



INSTITUTO DE FÍSICA
Universidade Federal Fluminense

Wanessa Sarzêdas Marques

Correlações Tripartites no Oscilador Paramétrico Óptico

Niterói

2011

Wanessa Sarzêdas Marques

Correlações Tripartites no Oscilador Paramétrico Óptico

Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Kaled Dechoum

Niterói

2011

“O universo não foi feito à medida do ser humano, mas
tampouco lhe é adverso: é-lhe indiferente.”

Carl Sagan

Agradecimentos

Uma dissertação de mestrado, ao contrário do que muitos possam pensar, não é construída somente com nossa própria dedicação, mas ela se faz com a ajuda de pessoas, as quais muitas vezes, sequer imaginam que desempenharam um papel fundamental para seu desenvolvimento. Seja diretamente, através dos conhecimentos compartilhados ou indiretamente, por proporcionarem apoio emocional e compreenderem os muitos momentos que não pude estar presente. Meus sinceros agradecimentos:

A Deus.

Aos meus amados pais, Maria de Fátima e Vagner, pelo lar sólido e acolhedor que me proporcionaram, por terem tornado tudo possível. Em especial gostaria de agradecer a minha mãe pela sua admirável fé com suas incansáveis orações pelo meu sucesso.

Ao meu, hoje, esposo Victor, que sempre conseguiu se fazer presente, mesmo distante. Por seu carinho e atenção dedicados, por ouvir as lamentações feitas nos momentos de improdutividade e, não menos importante, por aguentar os momentos de euforia acompanhados das tentativas de explicar-lhe mecânica quântica.

Ao meu orientador, professor Dr. Kaled Dechoum, a quem tenho profunda admiração, tanto por ser um grande pesquisador como também pelo grande mestre que é, sempre disposto a árdua tarefa de ensinar.

Aos que ingressaram na faculdade comigo e se tornaram grandes amigos; Ale (Alexandre Lima), por ser um exemplo de dedicação e disciplina, por toda ajuda com a parte computacional requerida neste trabalho; Rapha (Raphael Dias), pelo impressionante raciocínio lógico, sempre abordando questões pertinentes, as quais enriqueciam meu estudo, e por tornar meus dias mais divertidos com sua excelente habilidade de fazer piadas em qualquer situação; Day (Dayanne Fernandes), amiga desde o colegial, obrigada por todo apoio e amizade; Carol (Carolina Vannier) e Igor (Igor Tuche), pelas pessoas centradas e brilhantes que são, obrigada por tantas dúvidas esclarecidas.

Aos amigos do grupo de Óptica Quântica que ainda não mencionei, Cadu (Carlos Eduardo), Cleidson Castro, Daniel Brod. Aos amigos que tive o prazer de conhecer cursando as disciplinas

do mestrado, Marlon, Gabriela, Daiara, Ingrid, Vitor, Angelo, agradeço pelo ótimo ambiente de estudo que propiciaram. Quero agradecer também aos queridos, Diego Barbosa e Victor Monteiro, por todo carinho e atenção dedicadas.

Aos meus professores por todos os ensinamentos, em especial ; Antônio Zelaquett, Ernesto Galvão, Marco Moriconi e Daniel Jonathan pelo comprometimento com o ensino e clareza em suas explicações.

Agradeço também aos funcionários do Instituto de Física que desempenharam com competência suas atribuições, tanto o pessoal da limpeza quanto da coordenação, sempre prestativos.

Por fim devo agradecer a CAPES pelo apoio financeiro que possibilitou a elaboração deste trabalho.

resumo

Nesta dissertação analisamos as propriedades das correlações de três modos do campo eletromagnético acoplados em um oscilador paramétrico óptico não degenerado. Nosso tratamento utiliza expansão perturbativa das equações de Itô derivada da representação P positiva da matriz densidade. Propomos um novo critério de separabilidade para três modos descritos por variáveis contínuas, uma vez que os critérios disponíveis são insensíveis a estes tipos de correlações, e concluímos que os tres modos acoplados no oscilador paramétrico óptico operando abaixo do limiar de oscilação são totalmente inseparáveis.

abstract

We analyze the three modes correlations properties of the electromagnetic field in a nondegenerate optical parametric oscillator. Our treatment utilize perturbative expansion of the Itô equations derived from the positive P representation of the density matrix. We propose a new criterion of separability for three modes described by continuous variables, since the available criteria are insensitive to this kind of correlations, and we conclude that the three coupled modes in the optical parametric oscillator operating below the oscillation threshold are totally inseparable.

Sumário

1	Introdução	4
2	Bases Físicas e Matemáticas para esta dissertação	8
2.1	Quantização do Campo Eletromagnético	8
2.1.1	Hamiltoniana do Campo Livre	9
2.1.2	Quantização do Campo	12
2.1.3	Quadraturas do Campo	13
2.2	Estados de Fock	14
2.3	Estados Coerentes	16
2.4	Estados Comprimidos	18
3	Mecânica Quântica em Sistemas Abertos	20
3.1	A Matriz Densidade	20
3.2	A Dinâmica do Operador Densidade	22
3.3	A Equação Mestra	24
3.4	A Equação de Fokker-Planck	29
3.5	Representações da Matriz Densidade	30
3.5.1	Representação P de Glauber-Sudarshan	30
3.5.2	Representação P Positiva.	32
4	Emaranhamento	34
4.1	Estados Embaranhados	36

4.2	Critérios de Separabilidade	37
4.2.1	Soma de Variâncias Bipartites	38
4.2.2	Soma de Variâncias Tripartites	40
5	O Oscilador Paramétrico Óptico	45
5.1	Óptica Não Linear	46
5.1.1	Equação de onda em um meio não linear	48
5.1.2	Equações de onda acopladas, CPD estimulada	49
5.2	Formalismo Clássico para o OPO	53
5.3	Formalismo Quântico para o OPO	58
6	Correlações Tripartites no OPOND	64
6.1	Soluções Analíticas	64
6.2	Correlações Tripartites	69
6.3	Emaranhamento Tripartite	73
6.3.1	Aplicação da Soma de Variâncias Tripartites	74
6.4	Desigualdade de Schwarz	78
6.4.1	Medida das Quadraturas Generalizadas	83
7	Conclusões	86
	Bibliografia	87

Lista de Figuras

5.1	Oscilador Parmétrico Óptico	45
5.2	Intensidade do feixe convertido no OPO em função do desacordo de fase.	52
5.3	Oscilador Parmétrico Óptico em forma de anel.	53
6.1	Correlação entre as intensidades dos feixes sinal, complementar e bombeamento, $\langle X_1 X_2 \Delta X_0 \rangle$ pelo tempo adimensional em unidades de $1/\gamma$. A linha ruidosa em preto representa a simulação numérica para os parâmetros $\gamma_0 = 0, 1$, $\gamma = 10$, $\varepsilon = 70$ e $\chi = 0, 1$, e a linha horizontal em vermelho representa o cálculo analítico.	73
6.2	Desigualdade de Schwarz satisfeita para os parâmetros $\gamma_r = 0, 01$, $\mu = 0, 7$, $g = 7, 1 \cdot 10^{-3}$. O ruído em vermelho representada o produto das intensidades dos modos(lado esquerdo da desigualdade) e o ruído em azul a soma das correlações tripartites (lado direito da desigualdade).	80
6.3	Violação da Desigualdade de Schwarz para os parâmetros $\gamma_r = 1$, $\mu = 0, 7$, $g = 7, 1 \cdot 10^{-3}$. A parte ruidosa superior representa o lado direito da equação, e a inferior o lado esquerdo.	81
6.4	Violação da Desigualdade de Schwarz para os parâmetros $\gamma_r = 100$, $\mu = 0, 7$, $g = 7, 1 \cdot 10^{-3}$. A parte ruidosa superior representa o lado direito da equação, e a inferior o lado esquerdo.	82
6.5	Violação da desigualdade de Schwarz para $0 < \mu < 0, 5$ e as taxas de decaimento para o bombeamento e os feixes sinal e complementar iguais a $\gamma_0 = 100$ e $\gamma = 0, 01$ respectivamente. A linha superior repretnta a soma das correlações entre os subsistemas e a linha inferior representa a multiplicação de suas intensidades.	83

Capítulo 1

Introdução

Em 1935 Einstein Podolsky e Rosen (EPR) apresentaram um problema que levantaria dúvida sobre a validade da Mecânica Quântica [1] questionando um de seus pilares, o Princípio de Incerteza de Heisenberg. Porém tal questionamento direcionou os olhos da comunidade científica para um dos aspectos mais intrigantes desta teoria, o que denominamos hoje de emaranhamento, uma correlação entre variáveis conjugadas de um sistema mais forte que qualquer correlação clássica possível, onde a informação contida no sistema global é maior do que a soma da informação contida em suas partes, um fenômeno surpreendente que tem sido amplamente explorado para o desenvolvimento conceitual de protocolos de informação quântica [2], às vezes implementados em laboratórios, ou mesmo para fins comerciais como ocorreu com a criptografia quântica [3].

Estados emaranhados constituídos de duas partes, ou bipartites, é o ponto de partida como o sistema mais simples para correlações quânticas capazes de produzir tais protocolos. Inicialmente o emaranhamento bipartite era produzido em observáveis de espectro discreto, como por exemplo, momento angular de spin, isto por causa da dificuldade em projetar um experimento real nas variáveis originais propostas por EPR, onde os autores idealizaram um estado contendo duas partículas emaranhadas em posição e momento. A solução para este problema surgiu concomitantemente a investigação das propriedades quânticas da luz, onde a quantização do campo eletromagnético descrito por quantidades mensuráveis, apresentada no capítulo 2, trouxe o surgimento das quadraturas de fase e amplitude, operadores que possuem a mesma forma dos operadores de posição e momento do oscilador harmônico quântico.

Uma eficiente maneira de produzir estes estados emaranhados em quadraturas é através do processo de Conversão Paramétrica Descendente, oriundo da interação de um feixe de laser com um cristal não linear, cortado adequadamente e posicionado no interior de uma cavidade formada por espelhos. Este aparato recebe o nome de Oscilador Paramétrico Ótico justamente por ter sua oscilação dentro da faixa das frequências óticas, quando o sistema está operando acima de um limiar, pois abaixo deste não há oscilação apesar do processo continuar ocorrendo, porém agora não mais com a produção de dois feixes com a soma de suas frequências dada pela frequência do feixe de laser e sim pela geração de fótons evidenciados pelos espaçados "clicks" nos detectores, o estudaremos em mais detalhes no capítulo 4 desta dissertação.

A produção de emaranhamento bipartite pelo OPO para seus modos convertidos, ditos sinal e complementar, já foi prevista e constatada experimentalmente para seus dois regimes de operação, acima [6] e abaixo [5] do limiar, através da violação de uma desigualdade constituída pela soma das variâncias de operadores tipo EPR, proposta por Duan *et al* [7].

No entanto, para desenvolver protocolos mais sofisticados, é necessário o uso de estados emaranhados de muitas partes. A dificuldade seguinte é tentar encontrar fontes de emaranhamento de muitas partes. A primeira idéia neste sentido, veio dos autores Greenberger, Horne, e Zeilinger (GHZ) sugerindo o estado GHZ [8], utilizando variáveis discretas (variáveis de spin) mostrando um emaranhamento tripartite com base em medições de produto de três variáveis, mas na verdade muito difícil de implementar. Porém, a implementação dessa idéia usando variáveis contínuas, com graus de liberdade dos modos de campo, parece bastante viável desde que já bem conhecidas as técnicas de homodinagem. Hoje existem alguns dispositivos que podem gerar estados emaranhados multipartidos de uma forma relativamente fácil e, em particular o OPO tem sido amplamente explorado nesta tarefa ao incluirmos as correlações geradas pelo feixe de bombeamento.

A interação não linear entre os modos no interior da cavidade do OPO sugere a possibilidade de ter um emaranhamento entre os três modos e também a possibilidade de controlar as correlações bipartites entre sinal e complementar manipulando um terceiro modo, o modo de bombeamento. As correlações quânticas entre as partes devem mudar em função das estatísticas, do perfil espacial e de outras características passíveis de controle do modo de bombeamento,

como foi observado em muitas experiências baseadas em conversão paramétrica descendente.

Na verdade, o emaranhamento dos modos de bombeamento, sinal e complementar foi previsto no regime intenso, acima do limite de oscilação do OPO, e experimentalmente gerados [9]-[11]. As correlações tripartite foram analisadas de acordo com os critérios de P. van Loock e A. Furusawa [12], estendidos do critério bipartite, com base na correlação de cada duas partes (quadraturas) entre os três modos. Além disso, existem outros experimentos que geram estados emaranhados tripartites de variáveis contínuas obtidos pela mistura de estados de vácuo comprimido através da utilização de elementos de óptica linear [13].

No entanto, pouca atenção tem sido dada para as correlações tripartites no OPO operando abaixo do limiar de oscilação [14], mas foi nesses estudos de tripla coincidência entre as quadraturas que foram propostas medidas no sentido de comparar correlações clássica e quântica. A dificuldade experimental reside no fato de que é necessário a homodinagem de três quadraturas e detectá-las em coincidência. Essa dificuldade é superada quando o OPO opera acima do limiar, pois existe uma técnica inteligente de auto-homodinação que não tem a necessidade de utilizar o bombeamento como referência [4]. É importante notar que foi no regime abaixo do limiar onde o vácuo comprimido foi revelado, e onde as variáveis EPR foram primeiramente detectadas.

Nesta dissertação analisaremos as correlações triplas entre os modos bombeio, sinal e complementar para o OPO operando abaixo do limiar. Nós a estruturamos da seguinte maneira:

No capítulo 2 apresentaremos os conceitos básicos que constituem a base física e matemática desta dissertação.

No capítulo 3 abordaremos os métodos matemáticos necessários para tratar problemas de mecânica quântica em sistemas abertos.

No capítulo 4 definiremos emaranhamento e apresentaremos os critérios de separabilidade para sistemas bipartites proposto por Duan *et al* e estendido para sistemas tripartites por P. van Loock e A. Furusawa.

No capítulo 5 iremos descrever detalhadamente um sistema aberto em particular, gerador de emaranhamento, o já mencionado Oscilador Paramétrico Ótico, onde faremos seu tratamento clássico e quântico.

No capítulo 6 nós calculamos, usando uma abordagem perturbativa, todos os resultados de

medições em coincidência tripla, a fim de verificar se as correlações entre os componentes dos três modos do campo estão associados à presença de emaranhamento. Nós mostramos que, neste caso, os critérios de van Loock-Furusawa falham na detecção de tal emaranhamento, e devido a este fato inconclusivo e a falta de um critério para este caso, mostramos que algumas correlações violam desigualdades tripartite de Cauchy-Schwarz, esperando que a matriz densidade do sistema seja fatorável, revelando assim a natureza de emaranhamento dos três modos do campo eletromagnético.

Por fim no capítulo 7 faremos uma breve conclusão.

Capítulo 2

Bases Físicas e Matemáticas para esta dissertação

A quantização do campo eletromagnético fez-se necessária para a compreensão de efeitos não clássicos da luz advindos de sua interação com a matéria, tendo seu marcante início com o efeito fotoelétrico explicado satisfatoriamente em 1905 pelo físico alemão Albert Einstein e rendendo-lhe, posteriormente, o prêmio Nobel em Física.

Esta nova forma de enxergar a luz, juntamente com a descoberta do laser, possibilitou o surgimento de uma nova área da física, a Óptica Quântica.

Apresentaremos neste capítulo introdutório, a quantização do campo eletromagnético e alguns estados do campo: os estados de Fock, gerados pelo operador número; os estados coerentes, gaussianas provenientes de deslocamentos efetuados no estado fundamental do oscilador harmônico e; os estados comprimidos que apresentam, para alguma de suas variáveis conjugadas, um valor inferior ao limite quântico a custo de uma aumento na variância da outra variável.

2.1 Quantização do Campo Eletromagnético

A forma como será apresentada a quantização dos campos foi desenvolvida inicialmente por Fermi [19] e Dirac [20]. Primeiramente encontraremos a dinâmica para os campos elétrico e magnético através das equações de Maxwell com o auxílio de um artifício matemático, o potencial

vetor, permitindo-nos assim escrever o hamiltoniano do campo livre, o qual terá sua quantização efetuada pela substituição de variáveis canônicas por operadores hermiteanos. Obteremos como resultado uma superposição de osciladores harmônicos independentes, cada qual representando um dos contínuos modos de oscilação dos campos.

2.1.1 Hamiltoniana do Campo Livre

O primeiro passo para quantizar o campo eletromagnético é encontrar o seu hamiltoniano. Sabemos que a energia para este é no sistema MKS descrita por:

$$H = \frac{1}{2} \int_V \left[\epsilon_0 \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) + \frac{\mathbf{B}^2(\mathbf{r}, t)}{\mu_0} \right] dv \quad , \quad (2.1)$$

com os campos elétrico \mathbf{E} e magnético \mathbf{B} , dados pelas equações de Maxwell que no espaço vazio, ou seja, no vácuo e na ausência de fontes, possuem as formas,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (2.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.5)$$

Tomando o rotacional de (2.2) e substituindo (2.3), nós obtemos $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -c^{-2} \partial^2 \mathbf{E} / (\partial t)^2$. Usando a identidade matemática $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}$ e considerando (2.4), encontramos a equação de onda para o campo elétrico:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.6)$$

Utilizando passos análogos podemos obter a equação de onda para o campo magnético.

Torna-se conveniente definirmos os campos em função do potencial vetor \mathbf{A} . Para isto nós usaremos o calibre de Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad , \quad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \quad (2.7)$$

Assim, temos a equação de onda para o potencial vetor,

$$\nabla^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}. \quad (2.8)$$

A fim de encontrarmos as soluções para os campos \vec{E} e \vec{B} expandiremos o potencial vetor em uma soma de ondas planas monocromáticas. Para satisfazer as condições periódicas existentes, consideramos o campo confinado num cubo de aresta L .

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 L^3}} \sum_k \mathbf{A}_{\mathbf{k},s} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}s}, \quad (2.9)$$

com as componentes do vetor de onda \mathbf{k} assumindo valores discretos $k_j = 2\pi n_j/L$ para n_j inteiro e $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}s}$ um vetor unitário de polarização. Sendo $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ conseqüentemente $\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{e}} = 0$ então temos que para um determinado valor de \mathbf{k} teremos dois possíveis versores $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}s}$,

$$\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}s} \cdot \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}s'} = \delta_{s,s'} \quad . \quad (2.10)$$

A definição dos versores $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{k}s}$ como versores complexos permite considerar ondas com polarização circular e linear.

Substituindo a expansão de \mathbf{A} na sua equação de onda e assegurando que $\mathbf{A}_{\mathbf{k}s} = \mathbf{A}_{\mathbf{k}s}^*$ para que o potencial vetor seja real obtemos a solução para as amplitudes:

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k},s}(t) = \mathbf{c}_{\mathbf{k},s} e^{-i\omega_k t} + \mathbf{c}_{-\mathbf{k},s}^* e^{i\omega_k t}. \quad (2.11)$$

Desta forma, o potencial vetor pode ser escrito como,

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 L^3}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s c_{\mathbf{k}s} \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}s} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)} + [c_{-\mathbf{k}s} \hat{\epsilon}_{-\mathbf{k}s} e^{i(-\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega_k t)}]^* \\
&= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 L^3}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s [u_{\mathbf{k},s}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}s} + c.c.] \tag{2.12}
\end{aligned}$$

com $u_{\mathbf{k}s}(t) = c_{\mathbf{k}s} e^{-i\omega_k t}$ e c.c. o complexo conjugado da função anterior.

Substituindo diretamente em (2.7) encontramos as expressões para os campos elétrico e magnético:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 L^3}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s i\omega_k [u_{\mathbf{k}s}(t) \epsilon_{\mathbf{k}s} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} - u(t)_{\mathbf{k}s}^* \epsilon_{\mathbf{k}s}^* e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}], \tag{2.13}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 L^3}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s [u_{\mathbf{k}s}(t) (\mathbf{k} \times \epsilon_{\mathbf{k}s}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} - u(t)_{\mathbf{k}s}^* (\mathbf{k} \times \epsilon_{\mathbf{k}s}^*) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}]. \tag{2.14}$$

Em posse dessas equações podemos finalmente obter o hamiltoniano,

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s \omega_k^2 |u_{\mathbf{k}s}(t)|^2. \tag{2.15}$$

O expresseramos através de uma par de variáveis canônicas,

$$\begin{aligned}
q_{\mathbf{k}s}(t) &= u_{\mathbf{k}s}(t) + u_{\mathbf{k}s}^*(t), \\
p_{\mathbf{k}s}(t) &= -i\omega_k [u_{\mathbf{k}s}(t) - u_{\mathbf{k}s}^*(t)],
\end{aligned} \tag{2.16}$$

obtendo,

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s [p_{\mathbf{k}s}^2(t) + \omega_k^2 q_{\mathbf{k}s}^2(t)]. \tag{2.17}$$

Como podemos ver o hamiltoniano do campo livre é constituído por um somatório de osciladores harmônicos independentes, cada um correspondente a um modo \mathbf{k}, s do campo.

Até este momento usamos apenas mecânica clássica para descrever a energia do sistema, a quantização deste será realizada no próximo tópico.

2.1.2 Quantização do Campo

Para quantizar o campo substituiremos as variáveis canônicas \mathbf{q} e \mathbf{p} por operadores $\hat{\mathbf{q}}$ e $\hat{\mathbf{p}}$ que satisfazem as relações de comutação:

$$\begin{aligned} [\hat{q}_{\mathbf{k}s}(t), \hat{p}_{\mathbf{k}'s'}(t)] &= i\hbar\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^3\delta_{ss'}, \\ [\hat{q}_{\mathbf{k}s}(t), \hat{q}_{\mathbf{k}'s'}(t)] &= 0, \\ [\hat{p}_{\mathbf{k}s}(t), \hat{p}_{\mathbf{k}'s'}(t)] &= 0, \end{aligned} \quad (2.18)$$

desta forma,

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s [\hat{p}_{\mathbf{k}s}^2(t) + \omega_k^2 \hat{q}_{\mathbf{k}s}^2(t)]. \quad (2.19)$$

Por praticidade escolheremos trabalhar com os operadores de criação e aniquilação \hat{a}^\dagger e \hat{a} em vez dos operadores \hat{q} e \hat{p} ,

$$\begin{aligned} \hat{q}_{\mathbf{k}s}(t) &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_k}} [\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t) + \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger(t)], \\ \hat{p}_{\mathbf{k}s}(t) &= i\sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2}} [\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t) - \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger(t)], \end{aligned} \quad (2.20)$$

note que estes novos operadores não são hermitianos e possuem as relações de comutação

$$\begin{aligned} [\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t), \hat{a}_{\mathbf{k}'s'}^\dagger(t)] &= \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^3\delta_{ss'}, \\ [\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t), \hat{a}_{\mathbf{k}'s'}^\dagger(t)] &= 0, \\ [\hat{a}_{\mathbf{k}s}(t), \hat{a}_{\mathbf{k}'s'}^\dagger(t)] &= 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Comparando (2.16) com (2.20) vemos que os operadores de criação \hat{a}^\dagger e aniquilação \hat{a} , também denominados operadores escada, correspondem as amplitudes complexas $u^*(t)$ e $u(t)$, apresentando a mesma dependência temporal,

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger(t) &= \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger e^{i\omega_k t}, \\ \hat{a}_{\mathbf{k}s}(t) &= \hat{a}_{\mathbf{k}s} e^{-i\omega_k t}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Em função destes operadores temos o hamiltoniano,

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} \sum_s \hbar\omega_k \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right); \quad (2.23)$$

com o primeiro termo correspondente a energia total de um modo com frequência $\omega_{\mathbf{k}}$ e o segundo, à energia do vácuo associada a ele, também dita flutuação de ponto zero.

As expressões para os campos elétrico e magnético são obtidas pela substituição dos operadores escadas nas amplitudes complexas em (2.13) e (2.14),

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 L^3}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s i \left[\hat{a}_{\mathbf{k}s} \epsilon_{\mathbf{k}s} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} - \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger \epsilon_{\mathbf{k}s}^* e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \right], \quad (2.24)$$

$$\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega\epsilon_0 L^3}} \sum_{\mathbf{k}} \sum_s i \left[\hat{a}_{\mathbf{k}s} (\mathbf{k} \times \epsilon_{\mathbf{k}s}) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} - \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger (\mathbf{k} \times \epsilon_{\mathbf{k}s}^*) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \right].$$

Finalmente, encontramos as expressões que descrevem o campo quantizado, mas pelo fato dos operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger não serem hermiteanos, por isso não denotarem observáveis físicos, é conveniente definir novas quantidades, mensuráveis, as quais são denominadas quadraturas, para representarem os campos.

2.1.3 Quadraturas do Campo

Definimos um operador generalizado de quadratura como a combinação dos campos de criação e aniquilação:

$$\hat{X}(\theta) = \hat{a}^\dagger e^{i\theta} + \hat{a} e^{-i\theta} \quad (2.25)$$

onde assumimos arbitrariedade na fase do campo incidente. Dois casos simples que iremos utilizar nesta dissertação são: $\theta = 0$ e $\theta = \pi/2$

$$\begin{aligned} \hat{X} &= \hat{X}(0) = \hat{a}^\dagger + \hat{a} \\ \hat{Y} &= \hat{X}\left(\frac{\pi}{2}\right) = i(\hat{a}^\dagger - \hat{a}). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Estes operadores são equivalentes aos operadores de posição e momento do oscilador harmônico quântico, com

$$[\hat{X}, \hat{Y}] = 2i, \quad (2.27)$$

e as variâncias destas quadraturas para qualquer estado, devem satisfazer a relação de incerteza,

$$\langle \Delta \hat{X}^2 \rangle \langle \Delta \hat{Y}^2 \rangle \geq 1. \quad (2.28)$$

Dois exemplos onde o mínimo de incerteza é estabelecido são para os estados coerentes e comprimidos, os quais veremos adiante. Já para luz térmica o produto das incertezas sempre traz um resultado maior que 1.

2.2 Estados de Fock

Os estados de Fock são formados pelos autoestados do operador número que, para um dado modo \mathbf{k}, s do campo é descrito por

$$\hat{n}_{\mathbf{k}s} = \hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}s}. \quad (2.29)$$

Os autoestados deste operador formam uma base comum ao operador hamiltoniano do campo livre,

$$\hat{n}_{\mathbf{k}s} |n_{\mathbf{k}s}\rangle = n_{\mathbf{k}s} |n_{\mathbf{k}s}\rangle, \quad (2.30)$$

e seus autovalores $n_{\mathbf{k}s}$ correspondem ao número de fótons contidos em cada modo e fornecem a energia deste,

$$E_{\mathbf{k}s} = \hbar\omega \left(n_{\mathbf{k}s} + \frac{1}{2} \right). \quad (2.31)$$

Pode-se descrever a atuação dos operadores de criação e aniquilação usando a relação de comutação destes com o operador número,

$$\hat{a}_{\mathbf{k}s} |n_{\mathbf{k}s}\rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k}s}} |n_{\mathbf{k}s} - 1\rangle, \quad (2.32)$$

$$\hat{a}_{\mathbf{k}s}^\dagger |n_{\mathbf{k}s}\rangle = \sqrt{n_{\mathbf{k}s} + 1} |n_{\mathbf{k}s} + 1\rangle,$$

$$\hat{a}|0\rangle = 0. \quad (2.33)$$

demonstrando que \hat{a}^\dagger introduz um fóton no estado \mathbf{k}_s e $\hat{a}_{\mathbf{k}_s}$ destrói um fóton neste estado, sendo $n_{\mathbf{k}_s}$ inteiro, sua atuação no estado de vácuo $|0\rangle$, onde não existem fótons, tem resultado nulo. Uma importante consequência disto é que a energia associada a este estado, como podemos ver através de (2.31), não é nula, e sim

$$\langle 0|\hat{H}|0\rangle = \frac{1}{2}\hbar\omega. \quad (2.34)$$

Esta energia se manifesta como flutuações do campo na ausência de fótons. Podemos ainda representar qualquer estado de número por sucessivas aplicações do operador de criação no estado de vácuo

$$|n_{\mathbf{k}_s}\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^{n_{\mathbf{k}_s}}}{\sqrt{n_{\mathbf{k}_s}!}}|0\rangle. \quad (2.35)$$

Por fim, os estados de Fock são formados pelo produto dos estados de número,

$$|n\rangle = \prod_{\mathbf{k}_s} |n_{\mathbf{k}_s}\rangle, \quad (2.36)$$

ou, em função do estado fundamental,

$$|n\rangle = \prod_{\mathbf{k}_s} \frac{(\hat{a}^\dagger)^{n_{\mathbf{k}_s}}}{\sqrt{n_{\mathbf{k}_s}!}}|0\rangle. \quad (2.37)$$

Estes estados formam uma base completa e ortonormal,

$$\begin{aligned} \sum_{n_{\mathbf{k}_s}} |n_{\mathbf{k}_s}\rangle \langle n_{\mathbf{k}_s}| &= 1 \Rightarrow \sum_n |n\rangle \langle n| = 1, \\ \langle n_{\mathbf{k}_s}|m_{\mathbf{k}_s}\rangle &= \delta_{n_{\mathbf{k}_s},m_{\mathbf{k}_s}} \Rightarrow \langle n|m\rangle = \prod \delta_{n_{\mathbf{k}_s},m_{\mathbf{k}_s}}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Os estados de Fock porém não são a forma mais adequada para representar o campo eletromagnético, isso porque nestes estados o número de fótons é uma grandeza bem determinada

$$\langle \Delta^2 \hat{n} \rangle = \langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2 = \langle n | (\hat{a}^\dagger \hat{a})^2 | n \rangle - \langle n | \hat{a}^\dagger \hat{a} | n \rangle^2 = n^2 - n^2 = 0, \quad (2.39)$$

consequentemente sua intensidade, que corresponde a uma de nossas quadraturas de interesse, possui variância nula, para que não seja violado o princípio de incerteza é então necessária uma

variância infinita, ou seja, completamente indeterminada, na quadratura conjugada, a quadratura de fase.

Um estado mais adequado para a representação do campo habitualmente gerado em laboratório são os estados coerentes que serão estudados na próxima seção.

2.3 Estados Coerentes

Os estados coerentes são formados pelos autoestados do operador de aniquilação ao invés dos autoestados do hamiltoniano, eles formam uma base contínua de autovetores com um contínuo de autovalores. Para vermos algumas propriedades de estados coerentes analisaremos aqui o caso monomodo, abandonando os índices \mathbf{k} s. Temos então a seguinte equação de autovalor,

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (2.40)$$

sendo α um número complexo, já que \hat{a} não é hermitiano.

Características importantes são encontradas quando decompos estes vetores na base de Fock,

$$|\alpha\rangle = \sum_n \langle n|\alpha\rangle |n\rangle \quad (2.41)$$

por aplicar o ket $\langle n|$ na equação (2.40) e usar as relações (2.32),

$$\sqrt{n+1}\langle n+1|\alpha\rangle = \alpha\langle n|\alpha\rangle \quad (2.42)$$

encontramos,

$$\langle n|\alpha\rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle 0|\alpha\rangle \quad (2.43)$$

onde, impondo a normalização do estado α , tal que $\langle 0|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}$ obtemos,

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \quad (2.44)$$

Mostrando que, se um sistema encontra-se em um estado coerente, o número de fótons contidos nele não é uma grandeza completamente definida, permitindo-nos precisar dentro de sua inerente incerteza, a fase do campo.

A probabilidade de se medir n fótons neste estado é dada por uma distribuição poissoniana,

$$p(n) = |\langle n|\alpha\rangle|^2 \Rightarrow p(n) = e^{-|\alpha|^2} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}. \quad (2.45)$$

E o valor esperado para o número de fótons,

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} np(n) = |\alpha|^2, \quad (2.46)$$

ou, utilizando a notação de Dirac,

$$\langle \alpha|n|\alpha\rangle = \langle \alpha|\hat{a}^\dagger \hat{a}|\alpha\rangle = \alpha^* \alpha \langle \alpha|\alpha\rangle = |\alpha|^2, \quad (2.47)$$

que por sua vez é igual a sua variância, $\langle \Delta^2 \hat{n} \rangle = \langle n \rangle$.

O Operador Deslocamento

A série de estados coerentes também pode ser obtida ao aplicar o operador deslocamento,

$$D(\alpha) \equiv e^{(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a})}, \quad (2.48)$$

no estado fundamental do oscilador harmônico,

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle. \quad (2.49)$$

Ele satisfaz as seguinte propriedades,

$$\begin{aligned} D^\dagger(\alpha) \hat{a}^n D(\alpha) &= (\hat{a} + \alpha)^n, \\ D^\dagger(\alpha) [\hat{a}^\dagger]^n D(\alpha) &= (\hat{a}^\dagger + \alpha^*)^n. \\ D^\dagger(\alpha) D(\alpha) &= 1. \end{aligned} \quad (2.50)$$

A última propriedade nos diz que este operador é unitário.

Um melhor entendimento sobre este operador é obtido quando representamos seu expoente em termos dos operadores de coordenadas e momentos, onde é visto que ele provoca um deslocamento no espaço de fase em qualquer sistema, e não apenas no caso específico do oscilador harmônico, mas aqui não entraremos nesta questão, para os interessados recomendo a referência [27].

Estados coerentes como uma base

Os estados coerentes formam uma base completa:

$$\frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle\langle\alpha| d^2\alpha = 1. \quad (2.51)$$

Porém, ainda que possamos representar qualquer estado do campo através dela, ela não é uma base ortogonal:

$$\langle\alpha|\alpha'\rangle = e^{(-\frac{1}{2}|\alpha|^2 + \alpha^*\alpha' - \frac{1}{2}|\alpha'|^2)}, \quad (2.52)$$

a denominamos base super completa. No entanto sua não ortogonalidade é pequena, e para grandes valores de α a exponencial em questão tende a uma delta, $\delta^2(\alpha - \alpha')$.

Relações de incerteza de um estado coerente

Os estados coerentes são os estados quânticos que mais se aproximam da descrição clássica do oscilador harmônico. As variâncias das quadraturas para qualquer um destes estados, inclusive o estado de vácuo, podem ser calculada através das equações (2.48), (2.49) e (2.50), sendo iguais a,

$$\langle\Delta^2\hat{X}\rangle = \langle\Delta^2\hat{Y}\rangle = 1. \quad (2.53)$$

Atingindo desta forma o limite imposto pelo princípio de incerteza de Heisenberg.

2.4 Estados Comprimidos

Os estados comprimidos, ou do inglês *squeezing states*, são estados que possuem uma variância em uma de suas quadraturas menor do que a variância do estado de vácuo, ou seja, menor que 1. É importante perceber que, é o produto entre as incertezas que precisa respeitar tal limite, não impedindo que a variância em uma das quadraturas seja menor que 1, desde que a variância na outra seja grande o suficiente a fim de tornar o produto entre elas maior ou igual a um, respeitando desta maneira o princípio de incerteza de Heisenberg.

Quando isto acontece, dizemos que uma quadratura sofreu uma compressão, enquanto a outra sofreu um alargamento. O ruído em uma das quadraturas foi diminuído ao custo do aumento do ruído na outra.

Os estados comprimidos são gerados pela atuação do operador de *squeezing* S ,

$$S(\xi) = e^{\frac{1}{2}(\xi^* a^2 - \xi a^{\dagger 2})} \quad (2.54)$$

em um estado coerente.

Estes estados são produzidos por vários processos óticos não lineares, como por exemplo o oscilador paramétrico ótico, que será estudado nos próximos capítulos.

Capítulo 3

Mecânica Quântica em Sistemas Abertos

Neste capítulo faremos um breve apanhado do tratamento de sistemas quânticos via matriz densidade e sua representação no espaço de fase, a qual nos auxiliará a resolver equações diferenciais complexas onde operadores serão substituídos por funções clássicas que poderão, em alguns casos, serem interpretadas como distribuições de probabilidades. Dizemos que os sistemas quânticos que fornecem tais distribuições possuem análogo clássico.

3.1 A Matriz Densidade

A matriz densidade é uma forma alternativa de se descrever um estado quântico, ela torna-se particularmente importante quando lidamos com a falta de informação sobre um sistema, neste caso o vetor de estado não poderá mais ser capaz de representá-lo.

A falta de informação pode ser atribuída aos muitos graus de liberdade que um sistema pode assumir ou quando este estiver por exemplo, acoplado a um reservatório, o qual será nosso foco para esta dissertação, estudar flutuações de energia dentro de uma cavidade ótica.

Nestes casos uma descrição estatística faz-se necessária. Na mecânica estatística um sistema pode assumir vários microestados para um certo estado macroscópico. Se certamente o sistema estiver em um dos microestados dizemos que ele representa um estado puro, e um vetor de estado será suficiente para descrevê-lo, por outro lado se o sistema puder estar em qualquer um dos vários microestados com determinadas probabilidades, dizemos que o sistema se encontra num

estado misto e um novo formalismo, que será descrito aqui, é indispensável para sua descrição quântica. Ele é especialmente importante, pois raramente sistemas do mundo real são puros.

Se uma medição de um observável \hat{f} for realizada num conjunto de sistemas idênticos, saberemos apenas as médias dos valores quânticos pesados pelas probabilidades P_i .

$$\langle \hat{f} \rangle = \sum_i P_i \langle \Psi_E^{(i)} | \hat{f} | \Psi_E^{(i)} \rangle. \quad (3.1)$$

Para sermos mais gerais, precisamos considerar os termos fora da diagonal principal, pois na mecânica quântica existem quantidades mensuráveis, como a interferência, que se encontram fora dela.

$$\langle \hat{f} \rangle = \sum_{i,k} P_{i,k} \langle \Psi_E^{(i)} | \hat{f} | \Psi_E^{(k)} \rangle, \quad (3.2)$$

onde $P_{k,i}$ é a probabilidade de $\langle \Psi_E^{(i)} | \hat{f} | \Psi_E^{(k)} \rangle$ contribuir na média estatística de um observável \hat{f} .

A transição entre estas equações pode ser justificada se expandirmos o estado $\Psi_E^{(i)}$ em termos de um conjunto completo ϕ_k ,

$$\Psi^{(i)} = \sum_k a_k^i \phi_k. \quad (3.3)$$

Desta forma, temos:

$$\langle \hat{f} \rangle = \sum_i P_i \sum_{k,k'} a_k^{(i)*} a_{k'}^{(i)} \langle \phi_k | \hat{f} | \phi_{k'} \rangle = \sum_{k,k'} \left(\sum_i P_i a_k^{(i)*} a_{k'}^{(i)} \right) \langle \phi_k | \hat{f} | \phi_{k'} \rangle. \quad (3.4)$$

A expressão entre parênteses é uma probabilidade mais geral $P_{kk'}$, contendo inclusive termos não diagonais. A equação (3.4) torna-se:

$$\langle \hat{f} \rangle = \sum_{kk'} P_{kk'} \langle \phi_k | \hat{f} | \phi_{k'} \rangle. \quad (3.5)$$

Interpretando os números $P_{kk'}$ como elementos de matriz de um operador $\hat{\rho}$ na base ϕ_k , $P_{kk'} = \langle \phi_k | \hat{\rho} | \phi_{k'} \rangle$ obtemos para (3.5):

$$\langle \hat{f} \rangle = \sum_{kk'} \langle \phi_k | \hat{\rho} | \phi_{k'} \rangle \langle \phi_k | \hat{f} | \phi_{k'} \rangle. \quad (3.6)$$

Sendo ϕ_k uma base completa, $\sum_k |\phi_k\rangle \langle \phi_k| = 1$, concluímos,

$$\langle \hat{f} \rangle = \sum_k \langle \phi_k | \hat{\rho} \hat{f} | \phi_k \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{f}). \quad (3.7)$$

Este operador ρ é chamado de operador densidade e pode ser definido como,

$$\hat{\rho} = \sum_k P(k) |\psi_k\rangle \langle \psi_k|, \quad (3.8)$$

sendo assim, se obtivermos o operador densidade do sistema podemos extrair toda informação relevante contida na sua função de onda, como o valor esperado de algum observável \hat{f} , simplesmente tirando o traço do produto deste operador com o operador densidade, portanto, um operador desse tipo é essencialmente equivalente a um vetor de estado.

3.2 A Dinâmica do Operador Densidade

A evolução de um vetor de estado, de acordo com a mecânica quântica, é ditada pela equação de Schrödinger, mas como já visto, este não é o formalismo adequado para representar um estado misto, mas sim, a matriz densidade. Queremos aqui encontrar qual equação governa a evolução deste operador.

Seja $H(t)$ o hamiltoniano do sistema. A equação de Schrödinger,

$$\hat{H}(t) |\Psi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle, \quad (3.9)$$

tem sua solução representada por um operador de evolução temporal $U(t, t_0)$, que transforma o autoestado de algum momento inicial $|\Psi\rangle(t_0)$ num estado $|\Psi\rangle(t)$ num instante t .

$$|\Psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\Psi(t_0)\rangle. \quad (3.10)$$

Este operador deve ser unitário para que haja conservação da norma do estado.

Substituindo (3.10) em (3.9), obtemos,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{U}(t, t_0) = \hat{H}(t) \hat{U}(t, t_0), \quad (3.11)$$

que é uma equação diferencial que nos permitirá encontrar o operador de evolução temporal para dois casos. O primeiro deles, um sistema fechado, isolado de interações, onde o hamiltoniano é

independente do tempo, sendo a solução obtida por uma integração direta de (3.11)

$$\hat{U}(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}, \quad (3.12)$$

aqui podemos perceber, olhando para (3.10), que o autoestado varia no tempo apenas por um fator de fase, sendo assim o valor esperado de qualquer operador permanece inalterado com o passar do tempo,

$$\langle \Psi(t) | \hat{A} | \Psi(t) \rangle = \langle e^{\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \Psi(t_0) | \hat{A} | \Psi(t_0) e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)} \rangle = \langle \Psi(t_0) | \hat{A} | \Psi(t_0) \rangle. \quad (3.13)$$

O segundo caso retrata um hamiltoniano dependente do tempo e a solução de (3.11) pode ser representada através da exponencial ordenada no tempo,

$$\hat{U}(t, t_0) = T_{\leftarrow} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt H(t)}, \quad (3.14)$$

onde T_{\leftarrow} denota um operador de ordenamento temporal cronológico, ordenando o produto de operadores dependentes do tempo com a parte temporal dos argumentos aumentando da direita para a esquerda conforme indica a seta.

Estamos aptos, agora que conhecemos como o vetor de estado evolui no tempo, a obter a evolução da matriz densidade que para um estado misto, o ensemble estatístico quântico será dado por:

$$\hat{\rho}(t_0) = \sum_k P(k) |\psi_k(t_0)\rangle \langle \psi_k(t_0)|, \quad (3.15)$$

sendo $P(k)$ os pesos estatísticos e $|\Psi(t_0)\rangle$ os vetores de estados normalizados, aos quais sabemos que possuem evolução temporal de acordo com (3.10), logo,

$$\hat{\rho}(t) = \sum_k P(k) \hat{U}(t, t_0) |\psi_k(t_0)\rangle \langle \psi_k(t_0)| \hat{U}^\dagger(t, t_0), \quad (3.16)$$

que pode ser interpretado como:

$$\hat{\rho}(t) = \hat{U}(t, t_0) \hat{\rho}(t_0) \hat{U}^\dagger(t, t_0). \quad (3.17)$$

Para um sistema fechado, onde o operador unitário U é dado por (3.12) podemos integrar a equação de movimento determinística para o operador densidade derivando (3.16),

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \sum_k P(k) \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} |\psi_k(t)\rangle \right) \langle \psi_k(t)| + |\psi_k(t)\rangle \left(\frac{\partial}{\partial t} \langle \psi_k(t)| \right) \right] \quad (3.18)$$

onde, utilizando a equação de Schrödinger (3.9) obtemos,

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \sum_k P(k) \left[\frac{1}{i\hbar} \hat{H} |\psi_k(t)\rangle \langle \psi_k(t)| - \frac{1}{i\hbar} |\psi_k(t)\rangle \langle \psi_k(t)| \hat{H} \right] \quad (3.19)$$

de modo que podemos escrevê-la de forma mais compacta como,

$$\frac{\partial \hat{\rho}(t)}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)] \quad . \quad (3.20)$$

Esta equação é conhecida como equação de *Liouville-von Neumann*, com intuito de dar ênfase a equação de *von-Neumann* e a correspondente equação clássica de *Liouville*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \{H, \rho\}. \quad (3.21)$$

3.3 A Equação Mestra

Até agora analisamos a evolução temporal do operador densidade para um sistema fechado, sem mecanismos de perdas. Vamos aqui voltar atenção para sistemas abertos, como por exemplo uma cavidade de espelhos com transmitância não nula. Neste tipo de problema podemos considerar o sistema S a ser estudado como um subsistema de um sistema global, constituído pelo sistema S acoplado a um reservatório R . A dinâmica de S será governada por suas variações internas e pelo seu contato com o reservatório.

Pode-se encontrar a equação que dita a evolução da matriz densidade $\hat{\rho}$ referente ao subsistema S tirando o traço parcial da matriz densidade w que representa o sistema global $R + S$, sobre as variáveis do reservatório.

Obviamente $\omega(t)$ representa um sistema fechado e com equação de movimento dada por

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} [H, \omega(t)] \quad , \quad (3.22)$$

com

$$H = H_S + H_R + V \quad . \quad (3.23)$$

Sendo H_S o hamiltoniano do sistema, H_R o hamiltoniano do reservatório e V a interação entre eles. Na perspectiva de interação a equação (3.22) torna-se,

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[V(t), \omega(t)] \quad . \quad (3.24)$$

Assumiremos inicialmente que os estados do sistema e do reservatório estão descorrelacionados,

$$\omega(0) = \rho(0)\rho_R, \quad (3.25)$$

onde ρ_R é o operador densidade do reservatório. Integrando a equação (3.24) obtemos:

$$\omega(t) = \omega(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t [V(t_1), \omega(t_1)] dt_1 \quad (3.26)$$

Iterando essa solução encontramos,

$$w(t) = w(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n [V(t_1), [V(t_2), \dots [V(t_n), w(0)]]] \quad . \quad (3.27)$$

Obteremos o operador densidade reduzido do sistema calculando o traço sobre as variáveis do reservatório que em equilíbrio térmico a temperatura T é descrito pelo operador densidade,

$$\hat{\rho}_R = \prod_j \exp\left(-\frac{\hbar\omega_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j}{k_b T}\right) \left(1 - e^{-\frac{\hbar\omega_j}{k_b T}}\right). \quad (3.28)$$

Tomando seus valores médios encontramos,

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \rho(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \\ &\quad \times \int_0^{t_{n-1}} dt_n Tr_R \{ [V(t_1), [V(t_2), \dots [V(t_n), \rho_R \otimes \rho(0)]]] \} \\ &\equiv [1 + U_1(t) + U_2(t) + \dots] \rho(0) \\ &\equiv U_n(t) \rho(0) \quad , \end{aligned} \quad (3.29)$$

onde ,

$$U_n(t) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n Tr_R \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n [V(t_1), [V(t_2), \dots [V(t_n), \rho_R \otimes \rho(0)]]] \quad . \quad (3.30)$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) &= \left(\dot{U}_1(t) + \dot{U}_2(t) + \dots\right)\hat{\rho}(0) \\
&= \left(\dot{U}_1(t) + \dot{U}_2(t) + \dots\right)U^{-1}(t)\hat{\rho}(t) \\
&= L(t)\hat{\rho}(t) \quad ,
\end{aligned} \tag{3.31}$$

onde $L(t)$ é o gerador das evoluções temporais,

$$L(t) = \left(\dot{U}_1(t) + \dot{U}_2(t) + \dots\right)U^{-1}(t). \tag{3.32}$$

Vamos assumir que $V(t)$ é tal que $Tr_R(V(t)\hat{\rho}_R) = 0$. Isso garante o fato de $U_1(t) = 0$. Sendo a perturbação fraca podemos utilizar a aproximação de Born, onde iremos ignorar termos acima da segunda ordem de $L(t)$. Assim até a segunda ordem de perturbação temos,

$$L(t)\hat{\rho}(t) = \dot{U}_2(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt_1 Tr_R[V(t), [V(t_1), \hat{\rho}_R\hat{\rho}(t_1)]] \tag{3.33}$$

Por fim, usaremos a aproximação Markoviana onde o operador $\rho(t)$ no instante t dependerá somente de um instante imediatamente antecessor t_1 e não mais de todo o intervalo $0 < t_1 < t$.

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}(t) = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt_1 Tr_R[V(t), [V(t_1), \hat{\rho}_R\hat{\rho}(t)]] \quad . \tag{3.34}$$

O próximo termo da série seria quadrático na constante de acoplamento. Como supomos que ela é muito pequena podemos esperar que (3.34) seja uma boa aproximação.

Vamos agora ver um exemplo de suma importância. Iremos encontrar explicitamente a equação de evolução da matriz densidade para o caso constituído de uma cavidade ótica vazia, tipo Fabry-Perrot. O hamiltoniano na representação de interação será:

$$V(t) = \hbar [\hat{a}^\dagger\Gamma(t)e^{i\omega_0 t} + \hat{a}\Gamma^\dagger(t)e^{-i\omega_0 t}] \tag{3.35}$$

onde \hat{a} e \hat{a}^\dagger são os operadores de criação e aniquilação no espaço de Hilbert do Sistema (cavidade ótica). O reservatório \mathbf{R} é modelado como uma coleção de osciladores harmônicos com frequência ω_j e seus operadores de criação e aniquilação \hat{b}_j^\dagger e \hat{b}_j , que obedecem as relações de comutação $[\hat{b}_j^\dagger, \hat{b}_k^\dagger] = \delta_{jk}$.

O acoplamento entre os osciladores do reservatório do sistema são feitos através da constante de acoplamento $g_j = g_j(\omega)$. Usaremos a aproximação de ondas girantes (*rotating wave approximation*) onde negligenciaremos termos do hamiltoniano que oscilam muito rapidamente, não contribuindo significativamente na média, essa aproximação é válida quando estamos tratando de sistemas com pouco amortecimento, logo podemos escrever,

$$\hat{\Gamma}(t) = \sum_j g_j \hat{b}_j e^{-i\omega_j t} . \quad (3.36)$$

Substituindo (3.35) na equação mestra na aproximação de Born-Markoviana encontramos,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\rho}(t) &= -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt_1 \text{Tr}_R [V(t), [V(t_1), \hat{\rho}_R \hat{\rho}(t)]] \\ &= -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt_1 \text{Tr}_R [V(t), V(t_1) \hat{\rho}_R \hat{\rho}(t) - \hat{\rho}_R \hat{\rho}(t) V(t_1)] \\ &= -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt_1 \text{Tr}_R (V(t) V(t_1) \hat{\rho}_R \hat{\rho}(t) - V(t) \hat{\rho}_R \hat{\rho}(t) V(t_1) \\ &\quad - V(t_1) \hat{\rho}_R \hat{\rho}(t) V(t) + \hat{\rho}_R \hat{\rho}(t) V(t_1) V(t)) \end{aligned} \quad (3.37)$$

Por exemplo, tomando um termo típico da equação acima

$$\begin{aligned} &\int_0^t dt_1 \text{Tr}_R (V(t) V(t_1) \hat{\rho}_R \hat{\rho}(t)) \\ &= \int_0^t dt_1 \text{Tr}_R \left\{ \hbar^2 \left[\hat{a}^\dagger \hat{\Gamma}(t) e^{i\omega_0 t} + \hat{a} \hat{\Gamma}^\dagger(t) e^{-i\omega_0 t} \right] \left[\hat{a}^\dagger \hat{\Gamma}(t_1) e^{i\omega_0 t_1} + \hat{a} \hat{\Gamma}^\dagger(t_1) e^{-i\omega_0 t_1} \right] \hat{\rho}_R \hat{\rho}(t) \right\} \\ &= \hbar^2 \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{\rho}(t) \int_0^t dt_1 \langle \hat{\Gamma}(t) \hat{\Gamma}(t_1) \rangle_R e^{i\omega_0(t+t_1)} \\ &\quad + \hbar^2 \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho}(t) \int_0^t dt_1 \langle \hat{\Gamma}(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t_1) \rangle_R e^{i\omega_0(t-t_1)} \\ &\quad + \hbar^2 \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{\rho}(t) \int_0^t dt_1 \langle \hat{\Gamma}^\dagger(t) \hat{\Gamma}(t_1) \rangle_R e^{i\omega_0(t+t_1)} \\ &\quad + \hbar^2 \hat{a} \hat{a} \hat{\rho}(t) \int_0^t dt_1 \langle \hat{\Gamma}^\dagger(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t_1) \rangle_R e^{i\omega_0(t-t_1)} . \end{aligned} \quad (3.38)$$

Analisando agora uma das integrais,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^t dt_1 \langle \hat{\Gamma}(t) \hat{\Gamma}(t_1) \rangle_R e^{i\omega_0(t+t_1)} \\ &= \int_0^t dt_1 \sum_{ij} g_i g_j \langle \hat{b}_i \hat{b}_j \rangle_R e^{-i(\omega_i t + \omega_j t_1)} e^{i\omega_0(t+t_1)} , \end{aligned} \quad (3.39)$$

onde fizemos uso de (3.36). Convertendo a soma sobre todos os modos em uma integral,

$$\sum_i \rightarrow \int \frac{d\omega}{2\pi} \rho(\omega) \quad , \quad (3.40)$$

onde $\rho(\omega)$ é a densidade de estados na frequência ω . Assim,

$$I_1 = \int_0^t dt_1 \int_0^\infty \frac{d\omega_1}{2\pi} \rho(\omega_1) \int_0^\infty \frac{d\omega_2}{2\pi} \rho(\omega_2) \times \\ \times g(\omega_1) g(\omega_2) \langle \hat{b}(\omega_1) \hat{b}(\omega_2) \rangle_R e^{-i(\omega_1 t + \omega_2 t_1)} e^{i\omega_0(t+t_1)} \quad . \quad (3.41)$$

No caso em que o reservatório está em um banho térmico, são válidas as seguintes relações:

$$\langle \hat{b}(\omega_1) \hat{b}(\omega_2) \rangle_R = 0 \\ \langle \hat{b}^\dagger(\omega_1) \hat{b}(\omega_2) \rangle_R = 2\pi N(\omega) \delta(\omega_1 - \omega_2) \quad (3.42)$$

Pela relação de comutação

$$[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 1 \Rightarrow \hat{b}\hat{b}^\dagger = 1 + \hat{b}^\dagger\hat{b} \quad , \quad (3.43)$$

o que implica em

$$\langle \hat{b}(\omega_1) \hat{b}^\dagger(\omega_2) \rangle_R = 2\pi (N(\omega) + 1) \delta(\omega_1 - \omega_2) \quad , \quad (3.44)$$

pois

$$Tr_R \left(\hat{\rho}_R \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j \right) = \frac{e^{-\hbar\omega_j/K_B T}}{1 - e^{-\hbar\omega_j/K_B T}} = \bar{N}(\omega_j, T) \quad . \quad (3.45)$$

Os termos não nulos nas funções de correlações do reservatório serão

$$\langle \hat{\Gamma}^\dagger(t) \hat{\Gamma}(t - \tau) \rangle_R = \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega\tau} \rho^2(\omega) g^2(\omega) N(\omega, T) \\ \langle \hat{\Gamma}(t) \hat{\Gamma}^\dagger(t - \tau) \rangle_R = \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega\tau} \rho^2(\omega) g^2(\omega) [1 + N(\omega, T)] \quad . \quad (3.46)$$

Retornando à equação (3.37) e (3.38) obtemos a seguinte expressão para $\hat{\rho}(t)$.

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = \frac{\gamma}{2} (N + 1) [2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}] + \frac{\gamma}{2} N (2\hat{a}^\dagger\hat{\rho}\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}\hat{a}^\dagger) \quad , \quad (3.47)$$

onde γ é uma constante ligada a dissipação proporcional ao quadrado do número de estados acessíveis ao reservatório e à constante de acoplamento g ; $\gamma \propto \rho^2(\omega)$ e $\gamma \propto g$.

3.4 A Equação de Fokker-Planck

De uma forma geral, a equação (3.34) resulta numa equação diferencial de operadores,

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho}_s = F(\hat{a}, \hat{a}^\dagger), \quad (3.48)$$

sendo de difícil resolução. Uma maneira de simplificar este problema é passando-o ao espaço de fase por intermédio da teoria das representações, trocando a matriz densidade por uma função de quase probabilidade, por substituição dos operadores \hat{a} e \hat{a}^\dagger por variáveis complexas do campo α e α^* . Como veremos na próxima seção são diversas as representações possíveis, tais como P de Glauber, Wigner, P positiva, entre outras. O critério para escolher qual utilizar é verificar qual delas dará uma equação de evolução tratável para a distribuição de quase probabilidade.

A equação que desejamos obter após este processo é a famosa equação de Fokker Planck [33], que é uma equação de movimento que governa a evolução temporal de uma distribuição de variáveis aleatórias. Ela teve seu desenvolvimento motivado pela descrição do movimento Browniano (movimento irregular de pequenas partículas imersas numa solução) observado em 1828 pelo botânico inglês Robert Brown. Esta equação teve suas aplicações extendidas para outros problemas, inclusive a modelação de flutuações no mercado de ações.

Sem mais delongas, a equação de Fokker Planck possui a forma:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{A}_i(x, t)P + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} [\mathbf{D}(\vec{x}, t)]_{ij}P \quad (3.49)$$

com,

$$D(\vec{x}, t) = B(\vec{x}, t)B^T(\vec{x}, t). \quad (3.50)$$

Ela pode ser interpretada como uma equação de difusão ditada pelo tensor de difusão \mathbf{D} , contendo um termo de arraste, dado pelo vetor de arraste \mathbf{A} . No geral, ambos dependem das N variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n = \mathbf{x}$.

Equivalentemente é possível mapear de (3.49) as equações estocásticas de Itô, como descrito detalhadamente em [22],

$$dx_j = A(x_j)dt + B(x_j)dW, \quad (3.51)$$

onde dW é o vetor incremento de Wiener e representa a parte aleatória, tendo média nula. Valendo as correlações,

$$\langle dW_i(t)dW_j(t') \rangle = \delta_{ij}\delta(t-t'). \quad (3.52)$$

3.5 Representações da Matriz Densidade

A representação de um sistema quântico por uma função clássica que nos dê resultados compatíveis com a mecânica quântica é o objetivo de estudo da Teoria das Representações. Devido ao caráter probabilístico inerente a teoria quântica será necessário um conjunto de sistemas clássicos para representar um único sistema quântico.

Uma representação clássica da matriz densidade muito conhecida e utilizada é a função de Wigner [16], que também pode ser definida em termos da transformada de Fourier de uma função característica [32]. Uma motivação para esta distribuição só foi dada posteriormente, e pode ser obtida no terceiro capítulo de [24].

Existem ainda outras formas de representar a matriz densidade por uma distribuição clássica. Podemos citar a sua representação em estados de Fock, útil quando estamos interessados, por exemplo, na distribuição de quanta do sistema sem nos preocuparmos com as fases, e sua representação em estados coerentes, dita representação de Glauber-Sudarshan [17], [18] que posteriormente teve sua generalização feita por [25], a qual veremos em mais detalhes devido sua grande relevância para esta dissertação.

3.5.1 Representação P de Glauber-Sudarshan

Esta representação está fundamentada no fato dos estados coerentes não serem ortogonais, como já foi visto, eles constituem uma base mais que completa e conseqüentemente possibilitam a expansão de $\hat{\rho}$ numa representação diagonal $|\alpha\rangle$ destes estados.

$$\hat{\rho} = \int P(\alpha)|\alpha\rangle\langle\alpha|d^2\alpha \quad (3.53)$$

com,

$$d^2\alpha = d\text{Re}(\alpha)d\text{Im}(\alpha),$$

$$\alpha = x + iy \Rightarrow d^2\alpha = dx dy,$$

pois α é o autovalor de um operador não hermitiano, podendo então assumir valores complexos.

Poderíamos pensar em $P(\alpha)$ como sendo uma probabilidade de ocorrência do estado α , porém o projetor $|\alpha\rangle\langle\alpha|$ não é em sua maior parte ortogonal, exceto pra casos em que $|\alpha - \alpha'| \gg 1$. Para compreendermos melhor esta afirmação podemos pensar no estado coerente em termos da sua função de onda na representação de posição, que é descrita por uma gaussiana, a condição de ortogonalidade do projetor significa termos as distribuições gaussianas suficientemente afastadas, a ponto da área de interseção entre elas ser praticamente nula, possibilitando $P(\alpha)$ ser uma função de probabilidade.

Outra impossibilidade para esta consideração é encontrada quando tratamos de estados do campo em que $P(\alpha)$ assume valores negativos ou de extrema singularidade, interpretamos este fato dizendo que o estado em questão não possui análogo clássico, porém ainda é possível utilizar esta função para obter informações sobre o sistema.

Ciente deste problema o próprio Glauber propõe uma nova representação descrita pela função R,

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\pi^2} \int \int d^2\alpha d^2\beta R(\alpha^*, \beta) \exp[-(|\alpha|^2 + |\beta|^2)/2] |\alpha\rangle\langle\beta|, \quad (3.54)$$

a qual foi demonstrada sempre existir e ser única, sendo $R(\alpha^*, \beta)$ analítica em α^* e β [23]. Porém esta representação não é de grande utilidade pois normalmente não se consegue a partir dela chegar numa equação de Fokker Planck para a evolução desta função.

A fim de encontrar uma função bem comportada em todo o definido espaço de fase P. D. Drummond e C. W. Gardiner propõem as funções P generalizadas [25] onde daremos enfoque na próxima subseção a uma delas, a positiva representação P.

3.5.2 Representação P Positiva.

O objetivo desta representação é encontrar uma nova função P que não possua singularidades e forneça uma matriz de difusão positiva semidefinida na equação de Fokker-Planck. Esta nova representação é obtida por expansão dos operadores de projeção em estados coerentes não diagonais. Para isto defini-se a expansão de $\hat{\rho}$,

$$\hat{\rho} = \int P(\alpha, \beta) \hat{\Omega}(\alpha, \beta) d\mu(\alpha, \beta) \quad (3.55)$$

com,

$$\hat{\Omega}(\alpha, \beta) = |\alpha\rangle\langle\beta^*| / (\langle\beta^*|\alpha\rangle) = e^{(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha\beta)} |0\rangle\langle 0| e^{(\beta\hat{a})}, \quad (3.56)$$

um operador de projeção analítico em α, β e $P(\alpha, \beta)$ a nova distribuição generalizada que será definida através do domínio de integração $d\mu$, sendo a representação P de Glauber-Schudarshan encontrada para $d\mu(\alpha, \beta) = \delta^2(\alpha^* - \beta) d^2\alpha d^2\beta$.

A representação P positiva é o caso no qual o domínio é dado por todo o espaço de fase complexo, com

$$d\mu(\alpha, \beta) = d^2\alpha d^2\beta, \quad (3.57)$$

e (α, β) correndo o plano complexo de forma independente.

A média de qualquer operador representado pelos operadores de criação e aniquilação pode ser obtida pela integração,

$$\langle (\hat{a}^\dagger)^n \hat{a}^m \rangle = \int P(\alpha) \beta^n \alpha^m d\mu(\alpha, \beta) \quad (3.58)$$

desde que o operador em questão esteja escrito em um ordenamento normal, ou seja, com os operadores de criação \hat{a}^\dagger sempre posicionados a esquerda dos operadores de aniquilação \hat{a} , para representar qualquer operador nesta forma basta usar a relação de comutação existente entre eles.

É demonstrado com o auxílio da função característica que $P(\alpha, \beta)$ sempre existe para um operador densidade físico [26], aqui nos deteremos a provar que esta função pode ser escolhida de forma a ser sempre positiva dada a existência de uma representação P de Glauber.

Tomando verdadeira a existência de uma função P de Glauber podemos definir a função real e positiva,

$$P_+(\alpha, \beta) = \frac{1}{4\pi^2} e^{-|\alpha-\beta^*|/4} \langle \frac{1}{2}(\alpha + \beta^*) | \hat{\rho} | (\alpha + \beta^*)/2 \rangle. \quad (3.59)$$

Substituindo (3.53) em (3.59)

$$P_+(\alpha, \beta) = [\frac{1}{4\pi^2}] \int P'(\alpha', \alpha'^*) e^{-[|\alpha-\alpha'|^2/2 - |\beta^*-\alpha'|^2/2]} \quad (3.60)$$

e evoluindo a equação (3.55)

$$\int \int \hat{\Omega}(\alpha, \beta) P_+(\alpha, \beta) d\mu(\alpha, \beta) = \int \int \int \frac{d^2\alpha' d\mu(\alpha, \beta)}{4\pi^2} \hat{\Omega}(\alpha, \beta) P'(\alpha', \alpha'^*) e^{-[|\alpha-\alpha'|^2/2 - |\beta^*-\alpha'|^2/2]}. \quad (3.61)$$

O operador $\hat{\Omega}(\alpha)$ é analítico em α e β por isto pode ser representado por uma função analítica dada pela transformada de Fourier,

$$f(\alpha') = \frac{1}{2\pi} \int f(\alpha) e^{(-|\alpha-\alpha'|^2/2)} d^2\alpha', \quad (3.62)$$

identificando esta forma na equação (3.61) podemos trocar β^* e α por α' ,

$$\int \int \hat{\Omega}(\alpha, \beta) P_+(\alpha, \beta) d^2\alpha d^2\beta = \int |\alpha'\rangle \langle \alpha' | P'(\alpha', \alpha'^*) d^2\alpha' = \hat{\rho}. \quad (3.63)$$

Ou seja, se a função P de Glauber existe para algum operador $\hat{\rho}$ então existe uma função P positiva definida dada por (3.59).

Capítulo 4

Emaranhamento

Emaranhamento é uma propriedade puramente quântica de um determinado sistema físico, é um conceito totalmente contra intuitivo por termos uma visão clássica inerente do mundo, a qual nos faz confrontar duas de suas principais características: o não realismo e a não localidade. A primeira delas refere-se ao fato que não podemos atribuir valores a observáveis físicos antes de medi-los, mesmo que o estado em questão esteja classicamente relacionado a algum outro. A segunda nos informa que o valor de uma medida depende do resultado da medida realizada em outro sistema físico correlacionado quanticamente, mesmo que este esteja distante o suficiente para que não haja tempo de alguma informação ser transmitida entre eles.

Estas características consequentes da teoria quântica só foram percebidas após um artigo publicado por Albert Einstein, Boris Podolsky e Natan Rosen em 1935 [1], que tinha por objetivo demonstrar, usando os princípios de realidade física e localidade por eles definidos, que a mecânica quântica era uma teoria incompleta.

Os autores propuseram um experimento onde duas partículas seriam preparadas num estado onde a posição relativa $x_1 - x_2$ e o momento total $p_1 + p_2$ tivessem valores bem definidos, estado permitido pela teoria quântica, já que os operadores expostos comutam e consequentemente possuem uma base comum. Tais partículas seriam então separadas de forma a não existir interação entre elas, ou seja, uma medida realizada na partícula 1 não perturbaria a partícula 2, respeitando assim o princípio da localidade, o qual Einstein expressa com as palavras: “*The real factual situation of the system S_2 is independent of with is spatially separated from the former*”,

sendo assim, através de leis de conservação e considerando que posição e momento tenham realidades físicas simultâneas, estas grandezas poderiam ser inferidas com precisões arbitrárias, sendo por exemplo, o momento da partícula 1 determinado através da medição do momento da partícula 2 e sua posição determinada concomitantemente através de sua medida direta, o que confronta diretamente a mecânica quântica, já que posição e momento são variáveis conjugadas, ou seja, variáveis que não comutam e por isso devem respeitar o limite de incerteza previsto para suas medições conjuntas.

O experimento proposto por EPR sem dúvida intrigou a sociedade científica, mas projetá-lo num experimento real não era prático. Por isso, como uma forma de medida mais viável experimentalmente D. Bohm em 1952 [28] traduz a questão discutida no paradoxo EPR em um experimento baseado em uma variável discreta, o momento angular. Discutiremos sucintamente um experimento similar ao proposto por Bohm.

Considere uma molécula constituída de dois átomos, cada um deles possuindo spin $1/2$ preparada num estado total de spin zero, posteriormente a molécula é dissociada em um processo, o qual não altera seu estado de spin. Os átomos são então separados afim de não mais interagirem, da mesma forma agora poderiam ser inferidas concomitantemente, as componentes conjugadas de spin desses átomos.

Baseado neste trabalho, J. Bell transcreve toda filosofia numa desigualdade matemática que, se violada, demonstraria o caráter não realista-local da mecânica quântica, que foi mapeada numa desigualdade menos abstrata e mais aplicável por Jhon F. Clauser, Michael A. Horner, Abner Shimony e Richard A. Holt [29] que ficou conhecida como desigualdade CHSH.

Uma das primeiras violações das desigualdades de Bell foi realizado em 1972 [30] usando fótons emaranhados em polarização com energias próximas ao visível.

Hoje um processo não linear que será discutido detalhadamente no próximo capítulo, conhecido como Conversão Paramétrica, demonstra através de variáveis matematicamente idênticas as propostas por EPR, as quadraturas de fase e amplitude do campo eletromagnético que a mecânica quântica definitivamente não obedece aos princípios de realismo e localidade. Os testes feitos nestas quadraturas atualmente não visam mais a demonstração deste fato, mas sim a detecção de emaranhamento.

4.1 Estados Emaranhados

A linguagem utilizada para descrever a Mecânica Quântica é a Álgebra Linear. Os estados de um sistema são representados por funções de ondas e seus observáveis por operadores, que matematicamente satisfazem a condições definidas por vetores abstratos e transformações lineares respectivamente. O espaço onde esta teoria é fundamentada denomina-se espaço de Hilbert. Quando estamos tratando de um sistema constituído por vários subsistemas ($S_1, S_2, S_3, \dots, S_N$) o espaço global é definido pelo produto tensorial dos espaços de Hilbert associados a cada subsistema.

$$H_s = H_1 \otimes H_2 \otimes H_3 \otimes \dots \otimes H_N. \quad (4.1)$$

Desta notação surge a definição de um sistema separável, conseqüentemente de um sistema emaranhado, já que este será definido pela impossibilidade de ser descrito de forma separável. Por questões didáticas trataremos aqui separabilidade em estados puros e mistos separadamente.

Definição 1: *Estados puros fatoráveis são descritos da forma,*

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes |\psi_3\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_N\rangle, \quad (4.2)$$

sendo $|\psi_j\rangle \in H_j$. *Todo estado puro que não puder ser escrito desta forma é dito emaranhado*

Exemplos:

Estados emaranhados	Estados não emaranhados
$ \Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (00\rangle \pm 11\rangle)$	$ \Phi\rangle = 0\rangle \otimes 0\rangle$
$ \Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (01\rangle \pm 10\rangle)$	$ \Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (00\rangle + 01\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} 0\rangle \otimes (0\rangle + 1\rangle)$

Definição 2: *Estados mistos são emaranhados se, e somente se, não permitirem uma descrição do tipo;*

$$\rho = \sum_i p_i \rho_{i1} \otimes \rho_{i2} \otimes \rho_{i3} \otimes \dots \otimes \rho_{iN}, \quad (4.3)$$

sendo ρ_{ij} a matriz densidade pertencente ao espaço de Hilbert H_j e $\sum_i p_i = 1$.

Exemplo:

Estado emaranhado	Estados não emaranhado
$\rho = \frac{1}{3} \Psi^-\rangle\langle\Psi^- + \frac{2}{3} \Phi^-\rangle\langle\Phi^- $	$ \rho\rangle = \frac{1}{4} 00\rangle\langle 00 + \frac{1}{4} 01\rangle\langle 01 + \frac{1}{4} 10\rangle\langle 10 + \frac{1}{4} 11\rangle\langle 11 $

O estado representado por (4.2) nada mais é do que uma particularidade do estado (4.3) quando $p_i = 1$ e todos os estados dos subsistemas são puros.

Dependendo do número de subsistemas classificaremos o emaranhamento como bipartite, para $N=2$, tripartite, para $N=3$ e multipartite para N maior que 3.

4.2 Critérios de Separabilidade

Dado um estado quântico geral $\hat{\rho}$ como definir se ele está ou não emaranhado? Tentar escrevê-lo na forma (4.3) testando “infinitas” possibilidades certamente não é o caminho mais adequado. Na verdade esta questão em sua totalidade ainda encontra-se em aberto, o que temos hoje são critérios que na maioria dos casos são suficientes para atestar emaranhamento, mas não necessários, ou seja, em muitas situações nada poderá ser concluído sobre o sistema.

Nesta seção apresentaremos dois destes critérios, os quais denominaremos Soma de Variâncias Bipartites e Tripartites, sendo este último uma generalização do primeiro.

4.2.1 Soma de Variâncias Bipartites

Também conhecido como critério de separabilidade de Duan em homenagem a um de seus autores, ele atesta a separabilidade de um sistema bipartite em variáveis contínuas, propondo um limite inferior para a soma das variâncias totais dos pares de operadores tipo-EPR, ou seja, os operadores referentes as posições dos subsistemas e seus momentos lineares. A desigualdade encontrada apresenta um limite inferior que se violado podemos afirmar que o sistema é emaranhado, dizemos que ela é suficiente para atestar emaranhamento. Caso os estados envolvidos sejam gaussianos a condição além de suficiente torna-se necessária, ou seja, a não violação da desigualdade significa que os estados são separáveis, a prova é feita pelos autores em seu artigo [7], mas não entraremos aqui neste mérito, nosso objetivo é somente demonstrar a desigualdade proposta.

Os operadores tipo-EPR são:

$$\hat{u} = |a|\hat{x}_1 + \frac{1}{a}\hat{x}_2, \quad (4.4)$$

$$\hat{v} = |a|\hat{p}_1 - \frac{1}{a}\hat{p}_2, \quad (4.5)$$

onde a é um número arbitrário não nulo.

Usar o parâmetro a nos permite minimizar o limite inferior, a fim de encontrar o menor valor possível para ele.

Iremos calcular a variância destes operadores para um estado separável que é expresso, como já visto na seção anterior, na forma:

$$\rho = \sum_i p_i \hat{\rho}_{i1} \otimes \hat{\rho}_{i2}, \quad (4.6)$$

onde é assumido ρ_{i1} e ρ_{i2} estados normalizados dos modos 1 e 2, respectivamente, e p_i satisfazendo $\sum_i p_i = 1$.

A variância do operador \hat{u} é dada por:

$$\begin{aligned}
\langle (\Delta \hat{u})^2 \rangle_\rho &= \sum_i p_i \langle \hat{u}^2 \rangle_i - \langle \hat{u} \rangle_\rho^2 \\
&= \sum_i p_i \left(a^2 \langle \hat{x}_1^2 \rangle_i + \frac{1}{a^2} \langle \hat{x}_2^2 \rangle_i \right) + 2 \frac{a}{|a|} \sum_i p_i \langle \hat{x}_1 \hat{x}_2 \rangle \\
&\quad - \langle \hat{u} \rangle_\rho^2.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Note que até agora o cálculo é válido para qualquer estado, separável ou não. O fato de ρ ser separável implica na igualdade $\langle \hat{x}_1 \hat{x}_2 \rangle = \langle \hat{x}_1 \rangle \langle \hat{x}_2 \rangle$, pois,

$$Tr \{ \hat{x}_1 \hat{x}_2 \rho_{sep} \} = \sum_i p_i Tr \{ \hat{x}_1 \hat{x}_2 (\rho_{i1} \otimes \rho_{i2}) \} = \sum_i p_i Tr \{ \hat{x}_1 \rho_{i1} \} Tr \{ \hat{x}_2 \rho_{i2} \}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\langle (\Delta \hat{u})^2 \rangle_\rho &= \sum_i p_i \left(a^2 \langle \hat{x}_1^2 \rangle_i + \frac{1}{a^2} \langle \hat{x}_2^2 \rangle_i \right) + 2 \frac{a}{|a|} \sum_i p_i \langle \hat{x}_1 \rangle \langle \hat{x}_2 \rangle \\
&\quad - \langle \hat{u} \rangle_\rho^2.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

De modo análogo, a variância do operador \hat{v} será:

$$\begin{aligned}
\langle (\Delta \hat{v})^2 \rangle_\rho &= \sum_i p_i \left(a^2 \langle \hat{p}_1^2 \rangle_i + \frac{1}{a^2} \langle \hat{p}_2^2 \rangle_i \right) + 2 \frac{a}{|a|} \sum_i p_i \langle \hat{p}_1 \rangle \langle \hat{p}_2 \rangle \\
&\quad - \langle \hat{v} \rangle_\rho^2.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Acrescentando e diminuindo os termos $(\sum_i p_i \langle \hat{u} \rangle_i)^2$, $(\sum_i p_i \langle \hat{v} \rangle_i)^2$ à soma das variâncias ficamos com:

$$\begin{aligned}
\langle (\Delta \hat{u})^2 \rangle_\rho + \langle (\Delta \hat{v})^2 \rangle_\rho &= \sum_i p_i \left(a^2 \langle (\Delta \hat{x}_1)^2 \rangle_i + \frac{1}{a^2} \langle (\Delta \hat{x}_2)^2 \rangle_i \right) + \\
&\quad + \sum_i p_i \left(a^2 \langle (\Delta \hat{p}_1)^2 \rangle_i + \frac{1}{a^2} \langle (\Delta \hat{p}_2)^2 \rangle_i \right) \\
&\quad + \sum_i p_i \langle \hat{u} \rangle_i^2 - \left(\sum_i p_i \langle \hat{u} \rangle_i \right)^2 + \sum_i p_i \langle \hat{v} \rangle_i^2 \\
&\quad - \left(\sum_i p_i \langle \hat{v} \rangle_i \right)^2.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Aplicando o menor valor permitido pela relação de incerteza, $\langle(\Delta\hat{x}_j)^2\rangle+\langle(\Delta\hat{p}_j)^2\rangle\geq|[\hat{x}_j\hat{p}_j]|=1$, para $j=1,2$, e a desigualdade de Cauchy-Schwarz; $(\sum_i p_i)(\sum_i p_i\langle\hat{u}_i^2\rangle)\geq(\sum_i p_i|\langle\hat{u}_i\rangle|)^2$ asseguramos um limite inferior, em função do parâmetro a para um estado separável:

$$\langle(\Delta\hat{u})^2\rangle_\rho+\langle(\Delta\hat{v})^2\rangle_\rho\geq a^2+\frac{1}{a^2}. \quad (4.11)$$

A desigualdade é minimizada para $a=1$ e finalmente chegamos ao critério de separabilidade para sistemas bipartites em variáveis contínuas,

$$\langle(\Delta\hat{u})^2\rangle_\rho+\langle(\Delta\hat{v})^2\rangle_\rho\geq 2. \quad (4.12)$$

No próximo tópico veremos a extensão deste critério para sistemas tripartites.

4.2.2 Soma de Variâncias Tripartites

Focaremos aqui atenção para emaranhamento em sistemas tripartites. Primeiramente torna-se necessário definir o que queremos dizer com emaranhamento tripartite. Dado um sistema contituído de três partes A, B e C, podemos definir quatro tipos de emanhamento, aqueles onde um dos subsistema é separável dos outros dois, temos aqui três casos bipartites sendo AB, AC ou BC inseparáveis; e o último caso onde nenhuma das partes é separável dizemos que este é um genuíno emaranhamento tripartite. Estes quatro tipos de emaranhamento agrupam-se formando cinco classes [38]:

- *Classe 1: Estados totalmente inseparáveis, são aqueles os quais nenhum dos subsistemas pode ser separado do sistema.*
- *Classe 2: Estado de um modo biseparável, temos apenas um caso de emaranhamento bipartite, ou seja, apenas um subsistema pode ser separado.*
- *Classe 3: Estados de dois modos biseparáveis, temos dois casos de emaranhamento bipartite, ou seja, dois subsistemas podem ser separados do sistema.*

- *Classe 4: Estados de três modos bisseparáveis, temos três casos bipartites, ou seja, todas as três partes são separáveis do sistema. No entanto este estado não pode ser escrito como o produto tensorial de matrizes das três partes.*
- *Classe 5: Estados totalmente separáveis, todos os três subsistemas são separáveis não havendo nenhum emaranhamento bipartite.*

O critério proposto por P. van Loock e A. Furusawa [12] nos dará indícios a qual classe um dado estado pertence, ou a quais classes ele pode pertencer. Sua demonstração é completamente análoga ao critério da Soma de Variâncias Bipartites. Primeiramente calcula-se as variâncias dos operadores,

$$\hat{u} \equiv h_1\hat{x}_1 + h_2\hat{x}_2 + h_3\hat{x}_3 \quad (4.13)$$

$$\hat{v} \equiv g_1\hat{p}_1 + g_2\hat{p}_2 + g_3\hat{p}_3, \quad (4.14)$$

com h_l e g_l parâmetros arbitrários. Para o estado separável na forma,

$$\hat{\rho} = \sum_i \eta_i \hat{\rho}_{i,km} \otimes \hat{\rho}_{i,n}, \quad (4.15)$$

com $\sum_i \eta_i = 1$ e (k,m,n) alguma combinação de $(1,2,3)$. Aqui, $\hat{\rho}_{i,km} \otimes \hat{\rho}_{i,n}$ indica que o operador densidade é uma mistura dos estados i com os modos k e m emaranhados ou não, mas com o modo n separável do resto.

Um estado totalmente separável teria a forma:

$$\hat{\rho} = \sum_i \eta_i \hat{\rho}_{i,1} \otimes \hat{\rho}_{i,2} \otimes \hat{\rho}_{i,3}. \quad (4.16)$$

Veremos que o limite inferior da soma das variâncias em \hat{u} e \hat{v} para o operador densidade (4.15) está abaixo do limite imposto pelo operador densidade dos estados totalmente separáveis (4.16), por isso assumiremos a representação (4.15).

Seguindo os mesmos passos utilizados anteriormente, ou seja, aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a relação de incerteza e impondo a separabilidade do modo n através das igualdades $\langle \hat{x}_k \hat{x}_n \rangle_i = \langle \hat{x}_k \rangle_i \langle \hat{x}_n \rangle_i$ e $\langle \hat{x}_m \hat{x}_n \rangle_i = \langle \hat{x}_m \rangle_i \langle \hat{x}_n \rangle_i$ encontramos a relação

$$\langle(\Delta\hat{u})^2\rangle_\rho + \langle(\Delta\hat{v})^2\rangle_\rho \geq (|h_n g_n| + |h_k g_k + h_m g_m|) / 2, \quad (4.17)$$

que gera três desigualdades pela permutação dos índices (k,m,n) em (1,2,3),

$$\langle(\Delta\hat{u})^2\rangle_{\rho_1} + \langle(\Delta\hat{v})^2\rangle_{\rho_1} \geq (|h_1 g_1| + |h_2 g_2 + h_3 g_3|) / 2, \quad (4.18)$$

$$\langle(\Delta\hat{u})^2\rangle_{\rho_2} + \langle(\Delta\hat{v})^2\rangle_{\rho_2} \geq (|h_2 g_2| + |h_1 g_1 + h_3 g_3|) / 2, \quad (4.19)$$

$$\langle(\Delta\hat{u})^2\rangle_{\rho_3} + \langle(\Delta\hat{v})^2\rangle_{\rho_3} \geq (|h_3 g_3| + |h_1 g_1 + h_2 g_2|) / 2. \quad (4.20)$$

Para um estado completamente separável (1.16) teríamos,

$$\langle(\Delta\hat{u})^2\rangle_\rho + \langle(\Delta\hat{v})^2\rangle_\rho \geq (|h_n g_n| + |h_k g_k| + |h_m g_m|) / 2, \quad (4.21)$$

pelo fato de valer aqui a igualdade $\langle\hat{x}_k \hat{x}_m\rangle_i = \langle\hat{x}_k\rangle_i \langle\hat{x}_m\rangle_i$.

Podemos facilmente perceber que o lado direito de (4.21) é maior ou igual ao de (4.17) pois os h_l e g_l podem assumir valores negativos. Por fim para um estado qualquer temos a relação,

$$\langle(\Delta\hat{u})^2\rangle_\rho + \langle(\Delta\hat{v})^2\rangle_\rho \geq (h_n g_n + h_k g_k + h_m g_m) / 2. \quad (4.22)$$

Esta última desigualdade será de suma importância para nos ajudar a designar valores de alguns dos parâmetros h_l e g_l para qualquer que seja o sistema físico em questão. Pelo fato dos operadores \hat{u} e \hat{v} comutarem podemos escolher um conjunto de valores para os parâmetros a fim de zerarmos o lado direito da equação (4.22) encontrando, assim, maior violação de (4.21). O primeiro conjunto escolhido será $h_1 = -h_2 = g_1 = g_2 = 1$ e $h_3 = 0$, que substituindo em (4.21) nos dará a desigualdade,

$$\langle\Delta^2(\hat{x}_1 - \hat{x}_2)\rangle_\rho + \langle\Delta^2(\hat{y}_1 + \hat{y}_2 + g_3 \hat{y}_3)\rangle_\rho \geq 4, \quad (4.23)$$

que se violada, podemos garantir a existência de emaranhamento neste sistema. Para as desigualdades de pelo menos um modo separável (4.18), temos em função destes parâmetros,

$$\langle \Delta^2(\hat{x}_1 - \hat{x}_2) \rangle_{\rho_{sep1}} + \langle \Delta^2(\hat{y}_1 + \hat{y}_2 + g_3 \hat{y}_3) \rangle_{\rho_{sep1}} \geq 4, \quad (4.24)$$

$$\langle \Delta^2(\hat{x}_1 - \hat{x}_2) \rangle_{\rho_{sep2}} + \langle \Delta^2(\hat{y}_1 + \hat{y}_2 + g_3 \hat{y}_3) \rangle_{\rho_{sep2}} \geq 4, \quad (4.25)$$

$$\langle \Delta^2(\hat{x}_1 - \hat{x}_2) \rangle_{\rho_{sep3}} + \langle \Delta^2(\hat{y}_1 + \hat{y}_2 + g_3 \hat{y}_3) \rangle_{\rho_{sep3}} \geq 0. \quad (4.26)$$

Ou seja, sendo (4.23) violada podemos afirmar que os estados 1 e 2 não podem ser separados do sistema, mas nada podemos dizer sobre o estado 3 por enquanto, por isso escolheremos um novo conjunto de valores; $h_1 = h_3 = g_1 = -g_3 = 1$ e $h_2 = 0$, os quais zeram (4.22) e nos dão para um estado completamente separável a desigualdade,

$$\langle \Delta^2(\hat{x}_1 + \hat{x}_3) \rangle_{\rho} + \langle \Delta^2(\hat{y}_1 - \hat{y}_3 + g_2 \hat{y}_2) \rangle_{\rho} \geq 4, \quad (4.27)$$

que gera,

$$\langle \Delta^2(\hat{x}_1 + \hat{x}_3) \rangle_{\rho_{bissep1}} + \langle \Delta^2(\hat{y}_1 - \hat{y}_3 + g_2 \hat{y}_2) \rangle_{\rho_{bissep1}} \geq 4, \quad (4.28)$$

$$\langle \Delta^2(\hat{x}_1 + \hat{x}_3) \rangle_{\rho_{bissep2}} + \langle \Delta^2(\hat{y}_1 - \hat{y}_3 + g_2 \hat{y}_2) \rangle_{\rho_{bissep2}} \geq 0, \quad (4.29)$$

$$\langle \Delta^2(\hat{x}_1 + \hat{x}_3) \rangle_{\rho_{bissep3}} + \langle \Delta^2(\hat{y}_1 - \hat{y}_3 + g_2 \hat{y}_2) \rangle_{\rho_{bissep3}} \geq 4, \quad (4.30)$$

e nos permite concluir que se (4.27) for violada temos que os estados 1 e 3 são inseparáveis, mas nada podemos afirmar sobre o estado 2.

Podemos agora testar as desigualdades (4.23) e (4.27) conjuntamente, se as duas forem violadas, o sistema é emaranhado tripartite, pois os estados 1, 2 e 3 são inseparáveis, mas se apenas uma delas sofrer violação ainda nos resta uma maneira de determinarmos se o sistema possui este tipo de emaranhamento: testar, por exemplo, a combinação $h_1 = 0$ e $h_2 = h_3 = g_2 = -g_3 = 1$, que nos fornece,

$$\langle \Delta^2(\hat{x}_2 + \hat{x}_3) \rangle_{\rho} + \langle \Delta^2(g_1 \hat{y}_1 + \hat{y}_2 - \hat{y}_3) \rangle_{\rho} \geq 4, \quad (4.31)$$

que se não satisfeita, demonstra que os estados 2 e 3 são inseparáveis, como podemos ver nas equações abaixo,

$$\langle \Delta^2(\hat{x}_1 + \hat{x}_3) \rangle_{\rho_{bissep1}} + \langle \Delta^2(\hat{y}_1 - \hat{y}_3 + g_2\hat{y}_2) \rangle_{\rho_{bissep1}} \geq 0, \quad (4.32)$$

$$\langle \Delta^2(\hat{x}_1 + \hat{x}_3) \rangle_{\rho_{bissep2}} + \langle \Delta^2(\hat{y}_1 - \hat{y}_3 + g_2\hat{y}_2) \rangle_{\rho_{bissep2}} \geq 4, \quad (4.33)$$

$$\langle \Delta^2(\hat{x}_1 + \hat{x}_3) \rangle_{\rho_{bissep3}} + \langle \Delta^2(\hat{y}_1 - \hat{y}_3 + g_2\hat{y}_2) \rangle_{\rho_{bissep3}} \geq 4. \quad (4.34)$$

Logo as desigualdades que nos permitem detectar emaranhamento tripartite são:

$$\langle \Delta^2(\hat{x}_1 - \hat{x}_2) \rangle_{\rho_{sep12}} + \langle \Delta^2(\hat{y}_1 + \hat{y}_2 + g_3\hat{y}_3) \rangle_{\rho_{sep12}} \geq 4, \quad (4.35)$$

$$\langle \Delta^2(\hat{x}_1 + \hat{x}_3) \rangle_{\rho_{sep13}} + \langle \Delta^2(\hat{y}_1 - \hat{y}_3 + g_2\hat{y}_2) \rangle_{\rho_{sep13}} \geq 4, \quad (4.36)$$

$$\langle \Delta^2(\hat{x}_2 + \hat{x}_3) \rangle_{\rho_{sep23}} + \langle \Delta^2(g_1\hat{y}_1 + \hat{y}_2 - \hat{y}_3) \rangle_{\rho_{sep23}} \geq 4. \quad (4.37)$$

Sendo duas delas violadas podemos concluir que o sistema é emaranhado tripartite.

Lembrando que a violação das desigualdades define inseparabilidade mas a não violação não nos dá nenhuma informação sobre o sistema, seguindo esta linha de raciocínio podemos identificar a qual classe de emaranhamento um estado pertence ou a qual classe ele poderá pertencer.

No caso em que pelo menos duas desigualdades foram violada podemos concluir que o estado é de classe um, não podendo ser descrito como o produto tensorial de nenhuma das partes separadamente. Temos um genuíno emaranhamento tripartite. Já se apenas uma desigualdade for violada, temos certamente duas das três partes inseparáveis e nada podemos afirmar sobre a terceira, sendo assim o estado pode ser de classe 2 ou de classe 1, mas se nenhuma delas for violada ele poderá pertencer a qualquer uma das classes sendo necessário um novo critério para identificá-lo.

Até agora falamos o que é emarnhamento e como tentar identificá-lo mas ainda não nos pronunciamos como criar um estado emaranhado num laboratório, dentre outros mecanismos temos o oscilador paramétrico ótico que será apresentado no próximo capítulo.

Capítulo 5

O Oscilador Paramétrico Óptico

O Oscilador Paramétrico Óptico consiste em uma cavidade ótica tipo Fabry Perrot, onde temos um arranjo de espelhos semi-transparentes que permitem a entrada e saída das ondas eletromagnéticas, além de um cristal não linear em seu interior, o qual torna possível a produção dos feixes convertidos, denominados sinal (*signal*) e auxiliar, (*idler*), ou ainda, complementar, de frequências ω_1 e ω_2 , a partir do feixe de bombeamento (*pump*), de frequência ω_0 , com ω_0 maior que ω_1 e ω_2 respeitando a conservação de energia $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$.

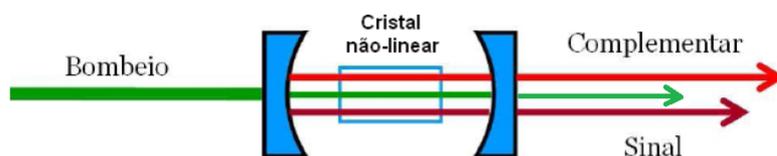


Figura 5.1: Oscilador Paramétrico Óptico

O OPO é assim denominado por oscilar em frequências ópticas, quando o feixe de bombeamento atinge uma potência característica denominada, potência de limiar. No entanto, este

sistema pode operar tanto abaixo e acima do limiar quanto no limiar de oscilação.

Uma de suas grandes vantagens é ser um sistema sintonizável onde podemos escolher a frequência dos feixes de saída alterando o acordo de fase com o cristal não linear, ou mudando a frequência do bombeamento.

5.1 Óptica Não Linear

Após a demonstração do laser por Maiman [21] foi possível observar fenômenos até então desconhecidos. Por ser uma fonte de luz coerente e emitir intensidades bem mais altas quando comparadas com fontes incoerentes, numa faixa de frequência muito pequena, sendo considerado uma fonte quase monocromática que pouco diverge, foi possível observar a geração de um feixe transmitido com o dobro da frequência do feixe incidente devido a sua interação com um cristal não linear, tal experimento realizado em 1961 por Franken, Hill, Peters e Weinreich foi denominado geração de segundo harmônico e marcou o surgimento de uma nova área da física, a Óptica não linear.

Esse ramo da física estuda fenômenos provenientes da modificação das propriedades óticas de certos materiais pela presença da luz.

A polarização em um meio dielétrico é dada por:

$$(\vec{P}(t))_i = \epsilon_0 \left[\chi_{i,j}^{(1)} E_j(t) + \chi_{i,j,k}^{(2)} E_j(t) E_k(t) + \chi_{i,j,k,l}^{(3)} E_j(t) E_k(t) E_l(t) + \dots \right] \quad (5.1)$$

onde χ^n é o tensor de susceptibilidade elétrica de ordem n , e deve ser representado por tensores, já que a direção da polarização do cristal pode ser diferente da direção da polarização do feixe. O primeiro termo do lado direito da equação é bem conhecido e retrata a resposta linear do material ao campo, já os outros termos só foram percebidos através das altas intensidades emitidas pelo laser, hoje em dia com a fabricação de materiais que favorecem o aumento das susceptibilidades não lineares podemos observar tais interações com intensidades mais baixas. Nesta dissertação nos deteremos aos processos gerados pela susceptibilidade elétrica de segunda ordem, representado por $\chi^{(2)}$. São eles: a geração de segundo harmônico e, a soma e subtração de frequências, ou conversão paramétrica ascendente e descendente.

Geração de Segundo Harmônico

Seja o campo elétrico referente no cristal descrito na forma:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} + c.c. \quad (5.2)$$

onde $c.c.$ denota seu complexo conjugado.

A polarização não linear de segunda ordem sofrida pelo cristal será,

$$\begin{aligned} \vec{P}_{NL}^{(2)} &= \epsilon \chi^{(2)} \vec{E} \vec{E} \\ &= \epsilon \chi^{(2)} \left[\vec{E}_0 \vec{E}_0 e^{i(2\vec{K} \cdot \vec{r} - 2\omega t)} + \vec{E}_0 \vec{E}_0^* + c.c. \right], \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde o primeiro termo é responsável pelo surgimento de uma onda eletromagnética com o dobro da frequência da onda incidente, e o segundo origina um campo estacionário, provocando um efeito ao qual chamamos retificação ótica.

A geração de segundo harmônico pode ser usada por exemplo para produzir um feixe na faixa do visível a partir de um feixe infravermelho.

Conversão Paramétrica Ascendente e Descendente

Para que ocorra estes processos, classicamente é necessária a incidência de dois feixes no cristal, suponhamos um com frequência ω_1 e outro de frequência ω_2 ,

$$\vec{E} = \vec{E}_{01} e^{i(\vec{k}_1 \cdot \vec{r} - \omega_1 t)} + \vec{E}_{02} e^{i(\vec{k}_2 \cdot \vec{r} - \omega_2 t)} + c.c. , \quad (5.4)$$

que geram a polarização de segunda ordem,

$$\begin{aligned} \vec{P}^{(2)}(t) &= \epsilon \chi^{(2)} \left[E_1^2 e^{-2i\omega_1 t} + E_2^2 e^{-2i\omega_2 t} + \vec{E}_1 \vec{E}_2 e^{-i(\omega_1 + \omega_2)t} \right. \\ &\quad \left. + \vec{E}_1 \vec{E}_2^* e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} + E_1 E_1^* + E_2 E_2^* + c.c. \right] . \end{aligned} \quad (5.5)$$

Nesta equação podemos identificar os termos referentes a geração de segundo harmônico dos feixes de frequência ω_1 e ω_2 , e suas respectivas retificações óticas, e dois outros termos novos, o primeiro deles,

$$\vec{P}(\omega_1 - \omega_2) = \epsilon\chi^{(2)} \vec{E}_{01} \vec{E}_{02} e^{i[(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \cdot \vec{r} - (\omega_1 + \omega_2)t]} + c.c. \quad (5.6)$$

origina a soma de frequências, onde um feixe com frequência $(\omega_1 + \omega_2)$ é gerado. Por fim o termo,

$$\vec{P}(\omega_1 - \omega_2) = \epsilon\chi^{(2)} \vec{E}_{01} \vec{E}_{02}^* e^{i[(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r} - (\omega_1 - \omega_2)t]} + c.c. \quad (5.7)$$

denota a conversão paramétrica descendente, onde é gerado um feixe de frequência $(\omega_1 - \omega_2)$.

Vimos que a susceptibilidade elétrica de segunda ordem origina vários processos não lineares, no entanto, é possível favorecer apenas um fenômeno através de um corte adequado do cristal. É possível fazê-lo de forma a provocar uma diferença de fase destrutiva para os processos que não desejamos contemplar.

A CPD pode se dar de duas formas: uma estimulada, a qual necessita que dois feixes luminosos interajam no meio não linear para formar o terceiro, e outra espontânea, onde a CPD ocorre com a inserção de apenas um feixe. Este fenômeno é puramente quântico e pode ser explicado pela quantização do campo eletromagnético e sua consequente energia de ponto zero de vácuo. Na verdade a CPD Espontânea é um processo estimulado, estimulado pelo vácuo quântico.

5.1.1 Equação de onda em um meio não linear

As equações de Maxwell em meios dielétricos ideais, não magnéticos ($\mu = \mu_0$) na ausência de cargas livres ($\rho_l = 0$) são:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

com \vec{J} a densidade de corrente dada pela multiplicação da condutividade σ , que representa a absorção do meio, pelo campo \vec{E} ; $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ e

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}, \\ \vec{B} &= \mu_0 \vec{H}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

sendo \vec{D} o vetor deslocamento e \vec{P} a polarização elétrica do meio, descrita como uma soma de um termo linear com um termo não linear,

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi^1 \vec{E} + \vec{P}_{NL}. \quad (5.10)$$

Substituindo as definições (5.10) e (5.9) em (5.8) encontramos,

$$\nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon \vec{E}) + \frac{\partial}{\partial t} \vec{P}_{NL}, \quad (5.11)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \vec{H}), \quad (5.12)$$

onde $\epsilon = (1 + \chi^1) \epsilon_0$.

Para encontrarmos a equação de onda tomaremos o rotacional de 5.12

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \vec{H}), \quad (5.13)$$

com $\nabla \times \vec{H}$ dado por (5.11) e utilizaremos a propriedade matemática,

$$\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla (\nabla \cdot A) - \nabla^2 A, \quad (5.14)$$

obtendo deste modo a equação de onda para o nosso sistema físico na aproximação $\nabla \cdot \vec{E} = 0$

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}_{NL}}{\partial t^2}. \quad (5.15)$$

Esta equação difere da equação de onda no espaço vazio somente pelo termo que envolve a polarização não linear do meio em questão, a qual é responsável pelos processos descritos anteriormente.

5.1.2 Equações de onda acopladas, CPD estimulada

Veremos aqui em mais detalhes o processo de subtração de frequências.

Os campos de entrada, bombeamento e complementar, possuem frequências ω_0 e ω_1 e o campo de saída, sinal, frequência ω_2 .

Para simplificar o problema adotaremos uma geometria colinear. Escolheremos o eixo de propagação sendo o eixo z , consideraremos os campos como ondas planas, conseqüentemente sem componentes na direção de propagação. Suas componentes são:

$$E_i^{(\omega_0)} = A^{(\omega_0)} e^{(k_0 z - \omega_0 t)} + c.c., \quad (5.16)$$

$$E_j^{(\omega_1)} = A^{(\omega_1)} e^{(k_1 z - \omega_1 t)} + c.c., \quad (5.17)$$

$$E_k^{(\omega_2)} = A^{(\omega_2)} e^{(k_2 z - \omega_2 t)} + c.c., \quad (5.18)$$

onde os índices (i, j, k) representam as componentes de polarização que no nosso caso podem assumir as orientações (x, y) . O termo de polarização responsável pela geração da diferença das frequências será, para a componente j do complementar por exemplo,

$$[P^{(\omega_1)}]_j = \chi_{ikj} A_i^{(\omega_0)}(z) A_k^{(\omega_2)}(z) e^{i[(\omega_0 - \omega_2)t - (k_0 - k_2)z]} \quad (5.19)$$

com um somatório sobre os índices repetidos subentendido. É importante ressaltar algumas simetrias do tensor de susceptibilidade elétrica, a simetria de permutação, onde $\chi_{ikj}^2(\omega_2, \omega_0, \omega_1) = \chi_{jki}^2(\omega_0, \omega_1, \omega_2) = \chi_{kij}^2(\omega_1, \omega_2, \omega_0)$, que pode ser deduzida a partir da densidade de energia do campo, e a simetria de Kleimman, que propõe a susceptibilidade praticamente independente da frequência, pelo fato das frequências envolvidas serem muito menores do que a mais baixa frequência de ressonância do cristal.

Substituindo (5.10) na equação de onda (5.15), onde a derivada temporal será dada por $\frac{d}{dt} \rightarrow i\omega$ e aplicando a aproximação do pacote lentamente variável, onde A_j só varia apreciavelmente ao longo de k_j , ou seja,

$$\frac{d^2 A_j}{dz^2} \ll ik_1 \frac{dA_j}{dz} \quad , \quad (5.20)$$

encontramos a equação que modela a amplitude do feixe auxiliar considerando haver poucas perdas no meio, desprezando assim o termo de absorção,

$$\frac{\partial A_1}{\partial z} = \frac{i\chi\omega_1}{2n_1 c} A_2^* A_0 e^{i\Delta K z}. \quad (5.21)$$

Da mesma forma obtemos as equações para os campos sinal e complementar:

$$\frac{\partial A_0}{\partial z} = \frac{i\chi\omega_0}{2n_0c} A_2 A_1 e^{-i\Delta K z}, \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial z} = \frac{i\chi\omega_2}{2n_3c} A_0 A_1^* e^{-i\Delta K z}. \quad (5.23)$$

sendo A_j^* o complexo conjugado de A_j , $\Delta k \equiv k_0 - k_1 - k_2$ chamado *desacordo de fase*, e n_j o índice de refração para o feixe j .

Casamento de fase

Supondo o comprimento L do cristal suficientemente pequeno de modo que $A_0(z)$ e $A_1(z)$ sejam praticamente constantes em seu interior, então

$$\begin{aligned} A_2(L) &= A_2(0) + \int_0^L \frac{\partial A_2}{\partial z} dz \\ &= \frac{i\chi\omega_2}{2n_2c} A_0 A_1^* \int_0^L e^{i\Delta K z} dz \\ &= \frac{i\chi\omega_2}{2n_2c} A_0 A_1^* \frac{e^{i\Delta K L} - 1}{i\Delta K}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

com $A_2(0) = 0$ já que inicialmente só temos a incidência dos feixes 0 e 1.

Sendo a intensidade do feixe proporcional ao módulo quadrado da amplitude, temos:

$$I_2 \propto L^2 \frac{\sin^2(\Delta K L/2)}{(\Delta K L/2)^2} = L^2 \text{sinc}^2\left(\frac{\Delta K L}{2}\right). \quad (5.25)$$

Vemos através do gráfico (5.1.2) que há máxima conversão dos feixes incidentes no feixe de saída, para $\Delta k = 0$, chamamos esta condição de casamento de fase (*phase matching*).

Fisicamente podemos interpretar o casamento de fase da seguinte forma; a onda incidente polariza o cristal fazendo com que suas moléculas passem a oscilar gerando uma nova onda em fase com a primeira.

Para esta particular condição temos a solução das equações acopladas (5.21), (5.22):

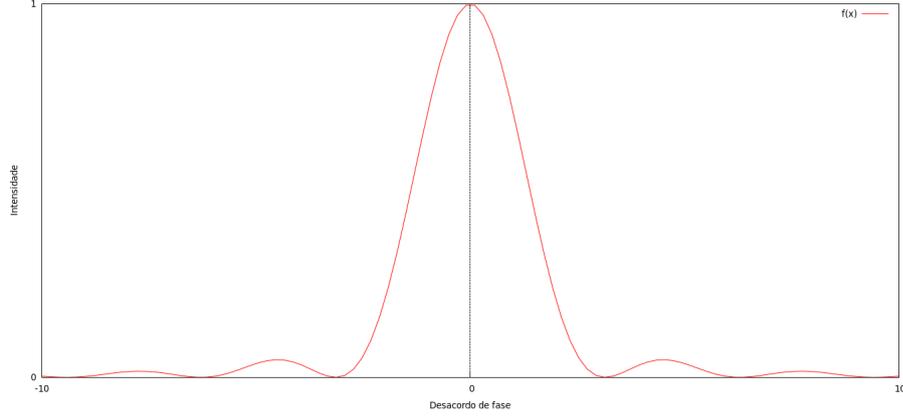


Figura 5.2: Intensidade do feixe convertido no OPO em função do desacordo de fase.

$$A_1(z) = A_1 \cosh(A_0 k z), \quad (5.26)$$

$$A_2(z) = i A_1 \cosh(A_0 k z). \quad (5.27)$$

dada as condições de contorno,

$$A_0(0) = A_0 = cte,$$

$$A_1(0) = A_1 = cte,$$

$$A_2(0) = 0.$$

Relações de Manley Rowe

Definimos as intensidades dos feixes,

$$I_j = \frac{1}{2} n_j c \epsilon_0 |A_j|^2, \quad (5.28)$$

que variam ao longo do eixo z da forma,

$$\frac{dI_j}{dz} = \frac{n_j c \epsilon_0}{2} \left(A_j^* \frac{dA_j}{dz} + A_j \frac{dA_j^*}{dz} \right). \quad (5.29)$$

A partir das equações (5.21) e (5.22) podem ser deduzidas as equações de Manley-Rowe,

$$\frac{dI_1}{dz} + \frac{dI_2}{dz} + \frac{dI_3}{dz} = 0, \quad (5.30)$$

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{I_1}{\omega_1} \right) = \frac{d}{dz} \left(\frac{I_2}{\omega_2} \right) = -\frac{d}{dz} \left(\frac{I_3}{\omega_3} \right), \quad (5.31)$$

que nos mostram que a variação nas intensidades dos campos A_1 e A_2 são iguais, já a variação de A_3 ocorre negativamente a estas, indicando que toda intensidade perdida pelo bombeamento amplifica as intensidades dos feixes sinal e auxiliar.

É importante lembrar que estas relações foram deduzidas das equações para meios sem perdas sendo válidas apenas sobre esta condição.

5.2 Formalismo Clássico para o OPO

Consideraremos o modelo de OPO em forma de anel, que é constituído por três espelhos como mostrado na figura, sendo dois deles ideais, ou seja, com reflexões unitárias e o outro chamado de espelho de acoplamento o qual permitirá a passagem do feixe incidente ao mesmo tempo que permitirá a saída dos feixes convertidos pelo OPO. Este espelho possui coeficiente de reflexão r_j , com o índice j correspondendo a frequência de cada feixe, bombeamento, sinal e complementar, $j = (0, 1, 2)$.

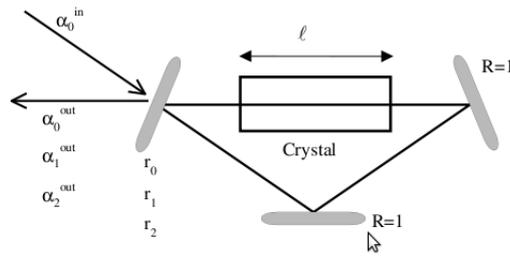


Figura 5.3: Oscilador Paramétrico Óptico em forma de anel.

Na aproximação de grande finesse, onde consideramos pequenas perdas devido ao espelho de acoplamento, permitindo-nos tratar os coeficientes de reflexão e transmissão como,

$$\begin{aligned}
r_j &= e^{-\gamma_j} \simeq 1 - \gamma_j, \\
t_j &= (2\gamma_j)^{1/2},
\end{aligned}
\tag{5.32}$$

com $\gamma_j \ll 1$. A transmitância e refletividade totais são obtidas elevando estes coeficientes ao quadrado, como exemplo, temos a transmitância dada por $T_j = 2\gamma_j$.

As equações obtidas anteriormente para o meio não linear foram deuzidas para os campos considerados como ondas planas, a partir daqui trataremos de feixes gaussianos a fim de retratar uma real situação física em um laboratório. Por conta disto algumas alterações serão necessárias.

Para um modo gaussiano os termos de polarização não linear são descritos da forma:

$$\begin{aligned}
P_0^{(\omega_0)}(\vec{r}) &= \epsilon_0 \chi A_1(z) A_2(z) e^{-\frac{(x^2+y^2)}{w_0^2}} e^{-i\Delta kz}, \\
P_1^{(\omega_1)}(\vec{r}) &= \epsilon_0 \chi A_0(z) A_2^*(z) e^{-\frac{(x^2+y^2)}{w_1^2}} e^{i\Delta kz}, \\
P_2^{(\omega_2)}(\vec{r}) &= \epsilon_0 \chi A_0(z) A_1^*(z) e^{-\frac{(x^2+y^2)}{w_2^2}} e^{i\Delta kz}.
\end{aligned}
\tag{5.33}$$

O parâmetro w_j define uma dependência transversa de polarização e é dependente da cintura (*waist*) dos modos acoplados. Sendo

$$\frac{1}{w_j^2} = \frac{1}{w_k^2} + \frac{1}{w_l^2},
\tag{5.34}$$

com $j \neq k$, $k \neq l$ e $(j,k,l)=(0,1,2)$.

Em consequência disto teremos um novo termo de susceptibilidade, chamado de susceptibilidade efetiva que levará em conta a forma gaussiana do feixe. Ele depende da susceptibilidade não linear do cristal e da superposição dos modos gaussianos. Sob as considerações que não há acoplamento de diferentes modos transversos além de w ser constante ao longo do cristal e a cintura do feixe estar no interior do meio não linear temos que

$$\chi_{eff} = \chi \frac{w_0 w_1 w_2}{w_0^2 w_1^2 + w_0^2 w_2^2 + w_1^2 w_2^2} \left(\frac{\hbar w_0 w_1 w_2}{\pi \epsilon_0 c^3 n_0 n_1 n_2} \right).
\tag{5.35}$$

Com termo χ englobando a dependência da polarização dos campos no meio não linear e a orientação do cristal.

As novas equações que modelam as amplitudes dos campos para feixes gaussianos considerando ainda uma geometria colinear na direção z , são:

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha_0}{dz} &= -\chi_{eff}\alpha_1\alpha_2e^{-i\Delta kz}, \\ \frac{d\alpha_1}{dz} &= \chi_{eff}\alpha_0\alpha_2^*e^{i\Delta kz}, \\ \frac{d\alpha_2}{dz} &= \chi_{eff}\alpha_0\alpha_1^*e^{i\Delta kz},\end{aligned}\tag{5.36}$$

onde redefinimos o envelope lentamente variável através das variáveis complexas α_j , agora normalizadas, tendo seu módulo quadrado representando a taxa de fótons por segundo que atravessam uma seção reta que contemple toda área do feixe.

$$\alpha_j(z) = \sqrt{\frac{n_j\epsilon_0c\pi w_j^2}{4\hbar\omega_j}}A_j(z)\tag{5.37}$$

Para saber o comportamento das amplitudes após uma única passagem pelo cristal iremos integrar as equações (5.36) considerando que o ganho total dos feixes foi pequeno permitindo a aproximação até a primeira ordem para a constante de acoplamento, temos as equações para os campos,

$$\begin{aligned}\alpha_0(l) &= \alpha_0(0) - l\chi_{eff}\alpha_1\alpha_2e^{-i\Delta kl}\text{sinc}\left(\frac{\Delta kl}{2}\right), \\ \alpha_1(l) &= \alpha_1(0) + l\chi_{eff}\alpha_0\alpha_2^*e^{-i\Delta kl}\text{sinc}\left(\frac{\Delta kl}{2}\right), \\ \alpha_2(l) &= \alpha_2(0) + l\chi_{eff}\alpha_0\alpha_1^*e^{-i\Delta kl}\text{sinc}\left(\frac{\Delta kl}{2}\right).\end{aligned}\tag{5.38}$$

Sendo l o comprimento do cristal e a função *sinc* o seno cardinal, da qual podemos notar que para um acordo de fase $\Delta k = 0$ ela atinge seu maior valor, sendo nesta condição o acoplamento entre os campos máximo.

Agora que temos a variação dos campos gaussianos ao passar pelo cristal podemos obter as suas equações intracavidade. Tomaremos o OPO triplamente ressonante mostrado na figura

(5.3), onde temos uma cavidade de comprimento total $L_{cav} = L + l$, com l sendo o comprimento do cristal e L o comprimento livre restante em seu interior.

Após uma volta completa temos as amplitudes,

$$\begin{aligned}\alpha'_0 &= r_0 e^{i\phi_0} [\alpha_0 - g^*(\Delta k) \alpha_1 \alpha_2] + t_0 \alpha_0^{in}, \\ \alpha'_1 &= r_1 e^{i\phi_1} [\alpha_1 - g(\Delta k) \alpha_0 \alpha_2^*] + t_1 \alpha_1^{in}, \\ \alpha'_2 &= r_2 e^{i\phi_2} [\alpha_2 - g(\Delta k) \alpha_0 \alpha_1^*] + t_2 \alpha_2^{in},\end{aligned}\tag{5.39}$$

que representa a superposição do campo após uma volta pela cavidade, retratado pelo primeiro termo, com o campo imediatamente incidente, explicitado pelo segundo termo. A função $g(\Delta k)$ é escrita na forma,

$$g(\Delta k) = l \chi_{eff} sinc\left(\frac{\Delta k l}{2}\right) e^{i\Delta k/2},\tag{5.40}$$

tendo o seno cardinal valor máximo para seu argumento nulo, temos que quando alcançamos o acordo de fase, $\Delta k = 0$ há um máximo acoplamento entre os feixes. Podemos enxergar o desacordo de fase Δk como um modulador do novo coeficiente de acoplamento.

Por fim a fase ϕ_j em (5.39) é devida as defasagens sofridas pelos campos em seu percurso. Somando a fase acumulada na propagação no espaço livre e no cristal temos,

$$\phi_j = \frac{\omega_j}{c} (n_j l + L) = 2p_j \pi + \delta\phi_j.\tag{5.41}$$

Aqui escrevemos a fase como um múltiplo de períodos completos p_j adicionada a uma dessintonia $\delta\phi_j$, com $\delta\phi_j \ll 2\pi$.

Considerando pequenas perdas podemos levar em conta a absorção do cristal, difração por irregularidades no espelhos, reflexão na interface cristal/ar, entre outros mecanismos de dissipação como uma "transmissão" extra $t = e^{-\mu}$, incorporando-a aos coeficientes de reflexão fazendo $\gamma_j \rightarrow \gamma'_j = \gamma_j + \mu_j$.

Tomando as pequenas dessintonias normalizadas pelas perdas,

$$\Delta_j = \delta\phi_j / \gamma'_j,\tag{5.42}$$

podemos calcular os valores médios dos campos,

$$\alpha_0 \gamma_0' [1 - i\Delta_0] = -g\alpha_1\alpha_2 + \sqrt{\gamma_0}\alpha_0^{in}, \quad (5.43)$$

$$\alpha_1 \gamma_1' [1 - i\Delta_1] = g\alpha_0\alpha_2^*, \quad (5.44)$$

$$\alpha_2 \gamma_2' [1 - i\Delta_2] = g\alpha_0\alpha_1^*. \quad (5.45)$$

Através destas equações clássicas podemos identificar o limiar de oscilação dos campos.

Condição de Oscilação do OPO.

Das equações (5.43 - 5.45) podemos identificar imediatamente uma das soluções, a solução trivial, sem oscilação, com $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Neste caso só teremos o comportamento do bombeamento no interior da cavidade dado por 5.43. A outra solução possível pode ser obtida tomando o complexo conjugado de (5.45) multiplicado por (5.44),

$$\gamma_1' \gamma_2' [1 - i\Delta_1][1 - i\Delta_2] = g^2 |\alpha_0|^2. \quad (5.46)$$

Da parte imaginária encontramos $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ que implica em,

$$\gamma_1' |\alpha_1|^2 = \gamma_2' |\alpha_2|^2. \quad (5.47)$$

Lembrando que o novo coeficiente de transmissão é dado por $T = 2\gamma_j'$ podemos interpretar (5.47) como a intensidade, ou número médio de fótons total que saem da cavidade, seja por perdas ou por transmissão pelo espelho de acoplamento, sendo estes iguais para os feixes sinal e complementar indicando uma forte correlação entre eles, ainda que clássica.

A parte real de (5.47) fornece a intensidade limite do feixe de bombeamento no interior da cavidade,

$$|\alpha_0|^2 = \frac{\gamma_1' \gamma_2' (1 + \Delta^2)}{g^2} \quad (5.48)$$

o que indica que a dessintonia Δ limita a intensidade intracavidade, mesmo que a potência do feixe do laser seja aumentada, a intensidade dele intracavidade permanecerá constante.

Podemos encontrar a intensidade mínima que o laser deve fornecer para que o OPO alcance a oscilação substituindo (5.48) em (5.43),

$$|\alpha_0^{in}|_{lim}^2 = \frac{\gamma_0^2 \gamma_1^2 \gamma_2^2 (1 + \Delta_0^2)(1 + \Delta^2)}{2g^2 \gamma_0}. \quad (5.49)$$

Abaixo deste valor não há oscilação do sistema e acima dele a intensidade do bombeamento intracavidade permanece inalterada.

5.3 Formalismo Quântico para o OPO

O hamiltoniano que representa o OPO é descrito na representação de Heisenberg por:

$$\begin{aligned} \hat{H} = & \sum_{i=0}^2 \hbar \omega_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i + i \hbar \chi \left(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_0 - \hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_0^\dagger \right) \\ & + i \hbar \left(\varepsilon e^{-i\omega_0 t} \hat{a}_0^\dagger - \varepsilon^* e^{i\omega_0 t} \hat{a}_0 \right) + \sum_{i=0}^2 \left(\hat{a}_i \Gamma_i^\dagger + \hat{a}_i^\dagger \Gamma_i \right), \end{aligned} \quad (5.50)$$

sendo \hbar a constante de Planck dividida por 2π . O primeiro termo deste hamiltoniano representa a parte livre do sistema descrita na forma de osciladores harmônicos, onde temos a energia total associada aos feixes sinal, complementar e bombeamento dada pelo operador número, o segundo termo, que acompanha a constante não linear de acoplamento de segunda ordem dos campos χ representa a interação entre os três campos gerada pelo cristal não linear, com $\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_0$ denotando a destruição de um fóton de frequência ω_0 e a criação de outros dois com frequência ω_1 e ω_2 e $\hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{a}_0^\dagger$ representando um processo menos provável onde dois fótons de frequências ω_2 e ω_1 são destruídos gerando um fóton de frequência ω_0 . No terceiro termo ε é a intensidade do feixe de bombeamento, ele é o nosso parâmetro regulável que determinará o regime de trabalho do OPO, acima, abaixo ou no limiar de oscilação. Por fim, o último termo dado pelo operador do reservatório $\hat{\Gamma}_i$, que é constituído por uma contante de acoplamento que associa os modos do reservatório dado pelos seus operadores de criação e aniquilação, com os modos do sistema já apresentados explicitamente neste termo pelos operadores de criação e aniquilação do sistema.

Por se tratar de um sistema aberto a evolução temporal do operador densidade deve ser calculada como solução de uma equação mestra na representação de Schrödinger, que pode

ser obtida por adição do cristal não linear no sistema dissipativo composto de uma cavidade tipo Fabry-Perrot exposto no capítulo 1. A modificação se encontra no segundo termo do hamiltoniano, que representa a interação entre o cristal e o feixe de bombeamento. A equação mestra na perspectiva de Schrödinger será,

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \left[\hat{H}_0 + \hat{H}_i, \hat{\rho} \right] + \frac{\gamma}{2} (N + 1) \left[2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a} \right] + \frac{\gamma}{2} N \left(2\hat{a}^\dagger\hat{\rho}\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}\hat{a}^\dagger \right) \quad , \quad (5.51)$$

ou seja, apenas acrescentamos o termo de interação H_i referente ao cristal. E H_0 refere-se ao hamiltoniano sem dissipações.

Além disto, o número médio de fôtons N é dado por:

$$\langle N \rangle = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}, \quad (5.52)$$

e para sistemas óticos a temperatura ambiente temos $\hbar\omega \gg kT$, fazendo com que $\langle N \rangle \ll 1$, ou seja, as flutuações do vácuo são mais importantes que as flutuações térmicas. Isso nos permite simplificar (5.51) na forma,

$$\frac{d\hat{\rho}}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \left[\hat{H}_0 + \hat{H}_i, \hat{\rho} \right] + \frac{\gamma}{2} \left[2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a} \right] \quad . \quad (5.53)$$

Lembrando que aqui já foram removidas as variáveis do reservatório usando as técnicas padrões apresentadas no capítulo 3 [15] e foi eliminada a evolução temporal dos campos livres através da mudança de referencial para um referencial girante, onde consideramos que termos no hamiltoniano que oscilam muito rapidamente, na média, não contribuem. Substituindo H_0 e H_i obtemos a evolução temporal de $\hat{\rho}$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\hat{\rho}}{\partial t} &= \chi \left[\hat{a}_1^\dagger\hat{a}_2^\dagger\hat{a}_0 - \hat{a}_1\hat{a}_2\hat{a}_0^\dagger, \hat{\rho} \right] + \varepsilon \left[\hat{a}_0^\dagger - \hat{a}_0, \hat{\rho} \right] \\ &+ \sum_{i=0}^2 \gamma_i \left(2\hat{a}_i\hat{\rho}\hat{a}_i^\dagger - \hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}_i^\dagger\hat{a}_i \right). \end{aligned} \quad (5.54)$$

Resolver tal equação torna-se bastante complicado por se tratar de uma equação diferencial não linear de operadores. Para simplificar nossos cálculos passaremos ao espaço de fase por

intermédio da representação P positiva, transformando a equação acima em uma equação diferencial clássica da distribuição $P_+(\alpha, \beta, t)$. Desta forma pode-se incluir correlações e flutuações expandindo a matriz densidade descrita na base de estados coerentes não diagonais,

$$\hat{\rho} = \int \frac{|\alpha\rangle\langle\beta^*|}{\langle\beta^*|\alpha\rangle} P_+(\alpha, \beta) d^6\alpha d^6\beta, \quad (5.55)$$

com $\alpha \equiv (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ e $\beta \equiv (\beta_0, \beta_1, \beta_2)$ variáveis complexas independentes. E $P_+(\alpha, \beta)$ uma distribuição positiva no espaço de fase. Para determinarmos a equação de evolução desta função, a substituímos na equação mestra (5.54).

Termos envolvendo o operador de aniquilação \hat{a} atuando no *bra* do operador $|\alpha\rangle\langle\beta|$ e o operador de criação \hat{a}^\dagger atuando no *ket* $|\alpha\rangle$ apareceram e suas ações foram substituídas pelos números complexos α_i e β_i e pelas derivadas parciais destas variáveis usando o artifício,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\alpha_i} |\alpha\rangle\langle\beta| &= \frac{\partial}{\partial\alpha_i} \left[e^{-\frac{1}{2}\alpha\alpha^*} e^{-\frac{1}{2}\beta\beta^*} e^{\alpha\hat{a}^\dagger} |0\rangle\langle 0| e^{\beta\hat{a}} \right] \\ &= (-\alpha_i^* + \hat{a}^\dagger) |\alpha\rangle\langle\beta^*|. \end{aligned} \quad (5.56)$$

logo,

$$\hat{a}_i^\dagger |\alpha\rangle\langle\beta^*| = \left(\frac{\partial}{\partial\alpha_i} + \beta_i \right) |\alpha\rangle\langle\beta|, \quad (5.57)$$

analogamente,

$$|\alpha\rangle\langle\beta^*| \hat{a}_i = \left(\frac{\partial}{\partial\beta_i} + \alpha_i \right) |\alpha\rangle\langle\beta^*|. \quad (5.58)$$

Após efetuar derivadas parciais sobre os termos e assumirmos que $P(\alpha, \beta)$ vai a zero de forma suficientemente rápida permitindo-nos eliminar os termos de superfície, encontramos a equação diferencial parcial para $P(\alpha, \beta)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} &= \left\{ \frac{\partial}{\partial\alpha_0} [\gamma_0\alpha_0 + \chi\alpha_1\alpha_2 - \varepsilon] + \frac{\partial}{\partial\beta_0} [\gamma_0\beta_0 + \chi\beta_1\beta_2 - \varepsilon] \right. \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial\alpha_1} [\gamma_1\alpha_1 - \chi\alpha_0\beta_2] + \frac{\partial}{\partial\beta_1} [\gamma_1\beta_1 - \chi\beta_0\alpha_2] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial\alpha_2} [\gamma_2\alpha_2 - \chi\alpha_0\beta_1] + \frac{\partial}{\partial\beta_2} [\gamma_2\beta_2 - \chi\beta_0\alpha_1] \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2} (\chi\alpha_0) + \frac{\partial^2}{\partial\beta_1\partial\beta_2} (\chi\beta_0) \right\} P(\alpha, \beta, t). \end{aligned} \quad (5.59)$$

Para pequenas taxas de decaimento tornar-se-ia importante incluir termos de calibre estocásticos na equação para eliminar os termos de fronteira, mas aqui isto não foi necessário, apesar de termos de fronteira serem potencialmente presentes, desprezá-los resulta num erro da ordem $e^{-\gamma/\chi}$ ou menor, como para experimentos reais em óptica quântica a taxa de decaimento é muito maior que a constante de susceptibilidade de segunda ordem, ou seja, $\gamma/\chi \gg 1$ este erro é completamente desprezível [37].

A equação (5.59) é uma equação de Fokker-Planck e pode ser escrita na forma:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} A_i(x, t) P + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} [D(\vec{x}, t)]_{ij} P, \quad (5.60)$$

com,

$$D(\vec{x}, t) = B(\vec{x}, t) B^T(\vec{x}, t). \quad (5.61)$$

Esta fatoração não é nada trivial, nem para uma matriz de difusão D representando um sistema 2x2, pois sendo D, por exemplo, uma matriz mxm, temos que B pode ser qualquer matriz com dimensão mxn, ou seja, temos n possibilidades para B. Um detalhamento desta técnica pode ser encontrado na referência [31]

Equivalentemente, podemos escrever (5.60) através das equações estocásticas de Itô dadas por,

$$dx_j = A(x_j)dt + B(x_j)dW, \quad (5.62)$$

onde dW é o vetor incremento de Wiener e representa a parte aleatória.

Assim obtivemos as equações estocásticas:

$$d\alpha_0 = (\varepsilon - \gamma_0\alpha_0 - \chi\alpha_1\alpha_2) dt, \quad (5.63)$$

$$d\beta_0 = (\varepsilon^* - \gamma_0\beta_0 - \chi\beta_1\beta_2)dt, \quad (5.64)$$

$$d\alpha_1 = (-\gamma_1\alpha_1 + \chi\beta_2\alpha_0)dt + (\chi\alpha_0)^{1/2} dW_1, \quad (5.65)$$

$$d\beta_1 = (-\gamma_1\beta_1 + \chi\alpha_2\beta_0)dt + (\chi\beta_0)^{1/2}dW_1^+, \quad (5.66)$$

$$d\alpha_2 = (-\gamma_2\alpha_2 + \chi\beta_1\alpha_0)dt + (\chi\alpha_0)^{1/2}dW_2, \quad (5.67)$$

$$d\beta_2 = (-\gamma_2\beta_2 + \chi\alpha_1\beta_0)dt + (\chi\beta_0)^{1/2}dW_2^+, \quad (5.68)$$

com

$$\begin{aligned} \langle dW_1 \rangle &= \langle dW_2 \rangle = 0, \\ \langle dW_1 dW_2 \rangle &= \langle dW_1^+ dW_2^+ \rangle = dt, \end{aligned} \quad (5.69)$$

e todas as outras correlações nulas.

Podemos retomar as soluções clássicas apresentadas na seção anterior anulando as flutuações quânticas ($dW = 0$) e fazendo uma análise estacionária ($d\alpha_j/dt = 0$). Lembrando que no limite clássico os valores médios das variáveis nos dão o correspondente macroscópico e que na média $\langle \alpha_j \rangle = \langle \beta_j \rangle$. Com estas novas considerações temos as equações de Itô modificadas,

$$\gamma_0\alpha_0 = -\chi\alpha_1\alpha_2 + \varepsilon, \quad (5.70)$$

$$\gamma\alpha_1 = \chi\alpha_2\alpha_0, \quad (5.71)$$

$$\gamma\alpha_2 = \chi\alpha_1\alpha_0. \quad (5.72)$$

As quais podemos identificar a solução trivial $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ e $\alpha_0 = \varepsilon/\gamma_0$ estável abaixo do limiar de oscilação. Pelo fato de termos considerado $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, as duas últimas equações tornaram-se absolutamente simétricas nos levando a concluir que $\alpha_1 = \alpha_2$ e conseqüentemente $\alpha_0 = \varepsilon/\chi$. Ou seja acima do limiar de oscilação o feixe do bombeamento intracavidade permanece constante mesmo que a potência do laser seja aumentada.

Agora que temos toda a base física e matemática para o entendimento desta dissertação estamos aptos ao próximo capítulo; estudar as correlações quânticas entre os feixes e identificar possível emaranhamento.

Capítulo 6

Correlações Tripartites no OPOND

Examinamos neste trabalho as correlações quânticas dos feixes de saída do Oscilador Paramétrico Óptico não Degenarado operando abaixo do limiar de oscilação. Para efetuar nossos cálculos tratamos as flutuações quânticas nos modos como perturbações quânticas agindo no sistema, o qual possui uma solução não perturbativa de campo médio bem conhecida, a solução clássica. Tratamos o problema além do usual regime de flutuações lineares e encontramos excelente acordo entre as soluções analíticas e as simulações numéricas, dando credibilidade ao método utilizado.

Apesar de termos encontrado fortes correlações entre bombeamento, sinal e complementar, o critério que atesta inseparabilidade conjunta dos três feixes, a soma de variâncias tripartites apresentada no capítulo 3, não detectou emaranhamento entre eles, porém uma nova desigualdade por nós proposta afirma que nosso sistema é não clássico, podendo posteriormente ser um indicativo de inseparabilidade.

6.1 Soluções Analíticas

Para resolver analiticamente as equações (5.63)-(5.68) as reescrevemos em função de suas quadraturas rescaladas adimensionais, e usamos teoria de perturbação para expandir em termos da constante de acoplamento adimensional, g , em série de potências.

Os operadores complexos de quadraturas internas mapeados nas variáveis estocásticas sob a

forma proposta por Caves-Schumacher [36] são:

$$\begin{aligned}
X_0 &= (\alpha_0 + \beta_0), & Y_0 &= \frac{1}{i}(\alpha_0 - \beta_0), \\
X_1 &= (\alpha_1 + \beta_2), & Y_1 &= \frac{1}{i}(\alpha_1 - \beta_2), \\
X_2 &= (\alpha_2 + \beta_1), & Y_2 &= \frac{1}{i}(\alpha_2 - \beta_1).
\end{aligned} \tag{6.1}$$

Esta representação das quadraturas permitirá o desacoplamento das equações estocásticas. Para desenvolver um processo simétrico de perturbação é conveniente definir as novas variáveis.

$$\begin{aligned}
\gamma_r &= \gamma_0/\gamma, \\
\mu &= \varepsilon/\varepsilon_c, \\
g &= \frac{\chi}{\gamma} \frac{1}{\sqrt{2\gamma_r}},
\end{aligned} \tag{6.2}$$

onde γ_0 representa a depleção do bombeio e γ a depleção dos feixes sinal e complementar, a constante μ é definida pela razão entre a amplitude do bombeamento ε , e a amplitude requerida para que o sistema alcance o limiar de oscilação ε_c , lembrando que trabalharemos com $0 < \mu < 1$, abaixo do limiar de oscilação. Por fim g é a nova constante de acoplamento, agora adimensional. As quadraturas reescaladas adquirem a forma:

$$\begin{aligned}
x_0 &= g\sqrt{2\gamma_r}(\alpha_0 + \alpha_0^+) = g\sqrt{2\gamma_r}X_0 & y_0 &= g\sqrt{2\gamma_r}\frac{1}{i}(\alpha_0 - \alpha_0^+) = g\sqrt{2\gamma_r}Y_0 \\
x_1 &= g(\alpha_1 + \alpha_2^+) = gX_1 & y_1 &= g\frac{1}{i}(\alpha_1 - \alpha_2^+) = gY_1 \\
x_2 &= g(\alpha_2 + \alpha_1^+) = gX_2 & y_2 &= g\frac{1}{i}(\alpha_2 - \alpha_1^+) = gY_2
\end{aligned} \tag{6.3}$$

e as equações estocásticas em função das novas variáveis em uma escala de tempo $\tau = \gamma t$ são:

$$\begin{aligned}
dx_0 &= -\gamma_r [x_0 - 2\mu + (x_1x_2 - y_1y_2)] d\tau, \\
dy_0 &= -\gamma_r [y_0 - 2\mu + (x_1y_2 + y_1x_2)] d\tau, \\
dx_1 &= \left[-x_1 + \frac{1}{2} (x_1x_0 - y_1y_0) \right] d\tau + \frac{g}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{x_0 + iy_0} dw_1 + \sqrt{x_0 - iy_0} dw_2^+ \right], \\
dy_1 &= \left[-y_1 + \frac{1}{2} (x_1y_0 - y_1x_0) \right] d\tau - i \frac{g}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{x_0 + iy_0} dw_1 - \sqrt{x_0 - iy_0} dw_2^+ \right], \\
dx_2 &= \left[-x_2 + \frac{1}{2} (x_2x_0 + y_2y_0) \right] d\tau + \frac{g}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{x_0 + iy_0} dw_2 + \sqrt{x_0 - iy_0} dw_1^+ \right], \\
dy_2 &= \left[-y_2 + \frac{1}{2} (x_2y_0 - y_2x_0) \right] d\tau - i \frac{g}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{x_0 + iy_0} dw_2 + \sqrt{x_0 - iy_0} dw_1^+ \right],
\end{aligned} \tag{6.4}$$

com $\langle dw_1 dw_2 \rangle = \langle dw_1^+ dw_2^+ \rangle = d\tau$.

Executamos a expansão em série de potências do acoplamento adimensional g entre os campos,

$$\begin{aligned}
x_k &= \sum_{n=0}^{\infty} = x_k^{(0)} + gx_k^{(1)} + g^2 x_k^{(2)} + \dots = \sum_{k=0} g^n x_k^n, \\
y_k &= \sum_{n=0}^{\infty} = y_k^{(0)} + gy_k^{(1)} + g^2 y_k^{(2)} + \dots = \sum_{k=0} g^n y_k^n,
\end{aligned} \tag{6.5}$$

sendo o termo de ordem zero correspondente ao regime clássico, e os termos de ordens superiores ao regime quântico.

No regime de operação onde as flutuações quânticas são pequenas uma análise linearizada é válida, porém ela leva a depleção do bombeamento restando apenas dois modos interagentes, aqui iremos considerar até a segunda ordem desta expansão para envolvê-lo e assim calcular as correlações triplas.

Substituindo as expansões (6.5) em (6.4) e associando os termos com mesma potência em g

encontramos as equações de ordem zero,

$$\begin{aligned}
dx_0^{(0)} &= -\gamma_r \left[x_0^{(0)} - 2\mu + \left(x_1^{(0)} x_2^{(0)} - y_1^{(0)} y_2^{(0)} \right) \right] d\tau, \\
dy_0^{(0)} &= -\gamma_r \left[y_0^{(0)} - 2\mu + \left(x_1^{(0)} y_2^{(0)} + y_1^{(0)} x_2^{(0)} \right) \right] d\tau, \\
dx_1^{(0)} &= \left[-x_1^{(0)} + \frac{1}{2} \left(x_1^{(0)} x_0^{(0)} + y_1^{(0)} y_0^{(0)} \right) \right] d\tau, \\
dy_1^{(0)} &= \left[-y_1^{(0)} + \frac{1}{2} \left(x_1^{(0)} y_0^{(0)} - y_1^{(0)} x_0^{(0)} \right) \right] d\tau, \\
dx_2^{(0)} &= \left[-x_2^{(0)} + \frac{1}{2} \left(x_2^{(0)} x_0^{(0)} + y_2^{(0)} y_0^{(0)} \right) \right] d\tau, \\
dy_2^{(0)} &= \left[-y_2^{(0)} + \frac{1}{2} \left(x_2^{(0)} y_0^{(0)} - y_2^{(0)} x_0^{(0)} \right) \right] d\tau,
\end{aligned} \tag{6.6}$$

com as soluções estacionárias abaixo do limiar de oscilação já apresentadas no capítulo anterior,

$$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = y_1^{(0)} = y_2^{(0)} = y_0^{(0)} = 0, \quad x_0^{(0)} = 2\mu. \tag{6.7}$$

As equações de primeira ordem após a substituição das soluções de ordem zero são:

$$\begin{aligned}
dx_0^{(1)} &= -\gamma_r x_0^{(1)} d\tau, \\
dy_0^{(1)} &= -\gamma_r y_0^{(1)} d\tau, \\
dx_1^{(1)} &= -(1 - \mu) x_1^{(1)} d\tau + \sqrt{2\mu} dw_{x1}, \\
dy_1^{(1)} &= -(1 + \mu) y_1^{(1)} d\tau - i\sqrt{2\mu} dw_{y1}, \\
dx_2^{(1)} &= -(1 - \mu) x_2^{(1)} d\tau + \sqrt{2\mu} dw_{x2}, \\
dy_2^{(1)} &= -(1 + \mu) y_2^{(1)} d\tau - i\sqrt{2\mu} dw_{y2},
\end{aligned} \tag{6.8}$$

onde foram introduzidos os novos incrementos de Wiener com $dw_{x1(y1)}(\tau) = [dw_1(\tau) \pm dw_2^+(\tau)]/\sqrt{2}$, com as seguintes correlações:

$$\begin{aligned}
\langle dw_{x1} dw_{x2} \rangle &= d\tau, \\
\langle dw_{y1} dw_{y2} \rangle &= d\tau.
\end{aligned} \tag{6.9}$$

As soluções para as quadraturas do modo bombeamento $x_0^{(1)}$ e $y_0^{(1)}$ são facilmente obtidas integrando as duas primeiras equações de (6.8), tendo como resultado decaimentos exponenciais que não contribuirão no regime estacionário. Em consequência todos os termos $x_0^{(n)}$ e $y_0^{(n)}$, com n ímpar, serão nulos, da mesma forma que os termos $x_{1,2}^{(n)}$ e $y_{1,2}^{(n)}$ são para n par.

E as soluções de ordem 1 para as quadraturas dos campos sinal e complementar são dadas por,

$$x_1^{(1)}(t) = \sqrt{2\mu} \int_{-\infty}^t e^{-(1-\mu)(t-t_1)} \xi_{x1}(t_1) dt_1, \quad (6.10)$$

$$y_1^{(1)}(t) = -i\sqrt{2\mu} \int_{-\infty}^t e^{-(1+\mu)(t-t_1)} \xi_{y1}(t_1) dt_1,$$

$$x_2^{(1)}(t) = \sqrt{2\mu} \int_{-\infty}^t e^{-(1-\mu)(t-t_1)} \xi_{x2}(t_1) dt_1, \quad (6.11)$$

$$y_2^{(1)}(t) = -i\sqrt{2\mu} \int_{-\infty}^t e^{-(1+\mu)(t-t_1)} \xi_{y2}(t_1) dt_1,$$

com $dw_{ij} = \xi_{ij} dt$.

Como as soluções de primeira ordem no regime estacionário para o bombeamento são nulas, será necessário chegarmos a segunda ordem na expansão para podermos analisar a influência quântica em nosso sistema. As equações de segunda ordem, já substituídas as soluções de ordem zero são,

$$dx_0^{(2)} = -\gamma_r \left[x_0^{(2)} + x_1^{(1)} x_2^{(1)} - y_1^{(1)} y_2^{(1)} \right] d\tau, \quad (6.12)$$

$$dy_0^{(2)} = -\gamma_r \left[y_0^{(2)} + x_1^{(1)} y_2^{(1)} + y_1^{(1)} x_2^{(1)} \right] d\tau,$$

que têm como soluções:

$$\begin{aligned} x_0^{(2)}(t) &= -\gamma_r \int_{-\infty}^t e^{-\gamma_r(t-t')} \left(x_1^{(1)}(t') x_2^{(1)}(t') - y_1^{(1)}(t') y_2^{(1)}(t') \right) dt', \\ y_0^{(2)}(t) &= -\gamma_r \int_{-\infty}^t e^{-\gamma_r(t-t')} \left(x_1^{(1)}(t') y_2^{(1)}(t') + y_1^{(1)}(t') x_2^{(1)}(t') \right) dt'. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Repare que $x_0^{(2)}$ ao contrário de todas as outras quadraturas não representa uma distribuição gaussiana, pois o seu momento de terceira ordem é visivelmente não nulo. Este fato terá especial

relevância para identificarmos emaranhamento do modo bombeado. Em posse de todas estas soluções estamos aptos a calcular as correlações entre os feixes.

6.2 Correlações Tripartites

Correlações quânticas entre os feixes sinal e complementar produzidos na Conversão Paramétrica Descendente já eram previstas há muito tempo para as suas intensidades, pelo fato dos seus fótons serem produzidos aos pares. Drummond estende estas correlações, ou anticorrelações para as fases dos campos, reconhecendo a produção de feixes gêmeos em estado EPR [34].

Há pouco tempo tem-se investigado correlações quânticas envolvendo o feixe de bombeamento. Até agora muito foi desenvolvido no regime de campos intensos, ou seja, no OPO operando acima do limiar de oscilação [6], [9], [10], [11], nesta seção analisaremos estas correlações tripartites abaixo do limiar.

As correlações tripartites dos feixes nas suas quadraturas originais serão dadas como segue no exemplo para as quadraturas de intensidade dos três campos.

$$\begin{aligned} \langle x_0 x_1 x_2 \rangle &= \left\langle \left(\sum_n g^n x_0^n \right) \left(\sum_n g^n x_1^n \right) \left(\sum_n g^n x_2^n \right) \right\rangle \\ &= \left\langle \left(x_0^{(0)} + g x_0^{(1)} + g^2 x_0^{(2)} \right) \left(x_1^{(0)} + g x_1^{(1)} + g^2 x_1^{(2)} \right) \right. \\ &\quad \left. \left(x_2^{(0)} + g x_2^{(1)} + g^2 x_2^{(2)} \right) \right\rangle, \end{aligned} \quad (6.14)$$

sendo nulos os termos de ordem zero para o sinal e o complementar e o termo de primeira ordem para o bombeamento ficamos com a igualdade,

$$\begin{aligned} \langle x_0 x_1 x_2 \rangle &= \langle (x_0^{(0)} + g^2 x_0^{(2)}) (g x_1^{(1)}) (g x_2^{(1)}) \rangle \\ &= g^2 \langle x_0^{(0)} x_1^{(1)} x_2^{(1)} \rangle + g^4 \langle x_0^{(2)} x_1^{(1)} x_2^{(1)} \rangle. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Porém estamos interessados somente na correlação quântica entre os campos, por isto analisaremos apenas o segundo valor médio, correspondente a correlação entre as flutuações quânticas.

Substituindo as soluções encontradas na seção anterior para estas quantidades temos,

$$\begin{aligned}
\langle x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_0^{(2)} \rangle &= -4\mu^2 \gamma_r \left\langle \int_{-\infty}^t e^{-(1-\mu)(t-t_1)} \xi_{x_1}(t_1) dt_1 \int_{-\infty}^t e^{-(1-\mu)(t-t_1)} \xi_{y_2}(t_1) dt_1 \right. \\
&\quad \int_{-\infty}^t e^{-\gamma_r(t-t_1)} \left\{ \int_{-\infty}^{t_1} e^{-(1-\mu)(t_1-t_2)} \xi_{x_1}(t_2) dt_2 \int_{-\infty}^{t_1} e^{-(1-\mu)(t_1-t_3)} \xi_{y_2}(t_3) dt_3 \right. \\
&\quad \left. \left. + \int_{-\infty}^{t_1} e^{-(1+\mu)(t_1-t_2)} \xi_{y_1}(t_2) dt_2 \int_{-\infty}^{t_1} e^{-(1+\mu)(t_1-t_3)} \xi_{x_2}(t_3) dt_3 \right\} dt_1 \right\rangle.
\end{aligned} \tag{6.16}$$

A fim de calcularmos o valor médio para estas integrais efetuaremos uma troca de variáveis respeitando o ordenamento imposto pelas soluções, e os extremos máximos fixados em $t = -\infty$ e t , fornecendo o resultado no regime estacionário.

Isso nos permitirá deslocar as flutuações possibilitando o cálculo do valor médio de seus produtos.

$$\begin{aligned}
\langle x_1^{(1)} x_2^{(1)} x_0^{(2)} \rangle &= 4\mu^2 \gamma_r \int_{-\infty}^t dt_1 e^{-(1-\mu)(t-t_1)} \int_{-\infty}^t e^{-(1-\mu)(t-t_2)} dt_2 \int_{-\infty}^t e^{-\gamma_r(t-t_3)} \\
&\quad \left\{ \int_{-\infty}^{t_3} e^{-(1-\mu)(t_3-t_4)} dt_4 \int_{-\infty}^{t_3} e^{-(1-\mu)(t_3-t_5)} dt_5 \langle \xi_{x_1}(t_1) \xi_{x_2}(t_2) \xi_{x_1}(t_4) \xi_{x_2}(t_5) \rangle \right. \\
&\quad \left. + \int_{-\infty}^{t_3} e^{-(1+\mu)(t_3-t_4)} dt_4 \int_{-\infty}^{t_3} e^{-(1+\mu)(t_3-t_5)} dt_5 \langle \xi_{x_1}(t_1) \xi_{x_2}(t_2) \xi_{y_1}(t_4) \xi_{y_2}(t_5) \rangle \right\},
\end{aligned} \tag{6.17}$$

sendo cada ξ um processo gaussiano, o valor médio do produto de quatro variáveis se fatoriza na soma dos produtos dos valores médios tomados dois a dois, ou seja;

$$\begin{aligned}
\langle \xi_{x_1}(t_1) \xi_{x_2}(t_2) \xi_{x_1}(t_4) \xi_{x_2}(t_5) \rangle &= \langle \xi_{x_1}(t_1) \xi_{x_2}(t_2) \rangle \langle \xi_{x_1}(t_4) \xi_{x_2}(t_5) \rangle \\
&\quad + \langle \xi_{x_1}(t_1) \xi_{x_1}(t_4) \rangle \langle \xi_{x_2}(t_2) \xi_{x_2}(t_5) \rangle \\
&\quad + \langle \xi_{x_1}(t_1) \xi_{x_2}(t_5) \rangle \langle \xi_{x_2}(t_2) \xi_{x_1}(t_4) \rangle
\end{aligned} \tag{6.18}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle \xi_{x_1}(t_1)\xi_{x_2}(t_2)\xi_{y_1}(t_4)\xi_{y_2}(t_5) \rangle &= \langle \xi_{x_1}(t_1)\xi_{x_2}(t_2) \rangle \langle \xi_{y_1}(t_4)\xi_{y_2}(t_5) \rangle \\
&+ \langle \xi_{x_1}(t_1)\xi_{y_1}(t_4) \rangle \langle \xi_{x_2}(t_2)\xi_{y_2}(t_5) \rangle \\
&+ \langle \xi_{x_1}(t_1)\xi_{y_2}(t_5) \rangle \langle \xi_{x_2}(t_2)\xi_{y_1}(t_4) \rangle.
\end{aligned} \tag{6.19}$$

As correlações entre as flutuações podem ser obtidas diretamente da relação entre os incrementos de Wiener:

$$\begin{aligned}
\langle \xi_{x_1}(t_i)\xi_{x_2}(t_j) \rangle &= \langle \xi_{y_1}(t_i)\xi_{y_2}(t_j) \rangle = \delta(t_i - t_j), \\
\langle \xi_{x_{1,2}}(t_i)\xi_{y_{1,2}} \rangle &= 0,
\end{aligned} \tag{6.20}$$

sendo assim o segundo termo após a igualdade (6.18) é nulo, assim como os dois últimos termos após a igualdade de (6.19), pois cada um de seus componentes o são. Temos então,

$$\begin{aligned}
\langle \xi_{x_1}(t_1)\xi_{x_2}(t_2)\xi_{x_1}(t_4)\xi_{x_2}(t_5) \rangle &= \delta(t_1 - t_2)\delta(t_4 - t_5) + \delta(t_1 - t_5)\delta(t_2 - t_4), \\
\langle \xi_{x_1}(t_1)\xi_{x_2}(t_2)\xi_{y_1}(t_4)\xi_{y_2}(t_5) \rangle &= \delta(t_1 - t_2)\delta(t_4 - t_5).
\end{aligned} \tag{6.21}$$

Fazendo estas substituições em 6.17 e efetuando as integrais obtemos a correlação entre as quadraturas de intensidade dos feixes:

$$\langle x_1^{(1)}x_2^{(1)}x_0^{(2)} \rangle = -\frac{\mu^2}{(1-\mu^2)} \left[1 + \frac{\gamma_r}{(\gamma_r + 2(1-\mu))} + \frac{(1-\mu)}{(1+\mu)} \right]. \tag{6.22}$$

Estando $0 < \mu < 1$ temos que a correlação entre as quadraturas de intensidade dos três modos é negativa, indicando uma anti-correlação devido a conservação de energia que postula a destruição de um fóton do bombeamento para a criação do par de fótons gêmeos sinal e complementar.

Seguindo os mesmos passos calculamos todas as correlações quânticas entre as quadraturas

de fase e intensidade, as quais exporemos apenas seus resultados nas variáveis originais.

$$\begin{aligned}
\langle X_1 X_2 \Delta X_0 \rangle &= -\frac{g}{\sqrt{2\gamma_r}} \left(\frac{\mu}{1-\mu} \right)^2 \left[1 + \frac{1-\mu}{1+\mu} + \frac{\gamma_r}{\gamma_r + 2(1-\mu)} \right] \\
\langle Y_1 Y_2 \Delta X_0 \rangle &= \frac{g}{\sqrt{2\gamma_r}} \left(\frac{\mu}{1+\mu} \right)^2 \left[1 + \frac{1+\mu}{1-\mu} + \frac{\gamma_r}{\gamma_r + 2(1+\mu)} \right] \\
\langle Y_1 X_2 Y_0 \rangle &= \frac{g}{\sqrt{2\gamma_r}} \left(\frac{\mu^2}{1-\mu^2} \right) \left(\frac{\gamma_r}{2+\gamma_r} \right) \\
\langle X_1 Y_2 Y_0 \rangle &= \frac{g}{\sqrt{2\gamma_r}} \left(\frac{\mu^2}{1-\mu^2} \right) \left(\frac{\gamma_r}{2+\gamma_r} \right) \\
\langle Y_1 X_2 \Delta X_0 \rangle &= 0 \\
\langle X_1 Y_2 \Delta X_0 \rangle &= 0 \\
\langle X_1 X_2 Y_0 \rangle &= 0 \\
\langle Y_1 Y_2 Y_0 \rangle &= 0
\end{aligned} \tag{6.23}$$

onde representamos a quadratura de intensidade do bombeamento por ΔX_0 para eliminarmos a solução clássica, ou seja, a solução de ordem zero, considerando somente suas flutuações quântica na expansão em série de potências.

A partir de agora para simplificar nossa notação quando nos referirmos a qualquer uma das quadraturas dos modos estaremos nos reportando apenas a sua parte quântica, ou seja, x_0, y_0 agora representarão $x_0^{(2)}, y_0^{(2)}$, assim como $x_{1,2}, y_{1,2}$ representarão $x_{1,2}^{(1)}, y_{1,2}^{(1)}$.

Comparação entre os resultados analíticos e numéricos

Usando integração numérica estocástica nós plotamos alguns gráficos para comparar o resultado numérico, realizado nas equações sem nenhum tipo de aproximação, e o resultado analítico, por nós obtido através da expansão do acoplamento adimensional em série de potências, sendo utilizado termos até a sua segunda ordem.

Continuaremos aqui com o exemplo da correlação entre as quadraturas de intensidade.

Inicialmente atribuímos aos parâmetros fundamentais os seguintes valores; taxa de decaimento do bombeamento, $\gamma_0 = 0,1$, dos feixes sinal e complementar, $\gamma = 10$, , representando uma boa cavidade para o modo bombeado, visto sua pequena taxa de decaimento, ao mesmo

tempo sendo uma cavidade ruim para os modos convertidos, com alta taxa de decaimento. Usamos a constante de acoplamento $\chi = 0,01$ e a amplitude do laser $\varepsilon = 70$, conseqüentemente temos a constante de acoplamento adimensional dada pela última equação de (6.2), $g = 0,0071$, o limiar de oscilação $\varepsilon_c = \gamma\gamma_0/\chi = 100$ correspondendo a $\mu = \varepsilon/\varepsilon_c = 0,7$.

Utilizando estes parâmetros, obtemos para o cálculo analítico $\langle X_1 X_2 \Delta X_0 \rangle = -0,32$, o qual apresenta um ótimo acordo com a solução numérica, como podemos ver no gráfico abaixo (6.2).

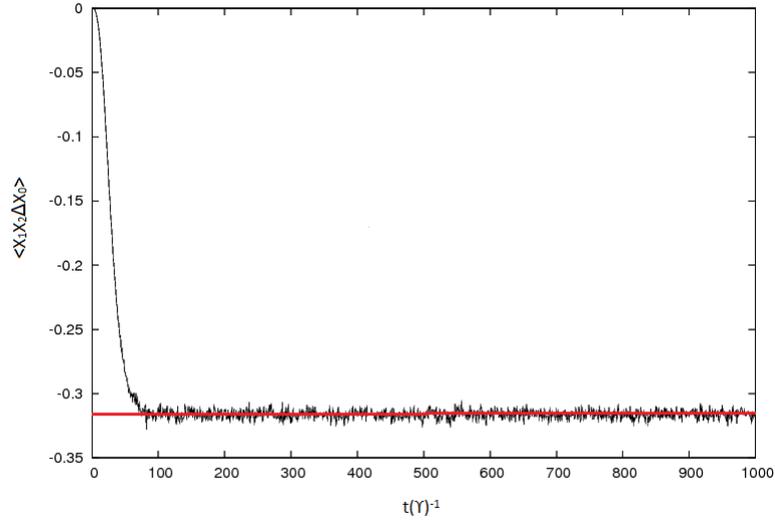


Figura 6.1: Correlação entre as intensidades dos feixes sinal, complementar e bombeamento, $\langle X_1 X_2 \Delta X_0 \rangle$ pelo tempo adimensional em unidades de $1/\gamma$. A linha ruidosa em preto representa a simulação numérica para os parâmetros $\gamma_0 = 0,1$, $\gamma = 10$, $\varepsilon = 70$ e $\chi = 0,1$, e a linha horizontal em vermelho representa o cálculo analítico.

Também desenvolvemos os gráficos para as outras correlações, sempre comparando o resultado numérico com o analítico e encontramos excelente acordo entre eles, mas não os exporemos aqui para não sermos enfadonhos.

6.3 Emaranhamento Tripartite

Emaranhamento bipartite entre os feixes gêmeos, sinal e complementar, produzidos no processo de Conversão Paramétrica Descendente, já foi previsto e verificado experimentalmente, tanto

abaixo do limiar de oscilação [5] quanto acima [6]. Recentemente passou a se investigar emaranhamento incluindo o bombeamento, correlações entre eles já haviam sido calculadas, porém a confirmação experimental de emaranhamento tripartite era dificultada pela presença de um ruído adicional, gerado pelos fótons térmicos presentes no cristal não linear, que geraram excesso de ruído na fase mascarando o emaranhamento entre os três feixes, o qual foi obtido após a diminuição da temperatura do cristal, sendo constatado para temperaturas abaixo de dez graus celsius.

No nosso sistema temos o emaranhamento evidenciado pelas correlações não nulas que envolvem quadraturas gaussianas, ou seja, qualquer correlações que não possui como um de seus constituintes a quadratura de intensidade do bombeamento, por exemplo $\langle X_1 Y_2 Y_0 \rangle$, que deveria permitir a decomposição:

$$\langle X_1 Y_2 Y_0 \rangle = \langle X_1 \rangle \langle Y_2 Y_0 \rangle + \langle Y_2 \rangle \langle X_1 Y_0 \rangle + \langle Y_2 \rangle \langle Y_2 X_1 \rangle. \quad (6.24)$$

Porém a média de cada quadratura é nula, conseqüentemente esta correlação tripartite, ao contrário do que foi calculado em (6.23), o que nos leva concluir que a matriz densidade do sistema é inseparável, conseqüentemente, que existe emaranhamento.

Mas ainda procuramos um critério que revele tal emaranhamento, para que este, talvez, possa identificar emaranhamentos em outros sistemas, os quais também não seriam identificados pela Soma de Variâncias Tripartites.

6.3.1 Aplicação da Soma de Variâncias Tripartites

O critério utilizado para atestar emaranhamento em um sistema multipartite foi proposto por P. van Loock e A. Furusawa [12] e nos dá as seguintes desigualdades para um sistema tripartite, como apresentado no capítulo 4,

$$\begin{aligned} V_{12} &= \langle \Delta^2(\hat{x}_1 - \hat{x}_2) \rangle_{\rho_{sep12}} + \langle \Delta^2(\hat{y}_1 + \hat{y}_2 + g_3 \hat{y}_0) \rangle_{\rho_{sep12}} \geq 4 \\ V_{10} &= \langle \Delta^2(\hat{x}_1 + \hat{x}_0) \rangle_{\rho_{sep13}} + \langle \Delta^2(\hat{y}_1 - \hat{y}_0 + g_2 \hat{y}_2) \rangle_{\rho_{sep13}} \geq 4 \\ V_{20} &= \langle \Delta^2(\hat{x}_2 + \hat{x}_0) \rangle_{\rho_{sep23}} + \langle \Delta^2(g_1 \hat{y}_1 + \hat{y}_2 - \hat{y}_0) \rangle_{\rho_{sep23}} \geq 4. \end{aligned} \quad (6.25)$$

Aqui fizemos $x_3 = x_0$ e $y_3 = y_0$, representando o modo bombeado. Cada desigualdade atesta inseparabilidade, se violada, de dois modos, àqueles representados nos subíndices. Sendo então pelo menos duas destas desigualdades violadas teremos o que os autores chamam de genuíno emaranhamento tripartite, nenhuma parte pode ser separada do todo.

Os parâmetros g_i são os parâmetros livres reponsáveis pela minimização do lado esquerdo, as formas de encontrá-lo variam de caso a caso, por exemplo, no artigo escrito por A. Villar [11] a minimização é obtida para o OPO operando acima do limiar de oscilação, por escrever as variâncias em função da matriz de covariância e assim minimizar a função obtida, já no artigo [13] que apresenta uma comprovação experimental de um sistema emaranhado tripartite pela superposição de três modos de vácuo comprimido através de divisores de feixes, os parâmetros são obtidos pela representação das quadraturas combinadas pelos parâmetros de compressão.

Para aplicarmos estas desigualdades ao nosso sistema é importante ressaltarmos que este critério utiliza o princípio de incerteza para sua dedução que é diretamente dependente da relação de comutação entre os operadores, que para as quadraturas definidas de modo convencional,

$$\begin{aligned}\hat{X}_1 &= \hat{a}_1 + \hat{a}_1^\dagger & \hat{Y}_1 &= -i(\hat{a}_1 - \hat{a}_1^\dagger) \\ \hat{X}_2 &= \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger & \hat{Y}_2 &= -i(\hat{a}_2 - \hat{a}_2^\dagger).\end{aligned}\tag{6.26}$$

fornece $[\hat{X}_i, \hat{Y}_i] = 2$, porém para nossa definição de quadraturas (6.1), onde são correlacionados dois modos, temos que este comutador é nulo, implicando na invalidade do limite imposto pela desigualdade. Para usar este critério ao invés de reformularmos as desigualdades, expressaremos as nossas quadraturas em função das quadraturas convencionais.

Além disso, todas as configurações devem ser obtidas na ordem simétrica de operadores. Podemos perceber este fato ao testar a validade das desigualdades para estados de vácuo completamente descorrelacionados. Temos que a variância para um estado de vácuo no nosso ordenamento, o ordenamento normal, proveniente da representação P positiva, é nula, assim como seus valores médios, e como estamos considerando não haver correlação alguma entre estes estados, ou seja, $\langle x_i x_j \rangle = \langle y_i y_j \rangle = 0$ chegamos a violação das desigualdades ($0 > 4$) atestando emaranhamento para modos descorrelacionados, uma conclusão completamente contraditória.

Já no ordenamento simétrico temos que as variâncias para os estados de vácuo são iguais a 1 e continuando neste caso onde os modos estão descorrelacionados temos a afirmação das desigualdades (5 > 4) como era de se esperar.

O que nos leva a concluir que para aplicarmos a Soma de Variâncias Tripartites ao nosso sistema precisamos além de associarmos as quadraturas descritas de modo convencional e na forma de Caves-Schwacher, passar do ordenamento normal, inerente a representação P positiva, para o ordenamento simétrico.

Mas antes de efetuarmos qualquer conta podemos olhar atentamente para as desigualdades (6.25), ao desenvolvermos as variâncias temos que este critério usa correlações entre dois modos apenas e todas as correlações entre um modo bombeado e qualquer um dos outros dois modos são nulas pelo fato de envolverem o valor médio de três dos ruídos gaussianos, ou seja, qualquer violação desta desigualdade será permitida apenas pelas correlações entre sinal e complementar, descartando qualquer detecção de emaranhamento tripartite.

Para representar explicitamente o que foi falado desenvolvamos as desigualdades atribuindo ao parâmetro g_i o valor 1 por simplificação. Usando as definições (6.26) e (6.1) encontramos as relações entre as quadraturas definidas na forma Caves-Schumacker que agora receberão um índice "linha" e na forma convencional:

$$\begin{aligned} x'_1 + x'_2 &= x_1 + x_2 & y'_1 + y'_2 &= y_1 + y_2 \\ x'_1 - x'_2 &= i(y_1 - y_2) & i(y'_1 - y'_2) &= x_1 - x_2, \end{aligned} \quad (6.27)$$

que nos fornecem

$$\begin{aligned} \langle \Delta^2(y_1 + y_2) \rangle &= \langle \Delta^2(y'_1 + y'_2) \rangle \\ \langle \Delta^2(x_1 - x_2) \rangle &= \langle \Delta^2[i(y'_1 - y'_2)] \rangle. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Portanto precisamos calcular $\langle \Delta^2(y'_1 + y'_2) \rangle$ e $\langle \Delta^2[i(y'_1 - y'_2)] \rangle$ no ordenamento simétrico. Usando as soluções obtidas na seção 6.1 para as quadraturas temos,

$$\langle \Delta^2(y'_1 + y'_2) \rangle = \langle y_1'^2 \rangle_N + \langle y_2'^2 \rangle_N + 2\langle y_1' y_2' \rangle_N = -\frac{2\mu}{1 + \mu} \quad (6.29)$$

com o subíndice N representando o ordenamento normal. Para passarmos ao ordenamento simétrico precisamos levar em conta a contribuição dos fatores $\langle y_1^2 \rangle$, $\langle y_2^2 \rangle$ aos quais atribuiremos, sem prejuízos, o menor valor que eles podem assumir, que é 1, quando estamos tratando dos estados de vácuo, logo o mínimo valor para a variância $\langle \Delta^2(y_1 + y_2) \rangle$ calculado no ordenamento simétrico será,

$$\langle \Delta^2(y_1 + y_2) \rangle_S = 2 - 2\frac{\mu}{1 + \mu}. \quad (6.30)$$

Da mesma forma encontramos,

$$\langle \Delta^2(x_1 - x_2) \rangle_S = 2 - 2\frac{\mu}{1 + \mu}, \quad (6.31)$$

com o subíndice S denotando que as médias estão sendo calculadas através da ordenamento simétrico dos operadores.

Estas combinações de quadraturas formam os operadores em estados EPR que sofrem compressão no ruído.

Tendo estas duas quantidades calculadas e sendo os valores médios para as quadraturas referentes ao sinal e complementar nulas assim como as correlações dadas pelo produto de uma das quadraturas do bombeamento com outro modo, pelo fato de seu valores médios envolverem o produto de três dos termos ruidosos gaussianos ξ_i e a média de cada um deles separadamente ser nula, temos,

$$V_{12} = \langle \Delta^2(\hat{x}_1 - \hat{x}_2) \rangle_{\rho_{sep12}} + \langle \Delta^2(\hat{y}_1 + \hat{y}_2 + g_3\hat{y}_0) \rangle_{\rho_{sep12}} = 5 - \frac{4\mu}{1 + \mu}, \quad (6.32)$$

que é menor que 4 para $\mu < 1/3$, ou seja, há violação da primeira desigualdade de (6.25) atestando inseparabilidade dos modos sinal e complementar como já era previsto, pois sabemos que estes modos estão emaranhados para o OPO operando tanto acima quanto abaixo do limiar de oscilação.

A segunda e a terceira desigualdades de (6.25) dão o mesmo resultado, fornecendo

$$V_{10} = V_{20} = 5 - \frac{2\mu}{1 + \mu}, \quad (6.33)$$

que é maior que 4 para qualquer μ entre 0 e 1, ou seja, nada podemos afirmar sobre a inseparabilidade do modo de bombeamento. Note que usamos para os valores médios quadráticos de

cada quadratura o menos valor que ele podia assumir, o valor referente ao estado de vácuo. Isto não influenciará na satisfação das desigualdades, pois para nosso sistema teremos com certeza um resultado maior que 5 para soma destas variâncias.

Podemos então concluir que a desigualdade proposta por P. van Loock e A. Furusawa afirma apenas a conhecida inseparabilidade dos modos 1 e 2 não detectando emaranhamento tripartite genuíno no nosso sistema, apesar das correlações quânticas calculadas analiticamente explicitarem esta propriedade.

Motivados por elas buscamos uma nova desigualdade que afirme a inseparabilidade deste sistema, que será apresentada na próxima seção.

6.4 Desigualdade de Schwarz

Os critérios apresentados nesta dissertação para detectar emaranhamento em um sistema foram deduzidos lançando mão da desigualdade de Cauchy-Schwarz e do princípio de incerteza de Heisenberg, os quais impunham um limite inferior para soma de variâncias obtidas através do uso de estados descritos de forma separável. Sabemos que se a desigualdade fosse violada o sistema era dito emaranhado. Olhemos atentamente para esta violação, sendo os limites intrinsecamente impostos pelas desigualdade de Cauchy-Schwarz e de incerteza a violação do critério de soma de variâncias na verdade é uma violação de uma ou dessas duas desigualdades.

Motivados neste pensamento procuramos estender a desigualdade de Cauchy-Schwarz para um sistema constituído de três partes.

Sua demonstração será feita de forma análoga ao caso bidimensional, com a ressalva que aqui adicionaremos um fator λ que nos permitirá encontrar um mínimo limite inferior.

Tomemos a desigualdade verdadeira:

$$\langle |\alpha_1 \alpha_2 + \lambda^* \alpha_0^*|^2 \rangle \geq 0 \quad (6.34)$$

$$\langle \alpha_1^* \alpha_1 \alpha_2^* \alpha_2 \rangle + |\lambda|^2 \langle \alpha_0^* \alpha_0 \rangle + \lambda \langle \alpha_1 \alpha_2 \alpha_0 \rangle + \lambda^* \langle \alpha_1^* \alpha_2^* \alpha_0^* \rangle \geq 0 \quad (6.35)$$

minimizando a equação com respeito a λ^* , ou seja, derivando em função desta variável e igualando a zero encontramos para λ a expressão

$$\lambda = \frac{\langle \alpha_1^* \alpha_2^* \alpha_0^* \rangle}{\langle \alpha_0^* \alpha_0 \rangle}. \quad (6.36)$$

Substituindo em (6.35) encontramos,

$$\langle \alpha_1^* \alpha_1 \alpha_2^* \alpha_2 \rangle \langle \alpha_0^* \alpha_0 \rangle \geq |\langle \alpha_1 \alpha_2 \alpha_0 \rangle|^2, \quad (6.37)$$

que se não satisfeita sugere a inseparabilidade do bombeamento. Permutando os índices em (6.34) obtemos as desigualdades:

$$\langle \alpha_1^* \alpha_1 \alpha_0^* \alpha_0 \rangle \langle \alpha_2^* \alpha_2 \rangle \geq |\langle \alpha_1 \alpha_2 \alpha_0 \rangle|^2 \quad (6.38)$$

$$\langle \alpha_0^* \alpha_0 \alpha_2^* \alpha_2 \rangle \langle \alpha_1^* \alpha_1 \rangle \geq |\langle \alpha_1 \alpha_2 \alpha_0 \rangle|^2 \quad (6.39)$$

Reescrevendo a desigualdade (6.37) em termos das quadraturas (6.1),

$$\begin{aligned} \langle (X_1^2 + Y_1^2)(X_2^2 + Y_2^2) \rangle \langle (X_0^2 + Y_0^2) \rangle &\geq |\langle X_1 X_2 X_0 \rangle - \langle X_1 Y_2 Y_0 \rangle - \langle X_2 Y_1 Y_0 \rangle - \langle Y_1 Y_2 X_0 \rangle \\ &+ i(\langle X_2 X_0 Y_1 \rangle - \langle Y_1 Y_2 Y_0 \rangle + \langle X_1 X_2 Y_0 \rangle + \langle X_1 X_0 Y_2 \rangle)|^2. \end{aligned} \quad (6.40)$$

As correlações triplas componentes do lado direito da equação são dadas por (6.23). E as intensidades do lado esquerdo fornecem:

$$\langle (X_1^2 + Y_1^2)(X_2^2 + Y_2^2) \rangle = 2\mu^2 \left[\frac{1}{(1+\mu)^2} + \frac{1}{(1-\mu)^2} \right], \quad (6.41)$$

$$\langle (X_0^2 + Y_0^2) \rangle = \frac{g^2}{2\gamma_r} \left(\frac{\mu}{1-\mu} \right)^2 \left\{ \left(\frac{2}{1+\mu} \right)^2 + \left[1 + \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} \right)^2 \right] \frac{\gamma_r^2}{\gamma_r^2 + 4(1-\mu)^2} \right\}. \quad (6.42)$$

Efetuamos simulações computacionais para verificar a veracidade dos nossos cálculos analíticos e se há violação destas desigualdade para determinados parâmetros, e se houver, para quais parâmetros a violação é maximizada.

Os três gráficos a seguir foram gerados com os valores fixos para o acoplamento adimensional $g = 7,1 \cdot 10^{-3}$ e $\mu = 0,7$ e diferentes valores para razão entre a taxa de decaimento do modo bombeado e dos modos sinal e complementar, γ_r .

Para $\gamma_r = 0,01$ podemos perceber através do gráfico a seguir que não houve violação da desigualdade.

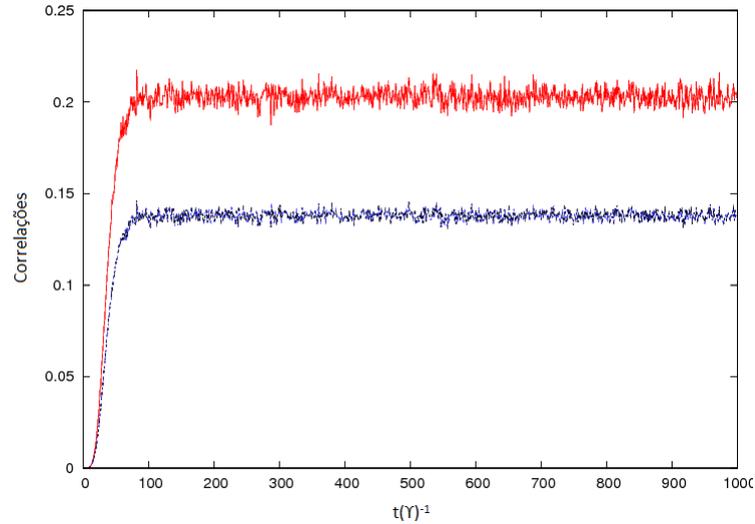


Figura 6.2: Desigualdade de Schwarz satisfeita para os parâmetros $\gamma_r = 0,01$, $\mu = 0,7$, $g = 7,1 \cdot 10^{-3}$. O ruído em vermelho representada o produto das intensidades dos modos (lado esquerdo da desigualdade) e o ruído em azul a soma das correlações tripartites (lado direito da desigualdade).

Porém para $\gamma_r = 1$ encontramos violação da desigualdade, como podemos ver na figura (6.4)

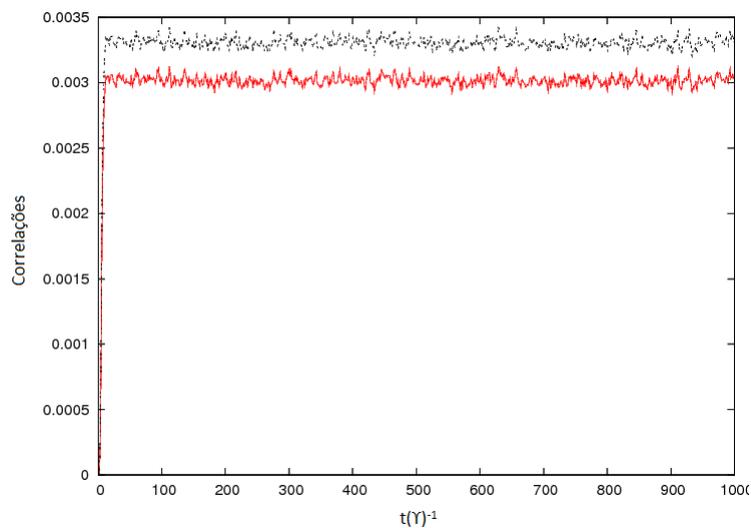


Figura 6.3: Violação da Desigualdade de Schwarz para os parâmetros $\gamma_r = 1$, $\mu = 0,7$, $g = 7,1 \cdot 10^{-3}$. A parte ruidosa superior representa o lado direito da equação, e a inferior o lado esquerdo.

Aumentamos ainda mais nosso parâmetro γ_r para verificar se a violação aumentava juntamente com ele e encontramos uma resposta afirmativa olhando para o gráfico (6.4) que foi gerado para $\gamma_r = 100$. Porém podemos perceber que a correlação foi degradada, pois o espelho permitiu um maior fluxo do feixe bombeado, perdendo assim memória da correlação, já que ele sustenta a correlação dos convertidos.

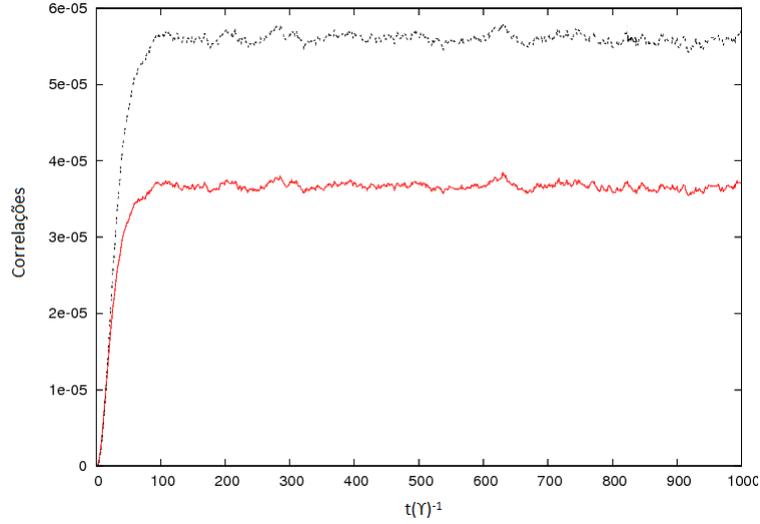


Figura 6.4: Violação da Desigualdade de Schwarz para os parâmetros $\gamma_r = 100$, $\mu = 0,7$, $g = 7,1 \cdot 10^{-3}$. A parte ruidosa superior representa o lado direito da equação, e a inferior o lado esquerdo.

A fim de aumentarmos nossa confiabilidade, geramos um gráfico variando a amplitude do feixe de bombeamento para contemplar vários valores de μ . Criamos um OPO sendo uma ótima cavidade para os feixes sinal e complementar, com $\gamma = 0,01$ e uma cavidade ruim para o bombeamento, $\gamma_0 = 100$, resultando em um $\gamma_r = 10^4$. Como podemos ver na figura (6.4) houve violação da desigualdade para todos os valores de μ .

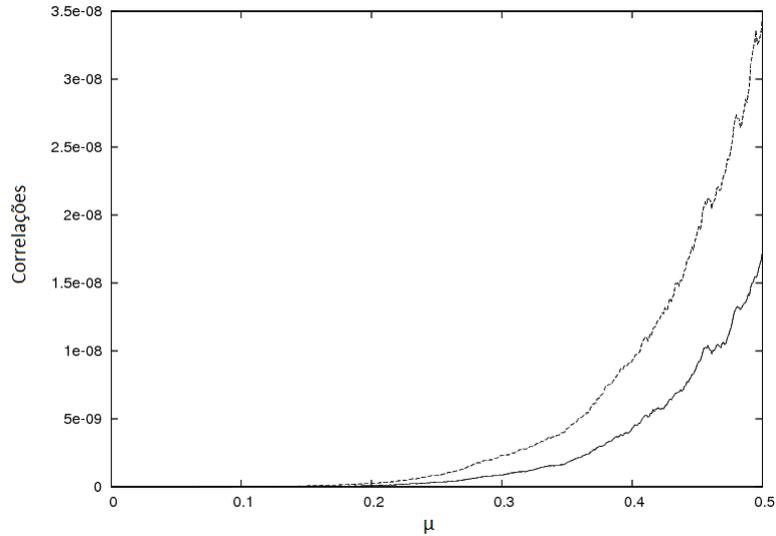


Figura 6.5: Violação da desigualdade de Schwarz para $0 < \mu < 0,5$ e as taxas de decaimento para o bombeamento e os feixes sinal e complementar iguais a $\gamma_0 = 100$ e $\gamma = 0,01$ respectivamente. A linha superior representa a soma das correlações entre os subsistemas e a linha inferior representa a multiplicação de suas intensidades.

Portanto a desigualdade de Schwarz, até o momento atesta que o nosso sistema é não clássico, porém não necessariamente emaranhado. A prova de que há emaranhamento entre bombeamento, sinal e complementar está no fato das correlações que envolvem distribuições gaussianas tipo $\langle x_1 y_2 y_0 \rangle$, não permitirem ser fatoradas, ou seja, não possuem uma matriz densidade separável.

6.4.1 Medida das Quadraturas Generalizadas

Sendo as quadraturas dos feixes sinal e complementar definidas pela soma de amplitudes correspondentes a diferentes feixes temos que estas quantidades não são hermiteanas, consequentemente não mensuráveis, desta forma como testar o critério de desigualdade de Cauchy Schwarz com nossa formulação analítica?

Poderíamos ter definido as quadraturas de forma convencional, cada uma para apenas um modo do campo (6.26), porém esta formulação não descoplaria as equações estocásticas, impos-

sibilitando sua resolução. Por este essencial motivo optamos usá-las na representação dada por Caves-Schumacher.

Para solucionar nosso problema identificaremos os termos constituintes da desigualdade em função das amplitudes do campo .

Para o seu lado direito temos,

$$\begin{aligned} \langle (X_1^2 + Y_1^2)(X_2^2 + Y_2^2) \rangle &= \langle [(\alpha_1 + \alpha_2^*)^2][(\alpha_2 + \alpha_1^*)^2 - (\alpha_2 - \alpha_1^*)^2] \rangle \\ &= \langle 4\alpha_1\alpha_2^*.4\alpha_2\alpha_1^* \rangle = 16\langle \alpha_1\alpha_1^*\alpha_2\alpha_2^* \rangle = 16\langle I_1I_2 \rangle, \end{aligned} \quad (6.43)$$

ou seja, tomando a média das intensidades obtemos o primeiro termo da nova desigualdade tripartite. Esta medida pode ser realizada com a simples técnica de detecção homodina, onde interfere-se o campo de interesse com outro campo mais intenso chamado de oscilador local, analisando posteriormente a soma e a subtração dos sinais produzidos pelos fotodetetores.

Desenvolveremos a segunda parte da desigualdade através das quadraturas na forma convencional, as quais podem ser medidas, e as quadraturas que utilizamos, na forma proposta por Caves-Schumacker, e veremos que as duas dão o mesmo resultado para a soma das correlações tripartites, apesar de cada uma delas separadamente apresentar valores diferente nas duas representações.

Desenvolvamos então a parte real do lado direito da desigualdade:

$$\langle X_1X_2X_0 \rangle - \langle X_1Y_2Y_0 \rangle - \langle X_2Y_1Y_0 \rangle - \langle Y_1Y_2Y_0 \rangle = \langle X_0(X_1X_2 - Y_2Y_1) - Y_0(X_1Y_2 + X_2Y_1) \rangle, \quad (6.44)$$

e a parte imaginária,

$$\langle X_2X_0Y_1 \rangle - \langle Y_1Y_2Y_0 \rangle + \langle X_1X_2Y_0 \rangle + \langle X_1X_0Y_2 \rangle = \langle X_0(Y_1X_2 + X_1Y_2) + Y_0(X_1X_2 - Y_1Y_2) \rangle. \quad (6.45)$$

Então o que precisamos fazer para comparar as duas representações é calcular as quantidades $(X_1X_2 - Y_2Y_1)$, $(X_1Y_2 + X_2Y_1)$ nas duas formas, lembrando que as quadraturas do bombeamento são definidas igualmente pra elas.

A representação de Caves-Schumacker fornece;

$$\begin{aligned}
(X'_1 Y'_2 + X'_2 Y'_1) &= -i[(\alpha_1 + \alpha_2^*)(\alpha_2 - \alpha_1^*) + (\alpha_2^* + \alpha_1^*)(\alpha_1 - \alpha_2^*)] \\
&= i(2\alpha_1^* \alpha_2^* - 2\alpha_1 \alpha_2), \\
(X'_1 X'_2 - Y'_2 Y'_1) &= [(\alpha_1 + \alpha_2^*)(\alpha_2 + \alpha_1^*) + (\alpha_2 - \alpha_1^*)(\alpha_1 - \alpha_2^*)] \\
&= 2\alpha_1^* \alpha_2^* + 2\alpha_1 \alpha_2,
\end{aligned} \tag{6.46}$$

e a representação convencional;

$$\begin{aligned}
(X_1 Y_2 + X_2 Y_1) &= [(\alpha_1 + \alpha_1^*)(\alpha_2 - \alpha_2^*) + (\alpha_2^* + \alpha_2^*)(\alpha_1 - \alpha_1^*)] \\
&= i(2\alpha_1^* \alpha_2^* - 2\alpha_1 \alpha_2), \\
(X_1 X_2 - Y_2 Y_1) &= [(\alpha_1 + \alpha_1^*)(\alpha_2 + \alpha_2^*) + (\alpha_2 - \alpha_2^*)(\alpha_1 - \alpha_1^*)] \\
&= 2\alpha_1^* \alpha_2^* + 2\alpha_1 \alpha_2.
\end{aligned} \tag{6.47}$$

Como as duas representações fornecem o mesmo resultado podemos concluir que mesmo sendo a desigualdade tripartite de Cauchy-Schwarz formulada por quantidades não mensuráveis podemos obter seus valores experimentais através de quaraturas convencionais, tornando-a uma desigualdade absolutamente possível de ser testada para detectar a separabilidade ou inseparabilidade de um sistema.

Capítulo 7

Conclusões

Neste trabalho desenvolvemos as soluções das equações estocásticas obtidas para o Oscilador Paramétrico Ótico impondo sua operação realizada abaixo do limiar de oscilação por usar a solução clássica referente a esta condição. Reescalando os termos das equações e definindo as quadraturas na representação proposta por Caves-Schumacher [36] conseguimos desacoplá-las possibilitando a obtenção de suas soluções através da expansão da constante de acoplamento em série de potências truncada em sua segunda ordem [14]. A partir deste ponto fomos capacitados a calcular as correlações quânticas entre os modos de saída, bombeamento, sinal e complementar deste aparato, estando estas em perfeito acordo com as soluções numéricas calculadas sem nenhum tipo de aproximação, atestando desta forma a veracidade das nossas expressões analíticas.

Por sua vez estas correlações foram fortes indicadoras de emaranhamento do sistema, porém o critério que detecta inseparabilidade proposto por P. van Loock e A. Furusawa [12] e denominado nesta dissertação como Soma de Variâncias Tripartites não nos possibilitou a conclusão desta propriedade para o bombeamento.

Motivados pelas fortes correlações entre os campos buscamos uma nova desigualdade para detectar o emaranhamento tripartite, desta forma expandimos a já conhecida desigualdade de Cauchy-Schwarz para o caso tridimensional, a qual foi violada para o nosso sistema.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935)
- [2] P. Kok, W. J. Munro, K. Nemoto, T. C. Ralph, J. P. Dowling e G. J. Milburn, *Rev. Mod. Phys.*, **79**, 135 (2007).
- [3] www.idquantique.com
- [4] K. N. Cassemiro, A. S. Villar, M. Martinelli e P. Nussensveig *Opt. Express*, **15**, 18236 (2007)
- [5] Z. Y. Ou, S. F. Pereira, H. J. Kimble, e K. C. Peng *Phys. Rev. Letters* **68**, 3663 (1992)
- [6] A. S. Villar, M. Martinelli, C. Fabre e P. Nussenzveig *Phys. Rev. Letters* **97** 140504 (2006)
- [7] Lu-Ming Duan, G. Giedke, J.I.Cirac, P. Zoller *Phys. Rev. Letters* **84**, 2722 (2000)
- [8] D. M. Greenberg, M. A. Horne e A. Zeilinger in Bell's Theorem, Quantum Theory and Conceptions of the Universe, edited by M. Kafatos (1989), p. 73.
- [9] A. S. Coelho, F.A. S. Barbosa, K. N. Cassemiro, M. Martinelli, P. Nussenzveig *Science* **323** (2009)
- [10] K. N. Cassemiro, A. S. Villar, P. Valente. M. Martinelli e P. Nussensveig, *Optics Letters* **32** 6 (2007)
- [11] K. N. Cassemiro, A. S. Villar, M. Martinelli e P. Nussensveig, *Opt. Society of America* **15** 26 (2007)

- [12] P. van Loock, A. Furusawa, *Phys. Rev. A* **67** 052315 (2003)
- [13] T. Aoki, N. Takei, H. Yonezawa, K. Wakai T. Hiraoka e A. Furusawa *Phys. Rev. Letters* **91**, 8 (2003)
- [14] K. Dechoum, P. D. Drummond, S. Chaturvedi, M. D. Reid, *Phys. Rev. A* **70**, 1 (2004)
- [15] H.J.Carmichael, *Statistical Methods in Quantum Optics 1* (Springer, Berlin, 1999)
- [16] E. P. Wigner, *Phys. Rev.* **40**,729 (1932)
- [17] R. J. Glauber, *Phys. Rev.* **131**, 2766 (1963).
- [18] E. C. G. Sudarshan, *Phys. Rev. Lett.* **10**, 277 (1963).
- [19] E. Fermi *Rev. Mod. Phys.* **4**, 87 (1932)
- [20] P. A. M. Dirac *Proc. Roy Soc. A* **114**, 243 (1927)
- [21] T.H.Maiman, *Nature*, **187**, 493 (1960)
- [22] C. W. Gardiner, *Handbook of stochastic methods for physics, chemistry and the material sciences*. Springer Series in Synergetics, Berlin: Springer, 1983.
- [23] Glauber R J *Phys. Rev.* **131**, 2766 (1963)
- [24] Wolfgang. P. Schleich "Quantum Optics in Phase Space", (WILEY-VCH. Berlin 2001).
- [25] P D Drummond e C W Gardiner *J. Phys A* **13** 2353 (1980)
- [26] C W Gardiner e P Zoller "Quantum Noise", 2nd edition
- [27] k. Gottfried e T. Yan "Quantum Mechanics Fundamentals", 2nd edition
- [28] D. Bohm *Quantum Theory*, pag, 164.
- [29] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony e R. A. Holt *Phys. Rev. Lett.* **23**, 880 (1969)

- [30] S. J. Freedman e J. F. Clauser *Phys. Rev. Lett.* **28** 938 (1972)
- [31] livro de optica quantica para matriz de difusao
- [32] Howard Carmichael “An Open Systems Approach to Quantum Optics”, (Springer-Verlag)
- [33] H. Risken, “The Fokker-Planck Equation”, 2nd edition (Springer-Verlag, 1989).
- [34] M. D. Reid e P. D. Drummond, *Phys. Rev. Letters* **60**, 2731 (1988)
- [35] Robert W. Boyd, “Nonlinear Optics”, 2nd edition (Academic Press).
- [36] C. M. Caves e B. L. Schumacher *Phys. Rev. A* **31**, 3068 (1985).
- [37] P. Deuar e P. D. Drummond, *Phys. Rev. A* **66**, 033812 (2002)
- [38] G. Giedke, B. Kraus, M. Lewenstein, J.I.Cirac, *Phys. Rev. A* **64**, 052303 (2001)