

16 de março de 2011

**Universidade Federal Fluminense**

**Instituto de Física**

**Título**

**Modelo hidrodinâmico para  
Quantum Free-electron lasers**

**Luís Fernando Monteiro**

*Tese apresentada como requisito parcial para a obtenção  
do título de Doutor em Física*

**Orientador: Dr. Antônio Serbeto**

Niterói - Rio de Janeiro

2010

# Agradecimentos

## Agradeço

- Ao Dr. Antônio Serbeto, por ter aceito árdua tarefa de me orientar, e me aturar (novamente);
- Ao Colegiado da Pós-Graduação, em especial aos Profs. Drs. Zelaquette e Fabio Aarão pelo grande estímulo e estrutura material;
- Aos meus professores do Instituto de Física, por toda ajuda durante esses anos de doutorado;
- Aos meus amigos da pós graduação;
- Aos funcionários da biblioteca e das secretarias, pela atenção dispensada;
- Aos meus amigos da Terceira Vara Federal, pela força que sempre me deram;
- À minha mulher, Solange Pimenta, e aos meus filhos Luis Fernando e Maria Clara, pedindo desculpas pelas ausências.
- A todos que, de uma maneira ou de outra, me ajudaram a chegar até aqui.

# Resumo

Lasers de Elétrons livres são hoje uma área muito ativa de pesquisa. Tais dispositivos podem gerar alta potência de radiação coerente convertendo a energia de um feixe de elétrons relativísticos em energia de campo eletromagnético. Para tanto o feixe é injetado em um ondulator (*wiggler*), que é basicamente um campo magnetostático periódico ou, alternativamente, um pulso de laser em sentido contrário ao feixe (onduladores eletromagnéticos, ou ópticos). O *wiggler* obriga o feixe, inicialmente em movimento retilíneo, a oscilar e emitir radiação eletromagnética.

Os FELs são capazes de operar em uma extensa banda do espectro eletromagnético, em comprimentos de onda que não são acessíveis aos lasers convencionais. Esta flexibilidade de frequência é devido ao fato de que o comprimento de onda da radiação coerente,  $\lambda_r$ , é principalmente determinada pela energia do feixe e pelo período do *wiggler*, que satisfaz a condição de ressonância aproximada  $\lambda_r \cong \lambda_w/4\gamma_z^2$ , para *wigglers* ópticos, ou  $\lambda_r \cong \lambda_w/2\gamma_z^2$ , para *wigglers* magnetostáticos, onde  $\gamma_z$  é a energia normalizada longitudinal do feixe de elétrons e  $\lambda_w$  é período do *wiggler*.

É bem conhecido que a teoria dos FELs foi originalmente concebida dentro da Mecânica Quântica por Madey e colaboradores. Em seu notável trabalho, eles calcularam o ganho de radiação usando o método de Weizsäcker-Williams. Subsequentemente, foi mostrado que modelos clássicos podiam descrever os FELs igualmente bem, desde que o momento de *recoil* de um fóton não fosse maior que o momento de *spread* do feixe, caso em que Mecânica Quântica não poderia ser desprezada, e modelos quânticos seriam necessários.

Nos últimos anos tem havido grande interesse na realização experimental de FELs baseados em *wigglers* ópticos. O fato de operarem em comprimentos de onda da ordem da luz visível ou menor dá aos lasers a vantagem de funcionarem como *wigglers* de período muito curto. Esse mecanismo tem a vantagem de utilizar feixes de elétrons bem menos energéticos, na casa dos poucos MeVs contra dezenas de GeVs do *wiggler* magnetostático, para FELs operando na casa dos Raios-X, por exemplo. Assim, *wigglers* por laser pode-

riam viabilizar a construção de dispositivos emissores de Radiação X e Gama coerentes com dimensões bastante reduzidas (*Table-top X-Ray Free-Electron Lasers*), baseados no espalhamento Compton estimulado (*Stimulated Compton Backscattering*). Porém, restou provado que efeitos quânticos não poderiam ser desprezados nesse domínio de feixe de baixa energia e fótons de alta energia, passando o FEL a operar no regime Quântico.

Neste trabalho apresentaremos um modelo hidrodinâmico para Free-Electron Lasers que incorpora efeitos quânticos. Partindo da equação da energia relativística total do elétron sujeito a um potencial ponderomotivo, sob a hipótese de envelope lentamente variável, deduziremos uma equação para a evolução da função de onda do elétron que tem a forma da equação de Schrodinger. Por uma transformação de Madelung deduziremos um sistema de equações de fluido para a dinâmica do feixe de elétrons.

O acoplamento com as equações de campo nos permitirá deduzir uma relação de dispersão cúbica que inclui efeitos de cargas espaciais para a instabilidade, e subsequentemente deduziremos um conjunto de equações de fluido não lineares tipo *coupled-mode* para plasma quântico, capazes de descrever um feixe de elétrons relativísticos interagindo com a radiação estimulada em um *wiggler* óptico sob a aproximação de envelope lentamente variável (SVEA).

Resultados numéricos serão apresentados ao final.

# Abstract

Free-Electron Laser is today a very important area of research. These devices can generate high power of coherent radiation by releasing the energy of a relativistic electron beam into electromagnetic field energy. It works by injecting the relativistic beam into a device called undulator (or wiggler), that consists of a magnetostatic field or, alternatively, a counterpropagating laser pulse (electromagnetic, or optical, undulators). The wiggler forces the beam, that moves in a straight line at the beginning of interaction, to execute a wave movement and consequently it emits electromagnetic radiation.

FELs are able to operate in a wide range of the electromagnetic spectrum, in wavelengths that are unreachable to conventional lasers. Such frequency flexibility is due to the fact that the coherent radiation wavelength,  $\lambda_r$ , is mainly determined by the beam energy and by the wiggler period, which satisfies the approximate resonance condition  $\lambda_r \cong \lambda_w/4\gamma_z^2$ , to optical wigglers, or  $\lambda_r \cong \lambda_w/2\gamma_z^2$ , to magnetostatic wigglers, where  $\gamma_z$  is the normalized longitudinal energy of the electron beam and  $\lambda_w$  is the wiggler period.

It is well known that FELs theory was originally conceived in the framework of Quantum Mechanics by Madey and co-workers. In their notable work they calculated the radiation gain by using the Weizsäcker-Williams method. Subsequently, it was shown that classical models could describe FELs equally well, if the one photon *momentum* recoil is not greater than the beam *momentum* spread, hence quantum effects can be neglected. Otherwise, Quantum-Mechanics effects can not be neglected, and quantum models are necessary.

In the last years it has been happening a great interest in the experimental realization of FELs based on optical wigglers. The fact of operating in wavelengths of the order of visible light or less, gives to a laser pulse the advantage of working as a very-small-period wiggler. Such device also has the advantage of working with a much lower energetic electron-beam, in the range of a few MeVs, instead of tens of GeVs by using a magnetostatic undulator, to FELs working in the range of X-Rays, for example. Then, laser wigglers might make feasible the construction of low-dimension coherent radia-

tion emission devices in the X-ray and Gama ray band (table-top X-Ray Free-Electron Lasers) based on Stimulaed Compton Backscattering. But it was showed that quantum effects might not be neglected in this domain of low-energy electron beam and high foton energy, and the FEL get into to work in a Quantum Regime

In this work we will present a hydrodynamical model to study Free-Electron Lasers that includes quantum effects. Starting from the electron total relativistic energy equation that includes a ponderomotive potencial term, we will deduce a equation to the electron wave-function evolution under the Slow-Vary Envelope Approximation (SVEA) hypotesis, which has the same shape as the Schrodinger equation. By using the Madelung transformation, we will deduce a system of fluid equations to the electron beam dynamic.

The coupling of the electron beam fluid equations to the field ones will allow us to deduce a cubic dispersion relation that includes space-charge effects to the FEL instability. Subsequently we will show a set of nonlinear quantum plasma fluid equations of coupled-mode type to quantumplasmas, which is able to describe a relativistic electron beam interacting with a stimulated radiation inside an optical wiggler under the assumption of the Slow-Varying Envelope Approximation.

Numerical results will be showed at the end.

# Índice

Capítulo 1 - Introdução .....	8
Capítulo 2 - Laser de Elétrons Livres .....	12
2.1 - Descrição clássica .....	12
2.2 - Amplificação por emissão estimulada e o regime de baixo ganho .	15
2.3 - O Regime de Alto Ganho .....	22
2.4 - O modelo quântico para FELs .....	25
Capítulo 3 - O modelo hidrodinâmico .....	27
3.1 - Introdução .....	27
3.2 - A equação de Schrodinger .....	28
3.3 - A transformada de Madelung .....	31
3.4 - As Equações de fluido .....	32
Capítulo 4 - A relação de dispersão linear .....	36
4.1 - O potencial ponderomotivo .....	36
4.2 - Equação do plasma .....	37
4.3 - A evolução da radiação .....	38
Capítulo 5 - O crescimento não linear .....	45
5.1 - Introdução .....	45
5.2 - A evolução da amplitude da radiação .....	46
5.3 - A evolução das oscilações de plasma .....	47
5.4 - O sistema de equações modo-acoplado .....	49
5.5 - Relações de Manley-Rowe .....	50
5.6 - Resultados numéricos .....	54
Capítulo 6 - Conclusão .....	64
Apêndice .....	66
Bibliografia .....	68

# Capítulo 1

## Introdução

Com o surgimento dos lasers, em meados do século passado, a humanidade passou a dispor de um poderoso instrumento científico e tecnológico, que causou impacto em praticamente todas as áreas do conhecimento, indo desde a pesquisa básica até aplicações industriais, militares, em telecomunicações, computação, medicina, biologia, astronomia, etc., apenas para citar algumas. Não foi sem exagero que alguém disse, certa vez, que o laser era “uma solução à procura de um problema”.

Desde que o primeiro pulso foi disparado de um cristal de rubi sintético, em 16 de maio de 1960, no Hughes Research Laboratories, em Malibu, Califórnia, pelo físico Theodore Harold Maiman [1], uma grande variedade de lasers já foi proposta e realizada. Eles têm como princípio básico a amplificação da luz por meio da emissão estimulada de radiação, oriunda do decaimento de elétrons de um nível excitado de energia para um nível mais baixo, em um meio material limitado por uma cavidade ressonante. Por isso podemos chamar esses lasers de *lasers moleculares*.

Contudo, apesar dos avanços tecnológicos acumulados desde a sua invenção, os lasers moleculares possuem limitações tais como baixa eficiência energética e monocromaticidade fixa, sem possibilidade de ressonância para uso em aplicações diferentes daquelas para as quais foram originalmente concebidos. Por fim, ficam restritos a emitir radiação em frequências, no máximo, até o ultravioleta distante, tendo em vista não existirem materiais com *gap* de energia suficientemente alto para emissão de fótons em frequências maiores,



na banda dos Raios-X, e nem com a refletância necessária para a manufatura de cavidades ressonantes.<sup>1</sup>

Os *Free-Electron Lasers*, ou Lasers de elétrons Livres, no vernáculo, vêm preencher essa lacuna, suprimindo com radiação coerente de alta intensidade regiões não abrangidas pelos lasers moleculares ou, mesmo naquelas abrangidas por eles, tornam possível a construção de dispositivos flexíveis e ajustáveis, já que a frequência de operação de um *Free-Electron Laser* não depende das características do material que constitui o meio ativo, mas sim da energia de um feixe de elétrons relativísticos, a qual pode ser alterada de maneira contínua dentro das especificações do acelerador. É o feixe de elétrons que funciona como o meio ativo amplificador do campo de radiação coerente, num processo de conversão de energia cinética em energia de campo. Este conceito ganhou ímpeto com os trabalhos de Madey *et. al.* [2]

A possibilidade de emissão de radiação coerente na faixa de Raios-X e Gama tem tornado a pesquisa em *Free-Electron Lasers* bastante atrativa, tanto teórica quanto experimentalmente. Diversos países vêm desenvolvendo projetos nessa área, como por exemplo, o European X-Ray Free-Electron Laser (XFEL), na Alemanha[3], o Linac Coherent Light Source (LCLS), nos Estados Unidos[4], e o SPring-8 Compact SASE Source (SCSS), no Japão [5]. Todos esses dispositivos tem por objetivo final a geração de pulsos ultra-curtos e brilhantes de Raios-X, cuja aplicabilidade inclui imageamento de estruturas em escala atômica e observação de fenômenos ultra-rápidos, da ordem de femtossegundos.

Com esse poder de resolução espacial e temporal é possível obter imagens de moléculas individuais, estrutura de vírus e proteínas, nanoestruturas artificiais, etc. Também tornam possível a investigação, quadro a quadro, de reações químicas fugazes e complexas, como a fotossíntese.

Muitos são os benefícios nas áreas de nanotecnologia, produção de energia, biologia, medicina, eletrônica, dentre outras. Soma-se a tudo isso a possibilidade de abertura de novos campos de pesquisa, diante de uma nova janela de

---

<sup>1</sup>As maiores frequências são obtidas com os lasers exímeros, que podem atingir comprimentos de onda tão pequenos quanto 126 nm, para o  $Ar_2$ , ou 146 nm, para o  $Kr_2$ , por exemplo.

investigação da natureza.

A principal característica de um *Free-Electron Laser* é que a radiação coerente é gerada por um efeito de agrupamento (*bunching*) do feixe de elétrons dentro do comprimento de onda radiação (às vezes referido como comprimento de onda óptico). Esse fenômeno é devido à *força ponderomotiva* associada à combinação de dois campos, o da própria radiação e do campo magnético de um dispositivo denominado *wiggler*, ou ondulador, no vernáculo, cuja função é forçar o feixe de elétrons a oscilar perpendicularmente ao seu movimento inicial. Esse movimento oscilatório, que é paralelo ao campo elétrico da radiação, permite ao elétron interagir com o campo e fornecer-lhe energia, amplificando-o.

Os *wigglers* podem ser um conjunto de imãs permanentes alternados ou um pulso de laser (convencional) se propagando no sentido contrário ao feixe de elétrons. Neste último caso teremos um *wiggler* óptico.

Quanto à teoria de *Free-Electron Lasers*, eles podem ser descritos por meio da Teoria Quântica de Campos, Eletromagnetismo clássico e Mecânica Quântica. De fato os primeiros modelos se baseavam na Mecânica Quântica, mas o eletromagnetismo clássico se mostrou como uma ótima aproximação para dispositivos operando até a faixa das microondas, ou mesmo luz visível, e utilizando feixes de elétrons altamente relativísticos.

Recentemente tem ocorrido um retorno aos modelos quânticos, uma vez que para *Free-Electron Lasers* operando em comprimentos de onda na casa dos Raios-X e Gama os efeitos quânticos precisam ser considerados, como, por exemplo, o recuo (*recoil*) dos elétrons devido ao campo da radiação emitida por eles próprios. Efeitos quânticos são especialmente relevantes quando a energia do feixe é pequena, i.e, quando o feixe é relativístico, mas não muito (poucos MeVs). Nessas condições o momento do fóton emitido pode ser da mesma ordem de grandeza que o momento do elétron.

Nesta tese desenvolvemos um modelo para *Free-Electron Lasers* em que o feixe de elétrons é tratado como um fluido quântico. Considerando que a energia e o momento do elétron são grandezas que variam lentamente no tempo e no espaço, deduzimos uma equação tipo Schrodinger para evolução

da função de onda de um fluido de elétrons a partir da equação para a energia relativística total de um elétron sujeito a um potencial ponderomotivo de um *wiggler* ótico e de cargas espaciais. As transformações feitas são válidas na aproximação eikonal e equivalem a uma aproximação de Envelope Lentamente Variável (*Slow-Varying Envelope Approximation - SVEA*).

As equações de fluido para a dinâmica do feixe de elétrons são obtidas a partir da equação de Schrodinger por meio de uma aproximação semi-clássica, a transformação de Madelung, na função de onda dos elétrons, que subsequentemente são acopladas às equações de campo eletromagnético (*wiggler* + radiação). A radiação amplificada é vista como um espalhamento Compton estimulado, no qual o feixe relativístico espalha fótons do laser incidente gerando radiação de ultra-curto comprimento de onda.

## Capítulo 2

# Laser de Elétrons Livres

### 2.1 Descrição clássica

Neste capítulo veremos a física básica de um Laser de Elétrons Livres, a que chamaremos pela sigla em inglês FEL, de *Free-Electron Laser*, por ser amplamente utilizada na literatura.

FELs são dispositivos capazes de gerar ou amplificar radiação eletromagnética (EM) convertendo a energia cinética de um feixe de elétrons relativísticos em energia de campo.

Sabemos da teoria eletromagnética que para emitir radiação, uma carga elétrica precisa estar acelerada e que esta emissão é especialmente intensa se a aceleração for perpendicular ao movimento[6]. Considerando um elétron com velocidade inicial na direção  $\hat{z}$ , podemos acelerá-lo transversalmente por meio de dispositivos *wigglers*, que são comumente construídos com uma série de eletroímãs ou magnetos permanentes arranjados em fileira com seus polos alternados para produzir um campo magnético periódico, podendo ser configurados de maneira linear ou helicoidal. Define-se por período a distância  $\lambda_w$  entre dois pólos de mesmo sinal. *Wigglers* magnetostáticos típicos possuem períodos da ordem dos centímetros [7]-[10] e comprimentos  $L_w = N_w \lambda_w$  da ordem dos metros, onde  $N_w$  é o número de períodos contados da entrada à saída do dispositivo <sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>Para FELs operando no máximo em frequências da ordem da luz visível. Para ultravioleta e Raios-X o reduzido ganho da radiação obriga o uso de *wigglers* maiores, podendo chegar a dimensões quilométricas, como veremos adiante.

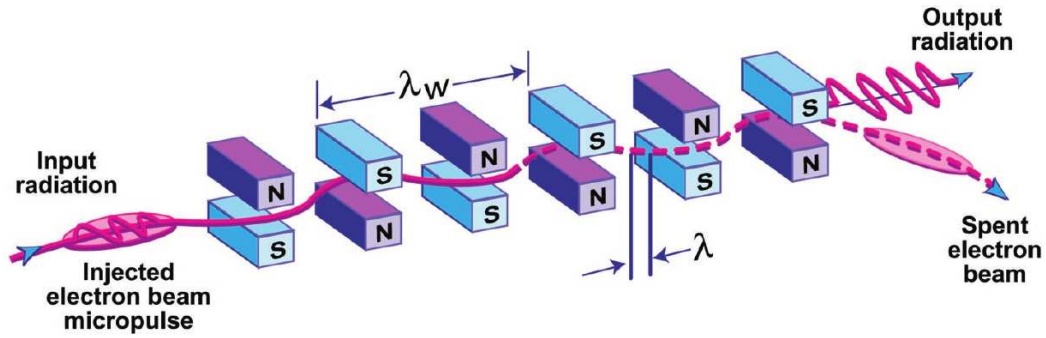


Figura 2.1: Esquema básico de um *Wiggler* linear. Figura reproduzida para ilustração, extraída do artigo intitulado *Free-electron lasers: Status and Applications*, de Patrick G. O'Shea and Henry P. Freund - Revista Science - Vol. 292, 8 de junho de 2001.

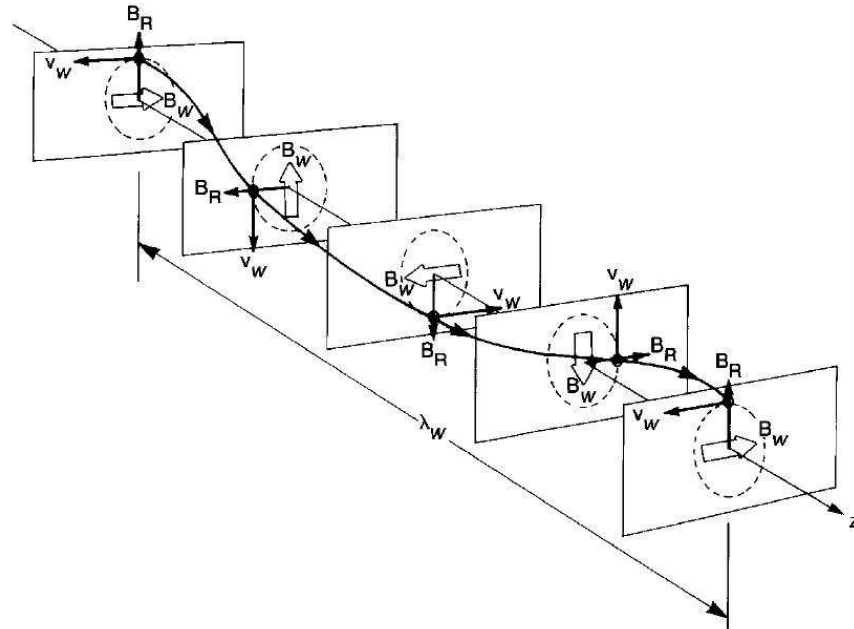


Figura 2.2: Esquema básico de um *Wiggler* Helicoidal. Figura reproduzida para ilustração, extraída do artigo intitulado *Free-electron lasers: Status and Applications*, de Patrick G. O'Shea and Henry P. Freund - Revista Science - Vol. 292, 8 de junho de 2001.

Ao ser injetado no *wiggler*, a força de Lorentz ( $\propto \vec{v} \times \vec{B}_w$ ) faz com que o elétron oscile  $N_w$  vezes o comprimento de onda  $\lambda_w$  até o final de sua trajetória. Mas, em seu próprio referencial, o que ele experimenta não é um campo magnetostático, mas sim uma pseudo-radiação eletromagnética de comprimento de onda  $\lambda'_w = \lambda_w/\gamma_z$ , onde  $\gamma_z$  é o fator de Lorentz associado à velocidade longitudinal do elétron, ( $v_z$ ), que o faz oscilar e emitir um outro pacote de

onda de comprimento  $N_w \lambda'_w$ , centrado em  $\lambda'_s \simeq \lambda'_w$ , que é novamente contraído pelo fator  $\gamma_z$  quando observado de volta ao referencial do laboratório, pelo efeito Doppler. O elétron age como um espelho relativístico onde a radiação é refletida por Espalhamento Compton para trás (*Compton back-scattering*), e que é vista no referencial do laboratório como radiação de emissão espontânea (sincrotron) de comprimento de onda dado aproximadamente por [11] (pag. 5)

$$\lambda_s \simeq \frac{\lambda_w}{2\gamma_z^2} \quad (2.1)$$

onde  $\gamma_z = 1/\sqrt{1 - v_z^2/c^2}$ , e a velocidade  $v_z$  depende dos parâmetros do *wiggler*.

Visto que os elétrons de um feixe se distribuem em fases randômicas um em relação ao outro, a radiação espontânea do ondulator acaba por ter uma intensidade proporcional à corrente, uma vez que os elétrons emitem independentemente um do outro, o que resulta em uma soma incoerente, i.e., sem a correlação de fase típica dos lasers. Assim, a radiação de  $N$  elétrons é simplesmente  $N$  vezes a de um elétron. Ainda mais, devido à trajetória finita dentro do ondulator, a radiação não será exatamente monocromática, mas terá uma distribuição espectral centrada na frequência da emissão espontânea  $w_s = 2\pi c/\lambda_s$ , obtida por transformada de Fourier [12]

$$I(w) \propto \left( \frac{\sin^2 \zeta}{\zeta^2} \right); \quad \zeta = \frac{\pi N_w (w - w_s)}{w_s} \quad (2.2)$$

Considerando a possibilidade de emissão fora do eixo, a equação (2.1) passa a ter sua forma mais acurada [13]

$$\lambda_s = \frac{\lambda_w}{2\gamma^2} (1 + a_w^2 + \gamma^2 \theta^2), \quad (2.3)$$

onde  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta_\perp^2 - \beta_z^2}$  é o fator de Lorentz total elétron,  $\theta$  é o ângulo entre a velocidade paralela do elétron e o vetor de onda  $\vec{k}_s$  da radiação emitida,  $a_w = e\lambda_w B_w / 2\pi m c^2 \simeq 0.93 B_w(T) \lambda_w(cm)$  é o chamado *parâmetro de wiggler*.

O vetor  $\vec{\beta}_\perp$  é a velocidade perpendicular do elétron, normalizada por  $c$ , induzida pelo campo do *wiggler - quiver motion*-, cuja expressão, desprezando-se a perturbação de ordem superior devido ao campo da radiação, pode ser aproximada por [11] (pag. 5)

$$\vec{\beta}_\perp = -\frac{\vec{a}_w}{\gamma}. \quad (2.4)$$

As equações (2.1)-(2.3) ditam a frequência de operação de um FEL, permitindo que operem em praticamente todo o espectro eletromagnético, bastando um ajuste cuidadoso do período do *wiggler* ( $\lambda_w$ ) e/ou da energia do feixe.

Foi desprezado o recuo do elétron, de acordo com uma descrição clássica-relativística onde  $\hbar\omega \ll \gamma m_e c^2$ .

## 2.2 Amplificação por emissão estimulada e o regime de baixo ganho

Na seção anterior vimos que um feixe de elétrons passando através de um *wiggler* gera radiação espontânea de comprimento de onda centrado em  $\lambda_s$ , dado por (2.3). Nesta seção veremos que condições deve satisfazer um campo de radiação pré-existente no *wiggler* de forma que interaja com o feixe de elétrons.

Seja  $\vec{A}_w$  o potencial vetor associado ao campo magnético de um *wiggler* helicoidal e  $\vec{A}_s$  o potencial vetor associado ao campo elétrico  $\vec{E}_s$  de uma radiação eletromagnética circularmente polarizada que se propaga na direção  $\vec{z}$  positiva, descritos por

$$\vec{A}_w = A_w [\hat{x}\cos(k_w z) + \hat{y}\sin(k_w z)]; \quad k_w = 2\pi/\lambda_w \quad (2.5)$$

$$\vec{A}_s = A_s [\hat{x}\cos(-k_s z + w_s t - \psi_0) + \hat{y}\sin(-k_s z + w_s t - \psi_0)]; \quad k_s = w_s/c = 2\pi/\lambda_s \quad (2.6)$$

$$\vec{E}_s = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}_s, \quad (2.7)$$

onde  $k_{w(s)}$ ,  $\lambda_{w(s)}$ , e  $w_{w(s)} \approx ck_{w(s)}$  são, respectivamente, o número de onda, o comprimento de onda, e a frequência do *wiggler*(radiação).  $\psi_0$  é uma fase relativa da radiação.

Escolhemos a configuração helicoidal a fim de evitar desnecessária complicação com harmônicos de ordem superior, presentes quando se tem onduladores lineares, em que a velocidade longitudinal do elétron,  $v_z$ , não é constante.

O campo  $\vec{A}_s$  pode ser oriundo de uma fonte externa (um laser convencional) ou da própria emissão espontânea do ondulador, que vimos na seção anterior.

No primeiro caso o FEL funciona como um amplificador e no segundo caso como um oscilador.

Quando funciona como oscilador dizemos que o FEL opera no modo SASE (*Self-Amplified Spontaneous Emission*), ou Emissão Espontânea Auto-Amplificada, de fundamental importância quando não dispomos de uma fonte externa de radiação coerente, como no caso dos raios-X.

Consideremos agora um elétron se movendo dentro do *wiggler* no mesmo sentido da radiação. Visto que o *wiggler* lhe induz uma velocidade perpendicular ( $\vec{v}_\perp$ ), que é paralela ao campo elétrico da radiação ( $\vec{E}_s$ ), trabalho é realizado sobre o elétron, cuja taxa temporal de variação de energia é dada por

$$\frac{d}{dt}\gamma mc^2 = -e\vec{v}_\perp \cdot \vec{E}_s = e\vec{\beta}_\perp \cdot \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}_s. \quad (2.8)$$

Substituindo as definições de campo (2.5) e (2.6) na equação (2.8), usando a expressão (2.4) para  $\vec{\beta}_\perp$ , e fazendo a aproximação paraxial, isto é,  $d/dt = v_z d/dz \approx cd/dz$ , uma vez que  $v_z \approx c$ , obtemos a seguinte expressão para a variação do fator  $\gamma$  relativístico do elétron:

$$\frac{d}{dz}\gamma = -k_s \frac{a_w a_s}{\gamma} \sin(\psi). \quad (2.9)$$

A equação (2.9) evidencia o acoplamento do feixe de elétrons com a radiação eletromagnética via *wiggler*. Foi utilizada a normalização  $a_{w(s)} = eA_{w(s)}/mc^2$ , na qual  $a_w$  coincide com o parâmetro de *wiggler*.

A fase  $\psi = (k_w + k_s)z - w_s t + \psi_0$  é a *fase ponderomotiva* do elétron no campo do *wiggler* e da radiação combinados, que se propaga com a velocidade de fase

$$v_p = \frac{w_s}{k_s + k_w}. \quad (2.10)$$

Para que haja efetiva troca de energia entre o elétron e a radiação, o produto escalar ( $\vec{v}_\perp \cdot \vec{E}_s$ ) deve permanecer constante, e assim também a fase ponderomotiva, de forma que podemos escrever

$$\frac{d}{dt}\psi = (k_w + k_s)v_z - w_s = 0. \quad (2.11)$$

Fazendo a aproximação  $\beta_z \approx 1$  e  $w_s \approx ck_s$  deduzimos, a partir da equação (2.11), a assim chamada *condição de ressonância*, que é dada por



$$\lambda_s = \frac{\lambda_w}{2\gamma_z^2} = \frac{\lambda_w}{2\gamma^2}(1 + a_w^2). \quad (2.12)$$

Devemos notar que a equação (2.12) é a mesma que a do comprimento de onda para a emissão espontânea do *wiggler*, mostrada na seção anterior, eq. (2.1). Isso significa que, para elétrons ressonantes, i.e, elétrons cuja velocidade seja igual à velocidade de fase da onda ponderomotiva ( $v_z = v_p$ ), a interação com a radiação espontânea é máxima. O fator de Lorentz para elétrons ressonantes é dado pela condição

$$\gamma = \gamma_r = \sqrt{\frac{\lambda_w(1 + a_w^2)}{\lambda_s}}. \quad (2.13)$$

Mas ter um feixe de elétrons cuja energia satisfaça a condição de ressonância não garante que ocorra amplificação da radiação semente.

Analisando a equação (2.9) nota-se que para haver transferência de energia do elétron para o campo, a fase ponderomotiva deve se situar no intervalo  $0 \leq \psi \leq \pi$ , otimizando-se em  $\psi = \psi_0 = \pi/2$ . Uma vez que um feixe é composto por aglomerados de elétrons que são tipicamente muito maiores que o comprimento de onda óptico <sup>2</sup>, e estão randomicamente distribuídos longitudinalmente, então para cada elétron em uma fase capaz de fornecer energia ao campo (emissão estimulada), haverá outro em posição de drenar energia (absorção estimulada), resultando em ganho líquido nulo.

Se for dado um pequeno acréscimo de energia ao feixe, a fase ponderomotiva passa a evoluir lentamente no tempo, de acordo com a equação

$$\frac{d}{dz}\psi \approx 2k_w\eta \quad (2.14)$$

onde  $\eta = (\gamma - \gamma_r)/\gamma_r$  é o desvio relativo da energia -normalizada por  $mc^2$ - em relação à energia ressonante.

Tomando a derivada em  $z$  da equação (2.14) e substituindo-a em (2.9), deduzimos uma equação para a dinâmica dos elétrons no espaço de fase  $(\gamma, \psi)$ ,

---

<sup>2</sup>Para comprimentos de onda muito pequenos pode-se garantir a validade dessa afirmação para qualquer feixe no atual estado-da-arte dos RFLinacs. Por exemplo, o European X-RAY FEL está sendo construído para operar com pulsos de elétrons de 80 fs [14], o que equivale a um comprimento de 24  $\mu m$ , enquanto o Stanford LCLS vem operando com pulsos de 7-10  $\mu m$  [15], que são bem maiores até que o comprimento de onda da luz visível.

que tem a forma da equação do pêndulo, qual seja,

$$\frac{d^2\psi}{d\hat{z}^2} + K^2 \sin(\psi) = 0. \quad (2.15)$$

Aqui a coordenada longitudinal foi normalizada pelo comprimento do ondulador, i.e.,  $\hat{z} = z/L_w$ , e  $K^2 = 2k_w k_s a_w a_s L_w^2 / \gamma_r^2$ .

O ganho da radiação é obtido resolvendo-se a equação (2.15). A solução numérica é feita usualmente discretizando-se uma seção do feixe como se fosse um aglomerado de  $N$  macroelétrons monoenergéticos distribuídos inicialmente de forma homogênea dentro de um período do potencial ponderomotivo ( $0 \leq \psi \leq 2\pi$ ).

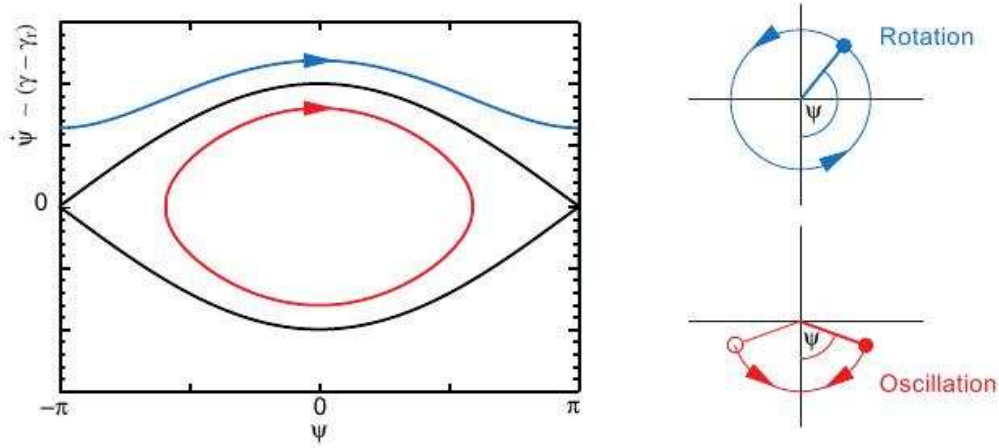


Figura 2.3: Evolução no espaço de fase. Se o incremento de energia for pequeno, os elétrons executam uma oscilação harmônica dentro do espaço de fase (em vermelho), que se torna anarmônica à medida que  $\gamma$  cresce, até o limite definido pela *separatrix* (curva em preto). Para valores de energia maiores, quando  $\eta$  se encontrar fora da *separatrix*, os elétrons escapam do poço de potencial e executam uma rotação no espaço de fase (em azul). Figura reproduzida para ilustração, extraída de trabalho de Peter Schmüser - Institut Für Experimentalphysik, Universität Hamburg, Germany.

Se  $\gamma = \gamma_r$ , todos os elétrons são capturados pelo poço de potencial, sendo que metade deles doa energia para a onda e a outra metade extrai energia da onda, resultando em ganho líquido nulo, como mencionado anteriormente.

Mas, se  $\gamma > \gamma_r$ , os elétrons terão velocidade um pouco superior à velocidade de fase da onda ponderomotiva, e serão desacelerados, transferindo energia

para o campo da radiação semente. Assim, um número maior de elétrons fica em condições de doar energia, resultando em ganho líquido positivo. Se  $\gamma \gg \gamma_r$  o feixe ficará completamente fora de ressonância, cessando a interação com o potencial, não mais havendo transferência de energia.

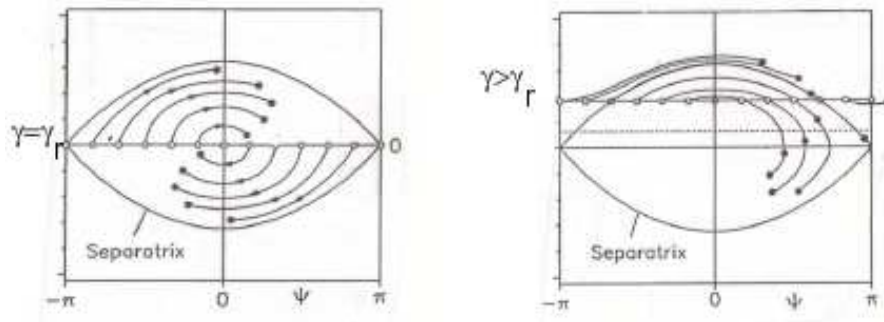


Figura 2.4: Trajetória dos elétrons dentro de um poço de potencial ponderomotivo. Se  $\gamma = \gamma_r$  um número igual de elétrons doa e retira energia da onda, resultando em ganho líquido nulo. Se  $\gamma > \gamma_r$  um número um pouco maior de elétrons é capaz de doar energia, resultando em ganho líquido para a onda dentro de uma oscilação. Figura reproduzida para ilustração, extraída de trabalho de Peter Schmuser - Institut Für Experimentalphysik, Universität Hamburg, Germany.

Dois modos de operação se distinguem: Quando  $K^2 \approx cte$ , o campo da radiação,  $a_s$ , varia pouco ao longo do ondulator, e o FEL opera no chamado Regime de Baixo Ganho (*Low-Gain Regime*). Quando  $K^2 \ll 1$  temos o Regime de Sinal Baixo (*Small Signal Regime*). O ganho da radiação é dado por

$$G(\zeta) = -G_0 \frac{d}{d\zeta} \left( \frac{\sin^2 \zeta}{\zeta^2} \right); \quad \zeta = \pi N_w \frac{w - w_s}{w_s} \quad (2.16)$$

onde  $G_0$  é uma constante proporcional à densidade. Este é o teorema de Madey, segundo o qual a curva do ganho da radiação é a derivada negativa da curva da intensidade da radiação do *wiggler*.

Os regimes acima mencionados são baseados no paradigma de ondulator curto e baixa intensidade de corrente, e os modelos são de interação de partícula única.

Para maximizar a eficiência energética, usualmente acoplam-se acelerador de partículas e *wiggler* de maneira que o feixe de elétrons execute uma trajetória fechada, retornando ao acelerador para restabelecer sua energia inicial, para então ser injetado novamente no *wiggler*. Como a intensidade da radiação é praticamente constante ao longo de uma única passagem do feixe pelo *wiggler*, esse esquema necessita incorporar cavidades ressonantes do tipo Fabry-Perot, com espelhos nas extremidades, sendo a radiação amplificada lentamente ao longo de muitos ciclos. O feixe de elétrons torna-se o meio ativo e a radiação coerente é emitida por pacotes de elétrons (*bunchings*) que se formam com dimensões dentro da escala do comprimento de onda óptico. A saturação da radiação ocorre quando os pacotes atingem densidade máxima e emitem como verdadeiros macroelétrons de elevada carga.

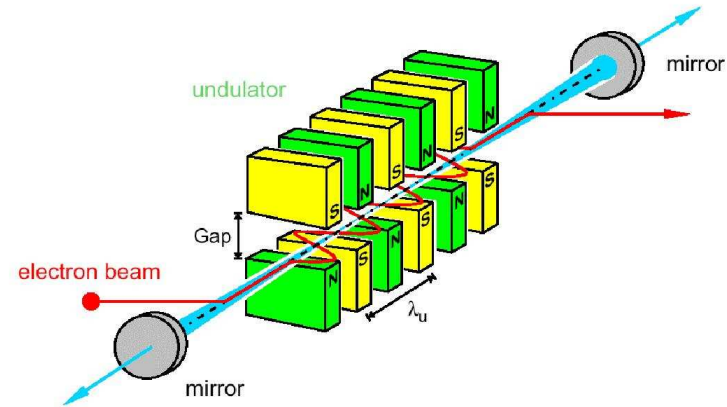


Figura 2.5: Esquema básico de um Low-Gain FEL. Figura reproduzida para ilustração, extraída de trabalho de Peter Schmuser - Institut Für Experimentalphysik, Universität Hamburg, Germany.

Mas esse mecanismo de baixo ganho mostra suas limitações quando desejamos construir FELs operando em comprimentos de onda muito curtos (abaixo de 100 nm). Nessas condições, cavidades ressonantes são inviáveis visto que a refletividade dos metais cai rapidamente para zero em incidência normal. A solução reside em achar um mecanismo FEL em que a radiação atinja a saturação ao final de uma única passagem do feixe por um longo undulador (*single-pass*), iniciando a partir da emissão espontânea. Esse conceito é o chamado (*Single-Pass High-Gain Free-Electron Laser*).

## 2.3 O Regime de Alto Ganho

A principal característica de um FEL operando no regime de Alto Ganho é que uma quantidade muito maior de elétrons emite coerentemente, de forma que a potência irradiada é proporcional à  $N_c^2$ , onde  $N_c$  é o número de elétrons dentro de uma região coerente. Isso acontece devido a um processo de *microbunching* [18], no qual elétrons que perdem energia para a radiação percorrem um caminho mais longo no *wiggler*, enquanto os que ganham energia da radiação percorrem um caminho mais curto, o que leva à uma modulação espacial de densidade dentro do comprimento de onda óptico  $\lambda_s$ .

No regime de alto ganho a variação temporal e espacial do campo da radiação tem que ser considerada de forma autoconsistente, o que se faz acoplando-se a equação da energia e da fase escrita para os  $N$  elétrons, eqs.(2.9) e (2.14), à equação de onda inhomogênea para o campo da radiação, cujos termos de fonte são as correntes perpendiculares induzidas no feixe pelos campos do *wiggler* e da radiação combinados. De fato, o Regime de Baixo Ganho é um caso limite do Regime de Alto Ganho quando o comprimento do *wiggler* é muito menor que o chamado comprimento de ganho,  $L_g$ , de maneira que a amplitude da radiação pode ser considerada aproximadamente constante.

O Comprimento de Ganho é uma quantidade importante em teoria de FELs, e é definido como a distância que a amplitude do campo de radiação,  $a_s$ , leva para crescer um fator  $e = 2.718$ , e vale [19]

$$L_g = \left( \frac{\gamma^3 \lambda_w m_e c^2}{4\pi^2 a_w^2 e^2 n_b} \right)^{1/3} \quad (2.17)$$

onde  $n_b$  é a densidade de repouso do feixe.

Muito embora o regime de Alto Ganho possa trazer à realidade experimental SASE-FELs em frequências bem acima do ultravioleta, capazes de amplificar o campo da radiação até a saturação em uma única travessia pelo *wiggler*, as coisas não são tão simples.

O comprimento de onda de operação de um FEL é ditado basicamente pela condição de ressonância (eq. 2.12), enquanto que a saturação, e conse-

quentemente as dimensões do ondulator, é determinada pelo Comprimento de Ganho (eq. 2.17). Analisando essas equações, vemos que para produção de raios-X e raios Gama devemos dispor ou de um feixe de elétrons extremamente energético ou de um período de *wiggler* muito reduzido. O atual estado-da-arte da fabricação de *wigglers* magnetostáticos é  $\lambda_w \sim 1.0\text{cm}$  para  $a_w \sim 1$ . Por exemplo, para gerar Raios-X da ordem de  $10^{-8}\text{cm}$  (1 Angstrom), precisamos dispor de um feixe de elétrons com  $\gamma = 10.000 \sim 5\text{GeV}$ , que só pode ser produzido em aceleradores com dimensões da ordem de quilômetros. Já o Comprimento de Ganho, que é proporcional à  $\gamma$ , cresce e exige a construção de *wigglers* igualmente extensos para que a saturação seja alcançada até o final do percurso.

Uma outra quantidade importante na teoria de FELs é o Comprimento de Cooperação (*Cooperation length*), dado por [19]

$$L_c = \frac{1}{\gamma^{1/3}} \left( \frac{\lambda_s m_e c^2}{16\pi^2 a_w^2 e^2 n_b} \right)^{1/3} \quad (2.18)$$

Para pequenos comprimentos de onda, um pacote de elétrons do feixe possui dimensão de muitos comprimentos de cooperação, e um elétron que se situa em um comprimento de cooperação irradia independente dos demais, o que leva o SASE-FEL a apresentar um espectro temporal caótico de picos de radiação [20]. A coerência desejada é prejudicada pelo espectro do ruído da inicialização.

A solução para tais dilemas pode estar no uso de *wigglers* ópticos. Funciona como um *wiggler* óptico um pulso de laser interagindo com um feixe de elétrons vindo na direção contrária. Durante a interação radiação de curto comprimento de onda pode ser gerada por espalhamento Compton estimulado, [21], [22], [23], [24], [25] ou mesmo espalhamento Raman [25], [26].

Uma vez que o comprimento de onda associado ao campo eletromagnético do laser pode ser feito bem menor que o período de um *wiggler* magnetostático -chegando a poucas centenas de nanômetros nos lasers exímeros-, feixes de elétrons menos energéticos podem ser utilizados para amplificar radiação de um mesmo comprimento de onda, conforme se depreende da condição de ressonância (2.12), que deve apenas ser modificada no denominador, cujo fator

é 4 para wiggler eletromagnético, ao invés de 2. Um benefício adicional vem da redução do comprimento de ganho, que permitiria o uso de aceleradores compactos de baixa voltagem e alta intensidade de corrente. O comprimento de cooperação também aumenta com o inverso de  $\gamma^{1/3}$ , o que melhoraria a qualidade da coerência da radiação espalhada.

Porém, com o uso de *wigglers* ópticos e feixes de baixa energia, o FEL entra em um novo regime quântico. Nesse domínio modelos clássicos não podem mais ser utilizadas, uma vez que o *recoil* do elétron devido ao fóton emitido, de elevado *momentum*, pode se tornar relevante e deve ser considerado ( $\hbar k_s / \gamma m_e c \geq 1$ ). A transição do regime clássico para o quântico em um FEL ocorre quando não podemos mais desprezar o decaimento descontínuo do elétron devido ao *recoil*, isto é, se o momento do elétron decai em degraus discretos de  $\hbar k_s$  [27].

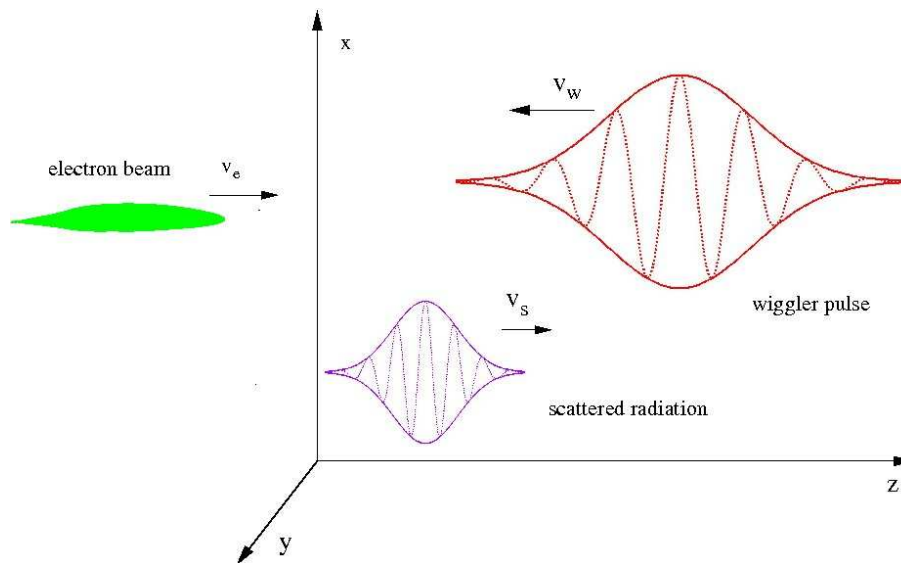


Figura 2.6: Esquema básico



## 2.4 O modelo quântico para FELs

Muito embora descritos com muito sucesso pela eletrodinâmica clássica, Free-Electron Lasers foram concebidos originalmente por Madey [2] com o uso da Mecânica Quântica. Em seu trabalho pioneiro, ele usou o método de Weizäcker-Williams para calcular o ganho devido à emissão estimulada de radiação de um modo eletromagnético paralelo ao movimento de um elétron relativístico através de um campo magnético perpendicular alternado.

Mais tarde, A. Gover e A. Yariv [28] apresentaram um modelo quântico para descrever a interação de um feixe de elétrons com uma onda eletromagnética dentro de estruturas eletromagnéticas periódicas, que era geral o suficiente para descrever modos de interação de partícula única ou modos coletivos, Giuliano Preparata apresentou um modelo baseado na Teoria Quântica de Campos [29], Honglie Fang et. al. apresentaram um modelo semi-clássico na qual a evolução da função de onda do elétron sujeito a um potencial vetor magnetostático é dada pela equação de Klein-Gordon [30]. Já Smetanin, [24] partindo da equação de Klein-Gordon, demonstrou que o FEL torna-se um oscilador quântico de dois níveis com inversão completa do meio ativo ( $\pi$ -pulse). Ele mostrou ainda que o regime quântico é mais eficiente para FELs operando em Raios-X com *wiggler* óptico.

Bonifacio e Casagrande, [17], defenderam que o desenvolvimento de modelos quânticos seria importante visto que, primeiro, flutuações quânticas são necessárias para inicializar um sistema inicialmente em condições de equilíbrio, e segundo, porque elas poderiam afetar a dinâmica do sistema e a própria inicialização (*threshold*). Além disso, somente tratamentos quânticos permitiriam a investigação das propriedades da radiação coerente emitida e derivação de estatística quântica de fótons. Nesse trabalho, compararam as duas formulações e, partindo de uma Hamiltoniana clássica para um elétron interagindo com o campo do *wiggler* e radiação combinados, deduziram uma Hamiltoniana quantizada para muitos elétrons e mostraram que a emissão espontânea que se origina das flutuações de posição e momento são importantes para a inicialização do ganho exponencial. Deduziram ainda a efetiva condição de *threshold* para um FEL superradiante no Regime Compton de

Alto Ganho (*High-Gain Compton Regime*).

Mais recentemente, Serbeto et. al. [31] apresentaram um modelo quântico para evolução do feixe de elétrons em um campo de *wiggler* usando ondas cinéticas, que por sua vez se baseiam na equação para a evolução para a função de Wigner do sistema, acoplada a um campo de interação por um potencial ponderomotivo adequado. Esse modelo leva a uma descrição geral para a instabilidade Free-Electron Laser levando em conta o efeito cinético de Amortecimento de Landau (*Landau damping*).

Já nesta tese apresentaremos um modelo hidrodinâmico no qual as variáveis de fluido são obtidas fazendo-se uma transformação de Madelung na função de onda do elétron, cuja evolução é dada por uma equação do tipo Schroedinger, que é deduzida a partir da expressão da energia relativística total, onde se fez as substituições do método de Whitham-Karman-Kruskal.

Apesar da perda de informação relativa aos efeitos cinéticos, o modelo hidrodinâmico tem seu ponto forte na sua simplicidade de implementação numérica, visto que não é mais necessário rodar um sistema de  $2N$  equações, como nos modelos baseados em macropartículas. No modelo hidrodinâmico lidamos com flutuações contínuas de densidade e velocidade.

Modelos numéricos usuais para simulação de FELs clássicos inicializam com uma distribuição de um número razoável de macroelétrons dentro de um poço de potencial ponderomotivo, o que não é mais possível fazer quando lidamos com os comprimentos de onda ultra-curtos, relevantes em Quantum-FELs. Isto porque se torna impossível colocar mais de um elétron dentro de um único poço de potencial, quando no máximo conseguimos colocar 1 elétron. Por exemplo, a densidade necessária para distribuir ao menos 1 elétron por comprimento de onda na faixa dos Raios-X de  $0.1\text{\AA} = 10^{-9}\text{cm}$  seria maior que a densidade da matéria sólida. Precisaríamos "encaixotar"  $10^9$  elétrons unidimensionalmente na inicialização, o que corresponderia a uma densidade eletrônica volumétrica de  $10^{27}\text{cm}^{-3}$ !

## Capítulo 3

# O modelo hidrodinâmico

### 3.1 Introdução

Ao lado das formulações ondulatória, matricial e em integrais de trajetória da Mecânica Quântica, introduzidas por Schrödinger, Heisenberg [32] e Feynman [33], respectivamente, existe a formulação Hidrodinâmica, idealizada ainda em seus primeiros dias por Erwin Madelung [34] e De Broglie. Nessa descrição a equação complexa de Schrödinger é convertida em um sistema de duas equações diferenciais parciais não lineares reais identificadas como equações hidrodinâmicas, sendo uma para a densidade de probabilidade e a outra para a dinâmica de um campo de velocidade de fluido.

Recentemente, Hass e colaboradores vêm usando modelos hidrodinâmicos para descrever plasmas quânticos. Por exemplo, na referência [35], partindo de um sistema tipo Schrödinger-Poisson, deduziram um sistema de equações diferenciais não lineares acopladas onde analisaram a contrapartida quântica dos modos BGK (Bernstein-Greene-Kruskal modes), o que vieram a chamar de modos *Quantum BGK*, ou QBGK, bem como os efeitos quânticos na instabilidade de dois feixes (*two-stream instability*). Na referência [36], descreveram os estados estacionários de um gás de elétrons e apresentaram uma relação de dispersão linear para plasmas quânticos, na forma ( $w^2 = w_{pe}^2 + k^2 v_F^2 + \hbar^2 k^4 / 4m_e^2$ ), onde  $m_e$  é a massa do elétron e  $v_F$  a velocidade de Fermi unidimensional. Finalmente, na referência [37], descreveram a propagação de ondas íon-acústicas quase neutras, mostrando que a dinâmica dos

ions tem uma característica quântica, muito embora devessem de comportar de forma clássica devido a grande massa.

Neste capítulo, mostraremos que a interação de um feixe de elétrons com um potencial eletromagnético pode ser descrita por um sistema de equações tipo Schrödinger-Poisson, desde que a variação de energia-momento do elétron seja lentamente variável no tempo e no espaço. A partir de então, definindo a função de onda do elétron da maneira como descrita nos trabalhos apontados no parágrafo anterior, deduziremos um sistema de equações de fluido que descrevem resposta do feixe a esse potencial, incluindo os efeitos da distribuição espacial de cargas.

## 3.2 A equação de Schrödinger

Seguindo a referência [31], vamos partir da expressão da energia relativística total de um feixe de elétrons sujeito a um potencial ponderomotivo  $V^1$ , o qual é oriundo do batimento do campo de um *wiggler* óptico combinado com o campo da radiação espalhada pelos próprios elétrons. Generalizando nosso modelo, incluímos um potencial  $\phi$  devido às flutuações da densidade de carga no feixe. Assim, no referencial do laboratório, temos:

$$E = \sqrt{p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4} + V(\vec{r}, t) - e\phi(\vec{r}, t). \quad (3.1)$$

Para elétrons livres ( $V = \phi = 0$ ), a energia relativística total ( $E = \hbar\omega_e$ ) e o momento dos elétrons ( $\vec{p}_e = \hbar\vec{k}_e$ ) são constantes, sendo  $\vec{k}_e$  o vetor de onda (de De-Broglie) e  $m_e$  a massa dos elétrons no repouso. Porém, sob a ação de um potencial, essas quantidades variam lentamente no espaço e no tempo. Usando o método Whitham-Karman-Kruskal, o qual é equivalente à quantização da ótica geométrica, podemos fazer as substituições

$$E \rightarrow \hbar \left( \omega_e + i \frac{\partial}{\partial t} \right), \quad \vec{p}_e \rightarrow \hbar(\vec{k}_e - i\nabla), \quad (3.2)$$

as quais são validas na aproximação eikonal, sendo equivalentes à aproximação de envelope lentamente variável (*Slow-Varying Envelope Approxima-*

---

<sup>1</sup>De fato  $V$  foi definido de forma a possuir dimensão de energia potencial.

tion - SVEA). Se  $\psi$  for a função de onda do elétron, então valem as aproximações

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} \psi \right| \ll w_e |\psi|, \quad |\nabla \psi| \ll |\vec{k}_e \psi|. \quad (3.3)$$

Substituindo (3.2) dentro da expressão para a energia (3.1), obtemos o resultado parcial

$$\left( w_e + i \frac{\partial}{\partial t} \right) - \Omega_e^{1/2} \left[ 1 - c^2 \Omega_e^{-1} \left( 2i \vec{k}_e \cdot \nabla + \nabla^2 \right) \right]^{1/2} = (V - e\phi)/\hbar, \quad (3.4)$$

onde

$$\Omega_e = c^2 k_e^2 \left( 1 + \frac{m_e^2 c^2}{\hbar^2 k_e^2} \right) \quad (3.5)$$

e

$$\Omega_e^{-1} = \frac{1}{c^2 k_e^2} \left( 1 + \frac{m_e^2 c^2}{\hbar^2 k_e^2} \right)^{-1} = \frac{1}{c^2 k_e^2} \left( 1 - \frac{m_e^2 c^4}{\hbar^2 w_e^2} \right). \quad (3.6)$$

Na dedução do termo (3.6), utilizamos a expressão para a energia relativística total do elétron livre,  $E^2 = c^2 p_e^2 + m_e^2 c^4$ , onde se fez as substituições  $E = \hbar w_e$  e  $\vec{p}_e = \hbar \vec{k}_e$ .

Então, substituindo (3.5) e (3.6) na equação (3.4), e expandindo o termo entre colchetes até a segunda ordem, pois assumimos que as derivadas são de variação lenta, obtemos

$$i\hbar \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v}_e \cdot \nabla \right) \psi + \frac{c^2 \hbar}{2w_e} \left[ \nabla^2 - \left( 1 - \frac{m_e^2 c^4}{\hbar^2 w_e^2} \right) (\hat{u} \cdot \nabla)^2 \right] \psi = (V(\vec{r}, t) - e\phi(\vec{r}, t))\psi, \quad (3.7)$$

onde  $\hat{u} = \vec{k}_e/k_e$  é um vetor unitário na direção de  $\vec{k}_e$  e  $\vec{v}_e$  é a velocidade inicial do elétron (não perturbada), associada à energia  $\hbar w_e$  e ao momento  $\hbar \vec{k}_e$ , sendo definida por

$$\vec{v}_e = c \frac{\vec{k}_e}{k_e} \left( 1 + \frac{m_e^2 c^2}{\hbar^2 k_e^2} \right)^{-\frac{1}{2}} = c \left( 1 + \frac{\lambda_e^2}{\lambda_c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \hat{u}, \quad (3.8)$$

onde  $\vec{v}_e \approx (\hbar k_e/m_e)\hat{u}$  para o comprimento de Compton do elétron  $\lambda_c = h/m_e c \ll \lambda_e = 2\pi/k_e$  e  $\vec{v}_e \approx c\hat{u}$  para  $\lambda_c \gg \lambda_e$ . Estamos assumindo que o sistema composto por N elétrons é descrito como um ensemble quântico representado por uma função de onda macroscópica  $\psi(\vec{r}, t)$  normalizada de maneira que a densidade de elétrons seja  $n(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2$ . Assim a função de onda  $\psi$  vale não apenas

para um único, mas para todos os elétrons do feixe. Essa normalização é válida uma vez que estamos lidando com um ensemble de elétrons que interage apenas coletivamente através do potencial eletromagnético, i.e., estamos assumindo que os elétrons encontram-se em um único estado puro perfeitamente coerente.

Façamos uma transformação de variáveis do referencial do laboratório  $(\vec{r}, t)$  para o espaço  $(\vec{\zeta}, t')$ , definida da seguinte forma:

$$\vec{\zeta} = \vec{r} - \vec{v}_e t, \quad t' = t. \quad (3.9)$$

As derivadas se modificam de acordo com os operadores:

$$\nabla = \nabla_{\zeta}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - \vec{v}_e \cdot \nabla_{\zeta}. \quad (3.10)$$

Cumpramos esclarecer que essa transformação matemática não é uma mudança de referencial no sentido restrito, como se fosse uma transformação de Galileu<sup>2</sup>. O que estamos fazendo é procurar por soluções propagantes, na forma  $\vec{\zeta} = \vec{r} - \vec{v}_e t$ . Contudo, por simplicidade, nos referiremos às grandezas físicas que são funções de  $\vec{\zeta}, t'$  como *variáveis no referencial do feixe*, ou *variáveis no referencial transformado*, se for necessário.

Vamos reescrever o operador  $\nabla_{\zeta}$  de maneira que o mesmo seja decomposto em uma componente paralela e uma perpendicular ao vetor unitário  $\hat{u}$ , definido em (3.7). Assim,

$$\nabla_{\zeta} = \frac{\partial}{\partial \zeta_{\parallel}} \hat{u} + \frac{\partial}{\partial \zeta_{\perp}}. \quad (3.11)$$

Substituindo (3.10)-(3.11) em (3.7), obtemos uma equação que é formalmente idêntica à equação de Schrodinger, qual seja,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t'} \psi + \frac{\hbar^2}{2m_e \gamma_e} \left( \frac{1}{\gamma_e^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta_{\parallel}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta_{\perp}^2} \right) \psi = (V - e\phi) \psi, \quad (3.12)$$

onde fizemos a substituição  $\hbar w_e = \gamma_e m_e c^2$ , sendo  $\gamma_e$  o fator relativístico associado à velocidade  $\vec{v}_e$  do elétron e foi usada a definição  $\vec{\zeta} = \zeta_{\parallel} \hat{u} + \vec{\zeta}_{\perp}$ .

O potencial  $\phi$ , devido à separação de cargas, é descrito pela equação de Poisson, isto é,

$$-\nabla_{\zeta} \cdot \vec{E} = -\nabla_{\zeta} \cdot \vec{E}_{\perp} - \nabla_{\zeta} \cdot \vec{E}_{\parallel} = -\nabla_{\zeta} \cdot \vec{E}_{\perp} + \nabla_{\zeta}^2 \phi = 4\pi e |\psi|^2. \quad (3.13)$$

---

<sup>2</sup>De fato, uma mudança de referencial implicaria o uso da transformação de Lorentz.

### 3.3 A transformada de Madelung

De acordo com Madelung [34], Bohm [38], Wilhelm [39], a equação de Schrodinger pode ser transformada em um sistema de equações hidrodinâmicas com o uso do *ansatz*

$$\psi(\vec{\zeta}, t') = A(\vec{\zeta}, t')e^{iS(\vec{\zeta}, t')/\hbar}, \quad (3.14)$$

onde  $S$  é a ação do sistema e  $A$  é uma grandeza que varia lentamente no tempo, sendo  $A > 0$ .

Substituindo esta representação da função de onda dentro de (3.12), obtemos a equação

$$\begin{aligned} i\hbar \left\{ \frac{\partial}{\partial t'} A + \frac{i}{\hbar} A \frac{\partial}{\partial t'} S \right\} + \frac{\hbar^2}{2m_e \gamma_e^3} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \zeta_{\parallel}^2} A + \frac{i}{\hbar} A \frac{\partial^2}{\partial \zeta_{\parallel}^2} S + \frac{2i}{\hbar} \frac{\partial}{\partial \zeta_{\parallel}} S \frac{\partial}{\partial \zeta_{\parallel}} A - \frac{A}{\hbar^2} \left( \frac{\partial}{\partial \zeta_{\parallel}} S \right)^2 \right\} + \\ + \frac{\hbar^2}{2m_e \gamma_e} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \zeta_{\perp}^2} A + \frac{i}{\hbar} A \frac{\partial^2}{\partial \zeta_{\perp}^2} S + \frac{2i}{\hbar} \frac{\partial}{\partial \zeta_{\perp}} S \frac{\partial}{\partial \zeta_{\perp}} A - \frac{A}{\hbar^2} \left( \frac{\partial}{\partial \zeta_{\perp}} S \right)^2 \right\} = (V - e\phi)A, \quad (3.15) \end{aligned}$$

que pode ser dividida em uma parte real e uma imaginária. A parte imaginária é

$$\frac{\partial}{\partial t'} A + \frac{1}{2} \left\{ \frac{A}{m_e \gamma_e^3} \frac{\partial^2}{\partial \zeta_{\parallel}^2} S + \frac{2}{m_e \gamma_e^3} \frac{\partial}{\partial \zeta_{\parallel}} S \frac{\partial}{\partial \zeta_{\parallel}} A \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{A}{m_e \gamma_e} \frac{\partial^2}{\partial \zeta_{\perp}^2} S + \frac{2}{m_e \gamma_e} \frac{\partial}{\partial \zeta_{\perp}} S \frac{\partial}{\partial \zeta_{\perp}} A \right\} = 0.$$

Multiplicando todos os seus termos por  $A$ , temos

$$\frac{\partial}{\partial t'} A^2 + \frac{\partial}{\partial \zeta_{\parallel}} \left\{ \frac{A^2}{m_e \gamma_e^3} \frac{\partial}{\partial \zeta_{\parallel}} S \right\} + \frac{\partial}{\partial \zeta_{\perp}} \left\{ \frac{A^2}{m_e \gamma_e} \frac{\partial}{\partial \zeta_{\perp}} S \right\} = 0. \quad (3.16)$$

As funções reais  $A(\vec{\zeta}, t')$  e  $S(\vec{\zeta}, t')$  podem ser associadas à densidade eletrônica  $n(\vec{\zeta}, t')$  e à um campo de velocidade  $\vec{v}(\vec{\zeta}, t')$  da seguinte forma:

$$A^2 = |\psi|^2 = n, \quad (3.17)$$

$$v_{\parallel} = \frac{1}{m_e \gamma_e^3} \frac{\partial}{\partial \zeta_{\parallel}} S = \frac{p_{\parallel}}{m_e \gamma_e^3}, \quad (3.18)$$

$$v_{\perp} = \frac{1}{m_e \gamma_e} \frac{\partial}{\partial \zeta_{\perp}} S = \frac{p_{\perp}}{m_e \gamma_e}, \quad (3.19)$$

Substituindo (3.17)-(3.19) em (3.16), obtemos a equação de fluido

$$\frac{\partial}{\partial t'} n + \frac{\partial}{\partial \zeta_{\parallel}} \{n v_{\parallel}\} + \frac{\partial}{\partial \zeta_{\perp}} \{n v_{\perp}\} = 0, \quad (3.20)$$

que pode ser reescrita como

$$\frac{\partial}{\partial t'} n + \nabla_{\zeta} \cdot (n \vec{v}) = 0, \quad (3.21)$$

onde  $\vec{v}$  foi decomposto em componentes paralela e perpendicular ao vetor de onda de De-Broglie para o elétron livre,  $\vec{k}_e = \vec{p}_e/\hbar$ , i.e.,

$$\vec{v} = v_{\parallel} \hat{u} + \vec{v}_{\perp}.$$

Coletando os termos reais da equação (3.15), reagrupando-os e dividindo pela função  $A$ , chegamos à seguinte equação:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t'} S + \frac{1}{2m_e \gamma_e^3} \left( \frac{\partial}{\partial \zeta_{\parallel}} S \right)^2 + \frac{1}{2m_e \gamma_e} \left( \frac{\partial}{\partial \zeta_{\perp}} S \right)^2 = \\ = -(V - e\phi) + \frac{\hbar^2}{2m_e \gamma_e^3} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial^2}{\partial \zeta_{\parallel}^2} A \right) + \frac{\hbar^2}{2m_e \gamma_e} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial^2}{\partial \zeta_{\perp}^2} A \right). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Observemos que (3.22) se reduz à equação de Hamilton-Jacobi quando  $\hbar \rightarrow 0$ , e os dois últimos termos do lado direito fazem parte de um potencial quântico nessa aproximação quasi-clássica.

Continuando a dedução das equações hidrodinâmicas, vamos aplicar o operador  $\nabla_{\zeta}$  em ambos os lados de (3.22). Daí temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t'} \nabla_{\zeta} S + \frac{1}{2m_e \gamma_e^3} \nabla_{\zeta} \left( \frac{\partial}{\partial \zeta_{\parallel}} S \right)^2 + \frac{1}{2m_e \gamma_e} \nabla_{\zeta} \left( \frac{\partial}{\partial \zeta_{\perp}} S \right)^2 = \\ = -\nabla_{\zeta} (V - e\phi) + \frac{\hbar^2}{2m_e \gamma_e^3} \nabla_{\zeta} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial^2}{\partial \zeta_{\parallel}^2} A \right) + \frac{\hbar^2}{2m_e \gamma_e} \nabla_{\zeta} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial^2}{\partial \zeta_{\perp}^2} A \right). \end{aligned} \quad (3.23)$$



### 3.4 As equações de fluido

Usando as expressões (3.17)-(3.19) novamente, obtemos a equação de transporte de momento na formulação hidrodinâmica [40]

$$\frac{\partial}{\partial t'} \vec{p} + \frac{1}{2} \nabla_{\zeta} (\vec{v} \cdot \vec{p}) = -\nabla_{\zeta} (V - e\phi) + \frac{\hbar^2}{2m_e \gamma_e} \nabla_{\zeta} \left[ \frac{1}{\sqrt{n}} D_{\zeta}^2 \sqrt{n} \right], \quad (3.24)$$

onde foram usadas as definições

$$\vec{p} = \nabla S, \quad D_{\zeta}^2 = \left( \frac{1}{\gamma_e^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta_{\parallel}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta_{\perp}^2} \right). \quad (3.25)$$

O último termo da equação do momento (3.24) é uma forma assimétrica do chamado *potencial de Bohm*, que retém a informação quântica do sistema, e tem sido usado para descrever plasmas quânticos [35]-[37],[41]-[43] e supercondutividade [44], sendo relevante em comparação com outros termos de potencial quando lidamos com gradientes íngremes de densidade de partículas, por exemplo, na junção de dois supercondutores. Note-se ainda que a equação (3.24) se reduz ao resultado clássico quando desprezamos os efeitos quânticos, i.e., no limite  $\hbar \rightarrow 0$ .

Note-se ainda que, ao invés de um termo na forma  $\vec{v} \cdot \nabla \vec{p}$ , obtivemos um na forma  $1/2 \nabla (\vec{v} \cdot \vec{p})$  em (3.24). Isso porque os vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{p}$  não são paralelos, mas formam um ângulo que depende do fator relativístico  $\gamma_e$ . No caso não relativístico,  $\gamma_e = 1$ , recuperamos o termo original, qual seja,  $\vec{v} \cdot \nabla \vec{p}$ .

Resumindo, as equações da continuidade (3.21), *momentum* (3.24), e Poisson, a seguir relacionadas, nos dão uma descrição totalmente relativística da dinâmica de um elemento de fluido com densidade  $n(\vec{\zeta}, t')$ , velocidade  $\vec{v}(\vec{\zeta}, t')$ , e momento  $\vec{p}(\vec{\zeta}, t')$ , sujeito a um potencial de origem eletromagnética  $V$  e de acúmulo espacial de cargas  $\phi$ , sendo  $\vec{v}$  interpretado como a velocidade de fluido no referencial transformado  $(\vec{\zeta}, t')$ .

$$\frac{\partial}{\partial t'} n + \nabla_{\zeta} \cdot (n \vec{v}) = 0, \quad (3.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} \vec{p} + \frac{1}{2} \nabla_{\zeta} (\vec{v} \cdot \vec{p}) = -\nabla_{\zeta} (V - e\phi) + \frac{\hbar^2}{2m_e \gamma_e} \nabla_{\zeta} \left[ \frac{1}{\sqrt{n}} D_{\zeta}^2 \sqrt{n} \right], \quad (3.27)$$

$$\nabla_{\zeta \parallel}^2 \phi = 4\pi n_b e \left( \frac{n}{n_b} - 1 \right), \quad (3.28)$$

$$-\nabla_{\zeta \perp} \cdot \vec{E}_{\perp} = -4\pi e n_b. \quad (3.29)$$

A equação de Poisson foi dividida em suas partes paralela e perpendicular,  $n_b$  é a densidade do feixe no repouso e  $n$  é a densidade local de elétrons.

A velocidade longitudinal,  $v_{\parallel}$ , na equação (3.18) deve ser vista como uma pequena diferença entre a velocidade no feixe e a velocidade ressonante no referencial do laboratório. A velocidade perpendicular,  $v_{\perp}$ , corresponde à velocidade de difusão térmica transversal com momento  $p_{\perp}$ . Esta velocidade de difusão domina sobre os efeitos quânticos na direção transversal.

Em uma aproximação unidimensional nós desprezamos os efeitos transversais fazendo  $\frac{\partial}{\partial \zeta_{\perp}} = 0$ ,  $A(\vec{\zeta}, t') \rightarrow A(\zeta_{\parallel}, t')$  e  $S(\vec{\zeta}, t') \rightarrow S(\zeta_{\parallel}, t')$ . A fim de simplificar a escrita, vamos suprimir as notações dos índices  $\parallel$ ,  $\perp$ . As equações (3.26)-(3.29) se reduzem a:

$$\frac{\partial}{\partial t'} n + \frac{\partial}{\partial \zeta} (nv) = 0, \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} v + v \frac{\partial}{\partial \zeta} v = \frac{1}{m_e \gamma_e^3} \left\{ -\frac{\partial}{\partial \zeta} (V - e\phi) + \frac{\hbar^2}{2m_e \gamma_e} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \frac{1}{\gamma_e^2} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) \sqrt{n} \right] \right\}, \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \phi = 4\pi e n_b \left( \frac{n}{n_b} - 1 \right). \quad (3.32)$$

As equações acima nos dão uma descrição totalmente relativística de um feixe de elétrons interagindo com um campo eletromagnético através de um potencial  $V$ , que em um FEL é função da amplitude do *wiggler* e do campo

da radiação, acrescido de um potencial eletrostático  $\phi$ , que surge devido à perturbações de densidade de cargas devido ao potencial  $V$ .

No capítulo seguinte vamos acoplar as equações (3.30)-(3.32) com a equação de onda e o potencial ponderomotivo  $V$  de forma autoconsistente. Por transformada de Fourier uma relação de dispersão linear será obtida, cujos modos normais serão analisados a fim de se verificar a ocorrência de instabilidades e conseqüente amplificação da radiação original.

## Capítulo 4

# A relação de dispersão linear

### 4.1 O potencial ponderomotivo

Primeiro precisamos escolher a forma do potencial ponderomotivo  $V$ , que é o resultado do batimento de dois campos eletromagnéticos, o campo do *wiggler*, denotada pelo índice ( $w$ ), e o da radiação espalhada, de alta frequência, que desejamos amplificar, denotada pelo índice ( $s$ ). Vamos começar, por conveniência, definindo-os de forma que possuam polarização circular, sendo descritos no referencial do laboratório pelos seguintes potenciais vetores:

$$\vec{a}_s(\vec{r}, t) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \left( \hat{e} i a_s(\vec{r}, t) e^{i\phi_s} + cc \right), \quad (4.1)$$

$$\vec{a}_w(\vec{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \hat{e} a_w(\vec{r}, t) e^{i\phi_w} + cc \right). \quad (4.2)$$

Na nomenclatura utilizada,  $\vec{a}_{s(w)} = e\vec{A}_{s(w)}/mc^2$  é o potencial vetor normalizado da radiação(*wiggler*);  $a_{s(w)}$  é a amplitude do campo da radiação(*wiggler*); e  $\hat{e} = (\hat{x} + i\hat{y})/\sqrt{2}$  é um versor que tem as propriedades  $\hat{e} \cdot \hat{e} = \hat{e}^* \cdot \hat{e}^* = 0$ ;  $\hat{e} \cdot \hat{e}^* = \hat{e}^* \cdot \hat{e} = 1$ .

As fases harmônicas, de oscilação rápida, são definidas como:

$$\phi_s = -\vec{k}_s \cdot \vec{r} + w_s t, \quad \phi_w = \vec{k}_w \cdot \vec{r} + w_w t, \quad (4.3)$$

onde  $\vec{k}_{s(w)}$  e  $w_{s(w)}$  são, respectivamente, o vetor de onda e a frequência da radiação (*wiggler*), sendo que  $|\vec{k}_s| \gg |\vec{k}_w|$  e  $w_s \gg w_w$ .

Vamos assumir propagação apenas na direção longitudinal, que sem perda de generalidade podemos fazer na direção  $\hat{z}$ . Considerando que a radiação espalhada se propaga no sentido contrário ao do pulso de radiação do *wiggler* (espalhamento para trás), a partir da definição de força ponderomotiva e com o uso dos campos definidos em (4.1)-(4.2), o potencial ponderomotivo  $V$  pode ser escrito da seguinte forma:

$$V = \frac{m_e c^2}{2\gamma_e} (i a_w a_s^* e^{i\theta_p} + cc). \quad (4.4)$$

Este potencial é uma generalização dos potenciais descritos, por exemplo, nas referências [11] e [31], visto que  $a_w$  não é mais um parâmetro real e constante, mas sim uma função complexa de variação lenta no tempo e no espaço. Dessa forma incorporamos a possibilidade de atenuação do campo do *wiggler* (*pump depletion*). A dedução de  $V$  encontra-se no apêndice.

A fase  $\theta_p = [k_s + k_w]z - [w_s - w_w]t$  é a fase da onda ponderomotiva. No referencial do feixe ela é dada por:

$$\theta_p = [k_s + k_w]\zeta - [(w_s - w_w) - (k_s + k_w)v_e]t' \quad (4.5)$$

## 4.2 Equação do plasma

A fim de estudar a possibilidade do aparecimento de instabilidades, como prova inequívoca da amplificação da radiação de fundo, precisamos deduzir uma relação de dispersão linear que descreva os modos normais do sistema. O primeiro passo é fazer uma análise perturbativa das variáveis dinâmicas. Para um feixe de elétrons inicialmente homogêneo, devemos escrever as grandezas perturbadas até primeira ordem

$$v \rightarrow \delta v; \quad n \rightarrow n_b + \delta n \quad (4.6)$$

onde  $\delta v$  e  $\delta n$  são flutuações na velocidade de fluido e na densidade do feixe, respectivamente. Fazendo as devidas substituições, o sistema de equações (3.30)-(3.32) se reduz a

$$\frac{\partial}{\partial t'} \delta v = \frac{1}{m_e \gamma_e^3} \left\{ -\frac{\partial}{\partial \zeta} (V - e\phi) + \frac{\hbar^2}{4m_e \gamma_e^3} \frac{\partial^3}{\partial \zeta^3} \frac{\delta n}{n_b} \right\} \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} \frac{\delta n}{n_b} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \delta v = 0 \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \phi = 4\pi e n_b \frac{\delta n}{n_b} \quad (4.9)$$

onde foram desprezados os termos de segunda ordem e foi feita a aproximação  $\sqrt{n_b}(1 + \delta n/n_b)^{1/2} \approx \sqrt{n_b}(1 + \delta n/2n_b)$  no numerador e  $\sqrt{n_b}(1 + \delta n/n_b)^{1/2} \approx \sqrt{n_b}$  no denominador.

Tomando a derivada  $\zeta$  da equação (4.7) e a derivada temporal da equação (4.8), substituindo uma dentro da outra e com o uso da equação de Poisson (4.9), obtemos uma equação que representa uma oscilação de carga, excitada pelo potencial ponderomotivo  $V$ , que tem a mesma forma que a equação para a propagação de uma onda em plasma quântico no referencial do laboratório [36], [40].

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t'^2} + \frac{w_p^2}{\gamma_e^3} + \frac{1}{4} \left( \frac{\hbar}{m_e \gamma_e^3} \right)^2 \frac{\partial^4}{\partial \zeta^4} \right] \frac{\delta n}{n_b} = \frac{1}{m_e \gamma_e^3} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} V(\zeta, t', a_s(\zeta, t'), a_w(\zeta, t')) \quad (4.10)$$

### 4.3 A evolução da radiação

Mas para se chegar a um sistema autoconsistente ainda precisamos deduzir as equações para a evolução das amplitudes de variação lenta  $a_s$  e  $a_w$ .

Vamos começar escrevendo, no *frame* do laboratório, a equação de onda para os potenciais vetores com um termo de corrente perpendicular,  $\vec{J}_\perp$ , que é a fonte dos campos. Assim,

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A}_{s(w)} = -\frac{4\pi}{c} \vec{J}_\perp. \quad (4.11)$$

A corrente  $\vec{J}_\perp$  é dada por

$$\vec{J}_\perp = e n \vec{v}_\perp, \quad (4.12)$$

onde  $\vec{v}_\perp$  é a velocidade perpendicular de fluido dos elétrons, que é determinada principalmente pelo campo do *wiggler*, participando o campo da radiação como uma pequena correção.

A partir da equação do movimento transversal de um elétron relativístico sujeito à força de Lorentz associada aos campos descritos pelos potenciais vetores (4.1) e (4.2), deduz-se, como apresentado, por exemplo, na referência [11], que  $\vec{v}_\perp$  é dado por

$$\frac{\vec{v}_\perp}{c} = -\frac{(\vec{a}_w + \vec{a}_s)}{\gamma_e}. \quad (4.13)$$

Substituindo (4.13) na equação de onda (4.11), segue-se que

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{a}_{s(w)} = \frac{w_p^2}{c^2 \gamma_e} \frac{n}{n_b} (\vec{a}_w + \vec{a}_s), \quad (4.14)$$

onde  $w_p^2 = 4\pi e^2 n_b / m_e$  é o quadrado da frequência de plasma associada ao feixe em repouso, e lembrando que foi novamente utilizada a normalização  $\vec{a}_{s(w)} = e\vec{A}_{s(w)} / m_e c^2$ .

Utilizando as definições de campo (4.1)-(4.2), e fazendo o produto interno pelo vetor complexo,  $\hat{e}$ , em ambos os lados da equação de onda (4.14), temos:

$$-i \left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (a_s e^{i\phi_s}) = \frac{w_p^2}{c^2 \gamma_e} \frac{n}{n_b} (a_w e^{i\phi_w} - i a_s e^{i\phi_s}); \quad (4.15)$$

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (a_w e^{i\phi_w}) = \frac{w_p^2}{c^2 \gamma_e} \frac{n}{n_b} (a_w e^{i\phi_w} - i a_s e^{i\phi_s}). \quad (4.16)$$

As derivadas espaciais são:

$$\nabla^2 (a_s e^{i\phi_s}) = e^{i\phi_s} \left[ \nabla^2 - 2i\vec{k}_s \cdot \nabla - k_s^2 \right] a_s; \quad (4.17)$$

$$\nabla^2 (a_w e^{i\phi_w}) = e^{i\phi_w} \left[ \nabla^2 + 2i\vec{k}_w \cdot \nabla - k_w^2 \right] a_w. \quad (4.18)$$

As derivadas temporais são:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (a_s e^{i\phi_s}) = e^{i\phi_s} \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2i w_s \frac{\partial}{\partial t} - w_s^2 \right] a_s; \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (a_w e^{i\phi_w}) = e^{i\phi_w} \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2i w_w \frac{\partial}{\partial t} - w_w^2 \right] a_w. \quad (4.20)$$

Substituindo-as na equação de onda 4.15 e 4.16 temos:

$$\begin{aligned} -i e^{i\phi_s} \left( \nabla^2 - 2i \vec{k}_s \cdot \nabla - k_s^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2i \frac{w_s}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{w_s^2}{c^2} \right) a_s = \\ = \frac{w_p^2}{c^2 \gamma_e} \frac{n}{n_b} (a_w e^{i\phi_w} - i a_s e^{i\phi_s}); \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} e^{i\phi_w} \left( \nabla^2 + 2i \vec{k}_w \cdot \nabla - k_w^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2i \frac{w_w}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{w_w^2}{c^2} \right) a_w = \\ = \frac{w_p^2}{c^2 \gamma_e} \frac{n}{n_b} (a_w e^{i\phi_w} - i a_s e^{i\phi_s}). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Da mesma forma como procedemos na equação do plasma, fazemos uma análise perturbativa nas variáveis dinâmicas do sistema. De agora em diante  $a_{s(w)}$  são considerados pequenas perturbações. Assim, temos:

$$\begin{aligned} -i \left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2i \left[ \vec{k}_s \cdot \nabla + \frac{w_s}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right] - \left[ k_s^2 - \frac{w_s^2}{c^2} + \frac{w_p^2}{c^2 \gamma_e} \right] \right) a_s = \\ = \frac{w_p^2}{c^2 \gamma_e} \left( a_w e^{i(\phi_w - \phi_s)} + \frac{\delta n}{n_b} a_w e^{i(\phi_w - \phi_s)} - i \frac{\delta n}{n_b} a_s \right); \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - 2i \left[ -\vec{k}_w \cdot \nabla + \frac{w_w}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right] - \left[ k_w^2 - \frac{w_w^2}{c^2} + \frac{w_p^2}{c^2 \gamma_e} \right] \right) a_w = \\ = \frac{w_p^2}{c^2 \gamma_e} \left( \frac{\delta n}{n_b} a_w - i a_s e^{-i(\phi_w - \phi_s)} - i \frac{\delta n}{n_b} a_s e^{-i(\phi_w - \phi_s)} \right). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Na aproximação de envelope de variação lenta (SVEA) podemos desprezar as derivadas de segunda ordem em relação às de primeira ordem nas equações (4.23)-(4.24). Utilizando ainda a relação de dispersão linear para uma onda eletromagnética se propagando no plasma ( $w_{s(w)}^2 - w_p^2/\gamma_e - k_{s(w)}^2 c^2 = 0$ ), obtemos duas equações na forma de derivadas convectivas, quais sejam:



$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{c^2 \vec{k}_s}{w_s} \cdot \nabla\right) a_s = -\frac{w_p^2}{2w_s \gamma_e} \left( a_w e^{i(\phi_w - \phi_s)} + \frac{\delta n}{n_b} a_w e^{i(\phi_w - \phi_s)} - i \frac{\delta n}{n_b} a_s \right); \quad (4.25)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{c^2 \vec{k}_w}{w_w} \cdot \nabla\right) a_w = i \frac{w_p^2}{2w_w \gamma_e} \left( \frac{\delta n}{n_b} a_w - i a_s e^{-i(\phi_w - \phi_s)} - i \delta n a_s e^{-i(\phi_w - \phi_s)} \right). \quad (4.26)$$

Na aproximação unidimensional, fazemos as transformações:

$$\nabla \rightarrow \frac{\partial}{\partial z}, \quad \vec{k}_s \rightarrow k_s, \quad (4.27)$$

$$\vec{k}_w \parallel \vec{k}_s \parallel \hat{z} \quad (4.28)$$

o que nos leva à forma 1-D das equações (4.25)-(4.26)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_s \frac{\partial}{\partial z}\right) a_s = -\frac{w_p^2}{2w_s \gamma_e} \left( a_w e^{i\theta_p} + \frac{\delta n}{n_b} a_w e^{i\theta_p} - i \frac{\delta n}{n_b} a_s \right) \quad (4.29)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - v_w \frac{\partial}{\partial z}\right) a_w = i \frac{w_p^2}{2w_w \gamma_e} \left( \frac{\delta n}{n_b} a_w - i a_s e^{-i\theta_p} - i \frac{\delta n}{n_b} a_s e^{-i\theta_p} \right) \quad (4.30)$$

onde  $v_{s(w)} = c^2 k_{s(w)} / w_{s(w)}$  é a velocidade de grupo da onda no plasma do feixe, e  $\theta_p$  é a fase ponderomotiva definida em (4.5).

Fazendo a transformação de variáveis para o referencial em movimento, isto é,

$$\zeta = z - v_e t; \quad t' = t; \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} - v_e \frac{\partial}{\partial \zeta}; \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad (4.31)$$

obtemos o sistema de equações

$$\left(\frac{\partial}{\partial t'} + [v_s - v_e] \frac{\partial}{\partial \zeta}\right) a_s = -\frac{w_p^2}{2w_s \gamma_e} \frac{\delta n}{n_b} a_w e^{i\theta_p} \quad (4.32)$$

e

$$\left(\frac{\partial}{\partial t'} - [v_w + v_e] \frac{\partial}{\partial \zeta}\right) a_w = \frac{w_p^2}{2w_w \gamma_e} \frac{\delta n}{n_b} a_s e^{-i\theta_p}, \quad (4.33)$$

onde foram desprezados os termos manifestamente fora de ressonância do lado direito, e mantidos aqueles que são as fontes dos campos, isto é, os termos de corrente não lineares.

É fonte da radiação espalhada o termo de corrente que contém o produto da oscilação da densidade de elétrons ( $\delta n$ ), induzida pela força ponderomotiva, com a velocidade perpendicular perturbada (em primeira ordem), induzida nos elétrons pelo campo do wiggler ( $a_w \exp(i\theta_p)/\gamma_e$ ). A radiação assim gerada se propaga em fase com a radiação original, e amplificação pode ocorrer. Já a corrente que interage com o campo do wiggler contém o produto da oscilação da densidade de elétrons ( $\delta n$ ) com a perturbação da velocidade desses elétrons associado ao campo da radiação amplificada ( $a_s \exp(-i\theta_p)/\gamma_e$ ). Os demais termos não podem eles mesmos ser fontes de  $a_s$  ou  $a_w$ , uma vez que  $\delta n$  sozinho oscila com o potencial ponderomotivo, ficando fora de ressonância tanto com a radiação espalhada quanto com o campo do *wiggler*. Também não podem ser fontes os termos em  $a_{w(s)} \exp(\pm i\theta_p)$ , pelo mesmo motivo.

As equações (4.32)-(4.33), juntamente com (4.4) e (4.10), abaixo reescritas para melhor clareza, formam um sistema de equações de fluido não lineares acopladas que são suficientes para descrever de uma maneira simples a emissão de radiação coerente por um feixe de elétrons relativísticos sob a ação de uma onda eletromagnética.

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t'^2} + \frac{w_p^2}{\gamma_e^3} + \frac{1}{4} \left( \frac{\hbar}{m\gamma_e^3} \right)^2 \frac{\partial^4}{\partial \zeta^4} \right] \frac{\delta n}{n_b} = \frac{1}{m\gamma_e^3} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} V \quad (4.34)$$

$$V = i \frac{mc^2}{2\gamma_e} a_w a_s^* e^{i\theta_p} \quad (4.35)$$

onde

$$\theta_p = [k_s + k_w]\zeta - [(w_s - w_w) - (k_s + k_w)v_e]t' \quad (4.36)$$

Vamos moldar a perturbação na densidade do plasma na forma  $\delta n/n_b = \tilde{n} e^{i(k_l \zeta - \Omega_l t')}$ , de forma a casar com o potencial ponderomotivo. Para tanto assumimos as seguintes condições de sintonia, abaixo relacionadas, que denotam as leis de conservação de energia-momento na interação do wiggler, da radiação espalhada, e da oscilação de plasma.

$$\hbar k_l = \hbar k_s + \hbar k_w; \quad \hbar \omega_l = \hbar \omega_s - \hbar \omega_w; \quad (\Omega_l = \omega_l - k_l v_e) \quad (4.37)$$

Por conveniência, vamos lançar mão da mesma normalização usada na referência [40], qual seja,

$$q = Lk_l; \quad \tau = t'/t_e = ct'/L; \quad \chi = \zeta/L; \quad \beta_s = v_s/c; \quad \beta_e = v_e/c$$

$$\Omega_p = w_p L/c; \quad \Omega = \Omega_l L/c; \quad \sigma = \frac{1}{2} \left( \frac{\hbar}{m_e c \gamma_e} \right) \frac{1}{\gamma_e^2 L} \quad (4.38)$$

onde  $t_e = N\lambda_w/c = L/c$  é o tempo de trânsito e  $L$  é o comprimento do pulso do ondulator óptico com um número  $N$  de comprimentos de onda.

Neste modelo de interação de três ondas os elétrons não precisam ser necessariamente ressonantes tal como se impõe em FELs, tanto quânticos quanto clássicos. Assumimos também a condição de feixe frio e ondulator fraco. Usando perturbações transformadas para o espaço de Fourier e desprezando a atenuação do campo do ondulator (*pump depletion*), chegamos à uma relação de dispersão linear [40]

$$\left( \Omega^2 - \frac{\Omega_p^2}{\gamma_e^3} - \sigma^2 q^4 \right) (\Omega - \delta_s q) = -\frac{a_w^2 \Omega_p^2}{4\gamma_e^5 w_s t_e} q^2 \quad (4.39)$$

onde  $\delta_s = \beta_s - \beta_e$  ( $\beta_s = v_s/c = ck_s/w_s; \beta_e = v_e/c$ ) representa o avanço (*slippage*) da radiação eletromagnética em relação ao feixe de elétrons relativísticos e a aproximação  $w_s \approx ck_s$  foi usada no denominador do lado direito da equação. Uma vez que a frequência da onda eletromagnética não é especificada, este avanço é arbitrário. Contudo, do ponto de vista do laboratório, existe um grande espectro de frequências no ruído de fundo gerado pelo feixe. Estas frequências competem uma com as outras e sobrevive aquela que otimiza o avanço em relação à condição de ressonância correspondente.

Podem ser vistos dois modos, que se acoplam através do ondulator óptico, cujas relações de dispersão são dadas por

$$\Omega - \delta_s q = 0; \quad \Omega^2 - \frac{\Omega_p^2}{\gamma_e^3} - \sigma^2 q^4 = 0 \quad (4.40)$$

O primeiro é o modo da radiação o segundo é o modo de plasma quântico com um termo de recuo,  $\sigma$ , e número de onda normalizado,  $q$ , que é o modo do espaço de cargas contraído por efeito Doppler visto no referencial em

movimento. Esta onda de plasma se propaga com as velocidades normalizadas de fase e grupo dadas por

$$\beta_{ph} = \sqrt{\frac{\Omega^2}{q^2}} = \sigma q \left( 1 + \frac{\Omega_p^2}{\gamma_e^3 \sigma^2 q^4} \right)^{1/2} \approx \sigma q \quad (4.41)$$

$$\beta_g = \frac{\partial \Omega}{\partial q} = \frac{2\sigma^2 q^3}{\sqrt{\sigma^2 q^4 + \Omega_p^2/\gamma_e^3}} \approx 2\beta_{ph} \approx 2\sigma q \quad (4.42)$$

A condição  $\Omega_p^2/\gamma_e^3 \sigma^2 q^4 \ll 1$  é sempre satisfeita quando se trata de espalhamento Compton, onde o potencial ponderomotivo é forte o suficiente para dominar a dinâmica do espaço de cargas, cuja energia eletrostática é mantida como ruído.

A relação de dispersão (4.40) obtida pode ser reduzida às encontradas nas referências [20], [31] e [45] para FELs quânticos sem a presença do espaço de cargas se a mesma normalização for empregada e  $\delta_s$  for redefinido como o parâmetro de *detuning*, que não é o caso tratado nesta tese. Por se tratar de uma equação cúbica, existem soluções tais que  $Im\{\Omega\} > 0$ , o que corresponde a uma instabilidade, que cresce até a saturação.

Assim, introduzimos um modelo de fluido para plasma quântico que descreve a emissão de radiação coerente como um processo de interação de três ondas, sendo mais simples e realista de simular numericamente. A radiação estimulada é tratada como um espalhamento Compton, sem a usual formação de pacotes de elétrons (*bunching*) resultante da interação não linear com o potencial ponderomotivo. Esta descrição é válida para feixes de elétrons relativísticos, mas não ultra-relativísticos. A taxa de crescimento linear mostra que os efeitos das oscilações de espaço de cargas é desprezível para feixes densos com elevado  $\gamma$ .

## Capítulo 5

# O crescimento não linear

### 5.1 Introdução

Acoplamento ressonante de duas ondas eletromagnéticas com uma eletrostática é um fenômeno não linear bastante importante em física de plasmas. A principal característica do regime não linear, que o difere do linear, é que os campos elétricos associados às diferentes ondas induzem no plasma correntes que não são mais independentes uma das outras, i.e., não vale mais o princípio da superposição linear. Correntes induzidas por uma onda passam a influenciar a evolução das demais e vice-versa, e mesmo campos elétricos longitudinais e transversais não podem mais ser considerados como independentes.

Neste capítulo deduziremos um sistema de equações diferenciais parciais de primeira ordem não lineares do tipo modo acoplado (*coupled-mode*) capazes de descrever a interação de duas ondas eletromagnéticas com uma onda de plasma longitudinal na aproximação de envelope lento.

## 5.2 A evolução da amplitude da Radiação

Da mesma forma que na referência [46], vamos começar definindo uma oscilação de plasma eletrônico na forma

$$\frac{\delta n}{n_b}(\zeta, t') = \tilde{n}(\zeta, t') e^{i(k_l \zeta - \Omega_l t')}, \quad (5.1)$$

onde  $\tilde{n}(\zeta, t')$  é uma função que varia lentamente no tempo e no espaço,  $k_l$  é o número de onda associado à oscilação de plasma e  $\Omega_l$  é a frequência, desviada por efeito Doppler.

Então, substituindo (5.1) nas equações de campo (4.32)-(4.33), obtemos:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t'} + [v_s - v_e] \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) a_s = -\frac{w_p^2}{2w_s \gamma_e} \tilde{n}^* a_w e^{-i\delta t'}; \quad (5.2)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t'} - [v_w + v_e] \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) a_w = \frac{w_p^2}{2w_w \gamma_e} \tilde{n} a_s e^{i\delta t'}. \quad (5.3)$$

A fim de deduzir (5.2)-(5.3), foram impostas as condições de casamento (*matching*)

$$k_l = k_w + k_s; \quad w_l = w_s - w_w - \delta, \quad (5.4)$$

onde  $\delta$  é uma pequena dessintonia entre a frequência da onda ponderomotiva e frequência das oscilações de plasma. Portanto,

$$\tilde{n}(\zeta, t') e^{i(k_l \zeta - \Omega_l t')} \propto \tilde{V} e^{i\theta_p}. \quad (5.5)$$

Redefinindo  $a_s$  e  $a_w$  em (5.2)-(5.3) de maneira que  $\tilde{a}_s = a_s e^{i\delta t'}$ ,  $\tilde{a}_w = a_w$ , obtemos as equações de evolução lenta para as amplitudes de campo

$$\left( \frac{\partial}{\partial t'} + [v_s - v_e] \frac{\partial}{\partial \zeta} - i\delta \right) \tilde{a}_s = -\frac{w_p^2}{2w_s \gamma_e} \tilde{n}^* \tilde{a}_w \quad (5.6)$$

e

$$\left( \frac{\partial}{\partial t'} - [v_w + v_e] \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \tilde{a}_w = \frac{w_p^2}{2w_w \gamma_e} \tilde{n} \tilde{a}_s, \quad (5.7)$$

onde os termos do lado direito de (5.6)-(5.7) descrevem correntes não lineares perturbadas até segunda ordem.

### 5.3 A evolução das oscilações de plasma

Seguindo ainda a referência [46], vamos deduzir a equação para a evolução da amplitude das oscilações de plasma sob a hipótese de Envelope Lentamente Variável. Substituindo a aproximação de onda plana para a onda de plasma, eq. (5.1), na equação (4.10), temos:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t'^2} + \frac{w_p^2}{\gamma_e^3} + \frac{1}{4} \left( \frac{\hbar}{m_e \gamma_e^3} \right)^2 \frac{\partial^4}{\partial \zeta^4} \right] \tilde{n}(\zeta, t') e^{i(k_l \zeta - \Omega_l t')} = \frac{1}{m_e \gamma_e^3} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} V. \quad (5.8)$$

Desprezando as derivadas de segunda ordem e derivadas cruzadas, substituindo a expressão (4.35) para o potencial ponderomotivo, usando as condições de casamento (5.4), e redefinindo  $a_s$  e  $a_w$ , de maneira que  $\tilde{a}_s = a_s e^{i\delta t'}$  e  $\tilde{a}_w = a_w$ , tal como feito na dedução do sistema (5.6)-(5.7), obtemos, a partir da equação (5.8)

$$\left\{ \frac{1}{2i} \left[ \Omega_l^2 - \frac{1}{4} \left( \frac{\hbar}{m_e \gamma_e^3} \right)^2 k_l^4 - \frac{w_p^2}{\gamma_e^3} \right] + \Omega_l \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{1}{2} \left( \frac{\hbar}{m_e \gamma_e^3} \right)^2 k_l^3 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right\} \tilde{n} = \frac{c^2 [k_s + k_w]^2}{4\gamma_e^4} \tilde{a}_w \tilde{a}_s^*, \quad (5.9)$$

onde

$$\Omega_l^2 - \frac{1}{4} \left( \frac{\hbar}{m_e \gamma_e^3} \right)^2 k_l^4 - \frac{w_p^2}{\gamma_e^3} = 0 \quad (5.10)$$

é a relação de dispersão da onda eletrônica em um plasma quântico relativístico, e  $\Omega_l = (w_l - k_l v_e)$  é a frequência de plasma com um termo de arraste (*drift*).

Assim, a equação das oscilações de plasma, (Eq. 5.9), se reduz-se à

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t'} + \frac{1}{2\Omega_l} \left( \frac{\hbar}{m_e \gamma_e^3} \right)^2 k_l^3 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right\} \tilde{n} = \frac{c^2 [k_s + k_w]^2}{4\gamma_e^4 \Omega_l} \tilde{a}_w \tilde{a}_s^*. \quad (5.11)$$

A fim de compreendermos os efeitos quânticos, vamos reescrever a equação (5.10) na forma canônica de uma relação de dispersão para ondas de Langmuir em um plasma morno. Fazendo-se a aproximação  $k_s \gg k_w$ , de forma que  $k_l^4 \approx k_s^2 k_l^2$ , temos

$$\Omega_l^2 - \frac{1}{4} \left( \frac{\hbar k_s}{m_e \gamma_e^3} \right)^2 k_l^2 - \frac{w_p^2}{\gamma_e^3} = 0 \quad (5.12)$$

Nota-se que o termo de recuo eletrônico (*recoil*) pode ser interpretado como uma dispersão térmica na onda de plasma, cuja velocidade quadrática média pode ser definida como

$$V_{TQ}^2 = \frac{1}{4} \left( \frac{\hbar k_s}{m_e \gamma_e^3} \right)^2. \quad (5.13)$$

As propriedades coletivas da onda de plasma são perdidas quando seu número de onda,  $k_l$ , é maior que o número de onda de Debye, definido por  $k_D = w_p/V_{Te}$ , onde  $V_{Te}$  é a velocidade térmica dos elétrons [25], ou seja, quando o comprimento de onda das oscilações de plasma for menor que o comprimento de onda de Debye, i.e.,  $2\pi/k_l = \lambda_l < \lambda_D$ . Então, se  $k_l > w_p/V_{TQ}\gamma_e^{3/2}$ , os elétrons em um elemento de fluido passam a se comportar como um aglomerado de partículas sem correlação, devido ao recuo eletrônico, o que caracteriza um regime Compton, que pode ser clássico ou quântico. Se a razão entre o momento do fóton emitido e o momento do elétron for grande ( $\hbar k_s/mc\gamma_e > 1$ ) temos um FEL no regime Compton Quântico, caso contrário temos um FEL clássico. Se  $k_l < w_p/V_{TQ}\gamma_e^{3/2}$  entramos no regime Raman.

Considerando que na realidade ondas de plasma longitudinais podem ser atenuadas seja por mecanismos colisionais ou via amortecimento de Landau (*Landau Damping*), é conveniente adicionar à equação (5.11) um termo de amortecimento fenomenológico  $\nu$  ( $\nu \ll \Omega_l$ ). Usando ainda as condições de sintonia (5.4), temos

$$\left( \frac{\partial}{\partial t'} + v_q \frac{\partial}{\partial \zeta} + \nu \right) \tilde{n} = \frac{c^2 k_l^2}{4\gamma_e^4 \Omega_l} \tilde{a}_w \tilde{a}_s^*, \quad (5.14)$$

onde

$$v_q = \frac{1}{2\Omega_l} \left( \frac{\hbar}{m_e \gamma_e^3} \right)^2 k_l^3. \quad (5.15)$$

é um termo com dimensão de velocidade, mas que não se confunde com uma velocidade física do feixe.

Os modos Stoques e anti-Stoques são:

$$\Omega_l = \pm \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{\hbar}{m_e \gamma_e^3} \right)^2 k_l^4 + \frac{w_p^2}{\gamma_e^3}}. \quad (5.16)$$



O acoplamento da onda de plasma, de energia negativa, com os modos eletromagnéticos, de energia positiva, é condição necessária ao desenvolvimento de uma instabilidade paramétrica, que simultaneamente faz crescer a amplitude da onda de plasma e da radiação espalhada e decrescer a amplitude do campo do *wiggler*. A função dielétrica da onda de plasma é dada por:

$$\epsilon_l(\omega_l, k_l) = 1 - \frac{1}{4} \left( \frac{\hbar}{m_e \gamma_e^3} \right)^2 \frac{k_l^4}{(\omega_l - k_l v_e)^2} - \frac{w_p^2}{(\omega_l - k_l v_e)^2 \gamma_e^3} \quad (5.17)$$

O sinal da energia do modo longitudinal é dado pela derivada em relação à  $\omega_l$  da função dielétrica (5.17). Assumindo a condição  $\epsilon_l(\omega_l, k_l) = 0$ , temos:

$$\frac{\partial \epsilon_l(\omega_l, k_l)}{\partial \omega_l} = \frac{2}{(\omega_l - k_l v_e)} < 0 \quad (5.18)$$

que é negativa para todo  $\Omega_l = (\omega_l - k_l v_e) < 0$ .

## 5.4 O Sistema de equações modo-acoplado

Por conveniência vamos introduzir a normalização

$$\tau = w_p t', \quad \chi = \frac{w_p}{c} \zeta, \quad \delta' = \frac{\delta}{w_p}, \quad \nu' = \frac{\nu}{w_p}. \quad (5.19)$$

O sistema de equações diferenciais acopladas (5.6)-(5.7) e (5.14) torna-se

$$\left( \frac{\partial}{\partial \tau} + \beta_q \frac{\partial}{\partial \chi} + \nu' \right) \tilde{n} = \frac{c^2}{4\gamma_e^4} \frac{k_l^2}{\Omega_l w_p} \tilde{a}_w \tilde{a}_s^* \quad (5.20)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial \tau} + [\beta_s - \beta_e] \frac{\partial}{\partial \chi} - i\delta' \right) \tilde{a}_s = -\frac{w_p}{2w_s \gamma_e} \tilde{a}_w \tilde{n}^* \quad (5.21)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial \tau} + [-\beta_w - \beta_e] \frac{\partial}{\partial \chi} \right) \tilde{a}_w = \frac{w_p}{2w_w \gamma_e} \tilde{n} \tilde{a}_s \quad (5.22)$$

As equações (5.20)-(5.22) formam um sistema capaz de descrever a interação entre duas ondas eletromagnéticas transversais e uma onda longitudinal em um plasma frio com um termo quântico de recuo em uma aproximação de envelope lento.

Uma vez que  $\beta_s \approx \beta_e \approx 1$ , podemos desprezar o *slippage* na equação (5.21), e assim desconsiderar seu termo de derivada espacial, bem como nas demais

equações. Nessa aproximação a densidade de energia contida na onda de plasma e nos campos da radiação espalhada e do *wiggler* são constantes no espaço, e as soluções se tornam apenas funções do tempo - vide referência [47]. Estamos olhando uma curva de nível de  $\chi$  constante. Assim, as equações (5.20)-(5.22) tornam-se:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau} + \nu'\right)\tilde{n} = \frac{c^2}{4\gamma_e^4}\frac{k_l^2}{\Omega_l w_p}\tilde{a}_w\tilde{a}_s^*; \quad (5.23)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau} - i\delta'\right)\tilde{a}_s = -\frac{w_p}{2w_s\gamma_e}\tilde{a}_w\tilde{n}^*; \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\tilde{a}_w = \frac{w_p}{2w_w\gamma_e}\tilde{n}\tilde{a}_s. \quad (5.25)$$

## 5.5 Relações de Manley-Rowe

As condições de conservação de energia podem ser analisadas através das relações de Manley-Rowe. A partir de (5.23)-(5.25), desprezando o termo dissipativo, temos que

$$\frac{\partial}{\partial\tau}|\tilde{n}|^2 = \frac{c^2}{4\gamma_e^4}\frac{k_l^2}{\Omega_l w_p}[\tilde{a}_w\tilde{a}_s^*\tilde{n}^* + \tilde{a}_w^*\tilde{a}_s\tilde{n}] \quad (5.26)$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}|\tilde{a}_s|^2 = -\frac{w_p}{2w_s\gamma_e}[\tilde{a}_w\tilde{a}_s^*\tilde{n}^* + \tilde{a}_w^*\tilde{a}_s\tilde{n}] \quad (5.27)$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}|\tilde{a}_w|^2 = \frac{w_p}{2w_w\gamma_e}[\tilde{a}_w^*\tilde{a}_s\tilde{n} + \tilde{a}_w\tilde{a}_s^*\tilde{n}^*] \quad (5.28)$$

Reagrupando as equações (5.26)-(5.28), obtemos a forma diferencial das relações de Manley-Rowe, quais sejam

$$\frac{2\gamma_e^3\Omega_l w_p}{c^2 k_l^2}\frac{\partial}{\partial\tau}|\tilde{n}|^2 + \frac{w_s}{w_p}\frac{\partial}{\partial\tau}|\tilde{a}_s|^2 = 0 \quad (5.29)$$

$$w_s\frac{\partial}{\partial\tau}|\tilde{a}_s|^2 + w_w\frac{\partial}{\partial\tau}|\tilde{a}_w|^2 = 0 \quad (5.30)$$

$$\frac{2\gamma_e^3 \Omega_l w_p}{c^2 k_l^2} \frac{\partial}{\partial \tau} |\tilde{n}|^2 + \frac{w_w}{w_p} \frac{\partial}{\partial \tau} |\tilde{a}_w|^2 = 0 \quad (5.31)$$

Integrando no tempo e assumindo as condições iniciais para campo de radiação desprezível e plasma no repouso, i.e.,  $a_s(0) \sim n(0) \sim 0$ , e ainda pegando o modo do feixe de energia negativa, de forma que  $\Omega_l = -|\Omega_l|$ , temos

$$\frac{w_w}{w_p} |\tilde{a}_w|^2 = \frac{w_w}{w_p} |\tilde{a}_w(0)|^2 + \left( -\frac{2|\Omega_l| w_p \gamma_e^3}{c^2 k_l^2} |\tilde{n}|^2 \right) \quad (5.32)$$

$$\frac{w_s}{w_p} |\tilde{a}_s|^2 + \left( -\frac{2w_p \gamma_e^3 |\Omega_l|}{c^2 k_l^2} |\tilde{n}|^2 \right) = 0 \quad (5.33)$$

$$w_w |\tilde{a}_w|^2 + w_s |\tilde{a}_s|^2 = w_w |\tilde{a}_w(0)|^2 \quad (5.34)$$

A partir da equação (5.32), vemos como ocorre a transferência de energia entre o campo do *wiggler* e a onda de plasma. No início da interação, valem as condições  $|\tilde{n}(\tau)|^2 \sim 0$  e  $|\tilde{a}_w(\tau)|^2 \sim |\tilde{a}_w(0)|^2$ . Porém, à medida que o tempo passa, a amplitude  $|\tilde{n}(\tau)|^2$  cresce até a total atenuação do *wiggler*, quando já não há mais energia disponível, e  $|\tilde{a}_w(\tau)|^2$  alcança um ponto de mínimo. O aumento de amplitude da onda de plasma, que carrega energia negativa (em azul), vem acompanhado de um decréscimo da amplitude do campo do *wiggler*, que carrega energia positiva (em vermelho).

A partir de (5.33), vemos a troca de energia entre o campo da radiação espalhada e a onda de plasma. Os termos perturbados,  $|\tilde{n}(\tau)|^2$  e  $|\tilde{a}_s(\tau)|^2$ , crescem juntos, de forma que a soma dá sempre resultado nulo, até atingirem pontos de máximo. A onda de plasma ganha energia negativa e o campo da radiação espalhada ganha energia positiva.

A equação (5.34) estabelece uma lei de conservação de energia entre o campo do *wiggler* e da radiação espalhada. Um ganho de energia (positiva) por um é acompanhado de uma perda de energia (positiva) pelo outro, e a soma é constante.

A fim de obter um sistema com variáveis reais integrável numericamente, vamos fazer as seguintes transformações de variáveis em (5.20)-(5.22):

$$\tilde{n} = n' e^{i\phi_0}; \quad \tilde{a}_s = a'_s e^{i\phi_1}; \quad \tilde{a}_w = a'_w e^{i\phi_2} \quad (5.35)$$

onde  $n'$ ,  $a'_s$ ,  $a'_w$  and  $\phi_n$  são grandezas reais.

Feitas as substituições, deduzimos o seguinte sistema de seis equações diferenciais parciais tipo *coupled-mode* que descreve um sistema de interação de três ondas, sendo

- Três para as amplitudes de envelope:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau} + \beta_q \frac{\partial}{\partial\chi} + \nu'\right) n' = \frac{c^2 k_l^2}{4\gamma_e^4 \Omega_l w_p} a'_w a'_s \cos\phi \quad (5.36)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau} + [\beta_s - \beta_e] \frac{\partial}{\partial\chi}\right) a'_s = -\frac{w_p}{2w_s \gamma_e} a'_w n' \cos\phi \quad (5.37)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau} - [\beta_w + \beta_e] \frac{\partial}{\partial\chi}\right) a'_w = \frac{w_p}{2w_w \gamma_e} n' a'_s \cos\phi \quad (5.38)$$

- Três para as fases:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau} + \beta_q \frac{\partial}{\partial\chi}\right) \phi_0 = -\frac{c^2 k_l^2}{4\gamma_e^4 \Omega_l w_p} \frac{a'_w a'_s}{n} \sin\phi \quad (5.39)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau} + [\beta_s - \beta_e] \frac{\partial}{\partial\chi}\right) \phi_1 = \frac{w_p}{2w_s \gamma_e} \frac{a'_w n'}{a'_s} \sin\phi + \delta' \quad (5.40)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau} - [\beta_w + \beta_e] \frac{\partial}{\partial\chi}\right) \phi_2 = \frac{w_p}{2w_w \gamma_e} \frac{n' a'_s}{a'_w} \sin\phi \quad (5.41)$$

A evolução temporal pode ser reescrita da seguinte maneira

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau} + \nu'\right) n = C_0^T a'_w a'_s \cos\phi \quad (5.42)$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau} a'_s = C_1^T a'_w n' \cos\phi \quad (5.43)$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau} a'_w = C_2^T n' a'_s \cos\phi \quad (5.44)$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau} \phi = \delta' - \left(C_0^T \frac{a'_w a'_s}{n} + C_1^T \frac{a'_w n'}{a'_s} + C_2^T \frac{n' a'_s}{a'_w}\right) \sin\phi \quad (5.45)$$

onde

$$\phi = \phi_0 + \phi_1 - \phi_2 \quad (5.46)$$

As constantes  $C_s$  são

$$C_0^T = \frac{c^2}{4\gamma_e^4} \frac{k_l^2}{\Omega_l w_p}, \quad C_1^T = -\frac{w_p}{2w_s \gamma_e}, \quad C_2^T = \frac{w_p}{2w_w \gamma_e}$$

e

$$\Omega_l = -\sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{\hbar}{m\gamma_e^3} \right)^2 k_l^4 + \frac{w_p^2}{\gamma_e^3}}, \quad \nu' \ll \Omega_l/w_p, \quad \delta' \ll \Omega_l/w_p$$

$$k_l = k_s + k_w, \quad w_l = w_s - w_w$$

## 5.6 Resultados numéricos

Um código Runge-Kutta de quarta ordem foi usado para resolver numericamente o sistema de equações (5.42)-(5.45). A existência de coeficientes abrangendo várias ordens de grandeza e picos de intensidade íngremes sugeriram a necessidade de trabalhar com precisão numérica quádrupla (32 casas decimais no Fortran 90) e discretização o tão fina quanto possível (não menor que 400.000 pontos).

Nos resultados que se seguem mostramos a intensidade (ou fluência) da radiação espalhada ( $I_s$ ) e do pulso de laser incidente ( $I_w$ ) em  $Watts/cm^2$ , onde  $w$  denota *wiggler*. O valor máximo do potencial vetor normalizado da radiação espalhada,  $a_s$ , é apontado em cada gráfico. Para simplificar a notação, declinamos o índice “linha” das grandezas físicas das equações (5.42)-(5.45).

Foi utilizada a seguinte fórmula de conversão, obtida, por exemplo, na referência [48]

$$I = 2 \frac{1.0 \times 10^{20}}{(8.6)^2 \lambda^2 [\mu m]} a^2, \quad (5.47)$$

onde o fator 2 é devido à polarização circular utilizada neste trabalho.

Na figura (5.1) plotamos a curva de intensidade da radiação espalhada para alguns valores iniciais da *pump*, cuja evolução temporal é mostrada na figura (5.2). Inicializamos a partir de um campo de *background* para a radiação espalhada desprezível e feixe de elétrons inicialmente não perturbado ( $a_s(0) \sim n(0) \sim 0$ ). A amplitude da onda de plasma é mostrada na figura (5.3).

Observamos um comportamento de explosão periódica estabilizada (*repeated stabilized explosion*). A onda de plasma é excitada pela força ponderomotiva e cresce até a saturação e a completa atenuação da *pump*, quando a radiação atinge sua amplitude máxima. O comprimento de onda da radiação foi fixado em  $\lambda_s = 1.0 \times 10^{-10} cm$  (Raios gama de  $0.01 \text{ \AA}$ ) e o comprimento de onda do *wiggler* foi fixado em  $\lambda_w = 1.0 \times 10^{-4} cm$ , que é compatível com o comprimento de onda de um laser Titânio-Safira ( $\lambda = 0.8 \mu m$ ). Os parâmetros do feixe são  $\gamma_e = 2$  e  $n_b = 4.0 \times 10^{20} cm^{-3}$ .

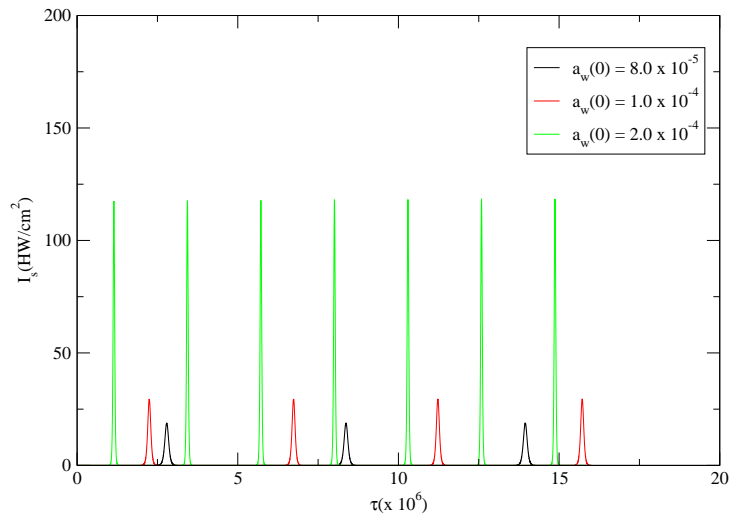


Figura 5.1: Intensidade da radiação versus tempo normalizado ( $\tau = w_p t'$ ). Em unidades normalizadas  $a_s(max) \approx 8.2 \times 10^{-8}$ ,  $1.0 \times 10^{-7}$  e  $2.1 \times 10^{-7}$ . A escala do gráfico no laboratório é  $\approx 4,2$  metros.

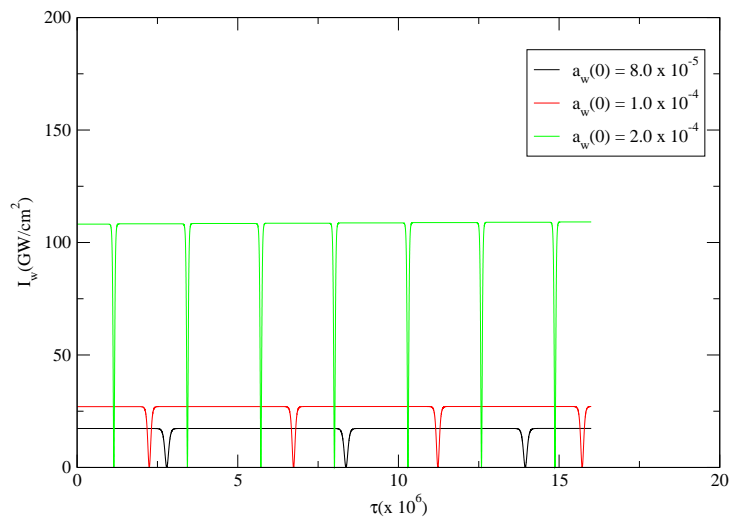


Figura 5.2: Comportamento da radiação de ondulador para os parâmetros da figura (5.1)

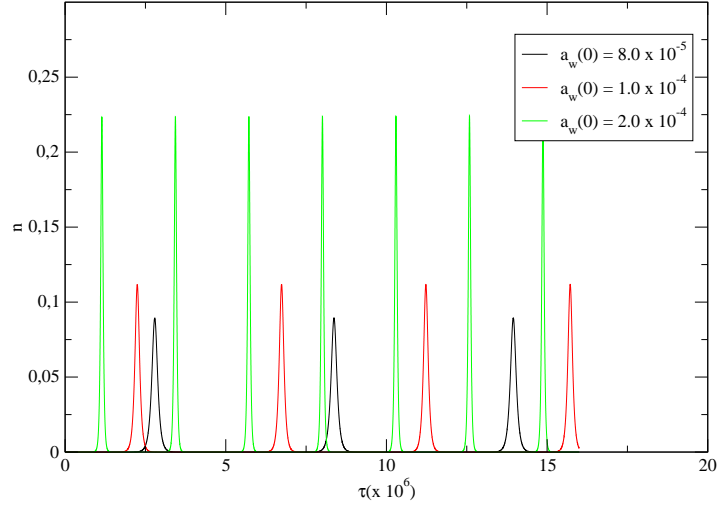


Figura 5.3: Flutuações da densidade normalizada do feixe para os parâmetros mostrados na figura (5.1)

Tal sistema não pode ser descrito classicamente, pois  $\hbar k_s / \gamma_e m_e c \approx 1.2 > 1$  e opera no regime Compton, pois os efeitos da distribuição espacial de cargas é desprezível quando comparado ao termo quântico no modo do plasma (5.16), i.e.,  $(\hbar k_s / \gamma_e^3 m_e c) c^2 k_s^2 \approx 3 \times 10^{41} \gg w_p^2 / \gamma_e^3 \approx 1.5 \times 10^{29}$ . O *recoil* é relevante.

Nas figuras (5.4)-(5.6) mostramos como se modifica a curva da intensidade da radiação espalhada quando variamos a densidade de repouso do feixe ( $n_b$ ), sendo a *pump* fixada inicialmente em  $a_w(0) = 8.0 \times 10^{-5}$  e a energia do feixe em  $\gamma_e = 2$ . A curva em azul equivale ao primeiro pulso (em preto) nos gráficos (5.1)-(5.3).



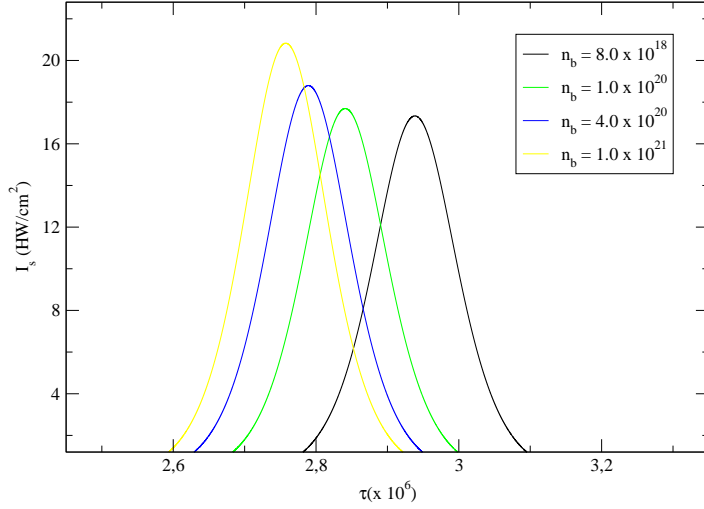


Figura 5.4: Intensidade da radiação versus tempo normalizado ( $\tau = w_p t'$ ) para diferentes valores de densidade de feixe  $n_b$  e condições iniciais de campo de radiação nulo e plasma em repouso. O valor máximo da amplitude do potencial vetor normalizado,  $a_s$ , vale, do maior para o menor,  $8.8 \times 10^{-8}$ ,  $8.3 \times 10^{-8}$ ,  $8.0 \times 10^{-8}$ , e  $7.9 \times 10^{-8}$ , respectivamente.

Notamos que, quanto mais denso o feixe de elétrons, mais energia pode ser transferida para o campo da radiação espalhada e menor é a amplitude máxima da onda de plasma, podendo a intensidade da radiação ser até superior à da *pump*, o que indica que pulsos de raios-X e raios gama multi-petawatt podem ser conseguidos com lasers de potência mediana (Terawatt), o que está de acordo com a referência [49], em que o feixe de elétrons é visto como um espelho não linear relativístico de refletividade imperfeita (plasma underdenso) refletindo a radiação da *pump* por processos coletivos de *backscattering*. O aumento da densidade do feixe torna possível construir dispositivos cada vez menores tendo em vista a dependência do comprimento de saturação. Em todos os casos a *pump* é totalmente atenuada.

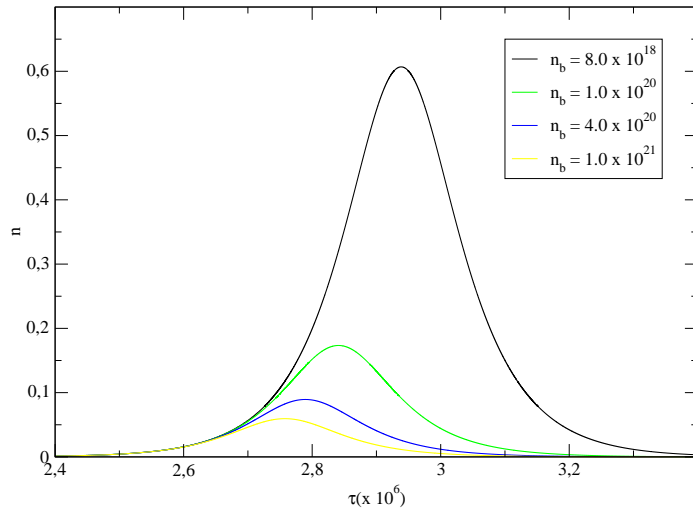


Figura 5.5: Perturbação da densidade versus tempo normalizado ( $\tau = w_p t'$ ) para diferentes valores de densidade de feixe  $n_b$  e condições iniciais de campo de radiação nulo e plasma em repouso.

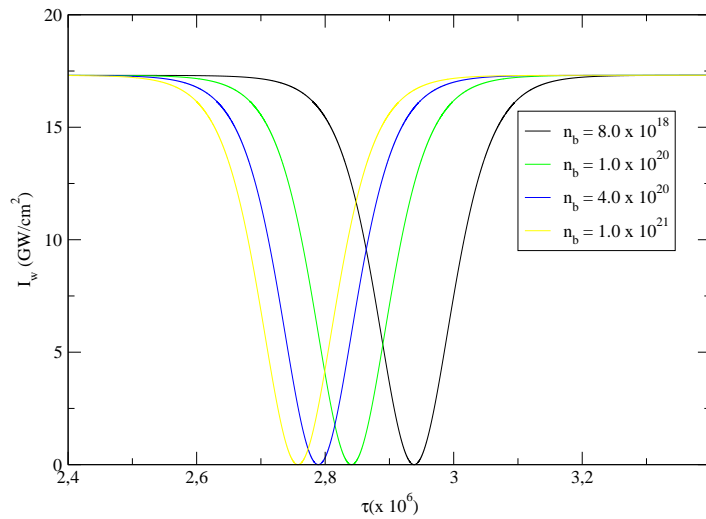


Figura 5.6: Intensidade da radiação versus tempo normalizado ( $\tau = w_p t'$ ) para diferentes valores de densidade de feixe  $n_b$  e condições iniciais de campo de radiação nulo e plasma em repouso.

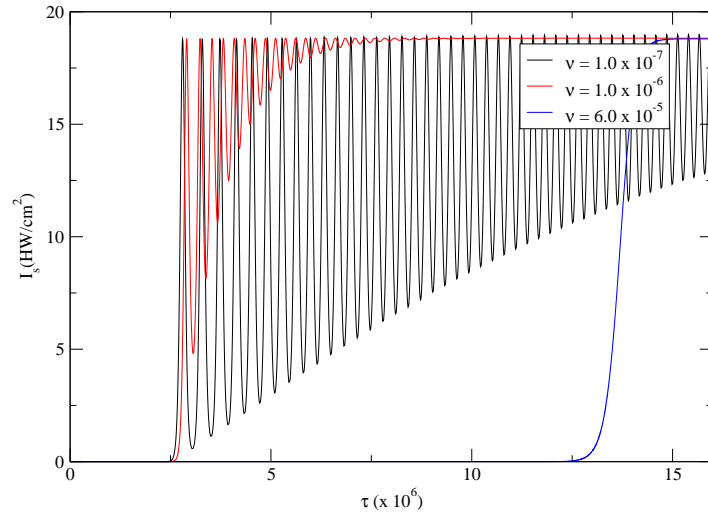


Figura 5.7: Amplitude da radiação para diferentes valores de *damping* e  $a_w(0) = 8.0 \times 10^{-5}$ . Os comprimentos de onda da radiação e do ondulator são  $\lambda_s = 1.0 \times 10^{-10} \text{ cm}$  e  $\lambda_w = 1.0 \times 10^{-4} \text{ cm}$ . Os parametros do feixe são  $\gamma_e = 2$  e  $n_b = 4.0 \times 10^{20} \text{ cm}^{-3}$ . Observa-se formação de onda de choque para  $\nu = 6.0 \times 10^{-5}$  (curva em azul).

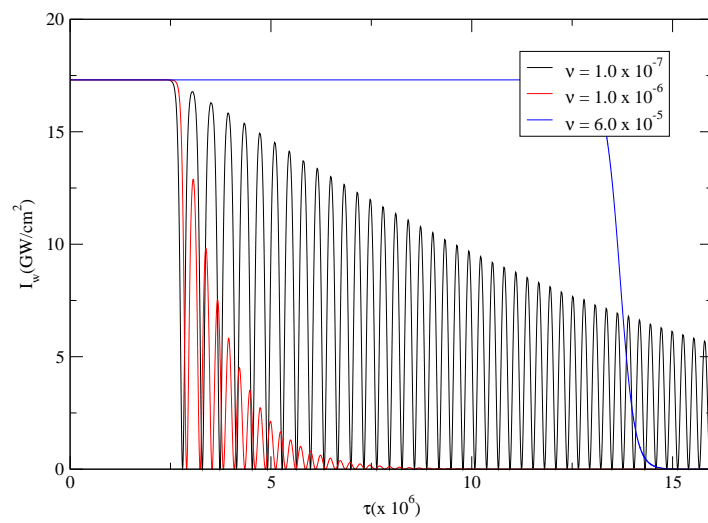


Figura 5.8: Amplitude da *pump* em (5.7).

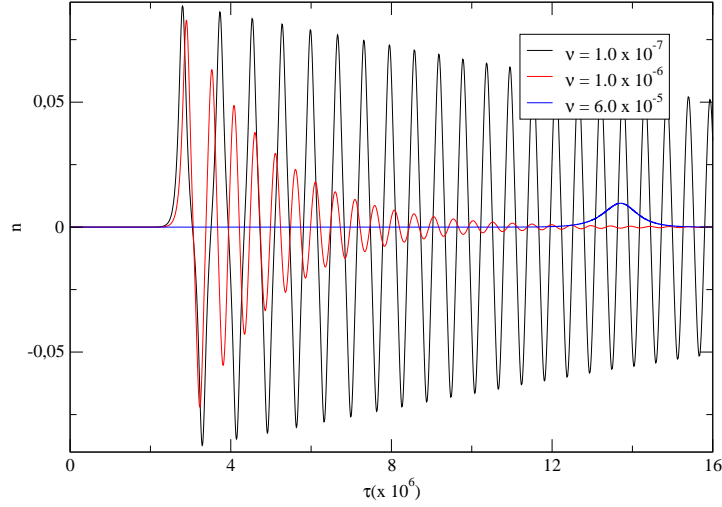


Figura 5.9: Densidade do plasma em (5.7). Durante a formação da onda de choque, um sóliton é excitado no plasma (azul)

De uma maneira geral os resultados obtidos para radiação de saída são formações de pulsos de altíssima intensidade (Hexawatt) com *input* de radiação de ondulator situado na casa dos Gigawatts-Terawatts e feixes da ordem dos poucos MeVs, que evolui para a saturação em um tempo compatível com dimensões da ordem de metros, sem uso de cavidades ressonantes, características essas atrativas para sistemas *tabletop* de Lasers de Elétrons livres. Porém, tais dispositivos necessitam do uso de feixes com densidades da ordem de  $(10^{20} - 10^{21} \text{cm}^{-3})$ , que estão além do estado-da-arte da atual tecnologia de aceleradores ( $\sim 10^{15} - 10^{16} \text{cm}^{-3}$ ).

Para parâmetros usuais de laboratório nosso modelo igualmente obtém êxito investigar a produção de fótons de raios-X na interação *laser-beam*. Por exemplo, para um feixe de 60 Mev ( $\gamma = 120$ ) e densidade  $n_b = 6.0 \times 10^{16} \text{cm}^{-3}$  colidindo com um pulso de laser de comprimento de onda situado na faixa do infravermelho  $\lambda_w = 1.094 \times 10^{-3} \text{cm}$  e intensidade no foco de aproximadamente  $I_w = 56 \text{TW}/\text{cm}^2$  (equivalente a um  $a_w(0) = 5.0 \times 10^{-2}$ ), obtemos um output máximo de 70 KW em fótons de Raios-X de  $1.9 \times 10^{-8} \text{cm}$  ( $\approx 2\text{\AA}$ ). A dimensão linear do ponto de interação obtida foi de  $2.1 \times 10^{-3} \text{cm}$ , o que compatível com dados experimentais. [50]

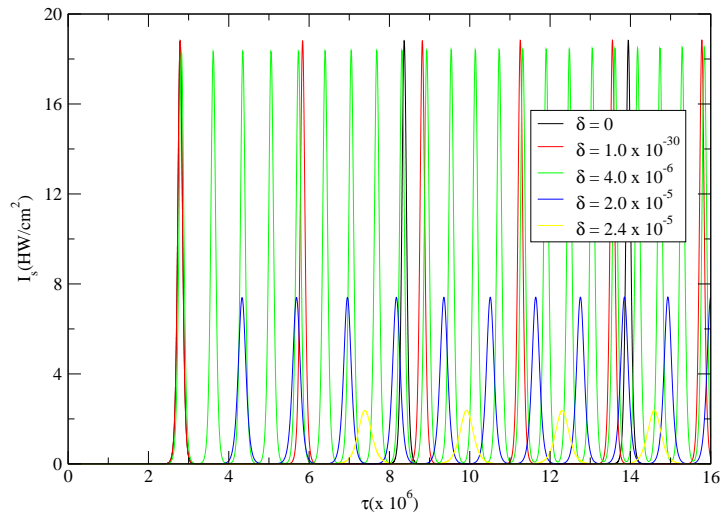


Figura 5.10: Amplitude da radiação para diferentes valores de *mismatching* e  $a_w(0) = 8.0 \times 10^{-5}$ . Os comprimentos de onda da radiação espalhada e da radiação do *wiggler* são  $\lambda_s = 1.0 \times 10^{-10} \text{ cm}$  e  $\lambda_w = 1.0 \times 10^{-4} \text{ cm}$ . Os parametros do feixe são  $\gamma_e = 2$  e  $n_b = 4.0 \times 10^{20} \text{ cm}^{-3}$ . Observa-se um aumento no número de picos para pequenos valores de *mismatching*, mas cuja intensidade se degrada para valores maiores devido ao cancelamento dos termos de acoplamento nas equações (5.42)-(5.44), que passam a oscilar muito rapidamente.

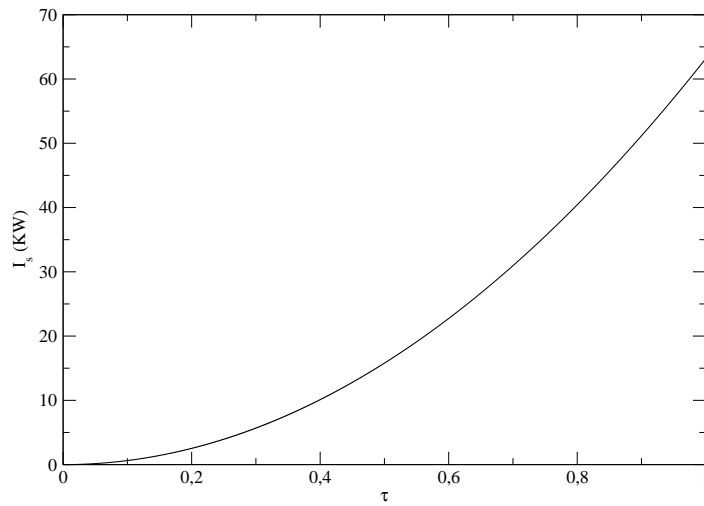


Figura 5.11: Intensidade da Radiação *versus* tempo normalizado  $\tau$ . As condições iniciais foram  $n(0) = 0.1$ ,  $a_s(0) \sim 0$  e  $a_w(0) = 5.0 \times 10^{-2}$

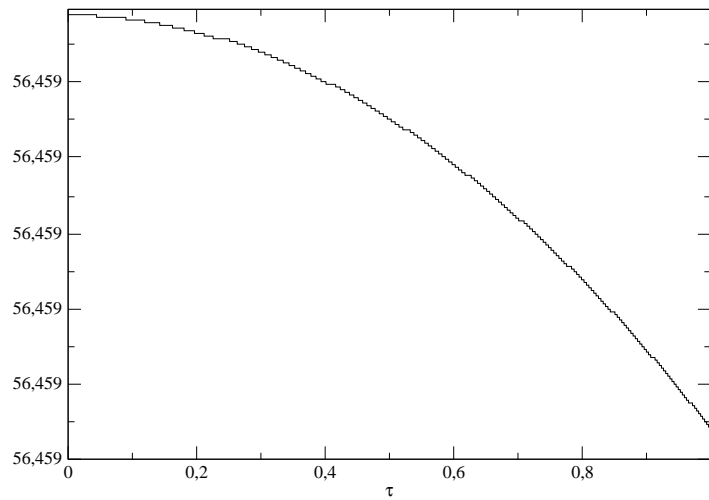


Figura 5.12: Intensidade do wiggler *versus* tempo normalizado  $\tau$ . A escala vertical é em  $TW/cm^2$ .

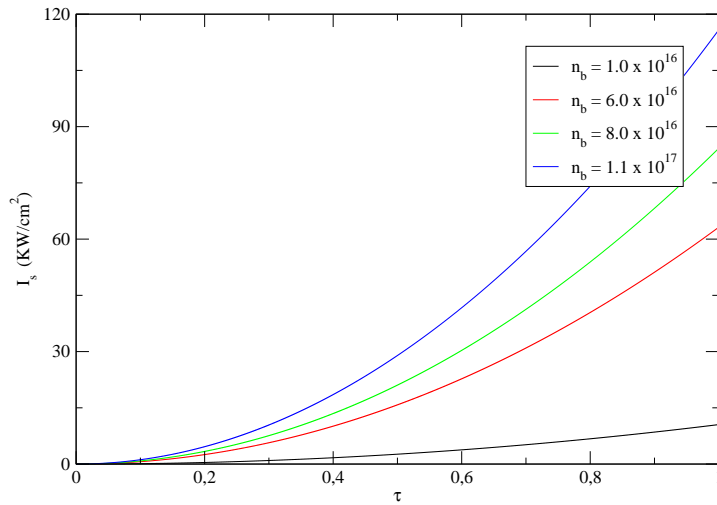


Figura 5.13: Intensidade da Radiação *versus* tempo normalizado  $\tau$ . As condições iniciais foram  $n(0) = 0.1$ ,  $a_s(0) \sim 0$  e  $a_w(0) = 5.0 \times 10^{-2}$ . As escalas espaciais no laboratório são de  $5.31 \times 10^{-3}$ ,  $2.17 \times 10^{-3}$ ,  $1.88 \times 10^{-3}$  e  $1.60 \times 10^{-3}$ , respectivamente, do menor para o maior valor final da intensidade.

Para melhor ilustração mostramos acima as taxas de crescimento no início da interação para os mesmos parâmetros usados no exemplo da fig. (5.11) com valores diferentes de densidade de feixe.

## Capítulo 6

# Conclusão

Neste trabalho apresentamos um modelo de fluido baseado na hidrodinâmica quântica capaz de descrever a emissão de radiação eletromagnética (Raios-X e Raios gama) durante a interação de feixes de elétrons com intensos pulsos de laser, que assumem o papel de onduladores (*wigglers*) eletromagnéticos.

Deduzimos uma relação de dispersão linear cúbica idêntica à existente na literatura de FELs quânticos, que incorpora os efeitos quânticos através de um termo de *recoil* cuja magnitude delimita a fronteira entre os regimes Compton e Raman.

Após chegamos a um sistema de equações de fluido do tipo *coupled mode* que se constitui em uma alternativa mais simples ao mecanismo clássico de *bunching* usualmente utilizado na descrição de Lasers de Elétrons Livres baseado em sistemas de equações para  $N$  macroelétrons, que falha ao lidar com comprimentos de onda ultracurtos, em que não é mais possível distribuir mais de um macroelétron em um poço de potencial. Nosso modelo descreve o FEL através de um mecanismo de interação de três ondas cujo modo do plasma é excitado via atuação da força ponderomotiva em uma aproximação de envelope lento.

Este modelo de fluido é realista e mais simples que modelos quânticos prévios baseados, por exemplo, na função de distribuição de Wigner [20] [45] [31], ou na aplicação direta da Teoria de Campo.

Por fim verificamos as equações obtidas e vimos que mecanismos *tabletop*



de Laser de Elétrons livres operando na faixa de Raios-X e Raios Gamma são viáveis, apesar de estarem além do atual estado-da-arte da tecnologia de aceleradores, visto que elevadas densidades de feixes são necessárias para se chegar à saturação em dimensões reduzidas (*single-pass FEL*).

Como possíveis trabalhos futuros podemos citar:

- Resolução das equações de fluido (3.30)-(3.32) e de campo em uma teoria não perturbativa;
- Resolução do sistema de equações diferenciais parciais não lineares (5.42)-(5.45) tanto no espaço quanto no tempo por diferenças finitas, incluindo assim o efeito de retardo da radiação (*slippage*);
- Inclusão de efeitos térmicos e emitância no feixe de elétrons;
- Pulso de laser gaussiano.

# Apêndice

Um elétron relativístico sujeito a um campo eletromagnético sente uma força ponderomotiva dada pela equação

$$\vec{F}_p = -m_e c^2 \nabla \gamma = -\frac{m_e c^2}{2\gamma} \nabla \gamma^2, \quad (1)$$

onde  $m_e$  é a massa de repouso do elétron.

O fator relativístico  $\gamma$ , por sua vez, é dado por

$$\gamma^2 = 1 + \frac{\vec{p}_\perp^2}{m_e^2 c^2} + \frac{p_z^2}{m_e^2 c^2}, \quad (2)$$

onde  $p_z$  é o momento longitudinal do elétron e  $\vec{p}_\perp$  é o momento transversal associado à velocidade de oscilação transversal (*quiver motion*).

Se  $\vec{A}_{tot}$  é o potencial vetor na direção transversal ao movimento, podemos reescrever o fator  $\gamma$  como

$$\gamma^2 = 1 + \frac{e^2 \vec{A}_{tot}^2}{m_e^2 c^4} + \frac{p_z^2}{m_e^2 c^2}. \quad (3)$$

Utilizando a normalização  $\vec{a}_{tot} = e\vec{A}_{tot}/m_e c^2$ , a equação (3) torna-se

$$\gamma^2 = 1 + \vec{a}_{tot}^2 + \frac{p_z^2}{m_e^2 c^2}. \quad (4)$$

O potencial vetor  $\vec{a}_{tot}$  pode ser dividido em dois potenciais, um do *wiggler* (radiação incidente), denotado por  $\vec{a}_w$ , e outro da radiação espalhada pelo elétron durante a interação,  $\vec{a}_s$ , de maneira que podemos escrever

$$\vec{a}_{tot} = \vec{a}_s + \vec{a}_w. \quad (5)$$

Substituindo (5) na equação (4), expandindo a soma quadrática e fazendo uma aproximação para campo de radiação fraco, i.e,  $a_s \ll a_w$ , nós temos que

$$\gamma^2 \approx 1 + a_w^2 + 2\vec{a}_w \cdot \vec{a}_s + \frac{p_z^2}{m_e^2 c^2} \quad (6)$$

Vamos definir agora a forma dos potenciais vetores  $\vec{a}_s$  e  $\vec{a}_w$ , de maneira que tenhamos duas ondas eletromagnéticas se propagando em sentido contrário,

sendo a radiação espalhada pelo elétron no sentido de  $\hat{z}$  positivo, e a do *wiggler* no sentido  $\hat{z}$  negativo. Podemos escolhê-los como

$$\vec{a}_s = \frac{-1}{\sqrt{2}} (\hat{e} i a_s e^{i\phi_s} + cc) \quad e \quad \vec{a}_w = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{e} a_w e^{i\phi_w} + cc), \quad (7)$$

onde  $\phi_w = k_w z + w_w t$  and  $\phi_s = -k_s z + w_s t$ .

Substituindo as definições acima na equation (6), temos:

$$\gamma^2 \approx 1 + a_w^2 - (\hat{e} i a_s e^{i\phi_s} - \hat{e}^* i a_s^* e^{-i\phi_s}) \cdot (\hat{e} a_w e^{i\phi_w} + \hat{e}^* a_w^* e^{-i\phi_w}) + \frac{p_z^2}{m_e^2 c^2} \quad (8)$$

O versor  $\hat{e}$  tem as seguintes propriedades:

$$\hat{e} \cdot \hat{e}^* = \hat{e}^* \cdot \hat{e} = 1; \quad \hat{e} \cdot \hat{e} = \hat{e}^* \cdot \hat{e}^* = 0$$

Daí deduzimos que

$$\gamma^2 \approx 1 + a_w^2 + i (a_w a_s^* e^{i(\phi_w - \phi_s)} - cc) + \frac{p_z^2}{m_e^2 c^2} \quad (9)$$

Substituindo a expressão acima na definição (1) para a força ponderomotiva, temos:

$$\vec{F}_p = -\frac{m_e c^2}{2\gamma} \nabla \left[ 1 + a_w^2 + i (a_w a_s^* e^{i(\phi_w - \phi_s)} - cc) + \frac{p_z^2}{m_e^2 c^2} \right], \quad (10)$$

$$\vec{F}_p = -\nabla V, \quad (11)$$

$$V = \frac{m_e c^2}{2\gamma} \left[ 1 + a_w^2 + i (a_w a_s^* e^{i(\phi_w - \phi_s)} - cc) + \frac{p_z^2}{m_e^2 c^2} \right]. \quad (12)$$

Considerando pequena a variação da energia do elétron, i.e.,  $\gamma \approx \gamma_e$ , e o momento  $p_z$  sendo aproximadamente constante, podemos utilizar o potencial ponderomotivo nas equações de FEL na forma

$$V = i \frac{m_e c^2}{2\gamma_e} (a_w a_s^* e^{i\theta_p} - cc), \quad (13)$$

onde  $\theta_p = \phi_w - \phi_s = (k_s + k_w)z - (w_s - w_w)t$  é a fase da onda ponderomotiva no referencial do laboratório.

# Referências Bibliográficas

- [1] T. H. Maiman, *Nature*. 187, 493, 1960
- [2] John M. J. Madey, *Journal of Appl. Physics*, Vol. 42, No. 5 (1971)
- [3] <http://www.xfel.eu/>
- [4] [https://slacportal.slac.stanford.edu/sites/lcls\\_public/Pages/Default.aspx](https://slacportal.slac.stanford.edu/sites/lcls_public/Pages/Default.aspx)
- [5] <http://www-xfel.spring8.or.jp/>
- [6] J. D. Jackson: *Classical Electrodynamics* (Wiley, Third Edition 1998), Ch. 14, p. 671.
- [7] Nobuhisa Ohigashi *et. al.*, *Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Research A*, 341, 426-430 (1994)
- [8] R.W. Warren, *et. al.*, *Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Research A*, 341, 444-448 (1994)
- [9] George Brown, Klaus Halback, John Harris, and Herman Winick, *Nucl. Instr. and Meth. in Phys.*, 208, 65-77 (1983)
- [10] Bibo Feng *et. al.*, *IEEE Journal of Quantum Electronics*, Vol. 29, No. 8, 2263-2266 (1993)
- [11] R. Bonifacio, F. Casagrande, G. Cerchioni, L. De Salvo Souza, P. Pierini and N. Piovela, *Il Nuovo Cimento*, Vol. 13, No. 9, (1990)
- [12] Thomas C. Marshall: *Free-Electron Lasers* (Macmillan, 1985), Ch. 1, p. 28.
- [13] Thomas C. Marshall: *Free-Electron Lasers* (Macmillan, 1985), Ch. 1, p. 23.

- [14] [http://xfel.desy.de/technical\\_information/electron\\_beam\\_parameter/](http://xfel.desy.de/technical_information/electron_beam_parameter/)
- [15] H. Loos, R. Akre, A. Brachmann, *et. al.*, Operational Performance of LCLS beam instrumentation, SLAC-PUB-14121
- [16] Evgeny L. Saldin, Evgeny A. Schneidmiller, Mikhail V. Yurkov: The physics of free electron lasers (Springer), Ch. 1, p. 18
- [17] Rodolfo Bonifacio and Frederico Casagrande, J. Opt. Soc. Am. B, Vol. 2, No. 1, page 250 (1985)
- [18] Peter Schmüser, Martin Dohlus, Jörg Rossbach: Ultraviolet and soft X-ray free-electron lasers, Springer tracts in modern physics 229, Ed. Springer, p. 5
- [19] R. Bonifacio, L. De Salvo, P. Pierini, N. Piovella, and C. Pellegrini, Phys. Rev. Lett., Vol. 73, No. 1, 70 (1994)
- [20] Bonifacio R, Piovella N and Robb G R M, Nucl. Instrum. Methods A 543 645 (2005)
- [21] R. Bonifacio, N. Piovella, and G. R. M. Robb, Fortschr. Phys. 57, No. 11-12, 1041-1051 (2009)
- [22] C. B. Schroeder, C. Pellegrini, and P. Chen, Physical Review E, Vol. 64, 056502 (2001)
- [23] E. M. Beleov, S. V. Grigor'ev, A. V. Nazarkin, and I. V. Smetanin, JETP 78 (4), 431 (1994)
- [24] I. V. Smetanin, Laser Physics, Vol. 7, No. 2, pp. 318-322 (1997)
- [25] A. Hasegawa, The bell System Technical Journal, Vol. 57, No. 8, 3069-3089, October (1978)
- [26] A. T. Lin and J. M. Dawson, Phys. Fluids 23(6), pp. 1224-1228 (1980)
- [27] N. Pivella, R. Bonifacio, Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Research A, 560, 240-244 (2006)
- [28] A. Gover and A. Yariv, Appl. Phys. 16, 121-138 (1978)

- [29] Giuliano Preparata, *Physical Review A*, Vol. 38, No. 1, 233-237 (1988)
- [30] Honglie FANG and Shufen FU, *Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Research A*, 237, 141-144 (1985)
- [31] Serbeto A, Mendonça J T, Tsui K H and Bonifacio R, *Phys. Plasmas* 15 013110 (2008)
- [32] Leonard I. Schiff: *Quantum Mechanics* (McGraw-Hill International Editions, Third Edition), Ch. 6.
- [33] R.P. Feynman: *Space-Time Approach to Non-Relativistic Quantum Mechanics* *Rev.Mod.Phys.* 20 (1948) 367
- [34] E. Madelung, *Journal Zeitschrift für Physik A*, Vol. 40, Numbers 3-4, pages 322-326, (March, 1927)
- [35] F. Haas and G. Manfredi, *Phys. Rev. E*, Vol. 62, No. 2, 2763 (2000)
- [36] G. Manfredi and F. Haas, *Phys. Rev. B*, Vol. 64, 075316-1 (2001)
- [37] F. Haas, L. G. Garcia, and J. Goedert, *Phys. of Plasmas*, Vol. 10, No. 10, 3858 (2003)
- [38] Bohm, D and Vigier, J, *Phys. Rev.*, Vol. 96, 208 (1954)
- [39] Wilhelm E. *Phys. Rev. D*, Vol. 1, 2278 (1970)
- [40] A. Serbeto, L. F. Monteiro, K. H. Tsui and J. T. Mendonça, *Plasma Phys. Control. Fusion*, 51 (2009) 124024 (9pp)
- [41] G 2005 *Fields Inst. Commun.* 46, 263
- [42] Haijun Ren, Zhengwei Wu, Paul K. Chu, *Phys. of Plasmas*, 14, 062102 (2007)
- [43] N. Crouseilles, P.-A. Hervieux and G. Manfredi, *Phys. Rev. B*, 78, 155412 (2008)
- [44] Feynman, R P, Leighton R B and Sands M, *Feynman Lectures on Physics* 2nd Ed. Vol. III, ch. 21

- [45] Bonifacio R, Cola M M, Piovella N and Robb G R M, *Europhys. Lett* **69** 55 (2005)
- [46] J. L. Bobin, *Physica Scripta*, Vol. T30, 77-89 (1990)
- [47] A. Serbeto, *Physics of Plasmas - Brief Communications*, Vol. 6, No. 7, July (1999)
- [48] Eric Esarey, Philip Sprangle, *IEEE Trans. on Plasma Science*, Vol. 24, No. 2, April (1996)
- [49] J. T. Mendonça and A. Serbeto, *Phys. of Plasmas*, 15, 113105 (2008)
- [50] *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research A* 455, 36-40 (2000)