

QUANTIZAÇÃO DO MODELO DE
MINI-SUPERESPAÇO DE
FRIEDMANN-ROBERTSON-WALKER
PERMEADO POR POEIRA E UMA
CONSTANTE COSMOLÓGICA

FELIPE DE FREITAS MOURA



INSTITUTO DE FÍSICA
Universidade Federal Fluminense

QUANTIZAÇÃO DO MODELO DE MINI-SUPERESPAÇO DE FRIEDMANN-ROBERTSON-WALKER PERMEADO POR POEIRA E UMA CONSTANTE COSMOLÓGICA

FELIPE DE FREITAS MOURA

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal Fluminense como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Nivaldo A. Lemos



INSTITUTO DE FÍSICA
Universidade Federal Fluminense

Niterói-RJ, agosto de 2010

M929 Moura, Felipe de Freitas.
Quantização do modelo de mini-superespaço de Friedmann-
Robertson-Walker permeado por poeira e uma constante
cosmológica / Felipe de Freitas Moura ; orientador: Nivaldo
A. Lemos. -- Niterói, 2010.
63 f. : il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Fluminense,
Instituto de Física, 2010.
Bibliografia: f. 61-63.

1.COSMOLOGIA QUÂNTICA. 2.GEOMETRODINÂMICA QUÂNTICA.
3.EQUAÇÃO DE WHEELER-DEWITT. I.Lemos, Nivaldo Agostinho,
Orientador. II.Universidade Federal Fluminense. Instituto de
Física, Instituição responsável. III.Título.

CDD 523.1



INSTITUTO DE FÍSICA

Universidade Federal Fluminense

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

RUA GAL MILTON TAVARES DE SOUZA, SN

24210-346 – NITERÓI - RIO DE JANEIRO

TEL: (21)2629-5878 - FAX: 2629-5887

E-MAIL: epg@if.uff.br

Ata dos trabalhos finais da Comissão Examinadora da dissertação de mestrado apresentada por Felipe de Freitas Moura. Aos treze dias do mês de setembro de dois mil e dez, às 10 horas, reuniram-se no Instituto de Física da Universidade Federal Fluminense os membros da Comissão Examinadora constituída pelos professores doutores Nivaldo Agostinho Lemos (UFF), Gil de Oliveira Neto (UFF) e Rodrigo Ferreira Sobreiro (UFF), sob a presidência do primeiro, para prova pública de apresentação de dissertação de mestrado intitulada "Quantização do Modelo de Mini-superspaço de Friedmann-Robertson-Walker Permeado por Poeira e uma Constante Cosmológica", tendo em vista as exigências do Regulamento Específico do curso de Física relacionadas com a conclusão do Mestrado em Física pela Universidade Federal Fluminense. A dissertação foi elaborada sob a orientação do professor Nivaldo Agostinho Lemos. Após a exposição do trabalho, o aluno respondeu às questões formuladas pelos integrantes da Comissão Examinadora, que apresentou parecer no sentido de aprová-lo. Para constar, foi lavrada a presente ata, que vai assinada por mim, secretário da Pós-graduação em Física em exercício, pelos membros da Comissão Examinadora e pelo mestrando.

Niterói, 13 de setembro de dois mil e dez.

Rafael Ângelo Nobuyuki Sano

Dr. Nivaldo Agostinho Lemos

Dr. Gil de Oliveira Neto

Dr. Rodrigo Ferreira Sobreiro

Felipe de Freitas Moura

Rafael Ângelo N. Sano

Nivaldo A. Lemos

Gil de Oliveira Neto

Rodrigo Ferreira Sobreiro

Felipe de Freitas Moura

Sumário

Dedicatória	v
Agradecimentos	vi
Resumo	vii
Resumo em inglês	viii
Notações e Convenções	ix
1 Introdução	1
2 Formulação Canônica da Relatividade Geral	8
2.1 As Variáveis ADM	9
2.2 Formulação Hamiltoniana da Relatividade Geral	12
2.3 Fluido Relativístico: Representação Via Potenciais de Velocidade	15
2.4 Teoria Hamiltoniana de um Fluido Perfeito Relativístico	19
3 Dinâmica Quântica do Universo	23
3.1 A Equação Central da Cosmologia Quântica Canônica	24
3.2 O Modelo de Mini-superespaço	25
3.3 O Modelo Clássico	28
3.4 O Modelo Quântico	31
3.4.1 Transformação Canônica e Quantização com Função Quase Gaussiana	31
3.4.2 Quantização com Dois Fluidos Perfeitos	43
4 Conclusões	46
A Quantização de Sistemas Hamiltonianos Vinculados	49
A.1 Vínculos Primários	49
A.2 Condições de Consistência e Vínculos Secundários	51
A.3 Quantização	53

B Operadores Auto-Adjuntos	55
Bibliografía	61

*Aos meus pais, Geraldo e Angela;
e aos meus irmãos, Bruno e Daniel.*

Agradecimentos

Eu gostaria que as pessoas que estiveram ao meu lado nestes últimos anos e colaboraram direta ou indiretamente para a elaboração desta dissertação sentissem a minha gratidão. Agradeço ao professor Nivaldo Lemos que foi meu orientador desde a iniciação científica e que devo grande parte do conhecimento que adquiri na pesquisa desenvolvida neste trabalho. Agradeço aos funcionários do Instituto de Física da UFF que juntos fornecem uma excelente infra-estrutura para se estudar física. Agradeço também à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho aplicamos a formulação da cosmologia quântica canônica para quantizar o modelo cosmológico de Friedmann-Robertson-Walker espacialmente plano com poeira e uma constante cosmológica. As soluções clássicas com $\Lambda < 0$ e $\Lambda > 0$ descrevem, respectivamente, um universo eternamente oscilante entre um começo e um fim singulares (Big Bang e Big Crunch) e um universo que se expande eternamente de um começo singular. Nas proximidades dessas singularidades, a escala de energia torna-se comparável à escala de Planck e a intensidade do campo gravitacional torna-se comparável à das outras interações fundamentais, sugerindo que efeitos quânticos tornem-se crescentemente importantes. Além do mais, efeitos quânticos podem levar a alterações na dinâmica do universo durante fases posteriores de sua evolução ou até mesmo durante toda sua evolução, uma vez que em alguns casos modelos cosmológicos quânticos apresentam comportamento quântico para fator de escala grande. Depois de escrever as formulações hamiltonianas para a relatividade geral e o fluido perfeito relativístico, este último descrito através de potenciais para a quadri-velocidade, o que nos permite associar uma variável tempo a um grau de liberdade do fluido, obtivemos a solução para a equação de Wheeler-DeWitt em um mini-superspaço. Resolvemos esta equação para um exemplo particular de função de onda inicial e analisamos a evolução do valor esperado do fator de escala. Observamos que as singularidades clássicas desaparecem no modelo quântico, e uma constante cosmológica positiva pode descrever uma fase inflacionária nos primórdios do universo e a fase de expansão acelerada atual. Estudamos também a influência dos parâmetros arbitrários da função de onda inicial sobre o valor esperado do fator de escala.

Abstract

In this work we apply the canonical formulation of quantum cosmology to quantize the spatially flat Friedmann-Robertson-Walker cosmological model with dust and a cosmological constant. The classical solutions with $\Lambda < 0$ and $\Lambda > 0$ describe, respectively, a universe eternally oscillating between a singular beginning and a singular end (Big Bang and Big Crunch) and a universe that expands forever from a singular beginning. In the vicinity of these singularities, the energy scale becomes comparable to the Planck scale and the intensity of the gravitational field becomes comparable to the other fundamental interactions, suggesting that quantum effects become increasingly important. Moreover, quantum effects can lead to changes in the dynamics of the universe during the later stages of its evolution or even throughout its evolution since in some cases quantum cosmological models present quantum behavior for large scale factor. After writing the Hamiltonian formulation for general relativity and a relativistic perfect fluid, the latter described by velocity potentials, which allows us to associate a time variable to a degree of freedom of the fluid, we find the solution to the Wheeler-DeWitt equation on a mini-superspace. We solve this equation for a particular example of the initial wave function and analyze the evolution of the expectation value of the scale factor. We observe that the classical singularities disappear in the quantum model and a positive cosmological constant can describe an inflationary phase in the early universe and the current phase of accelerated expansion. We also study the influence of arbitrary parameters of the initial wave function on the expectation value of the scale factor.

Notações e Convenções

- Índices gregos variam de 0 a 3 e índices latinos variam de 1 a 3.
- A assinatura utilizada é $(-+++)$, de modo que a métrica induzida sobre hipersuperfícies espaciais é positiva.
- O tempo próprio τ é definido por

$$d\tau^2 = -ds^2 = -g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu,$$

de modo que $d\tau$ é real e positivo para uma partícula se movendo ao longo de uma geodésica do tipo tempo.

- Derivadas ordinárias

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

são indicadas por ∂_μ ou por uma vírgula. Por exemplo, a derivada de um campo escalar ϕ é

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} = \partial_\mu\phi = \phi_{,\mu}.$$

- Os símbolos de Christoffel de segunda espécie são definidos como

$$\Gamma_{\mu\nu}^\kappa = \frac{1}{2}g^{\kappa\lambda}(g_{\lambda\mu,\nu} + g_{\nu\lambda,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}).$$

- Para derivada covariante de um tensor qualquer $T_{\lambda\dots}^{\kappa\dots}$ serão utilizadas as notações

$$\nabla_\nu T_{\lambda\dots}^{\kappa\dots} \quad \text{ou} \quad T_{\lambda\dots;\nu}^{\kappa\dots}$$

com

$$\nabla_\nu T_{\lambda\dots}^{\kappa\dots} = T_{\lambda\dots;\nu}^{\kappa\dots} = \partial_\nu T_{\lambda\dots}^{\kappa\dots} + \Gamma_{\mu\nu}^\kappa T_{\lambda\dots}^{\mu\dots} + \dots - \Gamma_{\lambda\nu}^\mu T_{\mu\dots}^{\kappa\dots} - \dots$$

- A derivada covariante direcional é definida por:

$$\frac{D}{d\lambda} = \frac{dx^\mu}{d\lambda} \nabla_\mu.$$

- O tensor de curvatura ou de Riemann-Christoffel é definido por

$$R^\kappa_{\lambda\mu\nu} = \Gamma^\kappa_{\nu\lambda,\mu} - \Gamma^\kappa_{\lambda\mu,\nu} + \Gamma^\kappa_{\mu\rho} \Gamma^\rho_{\nu\lambda} - \Gamma^\kappa_{\nu\rho} \Gamma^\rho_{\lambda\mu}.$$

- O tensor de Ricci e o escalar de curvatura são definidos, respectivamente, pelas seguintes contrações:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= R^\kappa_{\mu\kappa\nu}, \\ R &= g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

- O tensor de Einstein é definido por

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R.$$

- As unidades utilizadas são tais que $c = \hbar = 16\pi G = 1$ onde c é a velocidade da luz no vácuo, \hbar é a constante de Planck dividida por 2π e G é a constante gravitacional de Newton.

Capítulo 1

Introdução

A cosmologia é o estudo do universo, ou cosmo, considerado como um todo. Uma ciência que considera galáxias inteiras como pequenos objetos pode parecer, à primeira vista, muito longe do interesse e alcance da humanidade. No entanto, a cosmologia trata de questões que são fundamentais para a condição humana, questões como: De onde viemos? Onde estamos? Para onde vamos? A cosmologia se inspira nestas perguntas quando tenta descrever o passado, explicar o presente e prever o futuro do universo. Ao longo do último século a cosmologia moderna se desenvolveu e as questões acima, formuladas desde a antiguidade, foram reformuladas por cosmólogos da seguinte forma: De que o universo é feito? O universo tem uma extensão espacial finita ou infinita? O universo teve um começo em algum instante no passado? O universo irá ter um fim em algum instante no futuro?

O nascimento da cosmologia como ciência pode ser atribuído a Issac Newton (1642-1727). Foi somente com a criação da teoria da gravitação e as leis da dinâmica de Newton que pudemos começar a compreender a dinâmica do sistema solar. A lei da gravitação de Newton é uma lei de força proporcional às massas envolvidas e inversamente proporcional ao quadrado da distância que as separa, com a característica de ser sempre atrativa. Para Newton, a atração mútua da matéria era uma propriedade intrínseca da natureza. Devido ao sucesso da gravitação newtoniana dentro do sistema solar em descrever e prever fenômenos, não tardou muito para a teoria ser extrapolada para o universo como um todo. A teoria também possuía limitações, inclusive na parte conceitual, ao sugerir que a ação gravitacional era exercida instantaneamente à distância sem intermédio de nenhum agente ou contato causal. Newton parecia ter clara consciência das limitações de sua teoria.

Durante o período entre Newton e o início do século XX houve muitos avanços na física e na observação celeste, proporcionando um conhecimento maior do universo. Mas ainda assim, no início do século passado não se co-

nhecia a existência de galáxias e acreditava-se que o universo era estático, a idade do universo era estimada em alguns bilhões de anos. Hoje, acredita-se que vivemos em um universo em expansão com bilhões de galáxias dentro do nosso horizonte que iniciaram seu processo de formação há mais de 10 bilhões de anos. O quadro que se dispõe hoje do universo, o modelo padrão da cosmologia, é um grande patrimônio científico e cultural da humanidade. Esse modelo, baseado na teoria da relatividade geral de Albert Einstein (1879-1955), nos permite entender a evolução do universo desde as primeiras frações de segundo até hoje, aproximadamente 14 bilhões de anos depois.

O modelo padrão da cosmologia começou a ser construído na primeira metade do século passado e iniciou-se com Einstein, em 1917, pouco tempo após ele haver publicado seu trabalho sobre a teoria do campo gravitacional, a relatividade geral [1], com base na qual calculou o efeito da deflexão da luz ao passar por um corpo de grande massa, efeito este confirmado em 1919. As equações de campo da relatividade geral formam um conjunto de equações diferenciais parciais não-lineares acopladas. Embora não se tenha conseguido obter sua solução geral, pode-se resolvê-las impondo hipóteses simplificadoras (simetrias) ao problema. Assim, o primeiro modelo cosmológico relativista proposto por Einstein [2], além de espacialmente homogêneo, isotrópico e espacialmente finito (com curvatura espacial constante e positiva), possuía a propriedade de ser estático. Acreditava-se naquela época ser esta uma característica do universo. Sendo a gravitação atrativa, para obter um universo estático Einstein modificou as suas equações originais do campo gravitacional introduzindo um termo repulsivo para contrabalançar a gravidade, a chamada constante cosmológica (Λ). No mesmo ano, o astrônomo holandês Willem de Sitter (1872-1934) publicou um trabalho [3] no qual obteve uma nova solução da relatividade geral, com constante cosmológica, estacionária, porém sem matéria. Contudo, isso não impediu que esse modelo fosse investigado, à época, como uma possível descrição do universo real. Como a densidade do universo é baixa, a solução de de Sitter era considerada como uma aproximação de densidade zero. Essa era a situação em 1917, quando a recém-criada teoria da relatividade geral ainda não era muito aceita.

A possibilidade teórica de um universo em expansão só surgiu no período entre 1922 e 1924 com Alexander Friedmann (1888-1925) [4]. O trabalho de 1922 não recebeu a devida atenção. Nesse artigo, em que considerou espaços com curvatura constante e positiva, Friedmann obteve pela primeira vez soluções expansionistas (com e sem constante cosmológica) das equações de Einstein. Mas tanto nesse artigo como no seguinte, publicado em 1924 (em que ele analisa espaços com curvatura espacial constante e negativa), a abordagem eminentemente matemática empregada fez com que não recebessem grande atenção dos cosmólogos e astrônomos. De fato, nesses trabalhos

ele extraiu poucas consequências físicas de suas soluções. Assim, Friedmann descobriu a possibilidade de um universo em expansão, mas não a expansão do universo. O universo descrito pelo modelo de Friedmann, além de expansionista, é espacialmente homogêneo, isotrópico em relação a qualquer ponto, e possui uma origem no passado em que a densidade de matéria e a temperatura divergem, o chamado Big Bang. Esse modelo tornou-se a base do modelo padrão da cosmologia. A possibilidade de expansão descoberta por Friedmann chegou a ser questionada inicialmente por Einstein. Contudo, um ano depois, admitiu seu erro e reconheceu a existência de soluções variáveis no tempo, como defendido no trabalho de Friedmann. Outra contribuição notável para o desenvolvimento da cosmologia nesse período inicial foi dada pelo físico e astrônomo Georges Lemaître (1894-1966). Lemaître obteve, de forma independente, equações equivalentes às anteriores obtidas por Friedmann. A relação linear entre velocidade e distância já encontrava-se nesse trabalho, antes mesmo da descoberta da expansão do universo. Ao contrário de Friedmann, Lemaître não só usou a abordagem matemática mas também a física e a astronomia conhecida na época para descrever o universo de maneira a conseguir despertar a atenção da comunidade de cosmólogos e astrônomos para as consequências físicas das soluções expansionistas, ajudando na compreensão do significado físico de um universo em expansão.

Em 1923, Edwin Hubble (1889-1953) descobriu a existências de galáxias. Estas seriam fundamentais para, em 1929, o mesmo Hubble descobrir que as velocidades de recessão das galáxias eram proporcionais a suas distâncias e que a maioria das galáxias estavam se afastando de nós, sugerindo ser a expansão uma propriedade do universo real e não apenas uma possibilidade teórica [5].

Progressos importantes foram obtidos por George Gamow (1904-1968) e seu grupo no final da década de 1940 e início dos anos 50, na busca de uma solução para um problema que guarda sua origem na década de 1920. Nessa época, uma das questões centrais em astrofísica era saber como se formaram os elementos químicos. Gamow e seus colaboradores, especialmente Ralph Alpher (1921-2007) e Robert Herman (1914-1997), centraram o foco de sua pesquisa em como descrever os estágios iniciais de evolução do universo. Então, em 1946, Gamow publicou um artigo [6] no qual começou a elaborar o seu modelo de universo a partir de uma “explosão” inicial e, em 1948, juntamente com Alpher e Hans Bethe (1906-2005) publicaram um artigo [7] no qual apresentavam a idéia de uma “matéria inicial” formado de nêutrons, que em um instante posterior ao Big Bang se desintegrou (via decaimento β) em prótons, elétrons e anti-nêutrons em um processo que também levou à formação dos núcleos mais pesados, processo denominado nucleossíntese. Naquele mesmo ano, Alpher e Hermann fizeram a notável previsão de que

uma radiação da época do Big Bang, altamente resfriada devido à expansão, deveria estar presente atualmente no universo com uma temperatura estimada da ordem de 5K [8]. Essa radiação foi descoberta somente em 1964, acidentalmente, pelos rádio-astrônomos Arno Penzias (1933-) e Robert Wilson (1936-) [9], constituindo a mais forte evidência da existência do Big Bang. Essa descoberta deu a Penzias e Wilson o Prêmio Nobel de Física em 1978.

Uma questão de grande relevância, que continua recebendo grande atenção dos cosmólogos nesses últimos anos, é a da aceleração cósmica. Em 1998 e 1999 dois grupos envolvidos na observação e análise de supernovas do tipo Ia, chefiados por Adam Riess (1969-) e Saul Perlmutter (1959-), anunciaram que a fase de expansão atual do universo é acelerada [10, 11]. A gravidade decorrente da matéria ordinária é atrativa e, portanto, desacelera a expansão. Assim, é necessária uma outra componente da energia no universo com propriedades bem distintas da matéria usual para explicar este fenômeno. Muitas idéias foram propostas para explicar esta descoberta, a principal delas supõe ser o universo homogeneamente preenchido por um fluido com pressão negativa denominado energia escura [12].

Uma grande variedade de propostas tais como modelos de energia escura através de campos escalares ou de modificações à densidade lagrangiana de Einstein-Hilbert surgiram para dar conta de uma expansão acelerada decorrente de uma pressão negativa. Um campo escalar homogêneo, capaz de impulsionar a expansão acelerada do universo é uma destas. A idéia de quintessência [13, 14] consiste em considerar um campo escalar com um termo cinético evoluindo sob a ação de um potencial minimamente acoplado à gravidade. Nesse caso, o campo escalar é dinamicamente relevante em uma fase recente de evolução do universo. Nos modelos de quintessência a quantidade fundamental é o potencial escalar. Para cada potencial existe uma fenomenologia diferente. Na literatura existem várias propostas de potenciais de quintessência. Outros modelos com campo escalar mas que introduzem modificações no termo cinético de sua lagrangiana são os modelos de K-essência [15, 16]. Há uma outra classe interessante de modelos de energia escura envolvendo um fluido conhecido como gás de Chaplygin [17], assim chamado porque sua equação de estado é similar à usada pelo matemático russo Sergei Chaplygin (1869-1942), no início do século XX, em seus estudos sobre dinâmica dos fluidos. Este fluido também implica a aceleração do universo recentemente. Também tem sido investigada a possibilidade de que matéria e energia escuras seriam manifestações distintas de uma única substância, a quartessência ou matéria escura unificada [18]. O nome quartessência é porque as componentes “básicas” do universo são reduzidas a quatro (fótons, neutrinos, bárions e a componente escura unificada). O modelo do gás de

Chaplygin generalizado, descrito em termos de um campo escalar complexo, foi proposto como protótipo de modelo de quartessência [19, 20, 21]. A aceleração cósmica pode ser obtida também em teorias da gravidade modificadas como as teorias $f(R)$, que consistem em substituir a Lagrangiana de Einstein-Hilbert por uma função mais geral do escalar de Ricci [22]. Essas teorias têm sido estudadas como uma alternativa à energia escura e podem dar conta de uma fase de expansão acelerada recente no universo.

Dado que a constante cosmológica, introduzida inicialmente por Einstein para manter o universo estático, atua nas equações de campo da relatividade geral como uma fonte homogênea e isotrópica com pressão $p = -\rho$, ela ressurgiu neste cenário como a candidata mais natural e mais simples a energia escura, recebendo enorme atenção por parte dos cosmólogos [23, 24]. De fato, as observações atuais [25] são compatíveis com $p/\rho = w = -1$, justificando o enorme interesse teórico em modelos cosmológicos com uma constante cosmológica.

A aceitação da teoria do Big Bang nos leva a fazer uma pergunta importante: é possível aplicar a teoria da relatividade geral a situações tão extremas como aquelas encontradas na época do Big Bang? Os teoremas de singularidade de Hawking e Penrose estabelecem que singularidades, tais como o Big Bang, não são uma característica exclusiva dos modelos de Friedmann, mas podem existir em qualquer solução das equações de Einstein representando um modelo cosmológico. O universo como um todo é ao mesmo tempo de natureza quântica e de aparência clássica na maioria de seus estágios, mas à medida que nos aproximamos da singularidade do Big Bang a intensidade da interação gravitacional torna-se comparável à das outras interações fundamentais e a natureza quântica do universo se revela, sugerindo que uma formulação quântica torna-se crescentemente importante. Assim, acredita-se que se levarmos em conta os efeitos quânticos no universo primordial podemos evitar a singularidade inicial e, além do mais, a inclusão de efeitos quânticos na dinâmica do universo pode alterar significativamente a sua evolução. É desta possibilidade que trata esta dissertação.

Não há hoje uma teoria quântica da gravidade consistente. Contudo, existem alguns esquemas aproximados para tentar resolver, pelo menos parcialmente, alguns dos problemas que uma teoria quântica da gravitação se propõe a atacar. Um desses esquemas é a cosmologia quântica¹, que é a aplicação da teoria quântica ao universo como um todo. Conceitualmente, cosmologia quântica não é necessariamente associada com gravidade quântica. Contudo, tendo em vista que gravidade é a interação dominante em larga escala, qual-

¹Para uma introdução ao assunto, o leitor é remetido ao livro “Quantum Gravity” de C. Kiefer [26].

quer modelo realístico de cosmologia quântica deve ser baseado numa teoria da gravidade quântica. Embora não haja ainda uma concordância sobre qual seria o formalismo correto, aqui utilizaremos a cosmologia quântica canônica (geometrodinâmica quântica). A teoria canônica requer que o espaço-tempo quadridimensional da relatividade geral seja decomposto em superfícies tridimensionais do tipo espaço e curvas temporais para que a teoria clássica seja posta na forma hamiltoniana. Então, efetuando as prescrições quânticas usuais e aplicando o procedimento de quantização de Dirac, é construída uma equação análoga à de Schrödinger, a equação de Wheeler-DeWitt, a qual fornece a dinâmica da teoria quântica e determina o objeto central da cosmologia quântica: a função de onda do universo.

A cosmologia quântica começou em 1967 com o trabalho pioneiro de Bryce DeWitt (1923-2004) [27]. Ele aplicou o procedimento de quantização a um universo de Friedmann fechado preenchido com matéria, esta última descrita fenomenologicamente, isto é, não em termos de campos fundamentais. Este foi o primeiro modelo de mini-superespaço da cosmologia quântica. Mini-superespaço é o nome genérico para a coleção de geometrias com apenas um número finito de graus de liberdade, e tem o prefixo “mini” porque o espaço de configuração da relatividade geral, de dimensão infinita, é chamado de superespaço. No seu trabalho seminal DeWitt abordou um importante problema em cosmologia quântica: a singularidade presente na teoria clássica pode ser evitada na cosmologia quântica?

Esta dissertação está organizada como passamos a descrever. O formalismo necessário para a realização do nosso estudo será desenvolvido no capítulo 2, que trata de uma revisão do formalismo ADM [28] e do formalismo de Schutz [29] para fluidos perfeitos relativísticos. A parte original desta dissertação está contida no capítulo 3, onde empregamos o formalismo desenvolvido no capítulo anterior e investigamos algumas características quânticas do modelo de Friedmann-Robertson-Walker espacialmente plano preenchido homogeneamente com um fluido perfeito com equação de estado $p = w\rho$, com $w = 0$, e uma constante cosmológica. De posse da hamiltoniana, efetuamos o procedimento de quantização canônica obtendo uma equação semelhante à equação de Schrödinger, a equação de Wheeler-DeWitt, a qual determina a função de onda do universo como um todo e nos possibilita estudar sua dinâmica. Quantizamos este modelo de duas formas diferentes. Numa delas não chegamos a resultados conclusivos por não termos conseguido obter soluções fisicamente aceitáveis da equação de Wheeler-DeWitt. Na outra, obtivemos um universo que evolui de forma diferente do universo descrito pelo modelo clássico. Diferentemente do modelo clássico, o modelo quântico não possui uma singularidade inicial e, além do mais, o modelo quântico sugere que uma única constante cosmológica positiva pode dar conta de uma fase

inflacionária nos primórdios do universo e uma expansão acelerada do universo observada hoje. No capítulo 4 são apresentadas as considerações finais e nos apêndices são apresentados em uma abordagem introdutória conceitos cruciais que foram mencionados ao longo do texto, com o intuito de dar suporte para o modelo de mini-superespaço construído.

Capítulo 2

Formulação Canônica da Relatividade Geral

Há várias razões para buscar uma teoria quântica da gravidade. As duas maiores vêm da teoria quântica de campos e da teoria da relatividade geral. Da perspectiva da teoria quântica de campos, uma unificação de todas as interações fundamentais continua sendo um objetivo atraente; da perspectiva da teoria da relatividade geral, uma quantização da gravidade é necessária uma vez que a relatividade geral prevê a sua própria ruptura; isto ocorre quando quantidades definidas dentro da própria teoria divergem. O mais famoso exemplo de tal divergência é a que ocorre no começo do nosso universo, chamada de singularidade do Big-Bang. Neste contexto, a gravidade quântica seria uma teoria quântica consistente do campo gravitacional. O ponto de partida para a construção dessa teoria pode ser a quantização da teoria de Einstein da relatividade geral. Aqui utilizaremos a abordagem canônica na quantização (geometrodinâmica quântica) da relatividade geral que começa com uma divisão do espaço-tempo em espaço e tempo, perdendo assim a covariância geral explícita. Um formalismo hamiltoniano para a teoria é desenvolvido no qual a métrica quadridimensional agora é interpretada como uma evolução da métrica tridimensional no tempo.

No estudo do modelo cosmológico quântico, adotaremos para o conteúdo material do universo uma descrição simples de fluido perfeito relativístico, embora saibamos que a princípio o conteúdo material do universo deva ser descrito por campos fundamentais devido ao caráter quântico do problema [30]. A vantagem dessa abordagem fenomenológica é que soluções exatas podem ser construídas para a equação fundamental da teoria no caso de um fluido com equação de estado $p = w\rho$ [31]. Portanto, neste capítulo, descreveremos o formalismo hamiltoniano tanto para a relatividade geral quanto para o fluido perfeito relativístico que modela o conteúdo material

do universo. Desta maneira, o processo de quantização no próximo capítulo será imediato.

2.1 As Variáveis ADM

Para pôr a teoria da relatividade geral na forma hamiltoniana utilizaremos o formalismo de R. Arnowitt, S. Deser e C. W. Misner [28], o formalismo ADM, desenvolvido nas décadas de 1950 e 1960. Nesse formalismo, os verdadeiros graus de liberdade do campo gravitacional residem em hipersuperfícies espaciais que folheiam o espaço-tempo, e a dinâmica do campo gravitacional pode ser vista como a evolução no tempo dessas hipersuperfícies.

O formalismo hamiltoniano começa com a escolha de coordenadas generalizadas e a definição de seus momentos conjugados. Uma vez que a definição de momento canonicamente conjugado a uma coordenada requer um parâmetro temporal ($p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$), devemos pôr a relatividade geral numa forma tal que a teoria apresente um parâmetro que descreva a evolução temporal. Isto é alcançado ao se decompor o espaço-tempo quadridimensional \mathcal{M} em um conjunto de hipersuperfícies tridimensionais Σ_t , $t = \text{constante}$. Uma condição necessária é que \mathcal{M} seja globalmente hiperbólico, isto é, possua uma superfície de Cauchy Σ (num instante de tempo) na qual dados iniciais podem ser descritos para determinar unicamente todo o espaço-tempo¹. Em tal caso, o problema de valor inicial está bem definido, e a forma hamiltoniana da relatividade pode ser construída.

Começamos então fazendo uma foliação do espaço-tempo em superfícies de Cauchy Σ_t , com t denotando a função tempo global (decomposição 3+1). O correspondente campo vetorial (fluxo do tempo) é denotado por t^μ , obedecendo a

$$t^\mu \nabla_\mu t = 1. \quad (2.1)$$

As normais às hipersuperfícies são dadas pelas 1-formas $n = n_\mu dx^\mu$. A coordenada t parametriza a hipersuperfície de tal modo que

$$n_\mu = -(g^{00})^{-1/2} \delta_\mu^0, \quad (2.2)$$

donde $g_{\mu\nu} n^\mu n^\nu = -1$. A métrica do espaço-tempo $g_{\mu\nu}$ induz uma métrica tridimensional sobre cada Σ_t dada por

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu. \quad (2.3)$$

¹Para mais detalhes veja [32], onde argumenta-se que qualquer espaço-tempo fisicamente aceitável é globalmente hiperbólico.

De fato $h_{\mu\nu}$ é um objeto que age como um projetor sobre Σ_t : $h_{\mu\nu}n^\nu = 0$, $h_{\mu\nu}h^{\nu\rho} = h_\mu{}^\rho$ e $h^0{}_\mu = h^{\mu 0} = 0$. Podemos decompor t^μ em suas componentes paralela e perpendicular a Σ_t ,

$$t^\mu = Nn^\mu + N^\mu, \quad (2.4)$$

onde N é a função lapso e N^μ é o vetor deslocamento. Escrevendo (2.4) em função de n^μ podemos escrever (2.3) como

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &= h^{\mu\nu} - n^\mu n^\nu \\ &= h^{\mu\nu} - \frac{1}{N^2}(t^\mu - N^\mu)(t^\nu - N^\nu). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Uma vez que $x^0 = t$, segue de (2.1) que $t^\mu = \delta_0^\mu$. Utilizando este fato juntamente com $h^0{}_\mu = h^{\mu 0} = 0$ podemos escrever as componentes de $g^{\mu\nu}$:

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{N^j}{N^2} \\ \frac{N^i}{N^2} & h^{ij} - \frac{N^i N^j}{N^2} \end{pmatrix}.$$

Invertendo $(g^{\mu\nu})$ obtemos

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -N^2 + N_k N^k & N^j \\ N^j & h_{ij} \end{pmatrix},$$

onde a métrica espacial induzida é usada para baixar e levantar índices espaciais: $N_k N^k = h_{jk} N^j N^k = h^{jk} N_j N^k$ e $h_{ij} h^{jk} = \delta_i^k$. A interpretação geométrica da função lapso e do vetor deslocamento está representada na figura (2.1). O vetor t^μ aponta de um ponto com coordenada (espacial) x^a sobre $t = \text{constante}$ para um ponto com a mesma coordenada sobre a hipersuperfície vizinha $t + dt = \text{constante}$. A distância puramente temporal entre as hipersuperfícies é dada por N , portanto N é chamada de função lapso. Similarmente, N^i é um vetor que aponta de um ponto com coordenada x^a sobre Σ_t para o ponto sobre a mesma hipersuperfície cujo vetor normal é erguido para alcançar o ponto de mesma coordenada x^a sobre Σ_{t+dt} . N^i é o chamado vetor deslocamento. Isto quer dizer que as coordenadas espaciais são co-móveis se $N^i = 0$. Nestas coordenadas é imediato que

$$\sqrt{-g} d^4x = N\sqrt{h} dt d^3x, \quad (2.6)$$

onde $g = \det(g_{\mu\nu})$ e $h = \det(h_{ij})$.

Parametricamente, a folheação do espaço-tempo é dada por

$$X^\mu = x^\mu(t, \xi^i), \quad (2.7)$$

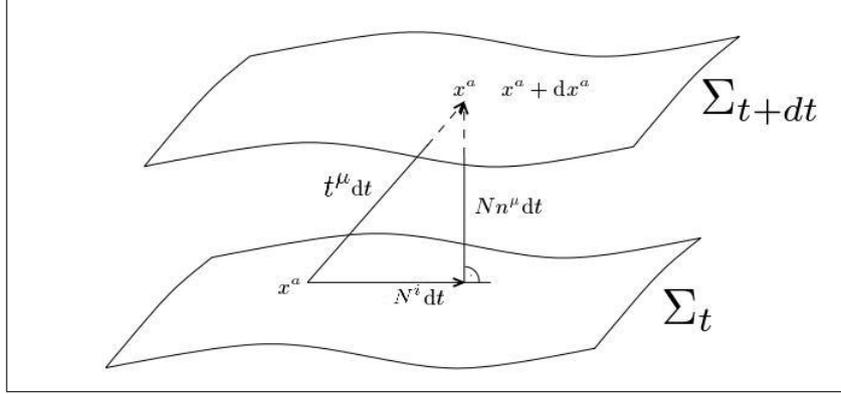


Figura 2.1: Diagrama do espaço-tempo ilustrando a decomposição 3+1 e o significado geométrico da função lapso e do vetor deslocamento.

onde X^μ são as coordenadas de \mathcal{M} e t rotula hipersuperfícies distintas. O elemento de linha sobre uma dada hipersuperfície Σ_t é dado por

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu}(X^\mu) dx^\mu dx^\nu \\ &= \left[g_{\mu\nu}(x^\mu) \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^j} \right] d\xi^i d\xi^j \\ &= h_{ij} d\xi^i d\xi^j, \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde

$$h_{ij} = g_{\mu\nu}(x^\mu) \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^j}. \quad (2.9)$$

Portanto, a métrica $g_{\mu\nu}$ de \mathcal{M} induz uma métrica h_{ij} em Σ_t se o elemento de linha é restrito a Σ_t . A métrica intrínseca à hipersuperfície, h_{ij} , é por isso chamada de métrica induzida.

O espaço-tempo globalmente hiperbólico \mathcal{M} pode ser interpretado como a evolução da métrica tridimensional h_{ij} sobre Σ_t , isto é, uma evolução de $h_{ij}(t_0)$ para $h_{ij}(t)$. Assim, toda a informação sobre o campo gravitacional é transferida para as chamadas variáveis ADM: N , N^i e h_{ij} . Ao realizarmos a foliação, o espaço-tempo desaparece restando apenas o espaço de configuração, que é o espaço de todas geometrias tridimensionais (chamado de superespaço por John Wheeler).

Finalizando esta seção, vamos considerar a decomposição

$$n_{\mu;\nu} = n_{\mu;\lambda} (h^\lambda{}_\nu - n^\lambda n_\nu) \quad (2.10)$$

da derivada covariante do vetor normal para definir o tensor de curvatura extrínseca como

$$K_{\mu\nu} = -n_{\mu;\lambda} h^\lambda{}_\nu$$

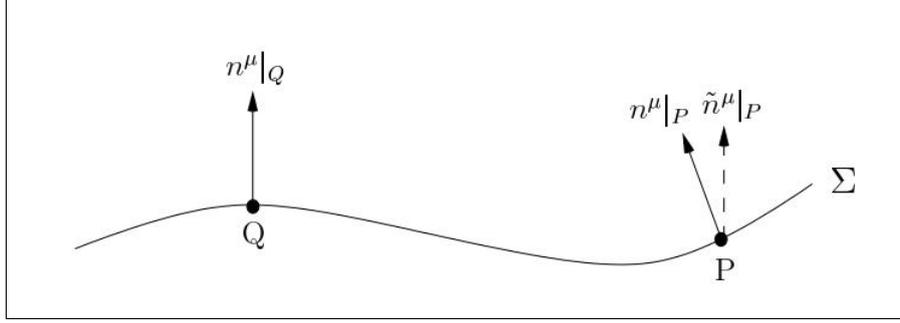


Figura 2.2: Diagrama do espaço-tempo ilustrando o significado da curvatura extrínseca.

$$= -n_{\mu;\nu} - n_{\mu;\lambda}n^\lambda n_\nu. \quad (2.11)$$

Como $K_{\mu\nu}n^\mu = 0 = K_{\mu\nu}n^\nu$, este campo tensorial é uma quantidade puramente espacial e pode ser escrito como K_{ij} . Pode-se demonstrar que este campo tensorial é simétrico, $K_{\mu\nu} = K_{\nu\mu}$. A interpretação geométrica do tensor $K_{\mu\nu}$ está representada na figura (2.2). Considere o vetor normal em dois pontos P e Q de uma hipersuperfície. Se \tilde{n}^μ é o vetor em P resultante de transportar paralelamente o vetor n^μ ao longo de uma geodésica de Q para P, a diferença entre n^μ e \tilde{n}^μ é uma medida da curvatura de Σ_t no espaço-tempo em que está imersa. Assim, $K_{\mu\nu}$ mede o quanto uma hipersuperfície se curva em relação ao espaço de dimensão maior em que está imersa.

Em termos da função lapso e do vetor deslocamento, a curvatura extrínseca pode ser escrita como

$$K_{ij} = \frac{1}{2N}(N_{i|j} + N_{j|i} - \dot{h}_{ij}), \quad (2.12)$$

onde o ponto denota a derivada parcial em relação a t e

$$N_{i|j} = N_{i,j} - {}^3\Gamma_{ji}^k N_k \quad (2.13)$$

é a derivada covariante induzida sobre a hipersuperfície.

2.2 Formulação Hamiltoniana da Relatividade Geral

A relatividade geral é uma teoria de campo clássica na qual o campo dinâmico é o tensor métrico $g_{\mu\nu}$. Assim, podemos obter as equações da relatividade geral através de um princípio variacional com a ação dada por

$$S = \int d^4x \mathcal{L}, \quad (2.14)$$

onde

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}(R - 2\Lambda). \quad (2.15)$$

O escalar de curvatura pode ser escrito em termos de grandezas relativas às hipersuperfícies espaciais como [26]

$$R = {}^3R + K_{ij}K^{ij} - K^2 - 2\nabla_\mu(n^\nu\nabla_\nu n^\mu - n^\mu\nabla_\nu n^\nu), \quad (2.16)$$

onde 3R é a curvatura escalar intrínseca da hipersuperfície espacial Σ_t . De posse das variáveis ADM e das demais definições adotadas, é possível expressar a lagrangiana \mathcal{L} em termos destas novas variáveis. Utilizando (2.6) e (2.16) temos que

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_g - 2N\sqrt{h}\nabla_\mu(n^\nu\nabla_\nu n^\mu - n^\mu\nabla_\nu n^\nu), \quad (2.17)$$

onde

$$\mathcal{L}_g = N\sqrt{h}({}^3R + K_{ij}K^{ij} - K^2 - 2\Lambda) \quad (2.18)$$

é a densidade lagrangiana usual da geometrodinâmica. Como \mathcal{L} e \mathcal{L}_g diferem apenas por uma quadrivergência, elas dão origem às mesmas equações de movimento, o que nos permite adotar \mathcal{L}_g como base de nosso princípio variacional. Introduzimos aqui a métrica de DeWitt, também denominada supermétrica, cuja forma é

$$G_{ijkl} = \frac{1}{2\sqrt{h}}(h_{ik}h_{jl} + h_{il}h_{jk} - h_{ij}h_{kl}). \quad (2.19)$$

Em termos da inversa

$$G^{ijkl} = \sqrt{h}\left[\frac{1}{2}(h^{ik}h^{jl} + h^{il}h^{jk}) - h^{ij}h^{kl}\right], \quad (2.20)$$

podemos escrever (2.18) como

$$\mathcal{L}_g = N[G^{ijkl}K_{ij}K_{kl} + \sqrt{h}({}^3R - 2\Lambda)]. \quad (2.21)$$

Os momentos canonicamente conjugados a N , N_i e h_{ij} , denotados por π^0 , π^i e π^{ij} , respectivamente, são dados por

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \dot{N}} = 0, \quad (2.22)$$

$$\pi^i = \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \dot{N}_i} = 0, \quad (2.23)$$

e

$$\begin{aligned}
\pi^{ij} &= \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \dot{h}_{ij}} \\
&= 2NG^{klmn} K_{kl} \frac{\partial K_{mn}}{\partial \dot{h}_{ij}} \\
&= -G^{ijkl} K_{kl},
\end{aligned} \tag{2.24}$$

onde usamos a equação (2.12). As duas primeiras equações acima são vínculos primários (vide Apêndice A) e expressam o fato de a lagrangiana (2.21) ser independente das “velocidades” \dot{N} e \dot{N}_i . Estas também não aparecem na hamiltoniana gravitacional, que é dada por

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_g &= \pi^0 \dot{N} + \pi^i \dot{N}_i + \pi^{ij} \dot{h}_{ij} - \mathcal{L}_g \\
&= -G^{ijkl} K_{kl} (N_{i|j} + N_{j|i} - 2NK_{ij}) - N[G^{ijkl} K_{ij} K_{kl} + \sqrt{h}(^3R - 2\Lambda)] \\
&= N[G^{ijkl} K_{ij} K_{kl} - \sqrt{h}(^3R - 2\Lambda)] - 2\pi^{ij} N_{i|j} \\
&= N[G_{ijkl} \pi^{ij} \pi^{kl} - \sqrt{h}(^3R - 2\Lambda)] + N_i (2\pi^{ij})_{|j} - (2N_i \pi^{ij})_{|j},
\end{aligned} \tag{2.25}$$

onde usamos (2.12) e o fato de que $G_{ijkl} G^{klmn} = \delta_{ij}^{mn}$ para inverter (2.24). Desprezando a divergência no último termo de (2.25) temos

$$\mathcal{H}_g = N\mathcal{H}_g^0 + N_i \mathcal{H}_g^i, \tag{2.26}$$

onde

$$\mathcal{H}_g^0 = G_{ijkl} \pi^{ij} \pi^{kl} - \sqrt{h}(^3R - 2\Lambda) \tag{2.27}$$

e

$$\mathcal{H}_g^i = 2\pi^{ij}_{|j} \tag{2.28}$$

Agora, uma vez que os vínculos primários devem ser mantidos em qualquer instante, derivadas temporais de π^0 e π^i devem anular-se por (2.22) e (2.23). Isto implica $\dot{\pi}^0 = \{\pi^0, \mathcal{H}_g^0\} = 0$ e $\dot{\pi}^i = \{\pi^i, \mathcal{H}_g^i\} = 0$, de modo que

$$\mathcal{H}_g^0 = 0 \tag{2.29}$$

e

$$\mathcal{H}_g^i = 0. \tag{2.30}$$

As equações (2.29) e (2.30) são os chamados vínculos secundários (Apêndice 1). A primeira chamaremos de vínculo hamiltoniano, o qual é responsável por gerar a dinâmica da geometria tridimensional. Tal caráter dinâmico deste vínculo resulta da estrutura “energia cinética” mais “energia potencial”, com o “quadrado” do momento π^{ij} desempenhando o papel de energia

cinética e o negativo da curvatura intrínseca desempenhando o papel da energia potencial. Por outro lado, a segunda equação é chamada de vínculos do momentos e é responsável por gerar os difeomorfismos² da métrica tridimensional h_{ij} . Ambos desempenharão um papel importante no procedimento de quantização.

2.3 Fluido Relativístico: Representação Via Potenciais de Velocidade

A partir de agora nossa preocupação será a de obter uma formulação hamiltoniana para o fluido perfeito relativístico. Para descrever o fluido utilizaremos o formalismo desenvolvido por Schutz [29] no início da década de 1970 para um fluido perfeito interagindo com o campo gravitacional. Nesse formalismo, a quadrivelocidade é expressa em termos de seis potenciais de velocidade, cada um dos quais obedece à sua própria equação de movimento. Essa representação permite uma nova formulação da hidrodinâmica relativística, na qual os potenciais de velocidade obedecem a equações de movimento de primeira ordem e a variação temporal da quadrivelocidade é interpretada no sentido euleriano³. Tanto as equações de campo de Einstein como as equações de movimento, que são completamente equivalente àquelas obtidas do tensor de energia e momento, podem ser obtidas a partir de um princípio variacional. Uma das vantagens desse formalismo de potenciais de velocidade é que graus de liberdade dinâmicos são atribuídos ao fluido, o que, como veremos, permite associar uma variável tempo a um grau de liberdade do fluido⁴. Antes de descrever a hidrodinâmica relativística em termos de potenciais de velocidade, revisemos a versão padrão.

Considere um fluido perfeito de uma componente composto por bárions. Embora a massa de um grupo de bárions não seja conservada, visto que estes podem sofrer transmutação, o número N de bárions permanece constante. Assim sendo, define-se a massa de repouso conservada de uma amostra de matéria contendo N bárions como $m_H N$, onde m_H é a massa do átomo de

²A relatividade geral é uma teoria invariante por difeomorfismos (isto é, invariante por transformações gerais de coordenadas). Isto implica que os pontos do espaço-tempo não podem ser dotados de qualquer significado. Este é o motivo pelo qual no capítulo 3, ao realizarmos a quantização, encontraremos um funcional de onda que depende somente dos graus de liberdade do sistema (a geometria do espaço e os campos de matéria) e não das coordenadas utilizadas para descrever o espaço-tempo.

³Os adjetivos lagrangiano e euleriano se referem, respectivamente, a observadores comóveis com o fluido ou fixos em relação a algum referencial arbitrário através do qual o fluido escoia.

⁴Falaremos melhor sobre isto no final da seção (3.1).

hidrogênio em seu estado fundamental. A diferença entre a massa total M e $m_H N$ é chamada energia interna U . Denotemos por ρ_0 a densidade de massa de repouso no estado fundamental e por $u = U/m_H N$ a energia interna específica. Com isso,

$$U = M - m_H N. \quad (2.31)$$

Dividindo por $m_H N$ e pelo volume V da amostra que contém os N bárions, obtemos

$$\frac{M}{V} = \frac{m_H N}{V} (1 + u). \quad (2.32)$$

Aqui $\frac{M}{V}$ é a densidade de massa do fluido, enquanto que $\frac{m_H N}{V}$ é a densidade de massa de repouso denotada por ρ_0 . Logo, a densidade total de matéria é dada por

$$\rho = \rho_0 (1 + u). \quad (2.33)$$

Suponha que o fluido seja caracterizado por uma equação de estado da forma $p = p(\rho_0, u)$. Pela primeira lei da termodinâmica, a quantidade de energia adicionada ao fluido é dada por

$$dQ = dU + pdV. \quad (2.34)$$

Dividindo por $m_H N$ obtemos

$$dq = du + pd\left(\frac{1}{\rho_0}\right), \quad (2.35)$$

onde dq é a quantidade de energia por unidade de massa de repouso adicionada ao fluido em um processo quase-estático. Como a equação de estado depende de duas variáveis, o teorema de Pfaff⁵ assegura a existência das funções entropia específica e temperatura, $S(\rho_0, u)$ e $T(\rho_0, u)$ respectivamente, tais que:

$$du + pd\left(\frac{1}{\rho_0}\right) = Tds. \quad (2.36)$$

Define-se a massa inercial específica como

$$\mu = \frac{\rho + p}{\rho_0} = 1 + u + \frac{p}{\rho_0}, \quad (2.37)$$

onde a quantidade $\rho + p$ faz o papel de massa inercial por unidade de volume num fluido perfeito. Com isso, é possível utilizar $d\mu$ para eliminar du em (2.36), o que permite escrever

$$dp = \rho_0(d\mu - Tds), \quad (2.38)$$

⁵Em sua forma mais simples, o teorema de Pfaff afirma que uma 1-forma diferencial a duas variáveis sempre possui um fator integrante. No apêndice A do primeiro artigo da referência [29] podem ser encontrados mais detalhes.

onde é possível observar que ρ_0 e u podem ser expressos como funções de μ e s , de tal modo que a equação de estado assuma a forma $p = p(\mu, s)$.

O fluido perfeito relativístico de uma componente é definido por uma equação de estado do tipo $p = p(\mu, s)$ e pelo tensor de energia-momento

$$\begin{aligned} T^{\alpha\beta} &= (\rho + p)u^\alpha u^\beta + pg^{\alpha\beta} \\ &= \rho_0 \mu u^\alpha u^\beta + pg^{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Por se tratar de um fluido perfeito, o tensor de energia-momento não apresenta viscosidade ou condução de calor e sua forma num referencial comóvel é $T^{\alpha\beta} = \text{diag}(\rho, p, p, p)$. A condição de conservação do número de bárions reescrita em termos de ρ_0 fica sendo

$$(\rho_0 u^\alpha)_{;\alpha} = 0. \quad (2.40)$$

Além disso, a condição de normalização da quadrivelocidade $u^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\tau}$ é

$$u^\alpha u_\alpha = -1, \quad (2.41)$$

o que conduz a

$$(u^\alpha u_\alpha)_{;\sigma} = 0. \quad (2.42)$$

Sob a exigência de que o tensor de energia-momento tenha divergência nula, isto é,

$$T^{\alpha\nu}_{;\nu} = 0, \quad (2.43)$$

as equações de movimento podem ser expressas na forma de leis de conservação. As equações (2.40) e (2.41), juntamente com a conservação do tensor de energia-momento (2.43), determinam completamente o movimento de um fluido cuja equação de estado é conhecida.

O significado físico das quatro equações (2.43) torna-se mais claro se separarmos suas componentes paralela e perpendicular à quadrivelocidade. Para a componente paralela escreve-se

$$u_\alpha T^{\alpha\nu}_{;\nu} = 0. \quad (2.44)$$

Com o uso das equações (2.40), (2.41) e (2.42) chega-se a

$$u^\nu p_\nu - \rho_0 u^\nu \mu_{,\nu} = 0, \quad (2.45)$$

e utilizando a equação (2.38), obtém-se

$$\rho_0 T u^\nu s_{,\nu} = 0, \quad (2.46)$$

o que nos diz que o movimento de um fluido perfeito conserva a entropia por bárion. Além do mais, uma vez que $dq = Tds$, confirmamos que não há fluxo de calor em qualquer elemento do fluido durante seu movimento.

Agora, para construir as três equações de movimento independentes perpendiculares a u^μ , introduzimos o tensor

$$P^\lambda{}_\nu = \delta^\lambda{}_\nu + u^\lambda u_\nu, \quad (2.47)$$

o qual projeta tensores perpendicularmente a u^μ . Aplicando (2.47) em (2.43) e usando as equações (2.40), (2.41) e (2.42) obtemos

$$-P^{\lambda\nu} p_{,\nu} = \mu\rho_0 u^\lambda{}_{;\nu} u^\nu. \quad (2.48)$$

Em um referencial inercial localmente co-móvel, a parte espacial de (2.48) torna-se

$$-\nabla p = (\rho + p) \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (2.49)$$

A equação acima é a lei de força usual, o que justifica chamar $(\rho + p)$ de massa inercial por unidade de volume.

As equações de movimento obedecidas por um fluido perfeito, equação (2.43), são usualmente interpretadas em um sentido lagrangiano: a quadrivelocidade é considerada como a taxa de variação em relação ao tempo próprio da posição da partícula. Assim, a quadrivelocidade é vista como uma pequena seta carregada pelas partículas ao longo de seu movimento e somente no limite do contínuo podem ser consideradas como um campo vetorial, uma vez que o fluido é composto por partículas discretas muito próximas umas das outras. Por outro lado, a quadrivelocidade pode ser considerada como um campo vetorial sobre todo o espaço-tempo e, deste modo, pode ser representada em termos de campos escalares e seus gradientes. Enquanto as partículas movem-se através do espaço, os escalares em um dado ponto simplesmente mudam sua magnitude com o tempo. Esta representação por potenciais de velocidade conduz a uma interpretação euleriana da dinâmica do fluido.

De acordo com o teorema de Pfaff, são suficientes quatro potenciais para descrever a quadrivelocidade:

$$u_\lambda = ab_{,\lambda} + cd_{,\lambda}. \quad (2.50)$$

O formalismo de Schutz introduz dois novos potenciais, cada qual com sua equação de movimento. Sendo assim, a quadrivelocidade assume a forma

$$u_\lambda = \frac{1}{\mu} (\phi_{,\lambda} + \alpha\beta_{,\lambda} + \theta s_{,\lambda}). \quad (2.51)$$

Os potenciais μ e s são a entalpia específica e a entropia específica, respectivamente. Os demais potenciais α , β , θ e ϕ não têm uma interpretação física clara.

A condição de normalização da quadrivelocidade (2.41) implica uma dependência funcional de μ em relação às variáveis independentes do princípio variacional, ϕ , α , β , θ , s e $g^{\sigma\lambda}$:

$$\mu^2 = -g^{\sigma\lambda}(\phi_{,\sigma} + \alpha\beta_{,\sigma} + \theta s_{,\sigma})(\phi_{,\lambda} + \alpha\beta_{,\lambda} + \theta s_{,\lambda}). \quad (2.52)$$

Ou, de uma forma mais concisa,

$$\mu^2 = -v^\nu v_\nu, \quad (2.53)$$

onde v^ν é definido como

$$\begin{aligned} v_\nu &= \mu u_\nu \\ &= \phi_{,\nu} + \alpha\beta_{,\nu} + \theta s_{,\nu}. \end{aligned} \quad (2.54)$$

As equações dinâmicas nesta representação serão obtidas na próxima seção.

2.4 Teoria Hamiltoniana de um Fluido Perfeito Relativístico

Para que a formulação da hidrodinâmica relativística em termos da quadrivelocidade (2.51) seja interessante, é necessário que as equações de evolução possam ser obtidas com a utilização de uma ação apropriada. Como dito anteriormente, o formalismo de Schutz está baseado num princípio variacional cuja densidade lagrangiana é especialmente simples:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g}(R + p), \quad (2.55)$$

onde R é o escalar de curvatura do espaço-tempo, p é a pressão do fluido e g é o determinante da métrica. Variando esta ação com relação aos potenciais de velocidade obtemos as equações eulerianas de movimento (2.65). Variando esta ação com relação ao tensor métrico obtemos as equações de campo de Einstein tendo como fonte um fluido perfeito.

Para calcular variações de primeira ordem na pressão usamos a primeira lei da termodinâmica na forma da equação (2.38),

$$\delta p = \rho_0 \delta \mu - \rho_0 T \delta s, \quad (2.56)$$

onde $\delta\mu$ é calculado a partir da equação (2.53). Com isso, vamos primeiramente variar a equação (2.55) com relação ao tensor métrico $g^{\sigma\lambda}$ obtendo

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^4x (\sqrt{-g} G_{\sigma\lambda} \delta g^{\sigma\lambda} + \delta\sqrt{-g} p + \sqrt{-g} \delta p) \\ &= \int d^4x \sqrt{-g} (G_{\sigma\lambda} \delta g^{\sigma\lambda} - \frac{1}{2} g_{\sigma\lambda} \delta g^{\sigma\lambda} p + \rho_0 \delta\mu),\end{aligned}\quad (2.57)$$

onde usamos (2.56) e o resultado bem conhecido

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\sigma\lambda} \delta g^{\sigma\lambda}.\quad (2.58)$$

Por (2.53) temos

$$\begin{aligned}2\mu\delta\mu &= -v_\sigma v_\lambda \delta g^{\sigma\lambda} \\ \Rightarrow \rho_0 \delta\mu &= -\frac{1}{2} \rho_0 \mu u_\sigma u_\lambda \delta g^{\sigma\lambda}.\end{aligned}\quad (2.59)$$

Obtemos, assim, para a variação nula da ação

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\sigma\lambda} [G_{\sigma\lambda} - \frac{1}{2} (\rho_0 \mu u_\sigma u_\lambda + p g_{\sigma\lambda})] = 0.\quad (2.60)$$

Levando em conta (2.39) resulta

$$G_{\sigma\lambda} = \frac{1}{2} T_{\sigma\lambda},\quad (2.61)$$

que são as equações de campo de Einstein tendo um fluido perfeito como fonte da gravitação⁶. Substituindo as derivadas ordinárias por derivadas covariantes em (2.54) e denotando os potenciais escalares genericamente por ψ , de modo que $v_\nu = v_\nu(\psi, \nabla_\lambda \psi)$, por (2.53) temos que

$$\begin{aligned}2\mu\delta\mu &= -2v^\nu \delta v_\nu \\ &= -2v^\nu \left[\frac{\partial v_\nu}{\partial \psi} \delta\psi + \frac{\partial v_\nu}{\partial \nabla_\lambda \psi} \delta(\nabla_\lambda \psi) \right].\end{aligned}\quad (2.62)$$

Multiplicando ambos os membros desta última equação por $\rho_0/2\mu$, usando (2.54) e o fato de a derivada covariante comutar com a variação δ , temos

$$\begin{aligned}\rho_0 \delta\mu &= -\rho_0 u^\nu \frac{\partial v_\nu}{\partial \psi} \delta\psi - \rho_0 u^\nu \frac{\partial v_\nu}{\partial \nabla_\lambda \psi} \nabla_\lambda (\delta\psi) \\ &= -\rho_0 u^\nu \frac{\partial v_\nu}{\partial \psi} \delta\psi - \nabla_\lambda \left(\rho_0 u^\nu \frac{\partial v_\nu}{\partial \nabla_\lambda \psi} \delta\psi \right) \\ &\quad + \nabla_\lambda \left(\rho_0 u^\nu \frac{\partial v_\nu}{\partial \nabla_\lambda \psi} \right) \delta\psi.\end{aligned}\quad (2.63)$$

⁶Poderíamos aqui ter considerado o termo da constante cosmológica na ação (2.55) obtendo assim as equações de campo de Einstein com a constante cosmológica, mas isto não foi feito para preservar a forma original da ação de Schutz encontrada em [29].

Sendo assim, a variação nula da ação é dada por

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[-\rho_0 u^\nu \frac{\partial v_\nu}{\partial \psi} \delta \psi + \nabla_\lambda \left(\rho_0 u^\nu \frac{\partial v_\nu}{\partial \nabla_\lambda \psi} \right) \delta \psi - \rho_0 T \delta s \right] = 0, \quad (2.64)$$

onde descartamos os termos de superfície. Desta equação decorre diretamente que variações com relação aos potenciais escalares independentes ϕ , θ , s , α e β dão, respectivamente, as equações

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & (\rho_0 u^\mu)_{;\mu} = 0; \\ \text{(ii)} \quad & u^\mu s_{,\mu} = 0; \\ \text{(iii)} \quad & u^\mu \theta_{,\mu} = T; \\ \text{(iv)} \quad & u^\mu \alpha_{,\mu} = 0; \\ \text{(v)} \quad & u^\mu \beta_{,\mu} = 0. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Utilizando a condição de normalização juntamente com (ii) e (v) obtemos

$$\text{(vi)} \quad u^\mu \phi_{,\mu} = -\mu. \quad (2.66)$$

Isto completa a dedução das equações de campo pelo princípio variacional de Schutz.

Para finalizar o capítulo, falta-nos obter a densidade hamiltoniana associada ao fluido perfeito. Pela equação (2.55) vemos que a densidade lagrangiana do fluido perfeito no formalismo de Schutz é dada por

$$\mathcal{L}_m = N\sqrt{h}p, \quad (2.67)$$

onde novamente utilizamos as variáveis ADM da seção (2.1) para escrever $\sqrt{-g}$ como $N\sqrt{h}$ e p é a pressão do fluido. Novamente, denotando os potenciais escalares ϕ , θ , s , α e β por ψ_a , os momentos canonicamente conjugados a ψ_a são obtidos da maneira tradicional

$$p^a \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \dot{\psi}_a} = N\sqrt{h} \frac{\partial p}{\partial \dot{\psi}_a}, \quad (2.68)$$

uma vez que nem N e nem h dependem dos potenciais. Logo,

$$\begin{aligned} p^a &= N\sqrt{h} \frac{\partial p}{\partial \dot{\psi}_a} \\ &= N\sqrt{h} \rho_0 \frac{\partial \mu}{\partial \dot{\psi}_a} \\ &= -N\sqrt{h} \rho_0 u^\nu \frac{\partial v_\nu}{\partial \dot{\psi}_a}, \end{aligned} \quad (2.69)$$

onde utilizamos (2.38) na passagem para a segunda linha e (2.53) na passagem para a terceira linha. Por (2.54) temos que:

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad p^\phi &= -N\sqrt{h}\rho_0 u^0; \\
 \text{(ii)} \quad p^\theta &= 0; \\
 \text{(iii)} \quad p^s &= \theta p^\phi; \\
 \text{(iv)} \quad p^\alpha &= 0; \\
 \text{(v)} \quad p^\beta &= \alpha p^\phi.
 \end{aligned} \tag{2.70}$$

Das equações (2.70) vemos que há apenas um momento independente, p^ϕ . Estamos agora em condições de obter a densidade hamiltoniana associada ao fluido perfeito:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_m &= p^a \dot{\psi}_a - \mathcal{L}_m \\
 &= p^\phi (\dot{\phi} + \alpha \dot{\beta} + \theta \dot{s}) - N\sqrt{h} p \\
 &= -N\sqrt{h} (\mu \rho_0 u^0 u_0 + p) \\
 &= N\mathcal{H}_m^0,
 \end{aligned} \tag{2.71}$$

onde na segunda linha usamos (2.54) e a primeira equação de (2.70). Da equação (2.39) segue que

$$\mathcal{H}_m^0 = -\sqrt{h} T^0_0. \tag{2.72}$$

O formalismo desenvolvido neste capítulo nos ajudará a obter no próximo capítulo, de maneira quase imediata, a equação de Wheeler-DeWitt, que fornece a função de onda do universo.

Capítulo 3

Dinâmica Quântica do Universo

Os teoremas de singularidade de Hawking e Penrose fornecem evidências de que a teoria da relatividade é incompleta: soluções da relatividade geral dependentes do tempo frequentemente possuem singularidades; alguns teoremas implicam a existência de singularidades cosmológicas como o Big Bang. Logo, singularidades parecem inevitáveis em modelos cosmológicos. O simples fato de a gravidade ser atrativa tende a aglomerar matéria, aumentando a curvatura e tendendo a gerar algum tipo de singularidade. A Relatividade Geral é uma teoria clássica enquanto que o universo é de natureza quântica, o que justifica a esperança de pesquisadores de que uma teoria quântica da relatividade geral consistente possa remover as singularidades da teoria clássica. Na falta de uma teoria consistente, a cosmologia quântica canônica, que estamos tratando aqui, surge como um esquema de quantização da gravidade que propõe resolver o problema da singularidade na teoria clássica. Neste capítulo empregaremos o formalismo estudado no capítulo anterior à quantização de um universo de Friedmann-Robertson-Walker espacialmente plano preenchido homogeneamente com um fluido perfeito com equação de estado $p = w\rho$ com $w = 0$. De posse da hamiltoniana efetuaresmos o procedimento de quantização canônica obtendo uma equação semelhante à equação de Schrödinger, a equação de Wheeler-DeWitt [27], a qual determina a função de onda do universo como um todo e nos possibilita estudar sua dinâmica.

3.1 A Equação Central da Cosmologia Quântica Canônica

Todo o formalismo desenvolvido no capítulo anterior nos permite tornar o procedimento de quantização imediato. Iremos representar o estado quântico do sistema por um funcional de onda $\Psi(h_{ij}, \psi_a)$ no superespaço, que descreve o espaço de todas as configurações possíveis (h_{ij}, ψ_a) na hipersuperfície espacial. A ação clássica é dada por

$$\mathcal{S} = \int dt \int d^3x (\pi^{ij} \dot{h}_{ij} + p^a \dot{\psi}_a - N\mathcal{H}^0 - N_i \mathcal{H}^i), \quad (3.1)$$

onde π^{ij} é o momento canonicamente conjugado a h_{ij} e p^a é o momento canonicamente conjugado aos campos de matéria ψ_a . Os vínculos secundários da hamiltoniana e dos momentos são dados por

$$\mathcal{H}^0 = 0 \quad (3.2)$$

e

$$\mathcal{H}^i = 0, \quad (3.3)$$

onde agora

$$\mathcal{H}^0 = \mathcal{H}_g^0 + \mathcal{H}_m^0 \quad (3.4)$$

e

$$\mathcal{H}^i = \mathcal{H}_g^i + \mathcal{H}_m^i, \quad (3.5)$$

sendo \mathcal{H}_g^0 dado por (2.27), \mathcal{H}_m^0 dado por (2.72), \mathcal{H}_g^i dado por (2.28) e $\mathcal{H}_m^i = 0$. A quantização é realizada de maneira análoga à da teoria quântica comum: coordenadas são promovidas a operadores de multiplicação e os momentos conjugados promovidos a operadores diferenciais:

$$\begin{aligned} \pi^0 \rightarrow \hat{\pi}^0 &= -i \frac{\delta}{\delta N}, \\ \pi^i \rightarrow \hat{\pi}^i &= -i \frac{\delta}{\delta N_i}, \\ \pi^{ij} \rightarrow \hat{\pi}^{ij} &= -i \frac{\delta}{\delta h_{ij}}, \\ p^a \rightarrow \hat{p}^a &= -i \frac{\delta}{\delta \psi_a}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Os vínculos primários e secundários, de primeira classe, são implementados como condições sobre os estados Ψ (vide Apêndice A). Os vínculos primários

$$\hat{\pi}^0 \Psi = -i \frac{\delta \Psi}{\delta N} = 0 \quad (3.7)$$

e

$$\hat{\pi}^i \Psi = -i \frac{\delta \Psi}{\delta N_i} = 0, \quad (3.8)$$

implicam que a função de onda só depende de h_{ij} e de ψ_a . O vínculo dos momentos

$$\hat{\mathcal{H}}^i \Psi = -2i \left(\frac{\delta \Psi}{\delta h_{ij}} \right)_{|i} = 0 \quad (3.9)$$

implica que a função de onda é invariante sob transformações de coordenadas espaciais, ou seja, Ψ só depende da geometria do espaço e não das coordenadas utilizadas para descrevê-la. Para o vínculo hamiltoniano encontramos

$$\hat{\mathcal{H}}^0 \Psi = - \left(G_{ijkl} \frac{\delta}{\delta h_{ij}} \frac{\delta}{\delta h_{kl}} + \sqrt{\hbar} {}^3R - 2\sqrt{\hbar} \Lambda + \sqrt{\hbar} \hat{T}^0_0 \right) \Psi = 0 \quad (3.10)$$

onde $\hat{T}^0_0 = \hat{T}^0_0(\psi_a, -i\delta/\delta\psi_a)$ é o operador associado a T^0_0 . Obtemos assim a equação de Wheeler-DeWitt, a qual é o coração de qualquer abordagem canônica para a cosmologia quântica. Esta equação diferencial funcional de segunda ordem descreve a evolução dinâmica do funcional de onda Ψ no superespaço.

A equação de Wheeler-DeWitt obtida acima, diferentemente da equação de Schrödinger (onde há uma derivada primeira com um fator imaginário) da mecânica quântica, carece de um parâmetro tempo externo. O que será feito posteriormente é utilizar a possibilidade que o formalismo de Schutz, que usaremos para descrever o conteúdo material do universo, nos oferece de atribuir a algum dos graus de liberdade do fluido perfeito o papel do tempo, transformando a equação de Wheeler-DeWitt numa legítima equação de Schrödinger dependente do tempo. Assim, o problema da ausência de uma variável ligada à evolução temporal em gravidade quântica [33] é resolvido atribuindo ao tempo um caráter puramente fenomenológico. Não são conhecidas soluções para a equação de Wheeler-DeWitt no superespaço. Este é um dos grandes problemas em gravidade quântica, que veremos como pode ser contornado no nosso caso.

3.2 O Modelo de Mini-superespaço

Embora não sejam conhecidas soluções para a equação de Wheeler-DeWitt no superespaço, em cosmologia quântica a situação é menos dramática: para estudar o universo podemos utilizar uma métrica que possui simetrias que possam simplificar consideravelmente o problema. Modelos cosmológicos obtidos desta maneira são chamados de modelos de mini-superespaço; utilizando métricas altamente simétricas, o número infinito de graus de liberdade

do superespaço é reduzido a um número finito. Uma forma simples de construir um modelo de mini-superespaço é considerar universos homogêneos e isotrópicos. Um mini-superespaço construído desta maneira envolve as seguintes variáveis: a métrica tridimensional h_{ij} homogênea descrita por um número finito de funções de t e x^i onde $i = 1, 2, 3$, e a função lapso homogênea $N(t)$, conduzindo ao elemento de linha

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + h_{ij}(x^i, t)dx^i dx^j. \quad (3.11)$$

Estamos interessados aqui no modelo de universo de Friedmann-Robertson-Walker espacialmente plano. Sendo assim, a métrica espacial será escrita como

$$h_{ij}(x^i, t)dx^i dx^j = a^2(t)\delta_{ij}dx^i dx^j, \quad (3.12)$$

onde $\delta_{ij} = \text{diag}(1, 1, 1)$ e $a(t)$ é o fator de escala. O que faremos nesta seção é construir a super-hamiltoniana (3.4) utilizando as simetrias do elemento de linha acima do universo de Friedmann-Robertson-Walker plano. Isto nos ajudará depois a obter soluções exatas da equação de Wheeler-DeWitt quando realizarmos a quantização.

Note que, devido a (3.12), o único grau de liberdade remanescente do campo gravitacional é o fator de escala a . O momento conjugado ao fator de escala é

$$\begin{aligned} p_a &= \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \dot{a}} \\ &= 2NG^{ijkl}K_{ij} \frac{\partial K_{kl}}{\partial \dot{a}} \\ &= -2N\pi^{kl} \frac{\partial K_{kl}}{\partial \dot{a}}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde usamos (2.21) e (2.24). Por (2.12), com a função deslocamento nula $N^i = 0$, temos

$$K_{kl} = -\frac{\dot{h}_{kl}}{2N} = -\frac{a\dot{a}\delta_{kl}}{N}, \quad (3.14)$$

onde usamos (3.12) para a métrica espacial induzida sobre a hipersuperfície Σ_t . Substituindo (3.14) em (3.13) e usando a identidade $p_a = (1/3)p_a\delta^{kl}\delta_{kl}$ temos

$$\frac{1}{3}p_a\delta^{kl}\delta_{kl} = 2a\pi^{kl}\delta_{kl} \quad (3.15)$$

donde¹

$$\pi^{kl} = \frac{p_a}{6a}\delta^{kl}. \quad (3.16)$$

¹Para chegarmos a esta conclusão estamos levando em conta o fato de sabermos previamente de (3.13) e (3.14) que π^{kl} é da forma $\pi^{kl} = f\delta_{kl}$.

Assim, a parte gravitacional da hamiltoniana \mathcal{H}^0 torna-se

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_g^0 &= G_{ijkl}\pi^{ij}\pi^{kl} - \sqrt{h} {}^3R + 2\sqrt{h}\Lambda \\ &= \frac{p_a^2}{72a} [2\delta_{ij}\delta^{ij} - (\delta_{ij}\delta^{ij})^2] + 2\sqrt{h}\Lambda \\ &= -\frac{1}{24a}p_a^2 + 2\Lambda a^3,\end{aligned}\tag{3.17}$$

onde usamos (2.19), (3.12), (3.16) e o fato de que ${}^3R = 0$ para um universo espacialmente plano.

A equação (2.35) para um fluido com equação de estado $p = w\rho$ com $\delta q = Tds$ e (2.33) torna-se

$$\begin{aligned}Tds &= d\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) + w\rho d\left(\frac{1}{\rho_0}\right) \\ &= \frac{\rho}{\rho_0}d[\ln \frac{\rho}{\rho_0} - w \ln \rho_0],\end{aligned}\tag{3.18}$$

donde

$$T = \frac{\rho}{\rho_0}, \quad s = \ln \frac{\rho}{\rho_0} - w \ln \rho_0.\tag{3.19}$$

Estamos modelando o conteúdo material de nosso universo por um fluido perfeito. Deve ser claro que se o fluido perfeito, que é isotrópico em algum referencial, dá origem a uma métrica isotrópica em algum referencial, os dois referenciais irão coincidir, ou seja, o fluido perfeito estará em repouso em coordenadas comóveis. Logo sua quadrivelocidade será dada por

$$u^0 = \frac{1}{N},\tag{3.20}$$

de modo que

$$T^\mu{}_\nu = \text{diag}(-\rho, p, p, p).\tag{3.21}$$

Resolvendo a segunda equação de (3.19) para ρ obtemos

$$\begin{aligned}\rho &= \rho_0^{1+w} e^s \\ &= a^{-3(1+w)} p_\phi^{1+w} e^s,\end{aligned}\tag{3.22}$$

onde usamos a equação (i) de (2.70), (3.20) e $\sqrt{h} = a^3$. Assim, a hamiltoniana do fluido torna-se

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_m^0 &= -\sqrt{h}T_0^0 \\ &= a^{-3w} p_\phi^{1+w} e^s.\end{aligned}\tag{3.23}$$

Finalmente, fazendo a substituição de (3.17) e (3.23) em (3.4) obtemos

$$\mathcal{H}^0 = -\frac{p_a^2}{24a} + 2\Lambda a^3 + a^{-3w} p_\phi^{1+w} e^s. \quad (3.24)$$

Podemos pôr a hamiltoniana acima numa forma mais adequada para o nosso interesse realizando uma transformação canônica $(a, \phi, s, p_a, p_\phi, p_s) \rightarrow (a, \eta, s, p_a, p_\eta, p_s)$ definida por

$$\eta = -p_s p_\phi^{-(1+w)} e^{-s}, \quad p_\eta = p_\phi^{1+w} e^s. \quad (3.25)$$

Obtemos desta maneira a hamiltoniana

$$\mathcal{H}^0 = -\frac{p_a^2}{24a} + 2\Lambda a^3 + a^{-3w} p_\eta, \quad (3.26)$$

que servirá de base para nosso procedimento de quantização.

3.3 O Modelo Clássico

Obtivemos o modelo de mini-superespaço acima utilizando as simetrias contidas no elemento de linha (3.11), o que nos permitiu reduzir o número infinito de graus de liberdade que tínhamos no modelo de superespaço para apenas dois: o fator de escala do universo, a , e o único grau de liberdade remanescente do fluido, η . Embora este modelo de mini-superespaço pareça ser excessivamente simplificado, um universo plano, homogêneo e isotrópico com seu conteúdo material formado por matéria não-relativística (poeira) e uma constante cosmológica, ele é de especial interesse para nós porque tal modelo é sugerido por observações cosmológicas como a melhor aproximação para o universo atual. Antes de realizar a quantização deste modelo, vejamos de que maneira as singularidades aparecem no modelo clássico. Tomemos $w = 0$ em (3.26) para obter

$$\mathcal{H}^0 = -\frac{p_a^2}{24a} + 2\Lambda a^3 + p_\eta. \quad (3.27)$$

Fazendo $N = 1$, de modo que o tempo t no elemento de linha (3.11) é o tempo cósmico, as equações clássicas de movimento são dadas por

$$\dot{a} = \frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial p_a} = -\frac{p_a}{12a}, \quad \dot{p}_a = -\frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial a} = -\frac{p_a^2}{24a^2} - 6\Lambda a^2, \quad (3.28)$$

$$\dot{\eta} = \frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial p_\eta} = 1, \quad \dot{p}_\eta = -\frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial \eta} = 0. \quad (3.29)$$

Multiplicando a primeira das equações (3.28) por $1/a$, quadrando e usando o vínculo $\mathcal{H}^0 = 0$, obtemos

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{1}{3}\Lambda + \frac{p_\eta}{6a^3}, \quad (3.30)$$

que é a equação de Friedmann, onde $H = \dot{a}/a$ é o parâmetro de Hubble. A segunda das equações (3.29) nos diz que p_η é constante. Fazendo $p_\eta = \rho_0 a_0^3$ em (3.30), onde o índice zero corresponde ao valor da quantidade em $t = t_0$, com t_0 sendo a idade do universo, obtemos

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{1}{3}\Lambda + \frac{\rho}{6}, \quad (3.31)$$

que é a equação de Friedmann em sua forma usual. Portanto, p_η é a energia armazenada no fluido. A divergência do tensor de energia momento para a métrica considerada (3.11) nos fornece uma equação de evolução para o conteúdo material do universo, a qual no nosso caso é [34]

$$\rho \propto a^{-3}. \quad (3.32)$$

Resolvendo a equação de Friedmann (3.30) obtemos

$$a^3(t) = \frac{p_\eta}{4|\Lambda|} \left[1 - \cos(\sqrt{3|\Lambda|}t) \right] \text{ se } \Lambda < 0 \quad (3.33)$$

e

$$a^3(t) = \frac{p_\eta}{4\Lambda} \left[\cosh(\sqrt{3\Lambda}t) - 1 \right] \text{ se } \Lambda > 0. \quad (3.34)$$

Ambas as soluções acima descrevem universos com singularidades [veja as figuras (3.1) e (3.2)]. A solução com $\Lambda < 0$ descreve um universo eternamente oscilante entre um começo e um fim singulares (Big Bang e Big Crunch) enquanto que a solução com $\Lambda > 0$ descreve um universo que se expande eternamente de um começo singular. Através de (3.32) vemos que a densidade de energia ρ assume um valor infinito nas singularidades.

Na relatividade geral a densidade de energia influencia a curvatura do espaço-tempo e esta curvatura afeta a matéria como gravidade. Então, próximo a uma singularidade a curvatura será tão grande que a intensidade do campo gravitacional se tornará comparável à das outras interações fundamentais. Assim, à medida que nos aproximamos de singularidades efeitos quânticos tornam-se crescentemente importantes.

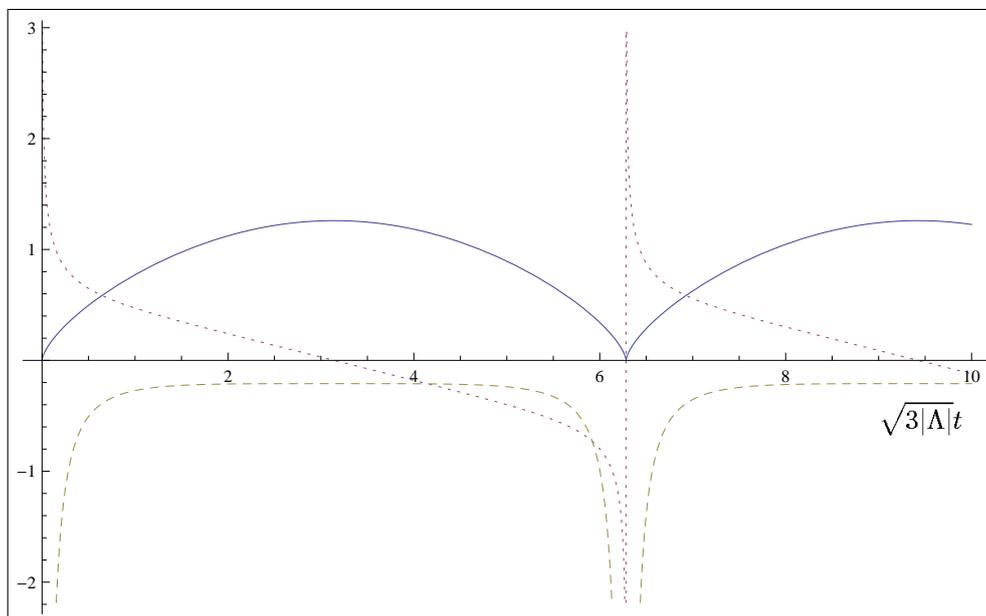


Figura 3.1: O fator de escala (sólido), primeira derivada (pontilhado), segunda derivada (tracejado); $\Lambda < 0$.

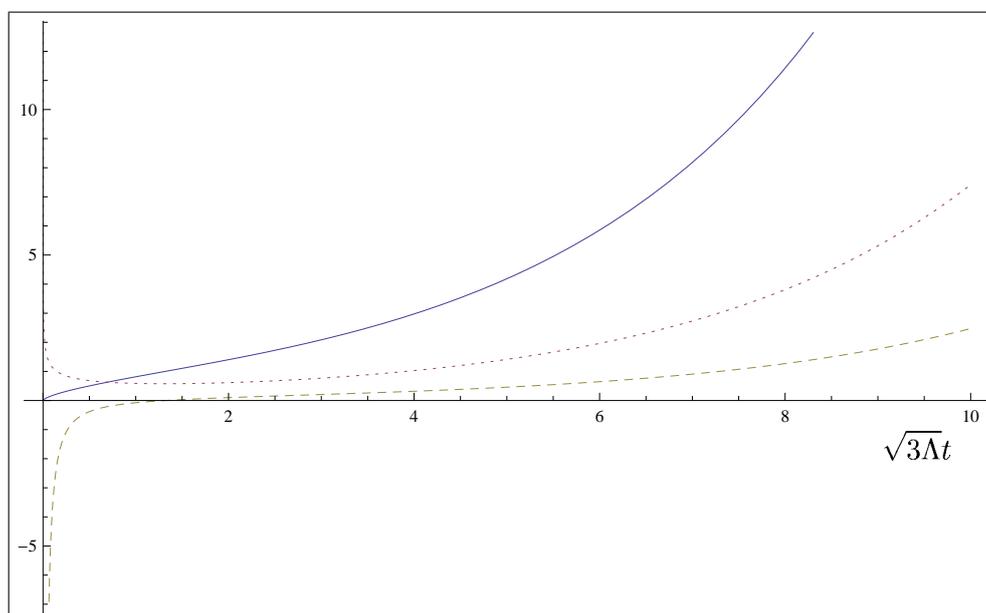


Figura 3.2: O fator de escala (sólido), primeira derivada (pontilhado), segunda derivada (tracejado); $\Lambda > 0$.

3.4 O Modelo Quântico

Observamos na seção anterior que o modelo clássico de universo de Friedmann-Robertson-Walker espacialmente plano apresenta singularidades: para certos instantes de tempo finitos a densidade de energia diverge. Próximo a essas singularidades a curvatura do espaço-tempo, $R \propto a^{-3}$, torna-se tão grande que a intensidade do campo gravitacional torna-se comparável à das outras interações fundamentais, o que nos sugere que uma formulação quântica de tal universo pode nos auxiliar na remoção das singularidades. Portanto, nesta seção utilizaremos o formalismo da cosmologia quântica canônica para tentar remover as singularidades presentes no modelo clássico. Investigaremos também, se a dinâmica clássica é recuperado para universos grandes, uma vez que há exemplos de modelos quânticos cosmológicos que apresentam comportamento quântico para fatores de escalas grandes [35, 36, 37]. Estaremos, portanto, interessados em descobrir se efeitos quânticos levam a alterações na dinâmica do universo não só próximo a singularidades mas durante fases posteriores de sua evolução ou até mesmo durante toda a sua evolução [38].

3.4.1 Transformação Canônica e Quantização com Função Quase Gaussiana

O procedimento de quantização que realizaremos aqui é facilitado por uma transformação de variáveis no espaço de fase $(a, \eta, p_a, p_\eta) \rightarrow (\xi, \eta, p_\xi, p_\eta)$ definida por

$$\xi = \frac{4}{\sqrt{3}}a^{3/2}, \quad p_\xi = \frac{1}{\sqrt{12}}a^{-1/2}p_a, \quad (3.35)$$

a qual é canônica uma vez que o parêntese de Poisson $\{\xi, p_\xi\}_{(a,p_a)} = 1$. Em termos destas novas variáveis canônicas, a super-Hamiltoniana clássica (3.27) toma a forma mais simples

$$\mathcal{H}^0 = -\frac{1}{2}p_\xi^2 + \frac{3}{8}\Lambda\xi^2 + p_\eta. \quad (3.36)$$

A equação de Wheeler-DeWitt no mini-superespaço em que estamos trabalhando é construída fazendo a correspondência

$$p_\xi \rightarrow \hat{p}_\xi = -i\frac{\partial}{\partial\xi}, \quad p_\eta \rightarrow \hat{p}_\eta = i\frac{\partial}{\partial\tau} \quad (3.37)$$

onde $\tau = -\eta$ e exigindo que

$$\hat{\mathcal{H}}^0\Psi = 0, \quad (3.38)$$

onde $\hat{\mathcal{H}}^0$ é o operador associado à super-Hamiltoniana (3.36). Logo, (3.38) torna-se

$$\hat{H}\Psi = i\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}, \quad (3.39)$$

onde o operador Hamiltoniano \hat{H} é dado por

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} - \frac{3}{8}\Lambda\xi^2. \quad (3.40)$$

Levando em conta que $\xi \geq 0$, uma vez que o fator de escala a não pode assumir valores negativos, o operador Hamiltoniano acima se assemelha àquele de um oscilador harmônico: uma partícula de massa unitária sujeita a um potencial

$$V(\xi) = \frac{-3\Lambda\xi^2}{8}. \quad (3.41)$$

Comparando com a forma padrão do potencial do oscilador harmônico, vemos que o caso $\Lambda < 0$ corresponde a um oscilador harmônico de frequência $\omega = \sqrt{3|\Lambda|}/2$, e o caso $\Lambda > 0$ corresponde a um oscilador harmônico invertido, o qual pode facilmente ser obtido do oscilador harmônico usual fazendo $\omega \rightarrow i\omega$ [39]. Sendo assim, a resolução da equação de Wheeler-DeWitt (3.39) no mini-superespaço em que estamos trabalhando equivale a resolver a equação do oscilador harmônico quântico.

Para que o operador Hamiltoniano \hat{H} seja auto-adjunto em $L^2(0, \infty)$ é necessário e suficiente que as funções do domínio de \hat{H} sejam tais que (vide Apêndice B)

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}(0) = \alpha\Psi(0), \quad (3.42)$$

onde $\alpha \in (-\infty, \infty]$. Assim, devemos buscar apenas as soluções da equação de Wheeler-DeWitt que satisfaçam (3.42). Devemos buscar também soluções para qualquer tempo cósmico, pois sabemos que o universo em que vivemos está em expansão e não cabem aqui soluções estacionárias. Com esta finalidade utilizaremos os propagadores para a equação de Schrödinger (3.39) no espaço de Hilbert $L^2(0, \infty)$. O propagador para α arbitrário não é conhecido o que faz com que limitemos nossa análise ao caso $\alpha = 0$, ou seja, a derivada da função de onda se anula em $\xi = 0$.

O propagador para o caso $\alpha = 0$ é dado por [41, 42]

$$G_0(\xi, \xi', \tau) = G(\xi, \xi', \tau) + G(\xi, -\xi', \tau), \quad (3.43)$$

onde $G(\xi, \xi', \tau)$ é o propagador padrão do oscilador harmônico quântico, o

qual em nosso caso ($m = 1, \hbar = 1$) e $\Lambda < 0$ toma a forma [43]

$$G(\xi, \xi', \tau) = \left[\frac{\omega}{2\pi i \sin \omega\tau} \right]^{1/2} \exp \left\{ \frac{i\omega}{2 \sin \omega\tau} \times [(\xi'^2 + \xi^2) \cos \omega\tau - 2\xi'\xi] \right\}. \quad (3.44)$$

Consideremos a função de onda inicial normalizada

$$\Psi_0(\xi, 0) = \left[\frac{64(\sigma\omega)^5}{9\pi} \right]^{1/4} \xi^2 e^{-\frac{\omega}{2}(\sigma+i\beta)\xi^2}, \quad \sigma > 0, \quad (3.45)$$

que satisfaz a condição (3.42) com $\alpha = 0$. Os parâmetros arbitrários σ e β nos permitem uma liberdade de escolha dentro desta classe de funções de onda iniciais. A função de onda para $t > 0$ é dada por

$$\Psi(\xi, \tau) = \int_0^\infty d\xi' G_0(\xi, \xi', \tau) \Psi_0(\xi', 0) = \int_{-\infty}^\infty d\xi' G(\xi, \xi', \tau) \Psi_0(\xi', 0), \quad (3.46)$$

onde usamos o fato de $\Psi_0(\xi, 0)$ ser uma função par para estender a integração a toda a reta real. Fazendo a substituição de (3.44) e (3.45) em (3.46) obtemos

$$\Psi(\xi, \tau) = \left[\frac{64(\sigma\omega)^5}{9\pi z^{10}(\tau)} \right]^{1/4} \left(\frac{i \sin \omega\tau z(\tau) + \omega\xi^2}{\omega} \right) \exp \left[\frac{i\omega}{2} \frac{z(\tau + \frac{\pi}{2\omega})}{z(\tau)} \xi^2 \right], \quad (3.47)$$

onde

$$z(\tau) = \cos \omega\tau - \beta \sin \omega\tau + i\sigma \sin \omega\tau. \quad (3.48)$$

De acordo com (3.35), o valor esperado do fator de escala é definido por

$$\langle a \rangle(\tau) = \left(\frac{3}{16} \right)^{1/3} \int_0^\infty d\xi \Psi(\xi, \tau) \xi^{2/3} \Psi^*(\xi, \tau). \quad (3.49)$$

Agora estamos em condições de verificar se este modelo quântico pode remover as singularidades iniciais que aparecem no modelo clássico. Posteriormente verificaremos se e de que maneira efeitos quânticos podem influenciar a dinâmica do universo para fator de escala grande. Dito de outra maneira, estaremos interessados em determinar se efeitos quânticos levam a alterações significativas no universo não apenas próximo à singularidade mas também durante fases posteriores de sua evolução ou durante a história completa do universo. Para este fim, adotamos a interpretação de muitos mundos² e calculamos o valor esperado do fator de escala substituindo (3.47) em (3.49),

²A interpretação de muitos mundos é muito diferente da interpretação de Copenhague da mecânica quântica. Na interpretação de muitos mundos todas as possibilidades são realizadas e novos universos são criados continuamente de acordo com os diferentes valores possíveis obtidos na medição de um observável, embora na prática a evolução dos observáveis como o fator de escala seja entendida por meio de seu valor esperado. A estrutura do espaço de Hilbert e os operadores auto-adjuntos são mantidos [44].

obtendo³

$$\langle a \rangle(\tau) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left(\frac{3}{16\omega\sigma} \right)^{1/3} \Gamma\left(\frac{5}{6}\right) \frac{1}{|z(\tau)|^{4/3}} \left[\frac{55}{36} |z(\tau)|^2 - \frac{2}{3} \sigma^2 \sin^2 \omega\tau \right]. \quad (3.50)$$

Pode-se constatar de (3.48) e (3.50) que $\langle a \rangle(\tau)$ nunca se anula, ou seja, se no modelo clássico tínhamos um universo que evoluía de um começo singular (Big Bang) para um fim singular (Big Crunch), no modelo quântico temos um universo sem singularidades e eternamente oscilante.

O maior interesse aqui é no caso $\Lambda > 0$. De fato, evidências observacionais sugerem que vivemos em um universo com uma possível constante cosmológica positiva. Logo, façamos $\omega \rightarrow i\omega$ [39] em (3.44) a fim de obter o propagador para o caso do oscilador harmônico invertido ($\Lambda > 0$), utilizando as identidades $\cos ix = \cosh x$ and $\sin ix = i \sinh x$. Procedendo desta maneira encontramos facilmente

$$G(\xi, \xi', \tau) = \left[\frac{\omega}{2\pi i \sinh \omega\tau} \right]^{1/2} \exp \left\{ \frac{i\omega}{2 \sinh \omega\tau} \times [(\xi'^2 + \xi^2) \cosh \omega\tau - 2\xi'\xi] \right\}. \quad (3.51)$$

Utilizando a mesma função de onda inicial (3.45), a equação (3.46) agora fica

$$\Psi(\xi, \tau) = \left[\frac{64(\sigma\omega)^5}{9\pi \zeta^{10}(\tau)} \right]^{1/4} \left(\frac{i \sinh \omega\tau \zeta(\tau) + \omega \xi^2}{\omega} \right) \exp \left[\frac{\omega}{2} \frac{\zeta(\tau + i\frac{\pi}{2\omega})}{\zeta(\tau)} \xi^2 \right], \quad (3.52)$$

onde

$$\zeta(\tau) = \cosh \omega\tau - \beta \sinh \omega\tau + i\sigma \sinh \omega\tau. \quad (3.53)$$

Assim, no caso $\Lambda > 0$ o valor esperado do fator de escala é dado por

$$\langle a \rangle(\tau) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left(\frac{3}{16\omega\sigma} \right)^{1/3} \Gamma\left(\frac{5}{6}\right) \frac{1}{|\zeta(\tau)|^{4/3}} \left[\frac{55}{36} |\zeta(\tau)|^2 - \frac{2}{3} \sigma^2 \sinh^2 \omega\tau \right]. \quad (3.54)$$

Vemos novamente, por (3.53) e (3.54), que $\langle a \rangle(\tau)$ nunca se anula. A quantização eliminou a singularidade inicial existente no modelo clássico; no modelo quântico o valor esperado de fator de escala cresce eternamente depois de passar por um valor mínimo para um certo valor $\tau = \tau_0$.

Estudemos agora, no caso $\Lambda > 0$, de que maneira efeitos quânticos gravitacionais podem influenciar a dinâmica do universo para fator de escala grande. Para este fim, busquemos os valores t_* do tempo cósmico para os quais a aceleração muda de sinal no modelo clássico e no modelo quântico, ou seja, os zeros da derivada segunda do fator de escala no modelo clássico e

³Utilizamos aqui a expressão de Euler para a função gama como uma integral definida: $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$ ($Re z > 0$) e a propriedade da função gama: $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

do seu valor esperado no modelo quântico. Vamos estudar primeiramente o modelo quântico. Uma vez obtido(s) o(s) tempo(s) t_* neste caso, faremos a comparação com o caso clássico.

A função $\langle a \rangle$ dada por (3.54) é da forma

$$f(\tau) = K \frac{g(\tau)}{h(\tau)^{2/3}}, \quad (3.55)$$

onde

$$\begin{aligned} K &= \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left(\frac{3}{16\omega\sigma} \right)^{1/3} \Gamma\left(\frac{5}{6}\right), \\ g(\tau) &= \frac{55}{36} |\zeta(\tau)|^2 - \frac{2}{3} \sigma^2 \sinh^2 \omega\tau \end{aligned}$$

e

$$h(\tau) = |\zeta(\tau)|^2 = \cosh^2 \omega\tau + (\alpha^2 + \beta^2) \sinh^2 \omega\tau - \beta \sinh 2\omega\tau. \quad (3.56)$$

Portanto

$$\ddot{f} = 0 \Rightarrow 3\ddot{g}h^2 = 2\dot{h}hg + 7\dot{h}^2g + 4\dot{h}h\dot{g}. \quad (3.57)$$

A complexidade desta equação impõe uma análise numérica, por meio da qual é possível determinar graficamente onde a derivada segunda do valor esperado do fator de escala se anula. Construímos gráficos com os parâmetros σ e β assumindo diversos valores. Seguem abaixo os gráficos para alguns desses valores⁴.

A análise dos gráficos nos permite concluir que para quase todos os valores dos parâmetros σ e β , excluindo-se apenas aqueles em que σ e β são muito pequenos, temos o mesmo comportamento para a segunda derivada do valor esperado do fator de escala, a qual se anula para dois tempos depois que $\langle a \rangle$ passa por seu valor mínimo. O primeiro instante, t_{*-}^q , é a separação entre uma fase de expansão acelerada e o começo de uma fase desacelerada dominada pela matéria não-relativística, enquanto que o segundo instante, t_{*+}^q , é o começo da fase atual de expansão acelerada do universo em que nos encontramos. Os tempos t_{*-}^q e t_{*+}^q são contados a partir do instante em que $\langle a \rangle$ passa por seu valor mínimo. Observamos também, dos gráficos abaixo, que à medida que os valores de σ aumentam com β mantido fixo, o tempo t_{*-}^q aproxima-se do valor mínimo de $\langle a \rangle$, e o mesmo ocorre para σ fixo e β tomando valores cada vez maiores. Os resultados discutidos aqui valem tanto para $\sigma > \beta$ quanto para $\sigma < \beta$. Os valores de t_{*-}^q e t_{*+}^q foram extraídos dos gráficos acima e postos na tabela⁵ (3.1) abaixo:

⁴Os valores de x nos gráficos correspondem a $\omega\tau$, logo, a escala horizontal dos gráficos corresponde a τ medido em unidades de $\approx 0.8H_0^{-1}$.

⁵Escrevemos $\Lambda = 3H_0^2\Omega_\Lambda$ e tomamos o valor $\Omega_\Lambda = 0.7$ atualmente aceito.

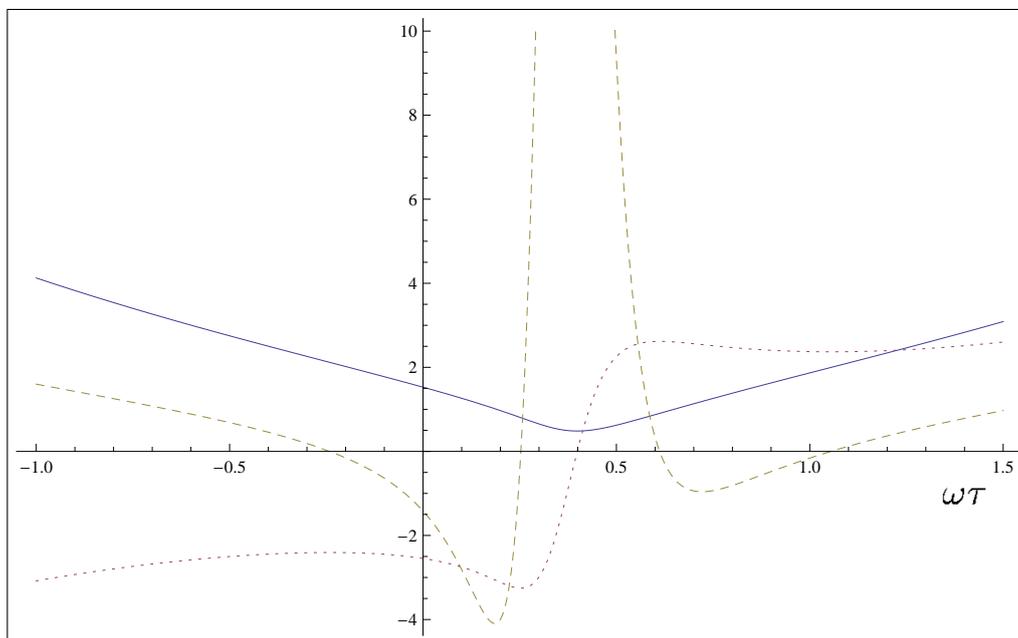


Figura 3.3: O valor esperado do fator de escala (sólido), primeira derivada (pontilhado), segunda derivada (tracejado); $\sigma = 1$ e $\beta = 2, 5$.

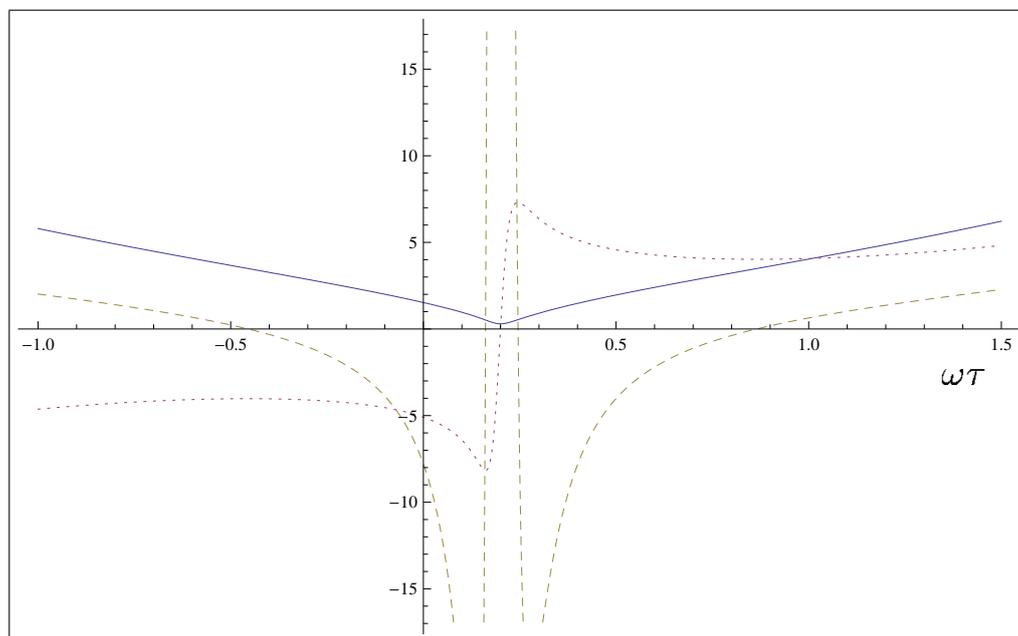


Figura 3.4: O valor esperado do fator de escala (sólido), primeira derivada (pontilhado), segunda derivada (tracejado); $\sigma = 1$ e $\beta = 5$.

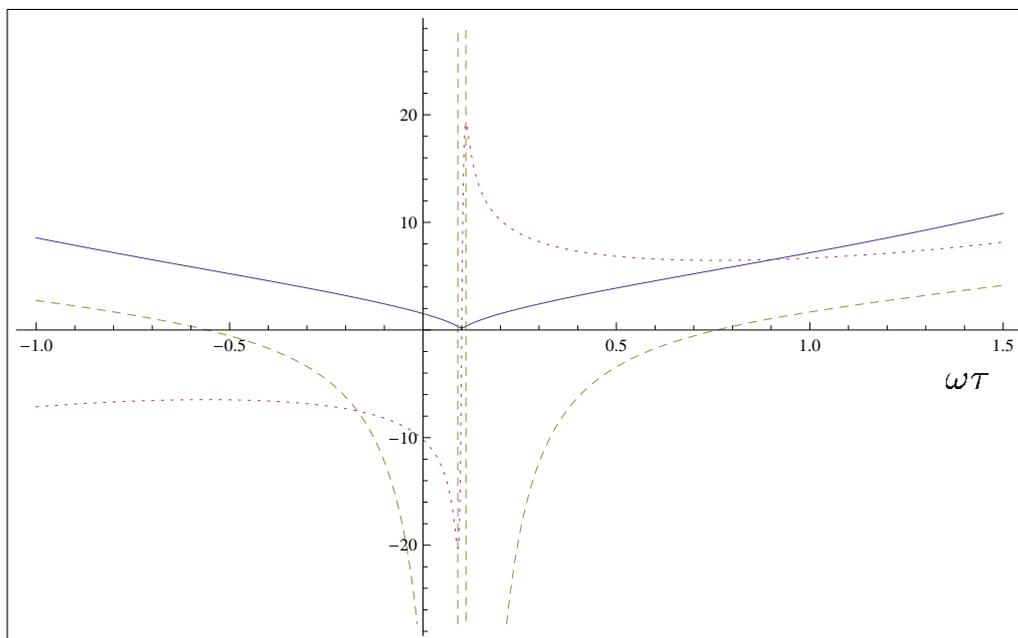


Figura 3.5: O valor esperado do fator de escala (sólido), primeira derivada (pontilhado), segunda derivada (tracejado); $\sigma = 1$ e $\beta = 10$.

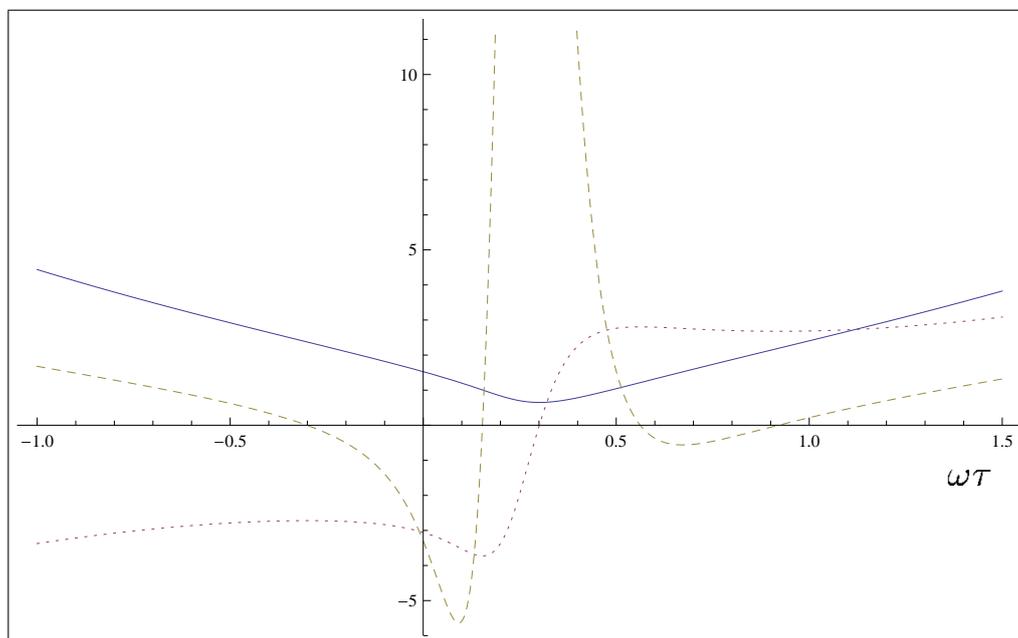


Figura 3.6: O valor esperado do fator de escala (sólido), primeira derivada (pontilhado), segunda derivada (tracejado); $\sigma = 2$ e $\beta = 3$.

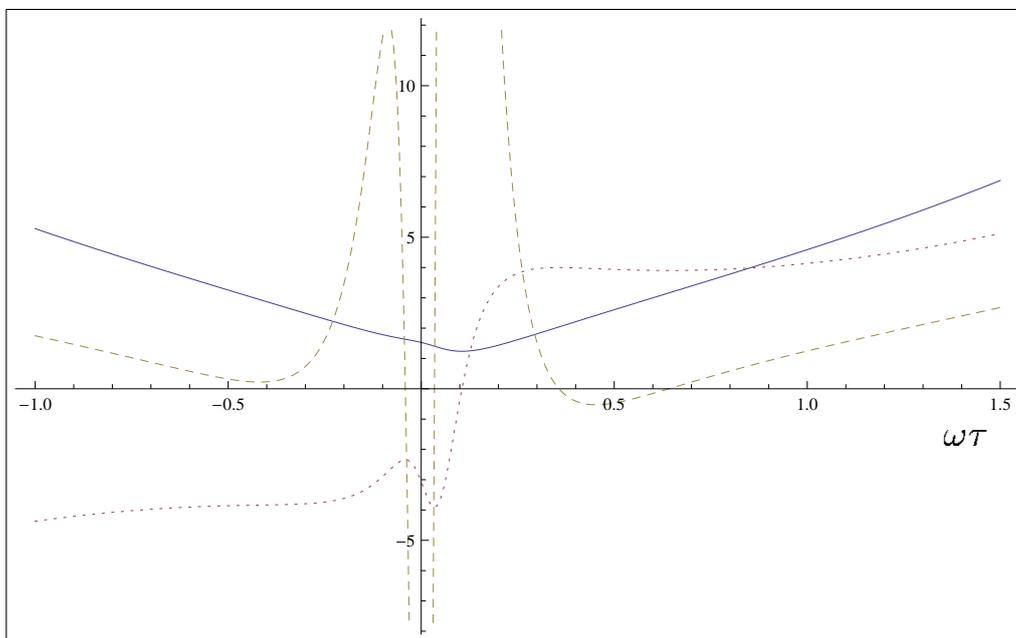


Figura 3.7: O valor esperado do fator de escala (sólido), primeira derivada (pontilhado), segunda derivada (tracejado); $\sigma = 10$ e $\beta = 3$.

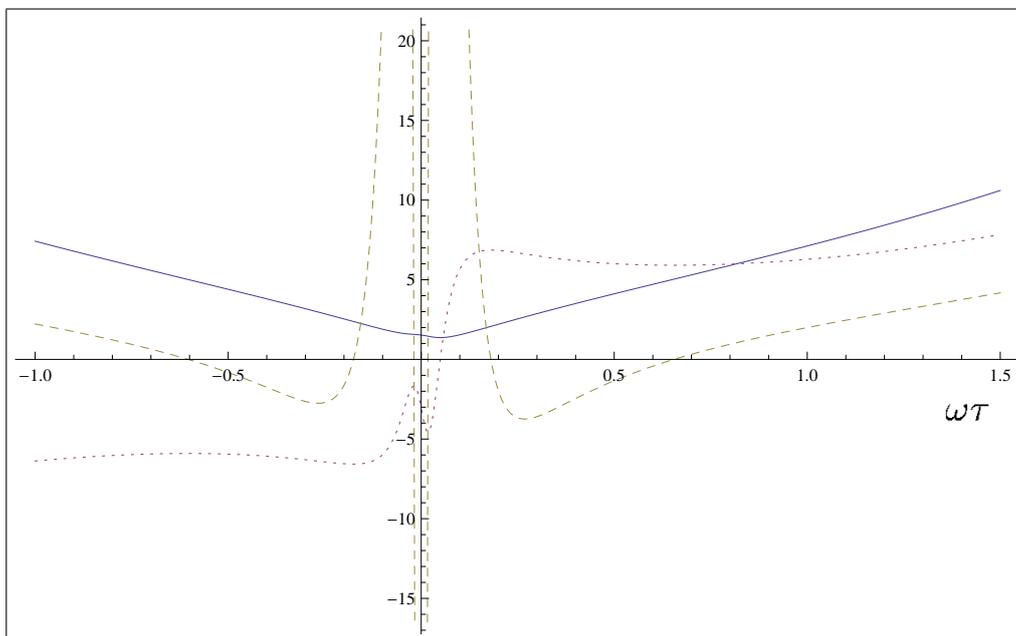


Figura 3.8: O valor esperado do fator de escala (sólido), primeira derivada (pontilhado), segunda derivada (tracejado); $\sigma = 20$ e $\beta = 3$.

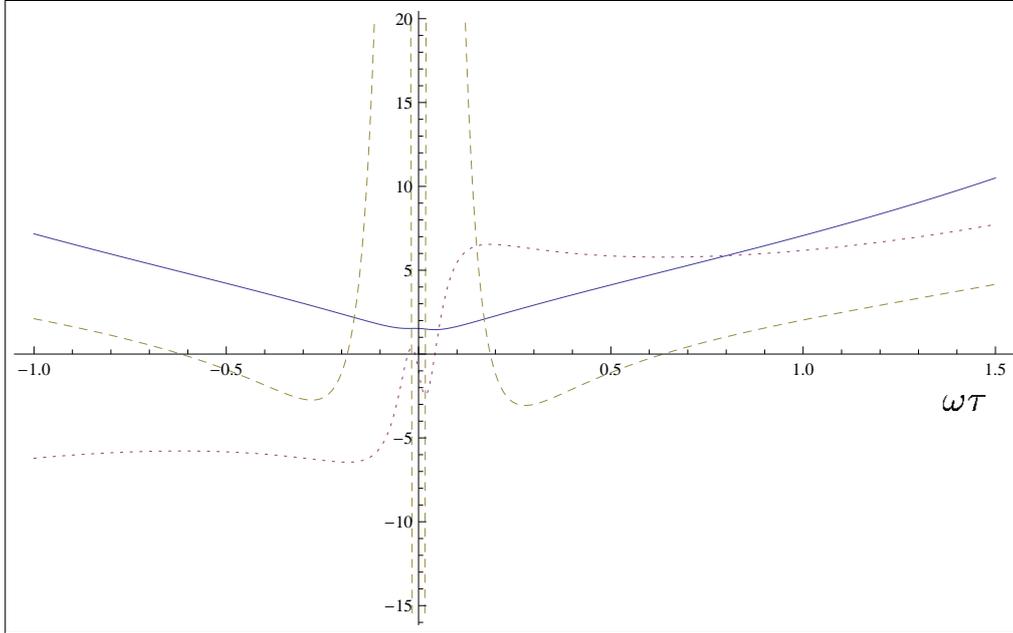


Figura 3.9: O valor esperado do fator de escala (sólido), primeira derivada (pontilhado), segunda derivada (tracejado); $\sigma = 20$ e $\beta = 1$.

σ	β	$t_{*-}^q(H_0^{-1})$	$t_{*+}^q(H_0^{-1})$
1	2.5	0.16	0.51
1	5	0.03	0.52
1	10	0.00	0.52
2	3	0.20	0.48
10	3	0.19	0.42
20	3	0.11	0.49
20	1	0.11	0.47

Tabela 3.1: O primeiro instante, t_{*-}^q , marca o fim de uma fase de expansão acelerada e o início da expansão desacelerada dominada pela matéria não-relativística. O segundo instante, t_{*+}^q , marca o início da fase atual de expansão acelerada do universo. Os tempos são dados em unidades de H_0^{-1} .

O próximo passo é comparar os tempos quânticos t_{*-}^q e t_{*+}^q com o(s) tempo(s) obtido(s) do modelo clássico. Uma função da forma $f(t) = g(t)^{1/3}$ tem $\ddot{f} = 0$ somente se

$$3g\ddot{g} = 2\dot{g}^2. \quad (3.58)$$

Do fator de escala clássico (3.34) obtemos um único instante

$$t_*^c = \frac{1}{\sqrt{3\Lambda}} \cosh^{-1} 2, \quad (3.59)$$

o que nos leva a $t_*^c = 0.52 H_0^{-1}$. Ao compararmos com os valores t_{*-}^q e t_{*+}^q obtidos no modelo quântico, observamos que no modelo quântico a presente fase de expansão acelerada teve seu início mais cedo que no modelo clássico, e, além do mais, nosso modelo quântico sugere que uma única constante cosmológica positiva pode dar conta de uma fase inflacionária nos primórdios do universo e uma expansão acelerada do universo observada hoje.

Por fim, ao compararmos o gráfico da figura (3.2) com os gráficos das figuras (3.10, 3.11, 3.12) para o parâmetro β fixo ($\beta = 3$) e σ tomando valores cada vez maiores e os gráficos das figuras (3.13, 3.14, 3.15) para o parâmetro σ fixo ($\sigma = 2$) e β tomando valores cada vez maiores, pudemos observar que os parâmetros σ e β podem ser considerados como uma medida de quão próximo de singular o universo foi quando atingiu seu tamanho mínimo (menor valor de $\langle a \rangle$). Quanto mais próximo o parâmetro σ é de zero, mais quente e denso o universo foi quando atingiu seu tamanho mínimo. O parâmetro β apresenta um comportamento contrário, quanto maior β mais próximo de singular foi o universo quando este atingiu sua extensão espacial mínima.

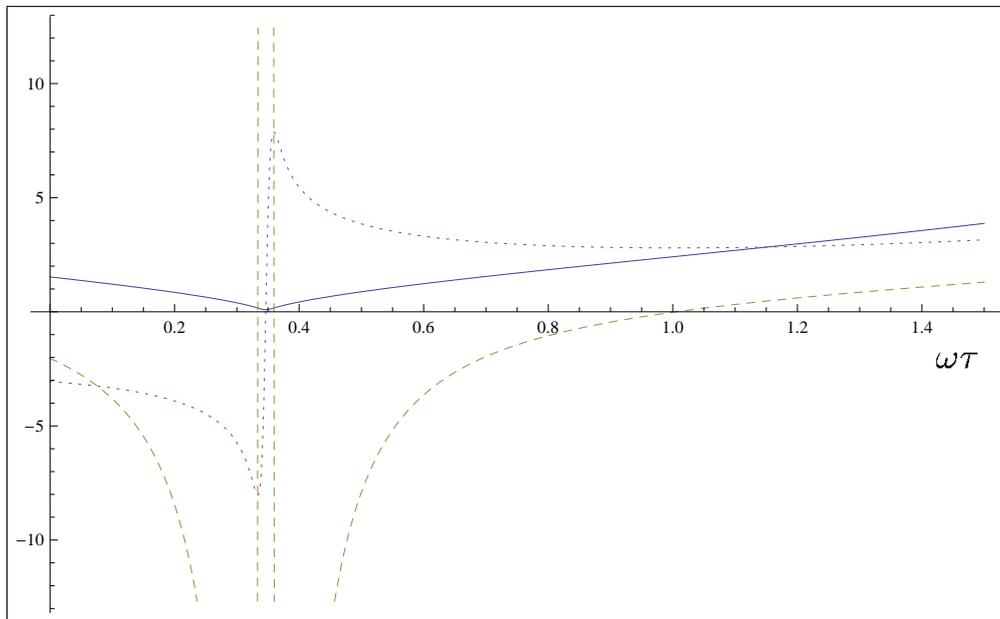


Figura 3.10: O valor esperado do fator de escala (sólido), primeira derivada (pontilhado), segunda derivada (tracejado); $\sigma = 0.1$ e $\beta = 3$.

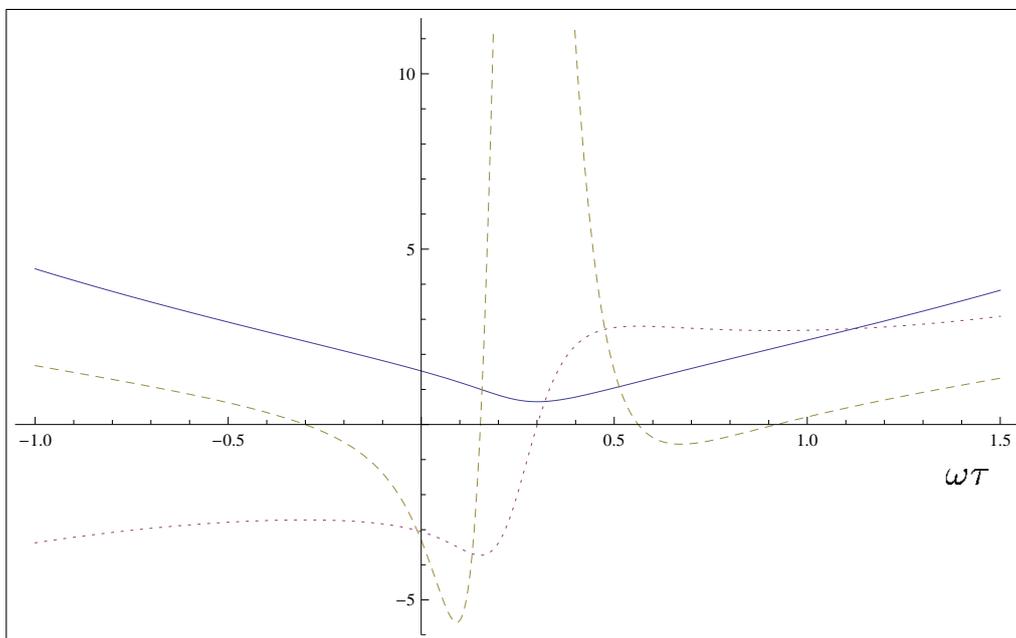


Figura 3.11: O valor esperado do fator de escala (sólido), primeira derivada (pontilhado), segunda derivada (tracejado); $\sigma = 2$ e $\beta = 3$.

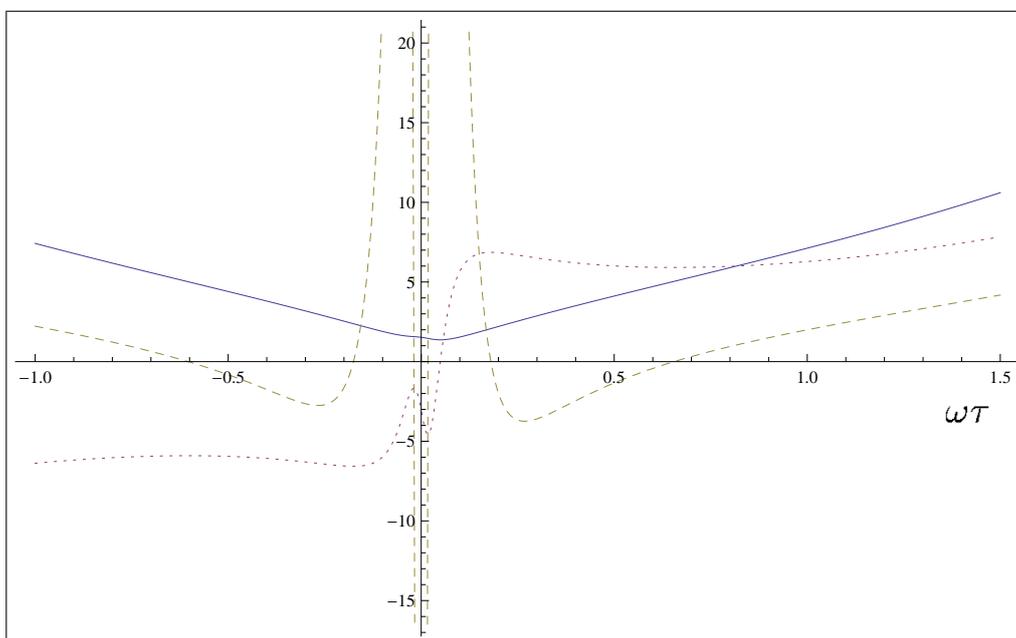


Figura 3.12: O valor esperado do fator de escala (sólido), primeira derivada (pontilhado), segunda derivada (tracejado); $\sigma = 20$ e $\beta = 3$.

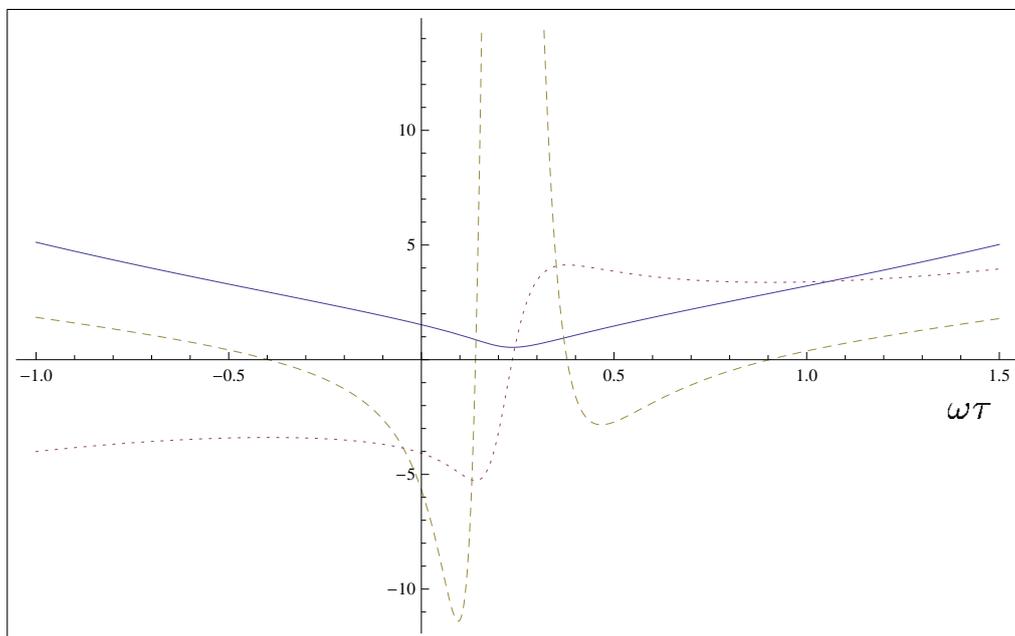


Figura 3.13: O valor esperado do fator de escala (sólido), primeira derivada (pontilhado), segunda derivada (tracejado); $\sigma = 2$ e $\beta = 4$.

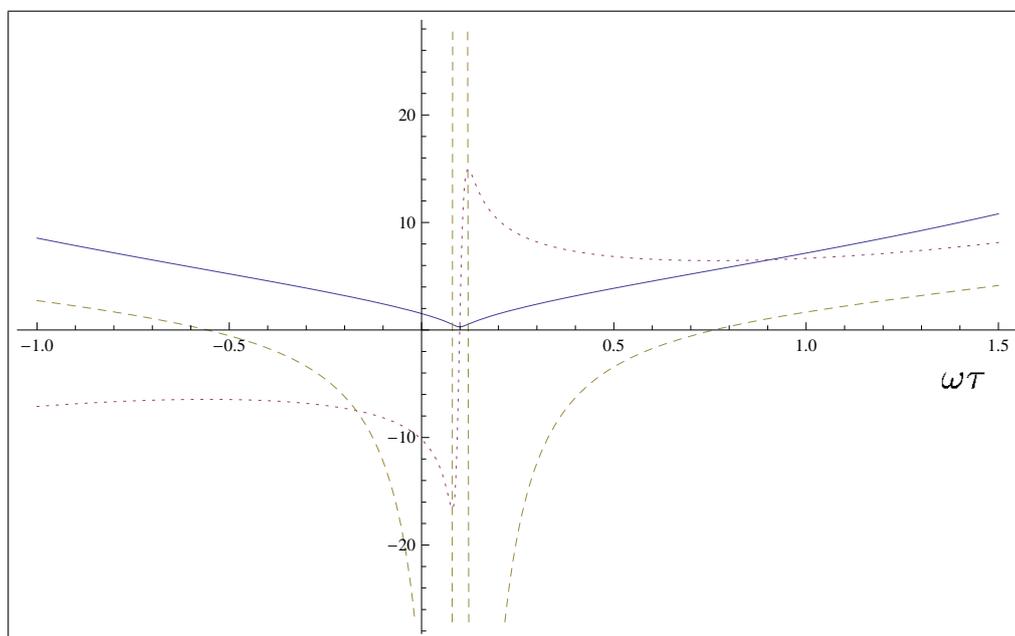


Figura 3.14: O valor esperado do fator de escala (sólido), primeira derivada (pontilhado), segunda derivada (tracejado); $\sigma = 2$ e $\beta = 10$.

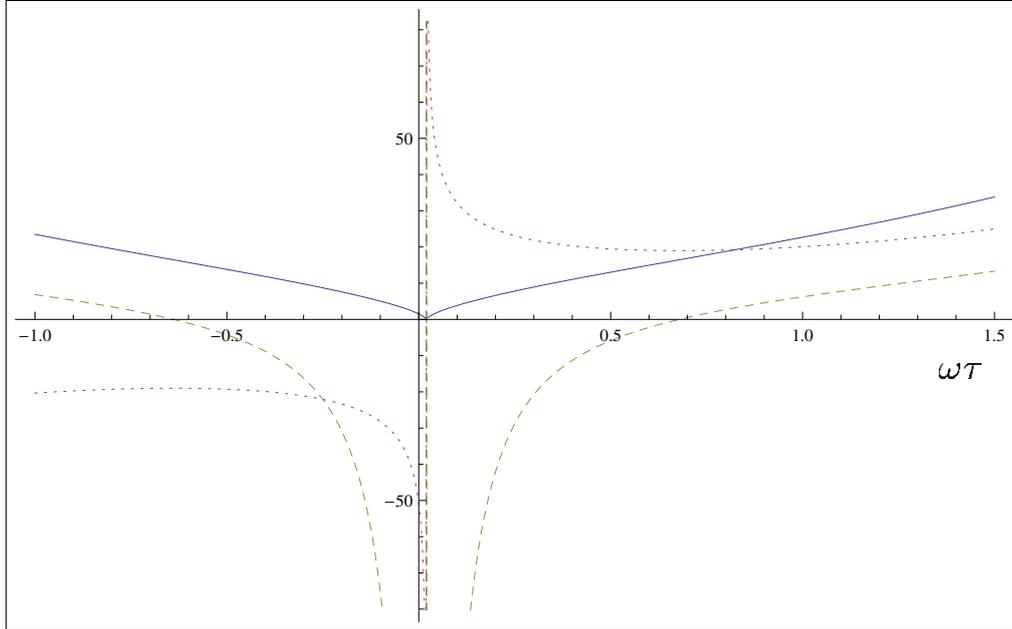


Figura 3.15: O valor esperado do fator de escala (sólido), primeira derivada (pontilhado), segunda derivada (tracejado); $\sigma = 2$ e $\beta = 50$.

Em [38] utilizou-se uma função de onda levemente diferente de (3.45), o que implicou cálculos mais simples. Os resultados encontrados aqui corroboram os resultados de [38].

3.4.2 Quantização com Dois Fluidos Perfeitos

Consideramos, agora, um esquema de quantização em que a constante cosmológica é gerada dinamicamente de um fluido perfeito com equação de estado $p = w\rho$ com $w = -1$, de modo que trabalharemos agora com dois fluidos perfeitos sem interação descritos pelo formalismo de Schutz. Com isto, a equação (3.27) com dois fluidos torna-se

$$\mathcal{H}^0 = -\frac{p_a^2}{24a} + p_\eta a^3 + p_{\eta'}, \quad (3.60)$$

onde p_η é o momento associado à constante cosmológica e $p_{\eta'}$ o momento associado à matéria não-relativística. A segunda equação de Hamilton (3.29) fornece $\dot{p}_\eta = -\frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial \eta} = 0$, de modo que p_η é constante de movimento, como esperávamos, uma vez que p_η faz o papel da constante cosmológica.

As equações (3.60) e (3.27) são análogas matematicamente, nos dois casos há um valor fixo representando a constante cosmológica. Há uma diferença

física, no entanto: enquanto em (3.27) o valor da constante cosmológica não depende das condições iniciais, em (3.60) o seu valor depende das condições iniciais do fluido podendo ter um valor arbitrário, ou seja, condições iniciais diferentes levarão a valores diferentes para a constante cosmológica.

Realizando a mesma transformação canônica (3.35) obtemos para a super-Hamiltoniana

$$\mathcal{H}^0 = -\frac{1}{2}p_\xi^2 + \frac{3}{16}p_\eta\xi^2 + p_{\eta'}. \quad (3.61)$$

Ao fazermos as prescrições quânticas

$$p_\xi \rightarrow \hat{p}_\xi = -i\frac{\partial}{\partial\xi}, \quad p_\eta \rightarrow \hat{p}_\eta = i\frac{\partial}{\partial\tau}, \quad p_{\eta'} \rightarrow \hat{p}_{\eta'} = i\frac{\partial}{\partial\tau}, \quad (3.62)$$

onde agora $\tau = -\eta'$, e exigindo novamente que $\hat{\mathcal{H}}^0\Psi = 0$, onde $\hat{\mathcal{H}}^0$ é o operador associado à super-Hamiltoniana (3.61), obtemos

$$\hat{H}\Psi = i\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}, \quad (3.63)$$

com o operador hamiltoniano \hat{H} dado por

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + i\frac{3}{16}\xi^2\frac{\partial}{\partial\eta}. \quad (3.64)$$

Soluções estacionárias de (3.63) podem agora ser obtidas pelo método de separação de variáveis escrevendo a função de onda do universo na forma

$$\Psi(\xi, \eta, t) = \gamma(\xi)e^{-iEt}e^{-iB\eta}, \quad (3.65)$$

onde E e B são constantes reais. A substituição de (3.65) em (3.63) com o operador Hamiltoniano dado por (3.64) resulta na equação

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\gamma(\xi)}{\partial\xi^2} + \frac{3}{16}B\xi^2\gamma(\xi) = E\gamma(\xi), \quad (3.66)$$

onde observamos que $\gamma(\xi)$ é solução para a equação de um oscilador harmônico quântico de massa unitária e frequência $\omega = \sqrt{\frac{3}{8}B}$, $B > 0$. Usaremos aqui a solução do estado fundamental do oscilador harmônico⁶ para $\gamma(\xi)$, obtendo em nosso caso ($m = 1, \hbar = 1$)

$$\Psi_{E,B}(\xi, \eta, t) = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2}\omega\xi^2} e^{-i\frac{\omega}{2}t} e^{-iB\eta}, \quad (3.67)$$

⁶A solução geral em termos dos polinômios de Hermite pode ser consultada em [45].

que, com $\omega = \sqrt{\frac{3}{8}B}$, fica

$$\Psi_{E,B}(\xi, \eta, t) = C e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{8}B}\xi^2} e^{-i\frac{\omega}{2}t} e^{-iB\eta}, \quad (3.68)$$

onde C é uma constante numérica. A solução estacionária acima tem norma infinita e, a fim de construir estados de norma finita capazes de representar estados físicos, devemos superpor soluções estacionárias. Um possível pacote de ondas é

$$\begin{aligned} \Psi(\xi, \eta, t) &= \int_0^\infty dB f(B) e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{8}B}\xi^2} e^{-iB\eta} e^{-i\sqrt{\frac{3B}{32}}t} \\ &= \int_0^\infty dk \chi(k) e^{-(i\eta k^2 + \frac{1}{2}(\frac{3}{8})^{1/2}\xi^2 k)} e^{-i\sqrt{\frac{3}{32}}kt}, \end{aligned} \quad (3.69)$$

onde $B = k^2$ e

$$\chi(k) = 2kf(k^2). \quad (3.70)$$

Tentamos duas escolhas simples para $\chi(k)$, $\chi(k) \propto e^{-\lambda k}$ e $\chi(k) \propto e^{-\lambda k^2}$, mas em nenhum dos casos conseguimos o objetivo de expressar $\Psi(\xi, \eta, t)$ em termos de funções manejáveis. O passo seguinte seria calcular o valor esperado do fator de escala.

Embora não tenhamos conseguido obter pacotes de onda explícitos, deve ser ressaltado que esperamos que este método de quantização provavelmente apresente resultados físicos distintos do método anterior, pois permite a superposição de estados com constantes cosmológicas distintas. Além disso, na presente formulação não existem funções de onda com constante cosmológica definida que representem estados físicos, isto é, funções de quadrado integrável nas variáveis ξ e η .

Capítulo 4

Conclusões

Nesta dissertação foram investigadas algumas características quânticas do modelo cosmológico de Friedmann-Robertson-Walker espacialmente plano preenchido homogeneamente com matéria não-relativística e uma constante cosmológica, sendo a primeira descrita fenomenologicamente por um fluido perfeito com equação de estado $p = 0$. A utilização do formalismo de Schutz para descrever o fluido perfeito relativístico torna possível associar uma variável tempo a um grau de liberdade do fluido, uma vez que nesse formalismo graus de liberdade dinâmicos são atribuídos ao fluido. Isto implica, ao se realizar a quantização, a obtenção de uma função de onda que exhibe dependência temporal e dessa forma a cosmologia quântica de minisuperespaço com fluido perfeito permite a descrição da evolução do universo como um todo de maneira natural. As soluções clássicas, no nosso modelo de minisuperespaço, obtidas utilizando as equações de Hamilton, descrevem um universo eternamente oscilante de uma singularidade inicial (Big Bang) para uma singularidade final (Big Crunch) no caso de uma constante cosmológica negativa; e um universo que se expande eternamente de um começo singular no caso de uma constante cosmológica positiva. Aqui, a aplicação da teoria a um mini-superespaço específico não deve ser tomada como um fator de inconsistência da proposta, uma vez que o universo contém simetrias intrínsecas. Acredita-se que com estes modelos simplificados se possa entender problemas pertinentes à quantização que estejam presentes até nos casos mais simples, contribuindo dessa maneira para desenvolver uma teoria quântica da gravitação.

Então, a fim de investigar se as singularidades presentes no modelo clássico persistem no modelo quântico realizamos a quantização de duas maneiras distintas. Primeiro reduzimos a hamiltoniana clássica àquela de um oscilador harmônico e assim a equação de Wheeler-DeWitt tornou-se uma legítima equação de Schrödinger para o oscilador harmônico. Impusemos condições

para que o operador hamiltoniano fosse auto-adjunto. Uma vez que o propagador para a equação do oscilador harmônico quântico não é completamente conhecido na semi-reta, limitamos nossa análise a um caso específico e, assim, determinamos a função de onda em qualquer instante a partir de sua forma num tempo inicial. Observamos que as singularidades do modelo clássico são removidas no modelo quântico; no caso de constante cosmológica negativa, a quantização leva a um universo não-singular e eternamente oscilante, e no caso de constante cosmológica positiva a quantização leva a um universo não-singular e eternamente em expansão depois de passar por um tamanho mínimo. Ao estudar o valor esperado do fator de escala adotamos a interpretação de muitos mundos¹. Estudamos ainda para o caso de constante cosmológica positiva, situação de particular interesse para nós pois é o que os dados observacionais indicam, se os efeitos quânticos gravitacionais poderiam influenciar a dinâmica do universo para fator de escala grande e encontramos que nosso modelo quântico sugere que uma única constante cosmológica positiva pode dar conta de uma fase inflacionária nos primórdios do universo e uma expansão acelerada do universo observada hoje, com um período de desaceleração entre elas. No entanto, no nosso modelo o fator de escala não tem um aumento tão acentuado na fase “inflacionária” como no modelo inflacionário baseado na física de partículas. Em seguida, consideramos um esquema de quantização em que a constante cosmológica é gerada dinamicamente de um fluido perfeito com equação de estado $p = -\rho$, de maneira que trabalhamos com dois fluidos perfeitos descritos pelo formalismo de Schutz. Neste caso, a constante cosmológica depende das condições iniciais do fluido, diferentemente do caso anterior em que a constante cosmológica tinha um valor fixo. Obtivemos soluções estacionárias de norma infinita e falhamos ao tentar obter pacotes de onda explícitos. Como nesta formulação não existem funções de onda com constante cosmológica definida que representem estados físicos, esperamos que este método de quantização (que exige a superposição de estados com constante cosmológica distinta) provavelmente apresente resultados físicos distintos do método anterior.

Não podemos afirmar que os resultados obtidos aqui são conclusivos. Para testar sua generalidade o conteúdo material do universo deveria ser enriquecido para descrever o universo primitivo mais realisticamente, o que dificulta ainda mais obter soluções exatas normalizáveis da equação de Wheeler-DeWitt. A análise acima, como foi dito, limitou-se a um caso específico do propagador para o oscilador harmônico com $\alpha = 0$, onde α é o parâmetro

¹Citando de [27]: “Everett’s view of the world is a very natural one to adopt in the quantum theory of gravity, where one is accustomed to speak without embarrassment of the ‘wave function of the universe’. It is possible that Everett’s view is not only natural but essential.”

que especifica o domínio do operador hamiltoniano. Provar que este resultado persiste independente do valor de α é uma tarefa difícil hoje, pois não se conhece o propagador para o oscilador harmônico com α arbitrário, e caso venha a ser encontrado, sua expressão terá que ser suficientemente simples para que se possa obter funções de onda manejáveis. Somente um tratamento quântico completo (no qual o conteúdo material do universo seja descrito por campos fundamentais) incluindo uma estimativa quântica razoável para a constante cosmológica pode nos fornecer evidências concretas sobre a persistência ou não de singularidades no modelo quântico de universo com matéria e constante cosmológica.

O resultado obtido em nossa primeira quantização corrobora o resultado obtido em [38], embora tenhamos feito uma análise numérica devido à complexidade da expressão do valor esperado do fator de escala como função do tempo. Embora esperemos resultados diferentes no segundo método de quantização, uma análise mais detalhada precisa ser feita.

Apêndice A

Quantização de Sistemas Hamiltonianos Vinculados

A teoria quântica de sistemas hamiltonianos vinculados foi desenvolvida originalmente por Dirac [46]. Pretende-se aqui expor apenas as ideias básicas. Uma análise cuidadosa pode ser encontrado em [46, 47], enquanto que uma abordagem introdutória da teoria clássica encontra-se em [48].

A.1 Vínculos Primários

Consideremos um sistema físico qualquer descrito pelas coordenadas generalizadas $q_1(t), \dots, q_n(t)$ e pela lagrangiana $L(q_i, \dot{q}_i)$ sem dependência temporal explícita. A descrição hamiltoniana de tal sistema envolve a substituição das variáveis (q, \dot{q}) por (q, p) em todas as grandezas mecânicas, e a introdução de uma função $H(q, p)$ em lugar da lagrangiana $L(q, \dot{q})$ para gerar a dinâmica. Tal mudança de descrição realiza-se mediante uma transformação de Legendre, que no presente contexto consiste na substituição das velocidades generalizadas pelos momentos canônicos como variáveis básicas e a introdução da hamiltoniana $H(q, p)$ definida por

$$H(q, p) = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}), \quad (\text{A.1})$$

onde o momento canônico p_i conjugado a q_i é definido por

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{A.2})$$

Na teoria dinâmica usual faz-se a hipótese de que as equações (A.2) podem ser resolvidas para as velocidades generalizadas em termos das coordenadas

generalizadas e dos momentos canônicos conjugados. Segundo o teorema da função implícita [49] as equações (A.2) só podem ser resolvidas para todas as velocidades generalizadas em termos das coordenadas generalizadas e dos momentos canônicos conjugados se a matriz \mathbf{W} com elementos

$$W_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \quad (\text{A.3})$$

for não-singular, isto é, $\det \mathbf{W} \neq 0$. Estamos interessados em casos em que a matriz é singular e nem todas as velocidades podem ser expressas em termos das coordenadas e dos momentos canônicos. Desta forma surgem naturalmente vínculos que são expressos em equações relacionando as coordenadas e os momentos da seguinte forma:

$$\phi_m(q, p) = 0 \quad , \quad m = 1, \dots, M. \quad (\text{A.4})$$

Por causa destas equações, as coordenadas e os momentos, que são as variáveis dinâmicas básicas do formalismo hamiltoniano, não são mutuamente independentes. As equações (A.4) são chamadas de vínculos primários, ou seja, os vínculos são decorrentes da forma da lagrangiana e da definição dos momentos (A.2), e não das equações de movimento.

Na presença de vínculos primários a hamiltoniana (A.1) não é bem definida: deve ser acrescida de uma combinação linear dos vínculos (A.4) para garantir a validade destes últimos. A hamiltoniana modificada toma a forma

$$H_T = H + \sum_{m=1}^M \lambda_m \phi_m, \quad (\text{A.5})$$

onde em geral os coeficientes λ_m podem ser funções arbitrárias das coordenadas generalizadas e dos momentos canônicos. Eles nada mais são que os multiplicadores de Lagrange associados a cada vínculo. Assim, as equações de Hamilton derivadas do princípio variacional

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H_T \right) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_i p_i \dot{q}_i - H - \sum_m \lambda_m \phi_m \right) dt = 0, \quad (\text{A.6})$$

com variações arbitrárias e independentes dos qs , ps e λ_s , são

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_m \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i}, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \sum_m \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_i}, \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

com a condição $\phi_m = 0$.

Uma função arbitrária $F(q, p)$ tem sua evolução temporal escrita na forma compacta dos parênteses de Poisson da seguinte forma:

$$\dot{F} = \{F, H\} + \sum_m \lambda_m \{F, \phi_m\} \approx \{F, H_T\}, \quad (\text{A.8})$$

onde introduzimos a noção de igualdade fraca $\phi_m \approx 0$ para sublinhar que a função ϕ_m é restrita a valer zero mas não é identicamente nula como função sobre todo o espaço de fase, de maneira que cada termo $\{\lambda_m, F\}\phi_m$, sendo proporcional a um dos vínculos, é fracamente zero. As equações de Hamilton escritas em termos dos parênteses de Poisson são dadas por

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &\approx \{q_i, H_T\}, \\ \dot{p}_i &\approx \{p_i, H_T\}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

A.2 Condições de Consistência e Vínculos Secundários

Por consistência do formalismo temos que exigir que os vínculos sejam preservados para todos os instantes, ou seja, $\dot{\phi}_m \approx 0$. De (A.8) temos

$$\{\phi_m, H\} + \sum_{m'} \lambda_{m'} \{\phi_m, \phi_{m'}\} \approx 0, \quad (\text{A.10})$$

que são as condições de consistência. Três casos distintos podem ocorrer em (A.10).

No primeiro caso, $\{\phi_m, \phi_{m'}\} \approx 0$ e a relação resultante $\{\phi_m, H\} \approx 0$ é um dos vínculos primários já conhecidos. Neste caso, os multiplicadores de Lagrange são inteiramente arbitrários.

No segundo caso, $\det ||\{\phi_m, \phi_{m'}\}|| \neq 0$. Não são obtidos novos vínculos e as condições de consistência determinam univocamente os multiplicadores de Lagrange. Se $||C_{mm'}||$ é a matriz inversa de $||\{\phi_m, \phi_{m'}\}||$ temos

$$\sum_{m''} C_{mm''} \{\phi_{m''}, \phi_{m'}\} = \delta_{mm'} \quad (\text{A.11})$$

e de (A.10) resulta

$$\lambda_m \approx - \sum_{m'} C_{mm'} \{\phi_{m'}, H\}. \quad (\text{A.12})$$

Então (A.8) é escrita como¹

$$\dot{F} = \{F, H\}^*, \quad (\text{A.13})$$

donde definimos o parêntese de Dirac²

$$\{F, H\}^* \approx \{F, H\} - \sum_{m,m'} \{F, \phi_m\} C_{mm'} \{\phi_{m'}, H\}. \quad (\text{A.14})$$

No terceiro caso, novas equações de vínculos são criadas quando fazemos a imposição de que os vínculos primários devem ser preservados no tempo. Esses novos vínculos são chamados de vínculos secundários. Esses vínculos devem ser preservados no tempo também, o que leva a uma equação semelhante a (A.10). Se depois de impormos as condições de consistência aos vínculos secundários recairmos no primeiro ou no segundo caso o processo termina. Caso contrário, o processo de obter outros vínculos das condições de consistência continua. Após um número finito de passos o processo termina e ficamos com um conjunto de vínculos secundários. Este procedimento é conhecido como algoritmo de Dirac-Bergmann. Obtemos assim as condições finais de consistência

$$\{\phi_j, H\} + \sum_{m=1}^M \lambda_m \{\phi_j, \phi_m\} \approx 0 \quad , \quad j = 1, \dots, M + K = J, \quad (\text{A.15})$$

onde K é o número total de vínculos secundários. Supomos que estas equações possam ser satisfeitas, caso contrário o formalismo é inconsistente. A equação (A.15) é uma equação matricial. Se a matriz $|\{\phi_j, \phi_m\}|$ não puder ser invertida, a solução não será unívoca, pois podemos somar a cada solução uma combinação linear qualquer de funções $V_m(q, p)$ tais que

$$V_m(q, p) \{\phi_j, \phi_m\} = 0. \quad (\text{A.16})$$

Assim, concluímos que a solução mais geral para (A.15) é dada por

$$\lambda_m = U_m + \sum_{a=1}^A v_a V_m^{(a)}, \quad (\text{A.17})$$

onde os coeficientes v_a são completamente arbitrários podendo ser quaisquer funções do tempo. $V_m^{(a)}$ são funções linearmente independentes que satisfazem

¹Utilizamos o sinal de igualdade porque os parênteses de Dirac dos vínculos com qualquer $F(q, p)$ são nulos. Isto significa que a igualdade vale em todo o espaço de fase e não somente na hipersuperfície $\phi_m \approx 0$. Dizemos tratar-se de uma igualdade forte.

²Os parênteses de Dirac têm as mesmas propriedades algébricas que os parênteses de Poisson e satisfazem a identidade de Jacobi.

(A.16) e U_m são soluções particulares da equação (A.15). Podemos agora, substituir (A.17) em (A.5) para escrever a hamiltoniana total

$$H_T = H + \sum_m U_m \phi_m + \sum_{m,a} v_a V_m^{(a)} \phi_m \equiv H' + \sum_a v_a \Phi_a, \quad (\text{A.18})$$

onde

$$H' = H + \sum_m U_m \phi_m \quad (\text{A.19})$$

e definimos

$$\Phi_a = \sum_{m=1}^M V_m^{(a)} \phi_m. \quad (\text{A.20})$$

Uma função $F(q, p)$ é de primeira classe se o seu parêntese de Poisson com qualquer outro vínculo (primário ou secundário) é fracamente zero. Caso contrário a função é dita de segunda classe. A hamiltoniana total (A.18) é de primeira classe porque é a soma de H' de primeira classe com uma combinação linear com coeficientes arbitrários de vínculos de primeira classe Φ_a . O número de funções arbitrárias é igual ao número de coeficientes v_a , os quais são tantos quanto o número de vínculos de primeira classe.

A.3 Quantização

Estabelecido o formalismo hamiltoniano para sistema clássicos com vínculos passamos a construir o formalismo quântico para este sistema. O processo de quantização consiste em estabelecer a equação de Schrödinger

$$i \frac{d\Psi}{dt} = \hat{H}_T \Psi, \quad (\text{A.21})$$

onde \hat{H}_T é o operador correspondente à hamiltoniana (A.18). E fazer também com que as relações entre as variáveis clássicas através dos parênteses de Poisson sejam levadas em relações de comutação entre os operadores

$$[\hat{q}_k, \hat{p}_l] = i\delta_{kl}, \quad (\text{A.22})$$

ao mesmo tempo que as variáveis dinâmicas se transformam em operadores. Como as relações de comutação já estão fixadas, se todos os vínculos forem de primeira classe, não podemos interpretar as equações de vínculo $\hat{\phi}_j$ como novas relações entre operadores. Assim, devemos impor que cada equação de vínculo seja uma restrição sobre a função de onda

$$\hat{\phi}_j \Psi = 0, \quad (\text{A.23})$$

onde os $\hat{\phi}_j$ são os operadores correspondentes a todos os vínculos.

Se a aplicação de um determinado vínculo $\hat{\phi}_j$ anula a função de onda, então a aplicação sucessiva de dois vínculos sobre a função de onda também tem que resultar zero ($\hat{\phi}_k \hat{\phi}_j \Phi = 0$). Se invertemos a ordem de aplicação dos vínculos o resultado ainda deve ser zero, de forma que o comutador de quaisquer dois vínculos aplicados à função de onda deve anulá-la.

Com relação à quantização de sistemas hamiltonianos vinculados em que aparecem vínculos de segunda classe, o fato de o sistema apresentar vínculos de segunda classe está relacionado com a existência de variáveis dispensáveis. O primeiro passo para eliminar essas variáveis é, através de combinações lineares, diminuir ao máximo o número de vínculos de segunda classe. Depois é possível substituir os parênteses de Poisson pelos parênteses de Dirac, os quais possuem a propriedade de fornecer corretamente as equações de movimento e não alterar as relações de comutação dos vínculos de primeira classe. Além disso, pode-se mostrar que o parêntese de Dirac de um vínculo de segunda classe com qualquer função das coordenadas e momentos generalizados $A(q, p)$ é fortemente nulo, o que nos possibilita tomar os vínculos de segunda classe como identicamente nulos desde o princípio, antes de calcular os parênteses de Dirac. Assim, ao contrário dos vínculos de primeira classe, os vínculos de segunda classe devem ser consideradas como identidades entre operadores que podem ser efetivamente usadas para eliminar completamente da teoria o número correspondente de ps e qs .

Resumindo esta seção, a quantização do sistema consiste em fazer $i\{A, B\}^*$ corresponder a $[\hat{A}, \hat{B}]_-$, impor os vínculos de primeira classe como condições sobre os estados Ψ e tomar os vínculos de segunda classe como equações entre operadores.

Apêndice B

Operadores Auto-Adjuntos

Para representar um possível estado físico, a função de onda $\Psi(\vec{r}, t)$ deve ser normalizada:

$$\int |\Psi|^2 d^3\vec{r} = 1. \quad (\text{B.1})$$

O conjunto de todas as funções de quadrado integrável

$$f \quad \text{com} \quad \int_{-\infty}^{\infty} |f(\vec{r})|^2 d^3\vec{r} < \infty, \quad (\text{B.2})$$

denotado por $L^2(\mathbb{R}^3)$, constitui um exemplo de um espaço geral denominado espaço de Hilbert. Neste apêndice serão apresentados alguns tópicos da teoria dos operadores lineares em espaço de Hilbert. Um estudo mais detalhado, embora ainda de caráter introdutório, pode ser encontrado em [50]. Para um tratamento completo, com as demonstrações de todos os teoremas enunciados neste apêndice, o leitor é remetido a [40].

Definição B.1. *Um operador A é uma aplicação*

$$x \mapsto y = Ax, \quad x \in D(A), \quad y \in \mathcal{H}$$

do subconjunto $D(A) \subset \mathcal{H}$ no espaço de Hilbert \mathcal{H} . O operador A é linear se $D(A)$ é um espaço vetorial e

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay, \quad \forall x, y \in \mathcal{H}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

O conjunto $D(A)$ sobre cujos vetores a ação do operador A está definida é chamado de domínio de A . A imagem ou alcance de A , denotado por $\text{Ran}(A)$, é o conjunto dos elementos $y \in \mathcal{H}$ tais que $y = Ax$ para algum $x \in D(A)$.

Denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno no espaço de Hilbert \mathcal{H} .

Definição B.2. Um operador A é simétrico (ou hermitiano) se

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \quad \forall x, y \in D(A). \quad (\text{B.3})$$

Exemplo B.1. O operador posição Q em $L^2(\mathbb{R})$ definido por

$$(Qf)(x) = xf(x),$$

com domínio

$$D(A) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx < \infty \right\},$$

é simétrico, pois

$$\langle Qf, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (xf(x))^* g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^* xg(x) dx = \langle f, Qg \rangle$$

quaisquer que sejam $f, g \in D(Q)$.¹

Exemplo B.2. O operador momento linear $P = -id/dx$ em $L^2(\mathbb{R})$ com domínio $D(P) = \mathcal{S}$, onde \mathcal{S} é o espaço de Schwartz das funções infinitamente diferenciáveis de decréscimo rápido, é simétrico. Com efeito, se $f, g \in D(P)$, uma integração por partes fornece

$$\langle Pf, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} (-if'(x))^* g(x) dx = if^* g \Big|_{-\infty}^{\infty} - i \int_{-\infty}^{\infty} f(x)^* g'(x) dx = \langle f, Pg \rangle$$

porque $f(x)$ e $g(x)$ tendem a zero para $x \rightarrow \pm\infty$.

Definição B.3. Um conjunto de vetores $S \subset \mathcal{H}$ é denso no espaço de Hilbert \mathcal{H} se e somente se o único elemento de \mathcal{H} que é ortogonal a todos os elementos de S é o vetor nulo.

Definição B.4. Dado um operador A densamente definido² num espaço de Hilbert \mathcal{H} , seja $D(A^\dagger)$ o conjunto dos vetores $y \in \mathcal{H}$ para os quais existe $y_\dagger \in \mathcal{H}$ tal que

$$\langle y_\dagger, x \rangle = \langle y, Ax \rangle \quad \forall x \in D(A). \quad (\text{B.4})$$

Para cada $y \in D(A^\dagger)$ definimos $A^\dagger y = y_\dagger$. O operador linear A^\dagger é chamado adjunto (ou conjugado hermitiano) de A .

¹Denotamos por f^* o complexo conjugado de f .

²Isto é, cujo domínio é denso em \mathcal{H} .

De acordo com esta definição, o operador adjunto é tal que

$$\langle A^\dagger y, x \rangle = \langle y, Ax \rangle \quad \forall x \in D(A), \forall y \in D(A^\dagger). \quad (\text{B.5})$$

Deve-se ressaltar que o domínio de A^\dagger não é necessariamente denso e, em casos extremos, é possível que se tenha $D(A^\dagger) = \{0\}$. Por outro lado, pode-se mostrar, que o adjunto de A só existe se A é um operador linear com domínio denso.

Definição B.5. *Um operador A (não necessariamente linear) é dito fechado se goza da seguinte propriedade: se a sequência $x_1, x_2, x_3, \dots \in D(A)$ converge para $x \in \mathcal{H}$ e se a sequência Ax_1, Ax_2, Ax_3, \dots converge para $y \in \mathcal{H}$, então $x \in D(A)$ e $Ax = y$.*

Definição B.6. *Um operador linear A é auto-adjunto se e somente se $A = A^\dagger$, isto é, se e somente se A é simétrico e $D(A) = D(A^\dagger)$.*

Na mecânica quântica postula-se que a cada observável, isto é, a cada grandeza física mensurável corresponde um único operador auto-adjunto.

Denotemos por $Ker(T)$ a nulidade ou núcleo de T , isto é, o conjunto dos $x \in D(T)$ tais que $Tx = 0$.

Teorema B.1. Se A é um operador simétrico num espaço de Hilbert \mathcal{H} , as três afirmações abaixo são equivalentes:

1. A é auto-adjunto;
2. A é fechado e $Ker(A^\dagger + iI) = Ker(A^\dagger - iI) = \{0\}$;
3. $Ran(A + iI) = Ran(A - iI) = \mathcal{H}$.

Definição B.7. *Um operador linear $U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ definido em todo o espaço de Hilbert \mathcal{H} é unitário se e somente se*

$$U^\dagger U = UU^\dagger = I, \quad (\text{B.6})$$

isto é, se e somente se $U^{-1} = U^\dagger$.

Teorema B.2. Se A é auto-adjunto e U é unitário, o operador

$$B = UAU^{-1} \quad \text{com} \quad D(B) = UD(A) \quad (\text{B.7})$$

é auto-adjunto.

Se um operador é simétrico mas não é auto-adjunto, seu domínio é um subconjunto próprio do domínio do seu adjunto. Torna-se importante estudar em que circunstâncias é possível estender o domínio de um operador simétrico de modo a torná-lo auto-adjunto, e se essa extensão é única.

Teorema B.3. Um operador simétrico é dito essencialmente auto-adjunto se o seu adjunto é auto-adjunto, isto é, $A^{\dagger\dagger} = A^{\dagger}$. Um operador essencialmente auto-adjunto possui uma única extensão auto-adjunta, que coincide com A^{\dagger} .

De modo geral, é muito difícil encontrar o domínio exato de um operador simétrico A no qual ele é auto-adjunto. Costuma ser mais fácil determinar um domínio no qual A é essencialmente auto-adjunto, pois isto assegura a existência de uma única extensão auto-adjunta do operador, o que é suficiente para que A possa representar um observável na mecânica quântica.

Um operador simétrico pode ter muitas, nenhuma ou apenas uma extensão auto-adjunta.

Pelo Teorema B.1, um operador simétrico A é auto-adjunto se e somente se $\text{Ran}(A \pm iI) = \mathcal{H}$. Se considerarmos os complementos ortogonais $\text{Ran}(A \pm iI)^{\perp}$, os seus tamanhos indicam em que medida A não é auto-adjunto. Esses subespaços são chamados de subespaços de deficiência de A e suas respectivas dimensões são os índices de deficiência de A .

Definição B.8. Dado um operador simétrico A , sejam

$$\begin{aligned} K_+ &= \text{Ran}(A + iI)^{\perp} = \text{Ker}(A^{\dagger} - iI), \\ K_- &= \text{Ran}(A - iI)^{\perp} = \text{Ker}(A^{\dagger} + iI). \end{aligned}$$

Dizemos que K_+ e K_- são os subespaços de deficiência de A e os números

$$n_{\pm}(A) = \dim(K_{\pm})$$

são chamados índices de deficiência de A .

Por definição, n_+ é o número de soluções linearmente independentes de

$$A^{\dagger}x = ix, \tag{B.8}$$

enquanto que n_- é o número de soluções linearmente independentes de

$$A^{\dagger}x = -ix, \tag{B.9}$$

com $x \in D(A^{\dagger})$. Os índices de deficiência podem ser quaisquer inteiros não-negativos; é ainda possível que n_+ ou n_- (ou ambos) sejam infinitos.

Teorema B.4 (von Neumann). Seja A um operador simétrico fechado com índices de deficiência n_+ e n_- . Então A tem extensões auto-adjuntas se e somente se $n_+ = n_-$. Há uma correspondência biunívoca entre as extensões auto-adjuntas de A e as transformações unitárias $U : K_+ \rightarrow K_-$. Explicitamente, cada extensão auto-adjunta A_U de A tem domínio

$$D(A_U) = \{x + y_+ + Uy_+ \mid x \in D(A) \text{ e } y_+ \in K_+\} \quad (\text{B.10})$$

no qual atua segundo a regra

$$A_U(x + y_+ + Uy_+) = Ax + iy_+ - iUy_+ \quad (\text{B.11})$$

Este teorema de von Neumann é tremendamente importante porque não apenas caracteriza precisamente em que condições um operador simétrico admite extensões auto-adjuntas, mas também fornece um método de construir as referidas extensões.

Exemplo B.3. Um operador que ocorre com frequência na cosmologia quântica é $H = -d^2/dx^2$ em $L^2[0, \infty)$ com domínio

$$D(H) = \{f \in AC^2[0, \infty) \mid f(0) = f'(0) = 0\}.$$

Neste domínio³ verifica-se imediatamente que H é simétrico. Prova-se que o domínio do adjunto é $D(H^\dagger) = AC^2[0, \infty)$ e neste domínio $H^\dagger g = -g''$. Note que o domínio de H^\dagger é maior do que o domínio de H porque $f \in D(H^\dagger)$ não precisa se anular na origem. Os índices de deficiência de H são determinados pelas soluções de

$$-g'' = \pm ig.$$

As soluções linearmente independentes de $-g'' = ig$ são

$$\exp\left[\frac{(-1+i)x}{\sqrt{2}}\right] \text{ e } \exp\left[\frac{(1-i)x}{\sqrt{2}}\right],$$

das quais apenas a primeira pertence a $L^2[0, \infty)$, o que implica $n_+ = 1$. Analogamente, as soluções linearmente independentes de $-g'' = -ig$ são

$$\exp\left[\frac{(1+i)x}{\sqrt{2}}\right] \text{ e } \exp\left[-\frac{(1+i)x}{\sqrt{2}}\right],$$

³Para a definição do conjunto de funções AC^m utilizado acima o leitor é remetido à referência [51].

mas apenas a segunda pertence a $L^2[0, \infty)$, de modo que $n_- = 1$ e H possui extensões auto-adjuntas. Sejam

$$g_+(x) = 2^{-1/4} \exp \left[\frac{(-1+i)x}{\sqrt{2}} \right] \quad \text{e} \quad g_-(x) = 2^{-1/4} \exp \left[-\frac{(1+i)x}{\sqrt{2}} \right],$$

vetores normalizados de K_{\pm} . Então os elementos do domínio de H_U são

$$g = f + \beta g_+ + \beta \gamma g_- \quad f \in D(H), \quad \beta \in \mathbb{C}, \quad |\gamma| = 1.$$

Segue-se que

$$g(0) = 2^{-1/4} \beta (1 + \gamma), \quad g'(0) = \frac{2^{-1/4} \beta}{\sqrt{2}} [-1 + i - (1 + i)\gamma].$$

Se $\gamma = -1$ temos $g(0) = 0$ com $g'(0)$ arbitrário, ao passo que se $\gamma \neq -1$ temos

$$g'(0) = \frac{g(0)}{\sqrt{2}} \left[-1 + i \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma} \right] = \frac{\tan(\theta/2) - 1}{\sqrt{2}} g(0) \equiv a g(0), \quad a \in \mathbb{R},$$

onde $\gamma = e^{i\theta}$. Portanto, as extensões auto-adjuntas H_a de H , com $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ têm domínios

$$D(H_a) = \{f \in AC^2[0, \infty) \mid f'(0) = a f(0)\}$$

com $a \in \mathbb{R}$ e

$$D(H_\infty) = \{f \in AC^2[0, \infty) \mid f(0) = 0\}.$$

Estas condições de contorno sobre as funções pertencentes ao domínio do operador $-d^2/dx^2$ em $L^2[0, \infty)$ são sintetizadas na equação (3.42).

Referências Bibliográficas

- [1] Einstein, A. *Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber*, 844 (1915).
- [2] Einstein, A. *Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber*, 142 (1917).
- [3] de Sitter, W. *Proc. Akad. Weteusch. amsterdam* **19**, 1217 (1917).
- [4] Friedmann, A. *Z. Phys.* **10**, 377 (1922); **21**, 326 (1924).
- [5] Hubble, E., *Proc. Nat. Acad. Sci. (U.S.A.)* **15**, 168 (1929).
- [6] Gamow, G., *Phys. Rev.* **70**, 572 (1946).
- [7] Alpher, R. A., Bethe, H. A. e Gamow, G., *Phys. Rev.* **73**, 80 (1948).
- [8] Alpher, R. A., e Hermann, R. C., *Nature* **162**, 774 (1948).
- [9] Penzias, A. A. e Wilson, R. W., *Ap. J.* **142**, 419 (1965).
- [10] Riess, A. G. *et al.*, *Astron. J.* **116**, 1009 (1998).
- [11] Perlmutter, S. *et al.*, *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999).
- [12] Copeland, E. J., Sami, M. e Tsujikawa, S., hep-th/0603057.
- [13] Wetterich, C. *Nucl. Phys. B* **302**, 668 (1988).
- [14] Ratra, B. and Peebles, P. J. E., *Phys. Rev. D* **37**, 3406 (1988).
- [15] Armendariz-Picon, C., Mukhanov, V. and Steinhardt, P. J., *Phys. Rev. Lett.* **85**, 4438 (2000).
- [16] Armendariz-Picon, C., Mukhanov, V. and Steinhardt, P. J., *Phys. Rev. D* **63**, 103510 (2001).
- [17] Gorini, V., Kamenshchik, A., Moschella, U. and Pasquier, V., gr-qc/0403062.

- [18] Makler, M., Oliveira, S. Q. and Waga, I., *Phys. Lett. B* **555**, 1 (2003).
- [19] Kamenshchik, A., Moschella, U. and Pasquier, V., *Phys. Lett. B* **511**, 265 (2001).
- [20] Bilic, N., Tupper, G. B. and Viollier, R. D., *Phys. Lett. B* **535**, 17 (2002).
- [21] Bento, M. C., Bertolami, O. and Sen, A. A., *Phys. Rev. D* **66**, 043507 (2002).
- [22] Sotiriou, T. P., and Faraoni, V., *Rev. Mod. Phys.* **82**, 451 (2010).
- [23] Peebles, P. J. E. and Ratra, B., *Rev. Mod. Phys.* **75**, 559 (2003).
- [24] Padmanabhan, T., *Phys. Rept.* **380**, 235 (2003).
- [25] Riess, A. G. *et al.*, *Astrophys. J.* **607**, 665 (2004).
- [26] Kiefer, C., *Quantum Gravity*, 2^oed. (Oxford University Press, New York, 2007).
- [27] DeWitt, B. S., *Phys. Rev.* **160**, 1113 (1967).
- [28] Arnowitt, R., Deser, S. and Misner, C. W., *Gravitation: An Introduction to Current Research*, edited by Witten, L. (Wiley, New York, 1962), 227-265 [gr-qc/0405109] .
- [29] Schutz B. F., *Phys. Rev.* **D2**, 2762 (1970); **D4**, 3559 (1971).
- [30] Kiefer, C., *Phys. Rev. D* **38**, 1761 (1988).
- [31] Lapchinskii, V. G. e Rubakov, V. A., *Theo. Math. Phys.* **33**, 1076 (1977).
- [32] Wald, R. M., *General Relativity* (The University of Chicago Press, Chicago, 1984).
- [33] Isham, C., J., *Canonical quantum gravity and the problem of time*, gr-qc/9210011.
- [34] Carroll, M. S., *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity* (Addison Wesley, San Francisco, 2004), p. 119.
- [35] Kowalski-Glikman, J. and Vink, J. C., *Class. Quantum Grav.* **7**, 901 (1990).

- [36] Colistete Jr., R., Fabris, J. C. and Pinto-Neto, N., *Phys. Rev. D* **57**, 4707 (1998).
- [37] Lemos N. A., and Alvarenga, F. G., *Gen. Rel. Grav.* **31**, 1743 (1999).
- [38] Barboza, E. M. e Lemos N. A., *Phys. Rev. D* **78**, 023504 (2008).
- [39] Barton, G., *Ann. Phys.* **166**, 322 (1986).
- [40] Reed, I. M. and Simon, B., *Methods of Modern Mathematical Physics Vol. II: Fourier Analysis, Self-Adjointness* (Academic, NY, 1975).
- [41] Clark, T. E., Menikoff, R. and Sharp, D. H., *Phys. Rev. D* **22**, 3012 (1980).
- [42] Farhi, E. and Gutmann, S., *Int. J. Mod. Phys. A* **5**, 3029 (1990).
- [43] Sakurai, J. J., *Modern Quantum Mechanics*, Rev. ed. (Addison Wesley, San Francisco, 1994), p. 112.
- [44] Tipler, F. J., *Phys. Rep.* **137**, 231 (1986).
- [45] Tannoudji, C. C., Diu, B., e Laloë, F., *Quantum Mechanics*, 2° ed. (Wiley-Interscience, Paris, 2006), p. 533.
- [46] Dirac, P. A. M., *Lectures on Quantum Mechanics* (Dover Publications, New York, 2001).
- [47] Henneaux, M. and Teitelboim, C., *Quantization of Gauge Systems* (Princeton University Press, New Jersey, 1992).
- [48] Lemos, N. A., *Mecânica Analítica*, 2° Edição (Editora Livraria da Física, São Paulo, 2007).
- [49] Spivak, M. *Calculus on Manifolds: A Modern Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus* (Addison Wesley Publishing Company, 1965), teoremas 2.12 e 2.13.
- [50] Lemos, N. A., *Tópicos de Física Matemática*, Notas de aula (IF-UFF).
- [51] Teschl, G., *Mathematical Methods in Quantum Mechanics* (American Mathematical Society, Providence, 2009).