



INSTITUTO DE FÍSICA
Universidade Federal Fluminense

Cleudson Santos de Castro

**FASES GEOMÉTRICAS E
EMARANHAMENTO EM SISTEMAS
QUÂNTICOS DE SPINS**

Niterói

2011

Cleidson Santos de Castro

**FASES GEOMÉTRICAS E
EMARANHAMENTO EM SISTEMAS
QUÂNTICOS DE SPINS**

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Marcelo Silva Sarandy

Niterói

2011

“Tu, Senhor e Deus *meu*, és digno de receber a glória, a honra e o poder, porque criastes todas as coisas, e por tua vontade elas existem e foram criadas.”

Apocalipse 4.11

Dedico este trabalho aos meus pais,
Rene Eugênio de Castro e Eneci Santos de Castro.

Agradecimentos

Agradeço a Deus. Ao Senhor toda honra, glória e louvor.

Ao meu orientador Prof. Marcelo Sarandy pelos ensinamentos, paciência, dedicação e profissionalismo que me proporcionou durante estes anos de trabalho.

Aos meus pais Rene Eugênio de Castro e Eneci Santos de Castro, que sempre apoiaram as minhas decisões e confortaram-me nos momentos difíceis.

Aos meus irmãos Fladner Santos de Castro e Jeferson Santos de Castro que participaram direta e indiretamente deste trabalho.

À minha namorada Priscila Carvalho por sua cumplicidade, paciência, carinho, atenção e orações, a qual sempre pude contar.

Ao meu amigo e pastor Aroldo Mariano. Obrigado pelos seus valiosos conselhos.

Aos meus amigos do IF-UFF que de alguma forma me ajudaram neste trabalho. Agradeço também vossa amizade.

Aos funcionários da secretaria da pós-graduação e da Biblioteca do IF-UFF que sempre se empenharam em me oferecer um serviço de qualidade.

Ao apoio financeiro fornecido pelo CNPq tanto na graduação quanto no curso de mestrado.

Sumário

1	Introdução	1
2	Fases Geométricas em Mecânica Quântica	5
2.1	Fase de Berry	5
2.2	Fase de Berry para um spin $-\frac{1}{2}$ em um campo magnético	8
2.3	Fase de Aharonov-Anandan	10
2.4	Fase AA para um spin $-\frac{1}{2}$ em um campo magnético	11
2.5	Fase de Mukunda-Simon	13
2.6	Fase MS para um spin $-\frac{1}{2}$ em um campo magnético	15
3	Fases Geométricas e Emaranhamento em Sistemas de Spins	17
3.1	Fases geométricas para cadeias de spins em campos constantes	18
3.2	Fases geométricas para a cadeia de Heisenberg	21
3.2.1	Cadeia de Heisenberg com 2 spins.	21
3.2.2	Cadeia de Heisenberg com $N > 2$ spins	26
3.3	Separabilidade e emaranhamento	29
3.4	Fase geométrica e emaranhamento induzido pela interação	32
3.4.1	Fase AA e emaranhamento	33
3.4.2	Fase MS e emaranhamento	40

4	Fases Geométricas e Invariantes Dinâmicos	45
4.1	Teoria dos invariantes dinâmicos	46
4.2	Invariante dinâmico e fase geométrica para a cadeia de Heisenberg	47
4.3	Fase geométrica e emaranhamento para campo magnético dependente do tempo	53
5	Conclusões e Perspectivas	56

Lista de Figuras

- 2.1 Fase MS para uma partícula de spin $-\frac{1}{2}$ em um campo magnético constante na direção z . O estado inicial é definido tomando-se $\theta = \frac{\pi}{3}$. As unidades adotadas são tais que $\hbar = 1$ e $\omega = 2\pi$ 16
- 3.1 Fase geométrica de interação β_{INT} , multiplicada por uma constante k , e negatividade média entre o primeiro e terceiro spins em função do ângulo θ_3 para a cadeia de Heisenberg com 3 spins em um campo constante no estado inicial dado pela Eq. (3.62), onde a fase é calculada para o primeiro tempo cíclico ($p = 1$). Adotamos $\hbar = 1$ e $B/J = 3$ 37
- 3.2 Fase geométrica de interação β_{INT} , multiplicada por uma constante k , e emaranhamento global em função do ângulo θ_3 para a cadeia de Heisenberg com 3 spins em um campo constante no estado inicial dado pela Eq. (3.62), onde a fase é calculada para o primeiro tempo cíclico ($p = 1$). Adotamos $\hbar = 1$ e $B/J = 3$ 37
- 3.3 Fase geométrica de interação β_{INT} , multiplicada por uma constante k , e emaranhamento global médio em função do ângulo θ_3 para a cadeia de Heisenberg com 3 spins em um campo magnético constante no estado inicial dado pela Eq. (3.68). Adotamos $\hbar = 1$ e $B/J = 3$ 39

3.4	Fase geométrica de interação β_{INT} , multiplicada por uma constante k , e emaranhamento global médio em função do ângulo θ para a cadeia de Heisenberg com $N = 12$ spins em um campo constante no estado inicial dado pela Eq. (3.75). Adotamos $\hbar = 1$ e $B/J = 3$	40
3.5	Fase geométrica de interação $\gamma_{MS}^{INT}(t)$, multiplicada por uma constante k , e negatividade média em função do ângulo θ_2 para cadeia de Heisenberg com 2 spins em um campo magnético constante cujo estado inicial é dado pela Eq. (3.76). O tempo de evolução está fixado em $\pi/3$. Adotamos $\hbar = 1$ e $B/J = 3$	42
3.6	Fase geométrica de interação $\gamma_{MS}^{INT}(t)$, multiplicada por uma constante k , e emaranhamento global instantâneo em função do ângulo θ_2 para a cadeia de Heisenberg com 2 spins em um campo magnético constante cujo estado inicial é dado pela Eq. (3.76). O tempo está fixo em $\pi/3$. Adotamos $\hbar = 1$ e $B/J = 3$	42
3.7	Fase geométrica de interação $\gamma_{MS}^{INT}(t)$, multiplicada por uma constante k , e emaranhamento global médio em função do ângulo θ_2 para a cadeia de Heisenberg com 2 spins em um campo magnético constante cujo estado inicial é dado pela Eq. (3.76). O tempo de evolução está fixo em $\pi/3$. Adotamos $\hbar = 1$ e $B/J = 3$	43
3.8	Fase geométrica $\gamma_{MS}^{INT}(t)$, multiplicada por uma constante k , e emaranhamento global instantâneo em função do ângulo θ_3 para a cadeia de Heisenberg com 3 spins em um campo magnético constante no estado inicial dado pela Eq. (3.82). O tempo está fixo em $t = \pi/2$. Adotamos $\hbar = 1$ e $B/J = 3$	44

3.9	Fase geométrica $\gamma_{MS}^{INT}(t)$, multiplicada por uma constante k e emaranhamento global médio em função do ângulo θ_3 para a cadeia de Heisenberg com 3 spins em um campo magnético constante no estado inicial dado pela Eq. (3.82). O tempo está fixo em $t = \pi/2$. Adotamos $\hbar = 1$ e $B/J = 3$	44
4.1	Fase geométrica de interação, negatividade e negatividade média para o estado inicial $ +-\rangle$, com $B(t) = 1$, $\theta(t) = \pi/4$, $\varphi(t) = 2\pi t$ e tomando como condições iniciais $\gamma(0) = \beta(0) = 0$. Adotamos o tempo em unidades tais que $\hbar = 1$ e $J = 1$	55

Resumo

Fases geométricas estão associadas à descrição de diversos fenômenos em mecânica quântica. O objetivo dessa dissertação é analisar fases geométricas em cadeias quânticas de spins e relacionar seu comportamento com a dinâmica de emaranhamento do sistema. Nesse contexto, discutimos como podemos determinar as fases geométricas adquiridas por cadeias de Heisenberg na presença de campos magnéticos, mostrando que a contribuição da interação para a fase geométrica está conectada ao emaranhamento médio exibido por um estado inicialmente separável da cadeia durante sua evolução no espaço de Hilbert, onde consideramos o emaranhamento global como medida de não-separabilidade. Essa relação promove a fase geométrica de interação a um indicador do emaranhamento disponível no sistema, o que pode se constituir em uma ferramenta útil para tarefas quânticas que usem emaranhamento como recurso para sua realização.

Abstract

Geometric phases are associated with the description of many phenomena in quantum mechanics. The aim of this thesis is to analyze geometric phases in quantum spin chains and relate their behavior to the entanglement dynamics of the system. In this context, we discuss how to determine geometric phases acquired by Heisenberg chains in the presence of magnetic fields, showing that the contribution of the interaction to the geometric phase is connected with the average entanglement exhibited by an initially separable state of the chain during its evolution in Hilbert space, where we consider the global entanglement as a measure of nonseparability. This relationship promotes the interaction geometric phase as an indicator of the entanglement available in the system, which may constitute a useful tool to quantum tasks based on entanglement as a resource to their performance.

Capítulo 1

Introdução

Sistemas quânticos podem reter a memória de sua evolução no espaço de Hilbert através da aquisição de fases geométricas. Essas fases, as quais dependem apenas do caminho percorrido pelo sistema, foram introduzidas em mecânica quântica por Michael Berry em 1984 [1]. Logo após o trabalho de Berry, fases geométricas se tornaram objeto de intensa pesquisa teórica e experimental [2], a partir da qual se percebeu que elas estão relacionadas a diversos fenômenos importantes em física [3], tais como o efeito Aharonov-Bohm [4] e o efeito Hall quântico [5]. Em anos recentes, esse interesse tem se renovado pela potencial aplicabilidade das fases geométricas no processamento de informação quântica [6, 7]. De fato, computação quântica através de fases geométricas pode fornecer um caminho para se atingir tolerância a erros na implementação de portas lógicas em circuitos quânticos [8].

A existência de fases geométricas foi antecipada em um contexto clássico por Pancharatnam através da investigação de efeitos de interferência com luz polarizada [9]. Ele se perguntou qual o fator de fase adquirido pela luz polarizada ao passar por uma série de mudanças em sua polarização sabendo que a polarização final é a mesma polarização inicial. Assim, Pancharatnam

precisou definir a diferença de fase entre dois estados para descrever como a luz polarizada muda ao passar por um polarizador.

Em mecânica quântica, Berry considerou um sistema arbitrário governado por um Hamiltoniano dependente do tempo através de um conjunto de parâmetros, os quais podem representar, por exemplo, um campo magnético. Ele então mostrou que, se prepararmos o sistema em um autoestado não-degenerado do Hamiltoniano inicial e o mantermos sob evolução adiabática e cíclica no espaço dos parâmetros, o sistema irá retornar ao seu estado inicial acompanhado por um fator de fase que pode ser dividido em uma contribuição *dinâmica*, a qual depende da energia do sistema e do tempo de evolução, e de uma contribuição *geométrica*, a qual depende exclusivamente da trajetória descrita pela evolução no espaço dos parâmetros e que pode ser experimentalmente observada via interferometria. As fases descobertas por Berry foram generalizadas em diversos contextos. Wilczek e Zee consideraram sistemas sob evolução cíclica e adiabática governados por Hamiltonianos com espectro degenerado, o que resulta em fases geométricas *não-Abelianas* (não-comutativas) [10]. Aharonov e Anandan trataram fases Abelianas sob evoluções cíclicas *não-adiabáticas* [11], as quais foram estendidas posteriormente por Anandan para o caso não-Abeliano [12]. Formulações de fases geométricas com relaxamento do vínculo da ciclicidade foram propostas por Samuel e Bhandari [13] e por Mukunda e Simon [14], onde se estabeleceu um direcionamento geral para a definição de fases geométricas para trajetórias *não-cíclicas*. Extensões do conceito de fases geométricas para estados quânticos mistos em sistemas abertos (evoluindo sob decoerência) foram também propostas (ver, por exemplo, Refs. [15, 16, 17, 18]), sendo esse caso um assunto que atualmente ainda tem atraído bastante discussão.

Recentemente, a interface entre o conceito de fases geométricas e a teo-

ria da informação quântica ganhou novo contato através da investigação do efeito do emaranhamento de estados quânticos sobre o comportamento das fases geométricas de sistemas compostos [19]-[30]. Em particular, se considerarmos um estado quântico composto evoluindo no tempo por transformações unitárias locais (transformações unitárias individuais sobre cada parte do sistema), o emaranhamento do estado permanece fixo. Em tal evolução, a fase dinâmica obtida pelo estado total pode ser entendida sempre como a soma das fases dinâmicas dos subsistemas. Em contraste, tal afirmação não é válida para a fase geométrica a menos que o estado seja *separável* [31]. Em outras palavras, estados emaranhados adquirem um termo de correção na fase geométrica do sistema total em relação à soma das fases dos subsistemas, o qual surge das correlações (clássicas e quânticas) entre as partes do estado emaranhado.

Nesse contexto, o objetivo dessa dissertação é discutir a relação entre fases geométricas e emaranhamento em um sistema quântico composto na presença de *interação* entre as partes do sistema. Nesse caso, teremos evolução temporal por transformações unitárias não-locais (não-fatorizáveis em termos do produto tensorial de transformações individuais em cada parte do sistema). Em particular, se um sistema é preparado em um estado inicial separável, a existência da interação pode ou não induzir emaranhamento durante a evolução do estado. Estaremos interessados então no papel desempenhado pelo emaranhamento sobre a fase geométrica adquirida durante a evolução em comparação com a fase adquirida pelo sistema no limite não-interagente. Entre contribuições dessa investigação, discutiremos como fases geométricas permitem identificar estados separáveis bem como quantificar (em casos específicos) o emaranhamento induzido pela interação durante a evolução do sistema.

A dissertação está organizada da seguinte maneira. No Capítulo 2, apresentaremos uma revisão do conceito de fase geométrica, enfatizando as formulações de Berry, Aharonov-Anandan e Mukunda-Simon. No Capítulo 3, será discutida a relação entre fase geométrica e emaranhamento para partículas de spin-1/2 interagindo através do Hamiltoniano de Heisenberg em um campo magnético constante. No Capítulo 4, discutiremos uma formulação geral via teoria dos invariantes para fases geométricas em cadeias de Heisenberg de tamanho arbitrário em campos magnéticos dependentes do tempo, bem como o papel do emaranhamento durante a evolução do sistema nesse caso. No Capítulo 5, será apresentado um sumário das conclusões gerais da dissertação bem como de perspectivas para futuras investigações.

Capítulo 2

Fases Geométricas em Mecânica Quântica

Neste capítulo revisaremos o conceito de fase geométrica em mecânica quântica discutindo inicialmente as fases introduzidas por Berry [1] no contexto de sistemas fechados não-degenerados em evolução cíclica adiabática. Após essa discussão, analisaremos a remoção do vínculo adiabático, apresentando as fases de Aharonov-Anandan [11] e a remoção do vínculo de ciclicidade, discutindo as fases de Mukunda-Simon [14]. Como exemplo para cada uma dessas fases geométricas, consideraremos a evolução no tempo de uma partícula de spin-1/2 em um campo magnético.

2.1 Fase de Berry

Considere um sistema quântico descrito por um vetor de estado normalizado $|\psi\rangle$ em um espaço de Hilbert \mathcal{H} . A evolução temporal do sistema é governada pela equação de Schrödinger dependente do tempo

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H(\vec{R}(t)) |\psi(t)\rangle, \quad (2.1)$$

onde $H(\vec{R}(t))$ é o Hamiltoniano do sistema, o qual depende do tempo através de um conjunto de parâmetros $\vec{R}(t) = (R_1(t), R_2(t), \dots, R_N(t))$ e possui auto-estados instantâneos dados por

$$H(\vec{R}(t))|n; \vec{R}(t)\rangle = E_n(\vec{R}(t))|n; \vec{R}(t)\rangle. \quad (2.2)$$

Tomemos então o sistema como sendo preparado em um autoestado inicial $|n; \vec{R}(0)\rangle$ (por exemplo, o estado fundamental) associado a um nível de energia não-degenerado de $H(\vec{R}(0))$. Assim, temos

$$|\psi(0)\rangle = |n; \vec{R}(0)\rangle. \quad (2.3)$$

Assumindo agora que $H(\vec{R}(t))$ varie lentamente com o tempo, temos que o teorema adiabático [32, 33] assegura que o estado $|\psi(t)\rangle$ permanecerá, a menos de um fator de fase, no autoestado instantâneo $|n; \vec{R}(t)\rangle$ (ver, por exemplo, Refs. [34, 35]). Mais especificamente, considere a expansão de $|\psi(t)\rangle$ em termos da base de auto-estados instantâneos de $H(\vec{R}(t))$:

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n a_n(t) e^{-i \int_0^t E_n(\vec{R}(t')) dt'} |n; \vec{R}(t)\rangle, \quad (2.4)$$

com $a_n(t)$ denotando a amplitude de probabilidade associada a n e com a condição inicial na Eq. (2.3) adotada. Assim, substituindo a Eq. (2.4) na Eq. (2.1) e tomando a evolução do sistema no regime adiabático, ou seja, assumindo que os auto-estados instantâneos de $H(\vec{R}(t))$ evoluem de modo independente, obtemos

$$|\psi(t)\rangle = e^{i[\theta_n(t) + \gamma_n(t)]} |n; \vec{R}(t)\rangle, \quad (2.5)$$

onde

$$\theta_n(t) \equiv -\frac{1}{\hbar} \int_0^t E_n(\vec{R}(t')) dt' \quad (2.6)$$

e

$$\gamma_n(t) \equiv i \int_0^t \langle n; \vec{R}(t') | \frac{d}{dt'} |n; \vec{R}(t')\rangle dt'. \quad (2.7)$$

Na Ref. [1], Berry então considerou o caso de um transporte adiabático em um caminho fechado C no espaço dos parâmetros, ou seja, tal que para um período T tenhamos

$$C = \left\{ \vec{R}(t) \mid \vec{R}(T) = \vec{R}(0); 0 \leq t \leq T \right\}. \quad (2.8)$$

Tomando a evolução ao longo de C , podemos reescrever as fases dadas nas Eqs. (2.6) e (2.7) como

$$\theta_n(T) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^T E_n(\vec{R}(t')) dt' \quad (2.9)$$

e

$$\gamma(n; C) = i \oint_C d\vec{R} \cdot \langle n; \vec{R} | \vec{\nabla}_R | n; \vec{R} \rangle \quad (2.10)$$

onde ∇_R denota o operador gradiente no espaço dos parâmetros. A Eq. (2.9) define a *fase dinâmica* adquirida durante o tempo T e a Eq. (2.10) define a *fase geométrica de Berry* associada ao circuito C . Em particular, notemos que a fase de Berry é dada por um número real e depende apenas do circuito C (e não de fatores tais como o tempo de evolução T). Além disso, $\gamma(n; C)$ é *invariante de calibre*, ou seja, não se modifica por uma transformação de fase nos auto-estados $|n; \vec{R}(t)\rangle$ de $H(\vec{R}(t))$. De fato, aplicando uma transformação local de calibre

$$|n; \vec{R}(t)\rangle \longrightarrow |n'; \vec{R}(t)\rangle = e^{i\alpha(\vec{R}(t))} |n; \vec{R}(t)\rangle, \quad (2.11)$$

onde $\alpha(\vec{R}(t))$ é o parâmetro de calibre, obtemos da Eq. (2.10) que

$$\gamma(n'; C) = \gamma(n; C). \quad (2.12)$$

Dessa forma, a liberdade de escolha de fase para $|n; \vec{R}(t)\rangle$ não afeta a fase geométrica.

2.2 Fase de Berry para um spin $-\frac{1}{2}$ em um campo magnético

Considere uma partícula de spin $-\frac{1}{2}$ interagindo com um campo magnético dependente do tempo $\vec{B}(t) = (B_x(t), B_y(t), B_z(t))$. O Hamiltoniano do sistema é então dado por

$$H(\vec{B}(t)) = -\mu\vec{S} \cdot \vec{B}(t), \quad (2.13)$$

onde μ é constante e $\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$ é o operador vetorial de spin, com $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ dado pelas matrizes de Pauli

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

As matrizes de Pauli acima estão escritas na base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ de auto-estados de σ_z , com

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e

$$|-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tomando por simplicidade $\hbar = 1$, os autovalores de $H(\vec{B}(t))$ são $E_{\pm}(\vec{B}) = \pm\frac{\mu}{2}B$, com $B = |\vec{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$, com seus respectivos autovetores dados por

$$|u_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2B(B - B_z)}} \begin{pmatrix} B_z - B \\ B_x + iB_y \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

$$|u_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2B(B + B_z)}} \begin{pmatrix} B_z + B \\ B_x + iB_y \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Assumindo que $\vec{B}(t)$ varie lentamente no tempo, podemos então obter as fases de Berry $\gamma_+(C)$ e $\gamma_-(C)$ associadas aos auto-estados $|u_+\rangle$ e $|u_-\rangle$, respectivamente. De fato, usando as Eqs. (2.15) e (2.16) na Eq. (2.10),

$$\gamma_{\pm}(C) = i \oint_C d\vec{B} \cdot \langle u_{\pm} | \vec{\nabla}_B | u_{\pm} \rangle = \int \int \left[\vec{\nabla}_B \times \left(\langle u_{\pm} | \vec{\nabla}_B | u_{\pm} \rangle \right) \right] \cdot d\vec{a}, \quad (2.17)$$

onde usamos o teorema de Stokes [36] na última igualdade, com $d\vec{a}$ sendo o elemento de área vetorial e com a integração realizada sobre a área delimitada pela curva C . Desenvolvendo a expressão para o rotacional na Eq. (2.17), obtém-se [1]

$$\gamma_{\pm}(C) = \pm \frac{1}{2} \int \int \frac{\vec{B}}{B^3} \cdot d\vec{a}. \quad (2.18)$$

Portanto, temos

$$\gamma_{\pm}(C) = \pm \frac{1}{2} \Omega(C), \quad (2.19)$$

onde $\Omega(C)$ é o ângulo sólido subtendido pela curva C , isto é,

$$\Omega(C) = \int \int \sin\theta \, d\theta \, d\phi. \quad (2.20)$$

Para um exemplo concreto, suponha que o campo magnético \vec{B} precessiona em torno do eixo z em um ângulo θ fixo com velocidade angular constante $\omega = \frac{2\pi}{T}$, isto é,

$$\vec{B} = B_0 \left(\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \hat{i} + \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \sin\theta \hat{j} + \cos\theta \hat{k} \right), \quad (2.21)$$

com B_0 denotando o módulo do campo magnético e $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ os versores associados aos eixos cartesianos. Da Eq. (2.20), obtemos para o ângulo sólido $\Omega = 2\pi(1 - \cos\theta)$. Logo, da Eq. (2.19), a fase de Berry é então dada por

$$\gamma_{\pm}(C) = \pm\pi(1 - \cos\theta). \quad (2.22)$$

2.3 Fase de Aharonov-Anandan

As fases de Berry foram generalizadas por Aharonov e Anandan para o caso de uma evolução cíclica mas *não-adiabática* [11]. Tais fases são conhecidas como Fases de Aharonov-Anandan (AA). Nessa situação, temos um estado quântico arbitrário em evolução cíclica no espaço projetivo \mathcal{P} de raios de \mathcal{H} , o qual é definido através de um mapa $\Pi : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{P}$ da forma

$$\Pi(|\psi\rangle) = \{|\psi'\rangle : |\psi'\rangle = e^{i\alpha}|\psi\rangle\}, \quad (2.23)$$

onde α é um número real no intervalo $[0, 2\pi)$. Em outras palavras, vetores de estado em \mathcal{H} equivalentes a menos de uma fase constituem o mesmo elemento em \mathcal{P} . Logo, se um vetor $|\psi(t)\rangle$ traça uma curva aberta $C_{\mathcal{H}}$ finalizando sua evolução em $e^{i\alpha}|\psi(0)\rangle$, então Π projeta $C_{\mathcal{H}}$ em uma curva fechada $C_{\mathcal{P}}$ no espaço projetivo de Hilbert. Essa curva fechada é o ingrediente básico para definirmos a fase AA. Para isso, consideremos um estado normalizado $|\psi(t)\rangle$ evoluindo de acordo com a equação de Schrödinger dependente do tempo

$$H(t)|\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle, \quad (2.24)$$

com $|\psi(\tau)\rangle = e^{i\phi}|\psi(0)\rangle$, onde ϕ é real e fornece a fase total adquirida por $|\psi(t)\rangle$ durante a evolução cíclica em \mathcal{P} de período τ . Definimos

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = e^{-if(t)}|\psi(t)\rangle \quad (2.25)$$

tal que

$$f(\tau) - f(0) = \phi. \quad (2.26)$$

Substituindo $|\psi(\tau)\rangle$ na Eq. (2.25) temos que $|\tilde{\psi}(\tau)\rangle = |\tilde{\psi}(0)\rangle$. Logo, a Eq. (2.26) representa um ajuste para definirmos uma evolução cíclica no espaço projetivo \mathcal{P} . A fase AA, representada por β , é então definida removendo-se a contribuição dinâmica da fase total ϕ , isto é,

$$\beta = \phi + \frac{1}{\hbar} \int_0^\tau dt \langle \psi(t) | H(t) | \psi(t) \rangle. \quad (2.27)$$

Por outro lado, note que, substituindo a Eq. (2.25) na Eq. (2.24) e projetando o resultado em $\langle\psi(t)|$, temos

$$-\frac{df(t)}{dt} = \frac{1}{\hbar}\langle\psi(t)|H(t)|\psi(t)\rangle - \langle\tilde{\psi}(t)|i\frac{d}{dt}|\tilde{\psi}(t)\rangle. \quad (2.28)$$

Então, usando a Eq. (2.28) na Eq. (2.27), podemos reescrever a fase AA como

$$\beta = i \int_0^\tau dt \langle\tilde{\psi}(t)|\frac{d}{dt}|\tilde{\psi}(t)\rangle. \quad (2.29)$$

Aqui é importante observar que podemos escolher diferentes $f(t)$ tais que $\phi = f(\tau) - f(0)$. Contudo, sendo a integral cíclica no espaço projetivo, podemos escrever

$$\beta = i \oint_{C_P} \langle\tilde{\psi}(t)|d|\tilde{\psi}(t)\rangle. \quad (2.30)$$

Logo, transformações locais de fase em $|\tilde{\psi}(t)\rangle$, ou seja,

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle \longrightarrow |\tilde{\psi}'(t)\rangle = e^{-if'(t)}|\tilde{\psi}(t)\rangle, \quad (2.31)$$

não modificam β (visto que a integral é realizada sobre um caminho fechado). Portanto a fase AA é invariante sob diferentes escolhas de $f(t)$, ou seja, tal como a fase de Berry, β é invariante de calibre.

2.4 Fase AA para um spin- $\frac{1}{2}$ em um campo magnético

Nesta seção, reanalisaremos o problema de uma partícula de spin- $\frac{1}{2}$ em um campo magnético \vec{B} , mas agora tomando \vec{B} como sendo homogêneo ao longo do eixo z , ou seja, $\vec{B} = B\hat{k}$, com B constante. Novamente, adotaremos $\hbar = 1$. O Hamiltoniano deste sistema pode então ser escrito como

$$H = \frac{\omega}{2}\sigma_z = \begin{pmatrix} \frac{\omega}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\omega}{2} \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

onde, em comparação com a Eq. (2.13), temos $\omega = -\mu B$, com μ constante. Consideremos a partícula em um estado inicial arbitrário (não necessariamente um autoestado de H) dado por

$$|\psi(0)\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|-\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

onde θ representa o ângulo entre a direção de spin e o eixo z . Após um tempo de evolução t , o vetor de estado $|\psi(t)\rangle$ será então

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt} |\psi(0)\rangle = e^{-i\frac{\omega}{2}t} \cos\frac{\theta}{2}|+\rangle + e^{i\frac{\omega}{2}t} \sin\frac{\theta}{2}|-\rangle. \quad (2.34)$$

Podemos agora determinar o tempo τ para que o spin complete uma evolução cíclica. Para isso, é necessário que $e^{i\frac{\omega}{2}\tau} = 1$. Então

$$\tau = \frac{2\pi}{|\omega|}. \quad (2.35)$$

Substituindo a Eq. (2.35) na Eq. (2.34), podemos escrever a fase total como

$$\phi = -\text{sgn}(\omega)\pi, \quad (2.36)$$

onde $\text{sgn}(\omega) = \omega/|\omega|$ denota o sinal de ω e levando em consideração que a fase é definida módulo 2π . Para a fase dinâmica, obtemos

$$\phi_d = -\int_0^\tau \langle\psi(t)|H|\psi(t)\rangle dt = -\text{sgn}(\omega)\pi \cos\theta. \quad (2.37)$$

A fase geométrica β para cada ciclo de período τ pode ser então obtida através de $\beta = \phi - \phi_d$, o que resulta em $\beta = -\text{sgn}(\omega)\pi(1 - \cos\theta)$. Mas sabendo que $\text{sgn}(\omega) = \pm 1$, podemos escrever

$$\beta = \pm\pi(1 - \cos\theta). \quad (2.38)$$

Naturalmente, β é definida a menos da ambiguidade de se adicionar $2\pi m$, com m inteiro. Podemos ainda observar que, a fase AA pode ser entendida

como $1/2$ do ângulo sólido subtendido por uma curva traçada pela direção do estado de spin em relação ao eixo z . Esse resultado é similar ao encontrado para fase de Berry associada à partícula de spin $-\frac{1}{2}$ em um campo magnético, exceto pelo fato de que naquele caso a curva relevante é traçada no espaço dos parâmetros e de que o vetor de estado era um autoestado do Hamiltoniano.

2.5 Fase de Mukunda-Simon

Fases geométricas podem ser definidas também para evoluções *não-cíclicas*. Trabalhando nesse contexto, Mukunda e Simon [14] generalizaram a fase AA relaxando o vínculo de ciclicidade usando argumentos cinemáticos, onde o ponto de partida da discussão é a estrutura do espaço de Hilbert e não a equação de Schrödinger dependente do tempo. Assim, seja \mathcal{H} um espaço de Hilbert associado ao estado de um sistema quântico. Neste espaço, consideremos uma família de vetores normalizados os quais formam uma curva \mathcal{C}_0 governada por um parâmetro real $s \in [s_1, s_2]$ da forma

$$\mathcal{C}_0 = \{|\psi(s)\rangle \mid s \in [s_1, s_2] \subset \mathfrak{R}\}. \quad (2.39)$$

Estaremos interessados na fase relativa adquirida ao longo de \mathcal{C}_0 entre o estado final $|\psi(s_2)\rangle$ e o estado inicial $|\psi(s_1)\rangle$, a qual é dada por $\text{Arg}[\langle\psi(s_1)|\psi(s_2)\rangle]$, onde consideramos que os estados final e inicial são não-ortogonais. No entanto, a fase relativa é dependente de calibre, uma vez que ela não é invariante por transformações locais de fase da forma

$$|\psi(s)\rangle \longrightarrow |\psi'(s)\rangle = e^{i\alpha(s)}|\psi(s)\rangle, \quad (2.40)$$

onde $\alpha(s)$ é real. Uma definição de fase relativa invariante de calibre adquirida como consequência da geometria do caminho percorrido pelo vetor de estado

pode ser obtida partindo da condição de que $|\psi(s)\rangle$ é um vetor normalizado para todo s , o que implica em

$$\text{Re}[\langle\psi(s)|\dot{\psi}(s)\rangle] = 0, \quad (2.41)$$

onde o símbolo "·" sobre $|\psi(s)\rangle$ denota derivada com relação a s . A Eq. (2.41) é equivalente a

$$\langle\psi(s)|\dot{\psi}(s)\rangle = i \text{Im}\langle\psi(s)|\dot{\psi}(s)\rangle. \quad (2.42)$$

Sob transformação de calibre, a Eq. (2.42) se torna

$$\text{Im} \left[\langle\psi'(s)|\dot{\psi}'(s)\rangle \right] = \text{Im} \left[\langle\psi(s)|\dot{\psi}(s)\rangle \right] + \dot{\alpha}(s) \quad (2.43)$$

Se integrarmos em ambos os lados ao longo do caminho obtemos

$$\int_{s_1}^{s_2} ds \text{Im} \left[\langle\psi'(s)|\dot{\psi}'(s)\rangle \right] = \int_{s_1}^{s_2} ds \text{Im} \left[\langle\psi(s)|\dot{\psi}(s)\rangle \right] + [\alpha(s_2) - \alpha(s_1)]. \quad (2.44)$$

Logo podemos definir um funcional de fase γ_{MS} invariante de calibre subtraindo da fase relativa original $\text{Arg}[\langle\psi(s_1)|\psi(s_2)\rangle]$ a integral de $\text{Im}\langle\psi(s)|\dot{\psi}(s)\rangle$, isto é,

$$\gamma_{MS} = \text{Arg}[\langle\psi(s_1)|\psi(s_2)\rangle] - \text{Im} \int_{s_1}^{s_2} ds \langle\psi(s)|\dot{\psi}(s)\rangle. \quad (2.45)$$

Aplicando em γ_{MS} a transformação de fase dada na Eq. (2.40) e usando a Eq. (2.44), obtem-se que γ_{MS} é de fato invariante de calibre. O funcional γ_{MS} é então definido como a fase geométrica de Mukunda-Simon (MS) associada ao caminho percorrido por $|\psi(s)\rangle$ em \mathcal{H} , com as fases total e dinâmica dadas, respectivamente, por

$$\varphi_{total} \equiv \text{Arg}[\langle\psi(s_1)|\psi(s_2)\rangle] \quad (2.46)$$

e

$$\varphi_{din} \equiv \text{Im} \int_{s_1}^{s_2} ds \langle\psi(s)|\dot{\psi}(s)\rangle. \quad (2.47)$$

Note que a fase MS é introduzida para caminhos arbitrários (abertos ou fechados), devendo incluir portanto a fase AA como um caso particular. De fato, para recuperarmos o resultado de Aharonov e Anandan obtido na seção 2.3, basta considerarmos a evolução dinâmica do sistema através da equação de Schrödinger dependente do tempo e tomarmos uma curva fechada no espaço projetivo de Hilbert. Para uma curva fechada, teremos para a fase total que

$$Arg[\langle\psi(s_1)|\psi(s_2)\rangle] = Arg[\langle\psi_0|(e^{i\phi}|\psi_0)\rangle] = \phi. \quad (2.48)$$

Quanto a fase dinâmica, usando a equação de Schrödinger dada na Eq. (2.24), podemos mostrar que

$$Im \int_{s_1}^{s_2} ds \langle\psi(s)|\dot{\psi}(s)\rangle = -\frac{1}{\hbar} \int_0^\tau dt \langle\psi(t)|H(t)|\psi(t)\rangle \quad (2.49)$$

Dessa forma, substituindo as Eqs. (2.48) e Eqs. (2.49) na Eq. (2.45), reobtemos a fase AA definida na Eq. (2.27).

2.6 Fase MS para um spin- $\frac{1}{2}$ em um campo magnético

Consideraremos novamente o problema da partícula de spin- $\frac{1}{2}$ em um campo magnético do ponto de vista da fase MS. Tomando, como na fase AA, o Hamiltoniano dado da Eq. (2.32) e assumindo o estado inicial dado pela Eq. (2.33), obtemos como solução da equação de Schrödinger a Eq. (2.34). Podemos então calcular a fase MS usando que

$$\gamma_{MS} = Arg[\langle\psi(0)|\psi(t)\rangle] + \int_0^t dt' \langle\psi(t')|H(t')|\psi(t')\rangle, \quad (2.50)$$

onde adotamos $\hbar = 1$. Calculando o termo de fase total, obtemos

$$\langle\psi(0)|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{\omega}{2}t} \cos^2 \frac{\theta}{2} + e^{i\frac{\omega}{2}t} \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (2.51)$$

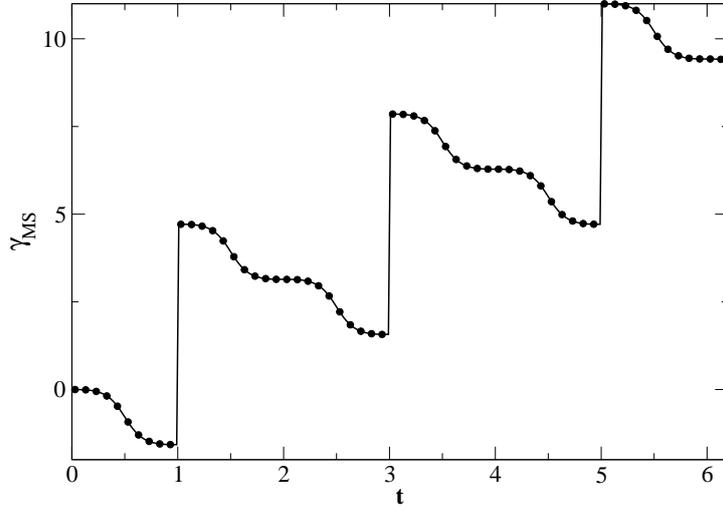


Figura 2.1: Fase MS para uma partícula de spin $-\frac{1}{2}$ em um campo magnético constante na direção z . O estado inicial é definido tomando-se $\theta = \frac{\pi}{3}$. As unidades adotadas são tais que $\hbar = 1$ e $\omega = 2\pi$.

Para a contribuição dinâmica temos que

$$\langle \psi(t) | H(t) | \psi(t) \rangle = \frac{\omega}{2} \cos \theta. \quad (2.52)$$

Logo, a fase geométrica Mukunda-Simon será

$$\gamma_{MS} = \text{Arg} \left[e^{-i\frac{\omega}{2}t} \cos^2 \frac{\theta}{2} + e^{i\frac{\omega}{2}t} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] + \frac{\omega}{2} t \cos \theta. \quad (2.53)$$

Como uma ilustração, tomemos o ângulo $\theta = \frac{\pi}{3}$ e $\omega = 2\pi$. Para esse caso, a fase MS é exibida na Fig. 2.1. Note que o gráfico mostra saltos na fase geométrica, os quais são devidos ao termo da função argumento presente na Eq. (2.50).

Capítulo 3

Fases Geométricas e Emaranhamento em Sistemas de Spins

Neste capítulo analisaremos as fases geométricas adquiridas por sistemas compostos interagentes e investigaremos suas relações com o emaranhamento quântico entre as partes do sistema. Em particular, consideraremos sistemas de spins governados por Hamiltonianos independentes do tempo. Inicialmente, discutiremos um método geral para determinarmos fases geométricas em tais sistemas e então daremos foco a sistemas com interação de Heisenberg. Prosseguiremos então discutindo as propriedades de emaranhamento entre os spins e apresentando uma relação entre fase geométrica e emaranhamento para cadeias com interação de Heisenberg. De modo mais específico, mostraremos que a fase geométrica pode ser usada como um indicador do emaranhamento médio associado ao estado composto durante sua evolução no espaço de Hilbert. Discutiremos essa relação tanto para fases AA quanto para fases MS.

3.1 Fases geométricas para cadeias de spins em campos constantes

Nesta seção apresentaremos uma maneira sistemática para a obtenção de fases geométricas em cadeias de N spins em campos magnéticos independentes do tempo na direção z . Consideraremos sistemas governados por Hamiltonianos dados por

$$H = JH_I + B \sum_{i=1}^N \sigma_i^z, \quad (3.1)$$

onde H_I é o Hamiltoniano de interação entre os spins da rede, J fornece a escala de energia de interação e B denota o campo magnético. Assumimos que

$$[H_I, S^z] = 0, \quad (3.2)$$

onde S^z é o operador associado ao spin total na direção z , isto é,

$$S^z = \sum_{i=1}^N \sigma_i^z. \quad (3.3)$$

Dessa forma, H_I e S^z possuem uma base simultânea de auto-estados $\{|\varphi_n\rangle\}$

$$H_I|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle, \quad (3.4)$$

$$S^z|\varphi_n\rangle = M_n|\varphi_n\rangle, \quad (3.5)$$

onde E_n é a energia associada ao autoestado $|\varphi_n\rangle$ e M_n é a sua respectiva magnetização. Expandindo $|\psi(t)\rangle$ na base comum de auto-estados de H_I e S^z , temos

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t)|\varphi_n\rangle. \quad (3.6)$$

Substituindo a Eq. (3.6) na equação de Schrödinger dependente do tempo

$$H|\psi(t)\rangle = i\hbar\dot{|\psi(t)\rangle}, \quad (3.7)$$

com o símbolo "·" sobre $|\psi(t)\rangle$ denotando derivada com relação a t , obtemos

$$\sum_n c_n(t)(JE_n + BM_n)|\varphi_n\rangle = i\hbar \sum_n \dot{c}_n(t)|\varphi_n\rangle. \quad (3.8)$$

Resolvendo a equação diferencial acima para $c_n(t)$, tem-se que

$$c_n(t) = c_n(0)e^{-\frac{i}{\hbar}(JE_n + BM_n)t}. \quad (3.9)$$

Logo, a solução da equação de Schrödinger para $|\psi(t)\rangle$ será

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar}(JE_n + BM_n)t} c_n(0)|\varphi_n\rangle. \quad (3.10)$$

Reescrevemos a equação (3.10) na forma

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n e^{i\alpha_n(t)} c_n(0)|\varphi_n\rangle, \quad (3.11)$$

com

$$\alpha_n(t) = -\frac{1}{\hbar}(JE_n + BM_n)t. \quad (3.12)$$

Para calcularmos a fase MS da cadeia para um tempo arbitrário t , basta então substituímos a Eq. (3.11) na Eq. (2.45), com $s_1 = 0$ e $s_2 = t$. Para obtermos a fase AA, temos ainda que determinar evoluções cíclicas do vetor de estado $|\psi(t)\rangle$. Nessa direção, escolhemos um autoestado $|\varphi_n\rangle$ o qual esteja presente na expansão dada na Eq. (3.11) e fazemos

$$|\psi(t)\rangle = e^{i\alpha_n(t)} \left[c_n(0)|\varphi_n\rangle + \sum_{m \neq n} e^{i[\alpha_m(t) - \alpha_n(t)]} c_m(0)|\varphi_m\rangle \right]. \quad (3.13)$$

Logo, uma evolução cíclica no espaço de Hilbert projetivo ocorrerá para um tempo τ tal que

$$e^{i[\alpha_m(\tau) - \alpha_n(\tau)]} = e^{i2\pi p_{nm}}, \quad (3.14)$$

com $p_{nm} \in \mathbb{Z}$ para todo n e m . Substituindo a Eq. (3.12) na Eq. (3.14), obtemos o período de evolução cíclica

$$\tau_{nm} = \frac{2\pi\hbar p_{nm}}{J(E_n - E_m) + B(M_n - M_m)}. \quad (3.15)$$

Observe que τ_{nm} na Eq. (3.15) deve ser o mesmo para qualquer n e m . Esse ajuste é obtido escolhendo-se convenientemente os inteiros p_{nm} . Ilustraremos esse procedimento nas próximas seções. Assim, escrevemos $\tau \equiv \tau_{nm} (\forall n, m)$, o que significa que a fase total será então

$$\phi = \alpha_n(\tau) = -\frac{JE_n + BM_n}{\hbar}\tau. \quad (3.16)$$

Para a fase dinâmica após período τ obtemos

$$\begin{aligned} \phi_d &= -\frac{1}{\hbar} \int_0^\tau \langle \psi(t) | H | \psi(t) \rangle dt \\ &= -\frac{1}{\hbar} \int_0^\tau \left[\sum_{n,m} c_m^*(0) c_n(0) e^{i(\alpha_n - \alpha_m)} (JE_n + BM_n) \delta_{nm} \right] \\ &= -\frac{1}{\hbar} \sum_n |c_n(0)|^2 (JE_n + BM_n) \tau. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Portanto, a fase geométrica AA, a qual é dada por $\beta = \phi - \phi_d$, pode ser escrita como

$$\beta = \left[- (JE_n + BM_n) + \sum_m |c_m(0)|^2 (JE_m + BM_m) \right] \frac{\tau}{\hbar}. \quad (3.18)$$

Os resultados acima valem para qualquer Hamiltoniano H_I que comute com S^z e para cadeias de tamanho N arbitrário. Como uma aplicação desses resultados, observe que se $|\psi(0)\rangle$ é um autoestado de H_I , isto é, $|\psi(0)\rangle = |\varphi_n\rangle$, então a evolução é cíclica para qualquer instante de tempo t (pois, nesse caso, temos um estado estacionário de H). Nesse caso, a fase geométrica adquirida pelo vetor de estado será nula (módulo 2π), visto que apenas o termo relativo a $|\varphi_n\rangle$ contribuirá no somatório da Eq. (3.18) (com $|c_n(0)| = 1$), o qual será exatamente cancelado pelo termo externo ao somatório. Assim, fases geométricas não-triviais aparecem apenas para estados iniciais que são superposições contendo mais de um autoestado de H_I .

3.2 Fases geométricas para a cadeia de Heisenberg

Vamos agora focar a análise das fases geométricas em sistemas com interação isotrópica nas direções de spin. Nesse caso, H_I será dado pelo Hamiltoniano Heisenberg, isto é,

$$H_I = \sum_{i=1}^N \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_{i+1}. \quad (3.19)$$

Iniciaremos nossa discussão tratando analiticamente a cadeia de 2 spins. Após isso, generalizaremos o tratamento para cadeias com N spins (para $N > 2$).

3.2.1 Cadeia de Heisenberg com 2 spins.

Consideremos um sistema composto por 2 partículas de spin $-\frac{1}{2}$ cujo vetor de estado inicial seja

$$|\psi(0)\rangle = \left(\cos \frac{\theta_1}{2} |+\rangle + e^{i\phi_1} \sin \frac{\theta_1}{2} |-\rangle \right) \otimes \left(\cos \frac{\theta_2}{2} |+\rangle + e^{i\phi_2} \sin \frac{\theta_2}{2} |-\rangle \right), \quad (3.20)$$

onde os vetores de base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ são os auto-estados de σ_z (base computacional), com $\theta_1, \theta_2 \in [0, \pi]$ e $\phi_1, \phi_2 \in [0, 2\pi)$. O vetor fornecido pela Eq. (3.20) constitui, para um sistema de dois spins $-\frac{1}{2}$, o estado puro separável mais geral possível (ver Seção 3.3 a seguir para uma discussão mais detalhada sobre separabilidade). Efetuando-se o produto tensorial na Eq. (3.20), obtemos

$$|\psi(0)\rangle = a_1(0) |++\rangle + a_2(0) |+-\rangle + a_3(0) |-+\rangle + a_4(0) |--\rangle, \quad (3.21)$$

com

$$\begin{aligned}
a_1(0) &= \cos \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2}, \\
a_2(0) &= e^{i\phi_2} \cos \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2}, \\
a_3(0) &= e^{i\phi_1} \cos \frac{\theta_2}{2} \sin \frac{\theta_1}{2}, \\
a_4(0) &= e^{i(\phi_1+\phi_2)} \sin \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2}.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

A dinâmica do sistema é governada pelo Hamiltoniano dada na Eq. (3.1), onde o Hamiltoniano de interação H_I é dado por

$$H_I = \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.23}$$

Diagonalizando H_I , encontramos os seguintes os autovetores

$$\begin{aligned}
|\varphi_1\rangle &= |++\rangle, & E_1 &= +1, & M_1 &= +2, \\
|\varphi_2\rangle &= |--\rangle, & E_2 &= +1, & M_2 &= -2, \\
|\varphi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle + |-+\rangle), & E_3 &= +1, & M_3 &= 0, \\
|\varphi_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle), & E_4 &= -3, & M_4 &= 0,
\end{aligned} \tag{3.24}$$

com E_i e M_i ($i = 1, \dots, 4$) denotando suas energias e magnetizações, as quais são definidas pelas Eqs. (3.4) e (3.5), respectivamente. Reescrevendo $|\psi(0)\rangle$ em termos dos auto-estados de H_I , temos

$$|\psi(0)\rangle = c_1(0)|\varphi_1\rangle + c_2(0)|\varphi_2\rangle + c_3(0)|\varphi_3\rangle + c_4(0)|\varphi_4\rangle, \tag{3.25}$$

com

$$\begin{aligned}
c_1(0) &= a_1(0), \\
c_2(0) &= a_4(0), \\
c_3(0) &= \frac{a_2(0) + a_3(0)}{\sqrt{2}}, \\
c_4(0) &= \frac{a_2(0) - a_3(0)}{\sqrt{2}}.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Observe que, tendo em mãos as energias E_n , as magnetizações M_n e as amplitudes do estado inicial $c_n(0)$, podemos obter as fases MS e AA diretamente das Eqs. (2.45) e (3.18), respectivamente. Consideremos o caso da fase AA. Para $0 < (\theta_1, \theta_2) < \pi$, temos que o auto-estado $|\varphi_1\rangle$ de H_I está sempre presente na expansão do estado inicial $|\psi(0)\rangle$. Então, podemos escrever $|\psi(t)\rangle$ da forma

$$|\psi(t)\rangle = e^{i\alpha_1(t)} \left[c_1(0)|\varphi_1\rangle + \sum_{m=2}^4 c_m(0)e^{i(\alpha_m - \alpha_1)}|\varphi_m\rangle \right]. \tag{3.27}$$

Utilizando agora a Eq. (3.15), encontramos as expressões para o tempo cíclico

$$\tau_{12} = \frac{\pi\hbar}{2B}p_{12}, \tag{3.28}$$

$$\tau_{13} = \frac{\pi\hbar}{B}p_{13}, \tag{3.29}$$

$$\tau_{14} = \frac{\pi\hbar}{2J+B}p_{14}. \tag{3.30}$$

As expressões acima para τ_{mn} devem ser todas equivalentes, de modo que $\tau_{12} = \tau_{13} = \tau_{14}$. Concluímos então que

$$p_{12} = 2p_{13}, \quad p_{14} = \frac{2J+B}{B}p_{13}. \tag{3.31}$$

Dessa forma, assumindo que J e B são números racionais ($J, B \in \mathbb{Q}$), temos que é sempre possível determinarmos números inteiros p_{12} , p_{13} e p_{14} que satisfaçam as expressões acima. De fato, fazendo $\frac{2J+B}{B} = \frac{k}{l}$ (para $l, k \in \mathbb{Z}$)

então teremos que o menor tempo cíclico de evolução pode ser obtido fazendo-se $p_{13} = l$, $p_{14} = k$ e $p_{12} = 2l$ (tempos cíclicos maiores podem ser obtidos tomando-se p_{13} como múltiplos de l ajustando p_{12} e p_{14} convenientemente). Portanto, de modo geral, podemos expressar o tempo cíclico como

$$\tau = \frac{\pi\hbar}{B}p, \quad (3.32)$$

onde $p \equiv p_{13}$, com p sendo um inteiro o qual é função de J e B . Para calcular a fase total ϕ , utilizamos a Eq. (3.16) fazendo $\alpha_n(t) \equiv \alpha_1(t)$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned} \phi &= -\frac{JE_1 + BM_1}{\hbar} \tau \\ &= -2\pi p \left(\frac{J}{2B} + 1 \right). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Substituindo os valores para $c_n(0)$, E_n , M_n e τ na Eq. (3.17), a fase dinâmica torna-se

$$\phi_d = -\frac{\pi p}{B} [B (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) + J \cos \theta_1 \cos \theta_2 + J \cos(\phi_1 - \phi_2) \sin \theta_1 \sin \theta_2]. \quad (3.34)$$

Logo, para a fase geométrica AA, temos $\beta = \phi - \phi_d$, o que resulta em

$$\beta = \beta_{LIVRE} + \beta_{INT}, \quad (3.35)$$

onde

$$\beta_{LIVRE} = -\pi p [(1 - \cos \theta_1) + (1 - \cos \theta_2)] \quad (3.36)$$

e

$$\beta_{INT} = -\pi p \frac{J}{B} [1 - \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \cos(\phi_1 - \phi_2) \sin \theta_1 \sin \theta_2]. \quad (3.37)$$

Note que a fase β_{LIVRE} está relacionada à fase adquirida pelo sistema de dois spins $-\frac{1}{2}$ na ausência de interação, a qual é dada basicamente pela metade do ângulo sólido descrito por cada partícula durante sua evolução cíclica no

espaço projetivo. Por outro lado, a fase β_{INT} corresponde à contribuição da interação de troca J para a fase geométrica AA. Perceba que nem todos os estados iniciais exibirão fases geométricas de interação. Por exemplo, para estados tais que $\theta_1 = \theta_2$ e $\phi_1 = \phi_2$, teremos $\beta_{INT} = 0$. Isso significa que spins preparados inicialmente em uma mesma direção se comportam, com respeito às suas fases geométricas, como se estivessem livres. Conforme discutiremos na Seção 3.4, a contribuição β_{INT} está intimamente relacionada com o emaranhamento médio entre os spins do sistema durante sua evolução no tempo.

Como observação final, notemos que, conforme indicado no parágrafo acima da Eq. (3.27), as Eqs. (3.35)-(3.37) para a fase AA não se aplicam automaticamente aos valores extremos 0 e π para θ_1 e θ_2 . Nesse caso, o autoestado $|\varphi_1\rangle$ de H_I pode não se encontrar presente na Eq. (3.20) para o estado inicial, o que pode modificar portanto o tempo cíclico dado na Eq. (3.32) e a fase total dada na Eq. (3.33). De fato, consideremos o estado de magnetização fixa dado por

$$|\psi(0)\rangle = |+-\rangle = \frac{|\varphi_3\rangle + |\varphi_4\rangle}{\sqrt{2}}, \quad (3.38)$$

o qual corresponde a $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = \pi$ na Eq. (3.20). A evolução temporal desse estado pode então ser escrita como

$$|\psi(t)\rangle = e^{i\alpha_3(t)} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} |\varphi_3\rangle + e^{i[\alpha_3(t) - \alpha_4(t)]} \frac{1}{\sqrt{2}} |\varphi_4\rangle \right]. \quad (3.39)$$

Para o tempo cíclico teremos agora

$$\tau \equiv \tau_{34} = \frac{2\pi\hbar}{J(E_3 - E_4) + B(M_3 - M_4)} p = \frac{\pi\hbar}{2J} p, \quad (3.40)$$

com $p \in \mathbb{Z}$. Portanto, a fase total será $\phi = -\frac{\pi}{2}p$. Para a fase dinâmica, podemos usar a Eq. (3.17), a qual produzirá $\phi_d = \frac{\pi}{2}p$. Logo, a fase AA para o tempo cíclico mínimo ($p = 1$) será $\beta = -\pi$, a qual é obviamente diferente do resultado que obteríamos fazendo $\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = \pi$ nas Eqs. (3.35)-(3.37).

3.2.2 Cadeia de Heisenberg com $N > 2$ spins

Vamos iniciar a discussão de cadeias maiores considerando inicialmente uma cadeia de Heisenberg fechada com 3 spins em campo magnético constante na direção z . A dinâmica do sistema é então governada pelo Hamiltoniano dado na Eq. (3.1), com o Hamiltoniano de interação H_I dado por

$$H_I = \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 + \vec{\sigma}_2 \cdot \vec{\sigma}_3 + \vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad (3.41)$$

onde condições de contorno periódicas foram adotadas [através do termo $\vec{\sigma}_3 \cdot \vec{\sigma}_1$ na Eq. (3.41)]. Os autestados de H_I , bem como suas respectivas energias e magnetizações são

$$\begin{aligned} |\varphi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|+--\rangle - |- -+\rangle), & E_1 &= -3, M_1 = -1, \\ |\varphi_2\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left(|-+-\rangle - \frac{1}{2}|+--\rangle - \frac{1}{2}|- -+\rangle \right), & E_2 &= -3, M_2 = -1, \\ |\varphi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|-++\rangle - |++-\rangle), & E_3 &= -3, M_3 = 1, \\ |\varphi_4\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left(|+-+\rangle - \frac{1}{2}|-++\rangle - \frac{1}{2}|++-\rangle \right), & E_4 &= -3, M_4 = 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\varphi_5\rangle &= |---\rangle, & E_5 &= 3, M_5 = -3, \\
|\varphi_6\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (| - - + \rangle + | - + - \rangle + | + - - \rangle), & E_6 &= 3, M_6 = -1, \\
|\varphi_7\rangle &= \frac{1}{\sqrt{3}} (| + + - \rangle + | + - + \rangle + | - + + \rangle), & E_7 &= 3, M_7 = 1, \\
|\varphi_8\rangle &= |+++ \rangle, & E_8 &= 3, M_8 = 3.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Consideraremos estados iniciais puros separáveis arbitrários, os quais podem ser escritos como

$$|\psi(0)\rangle = \bigotimes_{i=1}^3 \left(\cos \frac{\theta_i}{2} |+\rangle + e^{i\phi_i} \sin \frac{\theta_i}{2} |-\rangle \right). \tag{3.43}$$

Efetuando-se o produto tensorial na Eq. (3.43), obtemos

$$\begin{aligned}
|\psi(0)\rangle &= a_1(0)|+++ \rangle + a_2(0)|++- \rangle + a_3(0)|+-+ \rangle + a_4(0)|-++ \rangle \\
&+ a_5(0)|--+ \rangle + a_6(0)|-+- \rangle + a_7(0)|+-- \rangle + a_8(0)|--- \rangle,
\end{aligned} \tag{3.44}$$

com

$$\begin{aligned}
a_1(0) &= \cos \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2} \cos \frac{\theta_3}{2}, \\
a_2(0) &= e^{i\phi_3} \cos \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2} \sin \frac{\theta_3}{2}, \\
a_3(0) &= e^{i\phi_2} \cos \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2} \cos \frac{\theta_3}{2}, \\
a_4(0) &= e^{i\phi_1} \sin \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2} \cos \frac{\theta_3}{2}, \\
a_5(0) &= e^{i(\phi_1+\phi_2)} \sin \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2} \cos \frac{\theta_3}{2}, \\
a_6(0) &= e^{i(\phi_1+\phi_3)} \sin \frac{\theta_1}{2} \cos \frac{\theta_2}{2} \sin \frac{\theta_3}{2}, \\
a_7(0) &= e^{i(\phi_2+\phi_3)} \cos \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2} \sin \frac{\theta_3}{2}, \\
a_8(0) &= e^{i(\phi_1+\phi_2+\phi_3)} \sin \frac{\theta_1}{2} \sin \frac{\theta_2}{2} \sin \frac{\theta_3}{2}.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Escrevendo agora o estado inicial $|\psi(0)\rangle$ em termos dos auto-estados de H_I , ou seja,

$$|\psi(0)\rangle = \sum_{i=1}^8 c_n(0) |\varphi_n\rangle, \quad (3.46)$$

obtemos

$$\begin{aligned} c_1(0) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a_7(0) - a_5(0)) , \\ c_2(0) &= \frac{1}{\sqrt{6}} (2a_6(0) - a_5(0) - a_7(0)) , \\ c_3(0) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (a_4(0) - a_2(0)) , \\ c_4(0) &= \frac{1}{\sqrt{6}} (2a_3(0) - a_2(0) - a_4(0)) , \\ c_5(0) &= a_8(0) , \\ c_6(0) &= \frac{1}{\sqrt{3}} (a_5(0) + a_6(0) + a_7(0)) , \\ c_7(0) &= \frac{1}{\sqrt{3}} (a_2(0) + a_3(0) + a_4(0)) , \\ c_8(0) &= a_1(0) . \end{aligned} \quad (3.47)$$

Assim, como no caso do sistema com 2 spins, temos em mãos as energias E_n , as magnetizações M_n e as constantes $c_n(0)$. Dessa forma, podemos obter diretamente a fase AA substituindo essas quantidades nas Eqs. (3.16)-(3.18), com o tempo cíclico sendo determinado através do estado inicial (ou seja, com as especificações de θ_i e ϕ_i).

Para cadeias de tamanho N arbitrário, podemos calcular a fase AA seguindo exatamente os mesmos passos acima, ou seja, para um dado H_I , determinamos E_n , M_n e $c_n(0)$, com o ajuste do tempo para um dado estado inicial. Para cadeias de Heisenberg, forneceremos na Seção 3.4 exemplos específicos para o caso de 3 spins e para cadeias maiores até 12 sítios (via diagonalização numérica de H_I).

3.3 Separabilidade e emaranhamento

Em 1935, Einstein, Podolsky e Rosen [37] introduziram a ideia de que estados quânticos de sistemas compostos podem apresentar correlações não-locais entre suas partes. Essa não-localidade tem sua origem no fenômeno chamado *emaranhamento* quântico (termo criado por Schrödinger para descrever tais estados em mecânica quântica). Estados emaranhados, os quais foram inicialmente tratados como um aspecto perturbador da teoria quântica, constituem atualmente um importante recurso para diversas tarefas que fazem uso da informação codificada em sistemas quânticos, tais como, computação e comunicação quânticas [38].

De modo qualitativo, definimos que um estado puro $|\psi\rangle$ composto de N partes é dito ser emaranhado se ele *não* pode ser escrito como o produto tensorial dos estados de suas partes individuais, isto é,

$$|\psi\rangle \neq |\phi_1\rangle \otimes \cdots \otimes |\phi_N\rangle, \quad (3.48)$$

onde $|\phi_i\rangle$ denota um vetor de estado no espaço de Hilbert da parte individual rotulada pelo índice i . Note então que essa condição significa que, apesar do sistema composto ser descrito por um estado puro, suas partes individuais (ou pelo menos algumas delas) serão descritas por estados mistos. Caso a Eq. (3.48) não se aplique, ou seja, caso não tenhamos emaranhamento, dizemos que o estado é *separável*.

Para estados compostos mistos, a definição de separabilidade foi introduzida por Werner na Ref. [39]. Nesse caso, consideremos um estado quântico misto composto por N subsistemas, o qual é descrito por uma matriz densidade ρ que atua em um espaço de Hilbert $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{H}_N$. O estado ρ

é definido ser separável se ele pode ser escrito na forma

$$\rho = \sum_j p_j \rho_1^j \otimes \cdots \otimes \rho_N^j, \quad (3.49)$$

onde $\{p_j\}$ é uma distribuição de probabilidades, tal que $\sum_j p_j = 1$, e $\{\rho_i^j\}$ são as matrizes densidades que atuam nos espaços \mathcal{H}_i . Caso a Eq. (3.49) não se aplique, o estado ρ é emaranhado.

De um ponto de vista quantitativo, a caracterização do emaranhamento disponível em um estado quântico composto de muitas partes é ainda primitiva. O caso mais simples de partição de um sistema é sua divisão somente em duas partes, isto é, um sistema *bipartite*. Para este caso, a caracterização do emaranhamento está bem mais desenvolvida do que para o caso de múltiplas partições, isto é, para um sistema *multipartite*.

Para o caso bipartite, focaremos nossa atenção no emaranhamento entre pares de partículas dentro do sistema composto. Assim, para uma cadeia de spins de tamanho N , estaremos interessados no estado quântico de um par específico de spins, o qual denotaremos por uma matriz densidade ρ que é obtida tomando-se o traço parcial sobre todos os outros $(N - 2)$ spins da cadeia. Sendo um par de spins- $\frac{1}{2}$ um sistema de dimensão 2×2 , podemos medir o emaranhamento entre os spins através da *negatividade* [40]. O conceito de negatividade se origina do critério de separabilidade de Peres-Horodecki [41, 42], que nos diz que, para sistemas de dimensão 2×2 e 2×3 , uma condição necessária e suficiente para que a matriz densidade ρ seja emaranhada é que sua transposta parcial *não* seja positiva semidefinida (ou seja, *não* possua apenas autovalores semipositivos). Dado o operador densidade ρ , o qual descreve um sistema composto de dois spins- $\frac{1}{2}$ A e B , podemos expressar a negatividade como

$$\mathcal{N}(\rho) = 2 \max(0, -\min_{\alpha}(\mu_{\alpha})), \quad (3.50)$$

onde μ_α são os autovalores da transposta parcial ρ^{TA} do operador densidade ρ , cujos elementos de matriz são definidos como

$$\langle \alpha\beta | \rho^{TA} | \gamma\delta \rangle = \langle \gamma\beta | \rho | \alpha\delta \rangle, \quad (3.51)$$

com $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{+, -\}$ rotulando os vetores de base para cada spin $-\frac{1}{2}$. Observe que a transposição parcial afeta apenas o subsistema A , deixando o sistema B inalterado. A negatividade é normalizada de tal modo que $0 \leq \mathcal{N} \leq 1$, com $\mathcal{N} = 0$ identificando um estado separável e $\mathcal{N} = 1$ identificando um estado maximamente emaranhado [por exemplo, o estado singlete de spin $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+-\rangle - |-+\rangle)$].

Com o desenvolvimento da teoria da informação quântica, a questão da quantificação do emaranhamento multipartite tem avançado. Nessa direção, algumas medidas têm sido propostas, as quais capturam aspectos parciais da caracterização do emaranhamento entre as múltiplas partições do sistema. Uma dessas medidas é o chamado *emaranhamento global*, proposta por Meyer e Wallach na Ref. [43], a qual se aplica a estados quânticos multipartites puros. Dado um vetor de estado descrevendo um sistema quântico $|\psi\rangle$ de N q-bits (sistemas de dimensão 2, tais como spins $-\frac{1}{2}$), o emaranhamento global Q pode ser determinado por [44]

$$Q(|\psi\rangle) = 2 \left[1 - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \text{Tr}(\rho_k^2) \right], \quad (3.52)$$

onde ρ_k é a matriz densidade reduzida da parte k do sistema. Tal como escrito na Eq. (3.52), a medida de Meyer-Wallach pode então ser interpretada como a média aritmética dos emaranhamentos de cada parte com todo o resto do sistema, com o emaranhamento entre uma parte individual e o resto do sistema medido pela entropia linear (ver Ref. [44] para maiores detalhes sobre esse ponto). O emaranhamento global está normalizado de tal modo que

$0 \leq Q \leq 1$, com $Q = 0$ se, e somente se, $|\psi\rangle$ é um estado produto, ou seja, $|\psi\rangle$ é do tipo $|\psi\rangle = |\phi_1\rangle \otimes \cdots \otimes |\phi_N\rangle$, e $Q = 1$ para estados emaranhados tais que $Tr(\rho_k^2) = 1/2$, $\forall k$, ou seja, para vetores $|\psi\rangle$ tais que o estado reduzido de cada q-bit seja um estado maximamente misto.

3.4 Fase geométrica e emaranhamento induzido pela interação

Nesta seção, investigaremos a existência, para cadeias de Heisenberg, de uma relação direta entre a contribuição de interação para a fase geométrica e o emaranhamento médio disponível para o sistema durante sua evolução no espaço de Hilbert. Como veremos, essa relação promove a fase geométrica a um indicador da quantidade de emaranhamento que pode ser induzida pela interação durante a evolução do sistema. Na ausência de interação, ou seja, com a evolução do sistema composto dada por transformações unitárias locais (transformações individuais sobre cada parte do sistema), alguns resultados foram obtidos nas Refs. [45, 46]. Primeiramente, observemos que se considerarmos um estado quântico composto evoluindo no tempo por transformações unitárias locais, o emaranhamento do estado permanece fixo. Nesse caso, mostrou-se nas Refs. [45, 46] que, para estados separáveis, a fase geométrica do sistema composto pode ser decomposta na soma das fases adquiridas pelos subsistemas, o que não acontece para estados emaranhados. Logo, para evoluções locais, a fase geométrica é capaz de caracterizar a separabilidade de um estado quântico.

Na presença de interação, essa discussão se torna mais elaborada, visto que um estado inicialmente separável pode se tornar emaranhado ao longo de sua evolução. Para cadeias de Heisenberg com 2 spins, a Ref. [47] mostrou

que, caso a interação não seja capaz de induzir emaranhamento, ou seja, caso um estado inicialmente separável permaneça separável durante sua evolução, então a fase geométrica do sistema composto ainda será decomposta na soma das fases dos subsistemas individuais. No entanto, se esse comportamento é ainda válido para sistemas com mais de 2 spins e as consequências da indução de emaranhamento para a fase geométrica ainda permaneceram abertas. Conforme mostraremos, podemos avançar em respostas a essas questões obtendo uma relação entre emaranhamento e fase geométrica de interação, ou seja, fase geométrica total obtida pelo sistema composto menos a fase que o sistema exibiria se estivesse evoluindo de modo livre (sem interação). Para a fase AA, a fase de interação representa exatamente a fase geométrica total menos a contribuição de ângulo sólido, conforme ilustrado, por exemplo, nas Eqs. (3.35)-(3.37) para a cadeia de Heisenberg com 2 spins.

3.4.1 Fase AA e emaranhamento

Vamos iniciar considerando a cadeia de Heisenberg com 2 spins. Para tal sistema, as fases AA foram discutidas na Subseção 3.2.1. Nesse sistema, o emaranhamento pode ser determinado via Eq. (3.50) para a negatividade ou via Eq. (3.52) para o emaranhamento global. Nessa direção, para o caso da negatividade, temos que encontrar o operador densidade do sistema $\rho(t)$, o qual é definido por

$$\rho(t) = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|, \quad (3.53)$$

onde $|\psi(t)\rangle$ é dado pela Eq. (3.27). Podemos então calcular a matriz transposta parcial ρ^{TA} e obter diretamente a negatividade via autovalores de ρ^{TA} . Para um tempo t arbitrário, obtemos

$$\mathcal{N} = \frac{1}{2} \left| \sin \left(\frac{4Jt}{\hbar} \right) \right| [1 - \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \cos(\phi_1 - \phi_2) \sin \theta_1 \sin \theta_2]. \quad (3.54)$$

No entanto, para evoluções cíclicas, o sistema retornará (a menos de uma fase) ao seu estado original. Se partimos de um estado separável, o emaranhamento será nulo tanto no início quanto ao final da evolução. Para podermos então comparar a negatividade com a fase AA adquirida pelo sistema durante a evolução cíclica, consideraremos a negatividade média ao final de um período τ , a qual é dada por

$$\mathcal{N}_{med} = \frac{f(\tau)}{2} [1 - \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \cos(\phi_1 - \phi_2) \text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_2], \quad (3.55)$$

com

$$f(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau dt \left| \text{sen} \left(\frac{4Jt}{\hbar} \right) \right|. \quad (3.56)$$

Portanto, ao longo de uma evolução cíclica, o emaranhamento médio é proporcional fase geométrica de interação dada pela Eq. (3.37). De fato, podemos escrever

$$\mathcal{N}_{med} = - \frac{Bf(\tau)}{2\pi pJ} \beta_{INT}. \quad (3.57)$$

A Eq. (3.57) implica que, se medimos a fase AA do sistema e descontamos a contribuição livre (obtendo assim β_{INT}) teremos uma quantificação imediata do emaranhamento médio disponível ao sistema durante sua evolução.

Para o caso do emaranhamento global, encontramos $Tr(\rho_k^2)$ calculando ρ_k (para cada k) via Eq. (3.53). Assim, para um tempo t arbitrário, obtemos

$$Q = \frac{1}{4} \text{sen}^2 \left(\frac{4Jt}{\hbar} \right) [-1 + \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \cos(\phi_1 - \phi_2) \text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_2]^2. \quad (3.58)$$

De modo análogo à negatividade, podemos comparar o emaranhamento global médio com a fase AA a qual o sistema adquire após a evolução cíclica de período τ . O emaranhamento global médio é dado por

$$Q_{med} = \frac{g(\tau)}{4} [-1 + \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \cos(\phi_1 - \phi_2) \text{sen} \theta_1 \text{sen} \theta_2]^2 \quad (3.59)$$

com

$$g(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \text{sen}^2 \left(\frac{4Jt}{\hbar} \right) dt. \quad (3.60)$$

Portanto, o emaranhamento global médio é proporcional ao quadrado da fase geométrica de interação dada pela Eq. (3.37). Deste modo, podemos escrever

$$Q_{med}(|\psi\rangle) = \left(\frac{B}{2\pi pJ}\right)^2 g(\tau) \beta_{INT}^2. \quad (3.61)$$

Para generalizarmos a relação acima para sistemas com mais de 2 spins, precisamos discutir que tipo de emaranhamento se relaciona com a fase geométrica. Nesse contexto, investigaremos tanto emaranhamento entre pares de spins quanto o emaranhamento global dado pela medida de Meyer e Wallach. Considerando um sistema com 3 spins acoplados, tomamos o estado inicial $|\psi(0)\rangle$ da Eq. (3.43), onde fazemos $\theta_1 = \theta_2 = 0$ e $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0$. Assim,

$$|\psi(0)\rangle = |+\rangle \otimes |+\rangle \otimes \left(\cos \frac{\theta_3}{2} |+\rangle + \sin \frac{\theta_3}{2} |-\rangle \right). \quad (3.62)$$

Da Eq. (3.45), teremos para o estado $|\psi(0)\rangle$ acima que $a_1(0) = \cos(\theta_3/2)$ e $a_2(0) = \sin(\theta_3/2)$, com todos os outros $a_i(0)$ nulos. Logo, usando a Eq. (3.47), temos que $c_3(0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(\theta_3/2)$, $c_4(0) = -\frac{1}{\sqrt{6}}\sin(\theta_3/2)$, $c_7(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\theta_3/2)$ e $c_8(0) = \cos(\theta_3/2)$, com todos os outros $c_i(0)$ nulos. Neste caso, ao expandir $|\psi(t)\rangle$ na base dos auto-estados de H_I , só aparecerão os termos relacionando a $|\varphi_3\rangle$, $|\varphi_4\rangle$, $|\varphi_7\rangle$ e $|\varphi_8\rangle$. Assim, escrevemos

$$|\psi(t)\rangle = e^{i\alpha_3(t)} \left[c_3(0)|\varphi_1\rangle + \sum_{m=4,7,8} c_m(0)e^{i[\alpha_m(t)-\alpha_3(t)]}|\varphi_m\rangle \right]. \quad (3.63)$$

Impondo que a evolução seja cíclica e tendo em mente que os estados $|\varphi_3\rangle$ e $|\varphi_4\rangle$ possuem a mesma energia e a mesma magnetização (e que portanto $\alpha_3(t) = \alpha_4(t)$), obtemos da Eq. (3.15) as expressões para o período

$$\tau_{37} = \frac{\pi\hbar}{3J} p_{37}, \quad \tau_{38} = \frac{\pi\hbar}{3J+B} p_{38}, \quad (3.64)$$

onde p_{37} e $p_{38} \in \mathbb{Z}$. Tomando um exemplo concreto, façamos $\hbar = 1$, $J = 1$ e $B = 3$. Nesse caso, requerendo a igualdade $\tau_{37} = \tau_{38}$, temos que p_{37} pode

ser qualquer inteiro e $p_{38} = 2p_{37}$. Para a fase total, usando a Eq. (3.16), podemos escrever

$$\phi = -\pi p \left(\frac{B}{3J} - 1 \right) = 0, \quad (3.65)$$

onde $p \equiv p_{37}$. Da Eq. (3.17), encontramos a expressão para a fase dinâmica

$$\phi_d = -\frac{\pi}{3} p \left[12 \cos^2 \frac{\theta_3}{2} + 2 \sin^2 \frac{\theta_3}{2} \right]. \quad (3.66)$$

Estamos interessados na fase geométrica de interação β_{INT} , o que significa que teremos que subtrair a fase geométrica livre β_{LIVRE} de cada spin, com $\beta_{LIVRE} = -\pi p(1 - \cos \theta_i)$ ($i = 1, 2, 3$). Sendo $\theta_1 = \theta_2 = 0$, teremos β_{LIVRE} apenas para o terceiro spin. Logo,

$$\beta_{INT} = \frac{\pi}{3} p \left[12 \cos^2 \frac{\theta_3}{2} + 2 \sin^2 \frac{\theta_3}{2} \right] + \pi p (1 - \cos \theta_3). \quad (3.67)$$

Na Fig. 3.1, ilustramos a relação entre β_{INT} , a qual está sendo multiplicada por uma constante k para melhor visualização, e a negatividade média \mathcal{N}_{13} entre o primeiro e o terceiro spin. Note que temos uma relação monotônica entre fase de interação e emaranhamento. No entanto, note que pares diferentes podem ter negatividades bastante distintas e assim uma relação entre fase geométrica e emaranhamento de pares não será geral para sistemas de spins com $N > 2$. No sentido de obter uma relação mais universal em sistemas com muitos spins, mostramos na Fig. 3.2 a fase β_{INT} , multiplicada por uma constante k , e o emaranhamento global como função do ângulo θ_3 . Note que também aqui obtemos uma relação monotônica entre β_{INT} e a medida de Meyer-Wallach, mas agora essa relação independe de escolha particulares de spins.

Vamos agora considerar um estado inicial $|\psi(0)\rangle$ da Eq. (3.43) para o qual fazemos $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi/2$ e $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0$. Assim,

$$|\psi(0)\rangle = |+\rangle \otimes \left(\frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}} \right) \otimes \left(\cos \frac{\theta_3}{2} |+\rangle + \sin \frac{\theta_3}{2} |-\rangle \right). \quad (3.68)$$

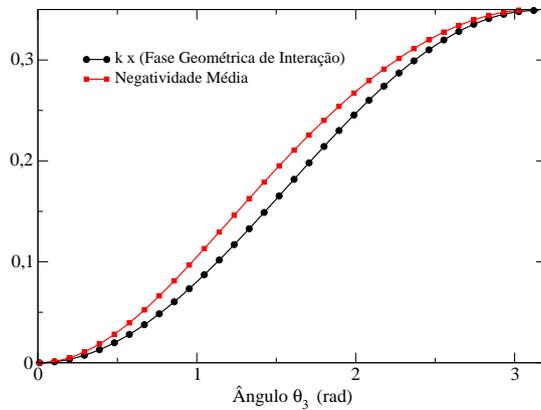


Figura 3.1: Fase geométrica de interação β_{INT} , multiplicada por uma constante k , e negatividade média entre o primeiro e terceiro spins em função do ângulo θ_3 para a cadeia de Heisenberg com 3 spins em um campo constante no estado inicial dado pela Eq. (3.62), onde a fase é calculada para o primeiro tempo cíclico ($p = 1$). Adotamos $\hbar = 1$ e $B/J = 3$.

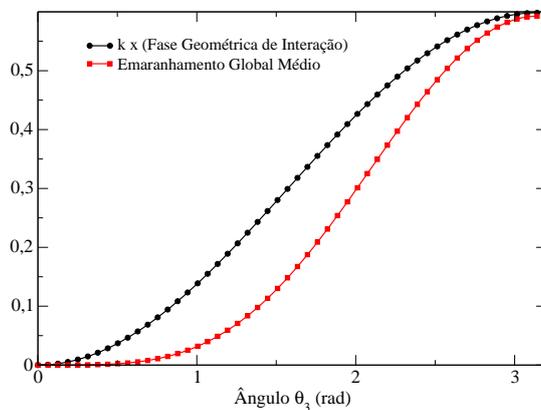


Figura 3.2: Fase geométrica de interação β_{INT} , multiplicada por uma constante k , e emaranhamento global em função do ângulo θ_3 para a cadeia de Heisenberg com 3 spins em um campo constante no estado inicial dado pela Eq. (3.62), onde a fase é calculada para o primeiro tempo cíclico ($p = 1$). Adotamos $\hbar = 1$ e $B/J = 3$.

Esse estado é tal que as negatividades entre os spins são bastante distintas entre si, o que exemplifica o fato de que uma relação entre β_{INT} e emaranhamento de pares não é possível para $N > 2$. Como veremos, no entanto, a fase β_{INT} ainda mantém sua relação com o emaranhamento global. De acordo com a Eq. (3.68), temos que $a_1(0) = a_3(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\theta_3/2)$ e $a_2(0) = a_7(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin(\theta_3/2)$. Assim, somente o termo $c_5(0)$ será igual a zero. Deste modo, ao expandir $|\psi(t)\rangle$ na base dos auto-estados de H_I , só não aparecerá o termo relacionado a $|\varphi_5\rangle$. Podemos escrever

$$|\psi(t)\rangle = e^{i\alpha_1(t)} \left[c_1(0)|\varphi_1\rangle + \sum_{m=2,\dots,8;m \neq 5} c_m(0)e^{ic[\alpha_m(t)-\alpha_1(t)]}|\varphi_m\rangle \right]. \quad (3.69)$$

Utilizando a Eq. (3.15) obtemos as expressões para o tempo cíclico

$$\tau_{13} = \frac{\pi\hbar}{B}p_{13}, \quad \tau_{14} = \frac{\pi\hbar}{B}p_{14}, \quad \tau_{16} = \frac{\pi\hbar}{3J}p_{16}, \quad \tau_{17} = \frac{\pi\hbar}{3J+B}p_{17}, \quad \tau_{18} = \frac{\pi\hbar}{3J+2B}p_{18}, \quad (3.70)$$

onde $p_{13}, p_{14}, p_{16}, p_{17}$ e $p_{18} \in \mathbb{Z}$. Novamente, consideramos $\hbar = 1$, $J = 1$ e $B = 3$. Sendo assim, obtemos para os valores de p_i ($i = 3, 4, 6, 7, 8$) as relações

$$p_{13} = p_{14} = p_{16}, \quad p_{17} = 2p_{13}, \quad p_{18} = 3p_{13}. \quad (3.71)$$

Utilizando a Eq. (3.16), escrevemos a expressão para a fase total da forma

$$\phi = \pi p \left(3\frac{J}{B} + 1 \right) = 2\pi p, \quad (3.72)$$

onde $p \equiv p_{13}$. Através da Eq. (3.17), encontramos a expressão para a fase dinâmica para o primeiro tempo cíclico

$$\phi_d = -\frac{\pi}{3} (3 + 4 \cos \theta_3 + \sin \theta_3). \quad (3.73)$$

Logo, sabendo que as fases geométricas livres para o primeiro e o segundo spin são, respectivamente, 0 e π , a fase geométrica de interação para $p = 1$

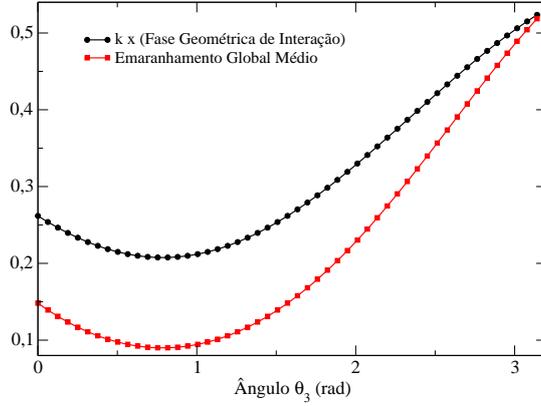


Figura 3.3: Fase geométrica de interação β_{INT} , multiplicada por uma constante k , e emaranhamento global médio em função do ângulo θ_3 para a cadeia de Heisenberg com 3 spins em um campo magnético constante no estado inicial dado pela Eq. (3.68). Adotamos $\hbar = 1$ e $B/J = 3$.

será

$$\beta_{INT} = 5\pi + \frac{\pi}{3} (\cos \theta_3 + \sin \theta_3). \quad (3.74)$$

Na Fig. 3.3, mostramos para o estado inicial dado na Eq. (3.68) a relação entre β_{INT} , a qual está multiplicada por uma constante k , e o emaranhamento global médio em função do ângulo θ_3 .

A relação entre β_{INT} e emaranhamento global pode também ser ilustrada para cadeias maiores. Consideremos, como um exemplo, uma cadeia de Heisenberg com $N = 12$ sítios e estado inicial $|\psi(0)\rangle$ dado por

$$|\psi(0)\rangle = \bigotimes_{i=1}^{11} |+\rangle_i \otimes \left(\cos \frac{\theta}{2} |+\rangle + \sin \frac{\theta}{2} |-\rangle \right). \quad (3.75)$$

Através de diagonalização numérica de H_I e seguindo os passos desenvolvidos na Seção 3.1, podemos determinar a fase AA de interação e o emaranhamento global médio, cujo resultado é mostrado na Fig. 3.4. Note então que, como já discutido para as cadeias menores, a fase geométrica continua aqui refletindo o emaranhamento do estado.

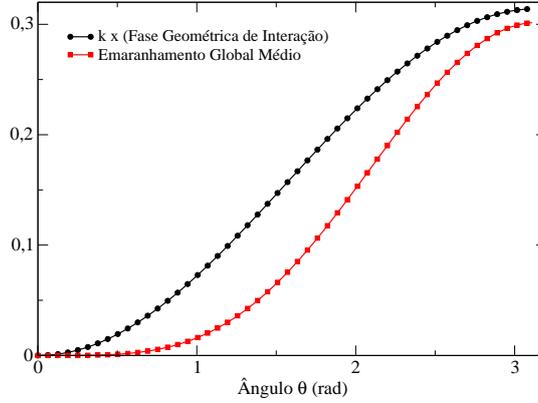


Figura 3.4: Fase geométrica de interação β_{INT} , multiplicada por uma constante k , e emaranhamento global médio em função do ângulo θ para a cadeia de Heisenberg com $N = 12$ spins em um campo constante no estado inicial dado pela Eq. (3.75). Adotamos $\hbar = 1$ e $B/J = 3$.

3.4.2 Fase MS e emaranhamento

Com o objetivo de estudar a relação entre fases geométricas e emaranhamento para qualquer instante de tempo t , discutiremos nesta subseção as fases geométricas MS. Inicialmente, vamos considerar a cadeia de Heisenberg com 2 spins. Faremos o análogo ao que foi feito para a fase AA na Subseção 3.4.1. As Eqs. (3.54) e (3.58) para a negatividade e o emaranhamento global, respectivamente, continuam sendo válidas. Para a determinação das fases, vamos começar considerando o estado inicial

$$|\psi(0)\rangle = |+\rangle \otimes \left(\cos \frac{\theta_2}{2} |+\rangle + \sin \frac{\theta_2}{2} |-\rangle \right). \quad (3.76)$$

O único auto-estado de H_I que não aparecerá na expansão de $|\psi(t)\rangle$ na base dos auto-estados $\{|\varphi_n\rangle\}$ será $|\varphi_2\rangle$. Logo, temos que

$$|\psi(t)\rangle = e^{i\alpha_1(t)} \left[c_1(0) |\varphi_1\rangle + \sum_{m=3,4} e^{i[\alpha_m(t) - \alpha_1(t)]} c_m(0) |\varphi_m\rangle \right]. \quad (3.77)$$

Podemos obter a fase geométrica de interação MS usando a Eq. (2.50) a menos da fase livre de cada spin a qual é dada pela Eq. (2.53). Neste caso, fazemos $w/2 = B$. Sendo assim, a fase total MS será

$$\phi = \text{Arg} \left[e^{-i(1+2B)t} \left(1 + \cos \theta_2 + e^{2iBt} (1 + e^{4it}) \text{sen}^2 \frac{\theta_2}{2} \right) \right], \quad (3.78)$$

e a fase dinâmica será

$$\phi_d = -t(B + (1 + B) \cos \theta_2). \quad (3.79)$$

A fase livre de cada spin é escrita como

$$\gamma_{MS}^{(j)} = \text{Arg} \left[e^{-iBt} \cos^2 \frac{\theta_j}{2} + e^{iBt} \text{sen}^2 \frac{\theta_j}{2} \right] + Bt \cos \theta_j, \quad (3.80)$$

onde $j = (1, 2)$ denota o respectivo spin. Logo, a fase geométrica de interação MS será dada pela equação

$$\gamma_{MS}^{INT}(t) = \phi - \phi_d - \sum_{j=1}^2 \gamma_{MS}^{(j)}. \quad (3.81)$$

As Figs. 3.5, 3.6 e 3.7 ilustram a relação monotônica entre $\gamma_{MS}^{INT}(t)$ e a negatividade média, o emaranhamento global instantâneo e o emaranhamento global médio, respectivamente, onde o tempo está fixo em $t = \pi/3$. Em todos estes casos, a fase geométrica de interação reflete o emaranhamento. Assim, para fases MS, a média sobre o emaranhamento é uma operação opcional para se atingir a relação com a fase geométrica de interação.

Vamos considerar agora cadeia de Heisenberg com 3 spins acoplados tendo como estado inicial

$$|\psi(0)\rangle = |+\rangle \otimes \left(\frac{|+\rangle + |-\rangle}{\sqrt{2}} \right) \otimes \left(\cos \frac{\theta_3}{2} |+\rangle + \text{sen} \frac{\theta_3}{2} |-\rangle \right). \quad (3.82)$$

Para este estado fixamos o tempo em $t = \frac{\pi}{2}$ e variamos o ângulo θ_3 . Diferente do caso de 2 spins, visto anteriormente, o gráfico da fase geométrica MS

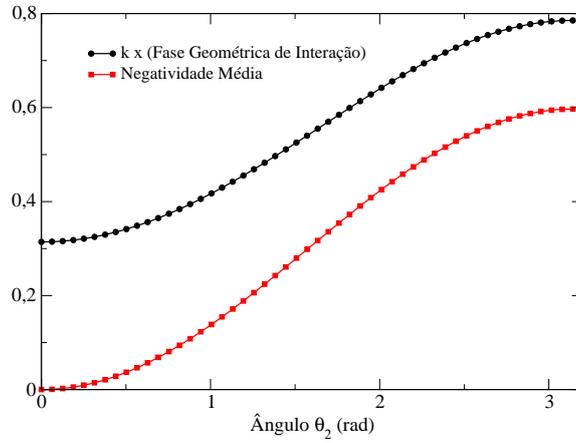


Figura 3.5: Fase geométrica de interação $\gamma_{MS}^{INT}(t)$, multiplicada por uma constante k , e negatividade média em função do ângulo θ_2 para cadeia de Heisenberg com 2 spins em um campo magnético constante cujo estado inicial é dado pela Eq. (3.76). O tempo de evolução está fixado em $\pi/3$. Adotamos $\hbar = 1$ e $B/J = 3$.

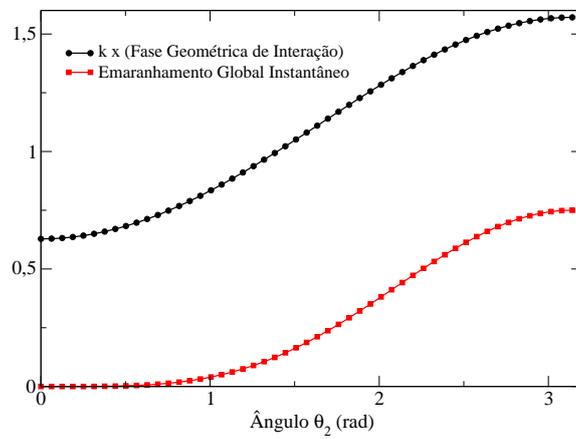


Figura 3.6: Fase geométrica de interação $\gamma_{MS}^{INT}(t)$, multiplicada por uma constante k , e emaranhamento global instantâneo em função do ângulo θ_2 para a cadeia de Heisenberg com 2 spins em um campo magnético constante cujo estado inicial é dado pela Eq. (3.76). O tempo está fixo em $\pi/3$. Adotamos $\hbar = 1$ e $B/J = 3$.

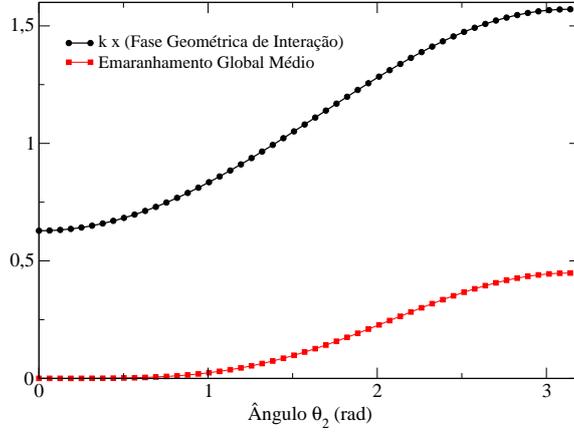


Figura 3.7: Fase geométrica de interação $\gamma_{MS}^{INT}(t)$, multiplicada por uma constante k , e emaranhamento global médio em função do ângulo θ_2 para a cadeia de Heisenberg com 2 spins em um campo magnético constante cujo estado inicial é dado pela Eq. (3.76). O tempo de evolução está fixo em $\pi/3$. Adotamos $\hbar = 1$ e $B/J = 3$.

mostra saltos como aqueles visto no exemplo da na Subseção. 2.6. Estes saltos ocorrem devido ao argumento contido na Eq. (2.50). Para o caso em que $J = 1$ e $B = 3$, este salto ocorre próximo a $\theta_3 = \pi/2$. Nessa direção iremos mostrar o gráfico da fase γ_{MS} em duas partes: no primeiro, o ângulo θ_3 varia de 0 a $\pi/2$, e no segundo, a variação de θ_3 é de $\pi/2$ a π .

A Fig.3.8 nos mostra claramente uma relação de monotonicidade entre a fase geométrica γ_{MS} e o emaranhamento global instantâneo. A relação ainda é observada para o caso do emaranhamento global médio, como pode ser visto na Fig. 3.9.

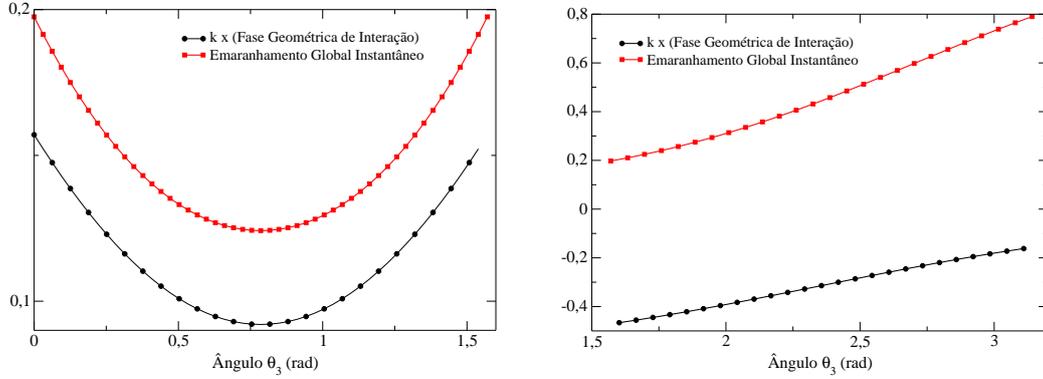


Figura 3.8: Fase geométrica $\gamma_{MS}^{INT}(t)$, multiplicada por uma constante k , e emaranhamento global instantâneo em função do ângulo θ_3 para a cadeia de Heisenberg com 3 spins em um campo magnético constante no estado inicial dado pela Eq. (3.82). O tempo está fixo em $t = \pi/2$. Adotamos $\hbar = 1$ e $B/J = 3$.

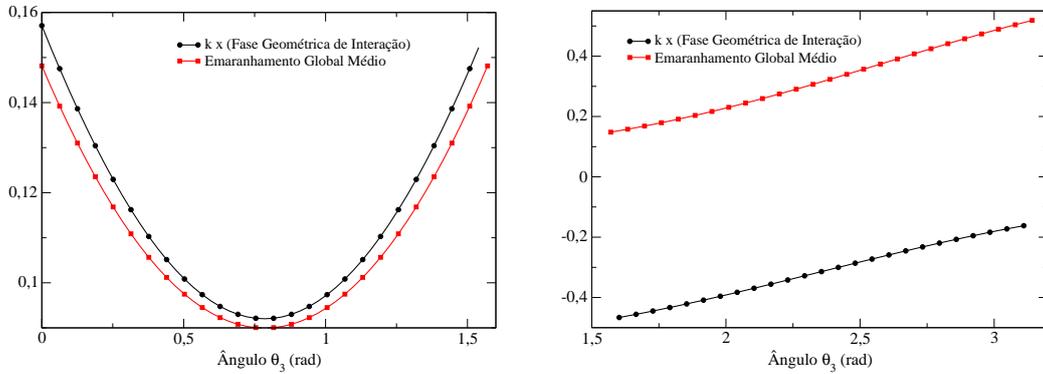


Figura 3.9: Fase geométrica $\gamma_{MS}^{INT}(t)$, multiplicada por uma constante k e emaranhamento global médio em função do ângulo θ_3 para a cadeia de Heisenberg com 3 spins em um campo magnético constante no estado inicial dado pela Eq. (3.82). O tempo está fixo em $t = \pi/2$. Adotamos $\hbar = 1$ e $B/J = 3$.

Capítulo 4

Fases Geométricas e Invariantes Dinâmicos

Neste capítulo, discutimos a generalização da análise de fases geométricas em cadeias de Heisenberg para o caso de campos dependentes do tempo, os quais aparecem tipicamente em técnicas importantes para a investigação de interações entre spins, tais como ressonância nuclear magnética [38]. Para discutirmos a determinação de fases geométricas em cadeias de tamanho N arbitrário na presença de campos dependentes do tempo, faremos uso da teoria dos invariantes dinâmicos [48, 49]. Iniciamos o capítulo com a apresentação da teoria dos invariantes. Em seguida, obtemos o operador invariante para uma cadeia de Heisenberg em um campo magnético dependente do tempo. A partir daí, mostramos como podemos obter as fases geométricas e investigamos sua relação com o emaranhamento nesse contexto.

4.1 Teoria dos invariantes dinâmicos

A teoria dos invariantes dinâmicos, proposta por Lewis e Riesenfeld nas Refs. [48, 49], foi concebida como uma ferramenta para a solução de problemas dependentes do tempo em mecânica quântica. O método dos invariantes consiste em integrar a equação de Schrödinger dependente do tempo através da construção do chamado operador invariante. Nessa seção, revisaremos os aspectos básicos da teoria dos invariantes seguindo a Ref. [50]. Para um sistema fechado, definimos o invariante dinâmico $I(t)$ como um operador Hermitiano que satisfaz

$$\frac{\partial}{\partial t} I(t) + \frac{i}{\hbar} [H(t), I(t)] = 0, \quad (4.1)$$

onde $H(t)$ é o Hamiltoniano do sistema dependente do tempo. Podemos definir uma base ortonormal de auto-estados instantâneos de $I(t)$ como

$$I(t)|\psi_i(t)\rangle = \lambda_i|\psi_i(t)\rangle. \quad (4.2)$$

Vamos, por simplicidade, assumir que $I(t)$ possui autovalores não degenerados. Consideremos então que o sistema seja descrito por um vetor de estado $|\psi(t)\rangle$ cuja dinâmica é governada pela equação de Schrödinger dependente do tempo

$$H(t)|\psi(t)\rangle = i\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle, \quad (4.3)$$

onde fizemos $\hbar = 1$. Expandimos então $|\psi(t)\rangle$ na base de auto-estados $\{|\psi_i(t)\rangle\}$ de $I(t)$, produzindo

$$|\psi(t)\rangle = \sum_i c_i(t)|\psi_i(t)\rangle. \quad (4.4)$$

Inserindo a Eq. (4.4) na Eq. (4.3) e projetando o resultado em $\langle\psi_j(t)|$ conseguimos que

$$\dot{c}_j = - \sum_i c_i \left(i\langle\psi_j|H|\psi_i\rangle + \langle\psi_j|\dot{\psi}_i\rangle \right). \quad (4.5)$$

Por outro lado, tomando a derivada da Eq. (4.2) e projetando-a em $\langle \psi_j(t) |$ temos que

$$\dot{\lambda}_i \delta_{ij} + (\lambda_i - \lambda_j) \left(i \langle \psi_j | H | \psi_i \rangle + \langle \psi_j | \dot{\psi}_i \rangle \right) = 0. \quad (4.6)$$

A Eq. (4.6) implica que

$$i = j : \dot{\lambda}_i = 0 \Rightarrow \lambda_i \text{ é constante}, \quad (4.7)$$

$$i \neq j : \langle \psi_j | \dot{\psi}_i \rangle = -i \langle \psi_j | H | \psi_i \rangle. \quad (4.8)$$

Logo, observe da Eq. (4.7) que $I(t)$ é uma constante de movimento em mecânica quântica, ou seja, $\frac{d(I)}{dt} = 0$. Com respeito a Eq. (4.8), ela nos permite uma integração direta da equação de Schrödinger. De fato, a substituição da Eq. (4.8) na Eq. (4.5) produz

$$c_j(t) = c_j(0) \exp \left[- \int_0^t \left(\langle \psi_j | \frac{\partial}{\partial \tau} | \psi_j \rangle + i \langle \psi_j | H | \psi_j \rangle \right) d\tau \right]. \quad (4.9)$$

Dessa forma, usando os valores de $c_j(t)$ na Eq. (4.4), temos o estado do sistema $|\psi(t)\rangle$ para qualquer instante de tempo t . Em particular, se o sistema for preparado no autoestado instantâneo $|\psi_j(0)\rangle$ em $t = 0$ ele evoluirá para o autoestado instantâneo $|\psi_j(t)\rangle$ para t arbitrário.

4.2 Invariante dinâmico e fase geométrica para a cadeia de Heisenberg

Consideremos um sistema de N spins interagindo via acoplamento de troca de Heisenberg em um campo magnético dependente do tempo, cujo Hamiltoniano é dado por

$$H(t) = J \sum_{i=1}^L (\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z) + \vec{B}(t) \cdot \sum_{i=1}^L \vec{\sigma}_i, \quad (4.10)$$

com

$$\vec{B}(t) = B(t) \left(\text{sen}\theta(t) \cos\varphi(t)\hat{i} + \text{sen}\theta(t)\text{sen}\varphi(t)\hat{j} + \cos\theta(t)\hat{k} \right). \quad (4.11)$$

Nosso objetivo aqui será então encontrar um operador invariante para esse sistema (com N arbitrário) e, em seguida, aplicá-lo para investigar fases geométricas em campos dependentes do tempo. Nessa direção, seguiremos os resultados introduzidos na Ref. [51] para a dedução do invariante $I(t)$. Vamos começar definindo

$$\sigma_i^\pm = \frac{\sigma_i^x \pm i\sigma_i^y}{2}, \quad \omega(t) = B(t) \cos\theta(t), \quad G(t) = B(t)\text{sen}\theta(t), \quad (4.12)$$

o que permite reescrever o Hamiltoniano como

$$\begin{aligned} H(t) = & J \sum_{i=1}^L \left[2(\sigma_i^+ \sigma_{i+1}^- + \sigma_i^- \sigma_{i+1}^+) + \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z \right] + \\ & + G(t) \sum_{i=1}^L (e^{-i\varphi(t)} \sigma_i^+ + e^{i\varphi(t)} \sigma_i^-) + \omega(t) \sum_{i=1}^L \sigma_i^z. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Com o intuito de obter um operador $I(t)$ que satisfaça a Eq. (4.1), consideremos o operador unitário $R(t)$, o qual é dado por

$$R(t) = \prod_{i=1}^L R_i(t), \quad (4.14)$$

com

$$R_i(t) = e^{\left[-\frac{\gamma(t)}{2} (e^{-i\beta(t)} \sigma_i^+ - e^{i\beta(t)} \sigma_i^-) \right]}, \quad (4.15)$$

onde $\gamma(t)$ e $\beta(t)$ são funções reais. Sabendo que

$$e^{i\frac{\gamma}{2}A} = \mathbf{1} + i\frac{\gamma}{2}A - \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 \mathbf{1} - i\left(\frac{\gamma}{2}\right)^3 A + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^4 \mathbf{1} + \dots, \quad (4.16)$$

onde $A = i(e^{-i\beta}\sigma^+ - e^{i\beta}\sigma^-)$, podemos escrever $R_i(t)$ da forma

$$R_i(t) = \cos\frac{\gamma(t)}{2} \mathbf{1} - \text{sen}\frac{\gamma(t)}{2} (e^{-i\beta(t)} \sigma_i^+ - e^{i\beta(t)} \sigma_i^-). \quad (4.17)$$

Da Eq. (4.17), podemos obter as relações úteis

$$R_i^\dagger \sigma_i^z R_i = \cos \gamma \sigma_i^z - \text{sen} \gamma (e^{-i\beta} \sigma_i^+ + e^{i\beta} \sigma_i^-), \quad (4.18)$$

$$R_i^\dagger \sigma_i^\pm R_i^\dagger = e^{\pm i\beta} \left(\text{sen} \frac{\gamma}{2} \sigma_i^z + e^{\mp i\beta} \cos^2 \frac{\gamma}{2} \sigma_i^\pm - e^{\pm i\beta} \text{sen}^2 \frac{\gamma}{2} \sigma_i^\mp \right), \quad (4.19)$$

$$R (\vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_{i+1}) R^\dagger = \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_{i+1}, \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} i R_i^\dagger \frac{\partial}{\partial t} R_i &= -\frac{\dot{\beta}}{2} (1 - \cos \gamma) \sigma_i^z \\ &\quad - \frac{e^{-i\beta}}{2} (i\dot{\gamma} + \dot{\beta} \text{sen} \gamma) \sigma_i^+ - \frac{e^{i\beta}}{2} (-i\dot{\gamma} + \dot{\beta} \text{sen} \gamma) \sigma_i^-, \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$R^\dagger \sum_i \vec{\sigma}_i R = \sum_i R_i^\dagger \vec{\sigma}_i R_i, \quad (4.22)$$

$$R^\dagger \frac{\partial}{\partial t} R = \sum_i R_i^\dagger \frac{\partial}{\partial t} R_i. \quad (4.23)$$

A partir das relações acima, podemos encontrar o seguinte operador invariante $I(t)$ para a cadeia de Heisenberg

$$I(t) = R(t) \left[\sum_i \sigma_i^z + \sum_i \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_{i+1} \right] R^\dagger(t), \quad (4.24)$$

onde as funções $\gamma(t)$ e $\beta(t)$ que compõem o operador $R(t)$ [ver Eqs. (4.14) e (4.15)] devem obedecer o sistema de equações diferenciais

$$\dot{\gamma} - 2G \text{sen}(\varphi - \beta) = 0, \quad (4.25)$$

$$(\dot{\beta} - 2\omega) \text{sen} \gamma + 2G \cos \gamma \cos(\varphi - \beta) = 0. \quad (4.26)$$

De fato, das Eqs. (4.18)-(4.23) e da Eq. (4.24), temos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} I(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[R(t) \left(\sum_i \sigma_i^z + \sum_i \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_{i+1} \right) R^\dagger(t) \right] \\ &= \sum_i \left\{ -\dot{\gamma} [\text{sen} \gamma \sigma_i^z - \cos \gamma (e^{-i\beta} \sigma_i^+ + e^{i\beta} \sigma_i^-)] \right. \\ &\quad \left. + i\dot{\beta} \text{sen} \gamma (-e^{-i\beta} \sigma_i^+ + e^{i\beta} \sigma_i^-) \right\} \end{aligned} \quad (4.27)$$

e

$$\begin{aligned}
i [H(t), I(t)] &= i \sum_{i,j} \left[\vec{B}(t) \cdot \vec{\sigma}_i, R_j \sigma_j^z R_j^\dagger \right] \\
&= \sum_i \{ 2iG \cos \gamma (-e^{-i\varphi} \sigma_i^+ + e^{i\varphi} \sigma_i^-) + 2i\omega \sin \gamma (e^{-\beta} \sigma_i^+ - e^{i\beta} \sigma_i^-) \\
&\quad + 2G \sin \gamma \sin (\varphi - \beta) \sigma_i^z \}. \quad (4.28)
\end{aligned}$$

Logo, substituindo as Eqs. (4.27) e (4.28) na Eq. (4.1), verificamos que $I(t)$ é um operador invariante para uma cadeia de Heisenberg desde que as Eqs. (4.25) e (4.26) sejam obedecidas.

Com o operador invariante em mãos, podemos então mapear a solução do problema dependente no tempo em um problema independente do tempo. Nesse sentido, de modo similar ao Capítulo 3, consideremos os operadores

$$H_I = \sum_i \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_{i+1}, \quad (4.29)$$

$$S^z = \sum_i \sigma_i^z, \quad (4.30)$$

onde H_I é a Hamiltoniana de interação e S^z está relacionado ao operador de spin total na direção z , com $[H_I, S^z] = 0$. Definimos então a base simultânea de auto-estados $\{|\varphi_n\rangle\}$ de H_I e S^z através das equações de autovalores

$$H_I |\varphi_n\rangle = E_n |\varphi_n\rangle, \quad (4.31)$$

$$S^z |\varphi_n\rangle = M_n |\varphi_n\rangle. \quad (4.32)$$

Somando as Eqs. (4.31) e (4.32) e multiplicando ambos os lados por $R(t)$, obtemos a equação de autovalores para $I(t)$, a qual resulta em

$$I(t) (R(t)|\varphi_n\rangle) = (E_n + M_n) (R(t)|\varphi_n\rangle), \quad (4.33)$$

de modo que os autovalores de $I(t)$ são dados por $\lambda_n = E_n + M_n$ e seus autovetores são dados por

$$|\psi_n(t)\rangle = R(t)|\varphi_n\rangle. \quad (4.34)$$

Portanto, a solução do problema se reduz a diagonalizar os operadores independentes do tempo H_I e S^z . A solução da equação de Schrödinger pode então ser escrita como

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(0) e^{i[-\int_0^t \langle \psi_n | H | \psi_n \rangle dt' + i \int_0^t \langle \psi_n | \frac{\partial}{\partial t'} | \psi_n \rangle dt']} |\psi_n(t)\rangle. \quad (4.35)$$

Calculando explicitamente os termos da exponencial, obtemos

$$\langle \psi_n | H | \psi_n \rangle = JE_n + M_n (\omega \cos \gamma + G \text{sen} \gamma \cos \varphi \cos \beta + G \text{sen} \gamma \text{sen} \varphi \text{sen} \beta) \quad (4.36)$$

e

$$\langle \psi_n | \frac{\partial}{\partial t} | \psi_n \rangle = i \frac{(1 - \cos \gamma)}{2} \dot{\beta} M_n. \quad (4.37)$$

Substituindo as Eqs. (4.36) e (4.37) na Eq. (4.35), obtemos

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n e^{i\alpha_n(t)} |\psi_n(t)\rangle, \quad (4.38)$$

onde

$$\alpha_n(t) = -JE_n t - M_n \int_0^t dt' \left(\vec{K}_0(t') \cdot \vec{B}(t') \right) - M_n \int_0^t dt' \frac{(1 - \cos \gamma)}{2} \dot{\beta}, \quad (4.39)$$

com

$$\vec{K}_0(t) = \text{sen} \gamma(t) \cos \beta(t) \hat{i} + \text{sen} \gamma(t) \text{sen} \beta(t) \hat{j} + \cos \gamma(t) \hat{k}. \quad (4.40)$$

Observemos então que $\vec{K}_0(t)$ é um vetor unitário determinado pelo campo magnético. A constante $c_n(0)$ (a qual denotaremos simplesmente como c_n) é determinada pelas condições iniciais de modo que

$$c_n = \langle \psi_n(0) | \psi(0) \rangle = \langle \varphi_n | \psi(0) \rangle, \quad (4.41)$$

onde adotamos como condição inicial $\gamma(0) = 0$, a qual produz $R(0) = \mathbf{1}$. Assim, temos todas as ferramentas para encontrar a fase geométrica do sistema

de Heisenberg em um campo magnético dependente do tempo. Partindo da expressão geral da fase MS temos

$$\gamma_{MS}(\tau) = \text{Arg} [\langle \psi(0) | \psi(\tau) \rangle] + \int_0^\tau \langle \psi(t) | H(t) | \psi(t) \rangle dt. \quad (4.42)$$

A partir da Eq. (4.38), podemos calcular $\langle \psi(t) | H(t) | \psi(t) \rangle$, o qual é dado por

$$\begin{aligned} & \langle \psi(t) | H(t) | \psi(t) \rangle = \\ & \sum_{n,m} c_m^* c_n e^{-i(\alpha_m - \alpha_n)} \left[J \sum_i \langle \varphi_m | \vec{\sigma}_i \cdot \vec{\sigma}_{i+1} | \varphi_n \rangle + \vec{B}(t) \cdot \sum_i \langle \varphi_m | R_i^\dagger(t) \vec{\sigma}_i R_i(t) | \varphi_n \rangle \right]. \end{aligned} \quad (4.43)$$

O primeiro termo da equação acima é a energia associada a H_I . Usando as Eqs. (4.18), (4.19), (4.25) e (4.26), encontramos para o segundo termo que

$$\begin{aligned} & R^\dagger(t) \left[\vec{B}(t) \cdot \sum_i \vec{\sigma}_i \right] R(t) = \\ & \sum_i \sigma_i^z \vec{K}_0(t) \cdot \vec{B}(t) - \frac{1}{2} \sum_i \left[e^{-i\beta} (\dot{\beta} \sin \gamma + i\dot{\gamma}) \sigma_i^+ + e^{i\beta} (\dot{\beta} \sin \gamma - i\dot{\gamma}) \sigma_i^- \right]. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Logo, a fase MS para o sistema será dada por

$$\begin{aligned} \gamma_{MS} = & \Phi(\tau) + \sum_n |c_n|^2 \left[J E_n \tau + M_n \int_0^\tau \vec{K}_0(t) \cdot \vec{B}(t) dt \right] \\ & - \frac{1}{2} \int_0^\tau \sum_{n,m} c_m^* c_n e^{-i(\alpha_m - \alpha_n)} \left[e^{-i\beta} (\dot{\beta} \sin \gamma + i\dot{\gamma}) \sum_i \langle \varphi_m | \sigma_i^+ | \varphi_n \rangle \right] dt \\ & - \frac{1}{2} \int_0^\tau \sum_{n,m} c_m^* c_n e^{-i(\alpha_m - \alpha_n)} \left[e^{i\beta} (\dot{\beta} \sin \gamma - i\dot{\gamma}) \sum_i \langle \varphi_m | \sigma_i^- | \varphi_n \rangle \right] dt, \end{aligned} \quad (4.45)$$

com a fase total sendo

$$\begin{aligned} \Phi(\tau) &= \text{Arg} [\langle \psi(0) | \psi(\tau) \rangle] \\ &= \text{Arg} \left[\sum_n \langle \varphi_n | \psi(0) \rangle \langle \psi(0) | R(\tau) | \varphi_n \rangle e^{i\alpha_n(\tau)} \right]. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Em particular, para o caso especial onde o estado inicial $|\psi(0)\rangle$ possui magnetização M fixa, ou seja, tal que $|\psi(0)\rangle$ seja um autovetor de S^z , teremos que os termos $\langle\varphi_m|\sigma_i^\pm|\varphi_n\rangle$ na Eq. (4.45) se anularão. Assim, a fase MS se reduzirá a

$$\gamma_{MS} = \Phi(\tau) + \sum_n |c_n|^2 \left[JE_n\tau + M_n \int_0^\tau dt \vec{K}_0(t) \cdot \vec{B}(t) \right]. \quad (4.47)$$

Note que, para campos magnéticos independentes do tempo, com $\vec{B} = B\hat{k}$, temos de (4.12) que $G(t) = 0$. Assim, a Eq. (4.25) implicará em $\gamma(t) = 0$ para qualquer t , ou seja, $R(t) = \mathbb{1}$. Portanto, teremos $\vec{K}_0(t) = \hat{k}$ e, da Eq. (4.39), que $\alpha(t) = -(JE_n - M_n B)t$. Logo, as fases total e dinâmica (e consequentemente a fase geométrica) obtidas via formalismo dos invariantes recairão nas fases independentes do tempo obtidas no Capítulo 3.

4.3 Fase geométrica e emaranhamento para campo magnético dependente do tempo

Discutimos na seção anterior o invariante dinâmico e a fase geométrica para uma cadeia de Heisenberg de tamanho arbitrário N em um campo magnético dependente do tempo. Nesta seção faremos uma análise da relação entre a fase geométrica de interação e o emaranhamento para o problema dependente do tempo, tomando como ilustração uma cadeia com 2 spins. Consideraremos um estado inicial tal como dado na Eq. (3.21). Para um estado desse tipo, podemos calcular os termos $\langle\psi(0)|R(t)|\varphi_i\rangle$ necessários para a determinação de $\Phi(\tau)$ tal como dado na Eq. (4.46), obtendo

$$\begin{aligned} \langle\psi(0)|R(t)|\varphi_1\rangle &= a_1^*(0) \cos^2 \frac{\gamma(t)}{2} + a_4^*(0) \sin^2 \frac{\gamma(t)}{2} e^{2i\beta} \\ &+ (a_2^*(0) + a_3^*(0)) \sin \frac{\gamma(t)}{2} \cos \frac{\gamma(t)}{2} e^{i\beta}, \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} \langle \psi(0) | R(t) | \varphi_2 \rangle &= a_1^*(0) \operatorname{sen}^2 \frac{\gamma(t)}{2} e^{-2i\beta} + a_4^*(0) \cos^2 \frac{\gamma}{2} \\ &\quad - (a_2^*(0) + a_3^*(0)) \operatorname{sen} \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} e^{-i\beta}, \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} \langle \psi(0) | R(t) | \varphi_3 \rangle &= -\frac{1}{\sqrt{2}} a_1^*(0) \operatorname{sen} \gamma e^{-i\beta} + \frac{1}{\sqrt{2}} a_4^*(0) \operatorname{sen} \gamma e^{i\beta} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}} (a_2^*(0) + a_3^*(0)) \cos \gamma, \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\langle \psi(0) | R(t) | \varphi_4 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_2^*(0) - a_3^*(0)). \quad (4.51)$$

Tendo esses resultados em mãos e resolvendo o sistema de Eqs. (4.25) e (4.26), podemos obter a fase MS diretamente da Eq. (4.45). Considerando estados com magnetização fixa, podemos ainda simplificar o problema usando a Eq. (4.47) para obtermos a fase MS. Como um primeiro exemplo, tomemos o estado inicial $|\psi(0)\rangle = |++\rangle$, o qual possui magnetização $M = +2$. Para esse estado, obtemos que a fase MS de interação é nula (módulo 2π). Por outro lado, é interessante notar que o estado inicial $|\psi(0)\rangle = |++\rangle$ é separável durante toda sua evolução, ou seja, a interação de Heisenberg não induz emaranhamento para esse estado. Portanto, a fase de interação MS atua como um indicador da separabilidade do estado. Esse resultado também foi observado na Ref. [47]. Consideremos agora um exemplo de um estado que se torna emaranhado durante sua evolução. Tomamos então como estado inicial do sistema o vetor $|\psi(0)\rangle = |+-\rangle$, o qual possui magnetização fixa $M = 0$. Para esse estado, mostramos na Fig. 4.1 a fase MS de interação, a negatividade instantânea e a negatividade média, onde adotamos que o campo magnético precessiona em torno do eixo z , com $B(t) = 1$, $\theta(t) = \pi/4$ e $\varphi(t) = 2\pi t$, e usamos como condições iniciais $\gamma(0) = \beta(0) = 0$. Naturalmente, os resultados são independente da escolha das condições iniciais para $\gamma(t)$ e $\beta(t)$. Note que a fase geométrica de interação apresenta trechos contínuos seguidos por descontinuidades para intervalos regulares de tempo.

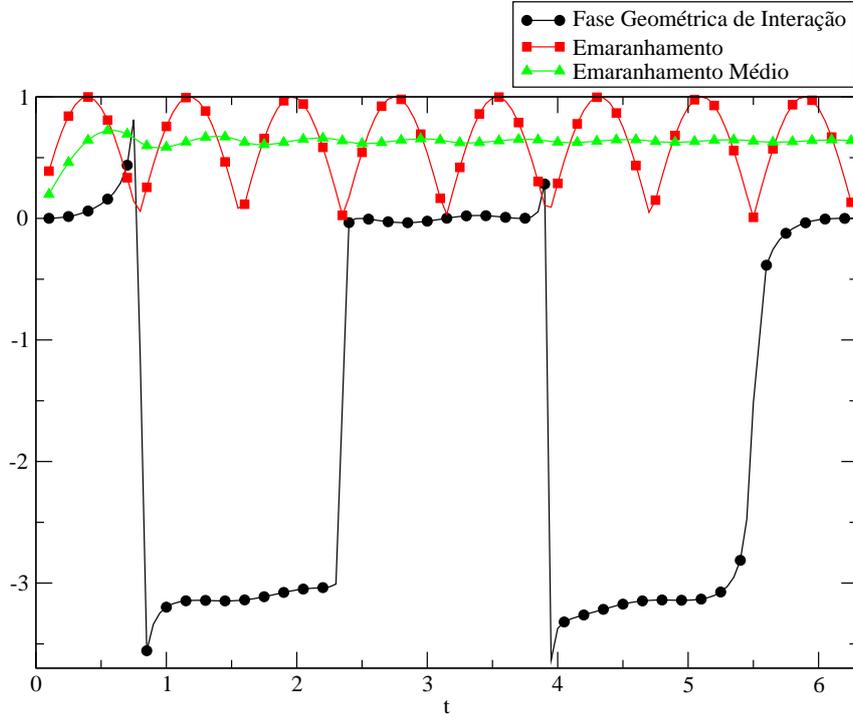


Figura 4.1: Fase geométrica de interação, negatividade e negatividade média para o estado inicial $|+-\rangle$, com $B(t) = 1$, $\theta(t) = \pi/4$, $\varphi(t) = 2\pi t$ e tomando como condições iniciais $\gamma(0) = \beta(0) = 0$. Adotamos o tempo em unidades tais que $\hbar = 1$ e $J = 1$.

Essa efeito está associado ao termo $\text{Arg}[\langle\psi(0)|\psi(t)\rangle]$ da fase MS. Quanto ao emaranhamento médio, podemos observar que ele tende para um valor constante, sendo portanto caracterizado pela fase de interação em cada trecho contínuo. A generalização desses resultados para cadeias maiores será deixada para uma análise posterior.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

Apresentamos nessa dissertação uma investigação sobre fases geométricas em cadeias quânticas de spins interagentes, tendo como foco suas relações com o emaranhamento do sistema. Em particular, analisamos as fases AA e MS para cadeias de Heisenberg em campos constantes e dependentes do tempo, obtendo como resultado um comportamento monotônico da fase geométrica de interação com o emaranhamento global médio adquirido pelo sistema ao longo de sua evolução no espaço de Hilbert. Apresentamos os resultados para campos constantes na Ref. [52]. Essa relação promove a fase geométrica de interação, a qual é obtida descontando da fase geométrica total a contribuição de spins livres, a um indicador do emaranhamento disponível no sistema, o que pode se constituir em uma ferramenta útil para tarefas quânticas que usem emaranhamento como recurso para sua realização.

Aplicações de fases geométricas no estudo de correlações entre as partes de um sistema quântico têm sido apontadas em vários trabalhos nos últimos anos. Para sistemas evoluindo sob *transformações locais*, tanto estados separáveis [45, 46] quanto estados emaranhados [30] têm mostrado reflexão de seu comportamento nas fases geométricas. Já para sistemas *interagentes*, nos

quais estados inicialmente separáveis podem evoluir para estados emaranhados e vice-versa, a relação geral entre fase geométrica e emaranhamento ainda se caracteriza como um problema com muitos aspectos em aberto. Quando a interação não é capaz de induzir emaranhamento, os resultados da Ref. [47] indicam a separabilidade do estado através da fase geométrica do sistema total, a qual se decompõe na soma das fases dos subsistemas. Esse resultado foi estabelecido Ref. [47] para o caso específico de dois spins acoplados via interação de Heisenberg. Nessa dissertação, realizamos o tratamento da situação de estados iniciais separáveis em que agora a interação tem a capacidade de induzir emaranhamento no sistema, mostrando que o emaranhamento global induzido está, para cadeias de Heisenberg, diretamente ligado com a fase de interação.

Como perspectivas, esperamos avançar mais no entendimento da caracterização da dinâmica de emaranhamento via fases geométricas. Nessa direção, esperamos considerar interações mais gerais que o acoplamento de Heisenberg, tais como, por exemplo, dadas pela presença de anisotropias nas direções de spin. Outra discussão importante a se entender é se outras medidas de emaranhamento multipartite distintas do emaranhamento global de Meyer e Wallach podem estar relacionadas de alguma maneira com as fases geométricas. Além disso, seria interessante também conseguir entender se estados *inicialmente* não-separáveis podem ter seu emaranhamento relacionado com o comportamento das fases geométricas adquiridas por eles durante sua evolução. Pretendemos que essas questões sejam tratadas como objetos de pesquisa em trabalhos futuros.

Referências Bibliográficas

- [1] M. V. Berry, Proc. R. Soc. London **392**, 45 (1984).
- [2] A. Shapere and F. Wilczek (Eds.), *Geometric Phases in Physics*, World Scientific, Singapore, 1989.
- [3] A. Bohm *et al.*, *The Geometric Phase in Quantum Systems*, Springer, Berlin, 2003.
- [4] Y. Aharonov, D. Bohm, Phys. Rev. **115**, 485 (1959).
- [5] K. v. Klitzing, G. Dorda, M. Pepper, Phys. Rev. Lett. **45**, 494 (1980).
- [6] P. Zanardi, M. Rasetti, Phys. Lett. A **264**, 94 (1999).
- [7] J. A. Jones *et al.*, Nature (London) **403**, 869 (2000).
- [8] O. Oreshkov, T. A. Brun, D. A. Lidar, Phys. Rev. Lett. **102**, 070502 (2009).
- [9] S. Pancharatnam, Proc. Indian Acad. Sci. A **44**, 247 (1956).
- [10] F. Wilczek, A. Zee, Phys. Rev. Lett. **52**, 2111 (1984).
- [11] Y. Aharonov, J. Anandan, Phys. Rev. Lett. **58**, 26 (1987).
- [12] J. Anandan, Phys. Lett. A **133**, 171 (1988).

- [13] J. Samuel, R. Bhandari, Phys. Rev. Lett. **60**, 2339 (1988).
- [14] N. Mukunda, R. Simon, Ann. Phys. (NY) **228**, 205 (1993).
- [15] J. C. Garrison, E. M. Wright, Phys. Lett. A **128**, 177 (1988).
- [16] K. M. F. Romero, A. C. A. Pinto, M. T. Thomaz, Physica A **307**, 142 (2002); A. C. A. Pinto, K. M. F. Romero, M. T. Thomaz, Physica A **311**, 169 (2002).
- [17] A. Carollo *et al.*, Phys. Rev. Lett. **90**, 160402 (2003).
- [18] M. S. Sarandy, D. A. Lidar, Phys. Rev. A **73**, 062101 (2006); M. S. Sarandy, E. I. Duzzioni, M. H. Y. Moussa, Phys. Rev. A **76**, 052112 (2007).
- [19] D. M. Tong, E. Sjöqvist, L. C. Kwek, C. H. Oh, M. Ericsson, Phys. Rev. A **68**, 022106 (2003).
- [20] X. X. Yi, L. C. Wang, T. Y. Zheng, Phys. Rev. Lett. **92**, 150406 (2004).
- [21] R. A. Bertlmann, K. Durstberger, Y. Hasegawa, B. C. Hiesmayr, Phys. Rev. A **69**, 032112 (2004).
- [22] X. X. Yi, H. T. Cui, Y. H. Lin, H. S. Song, Phys. Rev. A **71**, 022107 (2005).
- [23] H. T Cui, L. C Wang, X. X Yi, Europhys. Lett. **74**, 757 (2006).
- [24] B. Basu, Europhys. Lett. **73**, 833 (2006).
- [25] P. Milman, Phys. Rev. A **73**, 062118 (2006).
- [26] C. E. Souza, J. A. Huguenin, P. Milman, A. Z. Khoury, Phys. Rev. Lett. **99**, 160401 (2007).

- [27] M. S. Williamson, V. Vedral, Phys. Rev. A **76**, 032115 (2007).
- [28] C. W. Niu, G. F. Xu, L. Liu, L. Kang, D. M. Tong, L. C. Kwek, Phys. Rev. A **81**, 012116 (2010).
- [29] S. Sponar, J. Klepp, R. Loidl, S. Filipp, K. Durstberger-Rennhofer, R. A. Bertlmann, G. Badurek, H. Rauch, Y. Hasegawa, Phys. Rev. A **81**, 042113 (2010).
- [30] L. E. Oxman, A. Z. Khoury, e-print arXiv:1010.2094 (2010).
- [31] M. S. Williamson, V. Vedral, Phys. Rev. A **76**, 032115 (2007).
- [32] P. Ehrenfest, Ann. d. Phys. **51**, 327 (1916).
- [33] M. Born and V. Fock, Zeit. f. Physik **51**, 165 (1928).
- [34] K. Gottfried, T.-M. Yan, *Quantum Mechanics: Fundamentals* (Second Edition), Springer, New York, 2004.
- [35] M. S. Sarandy, L.-A. Wu, D. A. Lidar, Quantum Information Processing **3**, 331 (2004).
- [36] M. Spiegel, *Schaum's Outlines Vector Analysis (And An Introduction to Tensor Analysis)* (First Edition), McGraw-Hill, USA, 1968.
- [37] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, Phys. Rev. **47**, 777 (1935).
- [38] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, 2000.
- [39] R. F. Werner, Phys. Rev. A **40**, 4277 (1989).
- [40] G. Vidal, R. F. Werner, Phys. Rev. A **65**, 032314 (2002).

- [41] A. Peres, Phys. Rev. Lett. **77**, 1413 (1996).
- [42] M. Horodecki, P. Horodecki, R. Horodecki, Phys. Lett. A **223**, 1 (1996).
- [43] D. A. Meyer, N. R. Wallach, J. Math. Phys. **43**, 4273 (2002).
- [44] G. K. Brennen, Quant. Inform. Comput. **3**, 619 (2003).
- [45] D. M. Tong, E. Sjöqvist, L. C. Kwek, C. H. Oh, M. Ericsson, Phys. Rev. A **68**, 022106 (2003).
- [46] M. S. Williamson, V. Vedral, Phys. Rev. A **76**, 032115 (2007).
- [47] C. W. Niu, G. F. Xu, L. Liu, L. Kang, D. M. Tong, L. C. Kwek, Phys. Rev. A **81**, 012116 (2010).
- [48] H. R. Lewis, Phys. Rev. Lett. **18**, 510 (1967).
- [49] H. R. Lewis, W. B. Riesenfeld, J. Math. Phys. **10**, 1458 (1969).
- [50] M. S. Sarandy, E. I. Duzzioni, R. M. Serra, e-print arXiv:0801.4014v2 (2008).
- [51] F. Yan, L. Yang, B. Li, Phys. Lett. A **259**, 207 (1999).
- [52] C. S. Castro, M. S. Sarandy, e-print arXiv:1102.2415 (2011). Aceito para publicação em Phys. Rev. A.