Double_t) b2, (Double_t) (-3)) / b1) / 0.32e2);
    }
}

```

B.3.10 gravastarblackholeLoboII.C (para rodar no ROOT)

```

//Double_t Potential (Double_t R,Double_t m,Double_t l,Double_t d)
//Double_t PotentialMzero(Double_t R, Double_t l, Double_t d)
//Double_t PotentialLINF (Double_t R, Double_t m, Double_t d)
{
    Int_t i=0,n=1000;

    Double_t R1[1000],R2[1000],R3[1000],R4[1000],R5[1000],R6[1000],R7[1000],R8[1000],R9[1000],R10[1000],R11[1000],
    R12[1000],
    V1[1000],V2[1000],V3[1000],V4[1000],V5[1000],V6[1000],V7[1000],O[1000],V8[1000],V9[1000],
    V10[1000],V11[1000],V12[1000],m,l,d,b,x,w,k,Ec1[1000],Ea1[1000],Eb1[1000];

    O[0]=0.0;
    R12[0]=R11[0]=R10[0]=R9[0]=R8[0]=R7[0]=R6[0]=R5[0]=R4[0]=R3[0]=R2[0]=R1[0]=0.5;
    for(i=1;i<n;i++)
    {
        R12[i]=R11[i]=R10[i]=R9[i]=R8[i]=R7[i]=R6[i]=R5[i]=R4[i]=R3[i]=R2[i]=R1[i]=0.5+(0.01)*i;
        O[i]=0.0;
    }

    //condicoes de energia
    /*
    for(i=0;i<n;i++)
    {
        // w=5.0;b=0.01;k=1.0;m=0.472267;
        // w=3.0;b=0.01;k=1.0;m=0.426756;
        // w=1.5;b=0.01;k=1.0;m=0.3775;
        // w=0.2;b=0.05;k=1.0;m=0.5000;
        // w=0.1;b=0.05;k=1.0;m=0.4923412;
        //w=0.1;b=0.0001;k=1.0;m=0.0546980;
        //w=0.1;b=0.000002;k=1.0;m=0.0115153;
        //w=0.1;b=0.000001;k=1.0;m=0.0087291;
        //w=10;b=0.000001;k=1.0;m=0.5;

        w=-1.5;b=0.01;

        Ec1[i]=EC1Lobo2(R1[i],w,b);
        Ea1[i]=EC2Lobo2(R1[i],w,b);
        Eb1[i]=EC3Lobo2(R1[i],w,b);

    }
    */

    // POTENCIAL

    for(i=0;i<n;i++)
    {

```

```

//          GAMMA=0.0
//x=0.0;w=5.0;b=0.01;k=1.0;m=0.472267;
//x=0.0;w=3.0;b=0.01;k=1.0;m=0.426756;
//x=0.0;w=1.5;b=0.01;k=1.0;m=0.3775;
//x=0.0;w=0.2;b=0.05;k=1.0;m=0.499554;
//x=0.0;w=0.1;b=0.05;k=1.0;m=0.4923412;
//x=0.0;w=0.1;b=0.0001;k=1.0;m=0.0546980;
//x=0.0;w=0.1;b=0.00002;k=1.0;m=0.0115153;
//x=0.0;w=0.1;b=0.000001;k=1.0;m=0.0087291;
//x=0.0;w=10;b=0.000001;k=1.0;m=0.018559;
//x=0.0;w=-1.5;b=0.01;k=1.0;m=0.51735;
//x=0.0;w=-1.5;b=0.01;k=1.0;m=0.150217075;

//          GAMMA=-1.0
//x=-1.0;w=10;b=0.000001;m=0.0025477672;
//x=-1.0;w=0.1;b=0.000001;m=0.000866559;
//x=-1.0;w=0.1;b=0.000002;m=0.0012876042;
//x=-1.0;w=0.1;b=0.0001;m=0.0120041542;
//x=-1.0;w=0.1;b=0.05;m=0.3271379593;
//x=-1.0;w=0.2;b=0.05;m=0.3357901746;
//x=-1.0;w=1.5;b=0.01;m=0.2097639045;
//x=-1.0;w=3.0;b=0.01;m=0.2552945103;
//x=-1.0;w=5.0;b=0.01;k=1.0;m=0.3033168157;
//w=-1.5;x=-1.0;b=0.1;m=0.037134207;
//x=-1.0;w=-1.5;b=0.01;k=1.0;m=0.163176025;
//x=-1.0;w=-1.5;b=0.01;k=1.0;m=0.50574;

//          GAMMA=7./4.
//w=5.0;x=7./4.;b=0.01;;m=0.68998;
//w=3.0;x=7./4.;b=0.01;m=0.72185;
//w=1.5;x=7./4.;b=0.01;m=0.75153;
//w=0.2;x=7./4.;b=0.05;m=0.66938;
//w=0.1;x=7./4.;b=0.05;m=0.67527;
//w=0.1;b=0.0001;m=0.84269;x=7./4.;
//w=0.1;x=7./4.;b=0.000002;m=0.843415;
//w=0.1;x=7./4.;b=0.000001;m=0.84374;
//w=10;x=7./4.;b=0.000001;m=0.84370;
w=-1.5;x=7./4.;b=0.01;m=0.83758;

//          GAMMA=3
//w=10;x=3;b=0.000001;m=0.51208;
//w=0.1;x=3;b=0.000001;m=0.51205;
//w=0.1;x=3;b=0.000002;m=0.51211;
//w=0.1;x=3;b=0.0001;m=0.51206;
//w=0.1;x=3;b=0.05;m=0.50247;
//w=0.2;x=3;b=0.05;m=0.50195;
//w=1.5;x=3;b=0.01;m=0.50833;
//w=3.0;x=3;b=0.01;m=0.50661;
//w=5.0;x=3;b=0.01;m=0.50436;
//w=-1.5;x=3;b=0.01;m=0.51211;

    V1[i]=PotentialLobo2geral(R1[i],x,w,b,m);
}

//m>mc

for(i=0;i<n;i++)
{
    //GAMMA=0.0
//x=0.0;w=5.0;b=0.01;k=1.0;m=0.5;

```

```

//x=0.0;w=3.0;b=0.01;k=1.0;m=0.45;
//x=0.0;w=1.5;b=0.01;k=1.0;m=0.4;
//x=0.0;w=0.2;b=0.05;k=1.0;m=0.52;
//x=0.0;w=0.1;b=0.05;k=1.0;m=0.52;
//x=0.0;w=0.1;b=0.0001;k=1.0;m=0.06;
//x=0.0;w=0.1;b=0.000002;k=1.0;m=0.015;
//x=0.0;w=0.1;b=0.000001;k=1.0;m=0.009;
//x=0.0;w=10;b=0.000001;k=1.0;m=0.020;
//w=-1.5;x=-1.0;b=0.1;m=0.04;
//x=0.0;w=-1.5;b=0.01;k=1.0;m=0.6;
//x=0.0;w=-1.5;b=0.01;k=1.0;m=0.2;

//          GAMMA=-1.0
//x=-1.0;w=10;b=0.000001;m=0.004;
//x=-1.0;w=0.1;b=0.000001;m=0.0009;
//x=-1.0;w=0.1;b=0.000002;m=0.002;
//x=-1.0;w=0.1;b=0.0001;m=0.020;
//x=-1.0;w=0.1;b=0.05;m=0.4;
//x=-1.0;w=0.2;b=0.05;m=0.4;
//x=-1.0;w=1.5;b=0.01;m=0.30;
//x=-1.0;w=3.0;b=0.01;m=0.30;
//x=-1.0;w=5.0;b=0.01;k=1.0;m=0.40;
//x=-1.0;w=-1.5;b=0.01;k=1.0;m=0.2;
//x=-1.0;w=-1.5;b=0.01;k=1.0;m=0.55;

//          GAMMA=7./4.
//w=5.0;x=7./4.;b=0.01;;m=0.75;
//w=3.0;x=7./4.;b=0.01;m=0.8;
//w=1.5;x=7./4.;b=0.01;m=0.8;
//w=0.2;x=7./4.;b=0.05;m=0.7;
//w=0.1;x=7./4.;b=0.05;m=0.7;
//w=0.1;b=0.0001;m=0.9;x=7./4.;
//w=0.1;x=7./4.;b=0.000002;m=0.9;
//w=0.1;x=7./4.;b=0.000001;m=0.9;
//w=10;x=7./4.;b=0.000001;m=0.9;
w=-1.5;x=7./4.;b=0.01;m=0.9;

//          GAMMA=3
//w=10;x=3;b=0.000001;m=0.6;
//w=0.1;x=3;b=0.000001;m=0.6;
//w=0.1;x=3;b=0.000002;m=0.6;
//w=0.1;x=3;b=0.0001;m=0.6;
//w=0.1;x=3;b=0.05;m=0.6;
//w=0.2;x=3;b=0.05;m=0.6;
//w=1.5;x=3;b=0.01;m=0.6;
//w=3.0;x=3;b=0.01;m=0.6;
//w=5.0;x=3;b=0.01;m=0.6;
//w=-1.5;x=3;b=0.01;m=0.6;

V2[i]=PotentialLobo2geral(R2[i],x,w,b,m);
}

//m<mc

for(i=0;i<n;i++)
{
//          GAMMA=0.0
//x=0.0;w=5.0;b=0.01;k=1.0;m=0.3;
//x=0.0;w=3.0;b=0.01;k=1.0;m=0.3;
//x=0.0;w=1.5;b=0.01;k=1.0;m=0.3;

```

```

//x=0.0;w=0.2;b=0.05;k=1.0;m=0.48;
//x=0.0;w=0.1;b=0.05;k=1.0;m=0.40;
//x=0.0;w=0.1;b=0.0001;k=1.0;m=0.045;
//x=0.0;w=0.1;b=0.000002;k=1.0;m=0.009;
//x=0.0;w=0.1;b=0.000001;k=1.0;m=0.008;
//x=0.0;w=10;b=0.000001;k=1.0;m=0.017;
//x=0.0;w=-1.5;b=0.01;k=1.0;m=0.4;
//x=0.0;w=-1.5;b=0.01;k=1.0;m=0.05;

//          GAMMA=-1.0
//x=-1.0;w=10;b=0.000001;m=0.001;
//x=-1.0;w=0.1;b=0.000001;m=0.0007;
//x=-1.0;w=0.1;b=0.000002;m=0.001;
//x=-1.0;w=0.1;b=0.0001;m=0.009;
//x=-1.0;w=0.1;b=0.05;m=0.3;
//x=-1.0;w=0.2;b=0.05;m=0.3;
//x=-1.0;w=1.5;b=0.01;m=0.15;
//x=-1.0;w=3.0;b=0.01;m=0.20;
//x=-1.0;w=5.0;b=0.01;k=1.0;m=0.20;
//w=-1.5;x=-1.0;b=0.1;m=0.001;
//x=-1.0;w=-1.5;b=0.01;k=1.0;m=0.1;
//x=-1.0;w=-1.5;b=0.01;k=1.0;m=0.45;

//          GAMMA=7./4.
//w=5.0;x=7./4.;b=0.01;m=0.60;
//w=3.0;x=7./4.;b=0.01;m=0.65;
//w=1.5;x=7./4.;b=0.01;m=0.70;
//w=0.2;x=7./4.;b=0.05;m=0.60;
//w=0.1;x=7./4.;b=0.05;m=0.60;
//w=0.1;b=0.0001;m=0.80;x=7./4.;
//w=0.1;x=7./4.;b=0.000002;m=0.80;
//w=0.1;x=7./4.;b=0.000001;m=0.80;
//w=10;x=7./4.;b=0.000001;m=0.80;
w=-1.5;x=7./4.;b=0.01;m=0.7;

//          GAMMA=3
//w=10;x=3;b=0.000001;m=0.45;
//w=0.1;x=3;b=0.000001;m=0.45;
//w=0.1;x=3;b=0.000002;m=0.45;
//w=0.1;x=3;b=0.0001;m=0.45;
//w=0.1;x=3;b=0.05;m=0.45;
//w=0.2;x=3;b=0.05;m=0.45;
//w=1.5;x=3;b=0.01;m=0.45;
//w=3.0;x=3;b=0.01;m=0.45;
//w=5.0;x=3;b=0.01;m=0.45;
//w=-1.5;x=3;b=0.01;m=0.45;

V3[i]=PotentialLobo2geral(R3[i],x,w,b,m);

}

if(x==0.0)
{

TCanvas * c1 = new TCanvas("c1","",10,40,800,600);
c1->SetFillColor(0);
c1->SetBorderSize(2);
c1->SetFrameBorderMode(0);

```

```

TGraph * gr1 = new TGraph (n,R1,V1);
//gr1->SetTitle("#gamma=0.0, w=5.0, b=0.01, m_{c}=0.472267");
//gr1->SetTitle("#gamma=0.0, w=3.0, b=0.01, m_{c}=0.426756");
//gr1->SetTitle("#gamma=0.0, w=1.5, b=0.01, m_{c}=0.3775");
//gr1->SetTitle("#gamma=0.0, w=0.2, b=0.05, m_{c}=0.499554");
//gr1->SetTitle("#gamma=0.0, w=0.1, b=0.05, m_{c}=0.4923412");
//gr1->SetTitle("#gamma=0.0, w=0.1, b=0.0001, m_{c}=0.0546980");
//gr1->SetTitle("#gamma=0.0, w=0.1, b=0.000002, m_{c}=0.0115153");
//gr1->SetTitle("#gamma=0.0, w=0.1, b=0.000001, m_{c}=0.0087291");
//gr1->SetTitle("#gamma=0.0, w=10, b=0.000001, m_{c}=0.018559");
//gr1->SetTitle("#gamma=0.0, w=-1.5, b=0.01, m_{c}=0.51735");
gr1->SetTitle("#gamma=0.0, w=-1.5, b=0.01, m_{c}=0.150217075");
gr1->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr1->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr1->GetXaxis()->CenterTitle();
gr1->GetYaxis()->CenterTitle();
gr1->SetMarkerStyle(1);
gr1->SetMarkerColor(1);
gr1->SetLineColor(1);
gr1->SetLineStyle(1);
gr1->Draw("AL");
gPad->SetFillColor(0);

TGraph * grzero = new TGraph (n,R1,0);
grzero->SetTitle("");
grzero->GetXaxis()->SetTitle("R");
grzero->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
grzero->GetXaxis()->CenterTitle();
grzero->GetYaxis()->CenterTitle();
grzero->SetMarkerStyle(1);
grzero->SetMarkerColor(1);
grzero->SetLineColor(1);
grzero->SetLineStyle(1);
grzero->Draw("p");
//gPad->SetFillColor(0);

TGraph * gr2 = new TGraph (n,R2,V2);
gr2->SetTitle("");
gr2->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr2->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr2->GetXaxis()->CenterTitle();
gr2->GetYaxis()->CenterTitle();
gr2->SetMarkerSize(1);
gr2->SetMarkerStyle(1);
gr2->SetMarkerColor(1);
gr2->SetLineColor(1);
gr2->SetLineStyle(2);
gr2->Draw("L");
//gPad->SetFillColor(0);

TGraph * gr3 = new TGraph (n,R3,V3);
gr3->SetTitle("");
gr3->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr3->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr3->GetXaxis()->CenterTitle();
gr3->GetYaxis()->CenterTitle();
gr3->SetMarkerSize(1);
gr3->SetMarkerStyle(1);
gr3->SetMarkerColor(1);
gr3->SetLineColor(1);
gr3->SetLineStyle(9);
gr3->Draw("L");
//gPad->SetFillColor(0);

```

```

TLegend *legend = new TLegend(0.6083333,0.1530612,0.8583333,0.4047619,NULL,"brNDC");
legend->SetFillColor(0);

//w=5.0 , b=0.01
/*
legend->AddEntry(gr3,"m_{1}=0.30","L");
legend->AddEntry(gr1,"m_{2}=m_{c}","L");
legend->AddEntry(gr2,"m_{3}=0.50","L");
*/

/*
legend->AddEntry(gr3,"m_{1}=0.30","L");
legend->AddEntry(gr1,"m_{2}=m_{c}","L");
legend->AddEntry(gr2,"m_{3}=0.45","L");
*/

/*
legend->AddEntry(gr3,"m_{1}=0.30","L");
legend->AddEntry(gr1,"m_{2}=m_{c}","L");
legend->AddEntry(gr2,"m_{3}=0.40","L");
*/

/*
legend->AddEntry(gr3,"m_{1}=0.48","L");
legend->AddEntry(gr1,"m_{2}=m_{c}","L");
legend->AddEntry(gr2,"m_{3}=0.52","L");
*/

//w=0.1 , b=0.05 , m=0.4923412
/*
legend->AddEntry(gr3,"m_{1}=0.40","L");
legend->AddEntry(gr1,"m_{2}=m_{c}","L");
legend->AddEntry(gr2,"m_{3}=0.52","L");
*/
//w=0.1 , b=0.0001 , m_{c}=0.0546980

/*
legend->AddEntry(gr3,"m_{1}=0.045","L");
legend->AddEntry(gr1,"m_{2}=m_{c}","L");
legend->AddEntry(gr2,"m_{3}=0.060","L");
*/

//w=0.1 , b=0.000002 , m_{c}=0.0115153

/*
legend->AddEntry(gr3,"m_{1}=0.009","L");
legend->AddEntry(gr1,"m_{2}=m_{c}","L");
legend->AddEntry(gr2,"m_{3}=0.015","L");
*/

//w=0.1, b=0.000001, m_{c}=0.0087291

/*
legend->AddEntry(gr3,"m_{1}=0.008","L");
legend->AddEntry(gr1,"m_{2}=m_{c}","L");
legend->AddEntry(gr2,"m_{3}=0.009","L");
*/

//w=10;b=0.000001;k=1.0;m=0.017;
/*
legend->AddEntry(gr3,"m_{1}=0.017","L");
legend->AddEntry(gr1,"m_{2}=m_{c}","L");

```

```

legend->AddEntry(gr2, "m_{3}=0.020", "L");
*/

/*
legend->AddEntry(gr3, "m_{1}=0.048", "L");
legend->AddEntry(gr1, "m_{2}=m_{c}", "L");
legend->AddEntry(gr2, "m_{3}=0.052", "L");
*/
/*
legend->AddEntry(gr3, "m_{1}=0.04", "L");
legend->AddEntry(gr1, "m_{2}=m_{c}", "L");
legend->AddEntry(gr2, "m_{3}=0.06", "L");
*/

legend->AddEntry(gr3, "m_{1}=0.10", "L");
legend->AddEntry(gr1, "m_{2}=m_{c}", "L");
legend->AddEntry(gr2, "m_{3}=0.20", "L");

legend->Draw();

}

else if(x== -1.0)
{

TCanvas * c1 = new TCanvas("c1", "", 10, 40, 800, 600);
c1->SetFillColor(0);
c1->SetBorderSize(2);
c1->SetFrameBorderMode(0);
TGraph * gr1 = new TGraph(n, R1, V1);
//gr1->SetTitle("#gamma=-1.0, w=5.0, b=0.01, m_{c}=0.3033168157");
//gr1->SetTitle("#gamma=-1.0, w=3.0, b=0.01, m_{c}=0.2552945103");
//gr1->SetTitle("#gamma=-1.0, w=1.5, b=0.01, m_{c}=0.2097639045");
//gr1->SetTitle("#gamma=-1.0, w=0.2, b=0.05, m_{c}=0.3357901746");
//gr1->SetTitle("#gamma=-1.0, w=0.1, b=0.05, m_{c}=0.3271379593");
//gr1->SetTitle("#gamma=-1.0, w=0.1, b=0.0001, m_{c}=0.0120041542");
//gr1->SetTitle("#gamma=-1.0, w=0.1, b=0.000002, m_{c}=0.0012876042");
//gr1->SetTitle("#gamma=-1.0, w=0.1, b=0.000001, m_{c}=0.000866559");
//gr1->SetTitle("#gamma=-1.0, w=10, b=0.000001, m_{c}=0.0025477672");
//gr1->SetTitle("#gamma=-1.0, w=-1.5, b=0.1, m_{c}=0.037134207");
//gr1->SetTitle("#gamma=-1.0, w=-1.5, b=0.01, m_{c}=0.163176025");
gr1->SetTitle("#gamma=-1.0, w=-1.5, b=0.01, m_{c}=0.50574");

gr1->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr1->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr1->GetXaxis()->CenterTitle();
gr1->GetYaxis()->CenterTitle();
gr1->SetMarkerStyle(1);
gr1->SetMarkerColor(1);
gr1->SetLineColor(1);
gr1->SetLineStyle(1);
gr1->Draw("AL");
gPad->SetFillColor(0);

TGraph * grzero = new TGraph(n, R1, 0);
grzero->SetTitle("");
grzero->GetXaxis()->SetTitle("R");
grzero->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
grzero->GetXaxis()->CenterTitle();
grzero->GetYaxis()->CenterTitle();
grzero->SetMarkerStyle(1);
grzero->SetMarkerColor(1);
grzero->SetLineColor(1);
grzero->SetLineStyle(1);

```

```

grzero->Draw("p");
//gPad->SetFillColor(0);

TGraph * gr2 = new TGraph (n,R2,V2);
gr2->SetTitle("");
gr2->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr2->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr2->GetXaxis()->CenterTitle();
gr2->GetYaxis()->CenterTitle();
gr2->SetMarkerSize(1);
gr2->SetMarkerStyle(1);
gr2->SetMarkerColor(1);
gr2->SetLineColor(1);
gr2->SetLineStyle(2);
gr2->Draw("L");
//gPad->SetFillColor(0);

TGraph * gr3 = new TGraph (n,R3,V3);
gr3->SetTitle("");
gr3->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr3->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr3->GetXaxis()->CenterTitle();
gr3->GetYaxis()->CenterTitle();
gr3->SetMarkerSize(1);
gr3->SetMarkerStyle(1);
gr3->SetMarkerColor(1);
gr3->SetLineColor(1);
gr3->SetLineStyle(9);
gr3->Draw("L");
//gPad->SetFillColor(0);

TLegend *legend = new TLegend(0.6083333,0.1530612,0.8583333,0.4047619,NULL,"brNDC");
legend->SetFillColor(0);

legend->AddEntry(gr3,"m_{1}=0.45","L");
legend->AddEntry(gr1,"m_{2}=m_{c}","L");
legend->AddEntry(gr2,"m_{3}=0.55","L");

/*
legend->AddEntry(gr3,"m_{1}=0.10","L");
legend->AddEntry(gr1,"m_{2}=m_{c}","L");
legend->AddEntry(gr2,"m_{3}=0.20","L");
*/
/*
legend->AddEntry(gr3,"m_{1}=0.001","L");
legend->AddEntry(gr1,"m_{2}=m_{c}","L");
legend->AddEntry(gr2,"m_{3}=0.04","L");
*/

//w=5.0 , b=0.01
//legend->AddEntry(gr3,"m_{1}=0.20","L");
//legend->AddEntry(gr1,"m_{2}=m_{c}","L");
//legend->AddEntry(gr2,"m_{3}=0.40","L");

/*
legend->AddEntry(gr3,"m_{1}=0.20","L");
legend->AddEntry(gr1,"m_{2}=m_{c}","L");
legend->AddEntry(gr2,"m_{3}=0.30","L");
*/

```



```

/*
legend->AddEntry(gr3,"m_{1}=0.15","L");
legend->AddEntry(gr1,"m_{2}=m_{c}","L");
legend->AddEntry(gr2,"m_{3}=0.30","L");
*/

//w=0.2 , b=0.05
/*
legend->AddEntry(gr3,"m_{1}=0.30","L");
legend->AddEntry(gr1,"m_{2}=m_{c}","L");
legend->AddEntry(gr2,"m_{3}=0.40","L");
*/

//w=0.1 , b=0.05
/*
legend->AddEntry(gr3,"m_{1}=0.30","L");
legend->AddEntry(gr1,"m_{2}=m_{c}","L");
legend->AddEntry(gr2,"m_{3}=0.40","L");
*/
//w=0.1 , b=0.0001
/*
legend->AddEntry(gr3,"m_{1}=0.009","L");
legend->AddEntry(gr1,"m_{2}=m_{c}","L");
legend->AddEntry(gr2,"m_{3}=0.020","L");
*/

//w=0.1 , b=0.000002
/*
legend->AddEntry(gr3,"m_{1}=0.001","L");
legend->AddEntry(gr1,"m_{2}=m_{c}","L");
legend->AddEntry(gr2,"m_{3}=0.002","L");
*/

//w=0.1, b=0.000001;
/*
legend->AddEntry(gr3,"m_{1}=0.0007","L");
legend->AddEntry(gr1,"m_{2}=m_{c}","L");
legend->AddEntry(gr2,"m_{3}=0.0009","L");
*/

//w=10;b=0.000001

//legend->AddEntry(gr3,"m_{1}=0.001","L");
//legend->AddEntry(gr1,"m_{2}=m_{c}","L");
//legend->AddEntry(gr2,"m_{3}=0.004","L");
legend->Draw();

}

else if(x==7./4.)
{

TCanvas * c1 = new TCanvas("c1","",10,40,800,600);
c1->SetFillColor(0);
c1->SetBorderSize(2);
c1->SetFrameBorderMode(0);
TGraph * gr1 = new TGraph (n,R1,V1);
//gr1->SetTitle("#gamma=7/4, w=5.0, b=0.01, m_{c}=0.68998");
//gr1->SetTitle("#gamma=7/4, w=3.0, b=0.01, m_{c}=0.72185");
//gr1->SetTitle("#gamma=7/4, w=1.5, b=0.01, m_{c}=0.75153");
//gr1->SetTitle("#gamma=7/4, w=0.2 , b=0.05 , m_{c}=0.66938");
//gr1->SetTitle("#gamma=7/4, w=0.1 , b=0.05 , m_{c}=0.67527");
//gr1->SetTitle("#gamma=7/4, w=0.1 , b=0.0001 , m_{c}=0.84269");

```

```

//gr1->SetTitle("#gamma=7/4, w=0.1, b=0.000002, m_{c}=0.843415");
//gr1->SetTitle("#gamma=7/4, w=0.1, b=0.000001, m_{c}=0.84374");
//gr1->SetTitle("#gamma=7/4, w=10, b=0.000001, m_{c}=0.84370");
gr1->SetTitle("#gamma=7/4, w=-1.5, b=0.01, m_{c}=0.83758");
gr1->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr1->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr1->GetXaxis()->CenterTitle();
gr1->GetYaxis()->CenterTitle();
gr1->SetMarkerStyle(1);
gr1->SetMarkerColor(1);
gr1->SetLineColor(1);
gr1->SetLineStyle(1);
gr1->Draw("AL");
gPad->SetFillColor(0);

TGraph * grzero = new TGraph (n,R1,O);
grzero->SetTitle("");
grzero->GetXaxis()->SetTitle("R");
grzero->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
grzero->GetXaxis()->CenterTitle();
grzero->GetYaxis()->CenterTitle();
grzero->SetMarkerStyle(1);
grzero->SetMarkerColor(1);
grzero->SetLineColor(1);
grzero->SetLineStyle(1);
grzero->Draw("p");
//gPad->SetFillColor(0);

TGraph * gr2 = new TGraph (n,R2,V2);
gr2->SetTitle("");
gr2->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr2->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr2->GetXaxis()->CenterTitle();
gr2->GetYaxis()->CenterTitle();
gr2->SetMarkerSize(1);
gr2->SetMarkerStyle(1);
gr2->SetMarkerColor(1);
gr2->SetLineColor(1);
gr2->SetLineStyle(2);
gr2->Draw("L");
//gPad->SetFillColor(0);

TGraph * gr3 = new TGraph (n,R3,V3);
gr3->SetTitle("");
gr3->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr3->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr3->GetXaxis()->CenterTitle();
gr3->GetYaxis()->CenterTitle();
gr3->SetMarkerSize(1);
gr3->SetMarkerStyle(1);
gr3->SetMarkerColor(1);
gr3->SetLineColor(1);
gr3->SetLineStyle(9);
gr3->Draw("L");
//gPad->SetFillColor(0);

TLegend *legend = new TLegend(0.6083333,0.1530612,0.8583333,0.4047619,NULL,"brNDC");
legend->SetFillColor(0);

//w=5.0, b=0.01
/*
legend->AddEntry(gr3,"m_{1}=0.60","L");

```

```

legend->AddEntry(gr1,"m_{2}=m_{c}", "L");
legend->AddEntry(gr2,"m_{3}=0.75", "L");
*/

/*
legend->AddEntry(gr3,"m_{1}=0.65", "L");
legend->AddEntry(gr1,"m_{2}=m_{c}", "L");
legend->AddEntry(gr2,"m_{3}=0.80", "L");
*/

/*
legend->AddEntry(gr3,"m_{1}=0.70", "L");
legend->AddEntry(gr1,"m_{2}=m_{c}", "L");
legend->AddEntry(gr2,"m_{3}=0.80", "L");
*/

/*
legend->AddEntry(gr3,"m_{1}=0.48", "L");
legend->AddEntry(gr1,"m_{2}=m_{c}", "L");
legend->AddEntry(gr2,"m_{3}=0.52", "L");
*/

//w=0.1 , b=0.05 , m=0.4923412
/*
legend->AddEntry(gr3,"m_{1}=0.60", "L");
legend->AddEntry(gr1,"m_{2}=m_{c}", "L");
legend->AddEntry(gr2,"m_{3}=0.70", "L");
*/
//w=0.1 , b=0.0001 , m_{c}=0.0546980

/*
legend->AddEntry(gr3,"m_{1}=0.60", "L");
legend->AddEntry(gr1,"m_{2}=m_{c}", "L");
legend->AddEntry(gr2,"m_{3}=0.70", "L");
*/

//w=0.1 , b=0.000002 , m_{c}=0.0115153

//legend->AddEntry(gr3,"m_{1}=0.80", "L");
//legend->AddEntry(gr1,"m_{2}=m_{c}", "L");
//legend->AddEntry(gr2,"m_{3}=0.90", "L");

legend->AddEntry(gr3,"m_{1}=0.70", "L");
legend->AddEntry(gr1,"m_{2}=m_{c}", "L");
legend->AddEntry(gr2,"m_{3}=0.90", "L");

//w=0.1, b=0.000001, m_{c}=0.0087291

/*
legend->AddEntry(gr3,"m_{1}=0.008", "L");
legend->AddEntry(gr1,"m_{2}=m_{c}", "L");
legend->AddEntry(gr2,"m_{3}=0.009", "L");
*/

//w=10;b=0.000001;k=1.0;m=0.017;
/*
legend->AddEntry(gr3,"m_{1}=0.017", "L");
legend->AddEntry(gr1,"m_{2}=m_{c}", "L");
legend->AddEntry(gr2,"m_{3}=0.020", "L");
*/

/*
legend->AddEntry(gr3,"m_{1}=0.048", "L");

```

```

legend->AddEntry(gr1,"m_{2}=m_{c}", "L");
legend->AddEntry(gr2,"m_{3}=0.052", "L");
*/

legend->Draw();

}

else if(x==3.0)
{

TCanvas * c1 = new TCanvas("c1","",10,40,800,600);
c1->SetFillColor(0);
c1->SetBorderSize(2);
c1->SetFrameBorderMode(0);
TGraph * gr1 = new TGraph (n,R1,V1);

//gr1->SetTitle("#gamma=3, w=5.0, b=0.01, m_{c}=0.50436");
//gr1->SetTitle("#gamma=3, w=3.0, b=0.01, m_{c}=0.50661");
//gr1->SetTitle("#gamma=3, w=1.5, b=0.01, m_{c}=0.50833");
//gr1->SetTitle("#gamma=3, w=0.2, b=0.05, m_{c}=0.50195");
//gr1->SetTitle("#gamma=3, w=0.1, b=0.05, m_{c}=0.50247");
//gr1->SetTitle("#gamma=3, w=0.1, b=0.0001, m_{c}=0.51206");
//gr1->SetTitle("#gamma=3, w=0.1, b=0.000002, m_{c}=0.51211");
//gr1->SetTitle("#gamma=3, w=0.1, b=0.000001, m_{c}=0.51205");
//gr1->SetTitle("#gamma=3, w=10, b=0.000001, m_{c}=0.51208");
gr1->SetTitle("#gamma=3, w=-1.5, b=0.01, m_{c}=0.51211");
gr1->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr1->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr1->GetXaxis()->CenterTitle();
gr1->GetYaxis()->CenterTitle();
gr1->SetMarkerStyle(1);
gr1->SetMarkerColor(1);
gr1->SetLineColor(1);
gr1->SetLineStyle(1);
gr1->Draw("AL");
gPad->SetFillColor(0);

TGraph * grzero = new TGraph (n,R1,0);
grzero->SetTitle("");
grzero->GetXaxis()->SetTitle("R");
grzero->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
grzero->GetXaxis()->CenterTitle();
grzero->GetYaxis()->CenterTitle();
grzero->SetMarkerStyle(1);
grzero->SetMarkerColor(1);
grzero->SetLineColor(1);
grzero->SetLineStyle(1);
grzero->Draw("p");
//gPad->SetFillColor(0);

TGraph * gr2 = new TGraph (n,R2,V2);
gr2->SetTitle("");
gr2->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr2->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr2->GetXaxis()->CenterTitle();
gr2->GetYaxis()->CenterTitle();
gr2->SetMarkerSize(1);
gr2->SetMarkerStyle(1);
gr2->SetMarkerColor(1);
gr2->SetLineColor(1);
gr2->SetLineStyle(2);
gr2->Draw("L");

```

```

//gPad->SetFillColor(0);

TGraph * gr3 = new TGraph (n,R3,V3);
gr3->SetTitle("");
gr3->GetXaxis()->SetTitle("R");
gr3->GetYaxis()->SetTitle("V(R)");
gr3->GetXaxis()->CenterTitle();
gr3->GetYaxis()->CenterTitle();
gr3->SetMarkerSize(1);
gr3->SetMarkerStyle(1);
gr3->SetMarkerColor(1);
gr3->SetLineColor(1);
gr3->SetLineStyle(9);
gr3->Draw("L");
//gPad->SetFillColor(0);

TLegend *legend = new TLegend(0.6083333,0.1530612,0.8583333,0.4047619, NULL, "brNDC");
legend->SetFillColor(0);

//w=5.0 , b=0.01
/*
legend->AddEntry(gr3, "m_{1}=0.30", "L");
legend->AddEntry(gr1, "m_{2}=m_{c}", "L");
legend->AddEntry(gr2, "m_{3}=0.50", "L");
*/

/*
legend->AddEntry(gr3, "m_{1}=0.30", "L");
legend->AddEntry(gr1, "m_{2}=m_{c}", "L");
legend->AddEntry(gr2, "m_{3}=0.45", "L");
*/

/*
legend->AddEntry(gr3, "m_{1}=0.30", "L");
legend->AddEntry(gr1, "m_{2}=m_{c}", "L");
legend->AddEntry(gr2, "m_{3}=0.40", "L");
*/

/*
legend->AddEntry(gr3, "m_{1}=0.48", "L");
legend->AddEntry(gr1, "m_{2}=m_{c}", "L");
legend->AddEntry(gr2, "m_{3}=0.52", "L");
*/

//w=0.1 , b=0.05 , m=0.4923412
/*
legend->AddEntry(gr3, "m_{1}=0.40", "L");
legend->AddEntry(gr1, "m_{2}=m_{c}", "L");
legend->AddEntry(gr2, "m_{3}=0.52", "L");
*/
//w=0.1 , b=0.0001 , m_{c}=0.0546980

/*
legend->AddEntry(gr3, "m_{1}=0.045", "L");
legend->AddEntry(gr1, "m_{2}=m_{c}", "L");
legend->AddEntry(gr2, "m_{3}=0.060", "L");
*/

//w=0.1 , b=0.000002 , m_{c}=0.0115153

/*
legend->AddEntry(gr3, "m_{1}=0.009", "L");

```

```

legend->AddEntry(gr1,"m_{2}=m_{c}", "L");
legend->AddEntry(gr2,"m_{3}=0.015", "L");
*/

//w=0.1, b=0.000001, m_{c}=0.0087291

/*
legend->AddEntry(gr3,"m_{1}=0.008", "L");
legend->AddEntry(gr1,"m_{2}=m_{c}", "L");
legend->AddEntry(gr2,"m_{3}=0.009", "L");
*/

//w=10;b=0.000001;k=1.0;m=0.017;
/*
legend->AddEntry(gr3,"m_{1}=0.017", "L");
legend->AddEntry(gr1,"m_{2}=m_{c}", "L");
legend->AddEntry(gr2,"m_{3}=0.020", "L");
*/

legend->AddEntry(gr3,"m_{1}=0.45", "L");
legend->AddEntry(gr1,"m_{2}=m_{c}", "L");
legend->AddEntry(gr2,"m_{3}=0.60", "L");

legend->Draw();

}

//PARA GERAR GRAFICOS DAS CONDIES DE ENERGIA

/*
TCanvas * cec = new TCanvas("cec","",10,40,800,600);
cec->SetFillColor(0);
cec->SetBorderSize(2);
cec->SetFrameBorderMode(0);
TGraph * grec = new TGraph(n,R1,Ecl);
grec->SetFillColor(1);
//grec->SetTitle("w=5.0, b=0.01");
//grec->SetTitle("w=3.0, b=0.01");
//grec->SetTitle("w=1.5, b=0.01");
//grec->SetTitle("w=0.2, b=0.05");
//grec->SetTitle("w=0.1, b=0.05");
//grec->SetTitle("w=0.1, b=0.0001");
//grec->SetTitle("w=0.1, b=0.000002");
//grec->SetTitle("w=0.1, b=0.000001");
//grec->SetTitle("w=10, b=0.000001");
grec->SetTitle("w=-1.5, b=0.01");
grec->GetXaxis()->SetTitle("R");
grec->GetYaxis()->SetTitle("Energy Conditions");
grec->GetXaxis()->CenterTitle();
grec->GetYaxis()->CenterTitle();
grec->SetMarkerStyle(1);
grec->SetMarkerColor(1);
grec->SetLineColor(1);
grec->SetLineStyle(1);
grec->Draw("AL");
gPad->SetFillColor(0);

TGraph * grzero = new TGraph(n,R1,0);
grzero->SetTitle("");
grzero->GetXaxis()->SetTitle("R");

```

```

grzero->GetYaxis()->SetTitle("Energy Conditions");
grzero->GetXaxis()->CenterTitle();
grzero->GetYaxis()->CenterTitle();
grzero->SetMarkerStyle(1);
grzero->SetMarkerColor(1);
grzero->SetLineColor(1);
grzero->SetLineStyle(1);
grzero->Draw("p");
gPad->SetFillColor(0);

```

```

TGraph * greal = new TGraph (n,R1,Ea1);
greal->SetTitle("");
greal->GetXaxis()->SetTitle("R");
greal->GetYaxis()->SetTitle("Energy Conditions");
greal->GetXaxis()->CenterTitle();
greal->GetYaxis()->CenterTitle();
greal->SetMarkerSize(1);
greal->SetMarkerStyle(1);
greal->SetMarkerColor(1);
greal->SetLineColor(1);
greal->SetLineStyle(2);
greal->Draw("L");
gPad->SetFillColor(0);

```

```

TGraph * greb1 = new TGraph (n,R1,Eb1);
greb1->SetTitle("");
greb1->GetXaxis()->SetTitle("R");
greb1->GetYaxis()->SetTitle("Energy Conditions");
greb1->GetXaxis()->CenterTitle();
greb1->GetYaxis()->CenterTitle();
greb1->SetMarkerSize(1);
greb1->SetMarkerStyle(1);
greb1->SetMarkerColor(1);
greb1->SetLineColor(1);
greb1->SetLineStyle(9);
greb1->Draw("L");
gPad->SetFillColor(0);

```

```

TLegend *legend = new TLegend(0.6083333,0.1530612,0.8583333,0.4047619,NULL,"brNDC");
legend->SetTextFont(62);
legend->SetLineColor(1);
legend->SetLineStyle(1);
legend->SetLineWidth(1);
legend->SetFillColor(0);
legend->SetFillStyle(1001);
//legend->SetFillColor(0);
legend->AddEntry(grec,"EC1","L");
legend->AddEntry(greal,"EC2","L");
//legend->AddEntry(greb1,"EC3","L");
legend->AddEntry(greb1,"EC3 #approx EC1","L");
legend->Draw();

```

```

*/

```

```

}

```

Bibliografia

- [1] M.A. Abramowicz, W. Kluźniak, & J.-P. Lasota, *Astron. & Astrophys.*, **396**, L31-34 (2002).
- [2] Kip S. Thorne, *Black Holes and Time Warps: Einstein's Outrageous Legacy* (W.W. Norton & Company, 1995).
- [3] K. Schwarzschild, "Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie," Sitzber. Deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math.-Phys. Tech., 424-434 (1916)
- [4] J.M. Bardeen, B. Carter e S.W. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **31**, 161 (1973).
- [5] K. S. Thorne, R. H. Price e D. A. Macdonald (editors) *Black holes: The membrane paradigm* (Yale University Press, New Haven and London).
- [6] Jeremy Bernstein (1975) *Scientific American Brasil - Edição especial sobre Buracos Negros* **18**, 6-13.
- [7] J. R. Oppenheimer e H. Snyder, "On Continued Gravitational Contraction," *Phys. Rev.* **56**, 455 (1939).
- [8] R. C. Tolman, "Static solutions of Einstein's field equations for spheres of fluid," *Phys. Rev.* **55**, 364 (1939).
- [9] J. R. Oppenheimer e G. Volkoff, "On massive neutron cores," *Phys. Rev.* **55**, 374 (1939).

- [10] C. W. Misner, K. S. Thorne e J. A. Wheeler, 1995, *Gravitation* (W. H. Freeman and company, San Francisco);
Ya. B. Zel'dovich e I. D. Novikov, 1974, *Relativistic astrophysics, Vol.I: Stars and relativity* (University of Chicago Press, Chicago).
- [11] S. Chandrasekhar, "The density of white dwarf stars," *Phil. Mag.* **11**, 592 (1931);
S. Chandrasekhar, "The maximum mass of ideal white dwarfs," *Astrophys. J.* **74**, 81 (1931).
- [12] W. Baade e F. Zwicky, "Cosmic rays from supernovae," *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.* **20**, 259 (1934);
W. Baade e F. Zwicky, "On supernovae," *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.* **20**, 254 (1934);
W. Baade e F. Zwicky, "Supernovae and cosmic rays," *Phys. Rev.* **45**, 138 (1934).
- [13] M. Wyman, "Schwarzschild interior solution in an isotropic coordinate system," *Phys. Rev.* **70**, 74 (1946).
- [14] M. Wyman, "Radially symmetric distributions of matter," *Phys. Rev.* **75**, 1930 (1949).
- [15] H. A. Buchdahl, "General relativistic fluid spheres," *Phys. Rev.* **116**, 1027 (1959);
H. A. Buchdahl, "General relativistic fluid spheres II: general inequalities for regular spheres," *Astrophys. J.* **146**, 275 (1966).
- [16] H. Bondi, "Massive spheres in general relativity," *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **282**, 303 (1964).

- [17] C. Leibovitz, "Spherically symmetric static solutions of Einstein's equations," *Phys. Rev.* **185**, 1664 (1969).
- [18] A. Hewish, S. J. Bell, J. D. H. Pilkington, P. F. Scott e R. A. Collins, "Rotating neutron stars as the origin of the pulsating radio sources," *Nature* **218**, 731 (1968).
- [19] T. Gold, "Observation of a rapidly pulsating radio source," *Nature* **217**, 709 (1968).
- [20] R. C. Adams e J. M. Cohen, "Analytic neutron-star models," *Phys. Rev. D* **8**, 1651 (1973);
J. R. Wilson, "Rapidly rotating neutron stars," *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1082 (1973).
- [21] S. S. Bayin, "Solutions of Einstein's field equations for static fluid spheres," *Phys. Rev. D* **18**, 2745 (1978).
- [22] S. S. Bayin, "Radiating fluid spheres in general relativity," *Phys. Rev. D* **19**, 2838 (1979).
- [23] S. S. Bayin, "Anisotropic fluid spheres in general relativity," *Phys. Rev. D* **26**, 1262 (1982).
- [24] Kepler de Souza Oliveira Filho e Maria de Fátima Oliveira Saraiva, *Astronomia e Astrofísica*(Editora Livraria da Física, São Paulo, 2004).
- [25] S.W Hawking, *Nature*, 248, 30 (1974)
- [26] S.W. Hawking, *Physical Review Letters*, 26, 1344 (1971)
- [27] J.D. Bekenstein, *Lettere al Nuovo Cimento*, **4**, 737, (1972)
- [28] J.D. Bekenstein, *Physical Review D*, **7**, 2333, (1973)

- [29] J.D. Bekenstein, *Physical Review D*, **9**, 3292 (1974)
- [30] J.D. Bekenstein, *Physical Review D*, **12**, 3077 (1975)
- [31] S.W. Hawking, *Commun. Math. Phys.*, **43**, 199 (1975).
- [32] S.W. Hawking, *Physical Review D*, **13**, 191 (1976)
- [33] T. Jacobson, *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 1260 (1995).
- [34] T. Padmanabhan, *Class. Quantum Grav.* **19**, 5387 (2002).
- [35] D. Kothawala, S. Sarkar e T. Padmanabhan, gr-qc/0701002.
- [36] A. Paranjape, S. Sarkar e T. Padmanabhan, *Phys. Rev. D* **74**, 104015 (2006).
- [37] C. Eling, R. Guedens e T. Jacobson, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 121301 (2006).
- [38] G. Gibbons e S.W. Hawking, *Phys. Rev. D* **15**, 2738; 2732 (1977).
- [39] R.G. Cai e S.P. Kim, *J. High Energy Phys.* **02**, 050 (2005).
- [40] X.-H. Ge, *Phys. Lett. B* **651**, 49 (2007).
- [41] Y.-G. Gong e A. Wang, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 211301 (2007).
- [42] *Notes for a brief history of quantum gravity* [arXiv:gr-qc/0006061].
- [43] R. M. Wald, *Living Rev. Rel.* **4**, 6 (2001) [arXiv:gr-qc/9912119].
- [44] P.O. Mazur e E. Mottola, "Gravitational Condensate Stars: An Alternative to Black Holes," arXiv:gr-qc/0109035; *Proc. Nat. Acad. Sci.* **101**, 9545 (2004) [arXiv:gr-qc/0407075].
- [45] P. O. Mazur e E. Mottola, "Dark energy and condensate stars: Casimir energy in the large," [arXiv:gr-qc/0405111];

- [46] P. O. Mazur e E. Mottola, "Gravitational Vacuum Condensate Stars," Proc. Nat. Acad. Sci. 111, 9545 (2004) [arXiv:gr-qc/0407075].
- [47] G. Chapline, E. Hohlfeld, R.B. Laughlin, e D.I. Santiago, Int. J. Mod. Phys. **A18**, 3587 (2003) [arXiv:gr-qc/0012094].
- [48] T. Vachaspati, "*Black Stars and Gamma Ray Bursts*," arXiv:0706.1203.
- [49] M. Petri. Charged holostars. 2003, gr-qc/0306068.
- [50] M. Petri. Compact anisotropic stars with membrane - a new class of exact solutions to the einstein field equations. 2003, gr-qc/0306063.
- [51] M. Petri. The holographic solution - Why general relativity must be understood in terms of strings. 2004, gr-qc/0405007.
- [52] M. Petri. Holostar thermodynamics. 2003, gr-qc/0306067.
- [53] M. Petri. Are we living in a string dominated universe? 2004, gr-qc/0405011.
- [54] M. Petri. On the origin of the matter-antimatter asymmetry in self-gravitating systems at ultra-high temperatures. 2004, gr-qc/0405010.
- [55] D. Horvat e S. Ilijic, arXiv:0707.1636;
- [56] P. Marecki, arXiv:gr-qc/0612178;
- [57] F.S.N. Lobo, Phys. Rev. D**75**, 024023 (2007); arXiv:gr-qc/0612030; Class. Quantum Grav. **23**, 1525 (2006);
- [58] F.S.N. Lobo, Aaron V. B. Arellano, *ibid.*, **24**, 1069 (2007);
- [59] T. Faber, arXiv:gr-qc/0607029;
- [60] C. Cattoen, arXiv:gr-qc/0606011;

- [61] O.B. Zaslavskii, Phys. Lett. **B634**, 111 (2006);
- [62] C. Cattoen, T. Faber, e M. Visser, Class. Quantum Grav. **22**, 4189 (2005).
- [63] E.J. Copeland, M. Sami e S. Tsujikawa, Int. J. Mod. Phys. D**15**, 1753 (2006); T. Padmanabhan, arXiv:0705.2533.
- [64] A.E. Broderick e R. Narayan, Class. Quantum Grav. **24**, 659 (2007) [arXiv:gr-qc/0701154].
- [65] I. Dymnikova, "Vacuum nonsingular black hole," Gen. Rel. Grav. **24**, 235 (1992);
- [66] I. Dymnikova, "The algebraic structure of a cosmological term in spherically symmetric solutions," Phys. Lett. **B472**, 33-38 (2000) [arXiv:gr-qc/9912116];
- [67] I. Dymnikova, "Cosmological term as a source of mass," Class. Quant. Grav. **19** 725-740 (2002) [arXiv:gr-qc/0112052];
- [68] I. Dymnikova, "Spherically symmetric space-time with the regular de Sitter center," Int. J. Mod. Phys. D **12**, 1015-1034 (2003) [arXiv:gr-qc/0304110];
- [69] I. Dymnikova e E. Galaktionov, "Stability of a vacuum nonsingular black hole," Class. Quant. Grav. **22** 2331-2358 (2005) [arXiv:gr-qc/0409049].
- [70] M. Visser e D.L. Wiltshire, Class. Quantum Grav. **21**, 1135 (2004)[arXiv:gr-qc/0310107].
- [71] B.M.N. Carter, Class. Quantum Grav. **22**, 4551 (2005) [arXiv:gr-qc/0509087].
- [72] A. DeBenedictis, *et al*, Class. Quantum Grav. **23**, 2303 (2006) [arXiv:gr-qc/0511097].

- [73] C.B.M.H. Chirenti e L. Rezzolla, arXiv:0706.1513.
- [74] Dymnikova I e Galaktionov E ,”*Vacuum Dark Fluid*”,*Physics Letters B* **645**,358 (2007).
- [75] R. Chan, M.F.A. da Silva, J.F. Villas da Rocha, ”Star Models with Dark Energy”(2008) [arXiv:gr-qc/08033064]
- [76] Bertolami, O., Páramos, J., Phys. Rev. D **72**, 123512 (2005) [arXiv:astro-ph/0509547]
- [77] Lobo, F. (2007) [arXiv:gr-qc/0611083].
- [78] Cattoen, C., Faber, T. e Visser, M. Class. Quantum Grav. **22** 4189 (2005).
- [79] Lobo, F., Class. Quant. Grav. **23**, 1525 (2006).
- [80] A. Grant *et al*, “The Farthest known supernova: Support for an accelerating Universe and a glimpse of the epoch of deceleration,” *Astrophys. J.* **560** 49-71 (2001) [arXiv:astro-ph/0104455];
- [81] S. Perlmutter, M. S. Turner e M. White, “Constraining dark energy with SNe Ia and large-scale structure,” *Phys. Rev. Lett.* **83** 670-673 (1999) [arXiv:astro-ph/9901052].
- [82] C. L. Bennett *et al*, “First year *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe* (WMAP) observations: Preliminary maps and basic results,” *Astrophys. J. Suppl.* **148** 1 (2003) [arXiv:astro-ph/0302207];
- [83] G. Hinshaw *et al*, “First year *Wilkinson Microwave Anisotropy Probe* (WMAP) observations: The angular power spectrum,” *Astrophys. J. Suppl.* **148** 135 (2003) [arXiv:astro-ph/0302217].

- [84] I. Brevik, S. Nojiri, S. D. Odintsov e L. Vanzo, “Entropy and universality of Cardy-Verlinde formula in dark energy universe,” Phys. Rev. D **70** 043520 (2004) [arXiv:hep-th/0401073];
- [85] S. Nojiri e S. D. Odintsov, “The final state and thermodynamics of dark energy universe,” Phys. Rev. D **70** 103522 (2004) [arXiv:hep-th/0408170].
- [86] R. R. Caldwell, M. Kamionkowski e N. N. Weinberg, “Phantom Energy and Cosmic Doomsday,” Phys. Rev. Lett. **91** 071301 (2003) [arXiv:astro-ph/0302506].
- [87] S. Sushkov, “Wormholes supported by a phantom energy,” Phys. Rev. D **71**, 043520 (2005) [arXiv:gr-qc/0502084].
- [88] F. S. N. Lobo, “Phantom energy traversable wormholes,” Phys. Rev. D **71**, 084011 (2005) [arXiv:gr-qc/0502099].
- [89] E. Babichev, V. Dokuchaev e Yu. Eroshenko , “Black hole mass decreasing due to phantom energy accretion,” Phys. Rev. Lett. **93** 021102 (2004) [arXiv:gr-qc/0402089].
- [90] B. Feng, X. Wang e X. Zhang, “Dark Energy Constraints from the Cosmic Age and Supernova,” Phys. Lett. **B607** 35-41 (2005) [arXiv:astro-ph/0404224];
- [91] Z. Guo, Y. Piao, X. Zhang e Y. Zhang, “Cosmological evolution of a quintom model of dark energy,” Phys. Lett. **B608** 177-182 (2005) [arXiv:astro-ph/0410654];
- [92] X.F. Zhang, H. Li, Y. Piao Z. e X. Zhang, “Two-field models of dark energy with equation of state across -1 ,” [arXiv:astro-ph/0501652];

- [93] L. Perivolaropoulos, “Constraints on linear-negative potentials in quintessence and phantom models from recent supernova data,” *Phys.Rev. D* **71** 063503 (2005), [arXiv:astro-ph/0412308];
- [94] H. Wei e R. G. Cai, “Hessence: A New View of Quintom Dark Energy,” *Class. Quant. Grav.* **22** 3189-3202 (2005) [arXiv:hep-th/0501160];
- [95] M. Li, B. Feng e X. Zhang, “A Single Scalar Field Model of Dark Energy with Equation of State Crossing -1 ,” [arXiv:hep-ph/0503268];
- [96] H. Stefancic, “Dark energy transition between quintessence and phantom regimes - an equation of state analysis,” *Phys. Rev. D* **71** 124036 (2005) [arXiv:astro-ph/0504518];
- [97] A. Anisimov, E. Babichev e A. Vikman, “B-Inflation,” *JCAP* 0506 006 (2005) [arXiv:astro-ph/0504560];
- [98] B. Wang, Y. Gong e E. Abdalla, “Transition of the dark energy equation of state in an interacting holographic dark energy model,” [arXiv:hep-th/0506069];
- [99] S. Nojiri e S. D. Odintsov, “Unifying phantom inflation with late-time acceleration: scalar phantom-non-phantom transition model and generalized holographic dark energy,” [arXiv:hep-th/0506212];
- [100] I.Ya. Arefeva, A.S. Koshelev, S.Yu. Vernov, “Crossing of the $w = -1$ Barrier by D3-brane Dark Energy Model,” [arXiv:astro-ph/0507067];
- [101] Gong-Bo Zhao, Jun-Qing Xia, Mingzhe Li, Bo Feng e Xinmin Zhang, “Perturbations of the Quintom Models of Dark Energy and the Effects on Observations,” [arXiv:astro-ph/0507482].
- [102] S. Tsujikawa, “Reconstruction of general scalar-field dark energy models,” [arXiv:astro-ph/0508542].

- [103] A. Vikman, "Can dark energy evolve to the Phantom?," *Phys. Rev. D* **71** 023515 (2005) [arXiv:astro-ph/0407107].
- [104] G. Chapline, "Dark energy stars," [arXiv:astro-ph/0503200].
- [105] F. S. N. Lobo e P. Crawford, "Stability analysis of dynamic thin shells," *Class. Quant. Grav.* **22**, 4869 (2005), [arXiv:gr-qc/0507063].
- [106] F. S. N. Lobo, "Stability of phantom wormholes," *Phys. Rev. D* **71**, 124022 (2005) [arXiv:gr-qc/0506001].
- [107] S. Nojiri e S. D. Odintsov, "Inhomogeneous Equation of State of the Universe: Phantom Era, Future Singularity and Crossing the Phantom Barrier," *Phys. Rev. D* **72**, 023003 (2005) [arXiv:gr-qc/0306109].
- [108] P. Rocha, A.Y. Miguelote, R. Chan, M.F. da Silva, N.O. Santos, e A. Wang, "Bounded excursion stable gravastars and black holes," *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **6**, 25 (2008) [arXiv:gr-qc/08034200].
- [109] P. Rocha, R. Chan, M.F. da Silva e A. Wang, "Stable and "Bounded Excursion" Gravastars, and Black Holes in Einstein's Theory of Gravity," *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **11**, 10 (2008) [arXiv:gr-qc/08094879].
- [110] R. Chan, M.F. da Silva, P. Rocha, e A. Wang, "Stable gravastars of anisotropic dark energy," *J. Cosmol. Astropart. Phys.* **3**, 10 (2009) [arXiv:gr-qc/0812.4924].
- [111] A. Papapetrou , *Lectures on General Relativity* (D. Reidel Publishing Company, Boston, 1974);
- [112] Chapline, G. (1992) in *Foundations of Quantum Mechanics*, eds. Black, T. D., Nieto, M. M., Pilloff, H. S., Scully, M. O. & Sinclair, R. M., pp. 255-260 (World Scientific, Singapore).

- [113] Dymnikova, I. (2003) *Int. Jour. Mod. Phys.*, **D12**, 1015-1034.
- [114] Israel, W. (1966) *Nuovo Cimento* **B44**, 1-14; **B48**, 463.
- [115] T. Harko, Z. Kovács e F. Lobo "Can accretion disk properties distinguish gravastars from black holes?,"(2009) [arXiv:gr-qc/0905.1355]
- [116] Bjorken, J. D. (2003) *Phys. Rev.* **D67**, 043508.
- [117] M. Visser, "Lorentzian Wormholes: From Einstein To Hawking", AIP Press (now Springer-Verlag), 1995.
- [118] A. G. Riess *et al.* [Supernova Search Team Collaboration], *Astron. J.* **116**, 1009 (1998) [arXiv:astro-ph/9805201]; *ibid.*, **607**, 665 (2004) [arXiv:astro-ph/0402512]; "New Hubble Space Telescope Discoveries of Type Ia Supernovae at $z > 1$: Narrowing Constraints on the Early Behavior of Dark Energy,"arXiv:astro-ph/0611572 (2006); W. M. Wood-Vasey *et al.*, "Observational Constraints on the Nature of the Dark Energy: First Cosmological Results from the ESSENCE Supernova Survey,"arXiv:astro-ph/0701041 (2007); G. Miknaitis *et al.*, "The ESSENCE Supernova Survey: Survey Optimization, Observations, and Supernova Photometry,"arXiv:astro-ph/0701043 (2007); M. Kowalski, *et al.*, "Improved Cosmological Constraints from New, Old and Combined Supernova Datasets,"arXiv:0804.4142.
- [119] S. Perlmutter *et al.* [Supernova Cosmology Project Collaboration], *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999) [arXiv:astro-ph/9812133].
- [120] P. Astier *et al.*, *Astron. & Astrophys.* **447**, 31 (2006) [arXiv:astro-ph/0510447].
- [121] C. L. Bennett *et al.*, *Astrophys. J. Suppl.* **148**, 1 (2003) [arXiv:astro-ph/0302207]; *ibid.*, **608**, 10 (2004) [arXiv:astro-ph/0305097]; D. N. Sper-

- gel *et al.* [WMAP Collaboration], *ibid.*, **148**, 175 (2003) [arXiv:astro-ph/0302209]; “Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Three Year Results: Implications for Cosmology,” arXiv:astro-ph/0603449 (2006); E. Komatsu, *et al.*, “Five-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Cosmological Interpretation,” arXiv:0803.0547.
- [122] D. Martin e M. Visser, “Bounds on the interior geometry and pressure profile of static fluid spheres,” *Class. Quant. Grav.* **20** 3699 (2003) [arXiv:gr-qc/0306038].
- [123] D. Martin e M. Visser, “Algorithmic construction of static perfect fluid spheres,” *Phys. Rev. D* **69**, 104028 (2004) [arXiv:gr-qc/0306109].
- [124] M. Morris e K.S. Thorne, “Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel: A tool for teaching General Relativity,” *Am. J. Phys.* **56**, 395 (1988).
- [125] J. J. Matese e P. G. Whitman, “New methods for extracting equilibrium configurations in general relativity,” *Phys. Rev. D* **22** 1270-1275 (1980).
- [126] M. R. Finch e J. E. F. Skea, “A realistic stellar model based on the ansatz of Duorah and Ray,” *Class. Quant. Grav.* **6** 467-476 (1989).
- [127] M. K. Mak e T. Harko, “Anisotropic Stars in General Relativity,” *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **459**, 393-408 (2003) [arXiv:gr-qc/0110103];
M. K. Mak e T. Harko, “Anisotropic relativistic stellar models,” *Annalen Phys.* **11**, 3-13 (2003) [arXiv:gr-qc/0302104].
- [128] J. P. S. Lemos, F. S. N. Lobo e S. Q. de Oliveira, “Morris-Thorne wormholes with a cosmological constant,” *Phys. Rev. D* **68**, 064004 (2003) [arXiv:gr-qc/0302049].

- J. P. S. Lemos e F. S. N. Lobo, "Plane symmetric traversable wormholes in an anti-de Sitter background," *Phys. Rev. D* **69** (2004) 104007 [arXiv:gr-qc/0402099];
- F. S. N. Lobo, "Surface stresses on a thin shell surrounding a traversable wormhole," *Class. Quant. Grav.* **21** 4811 (2004) [arXiv:gr-qc/0409018];
- F. S. N. Lobo, "Energy conditions, traversable wormholes and dust shells," *Gen. Rel. Grav.* **37**, 2023-2038 (2005) [arXiv:gr-qc/0410087].
- [129] J. Guven e N. O' Murchadha, "Bounds on $2m/R$ for static spherical objects," *Phys. Rev. D* **60** 084020 (1999) [arXiv:gr-qc/9903067];
- [130] E. Poisson e M. Visser, "Thin-shell wormholes: Linearization stability," *Phys. Rev. D* **52** 7318 (1995) [arXiv:gr-qc/9506083];
- M. Ishak e K. Lake, "Stability of transparent spherically symmetric thin shells and wormholes," *Phys. Rev. D* **65** 044011 (2002);
- E. F. Eiroa e G. E. Romero, "Linearized stability of charged thin-shell wormholes," *Gen. Rel. Grav.* **36**, 651 (2004), [arXiv:gr-qc/0303093];
- F. S. N. Lobo e P. Crawford, "Linearized stability analysis of thin-shell wormholes with a cosmological constant," *Class. Quant. Grav.* **21**, 391 (2004) [arXiv:gr-qc/0311002].
- [131] K. Lake, *Phys. Rev. D* **19**, 2487 (1979).
- [132] Chan, R., da Silva, M.F.A., Villas da Rocha, J.F., in press *MPLA* (2008) [arXiv:gr-qc/0803.2508].
- [133] S.W. Hawking e G.F.R. Ellis, *The large scale structure of space-time* (Cambridge University Press, Cambridge, 1973).
- [134] A. Wang e Y. Wu, "Generalized Vaidya Solutions," *Gen. Relativ. Grav.* **31**, 107 (1999) [arXiv:gr-qc/9803038].

- [135] D.J. Eisenstein *et al.*, *Astrophys. J.* **633**, 560 (2005); M. Tegmark *et al.* [SDSS Collaboration], *Phys. Rev. D* **69**, 103501 (2004) [arXiv:astro-ph/0310723]; K. Abazajian *et al.*, arXiv:astro-ph/0410239; K. Abazajian *et al.* [SDSS Collaboration], *Astron. J.* **128**, 502 (2004) [arXiv:astro-ph/0403325]; K. Abazajian *et al.* [SDSS Collaboration], *ibid.*, **126**, 2081 (2003) [arXiv:astro-ph/0305492]; E. Hawkins *et al.*, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **346**, 78 (2003) [arXiv:astro-ph/0212375]; L. Verde *et al.*, *ibid.*, **335**, 432 (2002) [arXiv:astro-ph/0112161].
- [136] A. Albrecht, *et al.*, “*Report of the dark energy task force*,” arXiv:astro-ph/0609591.
- [137] Y.B. Zel’dovich, *JETP Lett.* **6**, 316 (1967); *Sov. Phys. Usp.* **11**, 381 (1968); N. Straumann, “*The history of the cosmological constant problem*,” arXiv:gr-qc/0208027 (2002).
- [138] S. Weinberg, *Rev. Mod. Phys.* **61**, 1 (1989); S. M. Carroll, “*The cosmological constant*,” *Living Rev. Rel.* **4**, 1 (2001) [arXiv:astro-ph/0004075]; T. Padmanabhan, *Phys. Rept.* **380**, 235 (2003) [arXiv:hep-th/0212290]; S. Nobbenhuis, “*Categorizing different approaches to the cosmological constant problem*,” arXiv:gr-qc/0411093 (2004); J. Polchinski, “*The Cosmological Constant and the String Landscape*,” arXiv:hep-th/0603249 (2006); P.J. Steinhardt e N. Turok, *Science* **312**, 1180 (2006) [arXiv:astro-ph/0605173]; R. Bousso, “*Precision cosmology and the landscape*,” arXiv:hep-th/0610211 (2006); A. Linde, “*Sinks in the Landscape, Boltzmann Brains, and the Cosmological Constant Problem*,” arXiv:hep-th/0611043 (2006); I. Antoniadis, P.O. Mazur, e E. Mottola, “*Cosmological Dark Energy: Prospects for a Dynamical Theory*,” arXiv:gr-qc/0612068 (2006).

- [139] W. Fischler, *et al.*, JHEP, **07**, 003 (2001); J.M. Cline, *ibid.*, **08**, 035 (2001); E. Halyo, *ibid.*, **10**, 025 (2001); S. Hellerman, *ibid.*, **06**, 003 (2003).
- [140] L.M.Krauss e G.D. Starkman, Astrophys. J. **531**, 22 (2000); A.A. Starobinsky, Grav. Cosmol. **6**, 157 (2000); E.H. Gudmundsson e G. Bjornsson, Astrophys. J. **565**, 1 (2002); A. Loeb, Phys. Rev. D**65**, 047301 (2002); T. Chiueh e X.-G. He, *ibid.*, **65**, 123518 (2002); M.T. Busha, et al, Astrophys. J. **596**, 713 (2003); K. Nagamine e A. Loeb, New Astron. **8**, 439 (2003); **9**, 573 (2004); J.S. Heyl, Phys. Rev. D**72**, 107302 (2005); Phys. Rev. D**75**, 083524 (2007); L.M. Krauss e R.J. Scherrer, Gen. Rel. Grav. **39**, 1545 (2007) [arXiv:0704.0221];
- [141] C. Wetterich, Nucl. Phys. B **302**, 668 (1988); P. J. E. Peebles e B. Ratra, Astrophys. J. **325**, L17 (1988); B. Ratra e P. J. E. Peebles, Phys. Rev. D **37**, 3406 (1988); J. A. Frieman, C. T. Hill, A. Stebbins e I. Waga, Phys. Rev. Lett. **75**, 2077 (1995) [arXiv:astro-ph/9505060]; M. S. Turner e M. J. White, Phys. Rev. D **56**, 4439 (1997) [arXiv:astro-ph/9701138]; R. R. Caldwell, R. Dave e P. J. Steinhardt, Phys. Rev. Lett. **80**, 1582 (1998) [arXiv:astro-ph/9708069]; A. R. Liddle e R. J. Scherrer, Phys. Rev. D **59**, 023509 (1999) [arXiv:astro-ph/9809272]; P. J. Steinhardt, L. M. Wang e I. Zlatev, *ibid.*, **59**, 123504 (1999) [arXiv:astro-ph/9812313].
- [142] G. R. Dvali, G. Gabadadze e M. Porrati, Phys. Lett. B**484**, 112 (2000); C. Deffayet, *ibid.*, **502**, 199 (2001).
- [143] S. Capozziello, S. Carloni, e A. Troisi, arXiv:astro-ph/0303041; S.M. Carroll, et al, Phys. Rev. D**70**, 043528 (2003); S. Nojiri e S.D. Odintsov, *ibid.*, **68**, 123512 (2003); W. Hu e I. Sawicki, “*Models of $f(R)$ Cosmic Acceleration that Evade Solar-System Tests*,”arXiv:0705.1158; A.A. Starobinsky, “*Disappearing cosmological constant in $f(R)$ gravity*,”arXiv:0706.2041; Y.-S. Song, H. Peiris, e W. Hu, “*Cosmological Constraints on $f(R)$ Acceleration*

- Models*,”arXiv:0706.2399; L. Pogosian e A. Silvestri, “*The pattern of growth in viable $f(R)$ cosmologies*,”arXiv:0709.0296; T.P. Sotiriou e V. Faraoni, arXiv:0805.1726;
- [144] M.A. Luty, M. Porrati, e R. Rattazzi, JHEP, **0309**, 029 (2003); A. Nicolis, e R. Rattazzi, *ibid.*, **0406**, 059 (2004); K. Koyama, Phys. Rev. D**72**, 123511 (2005); K. Koyama e S. Sibiryakov, *ibid.*, **73**, 044016 (2006); C. Charmousis, R. Gregory, N. Kaloper, e A. Padilla, JHEP, **0610**, 066 (2006); R. Gregory, N. Kaloper, R.C. Myers, e A. Padilla, “*A New perspective on DGP Gravity*,”arXiv:0707.2666; K. Koyama, “*Ghosts in the self-accelerating universe*,”arXiv:0709.2399.
- [145] C. Deffayet, G. Gabadadze, e A. Iglesias, JCAP, **0608**, 012 (2006); D. Dvali, New J. Phys. **8**, 326 (2006).
- [146] W. Fang, *et al.*, “*Challenges to the DGP Model from Horizon-Scale Growth and Geometry*,”arXiv:0808.2208.
- [147] T. Padmanabhan, “*Dark Energy and Gravity*,”arXiv:0705.2533.
- [148] B. Whitt, Phys. Lett. B**145**, 176 (1984); K. Maeda, Phys. Rev. D**39**, 3159 (1989); G. Magnano e L.M. Sokolowski, *ibid.*, **50**, 5039 (1994); T. Chiba, Phys. Lett. B**575**, 1 (2003).
- [149] A. De Felice e M. Hindmarsh, “*Unsuccessful cosmology with Modified Gravity Models*,”arXiv:0705.3375.
- [150] Y.-G. Gong e A. Wang, “*Observational constraints on the acceleration of the Universe*,”Phys. Rev. D**73**, 083506 (2006) [arXiv:astro-ph/0601453].
- [151] Y.-G. Gong e A. Wang, “*Reconstruction of the deceleration parameter and the equation of state of dark energy*,”Phys. Rev. D**75**, 043520 (2007) [arXiv:astro-ph/0612196].

- [152] Q. Wu, Y. Gong, A. Wang, e J. Alcaniz, “*Current Constraints on Interacting Holographic Dark Energy*,”*Phys. Lett.* **B659**, 34-39 (2008) [arXiv:0705.1006].
- [153] Y.-G. Gong, Q. Wu, e A. Wang, “*Dark energy and cosmic curvature: Monte-Carlo Markov Chain approach*,”*Astrophys. J.* **681**, 27 (2008) [arXiv:0708.1817].
- [154] Q. Wu, N.O. Santos, P. Vo, e A. Wang, “*Late transient acceleration of the universe in string theory on S^1/Z_2* ,”*JCAP*, **09**, 004 (27 pages) (2008) [arXiv:0804.0620].
- [155] A. Lewis e S. Bridle, *Phys. Rev. D* **66**, 103511 (2002).
- [156] V. Springel, *Mon. Not. R. Astron. Soc. (London)*, **364**, 110 (2005).
- [157] G.-Y. Gong, A. Wang, e Q. Wu, “*Cosmological constant and late transient acceleration of the universe in the Horava-Witten Heterotic M-Theory on S^1/Z_2* ,”*Phys. Lett. B* **663**, 147 (2008) [arXiv:0711.1597].
- [158] A. Wang e Q. Wu, “*Brany Cosmology in the framework of Horava-Witten heterotic M-Theory on S^1/Z_2* ,”in preparation.
- [159] H. Horava e E. Witten, *Nucl. Phys. B* **460**, 506 (1996); **475**, 94 (1996).
- [160] J.E. Lidsey, D. Wands, e E.J. Copeland, *Phys. Rept.* **337**, 343 (2000); M. Gasperini, *Elements of String Cosmology* (Cambridge University Press, Cambridge, 2007).
- [161] A. Wang e N.O. Santos, “*The cosmological constant in the brane world of string theory on S^1/Z_2* ,”*Phys. Lett. B* in press (2008) [arXiv:0712.3938].
- [162] A. Wang e N.O. Santos, “*The hierarchy problem, the 4D Newtonian potential and its Yukawa corrections in string theory on S^1/Z_2* ,”arXiv:0808.2055.

- [163] V.A. Rubakov, Phys. Usp. **44**, 871 (2001); S. Förste, Fortsch. Phys. **50**, 221 (2002); C.P. Burgess, *et al*, JHEP, **0201**, 014 (2002); E. Papantonopoulos, Lect. Notes Phys. **592**, 458 (2002); R. Maartens, Living Reviews of Relativity **7** (2004); P. Brax, C. van de Bruck e A. C. Davis, Rept. Prog. Phys. **67**, 2183 (2004) [arXiv:hep-th/0404011]; U. Günther e A. Zhuk, “*Phenomenology of Brane-World Cosmological Models*,”arXiv:gr-qc/0410130 (2004); P. Brax, C. van de Bruck, e A.C. Davis, “*Brane World Cosmology*,”Rept. Prog. Phys. **67**, 2183 (2004) [arXiv:hep-th/0404011]; V. Sahni, “*Cosmological Surprises from Braneworld models of Dark Energy*,”arXiv:astro-ph/0502032 (2005); R. Durrer, “*Braneworlds*,”arXiv:hep-th/0507006 (2005); D. Langlois, “*Is our Universe Brany*,”arXiv:hep-th/0509231 (2005); A. Lue, Phys. Rept. **423**, 1 (2006) [arXiv:astro-ph/0510068]; D. Wands, “*Brane-world cosmology*,”arXiv:gr-qc/0601078 (2006); R. Maartens, “*Dark Energy from Brane-world Gravity*,”arXiv:astro-ph/0602415 (2006).
- [164] M. Doran, G. Robbers, e C. Wetterich, Phys. Rev. D**75**, 023003 (2007).
- [165] E.V. Linder, Astropart. Phys. **26**, 16 (2006); M. Doran e G. Robbers, JCAP, **6**, 26 (2006); M. Bartelmann, M. Doran, e C. Wetterich, Astron. & Astrophys. **454**, 27 (2006); C. Fedeli e M. Bartelmann, *ibid.*, **461**, 49 (2007); e M.J. Francis, G.F. Lewis, e E.V. Linder, arXiv:0808.2840.
- [166] Hans Stephani *General Relativity - An introduction to the theory of the gravitational field*, (Cambridge University Press, Cambridge, 1994)..
- [167] G. Darmois, “Mémorial des sciences mathématiques XXV,” Fascicule XXV ch V (Gauthier-Villars, Paris, France, 1927).
- [168] K. Lake (1988) Em: *Fifth Brazilian School of Cosmology and Gravitation* Ed: M. Novello. 1-82.

- [169] V.A. Berezin, V.A. Kuzmin e I.I. Tkachev (1987) Phys. Rev. D **36**: 2919.
- [170] C. Barrabès e W. Israel. (1991) Phys. Rev. D **43**: 1129.
- [171] N. Sen, “Über die grenzbedingungen des schwerefeldes an unsteigkeitsflächen,” Ann. Phys. (Leipzig) **73**, 365 (1924).
- [172] K. Lanczos, “Flächenhafte verteilung der materie in der Einsteinschen gravitationstheorie,” Ann. Phys. (Leipzig) **74**, 518 (1924).
- [173] S. O’Brien and J. L. Synge, Commun. Dublin Inst. Adv. Stud. A., no. 9 (1952).
- [174] A. Lichnerowicz, “Théories Relativistes de la Gravitation et de l’Electromagnetisme,” Masson, Paris (1955).
- [175] W. Israel, “Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity,” Nuovo Cimento **44B**, 1 (1966); and corrections in *ibid.* **48B**, 463 (1966).
- [176] D. Garfinkle, “Corrections to the thin-wall approximation in general relativity,” Phys. Rev. D **41**, 1889 (1990).
- [177] S. Khakshournia and R. Mansouri, “Dynamics of general relativistic spherically symmetric dust thick shells,” Gen. Rel. Grav. **34**, 1847 (2002) [arXiv:gr-qc/0308025].
- [178] C. Barrabès and W. Israel, “Thin shells in general relativity and cosmology: The lightlike limit,” Phys. Rev. D **43**, 1129 (1991).
- [179] R. Mansouri and M. Khorrami, “The equivalence of Darmois-Israel and distributional-metod for thin shells in general relativity,” J. Math. Phys. **37**, 5672 (1996) [arXiv:gr-qc/9608029].

- [180] P. Musgrave and K. Lake, “Junctions and thin shells in general relativity using computer algebra I: The Darmois-Israel Formalism,” *Class. Quant. Grav.* **13** 1885 (1996) [arXiv:gr-qc/9510052].
- [181] J. Fraundtiener, C. Hoenselaers and W. Konrad, “A shell around a black hole,” *Class. Quant. Grav.* **7**, 585 (1990).
- [182] P. R. Brady, J. Louko and E. Poisson, “Stability of a shell around a black hole,” *Phys. Rev. D* **44**, 1891 (1991).
- [183] M. Visser, “Traversable wormholes: Some simple examples,” *Phys. Rev. D* **39** 3182 (1989).
- [184] M. Visser, “Traversable wormholes from surgically modified Schwarzschild spacetimes,” *Nucl. Phys. B* **328** 203 (1989).
- [185] M. Visser, “Quantum mechanical stabilization of Minkowski signature,” *Phys. Lett. B* **242**, 24 (1990).
- [186] M. Visser, *Lorentzian Wormholes: From Einstein to Hawking* (American Institute of Physics, New York, 1995).
- [187] E. Poisson and M. Visser, “Thin-shell wormholes: Linearization stability,” *Phys. Rev. D* **52** 7318 (1995) [arXiv:gr-qc/9506083].
- [188] E. F. Eiroa and G. E. Romero “Linearized stability of charged thin-shell wormholes,” *Gen. Rel. Grav.* **36** 651-659 (2004) [arXiv:gr-qc/0303093].
- [189] F. S. N. Lobo and P. Crawford, “Linearized stability analysis of thin-shell wormholes with a cosmological constant,” *Class. Quant. Grav.* **21**, 391 (2004) [arXiv:gr-qc/0311002].
- [190] M. Ishak and K. Lake, “Stability of transparent spherically symmetric thin shells and wormholes,” *Phys. Rev. D* **65** 044011 (2002) [arXiv:gr-qc/0108058].

- [191] S. M. C. V. Gonçalves, “Relativistic shells: Dynamics, horizons, and shell crossing,” *Phys. Rev. D* **66**, 084021 (2002) [arXiv:gr-qc/0212124].
- [192] Stuart L. Shapiro, *Numerical Relativity at the Frontier* arxiv:gr-qc/0509094v1
- [193] d’Inverno, R.A. *Algebraic Computing in General Relativity*. (Proceedings of the Forty Sixth Scottish Universities Summer School in Physics, IOP, 1996).
- [194] d’Inverno, R.A. *Numerical Computing in General Relativity* .(Proceedings of the Forty Sixth Scottish Universities Summer School in Physics IOP, 1996).
- [195] d’Inverno, R.A. *Computer Algebra: From the Visible to the Invisible*. *General Relativity and Gravitation*, 38, 2006,1095-1108
- [196] R. Arnowitt, S. Deser e C. W. Misner, *The dynamics of General Relativity, em Gravitation: an introduction to current research*, Wiley, New York, 227–265 (1962).
- [197] J. L. Jaramillo, J. A. Valiente Kroon e E. Gourgoulhon, *Class. Quant. Grav.* **25**, 093001 (2008)
- [198] E. Gourgoulhon, *3 + 1 Formalism and bases of numerical relativity*, lectures at Institut Henri Poincaré, Paris (2006), arXiv:gr-qc/0703035
- [199] Kayll Lake, *A tool for teaching General Relativity* , arXiv:physics/0509108v1
- [200] B. Gustafsson, H. Kreiss e J. Olinger, *Time Dependent Problems and Difference Methods*, John Wiley and Sons 1995.

- [201] T. Goodale, G. Allen, G. Lanfermann, J. Massó, T. Radke, E. Seidel e J. Shalf, "The Cactus Framework and Toolkit: Design and Applications", in *Vector and Parallel Processing - VEC-PAR'2002, 5th International Conference, Lecture Notes in Computer Science*, Springer, Berlin, 2003; G. Allen et. al., *Cluster Computing*, **4** 179 (2001); B. Talbot, S. Zhou, G. Higgins, *NASA report*, http://ct.gsfc.nasa.gov/esmf_tasc/Files/Cactus.b.html; Cactus development team, <http://www.cactuscode.org>.
- [202] J. Lee, *Ricci, a Mathematica package for doing tensor calculations in differential geometry*, <http://www.math.washington.edu/~lee>.
- [203] J. M. Martín-García, *xTensor*, <http://metric.imaff.csic.es/Martin-Garcia/xA>
- [204] L. Parker e S. Christensen, *MathTensor: A System for Doing Tensor Analysis by Computer*, Addison-Wesley 1994.
- [205] For an overview of current issues and PDE problems arising in numerical relativity, and for further references, see, e.g. L. Lehner, *Class. Quant. Grav.* **18**, R25 (2001).
- [206] P. Musgrave, D. Pollney e K. Lake, *Fields Institute Comm.* **15** 313 (1996) (<http://grtensor.phy.queensu.ca>).
- [207] Auer, J.W., *Linear Algebra with Applications* (Prentice Hall Publishing) ISBN 0-13-538349-8
- [208] Auer, J.W., *Maple Solutions Manual for Linear Algebra Applications* (Prentice Hall Publishing) ISBN 0-13-535-550
- [209] Bauldry, W.C., Fielder, J.R., *Calculus Laboratories with Maple* (Brooks/Cole Publishing Co.) ISBN 0-534-13788-1

- [210] Burbulla, C.C.M., Dodson C.T.J., Self-Tutor for Computer Calculus using Maple (Prentice Hall Canada Inc.) ISBN 013-063926-5
- [211] Devitt. S, Calculus with Maple (Brooks/Cole Publishing Co.) ISBN 0-534-16362-9
- [212] Ellis, W., Lodi, E., Maple for the Calculus Student: A Tutorial (Brooks/Cole Publishing Co.) ISBN 0-534-11874-7
- [213] Ellis, W., Lodi, E., Johnson E., Schwalbe D., The Maple V Flight Manual Tutorials for Calculus, Linear Algebra & Differential Equations 2nd edition, Brooks/Cole Publishing Co.) ISBN 0-534-21235-2
- [214] Fattahi, A., Maple V Calculus Labs (Brooks/Cole Publishing Co.) ISBN 0-534-19272-6
- [215] Geddes, K., Marshman, McGee, Ponzo e Char, Maple Calculus Workbook: Problems and Solutions (Available from Waterloo Maple Software)
- [216] Geddes, K., Czapor, Lagan, Algorithms for Computer Algebra (Kluwer Academic Publishers) ISBN 0-7923-9259-0
- [217] Gloggengiesser, H., Maple V Software fuer Mathematiker (Markt & Technik) ISBN 3-87791-439-X
- [218] Harper, D., Wooff, C., Hodgkinson, D., A Guide to Computer Algebra Systems (John Wiley & Sons, Inc.) ISBN 0-471-92910-7
- [219] Harris, Kent, Discovering Calculus with Maple (John Wiley & Sons, Inc.) ISBN 0-471-55156-2
- [220] Heck, A., Introduction to Maple - A Computer Algebra System (Springer-Verlag) ISBN 0-387-97662-0

- [221] Holmes M.H., Ecker J.G., Boyce W.E., Siegmann W.L., Exploring Calculus with Maple (Addison-Wesley) ISBN 0-201-52616-6
- [222] Johnson, E., Linear Algebra with Maple (Brooks/Cole Publishing Co.) ISBN 0-534-13069-0
- [223] Kamerich E., A Guide to Maple (Springer-Verlag) ISBN 0-387-94116-9
- [224] Kamminga van Hulsen M., Computeralgebra met Maple (Academic Service) ISBN 90-6233-923-9
- [225] Redfern D., The Maple Handbook (Springer Verlag) ISBN 0-387-94054-5
- [226] Bjarne Stroustrup, *The C++ Programming Language* (Addison-Wesley, 2000.)
- [227] Bjarne Stroustrup, *The Design and Evolution of C++*. (Addison-Wesley, 1994)
- [228] Margaret A. Ellis e Bjarne Stroustrup, *The Annotated C++ Reference Manual*. (Addison-Wesley, 1990).
- [229] Bjarne Stroustrup: Evolving a language in and for the real world: C++ 1991-2006. ACM HOPL-III. June 2007.
- [230] B. Stroustrup: A History of C++: 1979-1991. Proc ACM History of Programming Languages conference (HOPL-2). March 1993.
- [231] B. Stroustrup: Learning Standard C++ as a New Language. C/C++ Users Journal. pp 43-54. May 1999
- [232] O.-J. Dahl, E. W. Dijkstra, C. A. R. Hoare Structured Programming, Academic Press, London, 1972 ISBN 0-12-200550-3

- [233] Ashcroft, Edward; e Zohar Manna (1971). "The translation of go to programs to 'while' programs". Proceedings of IFIP Congress.
- [234] Bohm, Corrado; e Giuseppe Jacopini (May 1966). "Flow Diagrams, Turing Machines and Languages with Only Two Formation Rules". Communications of the ACM 9 (5): 366371.
- [235] Harel, David (1980). "On Folk Theorems". Communications of the ACM 23 (7): 379389.
- [236] Dijkstra, Edsger (1968). "Go To Statement Considered Harmful". Communications of the ACM 11 (3): 147148.
- [237] Schach, Stephen (2006). Object-Oriented and Classical Software Engineering, Seventh Edition. McGraw-Hill. ISBN 0-073-19126-4.
- [238] Abadi, Martin; Luca Cardelli (1998). A Theory of Objects. Springer-Verlag. ISBN 0-387-94775-2.
- [239] Abelson, Harold; Gerald Jay Sussman, (1997). Structure and Interpretation of Computer Programs. The MIT Press.
- [240] Armstrong, Deborah J. (February 2006). "The Quarks of Object-Oriented Development". Communications of the ACM 49 (2): 123128.
- [241] Booch, Grady (1997). Object-Oriented Analysis and Design with Applications. Addison-Wesley. ISBN 0-8053-5340-2 .
- [242] Eeles, Peter; Oliver Sims (1998). Building Business Objects. John Wiley & Sons. ISBN 0-471-19176-0.
- [243] Gamma, Erich; Richard Helm, Ralph Johnson, John Vlissides (1995). Design Patterns: Elements of Reusable Object Oriented Software. Addison-Wesley. ISBN 0-201-63361-2.

- [244] Harmon, Paul; William Morrissey (1996). The Object Technology Casebook - Lessons from Award-Winning Business Applications. John Wiley & Sons. ISBN 0-471-14717-6.
- [245] Jacobson, Ivar (1992). Object-Oriented Software Engineering: A Use Case-Driven Approach. Addison-Wesley. ISBN 0-201-54435-0.
- [246] Meyer, Bertrand (1997). Object-Oriented Software Construction. Prentice Hall. ISBN 0-13-629155-4.
- [247] Rumbaugh, James; Michael Blaha, William Premerlani, Frederick Eddy, William Lorensen (1991). Object-Oriented Modeling and Design. Prentice Hall. ISBN 0-13-629841-9.
- [248] Taylor, David A. (1992). Object-Oriented Information Systems - Planning and Implementation. John Wiley & Sons. ISBN 0-471-54364-0.
- [249] S. Weinzierl, *gTybalt - a free computer algebra system*, Comput.Phys.Commun.156, (2004), 180-198
- [250] H. Abelson e G. J. Sussman. Structure and Interpretation of Computer Programs (2nd Edition) (MIT Press, 1996).
- [251] D. Abrahams. Exception Safety in STLport (STLport website, 1996).
- [252] D. Abrahams. Exception Safety in Generic Components, in M. Jazayeri, R. Loos, D. Musser (eds.), Generic Programming: International Seminar on Generic Programming, Dagstuhl Castle, Germany, April/May 1998, Selected Papers, Lecture Notes in Computer Science 1766 (Springer, 2001).
- [253] D. Abrahams. Error and Exception Handling ([Boost] website, 2001).
- [254] A. Alexandrescu. Traits: The else-if-then of Types (C++ Report, 12(4), April 2000).

- [255] A. Alexandrescu. Traits on Steroids (C++ Report, 12(6), June 2000).
- [256] A. Alexandrescu and P. Marginean. Change the Way You Write Exception-Safe CodeForever (C/C++ Users Journal, 18(12), December 2000).
- [257] A. Alexandrescu. Modern C++ Design (Addison-Wesley, 2001).
- [258] A. Alexandrescu. *A Policy-Based basic string Implementation* (C/C++ Users Journal, 19(6), June 2001).
- [259] A. Alexandrescu. *Multithreading and the C++ Type System* (InformIT website, February 2002).
- [260] A. Alexandrescu. (C/C++ Users Journal, 20(4,6,8), April/June/August 2002).
- [261] A. Alexandrescu. *Move Constructors* (C/C++ Users Journal, 21(2), February 2003).
- [262] A. Alexandrescu. *Assertions* (C/C++ Users Journal, 21(4), April 2003).
- [263] A. Alexandrescu and P. Marginean. *Enforcements* (C/C++ Users Journal, 21(6), June 2003).
- [264] A. Alexandrescu and D. Held. *Smart Pointers Reloaded* (C/C++ Users Journal, 21(10), October 2003).
- [265] A. Alexandrescu. *Lock-Free Data Structures* (C/C++ Users Journal, 22(10), October 2004).
- [266] C. Allison. C & C++ Code Capsules (Prentice Hall, 1998).
- [267] M. H. Austern. Generic Programming and the STL (Addison-Wesley, 1999).

- [268] J. Barton e L. Nackman. Scientific and Engineering C++ (Addison-Wesley, 1994).
- [269] J. Bentley. Programming Pearls (2nd Edition) (Addison-Wesley, 2000).
- [270] F. Brooks. The Mythical Man-Month (Addison-Wesley, 1975; reprinted with corrections in 1995).
- [271] D. Butenhof. Programming with POSIX Threads (Addison-Wesley, 1997).
- [272] T. Cargill. C++ Programming Style (Addison-Wesley, 1992).
- [273] ISO/IEC 9899:1990(E), Programming Languages C (ISO C90 and ANSI C89 standard).
- [274] ISO/IEC 9899:1999(E), Programming Languages C (revised ISO and ANSI C99 standard).
- [275] ISO/IEC 14882:1998(E), Programming Languages C++ (ISO and ANSI C++ standard).
- [276] ISO/IEC 14882:2003(E), Programming Languages C++ (updated ISO and ANSI C++ standard including the contents of [C++98] plus errata corrections).
- [277] M. Cline, G. Lomow, e M. Girou. C++ FAQs (2nd Edition) (Addison-Wesley, 1999).
- [278] L. Constantine. Constantine on Peopleware (Yourdon Press, 1995).
- [279] J. Coplien. Advanced C++ Programming Styles and Idioms (Addison-Wesley, 1992).
- [280] T. Cormen, C. Leiserson, R. Rivest, C. Stein. Introduction to Algorithms (2nd Edition) (MIT Press, 2001).

- [281] C. Cowan, M. Barringer, S. Beattie, e G. Kroah-Hartman. FormatGuard: Automatic Protection From printf Format String Vulnerabilities (Proceedings of the 2001 USENIX Security Symposium, August 2001, Washington, D.C.).
- [282] S. Dewhurst. C++ Gotchas (Addison-Wesley, 2003).
- [283] Dinkum Unabridged Library documentation (Dinkumware Ltd. website).
- [284] M. Ellis e B. Stroustrup. The Annotated C++ Reference Manual (Addison-Wesley, 1990).
- [285] E. Gamma, R. Helm, R. Johnson, e J. Vlissides. Design Patterns: Elements of Reusable Object-Oriented Software (Addison-Wesley, 1995).
- [286] K. Henney. "C++ Patterns: Executing Around Sequences"(EuroPLoP 2000 proceedings).
- [287] K. Henney. "C++ Patterns: Reference Accounting"(EuroPLoP 2001 proceedings).
- [288] K. Henney. Stringing Things Along (Application Development Advisor, July-August 2002).
- [289] K. Henney. The Next Best String (Application Development Advisor, October 2002).
- [290] M. Henricson e E. Nyquist. Industrial Strength C++ (Prentice Hall, 1997).
- [291] N. Josuttis. The C++ Standard Library (Addison-Wesley, 1999).
- [292] T. Keffer. Rogue Wave C++ Design, Implementation, and Style Guide (Rogue Wave Software, 1995).

- [293] B. Kernighan e R. Pike. *The Practice of Programming* (Addison-Wesley, 1999).
- [294] D. Knuth. *The errors of TeX* (SoftwarePractice & Experience, 19(7), July 1989).
- [295] D. Knuth. *The Art of Computer Programming, Volume 1: Fundamental Algorithms* (3rd Edition) (Addison-Wesley, 1997).
- [296] D. Knuth. *The Art of Computer Programming, Volume 2: Seminumerical Algorithms* (3rd Edition) (Addison-Wesley, 1997).
- [297] D. Knuth. *The Art of Computer Programming, Volume 3: Sorting and Searching* (2nd Edition) (Addison-Wesley, 1998).
- [298] A. Koenig e B. Moo. *Ruminations on C++* (Addison-Wesley, 1997).
- [299] J. Lakos. *Large-Scale C++ Software Design* (Addison-Wesley, 1996).
- [300] B. Liskov. *Data Abstraction and Hierarchy* (SIGPLAN Notices, 23(5), May 1988).
- [301] R. C. Martin. *The Dependency Inversion Principle* (C++ Report, 8(5), May 1996).
- [302] R. C. Martin. *Granularity* (C++ Report, 8(9), October 1996).
- [303] R. C. Martin. *The Open-Closed Principle* (C++ Report, 8(1), January 1996).
- [304] R. C. Martin, D. Riehle, F. Buschmann (eds.). *Pattern Languages of Program Design 3* (Addison-Wesley, 1998).
- [305] R. C. Martin, *Abstract Classes and Pure Virtual Functions* in R. C. Martin (ed.), *More C++ Gems* (Cambridge University Press, 2000).
- [306] S. McConnell. *Code Complete* (Microsoft Press, 1993).

- [307] B. Meyer. *Object-Oriented Software Construction (2nd Edition)* (Prentice Hall, 2000).
- [308] S. Meyers. *More Effective C++* (Addison-Wesley, 1996).
- [309] S. Meyers. *Effective C++ (2nd Edition)* (Addison-Wesley, 1997).
- [310] S. Meyers. *How Non-Member Functions Improve Encapsulation* (C/C++ Users Journal, 18(2), February 2000).
- [311] S. Meyers. *Effective STL* (Addison-Wesley, 2001).
- [312] S. Meyers e A. Alexandrescu. (Dr. Dobbs Journal, 29(7,8), July and August 2004).
- [313] G. A. Miller. *The Magical Number Seven, Plus or Minus Two: Some Limits on Our Capacity for Processing Information* (The Psychological Review, 1956, vol. 63).
- [314] *Frequently Asked Questions About mozilla.orgs Code Review Process* (Mozilla website).
- [315] R. Murray. *C++ Strategies and Tactics* (Addison-Wesley, 1993).
- [316] D. R. Musser, G. J. Derge, e A. Saini. *STL Tutorial and Reference Guide, 2nd Edition* (Addison-Wesley, 2001).
- [317] D. Parnas. *The Secret History of Information Hiding* (Software Pioneers: Contributions To Software Engineering, Springer-Verlag New York, 2002).
- [318] T. Peters. "The Zen of Python."(comp.lang.python, June 1999).
- [319] P. Piwowarski. *A Nesting Level Complexity Measure* (ACM SIGPLAN Notices, 9/1982).

- [320] D. Saks. Thinking Deeply, Thinking Deeper, and Thinking Even Deeper (C/C++ Users Journal, 17(4,5,6), April, May, and June 1999).
- [321] D. Schmidt, M. Stal, H. Rohnert, F. Buschmann. Pattern-Oriented Software Architecture, Volume 2: Patterns for Concurrent and Networked Objects (Wiley, 2001).
- [322] Seamonkey Code Reviewers Guide (Mozilla website).
- [323] R. Sedgewick. Algorithms in C++, Parts 1-4: Fundamentals, Data Structure, Sorting, Searching (3rd Edition) (Addison-Wesley, 1998).
- [324] B. Fomitchev. STLport: Debug Mode (STLport website).
- [325] B. Stroustrup. The Design and Evolution of C++ (Addison-Wesley, 1994).
- [326] B. Stroustrup. The C++ Programming Language (Special 3rd Edition) (Addison-Wesley, 2000).
- [327] H. Sutter. Exceptional C++ (Addison-Wesley, 2000).
- [328] H. Sutter. More Exceptional C++ (Addison-Wesley, 2002).
- [329] H. Sutter. Generalizing Observer (C/C++ Users Journal, 21(9), September 2003).
- [330] H. Sutter. Exceptional C++ Style (Addison-Wesley, 2004).
- [331] H. Sutter. Function Types (C/C++ Users Journal, 22(7), July 2004).
- [332] H. Sutter. When and How To Use Exceptions (C/C++ Users Journal, 22(8), August 2004).
- [333] H. Sutter. Just Enough Thread Safety (C/C++ Users Journal, 22(9), September 2004).

- [334] H. Sutter e J. Hyslop. Hungarian wartHogs (C/C++ Users Journal, 19(11), November 2001).
- [335] H. Sutter e J. Hyslop. A Midsummer Nights Madness (C/C++ Users Journal, 20(8), August 2002).
- [336] H. Sutter e J. Hyslop. Sharing Causes Contention (C/C++ Users Journal, 21(4), April 2003).
- [337] H. Sutter e J. Hyslop. Getting Abstractions (C/C++ Users Journal, 22(6), June 2004).
- [338] H. Sutter e J. Hyslop. Collecting Shared Objects (C/C++ Users Journal, 22(8), August 2004).
- [339] Taligents Guide to Designing Programs (Addison-Wesley, 1994).
- [340] T. Tsai e N. Singh. Libsafe 2.0: Detection of Format String Vulnerability Exploits (Avaya Labs, March 2001).
- [341] D. Vandevoorde and N. Josuttis. C++ Templates (Addison-Wesley, 2003).
- [342] A. B. Webber. Modern Programming Languages: A Practical Introduction (Franklin, Beedle & Associates, 2003).