

DIAGRAMAS DE FASE PARA A MATÉRIA NUCLEAR E DE QUARKS



INSTITUTO DE FÍSICA

Universidade Federal Fluminense

Autor: Odilon Lourenço da Silva Filho

Orientador: Dr. Antônio Delfino Jr.

Niterói - RJ

23 de fevereiro de 2011

Odilon Lourenço da Silva Filho

Diagramas de fase para a matéria nuclear e de quarks

Tese apresentada ao curso de Pós-Graduação
em Física da Universidade Federal Fluminense
como requisito parcial para obtenção do título
de doutor em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Antônio Delfino Jr.

DOUTORADO EM FÍSICA. ÁREA: FÍSICA NUCLEAR
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

Niterói - RJ

23 de fevereiro de 2011

S586d Silva Filho, Odilon Lourenço da.
Diagramas de fase para a matéria nuclear e de quarks /
Odilon Lourenço da Silva Filho ; orientador: Antônio Delfino
Jr. -- Niterói, 2011.
116 f. : il.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal Fluminense,
Instituto de Física, 2011.
Bibliografia: f. 110-116.

1.HÁDRON. 2.TERMODINÂMICA. 3.TRANSIÇÃO DE FASE. 4.QUARKS.
5.CROMODINÂMICA QUÂNTICA. I.Delfino Júnior, Antônio,
Orientador. II.Universidade Federal Fluminense. Instituto de
Física, Instituição responsável. III.Título.

CDD 539.7



INSTITUTO DE FÍSICA

Universidade Federal Fluminense

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

RUA GAL MILTON TAVARES DE SOUZA, SN

24210-346 – NITERÓI - RIO DE JANEIRO

TEL: (21)2629-5878 - FAX: 2629-5887

E-MAIL: cpg@if.uff.br

Ata dos trabalhos finais da Comissão Examinadora da tese apresentada por Odilon Lourenço da Silva Filho. Aos vinte e três dias do mês de fevereiro de dois mil e onze, às 15 horas, reuniram-se no Instituto de Física da Universidade Federal Fluminense os membros da Comissão Examinadora constituída pelos professores doutores Antonio Delfino Júnior (UFF), Jesús Lubián Ríos (UFF), Tobias Frederico (ITA), Mirian Enriqueta Bracco (UERJ) e Takeshi Kodama (UFRJ), sob a presidência do primeiro, para prova pública de apresentação de tese intitulada "Diagramas de fase para a matéria nuclear e de quarks", tendo em vista as exigências do Regulamento Específico do curso de Física relacionadas com a conclusão do Doutorado em Física pela Universidade Federal Fluminense. A tese foi elaborada sob a orientação do professor Antonio Delfino Júnior. Após a exposição do trabalho, o aluno respondeu às questões formuladas pelos integrantes da Comissão Examinadora, que apresentou parecer no sentido de aprová-lo. Para constar, foi lavrada a presente ata, que vai assinada por mim, secretário da Pós-graduação em Física em exercício, pelos membros da Comissão Examinadora e pelo doutorando.

Niterói, vinte e três de fevereiro de dois mil e onze.

Rafael Ângelo Nobuyuki Sano

Dr. Antonio Delfino Júnior

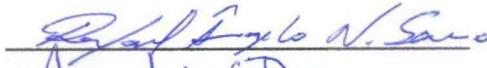
Dr. Jesús Lubián Ríos

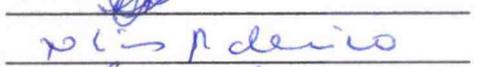
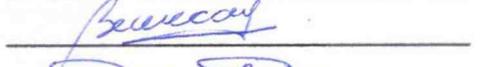
Dr. Tobias Frederico

Dra. Mirian Enriqueta Bracco

Dr. Takeshi Kodama

Odilon Lourenço da Silva Filho






“O correr da vida embrulha tudo, a vida é assim: esquenta e esfria, aperta e daí afrouxa, sossega e depois desinquieta. O que ela quer da gente é coragem.”

Guimarães Rosa.

Agradecimentos

- A Deus por ter me concedido a chance de concluir, sempre com muito prazer, alegria e felicidade, mais essa importante etapa em minha vida.
- À minha esposa e futura mãe dos meus filhos, Mariana, pelo amor e companheirismo novamente dedicados em mais essa jornada que juntos atravessamos.
- De forma especial ao meu orientador e amigo Antônio Delfino por dedicar, sempre de forma brilhante e sobretudo generosa, seu vasto conhecimento não apenas à minha iniciação científica, mestrado e doutorado de forma pontual, mas principalmente em minha formação profissional como um todo. Sou extremamente grato pelo senhor sempre ter levado nossas discussões nessa direção e, pela atenção e ajuda irrestritas dispensadas durante todo esse tempo. De fato a orientação foi completa, no sentido mais amplo da palavra. Espero um dia poder contribuir exatamente da mesma maneira na formação de outras pessoas. Se um dia conseguir isso, tenho certeza que estarei fazendo meu melhor. Receba meu sincero muito obrigado.
- Aos meus pais Odilon e Tercilia, a quem dedico esta tese, por não medirem esforços em oferecer todo o apoio que me fez chegar até aqui. Eu nada seria sem vocês, sempre presentes em minha vida. Obrigado por tudo que fizeram por mim.
- À professora e também amiga Claudette Cordeiro, pela ajuda e confiança em meu trabalho. Agradeço especialmente pela oportunidade dada na Alemanha e por ter me dado a possibilidade de começar a trabalhar em outra linda área da Física.
- Aos professores do Departamento de Física, especialmente a Manuel Malheiro, Rubens Amaral, Nivaldo Lemos, Evandro de Mello, Anna Chame, Jesús Lubían, Ruth Bruno, Lucia Almeida e Carlos Alberto Faria Leite.
- Aos professores e também grande incentivadores Jorge de Sá Martins e Roberto Toscano.

- Àqueles que também tenho a honra de chamar de amigos, Ricardo Aguiar, Rodrigo Picanço, Silvânia Alves e Carlos Eduardo (Cadu), pelo apoio constante em todos os momentos de alegria e também nas adversidades.
- Às funcionárias da biblioteca do Instituto de Física, Ana Maria, Lucia Regina, Kátia Maria, Leia Luiz, Danieli Brabo, Márcia Santos, Luci Porto e Karen Guimarães.
- À secretaria de pós-graduação do Instituto de Física, em especial aos excelentes funcionários Valéria Lima e Rafael Sano.
- Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ) pelo ininterrupto suporte financeiro.
- À todo Instituto de Física na figura de seus professores, alunos e funcionários, por terem me proporcionado 10 anos (entre graduação, mestrado e doutorado) de excelente convívio e ambiente, de modo a poder considerar a UFF, durante todo esse tempo, como minha segunda casa. Muito obrigado.

Resumo

Nesse trabalho, analisamos as previsões de um conjunto de modelos não lineares de Walecka sobre os diagramas de fase da matéria nuclear e de quarks. Uma comparação entre os modelos hadrônicos de alcance finito e os modelos não lineares de contato também é realizada. Nestes últimos, uma aplicação do limite não relativístico mostra como podem ser obtidos alguns tipos de modelos de Skyrme. No regime de temperaturas moderadas, construímos as curvas de transição líquido-gás escalonadas pelos respectivos parâmetros críticos, investigando sua dependência de modelos em função da densidade. Uma discussão sobre as regiões metaestáveis do sistema também é conduzida através do estudo das curvas spinodais dos modelos, escalonadas pelos parâmetros flash. A incompressibilidade nuclear também é obtida em função da temperatura para dois cenários distintos, o primeiro onde tal grandeza é calculada em um ponto de coexistência de fases e, outro no qual o cálculo é feito em uma região metaestável. Para a construção dos diagramas de fase hádron-quark, utilizamos os modelos hadrônicos em conjunto com o modelo de quarks interagentes, PNJL, que leva em conta o fenômeno do confinamento (dinâmico) em sua estrutura através do laço de Polyakov. Descrevemos toda sua termodinâmica e apresentamos suas diferentes parametrizações, juntamente com a análise dos diagramas de fase gerados exclusivamente por este modelo em comparação com os diagramas hádron-quark, gerados a partir de ambos.

Abstract

In this work we analyze the predictions from a set of nonlinear Walecka models on the nuclear matter and quarks phase diagrams. A comparison between the finite range hadronic models and the nonlinear point-coupling ones is also accomplished. In the latter, the use of the nonrelativistic limit shows how some Skyrme-type models can be obtained. In the moderate temperature regime, we construct the liquid-gas transition curves, scaled by the respective critical parameters, and investigate its model dependence as a function of the density. Through a study of the model spinodal curves, scaled by the flash parameters, a discussion on the system metastable regions is also performed. The nuclear incompressibility is also obtained as a function of the temperature in two distinct scenarios, the first where such quantity is calculated in a phase coexistence point, and the second in which the calculation is performed in a metastable region. For the construction of the hadron-quark phase diagrams, we use the hadronic models together with the interacting quark model, the PNJL one, that takes into account in its structure the (dynamical) confinement phenomenology through the Polyakov loop. For this model we describe all the thermodynamics, and present its parametrizations, together with the analysis of the phase diagrams, generated by the PNJL model itself, in comparison with the hadron-quark diagrams generated from both models.

Lista de Figuras

1.1	Potencial nuclear (1.1) gerado pelo modelo de Walecka.	p. 8
2.1	Energia por partícula como função da razão ρ/ρ_0 para os 9 modelos NLPC (curvas tracejadas) e NLW (curvas cheias).	p. 26
2.2	Razão da densidade escalar entre os modelos NLW e NLPC como função de ρ/ρ_0	p. 26
2.3	Funções $f(\sigma)$ e $g(\sigma)$ para os modelos NLW em função de ρ/ρ_0	p. 28
2.4	Razão $G = g_i ^{max}/ g_j ^{min}$ como função de K e m^* para os modelos NLW e NLPC, fixados em $\rho_0 = 0,151 \text{ fm}^{-3}$ e $B_e = 16,07 \text{ MeV}$	p. 31
2.5	Coefficientes adimensionais obtidos via análise dimensional ingênua para os modelos NLW (esquerda) e NLPC (direita). Em ambos, $\rho_0 = 0,151 \text{ fm}^{-3}$ e $B_e = -16,07 \text{ MeV}$. De cima para baixo, temos representados g_4, g_1, g_2 e g_3 para a figura da esquerda e, g_4, g_3, g_2 e g_1 para a da direita.	p. 31
2.6	E/A como função de ρ/ρ_0 . Linhas cheias: modelos NLPC exatos, equação (2.7). Linhas tracejadas: limite não relativístico dos mesmos, equação (2.31).	p. 37
2.7	E/A como função de ρ/ρ_0 . Linhas cheias: modelos convencionais de Skyrme, equação (2.34). Linhas tracejadas: densidade de energia calculada segundo a equação (2.31).	p. 37
3.1	Pressão em função da razão ρ/ρ_0 para o modelo NL3 em $T = 10 \text{ MeV}$	p. 42
3.2	Pressão em função da densidade para o modelo NLSH em várias temperaturas. Círculos: pontos spinodais. Cruzes: pontos de coexistência.	p. 43
3.3	Pressão versus densidade para $T = T_c$, em unidades de P_c e ρ_c , respectivamente.	p. 44
3.4	Curvas de coexistência escalonadas por T_c e ρ_c . O painel interno é a curva, em escala logarítmica, de $\rho/\rho_c - 1$ versus $1 - T/T_c$ na vizinhança do ponto crítico ($1 < \rho/\rho_c \leq 1,25$ e $0,98 \leq T/T_c < 1$) para os mesmos modelos.	p. 45
3.5	Isotermas para $T = T_f$, nas variáveis termodinâmicas escalonadas pelos parâmetros flash.	p. 47

3.6	Curvas spinodais T/T_f versus ρ/ρ_f	p. 48
3.7	Incompressibilidade isotérmica, em unidades de $K(T=0)$, versus temperatura, em unidades de T_f , para o sistema descrito no cenário (i).	p. 49
3.8	Incompressibilidade isotérmica, em unidades de $K(T=0)$, versus temperatura, em unidades de T_c , para o sistema descrito no cenário (ii).	p. 50
3.9	Massa efetiva escalonada pela massa do nucleon como função da temperatura para os modelos não lineares em $v = \mu = \rho = 0$	p. 51
3.10	(a) Negativo da pressão em função de m^* . (b) m^* em função da temperatura. Ambos para o modelo NL3 no caso $\mu = 0$	p. 52
3.11	Função $f(m^*)$ definida em (3.12) em função da massa efetiva para $T = 192,34$ MeV e $\mu = 0$ no modelo NL3.	p. 53
3.12	Diagrama de fases no plano $T \times \mu$ para os modelos da figura 3.9a.	p. 54
3.13	Temperatura em unidades de T_c versus m^* em unidades de m_c^*	p. 54
3.14	(a) Grande potencial termodinâmico em função de m^* . (b) m^* versus μ . (c) Pressão em função da densidade. (d) μ versus m^* . Todas as figuras referentes ao modelo NLZ2 em $T = 10$ MeV.	p. 55
4.1	Φ (1a-1c) e a razão $\rho_{sq}(T)/\rho_{sq}(vac)$ (1d-1f), das diferentes parametrizações do modelo PNJL. Todos em função da temperatura e para alguns valores fixos de μ_q	p. 68
4.2	(a-c): Pressão, densidade de energia e densidade de entropia em unidades de P_{SB} , \mathcal{E}_{SB} e S_{SB} . Todos em função de T . (d): Medida da interação em unidades de T^4 versus T . (e): Razão P/\mathcal{E} em função de $\mathcal{E}^{1/4}$. Todas as grandezas obtidas em $\mu_q = 0$. Os dados de QCD na rede para três sabores foram extraídos de [127, 128]. Note que tais dados incluem cálculos para diferentes ações (p4 e asqtad) e extensões temporais de rede ($N_\tau = 4, 6, 8$).	p. 69
4.3	(a) Parâmetros de ordem e (b) suas derivadas em função de T para a parametrização RRW06.	p. 70
4.4	Diagramas de fase para os modelos PNJL no plano $T \times \mu_q$	p. 71
4.5	(a) $\rho_{sq}/\rho_{sq}^{vac}$ e (b) Φ em função da temperatura para $\mu_q = 334,7$ MeV da parametrização RRW06.	p. 72

4.6	Ω_{PNJL} em função dos parâmetros de ordem para a parametrização RRW06 em $T = 80$ MeV e $\mu_q = 334,7$ MeV.	p. 72
4.7	(a) P versus T para os modelos PNJL e o hadrônico NL3. (b) Φ e sua derivada, para os modelos PNJL em função de T . Ambas as figuras para $\mu_B = 300$ MeV.	p. 74
4.8	Diagramas de fase NLW-PNJL no plano $T \times \mu_B$. Incluídos também os diagramas da figura 4.4.	p. 75
4.9	Diagramas de fase NLW-PNJL em comparação com as curvas de transição dos modelos hadrônicos.	p. 76
4.10	Diagramas de fase no plano $T \times \rho/\rho_0$ para as transições Walecka-PNJL, NLSH-PNJL, NL3-PNJL e NLZ2-PNJL.	p. 77
4.11	Diagramas de fase para as transições NLW-MIT com $B^{1/4} = 238$ MeV e $\alpha_s = 0$	p. 79
4.12	Diagramas de fase no plano $T \times \mu$ das transições NLW-PNJL (curvas cheias) e NLW-MIT (curvas tracejadas). Os valores da constante B (veja o texto abaixo) são indicados entre parênteses.	p. 80
4.13	Diagramas de fase no plano $T \times \rho/\rho_0$ das transições NLW-PNJL e NLW-MIT.	p. 81
D.1	Partículas de helicidade (a) positiva e (b) negativa.	p. 102
E.1	(a) Φ . (b), (c) e (d) Pressão, densidade de energia e densidade de entropia, respectivamente, escalonados por seus valores no limite de Stefan-Boltzmann. Para todas as figuras $T_0 = 270$ MeV e, para a parametrização DS10 foi tomado $\mu_q = 0$	p. 107

Lista de Tabelas

1.1	Propriedades de saturação para os 14 modelos hadrônicos utilizados.	p. 18
1.2	Massa do nucleon e constantes de acoplamento usadas nos modelos hadrônicos, com $G_i^2 = g_i^2/m_i^2$ ($i = \sigma, \omega, \rho$), $a = A/g_\sigma^3$ e $b = B/g_\sigma^4$	p. 19
2.1	Propriedades de saturação e constantes de acoplamento para os modelos não lineares do tipo $\sigma^3 - \sigma^4$	p. 24
2.2	Constantes de acoplamento dos modelos relativísticos de contato.	p. 25
2.3	Contribuições para a energia por nucleon em $\rho = \rho_0$ dos modelos NLPC e NLW (valores entre parênteses). Para os modelos NLPC temos que $E_1 = G_\omega'^2 \rho_0/2$, $E_2 = G_\sigma'^2 \rho_s^2/2\rho_0$, $E_3 = 2A'\rho_s^3/3\rho_0$ e $E_4 = 3B'\rho_s^4/4\rho_0$. Para os NLW, $E_1 = G_\omega^2 \rho_0/2$, $E_2 = (\Delta M)^2/2G_\sigma^2 \rho_0$, $E_3 = a(\Delta M)^3/3\rho_0$ e $E_4 = b(\Delta M)^4/4\rho_0$. A energia cinética E_c e E_1 têm o mesmo valor para ambos os modelos.	p. 27
2.4	Constantes adimensionais das densidades lagrangianas dos modelos NLPC e NLW (entre parênteses). As massas mesônicas dos modelos NLW são dadas nas duas últimas colunas. . .	p. 29
2.5	Coeficientes adimensionais do modelo NLPC obtidos via expressão (2.18).	p. 30
3.1	Parâmetros críticos dos modelos não lineares de Walecka.	p. 44
3.2	Parâmetros flash dos modelos não lineares de Walecka.	p. 47
4.1	Parâmetros dos potenciais dados nas expressões Eqs. (4.23)-(4.24) e (4.26).	p. 67

Sumário

Introdução	p. 1
1 Modelos não lineares de Walecka em temperatura nula	p. 7
1.1 Descrição dos modelos	p. 9
1.2 Densidade de energia, pressão e incompressibilidade	p. 12
1.3 Potenciais químicos	p. 15
1.4 Energia de simetria e suas derivadas	p. 16
1.5 Coeficiente de skewness	p. 18
1.6 Parametrizações utilizadas	p. 18
2 Modelos relativísticos de contato	p. 20
2.1 Descrição dos modelos e equações de estado	p. 21
2.2 Análise dimensional ingênua	p. 23
2.3 Comparação entre os modelos NLPC e NLW	p. 24
2.3.1 Parametrizações dos modelos	p. 24
2.3.2 Modelos NLPC a partir dos NLW	p. 27
2.3.3 Naturalidade dos modelos NLPC e NLW	p. 28
2.4 Limite não relativístico	p. 32
2.4.1 Resultados	p. 34
3 Modelos não lineares de Walecka em temperatura finita	p. 39

3.1	Equações de estado	p. 39
3.2	Transição de fases em baixas temperaturas	p. 41
3.2.1	Curvas de coexistência e spinodais	p. 45
3.2.2	Incompressibilidade	p. 48
3.3	Transição de fases em altas temperaturas	p. 51
4	Transição de fases hádron-quark	p. 57
4.1	Fenomenologia da QCD	p. 57
4.1.1	Diferentes tratamentos	p. 59
4.2	O modelo PNJL	p. 60
4.2.1	Laço de Polyakov e simetria de centro	p. 60
4.2.2	Equações de estado em $T \neq 0$	p. 63
4.2.3	Diferentes parametrizações	p. 66
4.2.4	Comparação entre os modelos	p. 68
4.2.5	Diagramas de fase	p. 70
4.3	Diagramas de fase hádron-quark	p. 73
4.3.1	Comparação com o modelo MIT	p. 78
	Conclusões	p. 82
	Apêndice A – Notações, convenções e definições	p. 87
	Apêndice B – Derivadas dos campos mesônicos	p. 90
	Apêndice C – Derivação do limite não relativístico dos modelos de contato	p. 92
C.1	Densidades vetorial e escalar	p. 95
C.2	Limite do contínuo para a densidade de energia	p. 96

C.3	Outras equações de estado	p. 97
Apêndice D – Teoria quântica de campos: alguns conceitos		p. 98
D.1	Invariância local de gauge	p. 98
D.2	Formalismo de tempo imaginário	p. 99
D.3	Simetria quiral	p. 101
Apêndice E – Casos particulares do modelo PNJL		p. 106
E.1	Setor puro de glúons	p. 106
E.2	Expressões em temperatura nula: setor NJL	p. 107
Referências Bibliográficas		p. 110

Introdução

O sistema ligado mais simples usado para o estudo da interação nuclear é o dêuteron, composto por um próton e um nêutron. Dados experimentais bem estabelecidos, mostram que sua energia de ligação é dada por $|B_e| = 2,22452 \pm 0,00010$ MeV [1], indicando assim que este é um sistema fracamente ligado, mesmo com as duas partículas interagindo entre si pela ação do mais forte potencial existente, o potencial nuclear. Uma modelagem simples para este problema [1], que consiste no uso da equação de Schrödinger para um potencial do tipo poço quadrado levando em conta que o alcance típico da força nuclear é da ordem de 1,7 fm, fornece o resultado de $V_0 \simeq 35$ MeV para sua profundidade, sugerindo assim a altíssima intensidade da interação, quando comparada com $|B_e|$. Outros dados experimentais ainda mostram que o dêuteron apresenta spin total igual a 1 e paridade positiva em seu estado fundamental (triplete), momento de quadrupolo elétrico $Q = 2,82 \pm 0,01$ mb e momento magnético $\mu = 0,857406 \pm 0,000001$ mn [1]. Do ponto de vista teórico, uma linha de abordagem bastante utilizada que trata não apenas de dois corpos mas sim de sistemas de muitos nucleons, baseia-se na construção de interações nucleares, como os potenciais de troca de um ou mais píons, cujos parâmetros livres são ajustados de forma a reproduzir toda essa fenomenologia e resultados experimentais envolvidos na física do dêuteron e de sistemas nucleares não ligados, estudados via espalhamento. Tais cálculos microscópicos são efetuados utilizando, por exemplo, técnicas conhecidas como Brueckner-Hartree-Fock (BHF) [2]. Outro método de tratamento consiste em ajustar diretamente os observáveis conhecidos da física de muitos nucleons, sem a preocupação com os detalhes da interação nuclear. Nesta abordagem, a aproximação de campo médio é de grande importância tanto em modelos não relativísticos quanto em relativísticos.

Dentre os modelos não relativísticos considerados nesta última abordagem, figuram dentre os principais, os modelos de Skyrme [3] e de Gogny [4] cujas interações efetivas são, respectivamente, de alcance nulo e finito. Já no caso relativístico, classe de modelos hadrônicos que será utilizada ao longo desta tese, todas as grandezas necessárias para a descrição do sistema nuclear em questão, são derivadas a partir da densidade lagrangiana que define o modelo e, a fenomenologia de troca de mésons proposta inicialmente por Yukawa, é também levada em

conta pela troca das partículas descritas, por exemplo, pelos campos escalar σ e vetorial ω_μ , ou seja, o alcance finito da interação nuclear é considerado. Ainda nessa categoria, destacam-se também os modelos relativísticos de alcance zero, análogos aos modelos de Skyrme. Nestes, não há troca de mésons, considerados como partículas infinitamente massivas e, portanto, apenas os campos que descrevem os nucleons são levados em conta em modelos desse tipo. Dentre outras propriedades da física nuclear, os modelos relativísticos, que podem apresentar nucleons e mésons como graus de liberdade fundamentais da teoria (ou apenas nucleons como no caso dos modelos de contato), são capazes também de descrever o mecanismo da saturação através de um cancelamento quase que total entre os potenciais escalar e vetorial que surgem desta descrição. Propriedades da matéria nuclear infinita como a densidade de saturação e energia de ligação, e de núcleos finitos, tais como raio quadrático médio e separação spin-órbita, também são obtidas destes modelos, através do ajuste de suas constantes de acoplamento e massas mesônicas, feito no regime de temperatura nula.

As aplicações desses modelos estendem-se nos mais variados intervalos de temperatura e densidade. Para o regime de temperatura nula, o conhecimento detalhado das equações de estado dos modelos hadrônicos, tanto relativísticos quanto não relativísticos, torna-se fundamental na descrição, por exemplo, das estrelas de nêutrons, estudadas em densidades acima de seis vezes a densidade de saturação da matéria nuclear. Propriedades desses objetos, tais como a relação massa-raio, são diretamente influenciadas por características particulares de cada modelo hadrônico utilizado. Exemplos dos modelos de Skyrme e dos amplamente utilizados modelos de Walecka [5] no estudo das estrelas de nêutrons, podem ser encontrados nas referências [6, 7]. Ainda em $T = 0$, porém para uma região de densidades muito baixas, da ordem de 10^{-4} fm^{-3} , a matéria de nêutrons pode ser estudada no chamado regime de gás de Fermi diluído. Aplicações neste tema com o uso de modelos relativísticos, por exemplo, é encontrada na referência [8].

Em temperaturas finitas, onde os modelos hadrônicos são generalizados para $T \neq 0$, porém mantendo o ajuste de parâmetros feito em $T = 0$, destaca-se o fenômeno das transições de fase da matéria nuclear, que será abordado nesta tese com o uso dos modelos não lineares de Walecka. De uma forma geral, os modelos hadrônicos exibem até temperaturas da ordem de 20 MeV, uma transição de fases do tipo líquido-gás, caracterizada por regiões que apresentam baixas (fase gasosa) e altas (fase líquida) densidades. Esse é o típico comportamento apresentado, por exemplo, pelo modelo de van der Waals em um regime de temperaturas que se estende até a chamada de temperatura crítica do sistema. Estudos mostram que devido aos

efeitos coulombiano e de superfície, em núcleos finitos essa temperatura crítica é dada por aproximadamente metade do valor obtido para a temperatura crítica da matéria nuclear infinita [9]. Outra característica geral observada nos modelos hadrônicos, é que tal transição ocorre sempre em densidades abaixo da densidade de saturação, como esperada.

No regime de mais altas temperaturas (~ 200 MeV) e baixas densidades, outro tipo de transição ocorre na matéria nuclear, a transição de fases hádron-quark. Nesta, a identidade dos hádrons tende a ser perdida em favor dos seus constituintes fundamentais, os quarks. Assim, a construção de um diagrama de fases referente à essa transição revela regiões puramente hadrônicas e de quarks livres. Na verdade, acredita-se que o processo inverso tenha ocorrido na natureza no começo do universo, ou seja, o plasma de quarks e glúons existente entrou em um processo de hadronização e formou toda a estrutura hadrônica conhecida atualmente. Do ponto de vista experimental, tenta-se recriar tais condições extremas a partir das colisões de íons pesados realizadas nos grandes aceleradores de partículas, tais como o Relativistic Heavy Ion Collider (RHIC)¹ e o Large Hadron Collider (LHC)², onde a energia envolvida nesses experimentos é alta o suficiente para que seja possível a detecção de ressonâncias e possíveis sinais da transição hádron-quark. Os resultados advindos de tais experimentos são utilizados nos mais diversos modelos hadrônicos, dentre eles, os modelos não lineares de Walecka. Com esses dados devidamente reproduzidos, os modelos são então capazes de fazer previsões acerca de outras quantidades do sistema objeto da colisão, tais como a própria temperatura e o potencial químico dos bárions envolvidos. Uma aplicação nesse sentido para o modelo não linear GM1 submetido aos vínculos de conservação de número bariônico, estranheza e carga elétrica, pode ser vista na referência [10]. Ainda no campo teórico, o tratamento específico da transição de fases hádron-quark é um tanto quanto delicado, visto que dois graus de liberdade essencialmente distintos fazem parte do estudo. Assim, os modelos hadrônicos disponíveis devem obrigatoriamente ser utilizados em conjunto com os de quarks, isto é, modelos que de alguma forma descrevem a fenomenologia da Cromodinâmica Quântica (QCD³). Também é possível construir, para essa faixa de temperatura, diagramas de fase exclusivamente a partir de modelos da QCD, ou de modelos hadrônicos, porém, rigorosamente não se pode considerar que nesse caso as fases identificadas sejam puramente hadrônicas e de quarks livres, já que cada modelo trata de um tipo específico de matéria. Tanto os diagramas gerados pelos modelos individuais, quanto o próprios diagramas de fase hádron-quark, serão detalhadamente discutidos nesta tese,

¹Localizado no laboratório nacional de Brookhaven.

²Localizado no Centrou Europeu de Pesquisas Nucleares (CERN).

³Do inglês Quantum Chromodynamics.

cuja organização está disposta da seguinte forma.

No capítulo 1 apresentamos os modelos não lineares de Walecka utilizados nesta tese, destacando a derivação generalizada do tensor momento-energia para o caso em que a densidade lagrangiana inclui também termos mistos de interação entre os campos σ , ω_μ e $\vec{\rho}_\mu$. A partir desta quantidade, calculamos todas as grandezas necessárias para a descrição termodinâmica em temperatura nula do sistema assimétrico, em que o número de prótons é diferente do número de nêutrons. Expressões analíticas para a energia de simetria e suas derivadas, assim como uma lista dos parâmetros e propriedades de saturação dos modelos usados são mostradas no final deste capítulo.

Ainda no regime de temperatura nula, no capítulo 2 utilizamos os modelos não lineares de Walecka que apresentam apenas autointerações cúbicas e quárticas no campo escalar σ , em comparação com os também relativísticos modelos não lineares de contato, baseados em interações de alcance nulo. Construímos tais parametrizações de contato de modo a fazer ambas estruturas reproduzirem os mesmos observáveis relativos ao ponto de saturação da matéria nuclear. Assim, comparamos suas equações de estado em função da densidade, verificando que as diferenças começam a ser percebidas a partir da densidade de saturação e, para modelos que apresentam baixo valor de incompressibilidade, como por exemplo a parametrização NLZ2 onde $K = 172$ MeV. Através do conceito de naturalidade, também explorada em nossa análise, propomos uma forma de derivar os coeficientes naturais dos modelos de contato a partir dos modelos não lineares de Walecka, estabelecendo assim uma conexão mais analítica entre os mesmos. Exploramos ainda para uma classe ampliada de modelos hadrônicos, sob quais circunstâncias a naturalidade deixa de ser verificada e quais coeficientes ditam esse comportamento. Por último, aprofundamos um pouco mais nosso estudo sobre os modelos de contato tomando um limite não relativístico, que resulta na obtenção de uma equação de estado generalizada de Skyrme exibindo termos de ordens superiores na densidade em relação ao modelo convencional. Também discutimos quais as regiões de validade dessa aproximação, em termos da densidade, e mostramos que a incompressibilidade é o principal fator que influencia na qualidade da mesma.

O capítulo 3 abre os estudos em temperatura finita para os modelos não lineares de Walecka. Em particular, tratamos da transição de fases do tipo líquido-gás. Primeiro são generalizadas as equações de estado obtidas no capítulo 1 para levar em conta as variáveis termodinâmicas temperatura e potencial químico e assim tratar a transição propriamente dita. Obtivemos os

parâmetros críticos de todos os modelos e assim construímos seus respectivos diagramas de fase escalonados. Como comparação, também dispomos os parâmetros flash⁴ e as curvas spinodais também para os 14 modelos disponíveis. Outro estudo interessante sobre o comportamento da incompressibilidade nuclear em função da temperatura, calculada em diferentes perspectivas (sistemas em coexistência e metaestáveis), é também apresentado mostrando como resultado principal a independência de modelos. Ainda neste capítulo, estudamos uma transição de fases prevista para acontecer nos modelos de Walecka em altas temperaturas, via análise da massa efetiva do nucleon que mostra uma queda abrupta para alguns dos modelos tratados. Por fim, mostramos como o método usado para a construção do diagrama de fases para tal transição, pode também ser usado para o tratamento da transição líquido-gás em baixas temperaturas.

O estudo sobre as transições de fase hádron-quark está reservado no capítulo 4, último da tese. Como já mencionado, duas são as categorias de modelos necessárias na análise deste fenômeno. Em nossa abordagem, usamos os modelos não lineares de Walecka na descrição da parte hadrônica e, na fase de quarks, modelos proposto recentemente que incorporam o efeito do confinamento no já conhecido modelo Nambu-Jona-Lasinio. A inclusão do confinamento se dá a partir do laço de Polyakov (Φ), sendo esse o motivo pelo qual o modelo resultante é chamado de Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio (PNJL). Usando a aproximação de campo médio, calculamos sua densidade de energia, pressão e entropia, mostrando como são modificadas devido à Φ , as funções de distribuição de Fermi-Dirac presentes nessas grandezas termodinâmicas. Diferentes parametrizações deste modelo, assim como uma comparação entre as mesmas, são apresentadas e confrontadas com dados oriundos de simulações numéricas da QCD no regime de potencial químico nulo. A partir deste modelo, apresentamos também os diagramas de fase da QCD obtidos via análise dos parâmetros de ordem dados por Φ e pelo condensado de quarks $\langle \bar{\psi}_q \psi_q \rangle$, mostrando como a ordem da específica transição de fases é dependente dos valores de temperatura e potencial químico do sistema. Por fim, usamos o critério de Gibbs para a construção das curvas de transição envolvendo os modelos não lineares de Walecka e as parametrizações do modelo PNJL, mostrando assim os diagramas de fase da transição hádron-quark e destacando como uma tendência geral, que tais curvas englobam os diagramas gerados exclusivamente pelos modelos PNJL. Ainda como uma última aplicação, verificamos que o efeito do confinamento dinâmico contido no modelo PNJL reduz as regiões hadrônica e mista (composta de hádrons e quarks em coexistência), comparadas às mesmas regiões obtidas pela transição realizada pelos

⁴Temperatura e densidade máximas a partir das quais não há possibilidade de equilíbrio hidrostático (incompressibilidade nula).

modelos não lineares de Walecka junto ao modelo de sacola MIT, que descreve o confinamento apenas pela inclusão de uma constante, pressão de vácuo B , em suas equações de estado.

O apêndice A desta tese contém as notações, convenções e definições usadas ao longo da mesma. Os demais apêndices complementam temas abordados nos capítulos anteriores e estão assim organizados. O apêndice B mostra as expressões das derivadas dos campos mesônicos σ e ω_0 , necessárias para o cálculo de algumas grandezas apresentadas no capítulo 1 referentes aos modelos não lineares de Walecka. O apêndice C estende a derivação do limite não relativístico usado no final do capítulo 2 para os modelos relativísticos de contato, incluindo o cálculo das demais equações de estado para tal aproximação. O apêndice D versa sobre alguns conceitos de Teoria Quântica de Campos, utilizados no capítulo 4. Finalmente, como casos particulares do modelo PNJL, o apêndice E apresenta basicamente os setores usados na obtenção de seus parâmetros. O primeiro é o setor puro de glúons, usado exclusivamente na parametrização do potencial de Polyakov $\mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T)$, e que exibe uma transição de fases de primeira ordem verificada a partir do parâmetro Φ . No segundo, setor NJL, são obtidas as equações de estado em temperatura nula, usadas na parametrização da parte de quarks do modelo PNJL.

1 Modelos não lineares de Walecka em temperatura nula

Principal representante dos modelos hadrônicos relativísticos, o modelo de Walecka, proposto em 1974 [5], trata prótons e nêutrons como partículas fundamentais interagindo entre si através da troca do méson escalar σ e vetorial ω , que fisicamente representam a parte atrativa e repulsiva, respectivamente, da interação nuclear. Os parâmetros livres da teoria, dados pelas constantes de acoplamento entre os mésons e os nucleons, são determinados de forma que o modelo seja capaz de reproduzir, em temperatura nula, grandezas obtidas pela física de muitos corpos, tais como a energia de ligação da matéria nuclear infinita (B_e) e a densidade de saturação (ρ_0), ambas quantidades bem estabelecidas com valores em torno de 16 MeV e $0,15 \text{ fm}^{-3}$. Nesse sentido, pode-se falar em uma teoria efetiva, ao considerarmos por exemplo, que interações ainda mais fundamentais devidas aos quarks componentes dos nucleons, assim como o próprio meio nuclear, têm sua dinâmica parametrizada por tais constantes de acoplamento. A base da teoria de Walecka, também chamada de Hadrodinâmica Quântica (QHD da sigla em inglês¹), é a Teoria Quântica de Campos e tem como ponto de partida uma densidade lagrangiana invariante de Lorentz, da qual várias propriedades do sistema são extraídas, entre elas a forma da interação, do tipo Yukawa [11],

$$V(r) = -\frac{g_\sigma}{4\pi} \frac{e^{-m_\sigma r}}{r} + \frac{g_\omega}{4\pi} \frac{e^{-m_\omega r}}{r}, \quad (1.1)$$

particular para o caso em que o número de prótons é igual ao número de nêutrons. O sinal negativo do primeiro termo do potencial é correspondente ao méson σ , de massa m_σ , e representa seu caráter atrativo. A repulsão é dada pelo segundo termo, caracterizada pelo méson ω . Note que o alcance da interação é dado essencialmente pela massa de cada méson e consequentemente, o limite em que tais massas são infinitas leva a um potencial puramente de contato, ou seja, nesse caso os nucleons interagem entre si via interações pontuais. A figura 1.1 mostra o comportamento de $V(r)$ em função da distância entre os nucleons, r , para um conjunto de

¹Quantum Hadrodynamics.

constantes de acoplamento e massas mesônicas dado por $g_\sigma = 9,6$, $g_\omega = 11,7$, $m_\sigma = 550$ MeV e $m_\omega = 783$ MeV.

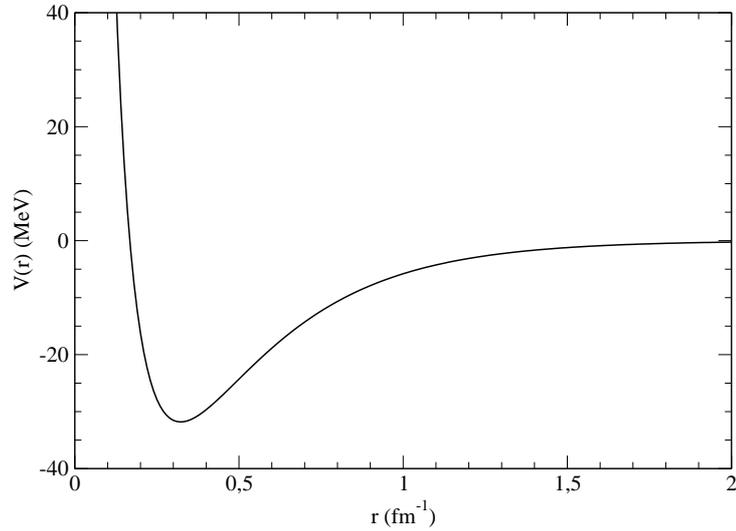


Figura 1.1: Potencial nuclear (1.1) gerado pelo modelo de Walecka.

Embora reproduzindo satisfatoriamente B_e e ρ_0 , o modelo de Walecka ainda apresenta dificuldades, por exemplo, na descrição quantitativa da incompressibilidade da matéria nuclear e da massa efetiva do nucleon, ambos valores dados aproximadamente por 554 MeV e $0,54^2$ e, de propriedades específicas de núcleos finitos³. Para contornar esses problemas, Boguta e Bodmer [12] acrescentaram ao modelo linear de Walecka autointerações cúbicas e quárticas no campo mesônico escalar introduzindo consequentemente mais duas constantes de acoplamento na teoria, abrindo assim a possibilidade da obtenção de valores mais razoáveis para tais grandezas. Uma outra alternativa ao modelo linear de Walecka são os modelos nos quais não há autointerações mesônicas, porém as constantes de acoplamento são dependentes da densidade ou do campo σ [13, 14].

Por questão de simplicidade, nesta tese nos restringiremos aos modelos hadrônicos onde as constantes de acoplamento não variam com o meio nuclear. Assim, apresentamos na próxima seção a descrição dos modelos não lineares de Walecka baseados nesta consideração e no regime de temperatura nula.

²Valor normalizado pela massa do nucleon dada por $M = 939$ MeV.

³Calculados quando o modelo leva em conta a distinção entre prótons e nêutrons assim como a interação coulombiana.

1.1 Descrição dos modelos

A densidade lagrangiana que descreve os modelos não lineares de Walecka que serão utilizados nesta tese é escrita, de uma forma generalizada, como forma,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{nm} + \mathcal{L}_{\sigma} + \mathcal{L}_{\omega} + \mathcal{L}_{\rho} + \mathcal{L}_{\sigma\omega\rho}, \quad (1.2)$$

onde

$$\mathcal{L}_{nm} = \bar{\Psi}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - M)\Psi - g_{\sigma}\sigma\bar{\Psi}\Psi - g_{\omega}\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\omega_{\mu}\Psi - \frac{g_{\rho}}{2}\bar{\Psi}\gamma^{\mu}\vec{\rho}_{\mu}\vec{\tau}\Psi, \quad (1.3)$$

$$\mathcal{L}_{\sigma} = \frac{1}{2}(\partial^{\mu}\sigma\partial_{\mu}\sigma - m_{\sigma}^2\sigma^2) - \frac{A}{3}\sigma^3 - \frac{B}{4}\sigma^4, \quad (1.4)$$

$$\mathcal{L}_{\omega} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_{\omega}^2\omega_{\mu}\omega^{\mu} + \frac{c}{4}(g_{\omega}^2\omega_{\mu}\omega^{\mu})^2, \quad (1.5)$$

$$\mathcal{L}_{\rho} = -\frac{1}{4}\vec{B}^{\mu\nu}\vec{B}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_{\rho}^2\vec{\rho}_{\mu}\vec{\rho}^{\mu} \quad e \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\sigma\omega\rho} = & -g_{\sigma}g_{\omega}^2\sigma\omega_{\mu}\omega^{\mu}\left(\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_1'g_{\sigma}\sigma\right) - g_{\sigma}g_{\rho}^2\sigma\vec{\rho}_{\mu}\vec{\rho}^{\mu}\left(\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_2'g_{\sigma}\sigma\right) \\ & + \frac{1}{2}\alpha_3'g_{\omega}^2g_{\rho}^2\omega_{\mu}\omega^{\mu}\vec{\rho}_{\mu}\vec{\rho}^{\mu} \end{aligned} \quad (1.7)$$

são os termos que representam, respectivamente, as interações entre os nucleons e os mésons, a parte cinética e autointerações dos mésons σ , ω , a parte cinética do méson ρ e finalmente as interações cruzadas entre os mesmos. A massa do nucleon é denotada por M e a dos mésons por m_i com $i = \sigma, \omega$ e ρ . Os tensores $F_{\mu\nu}$ e $\vec{B}_{\mu\nu}$ são dados por $F_{\mu\nu} = \partial_{\nu}\omega_{\mu} - \partial_{\mu}\omega_{\nu}$ e $\vec{B}_{\mu\nu} = \partial_{\nu}\vec{\rho}_{\mu} - \partial_{\mu}\vec{\rho}_{\nu}$. O isospin do nucleon é dado por $\vec{\tau}$ e a seta nesta quantidade e no campo $\vec{\rho}$ indica que estas grandezas são de origem vetorial também no espaço do isospin.

Note que os modelos descritos pela densidade lagrangiana acima possuem um grau de sofisticação a mais em relação àqueles descritos na referência [12], no sentido em que autointerações e interações cruzadas entre os mésons são levadas em conta. A inclusão de tais termos tem efeito direto já na matéria nuclear em temperatura nula. Por exemplo, o termo que contém a autointeração do méson ω , cuja intensidade é regulada pelo parâmetro c , é importante no regime de altas densidades. Uma das aplicações de tais modelos nesta região é a descrição de estrelas de nêutrons e uma de suas propriedades, sua massa máxima, é diretamente influenciada pelo valor de c [15]. Com respeito aos termos de interação cruzada, sabe-se também que a interação entre os mésons ρ e ω , controlada por α_3' , altera a compactação das estrelas na medida em que influi no raio das mesmas. Além disso, tal interação favorece à suavização da energia de simetria dos

modelos em função da densidade [16]. Na verdade, a energia de simetria tem sua dependência com relação à densidade também modificada pelos termos referentes às interações do méson ρ com o méson σ , controladas pelas constantes α_2 e α_2' [17].

Como caso particular, os modelos não lineares mais simples onde apenas as autointerações cúbicas e quárticas do campo σ são consideradas [12], são recuperados fazendo

$$c = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_1' = \alpha_2' = \alpha_3' = 0. \quad (1.8)$$

Também é possível obter os modelos lineares de Walecka fazendo uso de $A = B = 0$, adicionalmente à condição (1.8).

Os campos da teoria determinados a partir da equação de Euler-Lagrange,

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu Q_i)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_i} = 0, \quad (1.9)$$

devem satisfazer às seguintes equações não lineares:

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \partial^\mu + m_\sigma^2) \sigma &= -g_\sigma \bar{\psi} \psi - A \sigma^2 - B \sigma^3 - g_\sigma g_\omega^2 \omega_\mu \omega^\mu (\alpha_1 - \alpha_1' g_\sigma \sigma) \\ &\quad - g_\sigma g_\rho^2 \vec{\rho}_\mu \vec{\rho}^\mu (\alpha_2 - \alpha_2' g_\sigma \sigma), \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \partial_\nu F^{\mu\nu} - m_\omega^2 \omega^\mu &= -g_\omega \bar{\psi} \gamma^\mu \psi + c g_\omega (g_\omega \omega^\mu)^3 - g_\sigma g_\omega^2 \sigma \omega^\mu (2\alpha_1 - \alpha_1' g_\sigma \sigma) \\ &\quad + \alpha_3' g_\omega^2 g_\rho^2 \vec{\rho}_\mu \vec{\rho}^\mu \omega^\mu, \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\partial_\nu B^{\mu\nu} - m_\rho^2 \vec{\rho}^\mu = -\frac{g_\rho}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu \vec{\tau} \psi - g_\sigma g_\rho^2 \sigma \vec{\rho}^\mu (2\alpha_2 - \alpha_2' g_\sigma \sigma) + \alpha_3' g_\omega^2 g_\rho^2 \omega_\mu \omega^\mu \vec{\rho}^\mu \quad (1.12)$$

$$e \quad [\gamma^\mu (i\partial_\mu - \Sigma_\mu) - M^*] \psi = 0. \quad (1.13)$$

A interpretação dada à equação do campo fermiônico ψ é a de uma equação que representa um nucleon de massa efetiva $M^* = M + S = M + g_\sigma \sigma$ que agora varia com a densidade (ou potencial químico) e temperatura⁴ e, além disso, com seu quadri-momento modificado pela quantidade $\Sigma_\mu = g_\omega \omega_\mu + \frac{g_\rho}{2} \vec{\rho}_\mu \vec{\tau}$. Note que a estrutura da equação de Dirac (1.13) sugere que $S = g_\sigma \sigma$ desloca a massa do nucleon permitindo sua variação de acordo com o campo σ . Essa definição de massa efetiva, também chamada de massa de Dirac [18], é puramente relativística. Várias outras definições de M^* , incluindo a de origem não relativística⁵, podem ser encontradas em [18]. No contexto exclusivamente relativístico, o valor de M^* torna-se importante na medida em que está diretamente relacionado com a separação spin-órbita de núcleos finitos [19].

⁴A dependência da massa efetiva com a temperatura será analisada no capítulo 3.

⁵Tratada no capítulo 2.

Uma abordagem amplamente utilizada em modelos relativísticos para a tratamento das equações de campo (1.10)-(1.13) é a utilização da chamada aproximação de campo médio (ACM) [5, 20], onde os campos da teoria são substituídos por seus respectivos valores médios. Fisicamente, a descrição do método está na suposição que os nucleons estão submetidos à ação de uma interação média entre si, ou seja, cada partícula sente a mesma interação independente de sua quantidade ou da posição das demais, no caso de tratarmos de sistemas espacialmente uniformes como os que estão em estudo nesta tese (matéria nuclear infinita). A validade da ACM é maior a medida em que o sistema torna-se mais denso [5, 20]. Com isso, reescrevem-se os campos mesônicos como:

$$\sigma \rightarrow \langle \sigma \rangle \equiv \bar{\sigma}, \quad \omega_\mu \rightarrow \langle \omega_\mu \rangle \equiv \bar{\omega}_0, \quad \text{e} \quad \vec{\rho}_\mu \rightarrow \langle \vec{\rho}_\mu \rangle \equiv \bar{\rho}_0, \quad (1.14)$$

todos independentes da posição. Devido à invariância rotacional, as componentes espaciais dos quadri-vetores ω_μ e $\vec{\rho}_\mu$ anulam-se na média⁶. Ainda na ACM considera-se também que as fontes dos campos mesônicos são substituídas por seus valores médios, o que resulta em

$$\bar{\psi}\psi \rightarrow \langle \bar{\psi}\psi \rangle = \rho_s, \quad \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \rightarrow \langle \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \rangle = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \rho \quad \text{e} \quad (1.15)$$

$$\bar{\psi}\gamma^\mu\vec{\tau}\psi \rightarrow \langle \bar{\psi}\gamma^\mu\vec{\tau}\psi \rangle = \bar{\psi}\gamma^0\tau_3\psi = \rho_3, \quad (1.16)$$

com $\rho_s = \rho_{sp} + \rho_{sn}$ e $\rho = \rho_p + \rho_n$ sendo a soma das densidades escalares e vetoriais de prótons e nêutrons, respectivamente e $\rho_3 = \rho_p - \rho_n = (2y - 1)\rho$, sua diferença. A terceira componente de isospin, τ_3 , é igual a 1 para prótons e -1 para nêutrons. A fração de prótons do sistema é definida como $y = \rho_p/\rho$ e as densidades de cada espécie são dadas por

$$\begin{aligned} \rho_{sp,n} &= \frac{\gamma M^*}{2\pi^2} \int_0^{k_{Fp,n}} \frac{k^2 dk}{\sqrt{k^2 + M^{*2}}} \\ &= \frac{\gamma M^* k_{Fp,n}^2}{2\pi^2} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + z^2}} = \frac{\gamma M^* k_{Fp,n}^2}{2\pi^2} \left[\frac{\sqrt{1+z^2}}{2} - \frac{z^2}{2} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1+z^2}}{z} \right) \right] \end{aligned} \quad (1.17)$$

e

$$\rho_{p,n} = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_{Fp,n}} k^2 dk = \frac{\gamma}{6\pi^2} k_{Fp,n}^3. \quad (1.18)$$

As variáveis auxiliares são dadas por $x = k/k_{Fp,n}$ e $z = M^*/k_{Fp,n}$ e o fator de degenerescência, γ , é igual a 2 para a matéria assimétrica e 4 para a simétrica. Assim, as equações de campo

⁶A notação usada para designar o campo $\bar{\rho}_0$ na aproximação de campo médio, foi escolhida para diferenciar esta quantidade da densidade de saturação da matéria nuclear ρ_0 .

descritas em (1.10)-(1.13) são simplificadas para

$$m_\sigma^2 \sigma = -g_\sigma \rho_s - A \sigma^2 - B \sigma^3 - g_\sigma g_\omega^2 \omega_0^2 (\alpha_1 - \alpha_1' g_\sigma \sigma) - g_\sigma g_\rho^2 \bar{\rho}_0^2 (\alpha_2 - \alpha_2' g_\sigma \sigma), \quad (1.19)$$

$$m_\omega^2 \omega_0 = g_\omega \rho - c g_\omega (g_\omega \omega_0)^3 + g_\sigma g_\omega^2 \sigma \omega_0 (2\alpha_1 - \alpha_1' g_\sigma \sigma) - \alpha_3' g_\omega^2 g_\rho^2 \bar{\rho}_0^2 \omega_0, \quad (1.20)$$

$$m_\rho^2 \bar{\rho}_0 = \frac{g_\rho}{2} \rho_3 + g_\sigma g_\rho^2 \sigma \bar{\rho}_0 (2\alpha_2 - \alpha_2' g_\sigma \sigma) - \alpha_3' g_\omega^2 g_\rho^2 \bar{\rho}_0 \omega_0^2 \quad (1.21)$$

$$e \quad [\gamma^\mu (i\partial_\mu - \Sigma_0) - M^*] \psi = 0, \quad (1.22)$$

com

$$\Sigma_0 \equiv V = g_\omega \omega_0 + \frac{g_\rho}{2} \bar{\rho}_0 \tau_3. \quad (1.23)$$

A expressão da massa efetiva do nucleon pode ser reescrita em termos da equação de campo para σ na ACM, gerando então

$$M^* = M - G_\sigma^2 \left[\rho_s + a(\Delta M)^2 + b(\Delta M)^3 + g_\omega^2 \omega_0^2 (\alpha_1 - \alpha_1' \Delta M) + g_\rho^2 \bar{\rho}_0^2 (\alpha_2 - \alpha_2' \Delta M) \right], \quad (1.24)$$

com $\Delta M = M^* - M$, $G_\sigma^2 = g_\sigma^2 / m_\sigma^2$, $a = A / g_\sigma^3$ e $b = B / g_\sigma^4$. Para os modelos não lineares sem interação cruzada entre os campos, (equação 1.8), a forma funcional de (1.24) reduz-se à⁷

$$M^* = M - G_\sigma^2 \left[\rho_s + a(\Delta M)^2 + b(\Delta M)^3 \right], \quad (1.25)$$

As equações de estado dos modelos não lineares, que serão apresentadas a seguir, são então determinadas para cada densidade ρ e fração de prótons y , a partir da solução simultânea do conjunto de equações definido em (1.19)-(1.21). Note que (1.19) pode ser substituída pela equação autoconsistente da massa efetiva dada em (1.24), já que $\sigma = \Delta M / g_\sigma$.

1.2 Densidade de energia, pressão e incompressibilidade

O tensor momento-energia, definido por

$$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \mathcal{L} + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu Q_i)} \partial_\nu Q_i, \quad (1.26)$$

⁷Válido também para modelos nos quais $c \neq 0$.

para os modelos não lineares, é descrito na ACM com o uso da equação do campo ψ dada em (1.22) como sendo

$$T_{\mu\nu}^{ACM} = -g_{\mu\nu} \left[-\frac{m_\sigma^2}{2}\sigma^2 - \frac{A}{3}\sigma^3 - \frac{B}{4}\sigma^4 + \frac{m_\omega^2}{2}\omega_0^2 + \frac{c}{4}(g_\omega^2\omega_0^2)^2 + \frac{1}{2}m_\rho^2\bar{\rho}_0^2 + \frac{1}{2}\alpha_3'g_\omega^2g_\rho^2\omega_0^2\bar{\rho}_0^2 \right. \\ \left. - g_\sigma g_\omega^2\sigma\omega_0^2 \left(\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_1'g_\sigma\sigma \right) - g_\sigma g_\rho^2\sigma\bar{\rho}_0^2 \left(\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_2'g_\sigma\sigma \right) \right] + i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\nu\psi.$$

A partir desta quantidade fundamental é possível determinar uma expressão para a densidade de energia dos modelos, já que tais grandezas estão relacionadas por $\mathcal{E} = \langle T_{00} \rangle$. Assim, temos que

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 + \frac{A}{3}\sigma^3 + \frac{B}{4}\sigma^4 - \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 - \frac{c}{4}(g_\omega^2\omega_0^2)^2 - \frac{1}{2}m_\rho^2\bar{\rho}_0^2 - \frac{1}{2}\alpha_3'g_\omega^2g_\rho^2\omega_0^2\bar{\rho}_0^2 \\ + g_\sigma g_\omega^2\sigma\omega_0^2 \left(\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_1'g_\sigma\sigma \right) + g_\sigma g_\rho^2\sigma\bar{\rho}_0^2 \left(\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_2'g_\sigma\sigma \right) + i\langle \bar{\psi}\gamma^0\partial_0\psi \rangle. \quad (1.27)$$

Porém,

$$i\langle \bar{\psi}\gamma^0\partial_0\psi \rangle = g_\omega\omega_0\rho + \frac{g_\rho}{2}\bar{\rho}_0\rho_3 + \frac{\gamma}{2\pi^2} \sum_{j=p,n} \int_0^{k_{Fj}} k^2(k^2 + M^*)^{1/2} dk, \quad (1.28)$$

logo,

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 + \frac{A}{3}\sigma^3 + \frac{B}{4}\sigma^4 - \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 - \frac{c}{4}(g_\omega^2\omega_0^2)^2 - \frac{1}{2}m_\rho^2\bar{\rho}_0^2 + g_\omega\omega_0\rho + \frac{g_\rho}{2}\bar{\rho}_0\rho_3 \\ + g_\sigma g_\omega^2\sigma\omega_0^2 \left(\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_1'g_\sigma\sigma \right) + g_\sigma g_\rho^2\sigma\bar{\rho}_0^2 \left(\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_2'g_\sigma\sigma \right) - \frac{1}{2}\alpha_3'g_\omega^2g_\rho^2\omega_0^2\bar{\rho}_0^2 \\ + \mathcal{E}_{cin}^p + \mathcal{E}_{cin}^n, \quad (1.29)$$

com

$$\mathcal{E}_{cin}^{p,n} = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_{Fp,n}} k^2(k^2 + M^*)^{1/2} dk \quad (1.30) \\ = \frac{\gamma k_{Fp,n}^4}{2\pi^2} \int_0^1 x^2(x^2 + z^2)^{1/2} dx = \frac{\gamma k_{Fp,n}^4}{2\pi^2} \left[\left(1 + \frac{z^2}{2} \right) \frac{\sqrt{1+z^2}}{4} - \frac{z^4}{8} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1+z^2}}{z} \right) \right]$$

sendo as energias cinéticas de prótons e nêutrons.

A partir desta expressão geral é possível recuperar o caso particular dos modelos do tipo $\sigma^3 - \sigma^4$, onde

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}G_\omega^2\rho^2 + \frac{1}{8}G_\rho^2(2y-1)^2\rho^2 + \frac{(\Delta M)^2}{2G_\sigma^2} + \frac{a(\Delta M)^3}{3} + \frac{b(\Delta M)^4}{4} + \mathcal{E}_{cin}^p + \mathcal{E}_{cin}^n, \quad (1.31)$$

com $G_\omega^2 = g_\omega^2/m_\omega^2$ e $G_\rho^2 = g_\rho^2/m_\rho^2$.

Outra importante quantidade termodinâmica, a pressão, também é derivada do tensor $T^{\mu\nu}$ a partir de $P = \langle T_{ii} \rangle / 3$. Sua expressão é dada por

$$P = -\frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 - \frac{A}{3}\sigma^3 - \frac{B}{4}\sigma^4 + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 + \frac{c}{4}(g_\omega^2\omega_0^2)^2 + \frac{1}{2}m_\rho^2\bar{\rho}_0^2 + \frac{1}{2}\alpha_3'g_\omega^2g_\rho^2\omega_0^2\bar{\rho}_0^2 - g_\sigma g_\omega^2\sigma\omega_0^2\left(\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_1'g_\sigma\sigma\right) - g_\sigma g_\rho^2\sigma\bar{\rho}_0^2\left(\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_2'g_\sigma\sigma\right) + \frac{i}{3}\langle\bar{\psi}\gamma^j\partial_i\psi\rangle, \quad (1.32)$$

com

$$i\langle\bar{\psi}\gamma^j\partial_i\psi\rangle = \frac{\gamma}{2\pi^2} \sum_{j=p,n} \int_0^{k_{Fj}} k^2(k^2 + M^*)^{1/2} dk - \sum_{j=p,n} M^* \rho_{sj}. \quad (1.33)$$

Assim, temos finalmente que

$$P = -\frac{1}{2}m_\sigma^2\sigma^2 - \frac{A}{3}\sigma^3 - \frac{B}{4}\sigma^4 + \frac{1}{2}m_\omega^2\omega_0^2 + \frac{c}{4}(g_\omega^2\omega_0^2)^2 + \frac{1}{2}m_\rho^2\bar{\rho}_0^2 + \frac{1}{2}\alpha_3'g_\omega^2g_\rho^2\omega_0^2\bar{\rho}_0^2 - g_\sigma g_\omega^2\sigma\omega_0^2\left(\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_1'g_\sigma\sigma\right) - g_\sigma g_\rho^2\sigma\bar{\rho}_0^2\left(\alpha_2 - \frac{1}{2}\alpha_2'g_\sigma\sigma\right) + P_{cin}^p + P_{cin}^n, \quad (1.34)$$

onde

$$P_{cin}^{p,n} = \frac{\gamma}{6\pi^2} \int_0^{k_{Fp,n}} \frac{k^4 dk}{(k^2 + M^*)^{1/2}} \quad (1.35)$$

$$= \frac{\gamma k_{Fp,n}^4}{6\pi^2} \int_0^1 \frac{x^4 dx}{(x^2 + z^2)^{1/2}} = \frac{\gamma k_{Fp,n}^4}{6\pi^2} \left[\left(1 - \frac{3z^2}{2}\right) \frac{\sqrt{1+z^2}}{4} + \frac{3z^4}{8} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1+z^2}}{z} \right) \right]$$

são as pressões cinéticas de prótons e nêutrons. Novamente, a pressão dos modelos do tipo $\sigma^3 - \sigma^4$ é dada por

$$P = \frac{1}{2}G_\omega^2\rho^2 + \frac{1}{8}G_\rho^2(2y-1)^2\rho^2 - \frac{(\Delta M)^2}{2G_\sigma^2} - \frac{a(\Delta M)^3}{3} - \frac{b(\Delta M)^4}{4} + P_{cin}^p + P_{cin}^n. \quad (1.36)$$

Mais uma grandeza de grande interesse na Física Nuclear, a incompressibilidade (ou módulo de compressão), está associada com o movimento coletivo [21] dos prótons e nêutrons de um núcleo e experimentalmente é determinada pela análise das chamadas ressonâncias gigantes de monopolo (GMR da sigla em inglês⁸) em núcleos pesados [22]. De uma forma geral, tal grandeza está associada a quanto o volume (ou densidade) de um sistema varia devido à pressão exercida sobre o mesmo. Existem algumas expressões, todas equivalentes, para a determinação da incompressibilidade da matéria nuclear, mas devido à estrutura das equações (1.29) e (1.34),

⁸Giant monopole resonance.

torna-se mais conveniente calcular tal quantidade utilizando a seguinte forma

$$K = 9 \left[\frac{\partial(\mathcal{E} + P)}{\partial \rho} - \frac{\mathcal{E} + P}{\rho} \right], \quad (1.37)$$

válida apenas para sistemas à temperatura nula⁹. Como estamos interessados no valor de K para a matéria nuclear simétrica, os cálculos serão realizados já levando em conta o valor de $y = 1/2$ (o que também gera $k_{Fp} = k_{Fn} = k_F$), ou equivalentemente, $\rho_3 = 0$, nas expressões (1.29) e (1.34). Com isso, temos que

$$K = 9 \left[g_{\omega} \rho \frac{\partial \omega_0}{\partial \rho} + \frac{k_F^2}{3(k_F^2 + M^{*2})^{1/2}} + \frac{\rho M^*}{(k_F^2 + M^{*2})^{1/2}} \frac{\partial M^*}{\partial \rho} \right], \quad (1.38)$$

onde foi usada a relação $\mathcal{E}_{cin} + P_{cin} = (k_F^2 + M^{*2})^{1/2} \rho$. A derivada da massa efetiva com relação à densidade é

$$\frac{\partial M^*}{\partial \rho} = g_{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \rho}. \quad (1.39)$$

A derivada $\partial \sigma / \partial \rho$, juntamente com as demais derivadas dos campos mesônicos com relação a ρ são obtidas no Apêndice B, onde expressões simplificadas para os casos dos modelos do tipo $\sigma^3 - \sigma^4$ são mostradas.

1.3 Potenciais químicos

O potencial químico é definido como sendo a energia necessária para adicionar ou retirar uma partícula ao sistema. Logo, para o caso em que tais partículas são os nucleons, tal grandeza é escrita como

$$\mu_i = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho_i}, \quad i = p, n. \quad (1.40)$$

Usando (1.29), chega-se à seguinte expressão para os potenciais químicos de prótons e nêutrons dos modelos não lineares de Walecka,

$$\mu_i = c_1 \frac{\partial \sigma}{\partial \rho_i} + c_2 \frac{\partial \omega_0}{\partial \rho_i} + c_3 \frac{\partial \bar{\rho}_0}{\partial \rho_i} + \frac{\partial(\mathcal{E}_{cin}^p + \mathcal{E}_{cin}^n)}{\partial \rho_i} + c_4 \frac{\partial \rho}{\partial \rho_i} + c_5 \frac{\partial \rho_3}{\partial \rho_i} \quad (1.41)$$

⁹Para $T \neq 0$, a expressão é modificada substituindo-se a densidade de energia, \mathcal{E} pela densidade de energia livre de Helmholtz, $f = \mathcal{E} - TS$, com S sendo a densidade de entropia. Neste caso geral, vale $K = 9 \frac{\partial f}{\partial \rho}$.

com

$$c_1 = m_s^2 \sigma + A \sigma^2 + B \sigma^3 + g_\sigma g_\omega^2 \omega_0^2 (\alpha_1 - \alpha_1' g_\sigma \sigma) + g_\sigma g_\rho^2 \bar{\rho}_0^2 (\alpha_2 - \alpha_2' g_\sigma \sigma) = -g_\sigma \rho_s, \quad (1.42)$$

$$c_2 = -m_\omega^2 \omega_0 - c g_\omega (g_\omega \omega_0)^3 + g_\sigma g_\omega^2 \sigma \omega_0 (2\alpha_1 - \alpha_1' g_\sigma \sigma) - \alpha_3' g_\omega^2 g_\rho^2 \bar{\rho}_0^2 \omega_0 + g_\omega \rho = 0, \quad (1.43)$$

$$c_3 = -m_\rho^2 \bar{\rho}_0 + g_\sigma g_\rho^2 \sigma \bar{\rho}_0 (2\alpha_2 - \alpha_2' g_\sigma \sigma) - \alpha_3' g_\omega^2 g_\rho^2 \bar{\rho}_0 \omega_0^2 + \frac{g_\rho}{2} \rho_3 = 0, \quad (1.44)$$

$$c_4 = g_\omega \omega_0 \quad \text{e} \quad c_5 = \frac{g_\rho}{2} \bar{\rho}_0. \quad (1.45)$$

Usando que

$$\frac{\partial(\mathcal{E}_{cin}^p + \mathcal{E}_{cin}^n)}{\partial \rho_i} = (k_F^2 + M^{*2})^{1/2} + \rho_s \frac{\partial M^*}{\partial \rho_i}, \quad (1.46)$$

juntamente com a expressão da derivada da massa efetiva, dada em (1.39) e ainda as seguintes derivadas, $\partial \rho / \partial \rho_i = 1$ e $\partial \rho_3 / \partial \rho_i = \pm 1$ com o sinal positivo (negativo) utilizado quando tratamos de prótons (nêutrons), chega-se finalmente à

$$\mu_p = (k_F^2 + M^{*2})^{1/2} + g_\omega \omega_0 + \frac{g_\rho}{2} \bar{\rho}_0 \quad \text{e} \quad (1.47)$$

$$\mu_n = (k_F^2 + M^{*2})^{1/2} + g_\omega \omega_0 - \frac{g_\rho}{2} \bar{\rho}_0. \quad (1.48)$$

O potencial químico total do sistema é dado em termos de (1.47) e (1.48) através de $\mu = y\mu_p + (1-y)\mu_n$.

1.4 Energia de simetria e suas derivadas

A energia de simetria é definida por

$$E_{sym} = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \rho_3^2} \right)_{\rho_3=0}. \quad (1.49)$$

Para os modelos não lineares de Walecka, o cálculo desta quantidade pode ser realizado da seguinte forma: a derivada $\partial \mathcal{E} / \partial \rho_3$ é obtida de maneira análoga ao cálculo realizado para os potenciais químicos feito na seção anterior. A diferença neste procedimento é o resultado

$$\frac{\partial(\mathcal{E}_{cin}^p + \mathcal{E}_{cin}^n)}{\partial \rho_3} = \frac{1}{2} (E_{Fp}^* - E_{Fn}^*) + \rho_s \frac{\partial M^*}{\partial \rho_3}, \quad (1.50)$$

com $E_{Fp,n}^* = (k_{Fp,n}^2 + M^{*2})^{1/2}$, que é utilizado para se obter

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho_3} = \frac{1}{2}(E_{Fp}^* - E_{Fn}^*) + \frac{g_\rho}{2}\bar{\rho}_0. \quad (1.51)$$

A partir daí é encontrada a derivada segunda da densidade de energia, dada por,

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \rho_3^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{2E_{Fp}^* k_{Fp}} + \frac{M^*}{E_{Fp}^*} \frac{\partial M^*}{\partial \rho_3} + \frac{\pi^2}{2E_{Fn}^* k_{Fn}} - \frac{M^*}{E_{Fn}^*} \frac{\partial M^*}{\partial \rho_3} \right) + \frac{g_\rho}{2} \frac{\partial \bar{\rho}_0}{\partial \rho_3}. \quad (1.52)$$

Como a energia de simetria é definida em $\rho_3 = 0$, chega-se finalmente à

$$E_{sym} = \frac{k_F^2}{6(k_F^2 + M^{*2})^{1/2}} + \frac{g_\rho^2}{8m_\rho^{*2}}\rho, \quad (1.53)$$

onde $m_\rho^{*2} = m_\rho^2 - g_\sigma g_\rho^2 \sigma (2\alpha_2 - \alpha_2' g_\sigma \sigma) + \alpha_3' g_\omega^2 g_\rho^2 \omega^2$ é a massa efetiva do méson ρ . No caso de modelos do tipo $\sigma^3 - \sigma^4$ esta grandeza reduz-se a $m_\rho^* = m_\rho$.

A partir de (1.53), obtém-se sua inclinação e curvatura, respectivamente dadas por

$$L = 3\rho \left(\frac{\partial E_{sym}}{\partial \rho} \right) = \frac{k_F^2}{3E_F^*} - \frac{k_F^4}{6E_F^{*3}} \left(1 + \frac{2M^* k_F}{\pi^2} \frac{\partial M^*}{\partial \rho} \right) + \frac{3g_\rho^2}{8m_\rho^{*2}}\rho - \frac{3g_\rho^2}{8m_\rho^{*4}} \frac{\partial m_\rho^{*2}}{\partial \rho} \rho^2 \quad (1.54)$$

e

$$\begin{aligned} K_{sym} &= 9\rho^2 \left(\frac{\partial^2 E_{sym}}{\partial \rho^2} \right) = 9\rho^2 \left\{ -\frac{\pi^2}{12E_F^{*3} k_F} \left(\frac{\pi^2}{k_F} + 2M^* \frac{\partial M^*}{\partial \rho} \right) - \frac{\pi^4}{12E_F^* k_F^4} - \frac{g_\rho^2}{4m_\rho^{*4}} \frac{\partial m_\rho^{*2}}{\partial \rho} \right. \\ &\quad - \left[\frac{\pi^4}{24E_F^{*3} k_F^2} - \frac{k_F \pi^2}{8E_F^{*5}} \left(\frac{\pi^2}{k_F} + 2M^* \frac{\partial M^*}{\partial \rho} \right) \right] \left(1 + \frac{2M^* k_F}{\pi^2} \frac{\partial M^*}{\partial \rho} \right) + \frac{g_\rho^2}{4m_\rho^{*6}} \left(\frac{\partial m_\rho^{*2}}{\partial \rho} \right)^2 \rho \\ &\quad \left. - \frac{k_F \pi^2}{12E_F^{*3}} \left[\frac{M^*}{k_F^2} \frac{\partial M^*}{\partial \rho} + \frac{2k_F}{\pi^2} \left(\frac{\partial M^*}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{2k_F M^*}{\pi^2} \frac{\partial^2 M^*}{\partial \rho^2} \right] - \frac{g_\rho^2}{8m_\rho^{*4}} \frac{\partial^2 m_\rho^{*2}}{\partial \rho^2} \rho \right\}, \quad (1.55) \end{aligned}$$

todos calculados na densidade de saturação ρ_0 . A partir de L e K_{sym} , outra importante grandeza definida por $K_\tau = K_{sym} - 6L$ pode ser obtida e, juntamente com outras quantidades, igualmente definidas na densidade de saturação tais como K , E_{sym} e K' (que será apresentado na seção posterior), podem ser utilizadas para selecionar modelos a partir de vínculos experimentais bem estabelecidos. Tal estudo é feito com detalhes para os modelos não relativísticos de Skyrme nas referências [23, 24].

1.5 Coeficiente de skewness

Por fim, o coeficiente de skewness dos modelos não lineares é dado por

$$K' = 27\rho^3 \frac{\partial^3(\mathcal{E}/\rho)}{\partial\rho^3} = 27\rho^3 \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial^3\mathcal{E}}{\partial\rho^3} - \frac{3}{\rho^2} \frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial\rho^2} + \frac{6}{\rho^3} \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\rho} - \frac{6\mathcal{E}}{\rho^4} \right], \quad (1.56)$$

com

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\rho} &= E_F^* + g_\omega\omega_0, \\ \frac{\partial^2\mathcal{E}}{\partial\rho^2} &= g_\omega \frac{\partial\omega_0}{\partial\rho} + \frac{1}{2E_F^*} \left(\frac{\pi^2}{k_F} + 2M^* \frac{\partial M^*}{\partial\rho} \right) \quad e \\ \frac{\partial^3\mathcal{E}}{\partial\rho^3} &= g_\omega \frac{\partial^2\omega_0}{\partial\rho^2} - \frac{1}{4E_F^{*3}} \left(\frac{\pi^2}{k_F} + 2M^* \frac{\partial M^*}{\partial\rho} \right)^2 + \frac{1}{2E_F^*} \left[-\frac{\pi^4}{2k_F^4} + 2 \left(\frac{\partial M^*}{\partial\rho} \right)^2 + 2M^* \frac{\partial^2 M^*}{\partial\rho^2} \right], \end{aligned}$$

segundo a expressão (1.29).

1.6 Parametrizações utilizadas

Algumas propriedades relativas ao ponto de saturação da matéria nuclear dos modelos não lineares de Walecka que serão utilizados nos próximos capítulos desta tese, são listadas na tabela 1.1.

Modelo	ρ_0 (fm ⁻³)	B_e (MeV)	m^*	K (MeV)	E_{sym} (MeV)	L (MeV)	K_{sym} (MeV)	K' (MeV)
Walecka [25]	0,150	-15,75	0,54	554,38	19,42	68,87	92,98	2131,04
NLB [26]	0,148	-15,75	0,61	420,00	35,00	108,26	54,94	727,93
NL2 [27]	0,146	-17,03	0,67	399,20	43,90	129,66	20,10	68,42
NLSH [28]	0,146	-16,35	0,60	355,36	36,10	113,68	79,83	602,90
TM2 [29]	0,132	-16,16	0,57	343,82	35,98	113,03	56,07	265,60
TM1 [29]	0,145	-16,26	0,63	281,16	36,89	110,79	33,62	-285,22
NLB1 [27]	0,162	-15,74	0,62	280,00	33,00	102,51	76,15	108,61
NL3 [28]	0,148	-16,30	0,60	271,76	37,40	118,53	100,88	202,91
MS [30]	0,148	-15,75	0,60	249,97	35,00	106,75	38,56	-161,37
NLB2 [27]	0,162	-15,73	0,56	245,10	33,00	111,30	158,94	542,60
FSUGold [31]	0,148	-16,28	0,61	229,54	32,56	60,44	-51,40	-523,93
NLC [26]	0,148	-15,75	0,63	225,00	35,00	107,97	76,91	-278,13
NL1 [27]	0,152	-16,42	0,57	211,70	43,50	140,07	142,68	-32,69
NLZ2 [32]	0,151	-16,07	0,58	172,00	39,00	125,82	140,62	-412,31

Tabela 1.1: Propriedades de saturação para os 14 modelos hadrônicos utilizados.

Os modelos de Walecka e NLZ2 foram selecionados por apresentarem valores extremos

de incompressibilidade (554 e 172 MeV), indicando assim equações de estado muito “duras” e “suaves”. As demais parametrizações são portanto intermediárias nesse sentido. Ainda com relação ao modelo linear de Walecka, note que dentre todos, este é o que apresenta menor energia de simetria. Isso é devido ao fato de que escolhemos como nula sua constante de acoplamento g_ρ , o que automaticamente causa tal redução já que um termo positivo deixa de ser somado na expressão (1.53). O mesmo já não ocorre nos demais modelos, cujas constantes de acoplamento necessárias para a definição das equações de estado são apresentadas na tabela 1.2 a seguir.

Modelo	M (MeV)	G_σ^2 (10^{-4}MeV^{-2})	G_ω^2 (10^{-4}MeV^{-2})	G_ρ^2 (10^{-4}MeV^{-2})	a (MeV)	b $\times 10^{-3}$	c $\times 10^{-3}$
Walecka	939,0	4,020	3,076	—	—	—	—
NLB	939,0	3,624	2,593	1,229	-0,451	0,146	—
NL2	938,0	3,248	2,163	1,990	-0,606	2,001	—
NLSH	939,0	3,916	2,711	1,323	-1,199	-1,297	—
TM2	938,0	4,747	3,495	1,477	-0,581	0,266	1,841
TM1	938,0	3,849	2,595	1,448	-1,415	0,061	2,817
NLB1	938,9	3,480	2,281	0,952	-2,193	-2,840	—
NL3	939,0	4,009	2,671	1,387	-1,971	-2,668	—
MS	939,0	4,250	2,955	1,213	-1,321	0,120	3,940
NLB2	938,9	3,994	2,689	0,851	-2,044	-3,143	—
FSUGold	939,0	4,645	3,341	2,379	-0,710	3,967	10,000
NLC	939,0	3,804	2,442	1,262	-2,661	-3,644	—
NL1	938,0	4,257	2,806	1,694	-2,280	-3,405	—
NLZ2	938,9	4,225	2,738	1,425	-2,609	-3,926	—

Tabela 1.2: Massa do nucleon e constantes de acoplamento usadas nos modelos hadrônicos, com $G_i^2 = g_i^2/m_i^2$ ($i = \sigma, \omega, \rho$), $a = A/g_\sigma^3$ e $b = B/g_\sigma^4$.

Todas as parametrizações usadas na tese apresentam $\alpha_1 = \alpha'_1 = \alpha_2 = \alpha'_2 = \alpha'_3 = 0$, com exceção do modelo FSUGold, no qual o termo cruzado de interação entre os campos ω_μ e $\vec{\rho}_\mu$ tem sua intensidade controlada pela constante adimensional $\alpha'_3 g_\rho^2 = (0,06)(11,767)^2 = 8,308$. Note ainda que há uma diferença de sinal entre as constantes a apresentadas na tabela 1.2 e aquelas contidas nas referências [26, 30, 31]. Isso se deve ao fato de que nesses trabalhos a densidade lagrangiana dos modelos apresenta a constante g_σ com sinal contrário em relação ao desta tese (veja o termo de interação entre o méson σ e o nucleon na equação 1.3). Assim, como $a = A/g_\sigma^3$ é a única constante que depende de g_σ elevado a uma potência ímpar, a consequência é a inversão do sinal deste parâmetro.

2 *Modelos relativísticos de contato*

Na física nuclear, modelos do tipo contato pressupõem que os nucleons interagem entre si apenas quando em contato uns com os outros, ou seja, o alcance nesse caso é zero. Nesse sentido não há a troca de mésons entre prótons e nêutrons. Do ponto de vista qualitativo, como o alcance da interação nuclear é dado pelo inverso da massa dos mésons trocados, pode-se pensar os modelos de contato como sendo aqueles em que a massa dos mésons envolvidos é grande o suficiente para anular o alcance. Em sistemas não relativísticos, os modelos mais conhecidos e utilizados baseados nesta fenomenologia são os modelos de Skyrme, usados com sucesso na descrição de núcleos finitos e propriedades da matéria nuclear [2, 3, 33, 34, 35, 36]. Curiosamente, os modelos de Skyrme exibem similaridades com a teoria do funcional densidade (DFT, da sigla em inglês¹) [37, 38], como apontado pelos autores da referência [39]. Um estudo sobre este tema, onde várias questões interessantes (e ainda sem resposta) sobre o método DFT e sua aplicação direta na física nuclear em sistemas baseados na teoria de campos efetiva, foi realizado nos trabalhos [40, 41].

No contexto relativístico, os modelos não lineares de contato (NLPC, da sigla em inglês²) têm sido amplamente usados [42] no cálculo de observáveis da física nuclear, sendo seus resultados qualitativamente comparáveis àqueles obtidos pelos modelos não lineares de Walecka, designados a partir de agora por NLW³. Por não lineares, nos referimos aos modelos de contato nos quais as autointerações entre os campos spinoriais ψ e $\bar{\psi}$ vão além de $(\bar{\psi}\psi)^2$. Em particular, trataremos neste capítulo dos modelos que apresentam também termos proporcionais a $A'(\bar{\psi}\psi)^3$ e $B'(\bar{\psi}\psi)^4$ em sua densidade lagrangiana, com A' e B' constantes. Como um caso particular para a matéria nuclear infinita, é possível mostrar que se tais termos são desprezados, ou seja, se tratarmos apenas os modelos lineares de contato, suas equações de estado são exatamente as mesmas obtidas pelo modelo linear de Walecka [43]. O mesmo resultado também pode ser mostrado através de um limite hipermassivo das massas mesônicas no modelo de Walecka, cujo procedimento está disponível nas publicações [44, 45]. Inspirados nos modelos

¹Density functional theory.

²Nonlinear point-coupling models.

³Do inglês nonlinear Walecka models.

relativísticos de alcance finito, ainda outras estruturas para os modelos de contato são possíveis, como a versão na qual os parâmetros de acoplamento são dependentes da densidade [46].

Neste capítulo, cujas referências principais são os trabalhos publicados em [47, 48], investigaremos em duas etapas os modelos relativísticos de contato para sistemas simétricos ($y = 1/2$) em temperatura nula. Na primeira abordaremos os modelos NLPC e NLW comparativamente, vinculando os primeiros a reproduzirem os mesmos observáveis da matéria nuclear infinita de alguns modelos NLW apresentados no capítulo 1. Nosso objetivo é analisar como as equações de estado dos modelos NLPC se comportam sob tais condições. Ainda nessa linha e, para analisar mais profundamente a relação entre NLPC e NLW além dos cálculos puramente numéricos, trataremos à discussão um modelo gerador dos NLPC, chamado aqui de MNLW⁴, que é uma modificação do modelo NLW. O conceito de naturalidade também será discutido e uma proposta de conexão entre as constantes adimensionais dos modelos NLPC e NLW será apresentada a partir da análise da naturalidade das constantes oriundas do modelo MNLW. A outra etapa da análise acerca dos modelos relativísticos de contato será a realização do limite não relativístico dos mesmos e posterior comparação das equações de estado, geradas a partir deste procedimento, com as equações exatas dos NLPC e com as dos modelos de Skyrme.

2.1 Descrição dos modelos e equações de estado

Os modelos não lineares de contato usados neste capítulo são uma generalização dos modelos lineares representados pela densidade lagrangiana dada por

$$\mathcal{L}_{PC} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - M)\psi - \frac{1}{2}G'_\omega{}^2(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2 + \frac{1}{2}G'_\sigma{}^2(\bar{\psi}\psi)^2. \quad (2.1)$$

Como já mencionado, tal expressão pode ser obtida diretamente da densidade lagrangiana de Walecka pelo do uso da aproximação de campo médio [43], ou a partir de um limite de massas mesônicas muito grandes [44, 45]. Uma pergunta natural que pode ser feita é se a densidade lagrangiana que usaremos para definir os modelos não lineares de contato, dada por

$$\mathcal{L}_{NLPC} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - M)\psi - \frac{1}{2}G'_\omega{}^2(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2 + \frac{1}{2}G'_\sigma{}^2(\bar{\psi}\psi)^2 + \frac{A'}{3}(\bar{\psi}\psi)^3 + \frac{B'}{4}(\bar{\psi}\psi)^4, \quad (2.2)$$

é obtida pelo uso do mesmo limite, aplicado agora aos modelos não lineares de Walecka de autointerações mesônicas do tipo $\sigma^3 - \sigma^4$, ou seja, naqueles nos quais $c = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_1' =$

⁴Da sigla em inglês modified nonlinear Walecka model.

$\alpha_2' = \alpha_3' = g_\rho = \mathcal{L}_\rho = 0$ na expressão (1.2). A resposta é não. Porém, tal resultado é alcançado se o limite em questão for aplicado à seguinte densidade lagrangiana modificada [44, 45]

$$\mathcal{L}_{MNLW} = \mathcal{L}_{Walecka} - \frac{A'}{3} \left(\frac{m_\sigma^2}{g_\sigma} \right)^3 \sigma^3 f(\sigma) - \frac{B'}{4} \left(\frac{m_\sigma^2}{g_\sigma} \right)^4 \sigma^4 g(\sigma), \quad (2.3)$$

com

$$f(\sigma) = \left[1 + \frac{3g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \left(\frac{\bar{\psi}\psi}{g_\sigma\sigma} \right) + \frac{3g_\sigma^4}{m_\sigma^4} \left(\frac{\bar{\psi}\psi}{g_\sigma\sigma} \right)^2 \right], \quad (2.4)$$

$$g(\sigma) = \left[1 + \frac{4g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \left(\frac{\bar{\psi}\psi}{g_\sigma\sigma} \right) + \frac{6g_\sigma^4}{m_\sigma^4} \left(\frac{\bar{\psi}\psi}{g_\sigma\sigma} \right)^2 + \frac{4g_\sigma^6}{m_\sigma^6} \left(\frac{\bar{\psi}\psi}{g_\sigma\sigma} \right)^3 \right] \quad (2.5)$$

e $\mathcal{L}_{Walecka}$ sendo a densidade lagrangiana linear de Walecka para $y = 1/2$, dada pela expressão (1.2) com $A = B = c = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_1' = \alpha_2' = \alpha_3' = g_\rho = \mathcal{L}_\rho = 0$. Tal limite é tomado juntamente com o uso do formalismo das integrais funcionais para a eliminação dos graus de liberdade mesônicos da teoria, resultando então em um sistema puramente fermiônico descrito por (2.2) [44, 45].

A partir de (2.2) e usando os mesmos procedimentos tomados no capítulo 1, é possível derivar todas as quantidades termodinâmicas dos modelos NLPC assim como feito anteriormente para os modelos NLW. Apresentamos aqui três destas grandezas, a saber, pressão, densidade de energia e incompressibilidade, dadas respectivamente por

$$P = \frac{1}{2} G_\omega'^2 \rho^2 - \frac{1}{2} G_\sigma'^2 \rho_s^2 - \frac{2}{3} A' \rho_s^3 - \frac{3}{4} B' \rho_s^4 + \frac{\gamma}{6\pi^2} \int_0^{k_F} \frac{k^4 dk}{(k^2 + M^{*2})^{1/2}}, \quad (2.6)$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} G_\omega'^2 \rho^2 + \frac{1}{2} G_\sigma'^2 \rho_s^2 + \frac{2}{3} A' \rho_s^3 + \frac{3}{4} B' \rho_s^4 + \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} k^2 (k^2 + M^{*2})^{1/2} dk \quad \text{e} \quad (2.7)$$

$$K = 9G_\omega'^2 \rho + \frac{3k_F^2}{E_F^*} - \frac{9M^{*2}}{E_F^{*2}} \left[\frac{(G_\sigma'^2 + 2A'\rho_s + 3B'\rho_s^2)\rho}{1 + 3(G_\sigma'^2 + 2A'\rho_s + 3B'\rho_s^2) \left(\frac{\rho_s}{M^*} - \frac{\rho}{E_F^*} \right)} \right] \quad (2.8)$$

com $\gamma = 4$, $E_F^* = (k_F^2 + M^{*2})^{1/2}$ e a massa efetiva satisfazendo a equação autoconsistente dada por

$$M^* = M - G_\sigma'^2 \rho_s - A' \rho_s^2 - B' \rho_s^3. \quad (2.9)$$

As densidades escalar e vetorial, ρ_s e ρ , são definidas da mesma forma como no caso dos modelos NLW, equações (1.17) e (1.18). O mesmo ocorre para as integrais correspondentes aos termos cinéticos da pressão e densidade de energia. Veja as equações (1.30) e (1.35).

2.2 Análise dimensional ingênua

Nesta seção abordaremos os modelos NLW e NLPC do ponto de vista da análise dimensional ingênua (NDA⁵) [49, 50], que consiste em verificar se as constantes de acoplamento de uma teoria qualquer, após serem propriamente convertidas em coeficientes adimensionais, apresentam magnitude da ordem da unidade. Quando isso ocorre, o modelo em questão é dito ser natural e, conseqüentemente, a adição de termos de ordens superiores nos campos da teoria não deve modificar a descrição física do sistema. Em outras palavras, se o modelo é tido como natural, termos não considerados na densidade lagrangiana não são importantes, ou melhor, determinantes.

De uma forma geral, cada termo nas respectivas densidades lagrangianas dos modelos NLW e NLPC pode ser escrito como [51]

$$g \frac{1}{m!} \frac{1}{n!} f_\pi^2 \Lambda^2 \left(\frac{\bar{\Psi}\Psi}{f_\pi^2 \Lambda} \right)^l \left(\frac{\sigma}{f_\pi} \right)^m \left(\frac{\omega}{f_\pi} \right)^n \left(\frac{\partial}{\Lambda} \right)^p, \quad (2.10)$$

com $f_\pi = 92,5$ MeV sendo a constante de decaimento do pión no vácuo e $\Lambda = 770$ MeV tomado como o valor da massa do méson ρ . Assim, pode-se escrever (2.2) e (1.2) em termos dos adimensionais g da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{NLPC} = & -\frac{1}{2} G'_\omega{}^2 (\bar{\Psi}\gamma^\mu \Psi)^2 + \frac{1}{2} G'_\sigma{}^2 (\bar{\Psi}\Psi)^2 + \frac{A'}{3} (\bar{\Psi}\Psi)^3 + \frac{B'}{4} (\bar{\Psi}\Psi)^4 = -g_1 f_\pi^2 \Lambda^2 \left(\frac{\bar{\Psi}\Psi}{f_\pi^2 \Lambda} \right)^2 \\ & + g_2 f_\pi^2 \Lambda^2 \left(\frac{\bar{\Psi}\Psi}{f_\pi^2 \Lambda} \right)^2 + g_3 f_\pi^2 \Lambda^2 \left(\frac{\bar{\Psi}\Psi}{f_\pi^2 \Lambda} \right)^3 + g_4 f_\pi^2 \Lambda^2 \left(\frac{\bar{\Psi}\Psi}{f_\pi^2 \Lambda} \right)^4, \quad \text{com} \quad (2.11) \end{aligned}$$

$$g_1 = f_\pi^2 \frac{G'_\omega{}^2}{2}, \quad g_2 = f_\pi^2 \frac{G'_\sigma{}^2}{2}, \quad g_3 = \frac{A'}{3} f_\pi^4 \Lambda, \quad g_4 = \frac{B'}{4} f_\pi^6 \Lambda^2 \quad (2.12)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{NLW} = & -g_\omega \bar{\Psi}\gamma^\mu \omega_\mu \Psi - g_\sigma \sigma \bar{\Psi}\Psi - \frac{A}{3} \sigma^3 - \frac{B}{4} \sigma^4 = -g_1 f_\pi^2 \Lambda^2 \left(\frac{\bar{\Psi}\Psi}{f_\pi^2 \Lambda} \right) \left(\frac{\omega}{f_\pi} \right) \\ & - g_2 f_\pi^2 \Lambda^2 \left(\frac{\bar{\Psi}\Psi}{f_\pi^2 \Lambda} \right) \left(\frac{\sigma}{f_\pi} \right) - g_3 \frac{f_\pi^2 \Lambda^2}{3!} \left(\frac{\sigma}{f_\pi} \right)^3 - g_4 \frac{f_\pi^2 \Lambda^2}{4!} \left(\frac{\sigma}{f_\pi} \right)^4, \quad \text{com} \quad (2.13) \end{aligned}$$

$$g_1 = m_\omega G_\omega \frac{f_\pi}{\Lambda}, \quad g_2 = m_\sigma G_\sigma \frac{f_\pi}{\Lambda}, \quad g_3 = \frac{2f_\pi}{\Lambda^2} a m_\sigma^3 G_\sigma^3 \quad \text{e} \quad g_4 = \frac{6f_\pi^2}{\Lambda^2} b m_\sigma^4 G_\sigma^4, \quad (2.14)$$

⁵Da sigla em inglês naive dimensional analysis.

onde são ignorados os termos derivativos e a matriz γ^μ nas densidades lagrangianas. Note que as diferentes estruturas dos modelos NLW e NLPC são refletidas também nos adimensionais g_i ($i = 1, 2, 3, 4$) definidos em (2.14) e (2.12).

2.3 Comparação entre os modelos NLPC e NLW

A comparação apresentada a partir de agora, se dará entre os modelos NLPC e alguns NLW já apresentados no capítulo 1. Mais especificamente, nos restringiremos aos modelos não lineares do tipo $\sigma^3 - \sigma^4$. Começamos apresentando as parametrizações de tais modelos e quais vínculos os modelos NLPC devem satisfazer nesta comparação.

2.3.1 Parametrizações dos modelos

Os modelos NLPC, objetos de estudo deste capítulo, são construídos de tal forma a reproduzirem os mesmos valores da densidade de saturação (ρ_0), energia de ligação (B_e), incompressibilidade (K) e massa efetiva ($m^* = M^*/M$) dos modelos NLW do tipo $\sigma^3 - \sigma^4$. Estes observáveis, juntamente com as constantes de acoplamento, são extraídos das tabelas 1.1 e 1.2 e exibidos na tabela 2.1 a seguir.

Modelo	ρ_0 (fm ⁻³)	B_e (MeV)	m^*	K (MeV)	G_ω^2 (10 ⁻⁴ MeV ⁻²)	G_σ^2 (10 ⁻⁴ MeV ⁻²)	a (MeV)	b $\times 10^{-3}$
NLB	0,148	-15,75	0,61	420,00	2,593	3,624	-0,451	0,146
NL2	0,146	-17,03	0,67	399,20	2,163	3,248	-0,606	2,001
NLSH	0,146	-16,35	0,60	355,36	2,711	3,916	-1,199	-1,297
NLB1	0,162	-15,74	0,62	280,00	2,281	3,480	-2,193	-2,840
NL3	0,148	-16,30	0,60	271,76	2,671	4,009	-1,971	-2,668
NLB2	0,162	-15,73	0,56	245,10	2,689	3,994	-2,044	-3,143
NLC	0,148	-15,75	0,63	225,00	2,442	3,804	-2,661	-3,644
NL1	0,152	-16,42	0,57	211,70	2,806	4,257	-2,280	-3,405
NLZ2	0,151	-16,07	0,58	172,00	2,738	4,225	-2,609	-3,926

Tabela 2.1: Propriedades de saturação e constantes de acoplamento para os modelos não lineares do tipo $\sigma^3 - \sigma^4$.

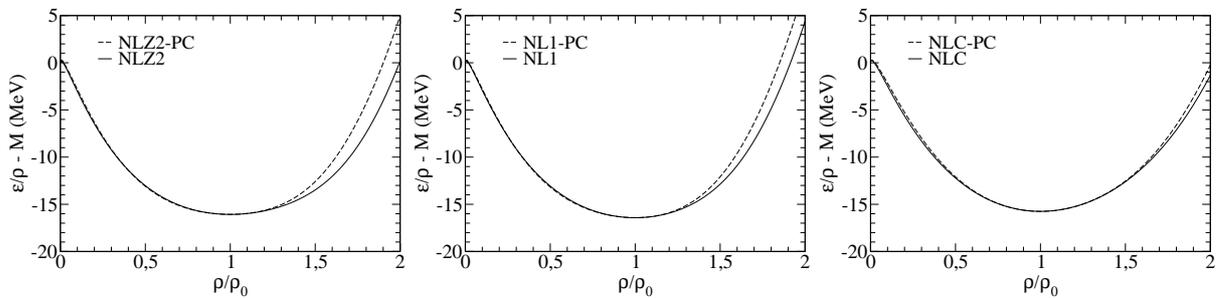
As constantes de acoplamento dos modelos de contato são mostradas na próxima tabela, onde a notação utilizada para designar seus nomes segue a seguinte lógica. Os sufixos “-PC” são usados para especificar que o modelo em questão é uma versão para o modelo de contato dos NLW. Por exemplo, NLSH-PC é a versão de contato do não linear NLSH, ou seja, é construído a partir da densidade lagrangiana (2.2) e possui os mesmos valores de NLSH para ρ_0 , B_e , K e m^* .

Modelo	G_ω^2 (10^{-4}MeV^{-2})	G_σ^2 (10^{-4}MeV^{-2})	A' (10^{-11}MeV^{-5})	B' (10^{-17}MeV^{-8})
NLB-PC	2,593	3,625	-2,194	0,069
NL2-PC	2,163	3,276	-3,367	-0,217
NLSH-PC	2,711	3,884	-5,430	2,104
NLB1-PC	2,281	3,424	-6,157	2,425
NL3-PC	2,671	3,944	-8,444	3,400
NLB2-PC	2,689	3,972	-9,855	5,408
NLC-PC	2,442	3,712	-8,834	3,889
NL1-PC	2,806	4,199	-11,917	6,588
NLZ2-PC	2,738	4,146	-12,509	6,787

Tabela 2.2: Constantes de acoplamento dos modelos relativísticos de contato.

Note que as tabelas 2.1 e 2.2 mostram uma característica curiosa sobre os modelos NLW e NLPC. As constantes de acoplamento b e B' tem sinais contrários, exceto para os modelos NLB e NLB-PC. Como já mencionado pelos autores de [52], tal diferença de sinal pode ser crucial para o aparecimento de um estado fundamental instável do sistema. Para o caso dos modelos NLW que exibem o coeficiente associado ao termo de mais alta ordem no campo σ , tais soluções instáveis podem surgir em altas densidades, porém para os modelos aqui tratados essas anomalias só devem aparecer em densidades longe de qualquer região física de interesse, $\rho > 10\rho_0$.

Na figura 2.1, mostramos uma comparação direta entre os modelos de contato e não lineares de Walecka através do gráfico da energia por partícula de ambos. Perceba que quaisquer modelos NLW e NLPC são praticamente indistinguíveis pelo menos até densidades um pouco maiores que a densidade de saturação específica de cada par. O mesmo pode ser igualmente verificado para outras quantidades (não mostradas aqui), tais como massa efetiva, pressão e energia de simetria, todas em função da razão ρ/ρ_0 .



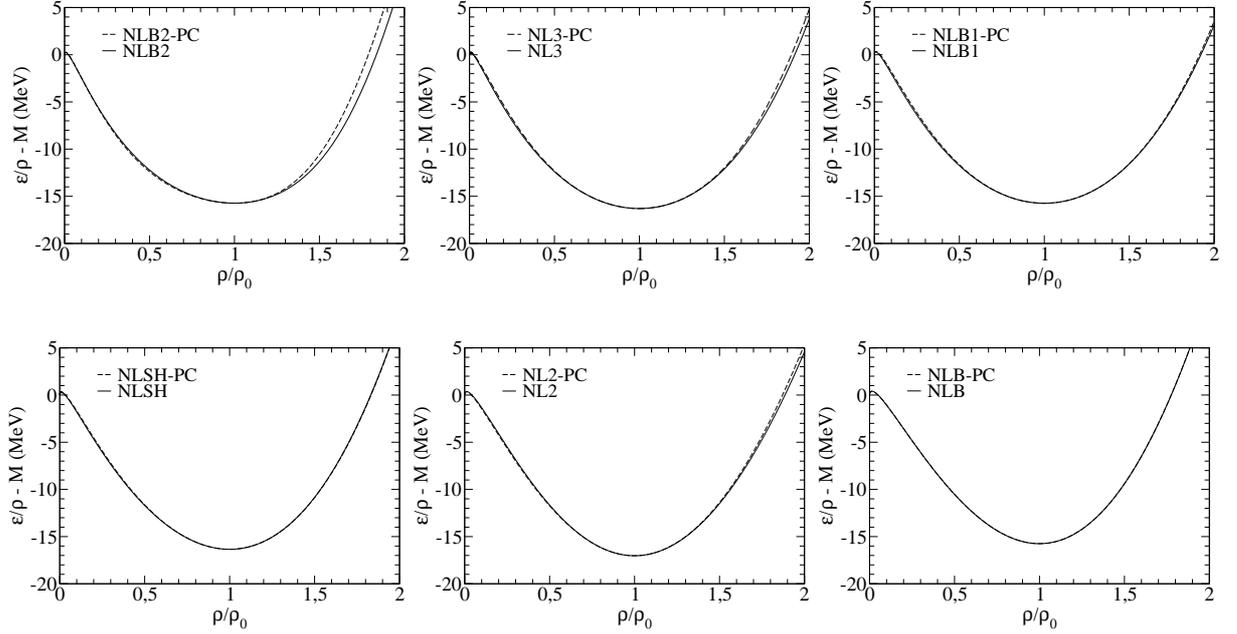


Figura 2.1: Energia por partícula como função da razão ρ/ρ_0 para os 9 modelos NLPC (curvas tracejadas) e NLW (curvas cheias).

Do ponto de vista numérico, essa indistinguibilidade pode estar associada ao comportamento exibido na figura 2.2, que mostra a razão entre a densidade escalar dos modelos NLW e a dos NLPC também como função de ρ/ρ_0 . Como se pode ver, tal razão é igual à unidade até o limite de densidades um pouco maiores que ρ_0 . Observa-se também que quanto maior a incompressibilidade do modelo, maior a concordância para $\rho/\rho_0 > 1$, seguindo um caminho para a equivalência em todas as densidades no caso do modelo de Walecka, no qual K é alto.

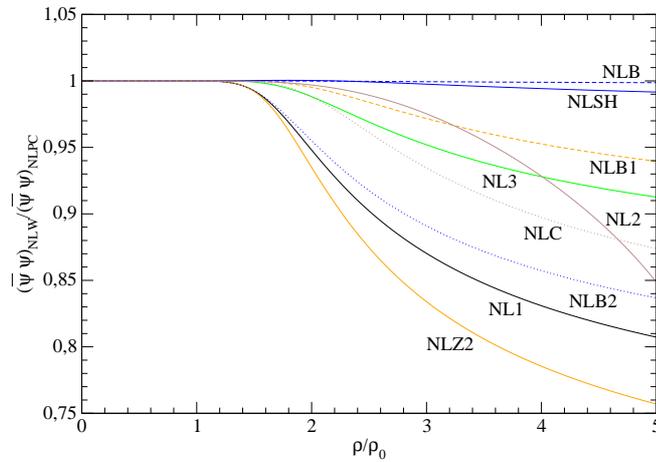


Figura 2.2: Razão da densidade escalar entre os modelos NLW e NLPC como função de ρ/ρ_0 .

Para uma melhor análise do papel das constantes de acoplamento nos modelos NLW e

NLPC, disponibilizamos na tabela 2.3 as contribuições individuais de cada termo da energia por nucleon de ambos os modelos, o que é feito dividindo as expressões (2.7) e (1.31)⁶ por ρ . Todas as parcelas são calculadas em $\rho = \rho_0$, sendo a soma portanto, igual à energia de ligação de cada modelo⁷.

Modelo	E_1 (MeV)	E_2 (MeV)	E_3 (MeV)	E_4 (MeV)	E_c (MeV)
NLB-PC (NLB)	147,82	184,79 (162,27)	-16,07 (6,48)	0,61 (0,58)	606,11
NL2-PC (NL2)	121,35	167,43 (131,50)	-24,57 (5,34)	-1,91 (4,11)	658,67
NLSH-PC (NLSH)	152,09	194,34 (160,55)	-38,38 (18,88)	17,72 (-5,75)	596,88
NLB1-PC (NLB1)	141,96	190,02 (146,93)	-53,55 (26,67)	27,88 (-9,24)	616,85
NL3-PC (NL3)	151,87	199,86 (154,71)	-61,24 (30,61)	35,03 (-11,67)	597,18
NLB2-PC (NLB2)	167,38	215,23 (171,63)	-82,71 (38,58)	59,30 (-18,38)	563,95
NLC-PC (NLC)	139,22	190,48 (139,15)	-65,38 (32,62)	35,02 (-11,64)	623,90
NL1-PC (NL1)	163,84	215,50 (163,60)	-89,29 (42,69)	60,80 (-19,29)	570,74
NLZ2-PC (NLZ2)	158,84	212,63 (156,35)	-93,33 (44,99)	62,15 (-19,88)	582,53

Tabela 2.3: Contribuições para a energia por nucleon em $\rho = \rho_0$ dos modelos NLPC e NLW (valores entre parênteses). Para os modelos NLPC temos que $E_1 = G_\omega'^2 \rho_0 / 2$, $E_2 = G_\sigma'^2 \rho_s^2 / 2\rho_0$, $E_3 = 2A' \rho_s^3 / 3\rho_0$ e $E_4 = 3B' \rho_s^4 / 4\rho_0$. Para os NLW, $E_1 = G_\omega^2 \rho_0 / 2$, $E_2 = (\Delta M)^2 / 2G_\sigma^2 \rho_0$, $E_3 = a(\Delta M)^3 / 3\rho_0$ e $E_4 = b(\Delta M)^4 / 4\rho_0$. A energia cinética E_c e E_1 têm o mesmo valor para ambos os modelos.

Note na tabela a inversão dos sinais do termo E_3 dos modelos NLPC em relação aos NLW. A razão para isso vem do fato de que para os modelos NLPC o sinal de $E_3^{NLPC} = 2A' \rho_s^3 / 3\rho_0$ é determinado pela constante A' , já que a densidade escalar é uma quantidade sempre positiva. Como $A' < 0$ para todas as parametrizações NLPC, temos que $E_3^{NLPC} < 0$. Já no caso dos modelos NLW, $E_3^{NLW} = a(\Delta M)^3 / 3\rho_0$, logo seu sinal é contrário ao da constante a devido ao fato de que $\Delta M = M^* - M < 0$. Assim, como $a < 0$ temos que $E_3^{NLW} > 0$. No caso do termo E_4 , tanto para os modelos NLPC quanto para os NLW, o sinal será sempre igual ao das constantes B' e b , o que também gera a troca de sinais de E_4^{NLPC} em relação à E_4^{NLW} , com uma única exceção para o par NLB-PC / NLB.

2.3.2 Modelos NLPC a partir dos NLW

Analisaremos agora um pouco mais profundamente, o papel dos termos adicionados no modelo NLW para a obtenção do MNLW, a partir do qual os NLPC são formalmente obtidos [44, 45]. Usaremos as soluções do modelo NLW para estimar $f(\sigma)$ e $g(\sigma)$, equações (2.4) e (2.5), que são as funções que distorcem o modelo original NLW. Tais funções dependem basicamente

⁶Para $y = 1/2$.

⁷Após subtraída a massa do nucleon M .

mente da quantidade $g_\sigma^2 \bar{\psi}\psi/m_\sigma^2 \sigma$ que, a partir da equação (1.25) e usando que $M^* = M + g_\sigma \sigma$, é dada por

$$\frac{g_\sigma^2}{m_\sigma^2} \frac{\bar{\psi}\psi}{g_\sigma \sigma} = - \left(1 + \frac{A\sigma}{m_\sigma^2} + \frac{B\sigma^2}{m_\sigma^2} \right). \quad (2.15)$$

Na figura 2.3 é mostrada uma estimativa de $f(\sigma)$ e $g(\sigma)$, dadas nas equações (2.4) e (2.5), como função de ρ/ρ_0 .

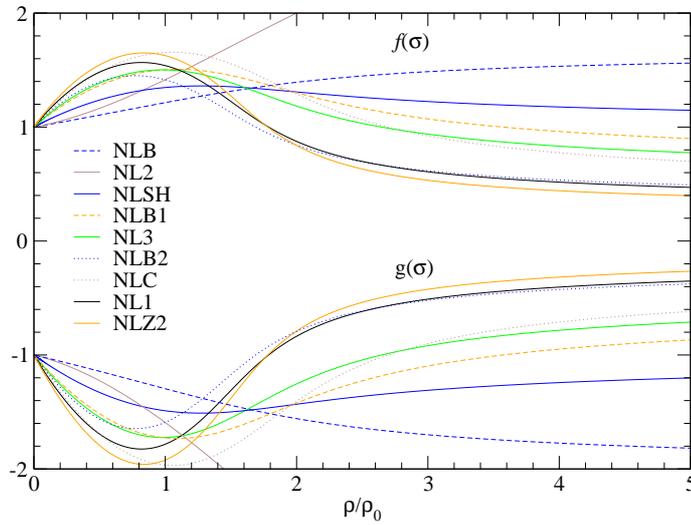


Figura 2.3: Funções $f(\sigma)$ e $g(\sigma)$ para os modelos NLW em função de ρ/ρ_0 .

Nos modelos NLW usuais do tipo $\sigma^3 = \sigma^4$, temos que $f(\sigma) = g(\sigma) = 1$. Já o modelo modificado MNLW pode ser interpretado como um NLW cujas constantes referentes aos termos $\sigma^3 - \sigma^4$ são dependentes da densidade, ou seja, são modificadas pelo meio nuclear, o que gera portanto, um modelo muito mais complicado em termos de estrutura. Isso pode ser visto através do uso de (2.15) em (2.3), o resultado é um a densidade lagrangiana que contém termos até décima ordem no campo escalar σ . Note ainda que para o modelo MNLW, temos $f(\sigma = 0) = 1$ mas curiosamente $g(\sigma = 0) = -1$, ou seja, mesmo no vácuo ($\rho = 0$), os modelos NLPC precisam de uma troca de sinal no termo de quarta ordem.

2.3.3 Naturalidade dos modelos NLPC e NLW

Continuando as comparações entre os modelos NLPC e NLW, mostramos na tabela 2.4, as constantes adimensionais, calculadas a partir da análise dimensional ingênua realizada anterior-

mente, expressões (2.12) e (2.14). Para a obtenção dos coeficientes do modelo NLW foi preciso a utilização das massas mesônicas de cada parametrização, dadas nas últimas duas colunas.

Modelo	g_1	g_2	g_3	g_4	m_σ (MeV)	m_ω (MeV)
NLB-PC (NLB)	1,11 (1,51)	1,55 (1,17)	-0,41 (-0,13)	0,06 (0,11)	510,00	783,00
NL2-PC (NL2)	0,92 (1,38)	1,40 (1,09)	-0,63 (-0,14)	-0,20 (1,19)	504,89	780,00
NLSH-PC (NLSH)	1,16 (1,55)	1,66 (1,25)	-1,02 (-0,42)	1,95 (-1,32)	526,06	783,00
NLB1-PC (NLB1)	0,98 (1,42)	1,46 (1,05)	-1,16 (-0,46)	2,25 (-1,45)	470,00	783,00
NL3-PC (NL3)	1,14 (1,54)	1,69 (1,22)	-1,59 (-0,65)	3,71 (-2,47)	508,19	782,50
NLB2-PC (NLB2)	1,15 (1,54)	1,70 (1,16)	-1,85 (-0,58)	5,02 (-2,40)	485,00	783,00
NLC-PC (NLC)	1,04 (1,47)	1,59 (1,17)	-1,66 (-0,77)	3,61 (-2,87)	500,80	783,00
NL1-PC (NL1)	1,20 (1,60)	1,80 (1,22)	-2,24 (-0,75)	6,11 (-3,14)	492,25	795,36
NLZ2-PC (NLZ2)	1,17 (1,55)	1,77 (1,22)	-2,35 (-0,85)	6,30 (-3,59)	493,15	780,00

Tabela 2.4: Constantes adimensionais das densidades lagrangianas dos modelos NLPC e NLW (entre parênteses). As massas mesônicas dos modelos NLW são dadas nas duas últimas colunas.

Como mostrado na tabela, os coeficientes g_1 e g_2 mudam pouco em ambos os modelos. Já entre g_3 e g_4 , a mudança é mais significativa. Baseados em tais características das constantes adimensionais de NLW e NLPC, buscamos verificar se existe alguma relação entre os g_i de ambos. Tentamos encontrar essa resposta a partir do estudo de cada termo de ordem superior do modelo MNLW gerador dos NLPC, já que os coeficientes g_1 e g_2 são claramente naturais para ambos os modelos. Usando que os modelos MNLW e NLPC são equivalentes, ou seja, os de alcance finito são levados aos de contato através de um limite de massas mesônicas muito grandes, consideremos também que seus coeficientes adimensionais também o sejam. Assim, seguindo a regra dada na expressão (2.10), podemos inferir g_3 e g_4 dos modelos NLPC a partir de (2.3), da seguinte forma,

$$\begin{aligned}
g_3 &= g_{31} + g_{32} + g_{33} \\
&= -2A' \left(\frac{m_\sigma^2}{g_\sigma} \right)^3 \frac{f_\pi}{\Lambda^2} - 2A' \left(\frac{m_\sigma^2}{g_\sigma} \right)^2 \frac{f_\pi^2}{\Lambda} - A' \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma} f_\pi^3 \quad e
\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
g_4 &= g_{41} + g_{42} + g_{43} + g_{44} \\
&= -6B' \left(\frac{m_\sigma^2}{g_\sigma} \right)^4 \frac{f_\pi^2}{\Lambda^2} - 6B' \left(\frac{m_\sigma^2}{g_\sigma} \right)^3 \frac{f_\pi^3}{\Lambda} - 3B' \left(\frac{m_\sigma^2}{g_\sigma} \right)^2 f_\pi^4 - B' \frac{m_\sigma^2}{g_\sigma} f_\pi^5 \Lambda.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

A conexão de g_3 e g_4 dos NLPC com os respectivos coeficientes adimensionais dos modelos NLW é feita então fazendo as seguintes associações: $A' \left(\frac{m_\sigma^2}{g_\sigma} \right)^3 \rightarrow A$ e $B' \left(\frac{m_\sigma^2}{g_\sigma} \right)^4 \rightarrow B$. Com isso, e considerando que $g_\sigma \rightarrow -g_\sigma$, sem perda de generalidade, chega-se com o uso de (2.14) em

$$g_j^{NLPC} \approx g_j^{NLW} \sum_{n=0}^{j-1} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{G_\sigma}{m_\sigma} f_\pi \Lambda \right)^n, \quad j = 3, 4. \tag{2.18}$$

Na tabela 2.5 mostramos g_3 e g_4 dos modelos NLPC calculados a partir de (2.18). Comparando os valores desta tabela com os da tabela 2.4, vemos que a conjectura dada em (2.18) funciona muito bem com exceção dos modelos NLB-PC e NL2-PC cujas discrepâncias são as maiores, principalmente no coeficiente g_4 .

Modelo	g_{31}	g_{32}	g_{33}	g_3	g_{41}	g_{42}	g_{43}	g_{44}	g_4
NLB-PC	-0,13	0,34	-0,46	-0,24	0,11	-0,30	0,40	-0,35	-0,14
NL2-PC	-0,14	0,36	-0,46	-0,24	1,19	-3,03	3,85	-3,26	-1,24
NLSH-PC	-0,42	1,13	-1,52	-0,81	-1,32	3,53	-4,74	4,23	1,71
NLB1-PC	-0,46	1,30	-1,84	-1,00	-1,45	4,11	-5,81	5,47	2,32
NL3-PC	-0,65	1,82	-2,55	-1,38	-2,48	6,95	-9,75	9,12	3,84
NLB2-PC	-0,58	1,70	-2,50	-1,37	-2,40	7,05	-10,35	10,12	4,42
NLC-PC	-0,77	2,15	-2,98	-1,60	-2,87	7,97	-11,05	10,22	4,26
NL1-PC	-0,75	2,22	-3,32	-1,84	-3,14	9,36	-13,98	13,91	6,16
NLZ2-PC	-0,85	2,52	-3,74	-2,07	-3,59	10,65	-15,82	15,65	6,90

Tabela 2.5: Coeficientes adimensionais do modelo NLPC obtidos via expressão (2.18).

Ainda sobre naturalidade, há uma definição quantitativa proposta recentemente em [53], que considera como naturais os modelos nos quais seus coeficientes adimensionais em módulo estão distribuídos em torno de 1 e, adicionalmente, a razão entre o coeficiente máximo e o mínimo seja menor que 10. Seguindo esta definição e adotando arbitrariamente nesta seção como sendo naturais os modelos que apresentam $0,4 < |g_i| < 4,0$, temos que todos os modelos NLW, com exceção de NLB e NL2, são naturais.

Estendemos agora o mesmo estudo para uma classe ainda maior de modelos NLW e NLPC, na qual a incompressibilidade e a massa efetiva são deixados variar, porém mantendo constante a energia de ligação e a densidade de saturação. A faixa de variação de m^* é tal que $0,52 < m^* < 0,64$. Este intervalo foi escolhido devido à correlação encontrada pelos autores de [19], que prevê bons resultados para a separação spin-órbita em núcleos finitos, quando os modelos hadrônicos fornecem tais valores de m^* .

Primeiro, apresentamos na figura 2.4 um gráfico tridimensional que contém a quantidade $G = |g_i|^{max}/|g_j|^{min}$, para $i \neq j$, como função de K e m^* . Destas superfícies pode-se ver que um dos critérios exigidos para se considerar um modelo natural, $G < 10$, é sempre satisfeito para ambos os modelos, NLPC e NLW. Os valores máximos para os modelos NLW e NLPC são, respectivamente, $G = 4,8$ (para $K = 355$ MeV e $m^* = 0,64$) e $G = 5,8$ (para $K = 172$ MeV e $m^* = 0,57$). Para os modelos NLW, variações significativas em G começam a partir de $K \sim 300$ MeV.

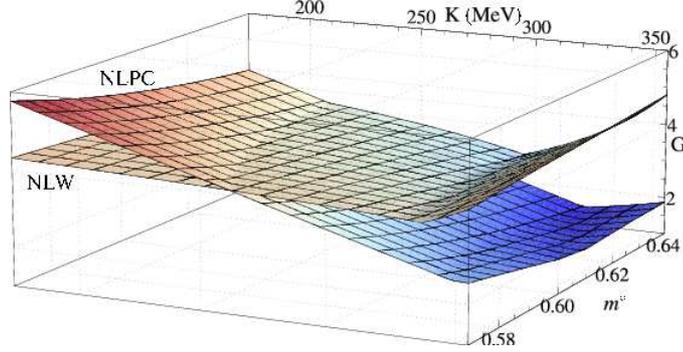


Figura 2.4: Razão $G = |g_i|^{max}/|g_j|^{min}$ como função de K e m^* para os modelos NLW e NLPC, fixados em $\rho_0 = 0,151 \text{ fm}^{-3}$ e $B_e = 16,07 \text{ MeV}$.

Nas figura 2.5, mostramos os coeficientes adimensionais g_i dos modelos NLW e NLPC. Tais gráficos fornecem as principais informações com relação à naturalidade dos modelos, uma vez que o primeiro critério é sempre satisfeito. Assim, os valores de g_i passam a ser a condição fundamental para se classificar um modelo como natural.

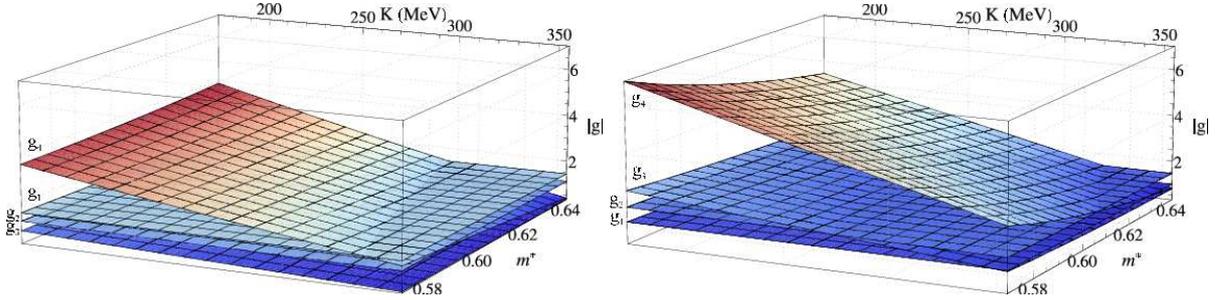


Figura 2.5: Coeficientes adimensionais obtidos via análise dimensional ingênua para os modelos NLW (esquerda) e NLPC (direita). Em ambos, $\rho_0 = 0,151 \text{ fm}^{-3}$ e $B_e = -16,07 \text{ MeV}$. De cima para baixo, temos representados g_4, g_1, g_2 e g_3 para a figura da esquerda e g_4, g_3, g_2 e g_1 para a da direita.

Das figuras nota-se que g_1 e g_2 estão sempre dentro do intervalo considerado como válido ($0,4 < |g_i| < 4,0$). Esse fato força-nos a determinar a naturalidade dos modelos exclusivamente pelos coeficientes g_3 e g_4 . Para os modelos NLW há uma região ($K \gtrsim 340 \text{ MeV}$) onde eles não são naturais, devido à condição $g_3 < 0,4$. Curiosamente, para os NLPC não há região onde a naturalidade dos modelos seja invalidada por g_3 .

Sobre o coeficiente g_4 , praticamente não se encontram regiões nas quais o desvio da naturalidade seja observado para os modelos NLW, exceto para pontos próximos de $K = 355 \text{ MeV}$ e $m^* = 0,64$, que apresentam $g \approx 0,37$. O mesmo não ocorre para os NLPC, nos quais a naturalidade é fortemente determinada por g_4 , que por sua vez varia muito com K e m^* . Entretanto, pode-se garantir que modelos NLPC para $K > 300 \text{ MeV}$ são naturais independentemente do

valor de m^* .

Por fim, destacamos que em geral tanto modelos NLW quanto NLPC são mais sensíveis à variações de K comparadas às de m^* e que, os modelos de contato tendem a se desviar mais da naturalidade que os modelos de alcance finito.

2.4 Limite não relativístico

Como uma última aplicação dos modelos de contato, veremos como os mesmos podem gerar equações de estado (EOS) não relativísticas e em quais circunstâncias tais EOS são comparáveis ao modelo original, basicamente, apresentando os resultados obtidos na publicação [48]. Verificaremos ainda qual a relação destas EOS com os modelos de Skyrme, também de contato, porém não relativísticos. Para tais análises, usaremos o limite não relativístico proposto em [27], também utilizado nas referências [54, 55] e cuja derivação detalhada está descrita no apêndice C.

De forma sucinta, uma das etapas da redução não relativística para os modelos hadrônicos é a eliminação da pequena componente χ do campo fermiônico ψ em termos da grande componente, ϕ . Isso é feito na equação de Dirac, resultando na seguinte expressão

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{k} B \vec{\sigma} \cdot \vec{k} + M + S + V)\phi = E\phi, \quad (2.19)$$

onde

$$B = \frac{1}{M + S - V + E} = B_0 \frac{1}{1 + (\varepsilon - S - V)B_0} \simeq B_0 + B_0^2(S + V - \varepsilon), \quad B_0 = \frac{1}{2(M + S)} \quad (2.20)$$

e $\varepsilon = E - M$. Na aproximação usada para B , usamos $x = (\varepsilon - S - V)B_0$ como parâmetro de expansão. Para os modelos de contato relativísticos considerados neste capítulo, temos para o pior caso, que $x < 0, 1$ até aproximadamente $1, 5\rho_0$.

O uso de (2.20) reduz (2.19) à equação de Schrödinger dada por

$$\hat{H}^{class} \varphi^{class} = \varepsilon \varphi^{class} \quad (2.21)$$

onde $\varphi^{class} = \hat{I}^{1/2} \phi$,

$$\hat{H}^{class} = \hat{I}^{-1/2} \left[\vec{\sigma} \cdot \vec{k} B_0 \vec{\sigma} \cdot \vec{k} + S + V + \vec{\sigma} \cdot \vec{k} B_0^2 (S + V) \vec{\sigma} \cdot \vec{k} \right] \hat{I}^{-1/2} \quad (2.22)$$

e, os operadores \hat{I} e $\hat{I}^{-1/2}$ são definidos como

$$\hat{I} = 1 + \vec{\sigma} \cdot \vec{k} B_0^2 \vec{\sigma} \cdot \vec{k} \quad \text{e} \quad (2.23)$$

$$\hat{I}^{-1/2} = (1 + \vec{\sigma} \cdot \vec{k} B_0^2 \vec{\sigma} \cdot \vec{k})^{-1/2} \equiv 1 - \frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{k} B_0^2 \vec{\sigma} \cdot \vec{k} + \frac{3}{8} (\vec{\sigma} \cdot \vec{k} B_0^2 \vec{\sigma} \cdot \vec{k})^2 + \dots \quad (2.24)$$

Para escrever \hat{H}^{class} como uma soma explícita de uma energia cinética e potencial, utilizaremos a expansão do operador $\hat{I}^{-1/2}$ até a ordem de k^2 , ou seja, usaremos apenas os dois primeiros termos de (2.24) em (2.22) para assim chegar em

$$\hat{H}^{class} = \frac{k^2}{2(M+S)} + S + V, \quad (2.25)$$

para

$$S = -G'_\sigma{}^2 \rho_s - A' \rho_s^2 - B' \rho_s^3, \quad V = G'_\omega{}^2 \rho \quad (2.26)$$

e, usando que $(\vec{\sigma} \cdot \vec{k})^2 = k^2$. Note que o parâmetro de expansão usado na aproximação do operador $\hat{I}^{-1/2}$, pode ser conectado com x a partir da relação de dispersão do modelo dada por $E - V = \sqrt{k^2 + (M+S)^2}$. Assim, temos que $x = (\sqrt{1+z^2} - 1)/2$, onde $z^2 = k^2/(M+S)^2$. Logo, (2.23) e (2.24) são reescritos como

$$\hat{I} = 1 + \frac{z^2}{4} \quad \text{e} \quad (2.27)$$

$$\hat{I}^{-1/2} = \left(1 + \frac{z^2}{4}\right)^{-1/2} \equiv 1 - \frac{1}{8} z^2 + \frac{3}{128} z^4 + \dots \quad (2.28)$$

Se impusermos por exemplo, $z^2/4 < 0,1$ como um bom parâmetro de expansão, então x deve obrigatoriamente ser menor que 0,09, o que restringe a validade das aproximações para um intervalo de $\rho/\rho_0 \lesssim 1,4$.

Como a expressão contendo S no segundo termo de (2.25) ainda apresenta dependência de uma quantidade essencialmente relativística, a densidade escalar (veja a equação 2.26), precisamos ainda de uma aproximação para esta grandeza. Tal aproximação, feita no apêndice C, até a ordem k^2 para ρ_s e também para a densidade vetorial ρ , leva às seguintes expressões

$$\begin{aligned} \rho &= \phi^\dagger \phi + \chi^\dagger \chi = |\varphi^{class}|^2, \\ \rho_s &= \phi^\dagger \phi - \chi^\dagger \chi = \rho(1 - z^2/2) = \rho(1 - 2B_0^2 k^2), \end{aligned} \quad (2.29)$$

o que finalmente nos permite escrever o hamiltoniano \hat{H}^{class} como

$$\hat{H}^{class} = \frac{k^2}{2(M+S)} + (G'_{\omega}{}^2 - G'_{\sigma}{}^2)\rho - A'\rho^2 - B'\rho^3 + 2B_0^2 k^2 \rho (G'_{\sigma}{}^2 + 2A'\rho + 3B'\rho^2). \quad (2.30)$$

Na verdade, nosso objetivo com o uso do limite não relativístico é derivar o funcional densidade de energia dos modelos de Skyrme. Como o hamiltoniano (2.30) ainda contém resquícios da relatividade dos modelos NLPC, através do denominador $M+S$, escolhemos também usar a aproximação $M(1+S/M) \simeq M$ neste termo e em B_0 , que passa então a ser dado por $B_0 = 1/2M$. A partir deste procedimento e, usando o limite do contínuo⁸ em (2.30), chega-se finalmente na densidade de energia dos modelos NLPC em seu limite não relativístico, dada por

$$\mathcal{E}_{NR} = c_1\rho^2 + c_2\rho^3 + c_3\rho^4 + c_4(\rho)\frac{3}{40}\left(\frac{3\pi^2}{2}\right)^{2/3}\rho^{8/3} + \frac{3}{10M}\left(\frac{3\pi^2}{2}\right)^{2/3}\rho^{5/3} \quad (2.31)$$

com

$$c_1 = G'_{\omega}{}^2 - G'_{\sigma}{}^2, \quad c_2 = -A', \quad c_3 = -B', \quad \text{e} \quad c_4(\rho) = \frac{4}{M^2}(G'_{\sigma}{}^2 + 2A'\rho + 3B'\rho^2). \quad (2.32)$$

Note que a equação (2.31) apresenta dependência em ρ até a ordem 14/3, devido ao parâmetro $c_4(\rho)$.

Diferentemente da definição relativística dada na expressão (2.9), a massa efetiva do nucleon será definida nesse contexto pela sua forma usual não relativística [35], dada por

$$M^* = k \left[\frac{\partial H^{class}}{\partial k} \right]^{-1} = M \left[1 + \frac{M c_4(\rho) \rho}{4} \right]^{-1}, \quad (2.33)$$

onde ressaltamos que a aproximação $M(1+S/M) \simeq M$ foi utilizada em (2.30).

2.4.1 Resultados

De posse das expressões da densidade de energia para os modelos NLPC exatos, equação (2.7), e para seus limites não relativísticos dada em (2.31), uma questão surge de forma natural. Que resultados a equação (2.31) nos forneceria se utilizássemos em (2.32) as mesmas constantes de acoplamento, G'_{σ} , G'_{ω} , A' e B' , dos modelos de contato definidos na tabela 2.2?

Para responder essa pergunta, comparamos os observáveis calculados na densidade de saturação obtidos pelas equações do modelo NLPC exato e pelas obtidas por seu limite não rela-

⁸Também explicitado no apêndice C.

tivístico, usando em ambas as mesmas constantes de acoplamento G'_σ , G'_ω , A' e B' do modelo NL2-PC como exemplo. O resultado é desapontador já que para a energia de ligação, densidade de saturação e incompressibilidade, encontramos, com o limite não relativístico, os valores $B_e^{NR} = -52,94$ MeV, $\rho_0^{NR} = 0,160$ fm $^{-3}$ e $K^{NR} = 1059,4$ MeV, em comparação com os valores originais do modelo dados por $B_e = -17,03$ MeV, $\rho_0 = 0,146$ fm $^{-3}$ e $K = 399,2$ MeV, respectivamente. A discordância entre os valores é também verificada para outros modelos NLPC. Evitando a aproximação $M(1+S/M) \simeq M$, temos uma ligeira melhora nos resultados, porém os valores permanecem díspares. Tais análises sugerem que ordens acima de k^2 são necessárias na construção de \hat{H}^{class} mas como nosso propósito é a comparação entre o limite não relativístico dos modelos NLPC e os bem conhecidos modelos de Skyrme, em nível do funcional densidade de energia, decidimos manter os termos de ordem k^2 em \hat{H}^{class} e, para evitar a péssima concordância já descrita, procederemos daqui por diante reajustando as constantes presentes em (2.32), de modo a fazer as equações do limite não relativístico reproduzirem sempre os mesmos valores de ρ_0 , B_e , M^* e K dos modelos originais que estiverem sendo objeto de comparação.

Começando as comparações, apresentamos a densidade de energia para a matéria nuclear simétrica ($y = 1/2$) dos modelos de Skyrme [33, 35, 56], dada por

$$\mathcal{E}_{Skyrme} = \frac{3t_0}{8}\rho^2 + \frac{t_3}{16}\rho^{\sigma+2} + t\frac{3}{40}\left(\frac{3\pi^2}{2}\right)^{2/3}\rho^{8/3} + \frac{3}{10M}\left(\frac{3\pi^2}{2}\right)^{2/3}\rho^{5/3}, \quad (2.34)$$

com $t = [3t_1 + t_2(5 + 4x_2)]/2$. A partir da inspeção das equações (2.31) e (2.34), nota-se que (2.31) é uma versão generalizada da densidade de energia do modelo de Skyrme e, com isso, podemos destacar alguns casos interessantes. A saber,

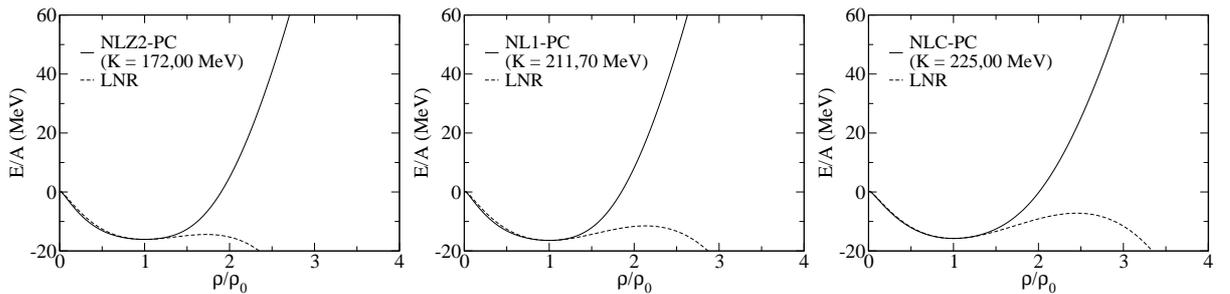
- (i) $A' = B' = 0$: Este é o caso particular em que o modelo NLPC é reduzido à sua versão linear, que por sua vez é completamente equivalente ao modelo linear de Walecka [43]. Para tal situação, a equação (2.31) que apresenta termos somente em ρ^2 , $\rho^{8/3}$ e $\rho^{5/3}$, leva às parametrizações de Skyrme onde $\sigma = 0$ ou, como no caso do modelo SV, onde $t_3 = 0$. Pelo fato de que tanto a parametrização de Skyrme SV, quanto o modelo linear de Walecka, não contém efeitos de forças de três corpos, é consistente que no presente caso, o limite não relativístico também não apresente tal fenomenologia. Como última constatação, também chega-se na parametrização de Skyrme ZR2 [57], na qual $\sigma = 2/3$, no caso em que $A' = B' = 0$.

- (ii) *Esquema de truncamento*: Truncando a expressão (2.31) até a ordem de ρ^3 , ou seja, desprezando o termo $c_3\rho^4$ e considerando que $c_4(\rho) = c_4 = 4G'_\sigma{}^2/M^2$, pode-se obter os modelos de Skyrme nos quais, simultaneamente, $\sigma = 1$ e $t \neq 0$. Na verdade tal situação engloba um amplo conjunto de modelos de Skyrme, tais como os “naturais” SI-SVI [58].
- (iii) *Modelos de Skyrme não convencionais*: Um conjunto de parametrizações de Skyrme, GS1-GS6 [59], que apresenta um termo adicional à densidade de energia (2.34), dado por $t' \frac{3}{40} \left(\frac{3\pi^2}{2}\right)^{2/3} \rho^{11/3}$ com $t' = 3t_4/2$ e $\sigma = 1$, tem sua forma funcional derivada a partir do limite não relativístico dos modelos NLPC nos quais $B = 0$, ou seja, tais modelos necessitam apenas do acoplamento até a ordem $(\bar{\psi}\psi)^3$ para gerar essas particulares parametrizações, ditas não convencionais, de Skyrme.

Ressaltamos ainda que o reajuste das constantes c_1 e c_4 no caso (i) e, c_1 , c_2 e c_4 no caso (ii) leva às correspondentes constantes t_0 , t_3 e t dos modelos de Skyrme.

Sem nenhum esquema de truncamento e, usando $A \neq 0$ e $B \neq 0$ na equação (2.31), analisaremos agora como funciona o limite não relativístico dos modelos NLPC. Tal estudo será feito nas seguintes duas etapas:

- 1^a: *Modelos relativísticos NLPC e seus respectivos limites não relativísticos*: Nesta análise, comparamos essencialmente as equações (2.7) e (2.31) para os modelos de contato listados na tabela 2.2. Como discutido anteriormente, a comparação entre os modelos se deu após o procedimento de reajuste das constantes da equação (2.32), de forma a impor que as equações de estado do limite não relativístico reproduzissem os mesmos valores de ρ_0 , B_e , M^* e K dos modelos NLPC exatos. O resultado dessa comparação está disposto na figura 2.6 a seguir, onde $E/A = \mathcal{E}/\rho - M$ para os modelos exatos NLPC e $E/A = \mathcal{E}_{NR}/\rho$ quando se trata do limite não relativístico.



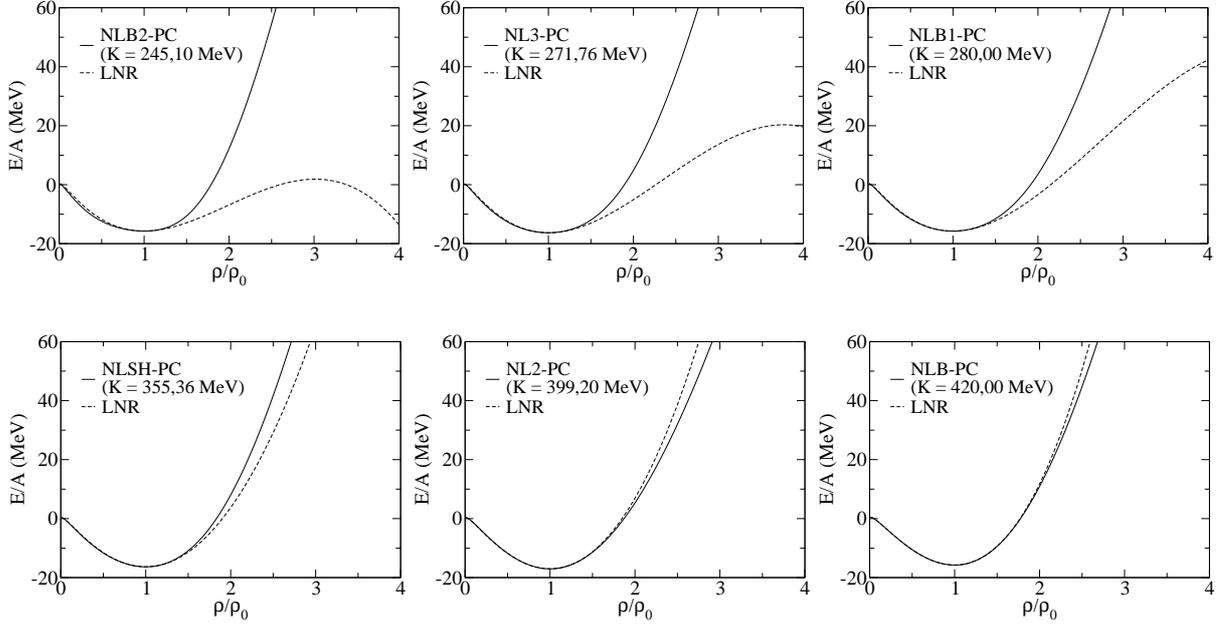


Figura 2.6: E/A como função de ρ/ρ_0 . Linhas cheias: modelos NLPC exatos, equação (2.7). Linhas tracejadas: limite não relativístico dos mesmos, equação (2.31).

2^a.: *Modelo generalizado e convencional de Skyrme*: A comparação agora é feita entre as equações (2.31) e (2.34) e mostrada na figura 2.7. O estudo foi feito com as seguintes parametrizações de Skyrme: PRC45 [57], SIII [58], SV [58], SGI [60], SkMP [61] e SLy230a [35]. Naturalmente, os parâmetros G'_σ , G'_ω , A' e B' foram reajustados, seguindo a discussão já realizada anteriormente.

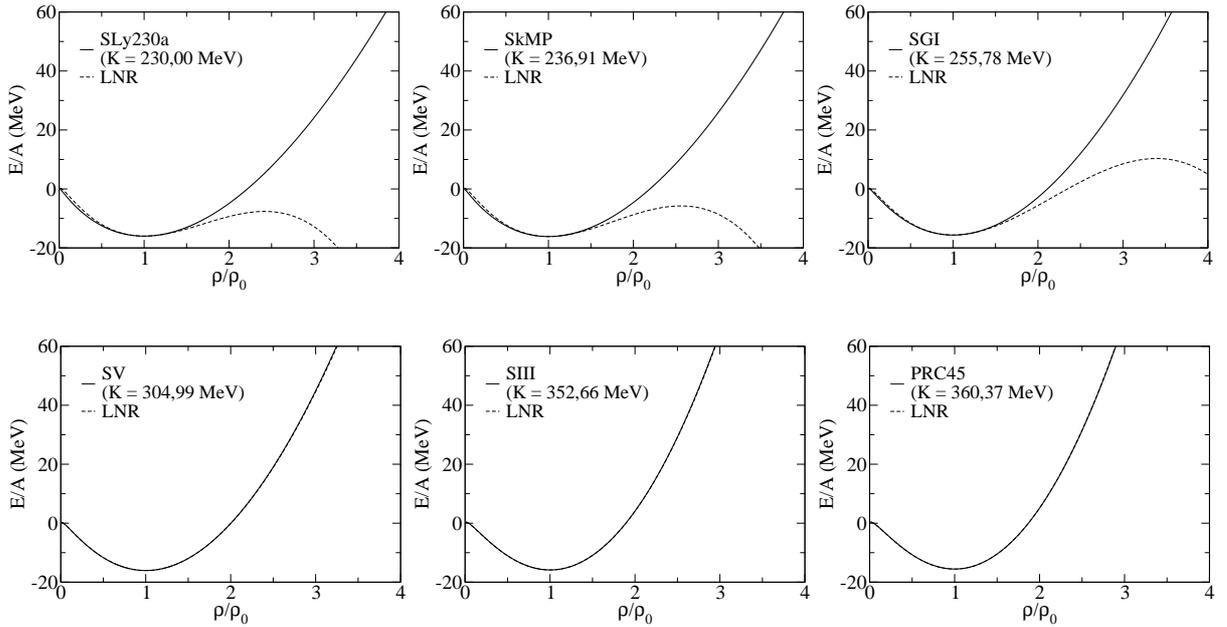


Figura 2.7: E/A como função de ρ/ρ_0 . Linhas cheias: modelos convencionais de Skyrme, equação (2.34). Linhas tracejadas: densidade de energia calculada segundo a equação (2.31).

As figuras 2.6 e 2.7 mostram que a densidade de energia do limite não relativístico, equação (2.31), funciona muito bem para todos os modelos, até densidades próximas à densidade de saturação ρ_0 . Outro fato interessante mostrado pelas figuras, é que o valor da incompressibilidade dos modelos, tanto os NLPC quanto os de Skyrme, parece controlar a região de validade do limite não relativístico. Quanto maior a incompressibilidade, melhor torna-se o limite no que diz respeito à descrição da matéria nuclear simétrica. Especialmente para a comparação feita na figura 2.7, isso significa dizer que o modelo generalizado de Skyrme, equação (2.31), comporta-se exatamente como um modelo convencional, equação (2.34), quando a incompressibilidade da parametrização analisada é alta. Mesmo ampliando o conjunto de modelos NLPC e de Skyrme, verifica-se que os resultados exibidos nas figuras 2.6 e 2.7 permanecem os mesmos, ou seja, a qualidade do limite não relativístico para $\rho > \rho_0$ continua sendo completamente determinada pelo valor de K da mesma forma como discutido. Podemos assim concluir que K é uma grandeza determinante para afirmarmos que o limite não relativístico dos modelos NLPC, tomado até a ordem k^2 , dará bons resultados quando o compararmos com os NLPC exatos, ou com as parametrizações de Skyrme.

Outro estudo realizado com o limite não relativístico dos modelos NLPC, foi o cálculo de seus coeficientes adimensionais, com o propósito de verificar a naturalidade das parametrizações construídas a partir da \hat{H}^{class} , equação (2.30). Os resultados, publicados em [62], mostram que modelos de incompressibilidade baixa tendem a ser mais naturais.

3 Modelos não lineares de Walecka em temperatura finita

Neste capítulo trataremos de um fenômeno presente em muitas áreas da Física, a transição de fases. Estudaremos de forma qualitativa e quantitativa como tal efeito se faz presente na Física Nuclear, em particular nos modelos hadrônicos apresentados no capítulo 1. Basicamente, dois tipos de transição de fases serão analisados, um que trata dos modelos no regime de baixas temperaturas ($T \lesssim 20$ MeV), onde espera-se a exibição do comportamento típico de um gás de van der Waals no que diz respeito à transição de fases do tipo líquido-gás, e outro que ocorre somente em altas temperaturas ($180 < T < 200$ MeV) e é dividido em dois processos físicos distintos: o formado pela transição nucleon - plasma de nucleons e antinucleons, e o descrito pela transição do tipo hádron - plasma de quarks e glúons. O primeiro, termodinamicamente caracterizado pela mudança abrupta da massa efetiva em função da temperatura, será estudado ainda neste capítulo. O último será abordado no capítulo 4, onde um modelo próprio para a descrição da termodinâmica de quarks interagentes é apresentado e utilizado juntamente com os modelos não lineares de Walecka para a realização da transição de fases propriamente dita. Todo o estudo das transições de fases mostrado aqui será realizado para a matéria nuclear simétrica, $y = 1/2$, com os principais resultados contidos neste capítulo publicados em [25, 63]. A extensão do estudo das transições de fases do tipo líquido-gás para sistemas assimétricos pode ser encontrada por exemplo nas publicações [64, 65] e, de uma forma mais detalhada, em [33, 66] onde os modelos não lineares de Walecka são comparados com os também amplamente usados modelos não relativísticos de Skyrme.

3.1 Equações de estado

Antes de iniciar esse estudo, é preciso adicionar às equações de estado dos modelos não lineares, a variável termodinâmica temperatura. Esse procedimento é realizado com detalhes nas referências [44, 67]. De forma qualitativa, tem-se que o tensor T_{00} , obtido via (1.26) é

usado para a determinação do operador hamiltoniano, $\hat{H} = \int T_{00} d^3x$, para a partir daí calcular-se a grande função de partição, $Z_G = \text{Tr} \left[e^{-(\hat{H} - \mu \hat{N})/T} \right]$ com \hat{N} sendo o operador número de partículas. Daí obtém-se finalmente o grande potencial termodinâmico por volume, dado por¹,

$$\begin{aligned} \frac{\Omega}{V} &= \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{A}{3} \sigma^3 + \frac{B}{4} \sigma^4 - \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 - \frac{c}{4} (g_\omega^2 \omega_0^2)^2 + g_\sigma g_\omega^2 \sigma \omega_0^2 \left(\alpha_1 - \frac{1}{2} \alpha_1' g_\sigma \sigma \right) \\ &+ \frac{\gamma T}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 dk \left\{ \ln[1 + e^{-(E^* - \nu)/T}] + \ln[1 + e^{-(E^* + \nu)/T}] \right\}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

com $\nu \equiv \mu - g_\omega \omega_0$ sendo o potencial químico efetivo do sistema. A partir de (3.1) todas as demais quantidades termodinâmicas do sistema são obtidas. A mais direta delas, a pressão, é dada simplesmente pelo negativo de Ω/V , resultando em

$$\begin{aligned} P &= -\frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 - \frac{A}{3} \sigma^3 - \frac{B}{4} \sigma^4 + \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 + \frac{c}{4} (g_\omega^2 \omega_0^2)^2 - g_\sigma g_\omega^2 \sigma \omega_0^2 \left(\alpha_1 - \frac{1}{2} \alpha_1' g_\sigma \sigma \right) \\ &+ \frac{\gamma}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^4 dk}{(k^2 + M^*)^{1/2}} [f(k, T, \nu) + \bar{f}(k, T, \nu)], \end{aligned} \quad (3.2)$$

com

$$f(k, T, \nu) = \frac{1}{e^{(E^* - \nu)/T} + 1} \quad \text{e} \quad \bar{f}(k, T, \nu) = \frac{1}{e^{(E^* + \nu)/T} + 1}, \quad (3.3)$$

para $E^* = (k^2 + M^{*2})^{1/2}$, sendo, respectivamente, as funções de distribuição de Fermi-Dirac de partículas e antipartículas. As demais quantidades termodinâmicas são obtidas via derivadas de (3.1). São elas, a densidade bariônica, calculada através de

$$\rho = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right) = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 dk [f(k, T, \nu) - \bar{f}(k, T, \nu)], \quad (3.4)$$

a densidade de energia,

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= -\frac{T^2}{V} \frac{\partial(\Omega/T)}{\partial T} + \mu \rho \\ &= \frac{1}{2} m_\sigma^2 \sigma^2 + \frac{A}{3} \sigma^3 + \frac{B}{4} \sigma^4 - \frac{1}{2} m_\omega^2 \omega_0^2 - \frac{c}{4} (g_\omega^2 \omega_0^2)^2 + g_\sigma g_\omega^2 \sigma \omega_0^2 \left(\alpha_1 - \frac{1}{2} \alpha_1' g_\sigma \sigma \right) \\ &+ g_\omega \omega_0 \rho + \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 (k^2 + M^*)^{1/2} dk [f(k, T, \nu) + \bar{f}(k, T, \nu)] \end{aligned} \quad (3.5)$$

e a densidade de entropia dada por,

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} \right) = -\frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 dk [f \ln f + (1-f) \ln(1-f) + \bar{f} \ln \bar{f} + (1-\bar{f}) \ln(1-\bar{f})] \quad (3.6)$$

¹Já fazendo uso de $y = 1/2$. Note que tal consideração leva a $\bar{\rho}_0 = 0$ (veja a equação de campo 1.21).

O cálculo numérico das equações de estado apresentadas é feito da seguinte forma. Para cada temperatura T e potencial químico efetivo ν dados, deve-se resolver simultaneamente a equação autoconsistente da massa efetiva, que agora é dada por

$$M^* = M - G_\sigma^2 [\rho_s + a(\Delta M)^2 + b(\Delta M)^3 + g_\omega^2 \omega_0^2 (\alpha_1 - \alpha_1' \Delta M)], \quad (3.7)$$

com a densidade escalar, também dependente de T e ν , escrita como

$$\rho_s = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial M^*} \right) = \frac{\gamma M^*}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{(k^2 + M^{*2})^{1/2}} [f(k, T, \nu) + \bar{f}(k, T, \nu)] \quad (3.8)$$

e, a equação (1.20) do campo ω_0 , lembrando que o campo $\bar{\rho}_0$ é identicamente nulo no caso da matéria nuclear simétrica. Com as soluções de M^* (até 3 são possíveis) e ω_0 encontradas, todas as demais equações de estado, que dependem de M^* (ou $\sigma = \Delta M/g_\sigma$), ω_0 , T e ν , são determinadas.

Note ainda que a inclusão da temperatura na densidade de energia, pressão, densidade e densidade escalar, preserva a estrutura dessas grandezas com relação ao caso $T = 0$. A única mudança é feita nas integrais das respectivas quantidades termodinâmicas que agora são calculadas desde $k = 0$ até $k = \infty$, com os integrandos multiplicados pela soma das distribuições de Fermi-Dirac de partículas e antipartículas, exceto no caso da densidade, onde a diferença entre as mesmas é levada em conta. Todos os resultados que serão apresentados a seguir, foram obtidos através do cálculo numérico de tais integrais, que para o caso $T = 0$ são analíticas. Uma alternativa a este procedimento é o uso da expansão de Sommerfeld, cuja aplicação para o modelo linear de Walecka está publicada em [68, 69].

3.2 Transição de fases em baixas temperaturas

Conjecturas acerca da existência de uma transição de fases do tipo líquido-gás na Física Nuclear [70] têm sido corroboradas por fortes evidências experimentais divulgadas na literatura. Uma delas, é oriunda de processos de multifragmentação nuclear que ocorre por exemplo em reações do tipo $p + Xe$ e $p + Kr$ [71], onde o produto final, os chamados fragmentos intermediários de massa (IMF da sigla em inglês²), apresentam uma distribuição do tipo lei de potência. Este tipo de distribuição é considerado como um dos sinais deixados pela transição [72, 73, 74]. Em experimentos de colisões de íons pesados, outra evidência experimental da assinatura de

²Intermediate mass fragments.

uma transição de fases, é identificada a partir da análise da chamada curva calórica do sistema, ou seja, a curva temperatura em função da energia de excitação dos núcleos. O “plateau” exibido por esta curva é característica de sistemas que apresentam transição de fases, nesse caso de primeira ordem [75, 76]. Tais estudos também são feitos com o uso dos bem-sucedidos modelos de fragmentação, propostos por exemplo nas referências [77].

No regime de temperatura finita, é bem estabelecido que modelos hadrônicos, dentre os quais os modelos não lineares de Walecka, contemplem transições de fase em temperaturas moderadas [78] e muito altas [79, 80]. Todos prevêem que a transição de fases do tipo líquido-gás ocorre na matéria nuclear simétrica e assimétrica [78] em aproximadamente $T < 20$ MeV e $\rho < 0,1 \text{ fm}^{-3}$. Qualitativamente, as isotermas desses modelos hadrônicos exibem tipicamente o comportamento do modelo de van der Waals, onde as fases líquida e gasosa coexistem. Em termos dos campos da teoria, tal comportamento pode ser descrito da seguinte maneira. Para baixas densidades, a pressão comporta-se como um gás ideal, cuja dependência em ρ é dada por $P = \rho T$ e, à medida que a densidade aumenta, o campo escalar σ torna-se mais significativo e, devido a sua natureza atrativa, força a diminuição da pressão até o momento em que a parte repulsiva da interação, dada pelo campo ω , torna-se dominante, causando então seu aumento novamente. A figura 3.1 mostra tal comportamento, em $T = 10$ MeV, para o modelo NL3.

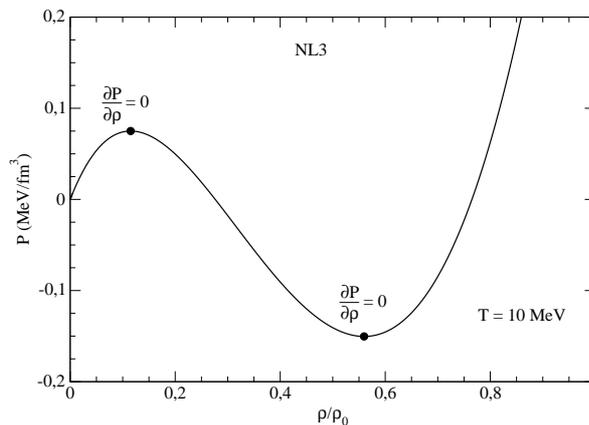


Figura 3.1: Pressão em função da razão ρ/ρ_0 para o modelo NL3 em $T = 10$ MeV.

Note que a isoterma apresentada na figura anterior possui dois pontos chamados spinodais, que representam os limites da região de instabilidade mecânica do sistema e satisfazem à condição $\partial P/\partial \rho = 0$. A curva interna delimitada por esses pontos corresponde à situação não física na qual $\partial P/\partial \rho < 0$, ou seja, região onde o aumento da pressão causa a diminuição da densidade, ou equivalentemente, o aumento do volume do sistema. À medida que a temperatura do

sistema aumenta, os pontos spinodais se aproximam uns dos outros até que colapsem completamente quando atinge-se a temperatura crítica T_c . Assim, pode-se classificar o ponto crítico como um ponto limite da família dos pontos spinodais. A influência do aumento da temperatura é mostrada, para o modelo NLSH, na figura 3.2 a seguir.

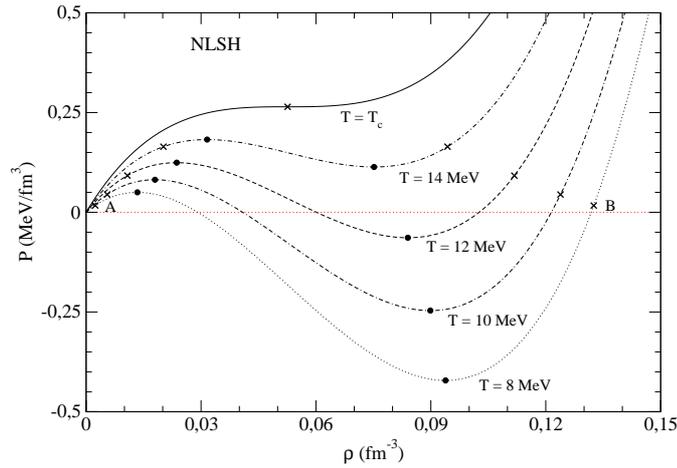


Figura 3.2: Pressão em função da densidade para o modelo NLSH em várias temperaturas. Círculos: pontos spinodais. Cruzes: pontos de coexistência.

Os pontos de coexistência são determinados pelo critério de Gibbs, que exige

$$T_A = T_B, \quad P_A(\rho_A) = P_B(\rho_B) \quad \text{e} \quad \mu_A(\rho_A) = \mu_B(\rho_B), \quad (3.9)$$

nas fases líquida e gasosa representadas pelos pontos B e A . Em sistemas simétricos, tal procedimento leva naturalmente à construção de Maxwell³. Note que os pontos spinodais são sempre internos aos pontos de coexistência, ou seja, $\rho_A < \rho_{sp} < \rho_B$, com ρ_{sp} caracterizando as densidades spinodais. Assim, a curva spinodal posiciona-se dentro da curva de coexistência e, a região compreendida entre as duas é chamada de região metaestável do sistema. No caso particular em que a temperatura crítica é atingida, onde $T = T_c$, $\rho_A = \rho_{sp} = \rho_c = \rho_B$, a região metaestável desaparece.

Apresentaremos agora os resultados referentes aos modelos não lineares de Walecka tratados nesta tese. Primeiramente, mostramos na tabela 3.1 seus parâmetros críticos (em ordem decrescente de T_c) juntamente com a quantidade $P_c/\rho_c T_c$. Tal grandeza, que possui o valor de

³A situação é modificada em sistemas de dois ou mais componentes. Nos sistemas nucleares binários por exemplo, onde prótons são distinguidos dos nêutrons ($y \neq 1/2$), tem-se que a construção de Maxwell deve ser generalizada de modo que a condição de pressões iguais nas fases distintas não mais se realiza de forma isotérmica [30, 33, 66].

0,375 para o modelo de van der Waals, é dita universal para o mesmo, já que não depende dos parâmetros ajustados de cada fluido particular. Esse fato é uma consequência direta da lei dos estados correspondentes, no sentido em que expressa em termos das variáveis reduzidas $P' = P/P_c$, $\rho' = \rho/\rho_c$ e $T' = T/T_c$, a equação de van der Waals não apresenta dependência explícita dos parâmetros de cada fluido. Também mostramos na mesma tabela para todos os modelos, os valores da massa efetiva crítica escalonada pela massa do nucleon, $m_c^* = M_c^*/M$.

Modelo	T_c (MeV)	ρ_c (fm $^{-3}$)	P_c (MeV/fm 3)	$\frac{P_c}{\rho_c T_c}$	m_c^*
NL2	18,63	0,0562	0,3616	0,345	0,861
Walecka	18,34	0,0659	0,4382	0,363	0,792
NLB	17,53	0,0595	0,3573	0,343	0,835
NLSH	15,96	0,0526	0,2644	0,315	0,846
TM1	15,62	0,0486	0,2372	0,312	0,875
TM2	15,40	0,0480	0,2367	0,320	0,828
NLB1	15,27	0,0535	0,2462	0,301	0,864
FSUGold	14,75	0,0461	0,2054	0,302	0,844
NL3	14,64	0,0463	0,2020	0,298	0,864
MS	14,40	0,0466	0,2010	0,299	0,854
NLC	14,20	0,0443	0,1854	0,295	0,878
NLB2	13,95	0,0472	0,1916	0,291	0,862
NL1	13,74	0,0413	0,1644	0,290	0,872
NLZ2	13,39	0,0391	0,1514	0,289	0,881

Tabela 3.1: Parâmetros críticos dos modelos não lineares de Walecka.

Na figura 3.3, apresentamos as isotermas P/P_c , em função da densidade reduzida, ρ/ρ_c , dos mesmos modelos indicados na tabela anterior. Todas as curvas para $T = T_c$.

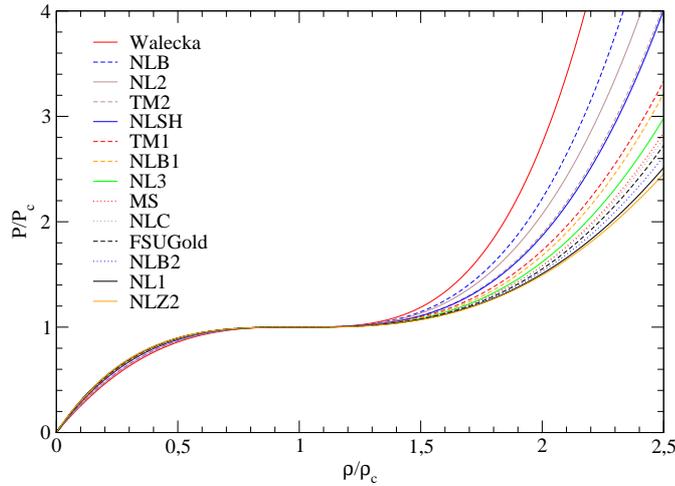


Figura 3.3: Pressão versus densidade para $T = T_c$, em unidades de P_c e ρ_c , respectivamente.

Note como os modelos são praticamente indistinguíveis na região gasosa, onde $\rho/\rho_c < 1$.

3.2.1 Curvas de coexistência e spinodais

O diagrama de fases dos modelos hadrônicos é mostrado na figura 3.4, onde as curvas de coexistência foram obtidas em termos das quantidades reduzidas, T/T_c e ρ/ρ_c .

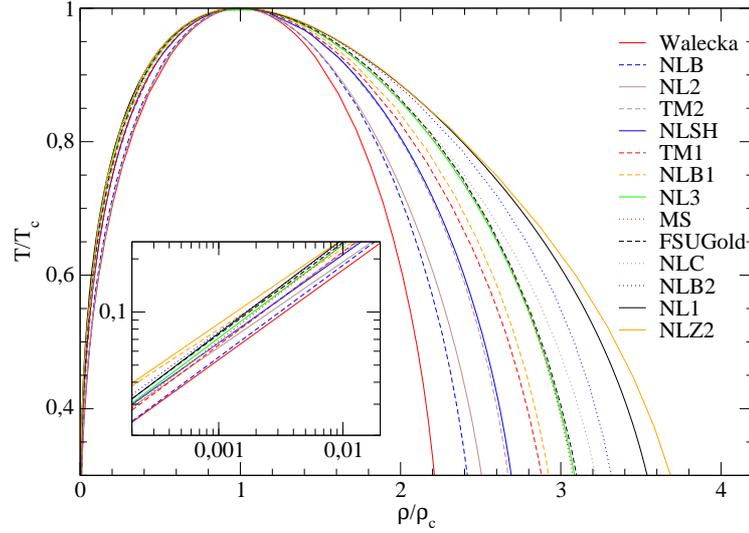


Figura 3.4: Curvas de coexistência escalonadas por T_c e ρ_c . O painel interno é a curva, em escala logarítmica, de $\rho/\rho_c - 1$ versus $1 - T/T_c$ na vizinhança do ponto crítico ($1 < \rho/\rho_c \leq 1,25$ e $0,98 \leq T/T_c < 1$) para os mesmos modelos.

Novamente como no caso da figura 3.3, nota-se que no intervalo $\rho/\rho_c < 1$ as curvas escalonadas são independentes de modelos. No regime de densidades pequenas, os nucleons estão relativamente afastados uns dos outros e, conseqüentemente, as interações são menos significativas. Na região onde a fase é líquida, $\rho/\rho_c > 1$, os nucleons aproximam-se progressivamente uns dos outros à medida que a densidade aumenta, permitindo assim que as interações tornem-se cada vez mais importantes, o que é refletido na dependência de modelos exibida pelas curvas de coexistência. Ainda na figura 3.4, mostramos no painel interno como os modelos hadrônicos comportam-se na medida em que se aproximam do ponto crítico dado por $\rho/\rho_c = T/T_c = 1$. Tal evolução é conhecida para a teoria de campo-médio, sendo a forma funcional do parâmetro de ordem ρ em termos da temperatura dada por

$$\frac{\rho}{\rho_c} - 1 = C_{coe} \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^\beta, \quad (3.10)$$

onde C_{coe} é uma constante e β um expoente crítico do sistema [81, 82]. O valor de β é conhecido e igual a $1/2$ para os mais distintos modelos, tais como o de van der Waals para fluidos e o

de Ising para spins, mostrando assim a propriedade da universalidade que é característica de um expoente crítico. Outros expoentes críticos bastante usados, designados por $\alpha = 0$, $\gamma = 1$ e $\delta = 3$ são, respectivamente, associados com o calor específico, a incompressibilidade e a pressão quando o sistema tratado é um fluido. Da mesma forma pode-se também definir os chamados expoentes spinodais ao analisar-se a evolução do sistema quando este se aproxima de um ponto spinodal. Nesse caso $\alpha = \beta = \gamma = 1/2$ e $\delta = 2$. Cálculos analíticos para a determinação dos expoentes críticos e spinodais foram realizados para um modelo de Skyrme na referência [83]. Para os modelos em estudo, encontramos o expoente crítico β distribuído no intervalo $0,46 \leq \beta \leq 0,55$.

Para efeito de comparação com a região de coexistência, um estudo sobre os pontos spinodais também foi realizado. Sabe-se que as interações de van der Waals e de Skyrme geram equações de estado que obedecem à lei dos estados correspondentes quando expressos em termos das variáveis reduzidas P/P_c , ρ/ρ_c e T/T_c . De forma análoga, também é possível obter uma lei equivalente para tais interações, se as quantidades termodinâmicas forem escalonadas agora com as respectivas grandezas calculadas no ponto spinodal, gerando assim o conjunto P/P_{sp} , ρ/ρ_{sp} e T/T_{sp} [83]. Tal fato nos levou à realização do mesmo estudo apresentado nas figuras 3.3-3.4 para os modelos já discutidos. Este estudo foi feito para um ponto spinodal particular, o ponto flash, também chamado de ponto de estabilidade, no qual ambos, pressão e sua derivada em relação à densidade anulam-se. Como consequência, a incompressibilidade e a velocidade do som são iguais a zero.

Para cada modelo, pode-se definir temperatura flash (T_f) e densidade flash (ρ_f). Define-se T_f como sendo a temperatura máxima na qual o equilíbrio hidrostático é ainda possível. O equilíbrio hidrostático tratado aqui é caracterizado pelo valor nulo da pressão do sistema, que ocorre sempre para $T \leq T_f$ em $\rho \geq \rho_f$. Nesta temperatura T_f , a energia livre de Helmholtz apresenta um ponto de inflexão e, para valores acima de T_f não mais apresenta um mínimo, levando então a matéria nuclear a deixar de exibir ligação. Os parâmetros flash dos modelos hadrônicos são mostrados na tabela 3.2. Tais parâmetros, críticos e flash, também obtidos para algumas parametrizações de Skyrme podem ser encontrados na publicação disponível em [84].

No particular ponto spinodal, as variáveis escalonadas são agora $P/\rho_f T_f$, ρ/ρ_f e T/T_f [83]. Note que um escalonamento da pressão pelo seu valor em $\rho = \rho_f$ não é possível, já que neste ponto temos que $P = 0$. Esta foi a razão pela escolha da quantidade $\rho_f T_f$, de mesma dimensão da pressão, para o caso do ponto spinodal [83]. Veja ainda que $T_f < T_c$ para todos os modelos

hadrônicos. Devido a isso e, já que o valor experimental da temperatura no qual os sinais de criticalidade se apresentam é menor que aqueles previstos pelos modelos hadrônicos para T_c , o autor de [85] sugere que o ponto flash pode descrever melhor a natureza dos fenômenos críticos observados na física nuclear do que o próprio ponto caracterizado por (ρ_c, T_c, P_c) .

Modelos	T_f (MeV)	ρ_f (fm $^{-3}$)	m_f^*	$\frac{T_f}{T_c}$	$\frac{\rho_f}{\rho_c}$	$\frac{m_f^*}{m_\pi^*}$
NL2	14,30	0,0838	0,798	0,7676	1,49	0,927
Walecka	14,18	0,0944	0,703	0,7732	1,43	0,888
NLB	13,58	0,0879	0,759	0,7747	1,48	0,909
NLSH	12,70	0,0813	0,767	0,7957	1,55	0,907
TM1	12,40	0,0765	0,790	0,7939	1,57	0,903
TM2	12,30	0,0739	0,742	0,7987	1,54	0,896
NLB1	12,22	0,0852	0,790	0,8003	1,59	0,914
FSUGold	11,89	0,0748	0,764	0,8061	1,62	0,905
NL3	11,82	0,0751	0,787	0,8073	1,62	0,911
MS	11,62	0,0758	0,773	0,8069	1,63	0,905
NLC	11,44	0,0724	0,808	0,8056	1,63	0,920
NLB2	11,35	0,0786	0,778	0,8136	1,67	0,903
NL1	11,20	0,0693	0,794	0,8151	1,68	0,911
NLZ2	10,90	0,0658	0,807	0,8140	1,68	0,916

Tabela 3.2: Parâmetros flash dos modelos não lineares de Walecka.

A lei dos estados correspondentes para as variáveis reduzidas pelos parâmetros flash é mostrada para os modelos não lineares na figura 3.5. Note que parte considerável das isotermas está dentro da região onde os modelos são distinguíveis, devido ao fato de que $\rho_f > \rho_c$ (veja as figuras 3.3 e 3.4). Isso explica porque o colapso das curvas é tão restrito nesse caso.

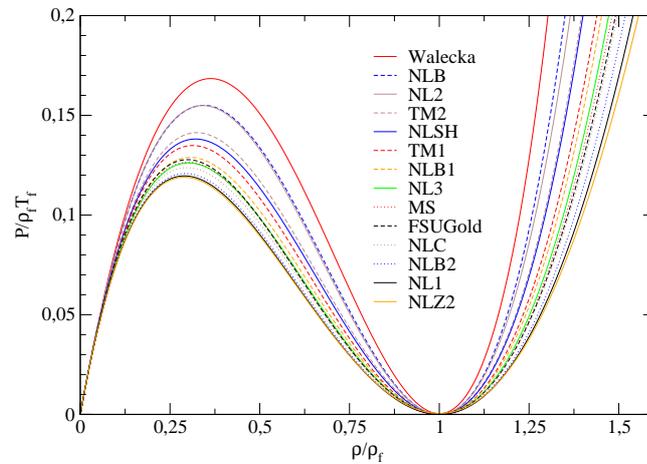


Figura 3.5: Isotermas para $T = T_f$, nas variáveis termodinâmicas escalonadas pelos parâmetros flash.

Para as curvas spinodais escalonadas da figura 3.6, não há colapso mesmo na região gasosa

descrita pelos modelos.

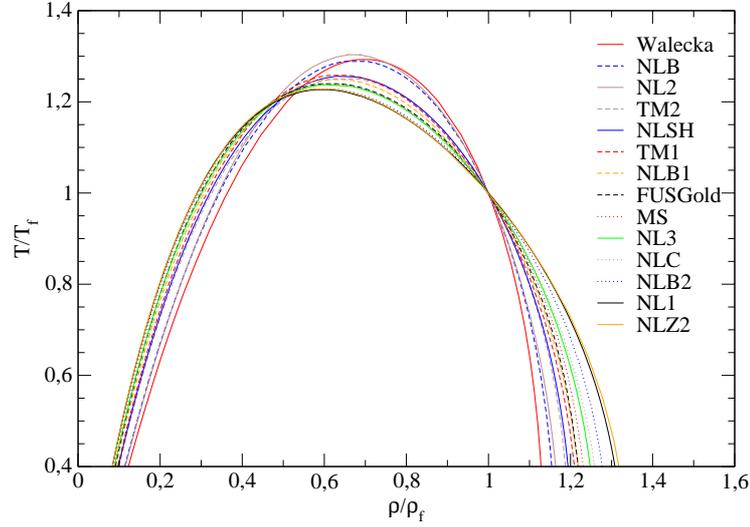


Figura 3.6: Curvas spinodais T/T_f versus ρ/ρ_f .

Os pontos spinodais definem os limites da região de instabilidade e por essa razão tal colapso não é esperado, já que o início da instabilidade é diretamente relacionado com a forma da interação, nesse caso dada por cada parametrização em particular. Na verdade, o colapso ocorre apenas para $T/T_f = \rho/\rho_f = 1$.

3.2.2 Incompressibilidade

Finalizando o estudo da transição de fases em baixas temperaturas, analisamos agora a incompressibilidade isotérmica, $K(T)$, dos modelos não lineares, comparando seu comportamento nos seguintes cenários distintos, propostos em [85]:

- (i) considerando um sistema metaestável onde a pressão é nula e,
- (ii) em um sistema em equilíbrio de fases líquido-gás no qual aplica-se a construção de Maxwell.

Para isso, calculamos a incompressibilidade através da expressão

$$K(T) = 9 \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_{\rho=\bar{\rho}}, \quad (3.11)$$

onde $\bar{\rho}$ depende do cenário escolhido. No primeiro, $\bar{\rho}$ corresponde à densidade na qual o sistema encontra-se na região delimitada pela curvas spinodal e de coexistência e, ainda satisfa-

zendo a condição adicional de pressão nula. Voltando à figura 3.2, note que para cada isoterma, dois são os pontos possíveis nos quais $P = 0$, porém a exigência de ser um ponto metaestável determina de forma única a densidade $\bar{\rho}$. Nessa figura, é possível localizar três desses pontos, são eles $\bar{\rho} = 0, 13, 0, 12$ e $0, 10 \text{ fm}^{-3}$ para $T = 8, 10$ e 12 MeV , respectivamente. A temperatura limite na qual pode-se achar $\bar{\rho}$ neste contexto é a temperatura flash, T_f . No segundo cenário, $\bar{\rho}$ é definida como sendo uma das densidades na qual coexistem as fases líquida e gasosa do sistema. Pela construção de Maxwell, tem-se que para cada isoterma há duas densidades distintas, ρ_A e ρ_B , que compartilham a mesma pressão, $P = P_A = P_B$ e, nessa situação a incompressibilidade é calculada especificamente no ponto $\bar{\rho} = \rho_B$, ou seja, na densidade fronteira da fase líquida. Novamente, na figura 3.2 tais densidades são identificadas como as abscissas das cruzes mais à direita.

A curva da incompressibilidade escalonada pelo seu valor em $T = 0$ é mostrada na figura 3.7, em função de T/T_f , para os modelos hadrônicos estudados e, para efeito de comparação, alguns outros que se utilizam de cálculos microscópicos de Hartree-Fock baseados em interações nucleon-nucleon locais [86, 87]. Note que todos os pontos parecem colapsar em uma banda estreita.

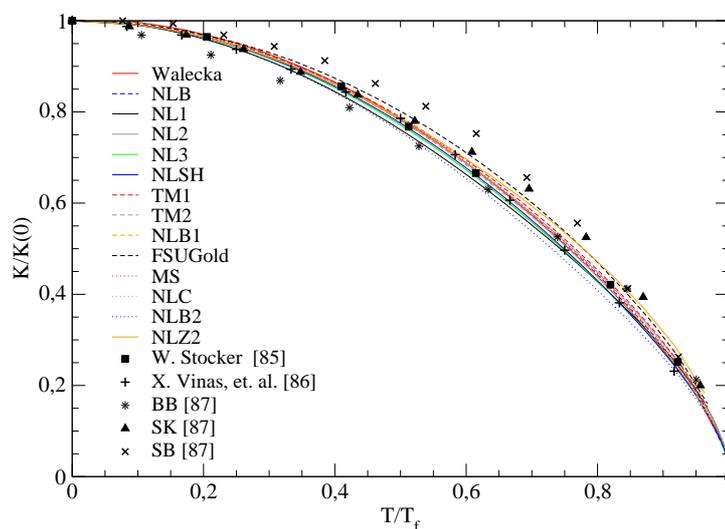


Figura 3.7: Incompressibilidade isotérmica, em unidades de $K(T = 0)$, versus temperatura, em unidades de T_f , para o sistema descrito no cenário (i).

O mesmo estudo é apresentado para o cenário (ii), no qual $K(T)$ é calculado nas densidades fronteiras da fase líquida do sistema, que neste caso coexiste com a fase gasosa. Os resultados são mostrados na figura 3.8.

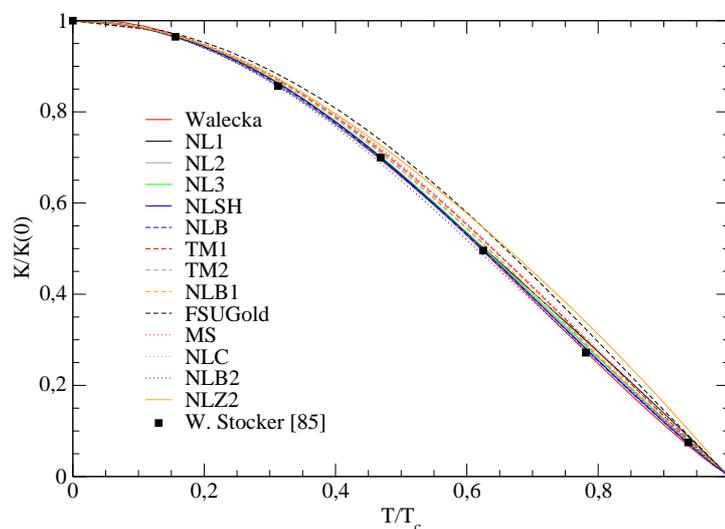


Figura 3.8: Incompressibilidade isotérmica, em unidades de $K(T = 0)$, versus temperatura, em unidades de T_c , para o sistema descrito no cenário (ii).

Também no cenário (ii) verifica-se o colapso de todos os modelos hadrônicos estudados, incluindo o extraído da referência [85] que trata de um modelo não relativístico. As figuras ainda mostram que as duas abordagens levam à $K(T) = 0$ para $T = T_f$ e $T = T_c$, respectivamente. Na temperatura flash esse resultado pode ser verificado imediatamente, já que nessa isoterma em particular $\bar{\rho} = \rho_f$, logo, calcula-se a incompressibilidade exatamente em um ponto spinodal onde por definição $\partial P / \partial \rho = 0$. O caso em que $K(T_c) = 0$ é visualmente identificado na figura 3.3, onde nota-se que no ponto $\rho / \rho_c = P / P_c = 1$ todas as isotermas apresentam $\partial P / \partial \rho = 0$ já que trata-se de um ponto de inflexão horizontal. Assim, tem-se que ambas temperaturas, T_f e T_c apresentam sinais de fragmentação já que anulam a incompressibilidade dos modelos.

O comportamento exibido nas figuras 3.7 e 3.8 mostra-se intrigante no sentido em que para ambos os cenários discutidos, as densidades usadas para o cálculo da incompressibilidade isotérmica estão sempre dentro da região líquida do sistema ($\bar{\rho} > \rho_c$) onde, segundo o resultado mostrado nas figuras 3.4 e 3.6, a dependência de modelos deveria se manifestar. O que se nota inesperadamente é um escalonamento dos variados modelos hadrônicos usados mesmo em tal contexto. O mesmo comportamento também já foi verificado na referência [88], onde o estudo referente ao escalonamento da incompressibilidade é feito para o modelo linear de Walecka, porém comparando suas previsões também em uma e duas dimensões.

3.3 Transição de fases em altas temperaturas

O estudo da transição de fases no regime extremo de altas temperaturas que abordaremos nesta seção, foi inicialmente proposto na referência [79] e basicamente realizado para o modelo de Walecka. Neste trabalho, os autores verificam a existência de uma transição cuja ordem depende essencialmente das constantes de acoplamento escolhidas para o modelo. No caso particular do modelo de Walecka, a variação de tais constantes (duas apenas) leva à diferentes escolhas para a densidade de saturação e energia de ligação da matéria nuclear. Tal transição é caracterizada pela variação da massa efetiva do nucleon em função da temperatura. A análise em [79] foi realizada no regime de igual número de nucleons (N) e antinucleons (\bar{N}), ou seja, em $\nu = \mu = \rho = 0^4$. Recentemente, os autores de [89] estenderam tal estudo para o caso no qual $N \neq \bar{N}$, ou seja, em densidades não nulas. Nesta seção submeteremos os modelos hadrônicos não lineares já usados anteriormente ao estudo do diagrama de fases no plano $T \times \mu$, mostrado em [89] para o modelo linear de Walecka.

Como análise inicial, mostramos na figura 3.9 como a massa efetiva dos modelos não lineares comporta-se em função da temperatura na região $180 < T < 205$ MeV para $\nu = \mu = \rho = 0$.

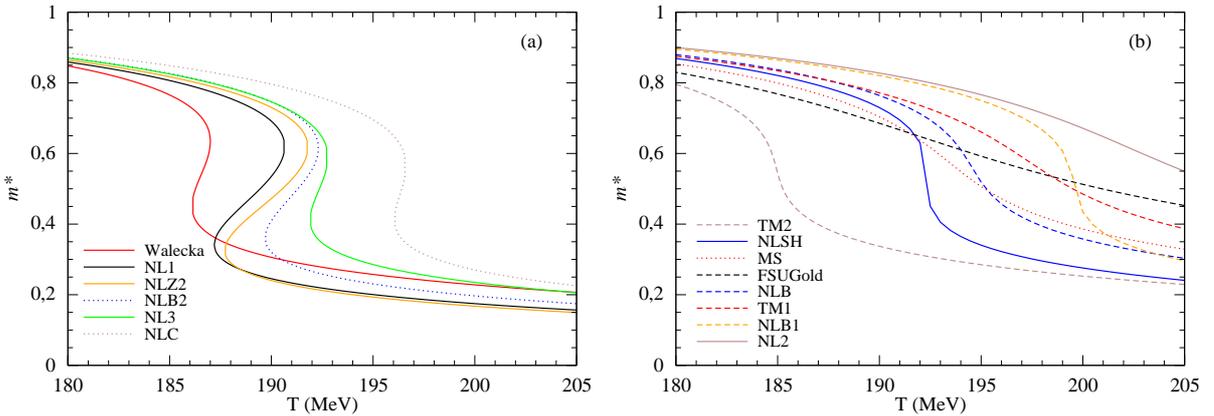


Figura 3.9: Massa efetiva escalonada pela massa do nucleon como função da temperatura para os modelos não lineares em $\nu = \mu = \rho = 0$.

Note que apenas 6 dos 14 modelos analisados apresentam os sinais inerentes a uma transição de primeira ordem, no caso, a mudança abrupta da massa efetiva em função da temperatura.

⁴Note pela expressão (3.4) que $\nu = 0$ é o único valor no qual $\rho = 0$ e, identificando (3.4) como a diferença entre as densidades de nucleons e antinucleons, temos nesse caso que $N = \bar{N}$.

Veja que as curvas mostradas na figura 3.9a sugerem até 3 valores diferentes de $m^* = M^*/M$ em uma faixa pequena de temperatura, o que não ocorre para os modelos exibidos na figura 3.9b. Nessa região particular, deve-se encontrar a temperatura na qual há coexistência de fases e esse será o procedimento realizado para os modelos da figura 3.9a com o objetivo da construção do diagrama de fases no plano $T \times \mu$, seguindo o método adotado nas referências [89, 90] e descrito a seguir.

Primeiramente, deve ser ressaltado que o procedimento numérico adotado para o cálculo do grande potencial (3.1) e das demais quantidades termodinâmicas dadas em (3.4), (3.5) e (3.6), passa pela solução simultânea das equações (3.7) e (1.20) como já mencionado ao final da seção 3.1. Porém, uma alternativa a esse método é fazer uso de uma forma equivalente de se obter as soluções de (3.7) e (1.20), sabendo que M^* e ω_0 devem satisfazer às condições $\partial\Omega/\partial M^* = \partial\Omega/\partial\omega_0 = 0$. Ou seja, tanto M^* (ou σ) quanto ω_0 são extremos do grande potencial termodinâmico $\Omega = -P$. Para a obtenção do diagrama de fases, utilizaremos essa abordagem porém, resolvendo a equação de campo (1.20) e buscando através do gráfico $\Omega \times m^*$ os valores de massa efetiva que resultam em $\partial\Omega/\partial m^* = 0$. A figura 3.10 abaixo ilustra o procedimento para o caso $\mu = 0$.

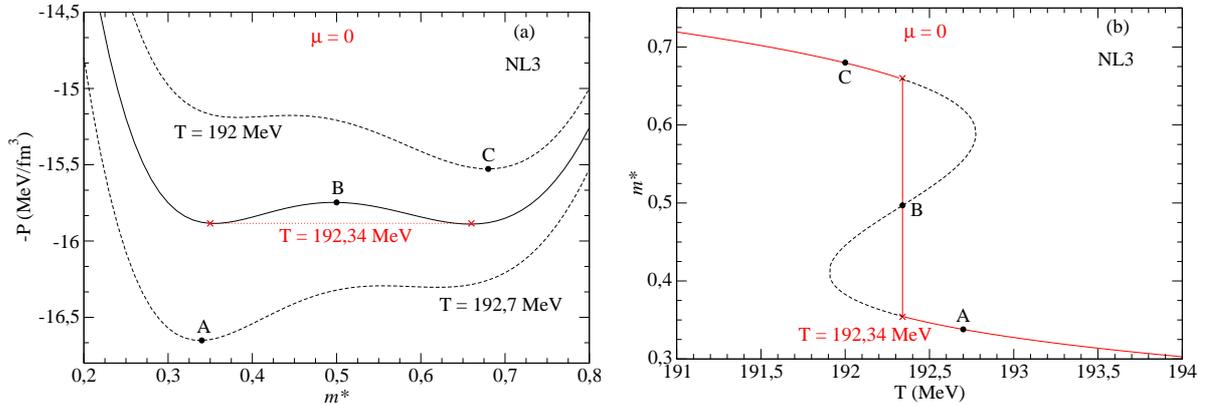


Figura 3.10: (a) Negativo da pressão em função de m^* . (b) m^* em função da temperatura. Ambos para o modelo NL3 no caso $\mu = 0$.

Note pela figura 3.10a que para um valor fixo do potencial químico, há apenas uma temperatura na qual $-P$ apresenta dois mínimos cujos valores de pressão são iguais, no caso para $T = 192,34$ MeV em $\mu = 0$. Ainda nesta temperatura onde há coexistência de fases, nota-se um terceiro ponto (ponto B) extremo de $-P$, porém correspondente a um máximo, caracterizando portanto um ponto instável. Temperaturas abaixo ou acima da temperatura de coe-

xistência, apresentam apenas um mínimo global referente à solução que indica o ponto mais estável do sistema (pontos A e C). Note ainda que na figura 3.10a, a curva sólida indica claramente que o critério de Gibbs é satisfeito, já que para os dois mínimos localizados temos que $T_1 = T_2 = 192,34$ MeV, $\mu_1 = \mu_2 = 0$ e $P_1 = P_2 = 15,884$ MeV/fm³, com os subíndices 1 e 2 representando as distintas fases de maior e menor massa efetiva. Na figura 3.10b os mesmos pontos A, B e C anteriores são representados no gráfico da massa efetiva em função da temperatura. Note que a queda abrupta de m^* deve ocorrer na mesma temperatura na qual os mínimos da figura 3.10a estão equilibrados.

Os valores m^* que produzem os extremos do grande potencial termodinâmico são também aqueles que anulam a função

$$f(m^*) = m^* - 1 + \frac{G_\sigma^2}{M} [\rho_s + a(\Delta M)^2 + b(\Delta M)^3 + g_\omega^2 \omega_0^2 (\alpha_1 - \alpha_1' \Delta M)], \quad (3.12)$$

definida a partir da expressão (3.7) que define a chamada “gap equation” para a massa efetiva dos modelos não lineares, veja a figura 3.11 a seguir, mostrando assim a equivalência deste procedimento com o método tradicional de resolução de (3.7).

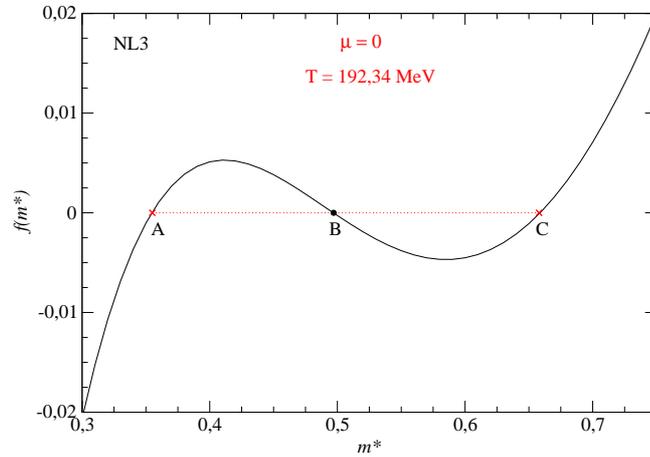


Figura 3.11: Função $f(m^*)$ definida em (3.12) em função da massa efetiva para $T = 192,34$ MeV e $\mu = 0$ no modelo NL3.

Para a construção do diagrama de fases, o método descrito acima é então realizado mudando o valor do potencial químico (ou da temperatura) e, novamente buscando a temperatura (ou o potencial químico) que exiba dois mínimos equilibrados no gráfico $-P \times m^*$. Com isso encontra-se mais um par (μ, T) que compõe o diagrama. A figura 3.12 mostra as curvas de coexistência para os modelos que exibem a queda abrupta da massa efetiva em $\mu = 0$.

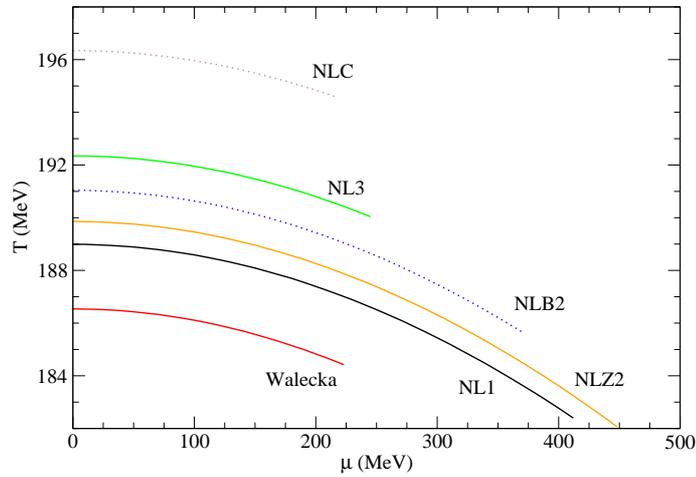


Figura 3.12: Diagrama de fases no plano $T \times \mu$ para os modelos da figura 3.9a.

Note que o diagrama de fases acima restringe-se a uma faixa pequena de temperatura, o que ocorre para todos os modelos analisados. Na linguagem representada pela figura 3.9a, isso significa que o método de obtenção dos dois mínimos de $-P$ é válido somente até uma certa temperatura, que chamaremos de crítica, a partir da qual apenas um mínimo é encontrado, ou seja, não mais é possível a realização de transições de fase de primeira ordem. Baseados nesse ponto crítico, pode-se então construir curvas escalonadas análogas às mostrada na figura 3.4 para os modelos em baixas temperaturas. Tais diagramas são mostrados na figura 3.13.

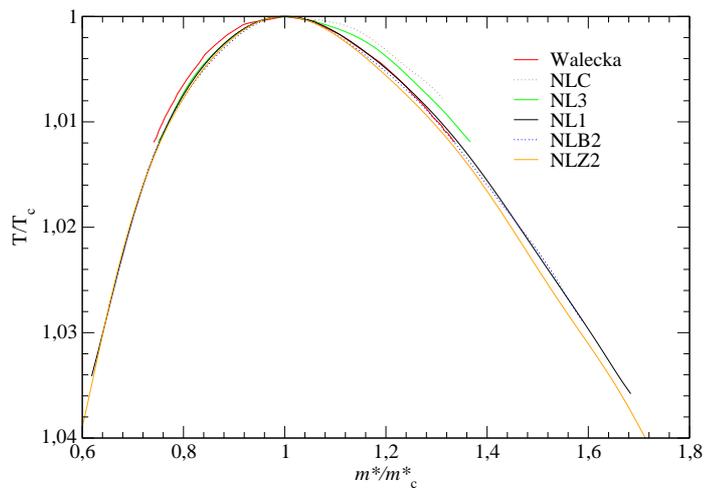


Figura 3.13: Temperatura em unidades de T_c versus m^* em unidades de m_c^* .

Assim como no caso das transições no regime de baixas temperaturas, também o diagrama

representado na figura 3.13 exibe dependência de modelos mais acentuada, principalmente na região onde $m^*/m_c^* > 1$. Aliás, tal dependência apresenta influência desde os resultados em $\mu = 0$, ou seja, os próprios modelos que apresentam a coexistência nesse caso (figura 3.9a) não começam seus respectivos diagramas do mesmo ponto (figura 3.13). No que diz respeito à determinação do ponto crítico do sistema, a situação é a mesma. Cada modelo possui um ponto crítico particular. Outro resultado interessante nesse regime de altas temperaturas é a identificação de m^* como sendo um parâmetro de ordem para esse tipo de transição de fases.

Por uma questão de completeza, destacamos ainda que o método de busca dos mínimos à mesma “altura” no gráfico de $-P$ também pode ser utilizado para a determinação do diagrama de fases em baixas temperaturas mostrado na seção anterior. Como exemplo, veja a sequência exibida nas figuras 3.14a-3.14d.

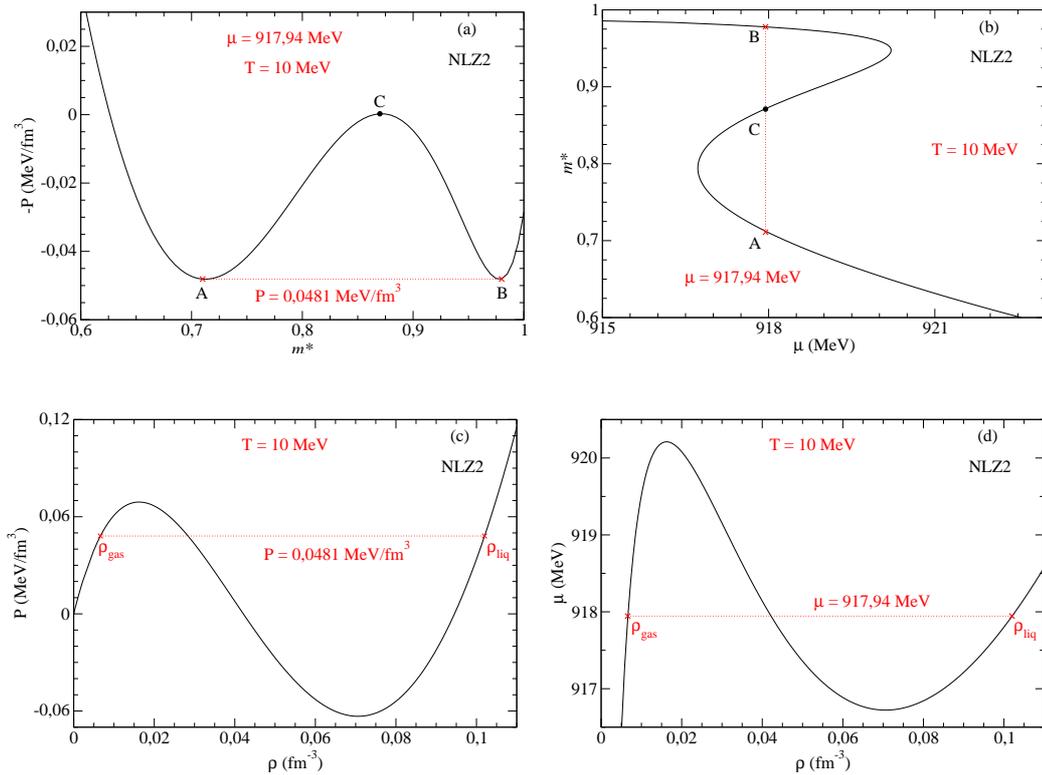


Figura 3.14: (a) Grande potencial termodinâmico em função de m^* . (b) m^* versus μ . (c) Pressão em função da densidade. (d) μ versus m^* . Todas as figuras referentes ao modelo NLZ2 em $T = 10$ MeV.

Na figura 3.14a temos que os mínimos de igual pressão ocorrem, para a temperatura de 10 MeV, em $\mu = 917,94$ MeV. Esse mesmo potencial químico é usado em 3.14b para marcar os pontos A, B e C referentes aos extremos de $-P$. Note a queda abrupta da massa efetiva,

agora em função de μ ⁵. Com a pressão definida em $P = 0,0481 \text{ MeV/fm}^{-3}$, define-se então as densidades referentes às fases líquida e gasosa na isoterma mostrada na figura 3.14c. Finalmente em 3.14d, fica evidente que as mesmas densidades ρ_{gas} e ρ_{liq} levam a um mesmo valor de μ , previamente definido em 3.14a. Assim, fica satisfeito o critério de Gibbs e os limites da região de coexistência são então determinados. O procedimento pode ser estendido para as temperaturas abaixo de T_c , para a construção do diagrama mostrado na figura 3.4.

Como um comentário final acerca das transições em altas temperaturas tratadas nesta seção, ressaltamos que tal estudo se deu apenas em nível da termodinâmica apresentada pelos modelos não lineares de Walecka. Não nos preocupamos aqui com a evolução dinâmica do sistema, que levaria em conta por exemplo o tempo necessário para que ocorressem possíveis aniquilações devido ao alto número de antipartículas produzidas nesse regime de temperaturas (mesmo para $\mu \neq 0$ esse número é ainda alto quando comparado ao número de nucleons presentes). O estudo da termodinâmica de tais sistemas é aplicável por exemplo no estudo dos experimentos de colisões de íons pesados, realizados em grandes aceleradores de partículas, onde são observadas altas razões antipartículas/partículas. Uma revisão sobre esse tema é feita em [91].

⁵A mesma queda deve também ser observada em um gráfico de m^* em função de T para $\mu = 917,94 \text{ MeV}$.

4 *Transição de fases hádron-quark*

No regime extremo de temperaturas e densidades, é esperado que a matéria hadrônica realize uma transição para a fase de quarks, ou seja, os graus de liberdade de quarks antes confinados nos nucleons, tornam-se os mais importantes. Em particular, acredita-se que a condição de temperatura muito alta tenha ocorrido no universo primordial, onde apenas matéria composta por quarks e glúons existiu como um plasma, o chamado plasma de quarks e glúons (QGP¹). A evolução e o resfriamento do universo deu origem à matéria hadrônica e, atualmente, tal transição acontece espontaneamente na natureza nas estrelas, onde o regime de altas densidades é verificado. Muitos estudos sobre a transição de um tipo de matéria para outra têm sido feitos, porém não necessariamente levando em conta a descrição dos diferentes graus de liberdade para os diferentes tipos de matéria. Frequentemente, apenas modelos que descrevem quarks são usados para o estudo dessa transição. Nesses casos, as fases identificadas no diagrama de fases estão associadas àquelas onde observam-se quebra e restauração de simetria quiral. Neste último capítulo, trataremos a transição hádron-quark a partir de dois modelos estruturalmente distintos na descrição das duas fases: os modelos não lineares de Walecka, nos quais os graus de liberdade são os nucleons que descrevem as propriedades da matéria nuclear ordinária, e o modelo Polyakov-Nambu-Jona-Lasinio (PNJL), recentemente proposto na literatura, na descrição da fase de quarks. Antes porém, destacaremos nas seções iniciais como a termodinâmica do modelo PNJL, construído a partir do bastante conhecido modelo NJL, descreve a fenomenologia básica da QCD, descrita também a seguir.

4.1 Fenomenologia da QCD

A QCD é a teoria que descreve as interações fundamentais entre quarks e glúons [92, 93]. Os quarks, constituintes dos mésons (formados pelo par $q\bar{q}$) e dos bárions (formados pela tríade qqq)², são férmions de spin 1/2 e existem em seis diferentes *sabores* sendo eles *up*, *down*,

¹Do inglês quark-gluon plasma.

²antibárions são compostos de três antiquarks, $\bar{q}\bar{q}\bar{q}$.

top, *bottom*, *strange* e *charm*, todos apresentando carga fracionária em relação à carga do elétron. Como exemplo desta composição quarkônica nos hádrons, podemos destacar próton e nêutron, formados por $p = uud$ e $n = udd$, e alguns mésons carregados tais como píons e kaons, formados por $\pi^+ = u\bar{d}$, $\pi^- = \bar{u}d$, $K^+ = u\bar{s}$ e $K^- = \bar{u}s$. Como as cargas elétricas dos quarks são iguais a $2/3$ e $-1/3$ respectivamente para os conjuntos (u, t, c) e (d, b, s) , temos a conservação de carga e número bariônico (N_b) para as partículas mostradas, já que $N_b = 1/3$ para todos os quarks. Estas regras de conservação devem ser verificadas para todos os hádrons de acordo com o modelo de quarks criado em 1964 por Murray Gell-Mann.

Entretanto, a teoria ainda não explicava a existência da partícula $\Delta^{++} = uuu$, de spin total $J = 3/2$. Tal partícula não apresentava função de onda total antissimétrica, como deve ser o caso de todos os férmions segundo o princípio da exclusão de Pauli. O fato de ser composta por quarks iguais implica em idênticos números quânticos para as três partículas em um mesmo estado quântico, o que conseqüentemente leva à simetria da função de onda. Para contornar esse problema, O. W. Greenberg introduziu o conceito de cor à teoria de Gell-Mann, o que automaticamente fez surgir um novo número quântico na descrição do estado de um quark. Assim, todos os seis quarks, além de massa, spin e carga elétrica passaram também a ter carga de *cor*, sendo elas *red*, *green* e *blue*. Dessa maneira tomando-se um quark *u* de cada cor, a partícula Δ^{++} não mais viola o princípio da exclusão de Pauli. A carga de cor da QCD tem o mesmo papel da carga elétrica na Eletrodinâmica Quântica (QED³). Os mediadores da interação entre partículas carregadas na QED são os fótons, enquanto que na QCD a interação entre quarks é feita pelos glúons.

A diferença fundamental entre os mediadores está no fato de que fótons não são eletricamente carregados mas glúons possuem carga de cor⁴. Isto faz com que a interação entre os quarks aumente quando estiverem mais distantes entre si, porém sempre confinados em uma região no espaço na formação dos hádrons, e diminua a curtas distâncias até que se alcance a situação em que os quarks estejam livres. O primeiro fenômeno é chamado de *confinamento* e o segundo é conhecido como *liberdade assintótica*. Esta fenomenologia pode ser entendida através de uma comparação com o que ocorre na QED. Uma partícula carregada imersa em um dielétrico polariza as cargas do meio de tal forma a blindá-la. Conseqüentemente, o valor desta carga torna-se dependente da região do espaço. Quanto mais perto da partícula, mais próximo do valor real da carga e quanto mais afastado dela, maior o efeito das cargas polarizadas na redu-

³Do inglês Quantum Electrodynamics.

⁴e também anticor.

ção do valor de sua carga elétrica. Na QED, tal blindagem se dá devido à polarização do vácuo. Assim, estamos diante de uma situação em que quanto mais próximo da carga elétrica maior é a interação e quanto mais distante, menor é a intensidade da mesma. Exatamente o oposto ocorre na QCD devido à existência de carga de cor nos glúons. O efeito de blindagem para os quarks é exatamente igual ao das cargas elétricas na QED, porém para os glúons o fenômeno se dá de forma oposta havendo assim uma competição entre os efeitos [93]. Cálculos mostram que o comportamento final das partículas depende do parâmetro $a = 2N_f - 11N_c$, onde N_f e N_c são, respectivamente, os números de sabores e cores da QCD [93]. Se o sinal de a é positivo, então as partículas seguem a física apresentada pelas cargas elétricas na QED e, se a é negativo, o efeito é oposto. Como na QCD temos $N_f = 6$ e $N_c = 3$ então $a < 0$, o que explica o comportamento particular dos quarks. Esta mudança na intensidade da interação em função da distância entre os quarks faz com que tenhamos que tratar a QCD de diferentes formas dependendo da escala de energia.

Como em qualquer teoria quântica de campos, a QCD pode ser descrita em termos de uma densidade lagrangiana que no caso, contém os campos de quarks e glúons. Esta é dada por [94]

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - M_0)\psi - \frac{1}{2}\text{Tr}(G^{\mu\nu}G_{\mu\nu}) \quad (4.1)$$

com $D^\mu = \partial^\mu - igA^\mu$ sendo a derivada covariante e $G^{\mu\nu} = \frac{i}{g}[D^\mu, D^\nu]$. Ainda identifica-se A^μ como $A^\mu = \mathcal{A}_a^\mu \lambda_a/2$, onde \mathcal{A}_a^μ é o campo dos glúons e λ_a as matrizes de Gell-Mann. A constante de acoplamento entre os campos de quarks e glúons é g e M_0 é a massa corrente do quark.

4.1.1 Diferentes tratamentos

O comportamento da interação entre os quarks em função da distância, ou equivalentemente da energia, é matematicamente representado pela variação com a distância da constante de acoplamento g . Em regimes de grandes distâncias (baixas energias) a QCD não pode ser tratada através de métodos perturbativos devido ao alto valor de g nessa região. Uma das alternativas a esse tratamento é o uso de simulações numéricas na rede⁵ [95, 96], principalmente através do método de Monte Carlo [97]. Tais técnicas fornecem resultados tanto para o setor puro de glúons, quanto para sistemas onde quarks são incluídos. A dificuldade numérica em simular os sistemas com quarks está no fato em que para potenciais químicos (μ_q) não nulos a ação

⁵também chamadas de QCD na rede.

euclidiana torna-se imaginária, o que compromete seriamente as simulações. Isto é conhecido como *fermion sign problem* [98]. Expansões em torno das soluções bem conhecidas em $\mu_q = 0$, formalismo de potenciais químicos imaginários, métodos de densidade de estados, entre outros, são usados para contornar este problema [99, 100, 101, 102, 103].

Outra abordagem na descrição da QCD é o uso de modelos efetivos, tais como os bem conhecidos modelo de sacola MIT [104] e de Nambu-Jona-Lasinio (NJL) [105, 106, 107]. O primeiro trata quarks sem massa e glúons como partículas livres, porém sem a manifestação do confinamento, que é incorporado à teoria através da inclusão da chamada constante de bag. Já o modelo NJL apresenta mais similaridades com a teoria da QCD mas não leva em conta o confinamento, já que as interações se dão somente entre quarks e são do tipo pontuais, ou seja, não há a intermediação de glúons. Um dos principais objetivos desses modelos é a construção do diagrama de fases da QCD através, por exemplo, da curva de transição no plano $T \times \mu$. Outra aplicação de igual importância, está na descrição de estrelas de quarks [106, 108].

4.2 O modelo PNJL

4.2.1 Laço de Polyakov e simetria de centro

O modelo PNJL, proposto por K. Fukushima [109] e profundamente estudado nas referências [94, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116], é uma extensão do modelo NJL no que diz respeito à inclusão do efeito de confinamento dos quarks. Antes de entrar na termodinâmica propriamente dita deste modelo, mostraremos de forma qualitativa nesta seção como este efeito está relacionado com o chamado laço de Polyakov.

O laço de Polyakov, operador \hat{L} , é definido como uma linha de Wilson [117] no espaço-tempo euclidiano, a saber,

$$\hat{L}(\vec{x}) = \mathcal{P} \exp \left[ig \int_0^\beta d\tau A_4(\vec{x}, \tau) \right], \quad (4.2)$$

onde \mathcal{P} representa o produto ordenado e $A_4 = iA_0$ é a componente temporal euclidiana do campo A^μ . Cabe aqui destacar que o formalismo de tempo imaginário, construído através da chamada rotação de Wick [118] $t \rightarrow -it_E$ e que gera as versões euclidianas das integrais funcionais, é usado sempre que se deseja tratar Teoria Quântica de Campos em temperatura finita. A conexão entre a Teoria de Campos em temperatura nula e a Mecânica Estatística Quântica é feita através

da prescrição $\beta \rightarrow it$, alterando assim as integrações sobre t_E , de limites $t_E = 0$ e $t_E = t$, para integrações em τ de limites $\tau = 0$ e $\tau = \beta$ [118]. Um exemplo do uso desse formalismo é mostrado na seção D.2 do Apêndice D.

Como é calculado no mesmo ponto do espaço, \hat{L} é interpretado como um caminho fechado (por isso chamado de laço) conectando este ponto em diferentes tempos, 0 e β . O traço normalizado deste operador, Φ , é uma medida direta do confinamento do quark, uma vez que a energia livre da partícula é relacionada com Φ via $\Phi = e^{-F_q/T}$ [119]. Considerando que a energia livre divergente está associada com sistemas nos quais há confinamento da partícula (quark), pode-se estabelecer valores específicos de Φ que representem tal fenômeno. Sistemas à temperatura finita e onde F_q é divergente conduzem a $\Phi = 0$ (confinamento total). Já no caso de sistemas a temperatura e energia livre finitas, temos essencialmente $\Phi \neq 0$ e para o limite extremo de altas temperaturas (liberdade assintótica), onde espera-se o desconfinamento total dos quarks, temos que $\Phi = 1$.

Na verdade, o confinamento está associado à realização da chamada simetria de centro $Z(N_c)$ [120, 121], descrita da seguinte forma. Suponha inicialmente que um sistema invariante de gauge (veja seção D.1 do Apêndice D) seja descrito apenas por campos bosônicos. Como exemplo, tratemos da QCD contendo apenas glúons, ou seja, descrita apenas pelo campo A_μ . Tal campo se transforma segundo $A_\mu \rightarrow A'_\mu = U(A_\mu + i\partial_\mu)U^\dagger$, com U sendo a transformação local de gauge. Em temperatura finita, tanto A_μ quanto A'_μ devem satisfazer a condição de periodicidade [122], ou seja, deve-se observar que

$$A_\mu(0) = A_\mu(\beta) \quad \text{e} \quad (4.3)$$

$$A'_\mu(0) = A'_\mu(\beta). \quad (4.4)$$

Uma forma de se verificar a relação (4.4) é admitir que U também obedeça a condição de periodicidade dada por $U(0) = U(\beta)$, já que a partir desta condição e com o uso de (4.3), mostra-se que

$$A'_\mu(0) = U(0)(A_\mu(0) + i\partial_\mu)U^\dagger(0) = U(\beta)(A_\mu(\beta) + i\partial_\mu)U^\dagger(\beta) = A'_\mu(\beta). \quad (4.5)$$

Outra maneira de preservar (4.4) é admitir que U satisfaça à

$$U(0) = zU(\beta) \quad (4.6)$$

com $z = e^{2\pi ik/N_c}$, para $k = 1, 2, 3, \dots$. Sob tal transformação e, usando (4.3), temos que

$$\begin{aligned}
 A'_\mu(0) &= U(0)(A_\mu(0) + i\partial_\mu)U^\dagger(0) = zU(\beta)(A_\mu(\beta) + i\partial_\mu)z^*U^\dagger(\beta) \\
 &= e^{2\pi ik/N_c} e^{-2\pi ik/N_c} U(\beta)(A_\mu(\beta) + i\partial_\mu)U^\dagger(\beta) \\
 &= U(\beta)(A_\mu(\beta) + i\partial_\mu)U^\dagger(\beta) \\
 &= A'_\mu(\beta).
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Sistemas que realizam a simetria de centro são aqueles nos quais os campos, submetidos à transformações de gauge que obedecem à (4.6), permanecem satisfazendo às condições de contorno periódicas ou antiperiódicas, conforme bosônicos ou fermiônicos. Para o caso do exemplo acima onde tratamos apenas do campo bosônico dos glúons, tal simetria é realizada e, como consequência direta, temos que Φ deixa de ser uma quantidade invariante já que passa a se transformar através de⁶

$$\Phi = z\Phi, \tag{4.8}$$

que por sua vez só se verifica no caso em que $\Phi = 0$. Como já mencionado anteriormente, o valor nulo de Φ corresponde à fase confinada dos quarks. Pode-se afirmar então que o fenômeno do confinamento está diretamente associado à realização da simetria de centro da teoria. Para o caso em que $\Phi \neq 0$, temos que a simetria é espontaneamente quebrada. Assim diz-se que Φ é um parâmetro de ordem para a transição confinamento/desconfinamento.

Quando tratamos de sistemas onde quarks são incluídos, temos que o campo fermiônico, que se transforma segundo $\psi \rightarrow \psi' = U\psi$, deve satisfazer em temperaturas finitas as condições de antiperiodicidade [122] dadas por

$$\psi(0) = -\psi(\beta) \quad \text{e} \tag{4.9}$$

$$\psi'(0) = -\psi'(\beta). \tag{4.10}$$

Dessa forma, o uso de uma transformação de gauge que satisfaça a relação (4.6) conduz a⁷

$$\psi'(0) = U(0)\psi(0) = -zU(\beta)\psi(\beta) = -z\psi'(\beta) \neq -\psi'(\beta), \tag{4.11}$$

⁶Tal resultado é obtido usando que, de uma forma geral, o laço de Wilson comporta-se, segundo uma transformação de gauge, como $\hat{L}' = U(x_1)\hat{L}U^\dagger(x_2)$, para $\hat{L} = \mathcal{P} \exp \left[\int_{x_1}^{x_2} dx_\mu A_\mu \right]$ [96].

⁷com o uso de (4.9).

donde conclui-se que sistemas descritos por campos fermiônicos quebram explicitamente a simetria de centro, levando sempre a $\Phi \neq 0$. Assim, por exemplo para a teoria completa da QCD, Φ é interpretado como um parâmetro de ordem aproximado para a transição de fase confinamento/desconfinamento.

A mesma fenomenologia ocorre para o parâmetro de ordem dado por $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ e a simetria quiral (descrita na seção D.3 do Apêndice D.). Quando os férmions descritos pela teoria não apresentam massa, $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ é considerado um parâmetro de ordem exato da transição de fases onde a simetria quiral é quebrada, caracterizada por $\langle \bar{\psi}\psi \rangle \neq 0$, e restaurada, onde $\langle \bar{\psi}\psi \rangle = 0$. Já no caso em que a massa dos férmions é não nula, a densidade lagrangiana da teoria apresenta um termo, dado por $m\bar{\psi}\psi$, que explicitamente quebra a simetria quiral. Assim, $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ passa a ser considerado um parâmetro de ordem aproximado. O modelo PNJL, cuja termodinâmica é apresentada na próxima seção, trata simultaneamente estes dois efeitos, considerando os dois parâmetros de ordem na descrição das transições confinamento/desconfinamento e simetria quiral quebrada/restaurada.

4.2.2 Equações de estado em $T \neq 0$

A conexão entre os campos de quarks e glúons no modelo PNJL é feita a partir da substituição $\partial^\mu \rightarrow \partial^\mu + iA^\mu$ na densidade lagrangiana que o define. A bosonização do sistema, junto com a aproximação de campo médio, levam ao grande potencial termodinâmico por volume [111] dado por

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{PNJL}} &= \mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T) + \frac{G\rho_{sq}^2}{2} - \frac{\gamma_q}{2\pi^2} \int_0^\Lambda E_q k^2 dk \\ &- \frac{\gamma_q T}{2\pi^2 N_c} \int_0^\infty \ln \left[1 + 3\Phi e^{-(E_q - \mu_q)/T} + 3\Phi^* e^{-2(E_q - \mu_q)/T} + e^{-3(E_q - \mu_q)/T} \right] k^2 dk \\ &- \frac{\gamma_q T}{2\pi^2 N_c} \int_0^\infty \ln \left[1 + 3\Phi^* e^{-(E_q + \mu_q)/T} + 3\Phi e^{-2(E_q + \mu_q)/T} + e^{-3(E_q + \mu_q)/T} \right] k^2 dk. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Os detalhes desta derivação podem ser encontrados na referência [94] e, como estamos interessados estritamente na descrição termodinâmica do modelo, nos restringiremos à expressão (4.12) como ponto de partida para o cálculo das demais grandezas pertinentes a essa abordagem.

Em (4.12), temos que $E_q = (k^2 + M_q^2)^{1/2}$ e $\rho_{sq} = \langle \bar{\psi}_q \psi_q \rangle = \langle \bar{u}u \rangle + \langle \bar{d}d \rangle = 2\langle \bar{u}u \rangle$, onde consideramos aqui o sistema composto apenas pelos quarks de sabores u e d . O potencial de

Polyakov, que será discutido posteriormente, é dado em termos de Φ e Φ^* por $\mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T)$ e, o fator de degenerescência é $\gamma_q = N_s \times N_f \times N_c = 12$, devido aos números de spin, sabor e cor ($N_s = N_f = 2$ e $N_c = 3$). A massa constituinte do quark obedece à equação autoconsistente dada por

$$M_q = M_0 - G\rho_{sq}, \quad (4.13)$$

onde o condensado de quarks ρ_{sq} , determinado pela condição $(\partial\Omega_{\text{PNJL}}/\partial\rho_{sq}) = 0$, é dado por

$$\rho_{sq} = \frac{\gamma_q}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{M_q}{E_q} k^2 dk [F(k, T, \Phi, \Phi^*) + \bar{F}(k, T, \Phi, \Phi^*)] - \frac{\gamma_q}{2\pi^2} \int_0^\Lambda \frac{M_q}{E_q} k^2 dk \quad (4.14)$$

com

$$F(k, T, \Phi, \Phi^*) = \frac{\Phi e^{2(E_q - \mu_q)/T} + 2\Phi^* e^{(E_q - \mu_q)/T} + 1}{3\Phi e^{2(E_q - \mu_q)/T} + 3\Phi^* e^{(E_q - \mu_q)/T} + e^{3(E_q - \mu_q)/T} + 1}, \quad (4.15)$$

$$\bar{F}(k, T, \Phi, \Phi^*) = \frac{\Phi^* e^{2(E_q + \mu_q)/T} + 2\Phi e^{(E_q + \mu_q)/T} + 1}{3\Phi^* e^{2(E_q + \mu_q)/T} + 3\Phi e^{(E_q + \mu_q)/T} + e^{3(E_q + \mu_q)/T} + 1} \quad (4.16)$$

sendo as distribuições generalizadas de Fermi-Dirac. Como notado pelos autores de [123], uma importante consequência do acoplamento entre Φ e o setor de quarks, é a possibilidade de lidar com o modelo PNJL da mesma forma como no modelo NJL com relação ao tratamento estatístico. A única modificação está na substituição das funções de Fermi-Dirac usuais de quarks e antiquarks nas equações de estado do modelo NJL, pelas generalizadas dadas nas equações (4.15) e (4.16), além é claro, da inclusão do potencial referente aos glúons, dado por $\mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T)$, no grande potencial termodinâmico.

Ainda sobre as distribuições generalizadas, note que para os casos particulares dados por $\Phi = \Phi^* = 0$ (confinamento) e $\Phi = \Phi^* = 1$ (desconfinamento total), temos que a expressão (4.15) reduz-se, respectivamente a

$$F(k, T, \Phi = \Phi^* = 0) = \frac{1}{e^{3(E_q - \mu_q)/T} + 1} \quad \text{e} \quad (4.17)$$

$$F(k, T, \Phi = \Phi^* = 1) = \frac{\left\{ e^{(E_q - \mu_q)/T} + 1 \right\}^2}{\left\{ e^{(E_q - \mu_q)/T} + 1 \right\}^3} = \frac{1}{e^{(E_q - \mu_q)/T} + 1}. \quad (4.18)$$

O resultado em (4.17) indica que o sistema totalmente confinado ($\Phi = \Phi^* = 0$) é representado estatisticamente por um estado de 3 quarks, cada um com energia E_q e potencial químico μ_q , o que de uma forma simples, pode ser interpretado como um estado de um nucleon formado pelos

mesmos 3 quarks. Nesse caso, temos também identificado explicitamente o potencial químico bariônico, dado por $\mu_B = 3\mu_q$ [124]. Já a expressão (4.18) é simplesmente a distribuição usual de Fermi-Dirac usada nas equações de estado do modelo NJL, que não apresenta efeito algum de confinamento. Ou seja, o caso particular de desconfinamento total dos quarks no modelo PNJL ($\Phi = \Phi^* = 1$) reproduz a estatística do modelo NJL⁸.

Da mesma forma como feito no capítulo 3 para os modelos não lineares de Walecka, podem-se obter todas as quantidades termodinâmicas do modelo PNJL a partir de Ω_{PNJL} , tais como a pressão, $P = -\Omega$, dada por

$$\begin{aligned} P_{\text{PNJL}} &= -\mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T) - \frac{G\rho_{sq}^2}{2} + \frac{\gamma_q}{2\pi^2} \int_0^\Lambda (k^2 + M_q^2)^{1/2} k^2 dk \\ &+ \frac{\gamma_q}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^4}{(k^2 + M_q^2)^{1/2}} dk [F(k, T, \Phi, \Phi^*) + \bar{F}(k, T, \Phi, \Phi^*)] + \Omega_{\text{vac}}, \end{aligned} \quad (4.19)$$

a densidade de quarks, $\rho = -\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}$,

$$\rho_q = \frac{\gamma_q}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 dk [F(k, T, \Phi, \Phi^*) - \bar{F}(k, T, \Phi, \Phi^*)] \quad (4.20)$$

e a densidade de energia, $\mathcal{E} = -T^2 \frac{\partial(\Omega/T)}{\partial T} + \mu\rho$,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{PNJL}} &= \mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T) - T \frac{\partial\mathcal{U}}{\partial T} + \frac{G\rho_{sq}^2}{2} - \frac{\gamma_q}{2\pi^2} \int_0^\Lambda (k^2 + M_q^2)^{1/2} k^2 dk \\ &+ \frac{\gamma_q}{2\pi^2} \int_0^\infty (k^2 + M_q^2)^{1/2} k^2 dk [F(k, T, \Phi, \Phi^*) + \bar{F}(k, T, \Phi, \Phi^*)] - \Omega_{\text{vac}}. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Note que para satisfazer à condição $P_{\text{PNJL}}(\rho_q = T = 0)$, foi necessário a adição de Ω_{vac} (obtido explicitamente na seção E.2 do Apêndice E) nas expressões (4.19) e (4.21).

A densidade de entropia é obtida via $\mathcal{S} = -\frac{\partial\Omega}{\partial T}$ ou pela relação $\mathcal{S} = (P + \mathcal{E} - \mu\rho)/T$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\text{PNJL}} &= -\frac{\partial\mathcal{U}}{\partial T} + \frac{\gamma_q}{6\pi^2 T} \int_0^\infty \frac{k^4}{(k^2 + M_q^2)^{1/2}} dk [F(k, T, \Phi, \Phi^*) + \bar{F}(k, T, \Phi, \Phi^*)] \\ &+ \frac{\gamma_q}{2\pi^2 T} \int_0^\infty (k^2 + M_q^2)^{1/2} k^2 dk [F(k, T, \Phi, \Phi^*) + \bar{F}(k, T, \Phi, \Phi^*)] \\ &- \frac{\gamma_q \mu_q}{2\pi^2 T} \int_0^\infty k^2 dk [F(k, T, \Phi, \Phi^*) - \bar{F}(k, T, \Phi, \Phi^*)]. \end{aligned} \quad (4.22)$$

⁸Tomando-se os mesmos limites na expressão (4.16), as mesmas conclusões são obtidas para o caso das distribuições de antipartículas.

Como já mencionado, a generalização do modelo NJL para o PNJL é feita substituindo-se as distribuições de Fermi-Dirac usuais⁹ por aquelas obtidas em (4.15) e (4.16), porém tal prescrição é válida, no caso da densidade de entropia, para a expressão dada em (4.22) e não para a forma dada por $\mathcal{S} \sim \int d^3k [f \ln f + (1-f) \ln(1-f)] + \bar{f} \ln \bar{f} + (1-\bar{f}) \ln(1-\bar{f})$, também bastante usada.

4.2.3 Diferentes parametrizações

Para o cálculo das EOS já mostradas do modelo PNJL, é necessário especificar o potencial $\mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T)$ a ser utilizado. As diferentes parametrizações deste potencial, quatro até agora propostas na literatura, serão utilizadas de forma comparativa neste capítulo. Adotando a nomenclatura da referência [125], nos referimos a duas delas como RTW05 [110] e RRW06 [111, 112, 113, 114, 115, 116, 123]. Chamaremos as demais de FUKU08 [125] e DS10 [126]. Suas formas funcionais são dadas, respectivamente por,

$$\frac{\mathcal{U}_{\text{RTW05}}}{T^4} = -\frac{b_2(T)}{2} \Phi \Phi^* - \frac{b_3}{6} (\Phi^3 + \Phi^{*3}) + \frac{b_4}{4} (\Phi \Phi^*)^2, \quad (4.23)$$

$$\frac{\mathcal{U}_{\text{RRW06}}}{T^4} = -\frac{b_2(T)}{2} \Phi \Phi^* + b_4(T) \ln \left[1 - 6\Phi \Phi^* + 4(\Phi^3 + \Phi^{*3}) - 3(\Phi \Phi^*)^2 \right], \quad (4.24)$$

$$\frac{\mathcal{U}_{\text{FUKU08}}}{bT} = -54e^{-a/T} \Phi \Phi^* + \ln \left[1 - 6\Phi \Phi^* + 4(\Phi^3 + \Phi^{*3}) - 3(\Phi \Phi^*)^2 \right], \quad (4.25)$$

$$\mathcal{U}_{\text{DS10}} = (a_0 T^4 + a_1 \mu_q^4 + a_2 T^2 \mu_q^2) \Phi^2 + a_3 T_0^4 \ln \left[1 - 6\Phi^2 + 8\Phi^3 - 3\Phi^4 \right], \quad (4.26)$$

onde

$$b_2(T) = a_0 + a_1 \left(\frac{T_0}{T} \right) + a_2 \left(\frac{T_0}{T} \right)^2 + a_3 \left(\frac{T_0}{T} \right)^3 \quad \text{e} \quad b_4(T) = b_4 \left(\frac{T_0}{T} \right)^3. \quad (4.27)$$

De uma forma geral, os potenciais de Polyakov são construídos de forma a reproduzir os bem estabelecidos dados da QCD na rede para o setor puro de gauge¹⁰. Tais dados mostram que Φ exibe uma transição de fases confinamento/desconfinamento de primeira ordem, caracterizada pela mudança abrupta do valor nulo para finito, em uma temperatura de $T_0 = 270$ MeV.

O potencial FUKU08 possui dois parâmetros livres,

$$a = 664 \text{ MeV} \quad \text{e} \quad b = 0,03 \Lambda^3 \quad (4.28)$$

⁹Para quarks: $f = \left[e^{(E_q^* - \mu_q)/T} + 1 \right]^{-1}$ e antiquarks: $\bar{f} = \left[e^{(E_q^* + \mu_q)/T} + 1 \right]^{-1}$.

¹⁰Cálculos numéricos ou em modelos teóricos onde apenas glúons são considerados no sistema. Tal caso particular especificamente para o modelo PNJL é mostrado na seção E.1 do Apêndice E.

e foi derivado a partir da chamada expansão de acoplamento forte [125]. Já o potencial RRW05 foi baseado a partir da teoria de Ginzburg-Landau e apresenta a forma polinomial em termos dos parâmetros de ordem Φ e Φ^* . Sua versão aperfeiçoada, RRW06, usa a forma logarítmica descrita em (4.24). Diferentemente do que ocorre no potencial FUKU08, os parâmetros adimensionais a_i , e b_i de RTW05 e RRW06 são encontrados de forma a ajustar densidade de energia, entropia e pressão do setor puro de gauge com os limites de Stefan-Boltzmann no regime de altas temperaturas, além de fazer com que Φ exiba transição de fases de primeira ordem, como já mencionado anteriormente.

O potencial DS10, proposto em [126], apresenta uma dependência adicional com o potencial químico μ_q e é utilizado em um modelo híbrido, chamado de modelo quiral $SU(3)$, que exhibe em sua estrutura hádrons e quarks como graus de liberdade. As constantes desse modelo são determinadas de modo a reproduzir os dados de QCD na rede no setor puro de gauge, assim como os potenciais RTW05 e RRW06, e algumas características do diagrama de fases no plano $T \times \mu_B$, tais como o ponto crítico final, que será discutido posteriormente, situado em $\mu_B = 354$ MeV e $T = 167$ MeV, e o ponto de transição em $T = 0$ situado em uma densidade igual a quatro vezes a densidade de saturação da matéria nuclear. Vale ressaltar que não usaremos tal modelo híbrido na construção dos diagramas de fase hádron-quark mas sim o modelo PNJL no qual uma das parametrizações para $\mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T)$ será a mesma utilizada no modelo quiral $SU(3)$, ou seja, a da equação (4.26). O uso de tal parametrização requer ainda que a densidade de quarks e a densidade de energia sejam, respectivamente, substituídas por $\rho_q \rightarrow \rho_q - (4a_1\mu_q^3 + 2a_2T^2\mu_q)\Phi^2$ e $\mathcal{E}_{\text{PNJL}} \rightarrow \mathcal{E}_{\text{PNJL}} - (4a_1\mu_q^4 + 2a_2T^2\mu_q^2)\Phi^2$. Na tabela 4.1 a seguir, mostramos os valores dos parâmetros dos potenciais RTW05, RRW06 e DS10.

Parametrização	a_0	a_1	a_2	a_3	b_3	b_4
RTW05	6,75	-1,95	2,625	-7,44	0,75	7,5
RRW06	3,51	-2,47	15,22	-	-	-1,75
DS10	-1,85	$-1,44 \times 10^{-3}$	-0,08	-0,40	-	-

Tabela 4.1: Parâmetros dos potenciais dados nas expressões Eqs. (4.23)-(4.24) e (4.26).

Para definir completamente o modelo PNJL, é necessário determinar os valores da constante de acoplamento G , o parâmetro de corte Λ e a massa corrente do quark $M_0 = M_u = M_d$, o que é feito impondo que no regime de vácuo, o modelo reproduza algumas grandezas conhecidas, tais como a constante de decaimento e a massa do pión, dados respectivamente por f_π^{vac} e m_π^{vac} , e o condensado de quarks $\langle \bar{u}u \rangle^{\text{vac}}$. Esses valores, junto com as expressões em temperatura nula do modelo PNJL, são mostrados na seção E.2 do Apêndice E.

4.2.4 Comparação entre os modelos

Para calcular-se o modelo PNJL ainda é preciso resolver simultaneamente a equação (4.13) e as condições de minimização referentes à Φ e Φ^* . Em nosso estudo usaremos a aproximação de campo médio de ordem mais baixa, descrita em [113, 115], que automaticamente leva a $\Phi = \Phi^*$. Tal abordagem reduz o conjunto de equações acopladas à equação (4.13) e a

$$\frac{\partial \mathcal{U}(\Phi, T)}{\partial \Phi} - \frac{3T\gamma_q}{2\pi^2 N_c} \int_0^\infty k^2 dk [g(k, T, \Phi, \mu_q) + g(k, T, \Phi, -\mu_q)] = 0, \quad (4.29)$$

vindo da condição $(\partial \Omega_{\text{PNJL}} / \partial \Phi) = 0$, para

$$g(k, T, \Phi, \mu_q) = \frac{1 + e^{-(E_q - \mu_q)/T}}{3\Phi [1 + e^{-(E_q - \mu_q)/T}] + e^{(E_q - \mu_q)/T} + e^{-2(E_q - \mu_q)/T}}. \quad (4.30)$$

Com tais equações resolvidas, é possível então obter o comportamento de algumas quantidades importantes do modelo. Primeiro, é mostrado na figura 4.1 como Φ e ρ_{sq} variam em função da temperatura para alguns valores fixos do potencial químico dos quarks.

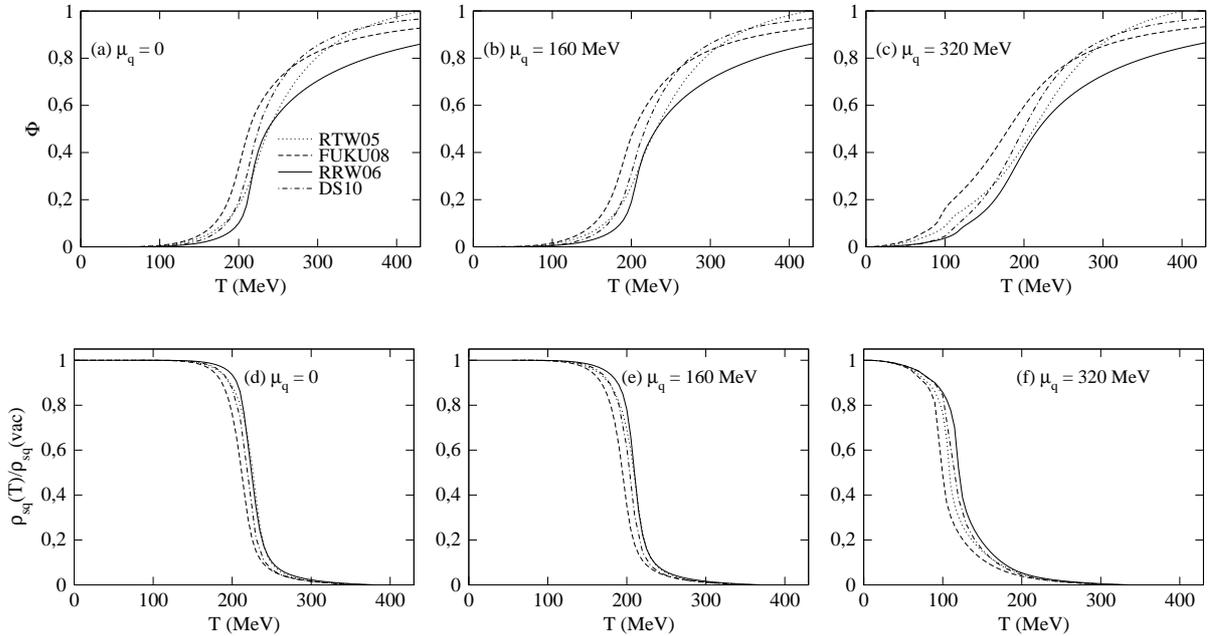


Figura 4.1: Φ (1a-1c) e a razão $\rho_{sq}(T)/\rho_{sq}(vac)$ (1d-1f), das diferentes parametrizações do modelo PNJL. Todos em função da temperatura e para alguns valores fixos de μ_q .

A figura 4.2 mostra para $\mu_q = 0$, como a pressão, densidade de energia e densidade de entropia comportam-se em função da temperatura para as diferentes parametrizações do modelo PNJL (figuras 4.2a-4.2c). Tais quantidades estão divididas pelos seus respectivos va-

lores no limite de Stefan-Boltzmann que são, respectivamente, $P_{SB} = \frac{37\pi^2 T^4}{90}$, $\mathcal{E}_{SB} = 3P_{SB}$ e $\mathcal{S}_{SB} = 4P_{SB}/T$. Na figura 4.2d, mostramos em unidades de T^4 , a chamada medida de interação dada por $\mathcal{E} - 3P$. Tal quantidade é uma medida de quanto um modelo qualquer desvia-se de seu respectivo modelo de partículas não interagentes e sem massa. Em tal regime esta quantidade deve ser nula, o que é verificado como uma tendência dos modelos PNJL em altas temperaturas. Finalmente, como uma função da densidade de energia, vemos na figura 4.2e a evolução da razão P/\mathcal{E} , que é relacionada com a velocidade do som através de $c_s^2 = \frac{\partial P}{\partial \mathcal{E}} = \frac{\mathcal{E} \partial(P/\mathcal{E})}{\partial \mathcal{E}} + \frac{P}{\mathcal{E}}$. No limite de Stefan-Boltzmann (SB), tal grandeza é dada por $c_{s,SB}^2 = P_{SB}/\mathcal{E}_{SB} = 1/3$.

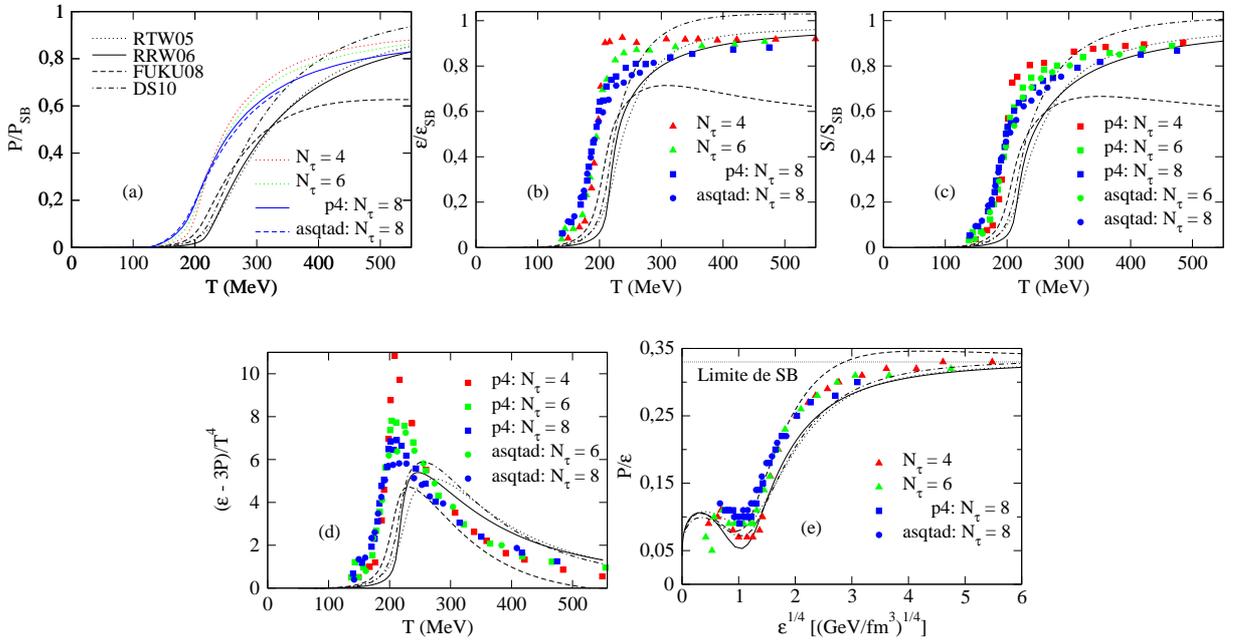


Figura 4.2: (a-c): Pressão, densidade de energia e densidade de entropia em unidades de P_{SB} , \mathcal{E}_{SB} e \mathcal{S}_{SB} . Todos em função de T . (d): Medida da interação em unidades de T^4 versus T . (e): Razão P/\mathcal{E} em função de $\mathcal{E}^{1/4}$. Todas as grandezas obtidas em $\mu_q = 0$. Os dados de QCD na rede para três sabores foram extraídos de [127, 128]. Note que tais dados incluem cálculos para diferentes ações (p4 e asqtad) e extensões temporais de rede ($N_\tau = 4, 6, 8$).

Para efeito de comparação, também dispomos na figura 4.2 os dados de QCD na rede para três sabores extraídos das referências [127, 128]. Comparações rigorosas entre dados de QCD na rede e grandezas como a diferença $\frac{P(T, \mu)}{T^4} - \frac{P(T, 0)}{T^4}$, e os momentos de pressão, podem ser encontrados, por exemplo, em [110, 111, 129] e [111, 113, 114, 115], respectivamente.

Note ainda na figura 4.2, que um comportamento similar é observado entre as grandezas termodinâmicas das diferentes parametrizações do modelo PNJL, principalmente na região de $T \lesssim 250$ MeV. Em temperaturas mais altas, as parametrizações RTW05 e RRW06 são as que apresentam um comportamento mais próximo dentre os modelos estudados.

4.2.5 Diagramas de fase

Como já mencionado anteriormente, uma das aplicações de modelos efetivos da QCD é a construção do diagrama de fases [130]. Quando o modelo em questão apresenta apenas quarks como graus de liberdade, tal diagrama representa basicamente as regiões onde observam-se simetria quiral quebrada e restaurada, veja por exemplo a referência [131] onde os autores utilizam o modelo σ linear para o estudo do diagrama de fases da QCD no plano $T \times \mu$. Quando o efeito do confinamento é levado em conta em um modelo efetivo, como no modelo PNJL por exemplo, o diagrama de fases pode ser então enriquecido de forma a apresentar também as fases específicas de confinamento e desconfinamento. A elaboração desse diagrama no plano $T \times \mu$ para as quatro parametrizações do modelo PNJL será feita da seguinte maneira.

- Para encontrarmos a curva que separa as fases termodinâmicas do sistema, analisaremos os respectivos parâmetros de ordem dados por ρ_{sq} e Φ , referentes às transições simetria quiral quebrada/restaurada e confinamento/desconfinamento.
- A transição será de primeira ordem se uma descontinuidade for exibida no parâmetro de ordem em função da temperatura, para um potencial químico fixo e, de segunda ordem¹¹, se a descontinuidade aparecer somente em sua derivada.

A figura 4.3 mostra ρ_{sq} , Φ e suas derivadas em $\mu_q = 0$, para a parametrização RRW06.

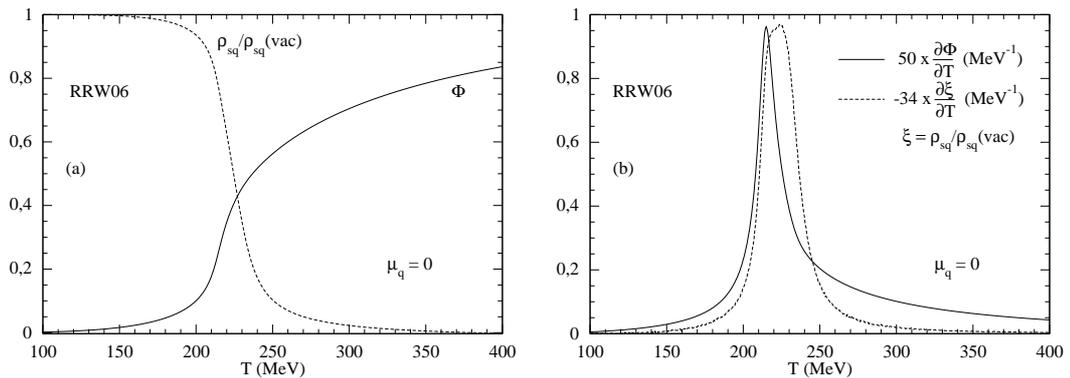


Figura 4.3: (a) Parâmetros de ordem e (b) suas derivadas em função de T para a parametrização RRW06.

Dois importantes aspectos devem ser ressaltados na análise da figura 4.3. O primeiro deles é que tanto os parâmetros de ordem quanto suas respectivas derivadas, não apresentam quaisquer descontinuidades, ou seja, não podemos classificar tal transição como sendo de primeira

¹¹Também chamada de transição contínua.

ou de segunda ordem. Quando isso ocorre não identifica-se tal fenômeno como uma transição de fases, mas especificamente como um *crossover*. Ainda nesse caso, é possível localizar a temperatura de coexistência de fases e com isso o ponto (μ_q, T) no plano $T \times \mu$, através da determinação do máximo da derivada do parâmetro de ordem. Se estivéssemos diante de uma transição de fases propriamente dita, tal temperatura seria aquela na qual ocorreria a descontinuidade no parâmetro de ordem (transição de primeira ordem), ou em sua derivada (transição de segunda ordem). O segundo aspecto a se destacar, é o fato de que os máximos das derivadas dos parâmetros de ordem ocorrem para $\Delta T \simeq 9$ MeV, ou seja, podem ser considerados coincidentes para a faixa de temperaturas estudada. A importância dessa característica dos modelos PNJL, já destacada em [109, 110], está no fato de que as regiões localizadas antes e depois da temperatura dos máximos de $\frac{\partial \Phi}{\partial T}$ e $\frac{\partial \rho_{sq}}{\partial T}$, são compostas pelas mesmas fases termodinâmicas caracterizadas pelos respectivos parâmetros de ordem. Em outras palavras, para o exemplo da figura 4.3, temos que em $\mu_q = 0$, a região situada em $T_{max} < 215$ MeV é caracterizada *simultaneamente* pelas fases onde o sistema apresenta simetria quiral quebrada ($\rho_{sq} \neq 0$) e confinamento ($\Phi \simeq 0$). Já a região compreendida em $T_{max} > 215$ MeV, é composta pelas fases onde verificam-se simetria quiral restaurada ($\rho_{sq} \simeq 0$) e desconfinamento ($\Phi \neq 0$). Seguindo este procedimento para outros valores de μ_q e para as demais parametrizações do modelo PNJL, construímos os diagramas de fase dispostos na figura 4.4.

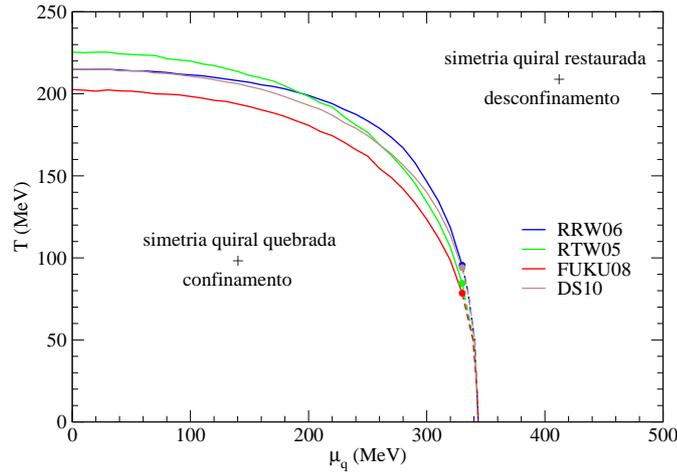


Figura 4.4: Diagramas de fase para os modelos PNJL no plano $T \times \mu_q$.

A figura 4.4 mostra que características distintas referentes ao tipo de transição de fase, são verificadas ao longo das linhas de coexistência dos modelos. As linhas cheias denotam o fenômeno de crossover, também observado para $\mu_q \neq 0$, enquanto que as linhas tracejadas

indicam uma transição de primeira ordem exibida pelos modelos PNJL. A determinação dos pontos no diagrama $T \times \mu$ nesse caso é feita exatamente da mesma forma como na seção 3.3 do capítulo 3. Na região de transições de fase de primeira ordem, ρ_{sq} e Φ exibem o comportamento descrito nas figuras 4.5a-figuras 4.5b.

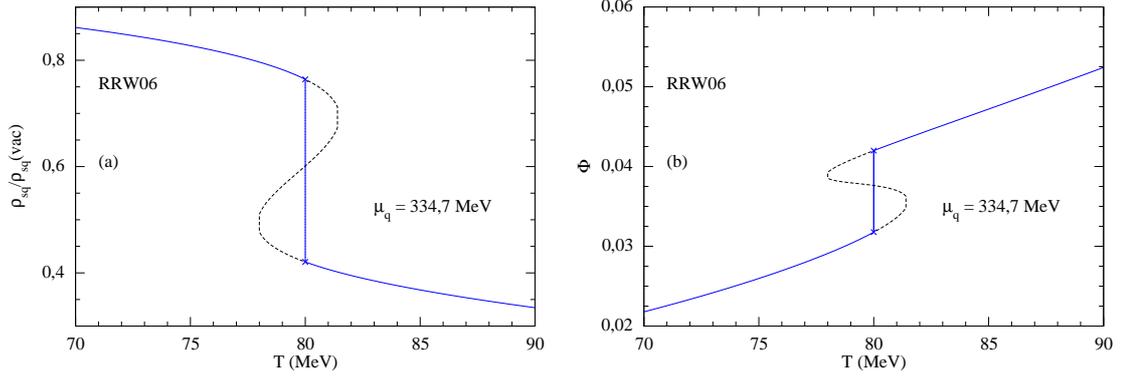


Figura 4.5: (a) $\rho_{sq}/\rho_{sq}^{vac}$ e (b) Φ em função da temperatura para $\mu_q = 334,7$ MeV da parametrização RRW06.

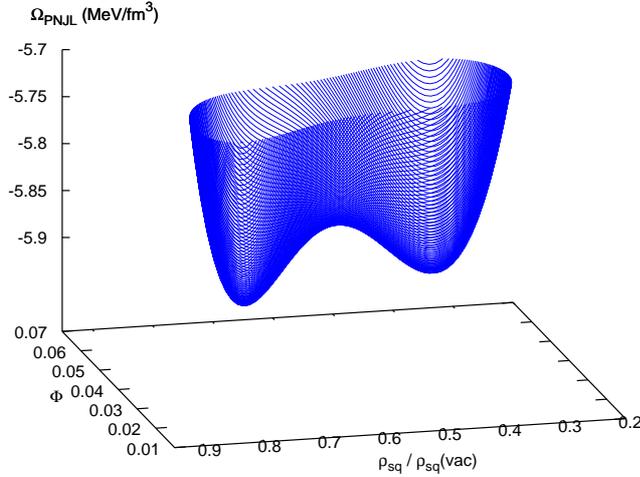


Figura 4.6: Ω_{PNJL} em função dos parâmetros de ordem para a parametrização RRW06 em $T = 80$ MeV e $\mu_q = 334,7$ MeV.

Note que tanto ρ_{sq} quanto Φ sofrem uma variação abrupta, característica das transições de primeira ordem. A temperatura de coexistência é determinada a partir da análise dos mínimos do grande potencial termodinâmico. A diferença nesse caso em relação ao método descrito no capítulo 3, é que agora Ω_{PNJL} é dado por uma superfície, já que dois são os parâmetros de ordem a serem considerados na determinação das fases termodinâmicas. Assim, a temperatura na qual os vales dessa superfície estejam a uma mesma altura¹², para um valor fixo de μ_q , é a

¹²Nesse caso Ω_{PNJL} é calculado sem as condições de minimização dadas por $\frac{\partial \Omega_{PNJL}}{\partial \rho_{sq}} = \frac{\partial \Omega_{PNJL}}{\partial \Phi} = 0$.

temperatura da descontinuidade dos parâmetros de ordem. Para o exemplo do modelo RRW06, temos que $T = 80$ MeV para $\mu_q = 334,7$ MeV, veja a figura 4.6. Outra possibilidade para a determinação da temperatura de coexistência, é proceder não com uma superfície mas com a curva Ω_{PNJL} em função de $\rho_{sq}/\rho_{sq}^{\text{vac}}$, obtendo Φ a partir de $\frac{\partial \Omega_{\text{PNJL}}}{\partial \Phi} = 0$. Assim, a busca torna-se idêntica à do capítulo 3, onde gráficos como o da figura 3.10 são também gerados para o modelo PNJL apenas substituindo-se m^* por $\rho_{sq}/\rho_{sq}^{\text{vac}}$.

Ainda sobre a figura 4.4, temos que os círculos entre as linhas cheias e tracejadas caracterizam o chamado *ponto crítico final* (CEP¹³), no qual a transição de fases muda de ordem. No caso da figura 4.4, a transição de fases de primeira ordem muda para um crossover. A localização exata do CEP depende do valor de M_0 usado para a massa corrente do quark, assim como do próprio modelo usado para a construção do diagrama de fases. O tipo de transição apresentada na QCD também mostra-se extremamente dependente de M_0 . Estudos mostram que a curva de coexistência da QCD no plano $T \times \mu$ pode apresentar somente transições de primeira ordem, transições de segunda e de primeira ordem, ou como no caso descrito anteriormente, crossover e transições de primeira ordem [132].

É importante ainda ressaltarmos aqui que, a característica de que as fases termodinâmicas do modelo PNJL estejam em uma mesma região do diagrama de fases, está diretamente associada com a coincidência dos picos de $\frac{\partial \Phi}{\partial T}$ e $\frac{\partial \rho_{sq}}{\partial T}$. Para os diagramas da figura 4.4, mesmo quando mais de um pico foi verificado para $\frac{\partial \Phi}{\partial T}$, escolhemos sempre aquele que coincide com o máximo de $\frac{\partial \rho_{sq}}{\partial T}$. Um exemplo onde diferentes picos são escolhidos pode ser encontrado na referência [133], onde tal diferença favorece o aparecimento da chamada fase *quarkônica*, prevista em [134]. Essa nova fase modifica o diagrama de fases da QCD de modo a incorporar uma região em que se observa a restauração da simetria quiral, porém ainda com quarks confinados [134].

4.3 Diagramas de fase hádron-quark

Os diagramas apresentados na figura 4.4 identificam fases de simetria quiral quebrada / restaurada e de confinamento / desconfinamento, porém referentes apenas aos quarks, já que foram obtidas unicamente a partir dos modelos PNJL, que possuem tais partículas como graus de liberdade. Se quisermos associar a região que apresenta simetria quiral quebrada e confinamento

¹³Do inglês critical end point.

à uma fase puramente hadrônica, precisamos necessariamente considerar um outro modelo distinto, que trata os hádrons como graus de liberdade fundamentais da teoria¹⁴. Nesta seção, utilizaremos os modelos não lineares do tipo $\sigma^3 - \sigma^4$ em conexão com os PNJL, para construir as curvas de coexistência e assim identificar as fases de hádrons e de quarks nos planos $T \times \mu$ e $T \times \rho$.

Os diagramas de fase conectando os modelos NLW e PNJL seguirão o critério de Gibbs de iguais temperatura, $T_H = T_Q$, pressão, $P_H = P_Q$ e potencial químico, $\mu_H = \mu_Q$, onde a pressão dos modelos de quarks será dada pela pressão do modelo PNJL, expressão (4.19) e, a pressão hadrônica por

$$P_{\text{NLW}} = \frac{G_\omega^2 \rho^2}{2} - \frac{(\Delta M)^2}{2G_\sigma^2} - \frac{a(\Delta M)^3}{3} - \frac{b(\Delta M)^4}{4} + \frac{\gamma}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^4}{(k^2 + M^{*2})^{1/2}} [f(k, T) + \bar{f}(k, T)] dk. \quad (4.31)$$

Os índices H e Q representam, respectivamente, as fases de hádrons e quarks. Além disso, nos referiremos aos diagramas de fase como sendo as curvas “NLW-PNJL”. Assim, a curva gerada por exemplo pela conexão entre o modelo hadrônico NLSH e o modelo de quarks RTW05, será denotada por NLSH-RTW05. Junto ao critério de Gibbs, adotamos também como vínculo adicional a situação na qual as fases confinadas dos modelos NLW¹⁵ se conectem apenas com as fases desconfiadas do modelo PNJL, ou seja, consideraremos apenas soluções para o critério de Gibbs que satisfaçam esta condição. Um exemplo desta restrição é mostrado nas figuras 4.7a-4.7b para a transição NL3-PNJL¹⁶ em $\mu_B = 3\mu_q = 300$ MeV.

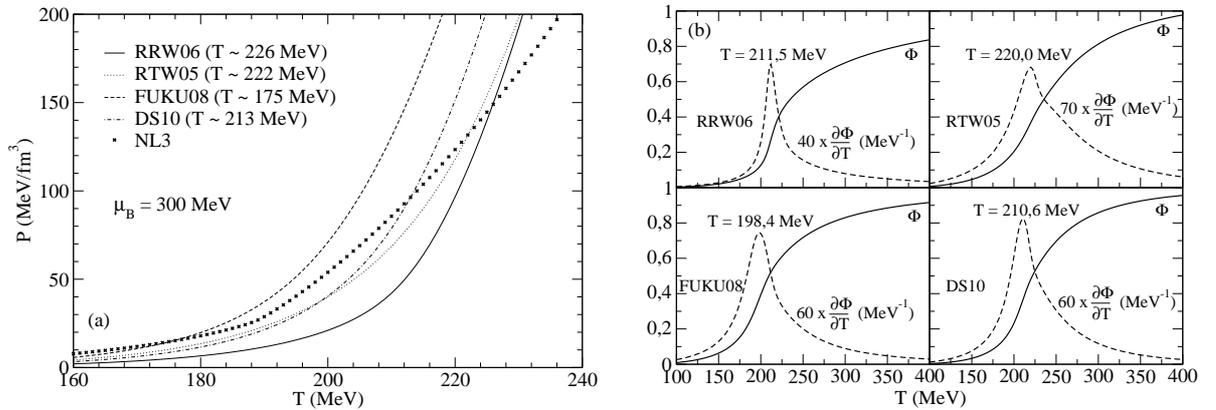


Figura 4.7: (a) P versus T para os modelos PNJL e o hadrônico NL3. (b) Φ e sua derivada, para os modelos PNJL em função de T . Ambas as figuras para $\mu_B = 300$ MeV.

¹⁴Outra opção é considerar um modelo híbrido, como o da referência [126].

¹⁵Por construção, já que se tratam de hádrons e portanto quarks confinados.

¹⁶Transição em que o modelo NL3 se conecta com todos os quatro modelos PNJL.

Note que as pressões dos modelos FUKU08 e NL3 se cruzam em $T \sim 175$ MeV, porém já que nesta temperatura o modelo FUKU08 ainda está em sua fase confinada (veja o quadro esquerdo inferior da figura 4.7b), não consideramos este cruzamento no diagrama de fases NL3-FUKU08. Por outro lado, as pressões dos modelos RRW06 e NL3 interceptam-se em $T \sim 226$ MeV, onde o modelo RRW06 já indica desconfinamento (quadro esquerdo superior da figura 4.7b), logo, o ponto no qual $T = 226$ MeV e $\mu_B = 300$ MeV contribui para a curva NL3-RRW06.

Na figura 4.8, mostramos os diagramas de fase NLW-PNJL para todos os modelos não lineares do tipo $\sigma^3 - \sigma^4$, incluindo também o modelo linear de Walecka, conectados com as quatro diferentes parametrizações do modelo PNJL.

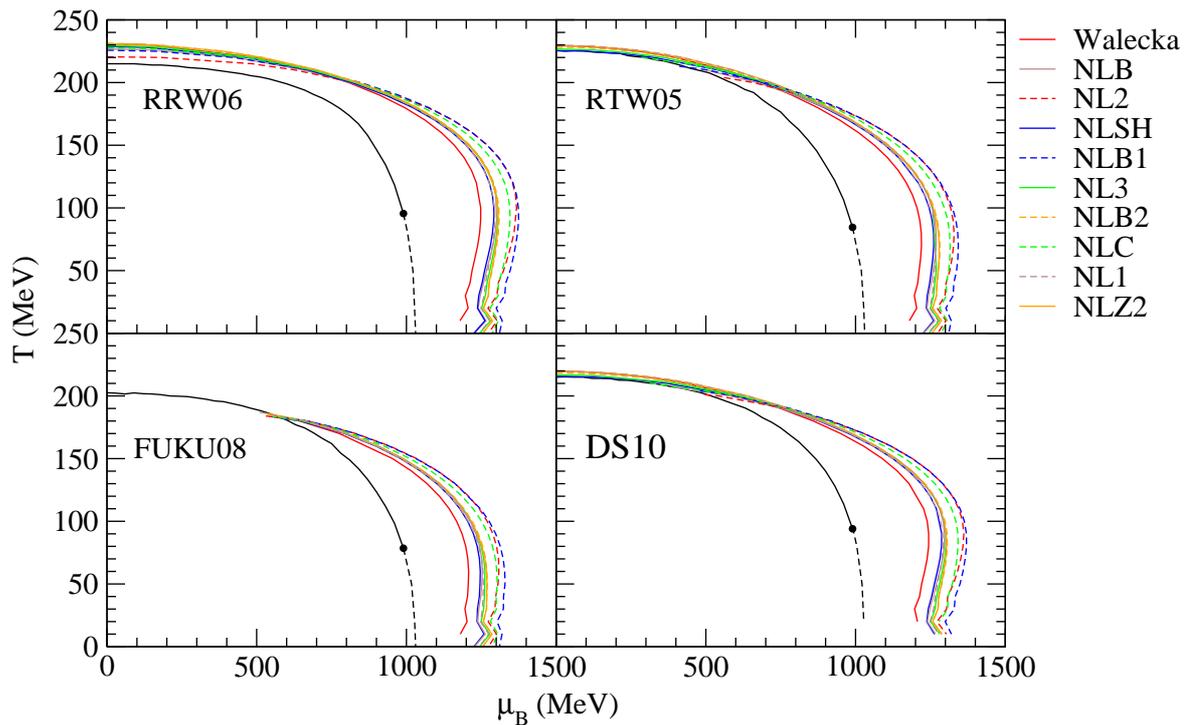


Figura 4.8: Diagramas de fase NLW-PNJL no plano $T \times \mu_B$. Incluídos também os diagramas da figura 4.4.

Cada quadro desta figura mostra o diagrama de fases onde a conexão entre os modelos é feita mantendo fixo o modelo de quarks indicado, porém mudando o modelo hadrônico. Para efeito de comparação, também dispomos as curvas de transição da figura 4.4, obtidas a partir de cada parametrização PNJL seguindo o método já abordado na subseção 4.2.5. Como características gerais, pode-se destacar que a tendência mostrada por esses diagramas, é apresentar

uma fase confinada (hadrônica) maior que a determinada via modelos PNJL. Note também que a parametrização FUKU08 só permite a construção de curvas NLW-FUKU08 a partir de $\mu_B \simeq 500$ MeV. Para potenciais químicos mais baixos não há igualdade entre as pressões P_{NLW} e P_{FUKU08} para uma mesma temperatura, ou tal igualdade ocorre nas condições já exemplificadas na figura 4.7 (caso do modelo NL3 e FUKU08).

Na figura 4.9, apresentamos os mesmos diagramas porém de uma forma diferente. Agora, cada figura refere-se à curva NLW-PNJL onde o modelo hadrônico é mantido fixo e a parametrização PNJL é mudada, por exemplo, a figura 4.9a contém as curvas Walecka-RRW06, Walecka-RTW05, Walecka-FUKU08 e Walecka-DS10. De forma a unificar todo o estudo dos diagramas de fase que podem ser obtidos com o uso dos modelos hadrônicos, incluímos também nas mesmas figuras os respectivos diagramas (em vermelho) gerados por tais modelos, referentes às transições nucleons/plasma de nucleons-antinucleons (figura 3.12) e líquido-gás (versão no plano $T \times \mu$ das curvas da figura 3.4).

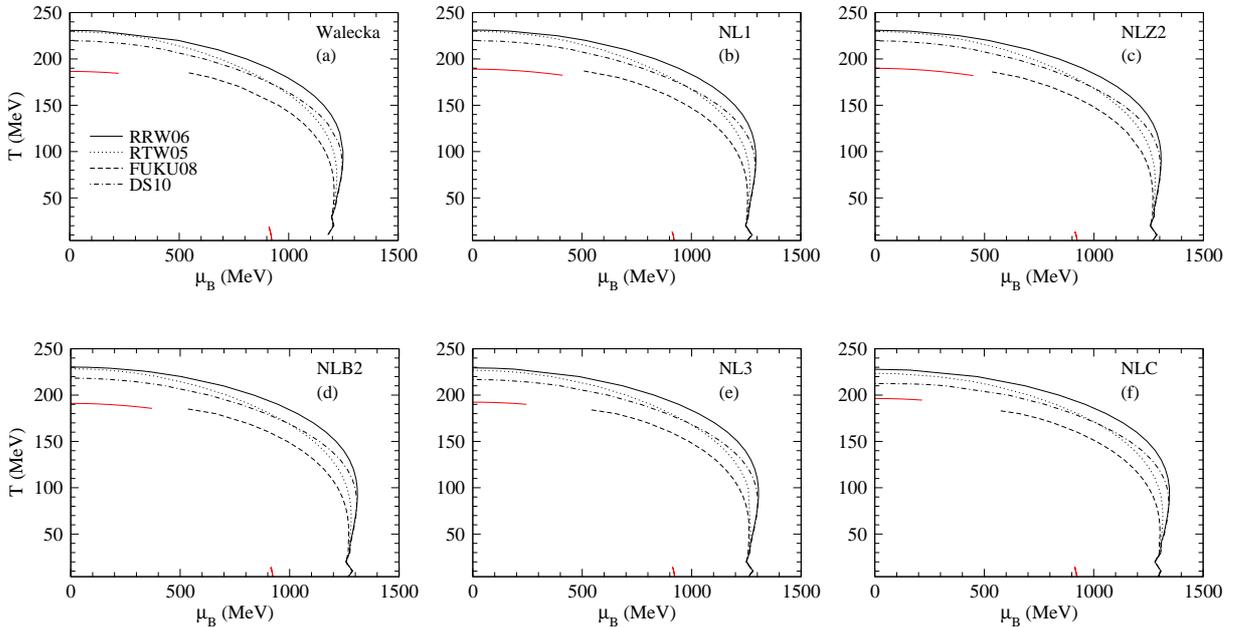


Figura 4.9: Diagramas de fase NLW-PNJL em comparação com as curvas de transição dos modelos hadrônicos.

Essa figura mostra que embora os modelos NLW apresentem equações de estado “duras” e “suaves”, seus respectivos diagramas NLW-PNJL são muito similares. Note que as curvas encontram-se em torno de $1200 < \mu_B < 1300$ MeV para $T = 0$. Sobre os diagramas associados à transição nucleon/plasma de nucleons-antinucleons dos modelos NLW, note que estes estão posicionados dentro da parte hadrônica prevista pelas transições NLW-PNJL, indicando assim

que tal transição ocorre antes do surgimento da fase de quarks livres, como é de se esperar. Note ainda que a transição líquido-gás também se estabelece, de forma coerente, completamente dentro da mesma fase hadrônica. Assim, pode-se dizer que a rota de transição da matéria nuclear é a seguinte: conforme aumenta-se a temperatura, o sistema nuclear exhibe uma coexistência de fases líquida e gasosa até que a temperatura crítica dessa transição seja atingida e assim, apenas a fase de gás se estabeleça. A partir de então, um aumento ainda maior na temperatura passa a favorecer o surgimento de antipartículas no sistema até o ponto em que os graus de liberdade de quarks coexistam com os nucleons. A partir de então, observa-se finalmente o plasma de quarks e glúons como partículas livres¹⁷.

Ainda utilizando a notação da figura 4.9, apresentamos na figura 4.10, as curvas de transição NLW-PNJL agora no plano $T \times \rho/\rho_0$, que exhibe explicitamente as regiões de hádrons (esquerda), quarks livres (direita) e a composta simultaneamente pelos dois graus de liberdade (meio).

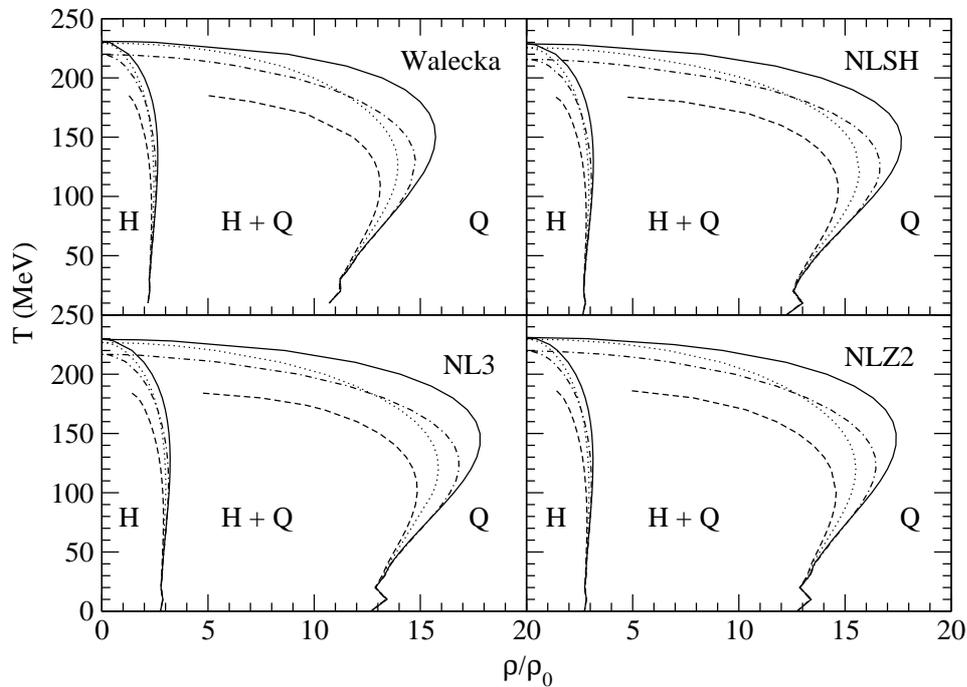


Figura 4.10: Diagramas de fase no plano $T \times \rho/\rho_0$ para as transições Walecka-PNJL, NLSH-PNJL, NL3-PNJL e NLZ2-PNJL.

Note que a transição NLW-RRW06 (NLW-FUKU08) é a que exhibe a maior (menor) fase

¹⁷Tal rota também pode ser entendida em termos do aumento da densidade do sistema.

mista de hádrons e quarks. Embora tenhamos feito nessa figura a transição entre os modelos PNJL e apenas quatro hadrônicos, Walecka, NLSH, NL3 e NLZ2, destacamos que o mesmo comportamento é observado para as transições com os demais modelos NLW.

Como última observação desta seção, ressaltamos que o procedimento adotado aqui para a construção dos diagramas NLW-PNJL difere do adotado na referência [135], onde os autores subtraem uma constante B de P_{PNJL} de modo a fazer com que as transições NLW-PNJL e àquelas da figura 4.4 comecem em $\mu_B = 0$ a partir de uma mesma temperatura. Se tivéssemos seguido tal método, as curvas referentes às transições NLW-PNJL da figura 4.8, deveriam sair em $\mu_B = 0$ de $T = 215,0, 225,4, 202,6$ e $215,0$ MeV, seguindo, respectivamente, o comportamento das parametrizações RRW06, RTW05, FUKU08 e DS10 dos modelos PNJL. Aqui, a única exigência feita foi a de anular P_{PNJL} no vácuo, adicionando Ω_{vac} na expressão (4.19).

4.3.1 Comparação com o modelo MIT

Para ter uma ideia do efeito do confinamento dinâmico do modelo PNJL, calculamos também as transições, chamadas aqui de NLW-MIT, obtidas via critério de Gibbs, onde os modelos NLW foram conectados com o modelo de sacola MIT [104], cuja pressão e densidade de quarks são, respectivamente, dados por [136, 137]

$$P_{\text{MIT}} = \frac{8\pi^2 T^4}{45} \left(1 - \frac{15\alpha_s}{4\pi}\right) + N_f \left[\frac{7\pi^2 T^4}{60} \left(1 - \frac{50\alpha_s}{21\pi}\right) + \left(\frac{\mu_q^2 T^2}{2} + \frac{\mu_q^4}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{2\alpha_s}{\pi}\right) \right] - B \quad (4.32)$$

e

$$\rho_{\text{MIT}} = \frac{1}{3} N_f \left(\mu_q T^2 + \frac{\mu_q^3}{\pi^2} \right) \left(1 - \frac{2\alpha_s}{\pi} \right), \quad (4.33)$$

onde B é a constante de sacola e α_s é a constante de acoplamento da QCD, que será tomada como nula em nossa análise. Assim, compararemos um modelo cujo confinamento é dinâmico (PNJL), ou seja, depende da temperatura ou potencial químico, com outro no qual o confinamento dos quarks é representado basicamente por uma constante positiva subtraída da pressão.

Na figura 4.11, mostramos as transições NLW-MIT com a constante de sacola fixada em $B^{1/4} = 238$ MeV.

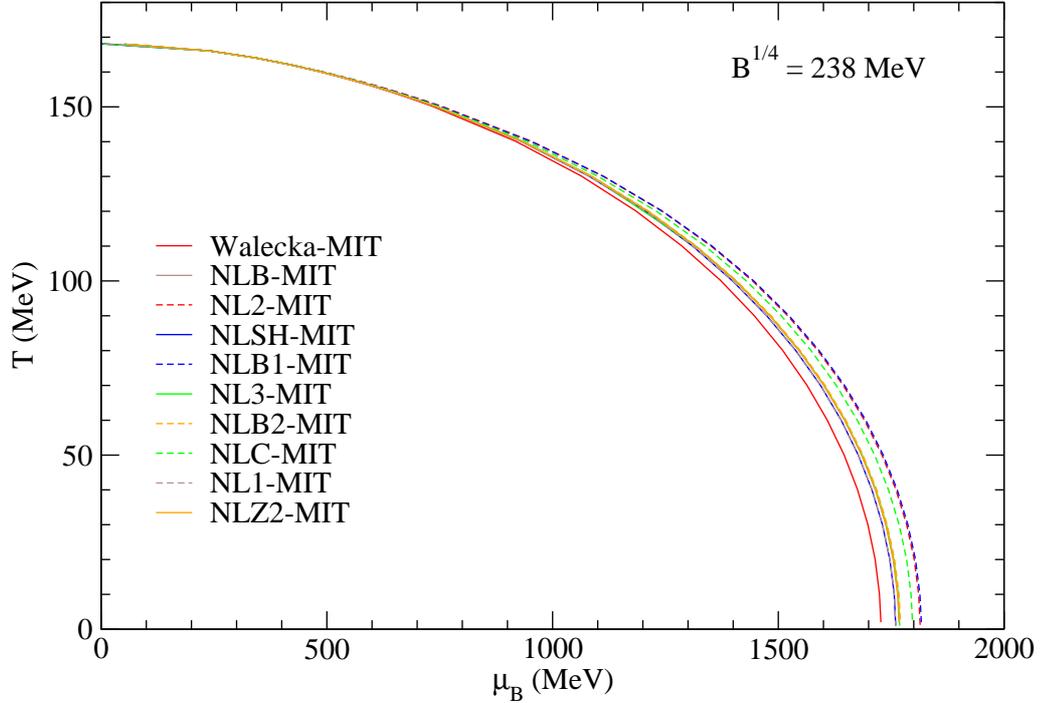


Figura 4.11: Diagramas de fase para as transições NLW-MIT com $B^{1/4} = 238$ MeV e $\alpha_s = 0$.

Alguns pontos interessantes sobre tais transições devem ser ressaltados. Note que diferentemente dos diagramas NLW-PNJL, todas as curvas NLW-MIT começam na mesma temperatura ($T = 168,1$ MeV) para $\mu_B = 0$, que aliás é menor que as temperaturas previstas pelas transições NLW-PNJL, todas maiores que 200 MeV. Um ponto em comum entre as transições é o comportamento similar apresentado em $T = 0$, onde todas as curvas compõem uma faixa estreita nesta região. O intervalo para o potencial químico é de $1710 < \mu_B < 1810$ MeV para as transições NLW-MIT, o que muda significativamente se os modelos não lineares de Walecka do tipo $\sigma^3 - \sigma^4$ forem substituídos na transição por aqueles que apresentam termos de ordens superiores no campo vetorial, ou mesmo termos que misturam os campos σ and ω_μ . Este é o caso, por exemplo, das transições estudadas na referência [138]. É preciso deixar claro que o comportamento apresentado nas figuras 4.8 e 4.11 mostra-se característico de transições nas quais os modelos hadrônicos possuem apenas as autointerações cúbicas e quárticas do campo escalar σ .

A comparação explícita entre as curvas NLW-MIT e NLW-PNJL para os modelos utilizados neste capítulo é mostrada na figura 4.12 a seguir.

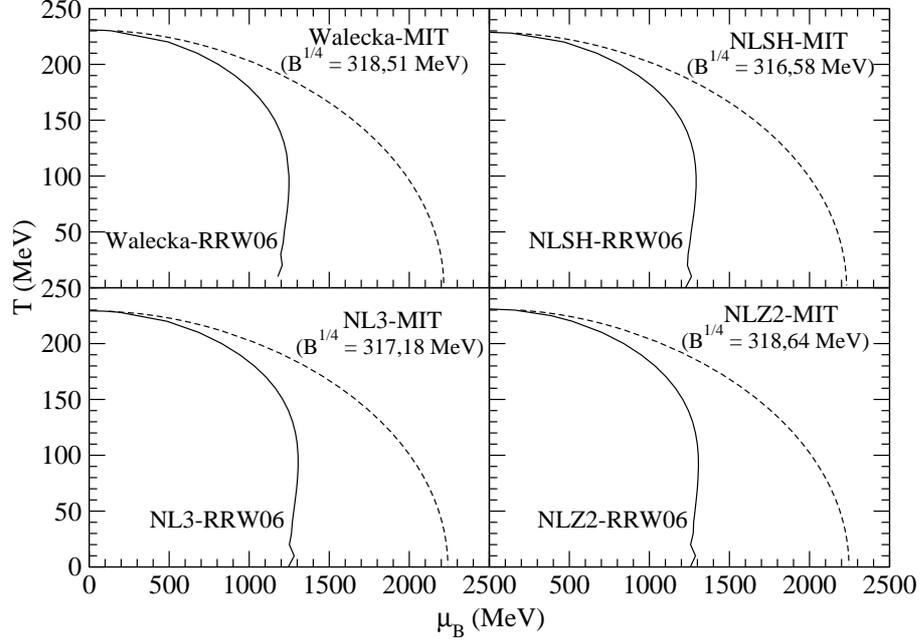


Figura 4.12: Diagramas de fase no plano $T \times \mu$ das transições NLW-PNJL (curvas cheias) e NLW-MIT (curvas tracejadas). Os valores da constante B (veja o texto abaixo) são indicados entre parênteses.

Para construir ambas transições mostradas na figura 4.12, escolhemos forçar os diagramas a começarem na mesma temperatura para $\mu_B = 0$. Isso foi feito mantendo-se inalterados os diagramas NLW-PNJL da figura 4.8, porém modificando o valor da constante B na expressão (4.32) de forma a garantir que as curvas NLW-MIT satisfizessem tal condição. Assim, restringimos a comparação somente aos diagramas NLW-PNJL fechados, ou seja, àqueles que começam a apresentar soluções ao critério de Gibbs a partir de $\mu_B = 0$. Esse não é o caso das curvas NLW-FUKU08 (quadro esquerdo inferior da figura 4.8) e dos diagramas específicos NLB-RTW05, NLC-RTW05, NLB1-RTW05, NL2-RTW05, NLB-DS10 e NLC-DS10. Todos os demais diagramas podem ser incluídos nesse procedimento.

A comparação entre os diagramas da figura 4.12 mostra que a região hadrônica prevista pelas transições NLW-PNJL é sempre menor que a obtida via pelas NLW-MIT, ou seja, os graus de liberdade de quarks começam a ser liberados antes nas transições NLW-PNJL, devido ao efeito de confinamento dinâmico dos modelos PNJL. Embora tenhamos apresentado somente quatro transições específicas, ressaltamos que todos os outros diagramas seguem as mesmas características, assim, as curvas NLW-PNJL/NLW-MIT apresentadas na figura 4.12 podem ser consideradas como representantes de todas as demais transições não mostradas. Uma visão ainda maior desses diagramas é mostrada no plano $T \times \rho$ na figura 4.13.

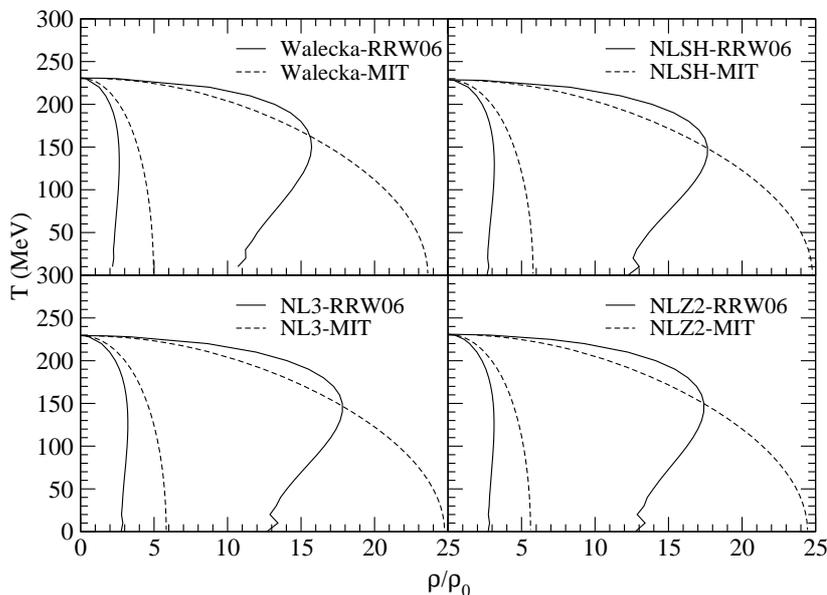


Figura 4.13: Diagramas de fase no plano $T \times \rho/\rho_0$ das transições NLW-PNJL e NLW-MIT.

Note que além de apresentarem maior região hadrônica, que é delimitada pelas curvas da esquerda, os diagramas NLW-MIT exibem uma fase mista, contendo hádrons e quarks, também maior. Novamente na figura 4.13, os diagramas apresentados representam qualitativamente as características gerais das demais transições. Os principais resultados desse capítulo estão apresentados nas referências [139] e [140].

Como último comentário, reforçamos que os estudos iniciais realizados nas transições NLW-PNJL e NLW-MIT se deram conectando os modelos NLW, que incluem prótons, nêutrons e os mésons σ e ω em sua estrutura, com as versões que contêm os quarks u e d dos modelos PNJL e MIT. Assim, geramos os diagramas que especificam as fases hadrônica e de quarks livres do sistema. Experimentos em colisões de íons pesados indicam fortemente o surgimento de várias outras partículas [91], incluindo os híperons¹⁸, no regime de altas temperaturas. Estas podem ser adicionadas em modelos hadrônicos, como por exemplo nos modelos NLW utilizados nesta tese. Neste caso, o estudo da transição hádron-quark deve necessariamente utilizar versões que incluam também o quark s nos modelos efetivos da QCD. É de nosso interesse realizar tal generalização no modelo PNJL e assim poder usá-lo em conjunto com os modelos hadrônicos mais sofisticados¹⁹, com o objetivo de investigar ainda mais profundamente e de forma mais realista a transição hádron-quark.

¹⁸Partículas que contêm pelo menos um quark estranho em sua composição.

¹⁹Que incluam por exemplo o octeto e o decuplete bariônico, assim como os nonetos mesônicos.

Conclusões

Um dos objetivos desta tese foi explorar as principais características dos modelos hadrônicos relativísticos, representados pelas conhecidas parametrizações não lineares de Walecka, a fim de extrair o máximo de informações referentes à descrição da matéria nuclear infinita. Assim, obtivemos suas equações de estado em temperatura nula e estudamos suas similaridades com os também relativísticos modelos não lineares de contato, caracterizados pelo alcance nulo da interação nucleon-nucleon. No regime de temperatura finita, um destaque maior foi dado às previsões dos modelos NLW sobre o fenômeno das transições de fase, tanto em temperaturas moderadas, onde obtivemos os parâmetros críticos e flash dos modelos em questão, dentre outros resultados, quanto em altas temperaturas, onde analisamos a específica transição de fase hádron-quark, utilizando para a fase de quarks o relativamente recente modelo PNJL, onde o efeito do confinamento da QCD é incorporado em sua estrutura via inclusão do laço de Polyakov. Também dispensamos maiores atenções na termodinâmica desse modelo, mostrando como algumas características da QCD são interpretadas nessa abordagem fenomenológica. A seguir, destacaremos os pontos que julgamos serem os mais relevantes e também alguns comentários acerca dos resultados apresentados ao longo desta tese.

- Sobre a comparação dos modelos não lineares do tipo $\sigma^3 - \sigma^4$ com os modelos NLPC, construídos para reproduzirem os mesmos observáveis dos modelos NLW, verificamos que ambos são praticamente indistinguíveis em uma região de densidades dada por $\rho/\rho_0 < 1$, veja por exemplo a figura 2.1. A partir da densidade de saturação, todas as grandezas termodinâmicas dos modelos NLPC começam a apresentar um desvio maior em relação aos modelos NLW, conforme o valor da incompressibilidade. Modelos de maior incompressibilidade tendem a ignorar a distinção entre a estrutura de alcance finito dos modelos NLW e a de alcance zero dos modelos NLPC (figuras 2.1 e 2.2, com uma única exceção para o modelo NL2). Tal fato parece ser consistente com a total equivalência entre modelo linear de Walecka, que apresenta um valor bastante alto para a incompressibilidade, $K \simeq 550$ MeV, e o modelo linear de contato.

- Ainda para ambos os modelos NLW e NLPC, calculamos seus coeficientes naturais, g_i e

a razão $G = |g_i|^{max}/|g_j|^{min}$, para um valor fixo da energia de ligação e densidade de saturação da matéria nuclear infinita. Os resultados apresentados nas figuras 2.4 e 2.5 mostram que as condições adotadas para determinar se um determinado modelo é ou não natural, são reduzidas apenas à análise individual dos coeficientes g_i (que deve respeitar o critério $0,4 < |g_i| < 4,0$), já que a condição $G < 10$ é sempre satisfeita para as duas classes de modelos, veja a figura 2.4. Verificamos ainda (veja a figura 2.5) que para $K \gtrsim 340$ MeV, os modelos NLW tornam-se não naturais para qualquer valor de massa efetiva, já que o coeficiente g_3 é sempre menor que 0,4. Situação oposta é observada para os modelos NLPC, onde a condição de naturalidade é satisfeita para os coeficientes g_1 , g_2 e g_3 , porém é extremamente dependente dos valores de K e M^* para o parâmetro g_4 .

- Propusemos através da expressão (2.18), uma forma de se obter os coeficientes naturais g_3 e g_4 dos modelos NLPC a partir dos respectivos coeficientes dos modelos NLW. As tabelas 2.4 e 2.5 mostram que tal aproximação, baseada na análise dimensional do modelo modificado MNLW, parece funcionar razoavelmente bem.

- A aplicação do limite não relativístico nos modelos NLPC também gerou resultados interessantes. O primeiro deles é que a expressão para a densidade de energia nessa aproximação, equação (2.31), pode ser considerada como uma versão generalizada da densidade de energia do modelo não relativístico de Skyrme, veja a equação (2.34). Algumas parametrizações de Skyrme podem ser obtidas do limite não relativístico, tomando-se os casos particulares em que (i) as constantes de acoplamento A' e B' são nulas, obtendo então os modelos de Skyrme nos quais σ ou t_3 são iguais a zero, (ii) o truncamento da expressão (2.31) até a terceira ordem em ρ gera as parametrizações de Skyrme em que $\sigma = 1$ e $t \neq 0$ e, (iii) o parâmetro B é tomado como nulo, obtendo então alguns modelos não convencionais de Skyrme tais como os GS1-GS6. Ainda dentro dessa abordagem, estudamos o comportamento da densidade de energia gerada a partir do limite não relativístico em comparação com sua versão exata, dada pelos modelos NLPC, e com a densidade de energia dos modelos de Skyrme (veja as figuras 2.6 e 2.7). Como uma tendência geral, foi verificada uma concordância entre as curvas que depende basicamente do valor da incompressibilidade dos modelos analisados. Quanto maior a incompressibilidade, mais próximos tornam-se o limite não relativístico (eq. 2.31) e o modelo exato analisado, sendo este o modelo NLPC (eq. 2.7), ou o de Skyrme (eq. 2.34).

- No regime de temperaturas moderadas, verificamos que as curvas de coexistência da figura 3.4, escalonadas pelos parâmetros críticos T_c e ρ_c , indicam uma forte dependência de

modelos na região líquida do sistema, caracterizada por $\rho/\rho_c > 1$, o que não ocorre para a fase gasosa ($\rho/\rho_c < 1$), onde um colapso das diversas curvas é estabelecido. Para as curvas spinodais da figura 3.6, a dependência de modelos é verificada em uma região ainda maior, englobando a fase líquida e a gasosa, o que também pode ser observado na figura 3.5. Ressaltamos que essas são características gerais dos modelos não lineares de Walecka, tanto para as parametrizações que apresentam apenas os termos $\sigma^3 - \sigma^4$, quanto para aquelas que possuem autointerações no campo vetorial ou ainda a particular FSUGold, na qual um termo misto de interação entre os campos ω_μ e $\vec{\rho}_\mu$ é incluído. No total, foram estudadas exatamente 14 parametrizações.

- Ainda na figura 3.4, pode-se concluir como uma tendência geral, que quanto mais “dura” é a equação de estado, ou seja, quanto maior é a incompressibilidade do modelo, menor é a densidade correspondente à fronteira da fase líquida do sistema, ou seja, modelos de alta incompressibilidade apresentam uma fase líquida maior. Note que a região líquida mostrada na figura 3.4 é delimitada pelos modelos extremos de incompressibilidade, Walecka ($K = 554$ MeV) e NLZ2 ($K = 172$ MeV).

- Investigamos também o comportamento da incompressibilidade dos modelos estudados, em função da temperatura, porém calculando $K = 9(\partial P/\partial \rho)_{\rho=\bar{\rho}}$ para duas densidades distintas, uma delas tomadas como a densidade da fase metaestável onde a pressão do sistema é nula, e outra como sendo a densidade limite da fase líquida. As figuras 3.7 e 3.8 mostram que as incompressibilidades escalonadas colapsam em uma banda bastante estreita, o que ocorre para todos os modelos analisados. Tal resultado é um tanto quanto inesperado, já que o colapso é estabelecido mesmo na fase líquida do sistema onde, como mostra a figura 3.4, a dependência de modelos é verificada. É interessante observar que tal colapso acontece não apenas nos modelos hadrônicos estudados mas também naqueles extraídos das referências [85, 86, 87], que apresentam estruturas distintas, sendo um deles obtido de forma não relativística e os demais oriundos de cálculos microscópicos envolvendo diretamente o uso de um potencial nucleon-nucleon.

- No regime de altas temperaturas, estudamos também um tipo transição de fases dos modelos não lineares que é caracterizado pela queda abrupta da massa efetiva do nucleon em função da temperatura (transição de primeira ordem). Verificamos que esse tipo de transição é extremamente dependente de modelos, conforme ilustra a figura 3.9 onde $M^* \times T$ é obtido em $\mu_B = 0$ para todos os 14 modelos. Baseados na mesma figura, construímos os diagramas $T \times \mu$ apenas dos 6 modelos que apresentam transição nesse regime. O procedimento utilizado para a

construção de tais diagramas foi o mesmo utilizado na referência [90] e consistiu na busca dos mínimos do grande potencial termodinâmico dos modelos não lineares, $-P$, que apresentam um único valor de pressão, veja a figura 3.10. Assim como apontado na referência [89] para o modelo linear de Walecka, também nos deparamos com diagramas de fases nos quais as transições de primeira ordem deixam de existir a partir de um certo valor de T e μ_B , conforme indica a figura 3.12. A localização exata desse ponto crítico também é fortemente dependente de modelos.

- No capítulo 4, estendemos o estudo em altas temperaturas para a termodinâmica do modelo PNJL, onde o fenômeno do confinamento dos quarks é incluído em sua estrutura via laço de Polyakov, grandeza que está diretamente relacionada com a chamada simetria de centro (veja a subseção 4.2.1). Obtivemos também suas equações de estado em temperatura finita, que são exatamente as mesmas do conhecido modelo NJL, onde as distribuições usais de Fermi-Dirac são substituídas pelas versões generalizadas (que incorporam Φ) dadas pelas expressões (4.15) e (4.16). Para os quatro diferentes modelos PNJL, RTW05, RRW06, FUKU08 e DS10, sendo esta última uma parametrização que leva em conta uma dependência adicional com o potencial químico, comparamos na figura 4.2 algumas grandezas termodinâmicas em função da temperatura, verificando que todos os modelos descrevem muito bem os dados de QCD na rede pelo menos no regime de $\mu_q = 0$. Usando ainda modelo PNJL, também verificamos via análise dos parâmetros de ordem Φ e ρ_{sq} , que seus diagramas de fase no plano $T \times \mu$ (figura 4.4), exibem regiões onde observam-se simultaneamente simetria quiral quebrada com confinamento, e simetria quiral restaurada com desconfinamento, já que tal modelo apresenta apenas quarks como graus de liberdade. A distinção entre transições de fase de primeira ordem e crossover também foi estudada nessas curvas de transição.

- Ainda no último capítulo, usamos os modelos NLW junto aos PNJL, para construir os específicos diagramas de fase hádron-quark (NLW-PNJL) mostrados na figura 4.8. Verificamos uma tendência desses diagramas englobarem as curvas geradas exclusivamente pelos modelos PNJL, com exceção da transição NLW-FUKU08 e algumas envolvendo os modelos RTW05 e DS10. Lembramos ainda que tais curvas foram obtidas a partir do critério de Gibbs e com o vínculo adicional de fazer com que as fases hadrônicas dos modelos NLW se conectassem apenas com as fases desconfiadas do modelo PNJL, veja o exemplo da transição NL3-PNJL na figura 4.7. Outro resultado desta aplicação, exibido na figura 4.9, mostra que a fase de quarks livres prevista pelas transições NLW-PNJL, ocorre depois da formação do plasma de nucleon-antinucleon, caracterizado pelos diagramas de fase gerados exclusivamente pelos modelos NLW

(veja a figura 3.12). Como uma última análise, comparamos as transições NLW-PNJL com as NLW-MIT, obtidas com o critério de Gibbs satisfeito pela junção dos modelos NLW e o modelo de sacola MIT, que incorpora o confinamento através da adição de uma constante em suas equações de estado. Verificamos nas figuras 4.12 e 4.13, que o efeito do confinamento dinâmico presente no modelo PNJL, faz com que as transições NLW-PNJL gerem fases hadrônicas e mistas menores que as previstas pela transição NLW-MIT.

Os estudos contidos nessa tese ainda sugerem o aprofundamento de alguns temas, como por exemplo, a utilização dos modelos NLPC em temperatura finita¹ para a construção dos diagramas de fase do tipo líquido-gás da matéria nuclear. Também poder-se-ia testar se tais modelos continuariam a exibir os colapsos mostrados nas curvas da incompressibilidade em função da temperatura, ou mesmo testá-los ainda em nível de temperatura nula, na descrição de estrelas de nêutrons, aplicação ainda não explorada para esse tipo de modelo hadrônico. Sobre o modelo PNJL, uma generalização natural seria a inclusão do quark estranho em sua estrutura e assim verificar sua influência direta tanto no diagrama de fases gerado exclusivamente pelo próprio modelo quanto no diagrama hádron-quark, analisando assim dentre outras fenomenologias, a possibilidade de ocorrência da fase quarkiônica para as diferentes parametrizações. Para tanto, faz-se necessário a inclusão de híperons nos modelos NLW.

¹Um estudo exploratório já foi iniciado na própria referência [47].

APÊNDICE A – Notações, convenções e definições

Nesse apêndice são apresentadas as notações, convenções e algumas definições utilizadas ao longo da tese.

Utilizamos o sistema natural de unidades onde $\hbar = c = k_B = 1$. Assim, escrevem-se os quadri-vetores contravariantes e covariantes como

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) \quad \text{e} \quad (\text{A.1})$$

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (t, -x, -y, -z). \quad (\text{A.2})$$

A relação entre essas duas quantidades é expressa por

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu, \quad (\text{A.3})$$

onde a soma corre sobre todos os índices repetidos, sendo $g_{\mu\nu}$ o tensor métrico no espaço de Minkowski, dado por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Os índices gregos referem-se às componentes espaço-tempo no espaço de Minkowski, com valores $\mu, \nu = \{0, 1, 2, 3\}$. Os índices latinos correspondem às componentes espaciais do vetor tridimensional usual, sendo $i, j = \{1, 2, 3\}$.

Para as derivadas covariante e contravariante, temos que

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_0, \partial_i) \quad \text{e} \quad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = (\partial^0, -\partial^i), \quad (\text{A.5})$$

o que consequentemente gera $\partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \square$.

O produto escalar de dois quadri-vetores tem a forma

$$a \cdot b = a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu = a_0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b}. \quad (\text{A.6})$$

Para uma partícula livre de massa M , a equação de Dirac é dada por

$$(\vec{\alpha} \cdot \vec{k} + \beta M) \psi(x, t) = \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t}, \quad (\text{A.7})$$

onde $\psi(x, t)$ é um spinor de quatro componentes e, $\vec{\alpha}$ e β são dados por

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad (\text{A.8})$$

onde matrizes de Pauli, dadas pelas componentes de $\vec{\sigma}$, e a matriz I são definidas como

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

As matrizes α^i e β possuem as seguintes propriedades

$$\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i = \{\alpha^i, \alpha^j\} = 2g^{ij}, \quad (\text{A.10})$$

$$\beta \alpha^i + \alpha^i \beta = \{\beta, \alpha^i\} = 2\delta^{ij} \quad \text{e} \quad (\text{A.11})$$

$$(\alpha^i)^2 = (\beta)^2 = 1. \quad (\text{A.12})$$

Em sua forma covariante, a equação de Dirac dada em (A.7) é escrita como

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - M) \psi(x, t) = 0, \quad (\text{A.13})$$

onde $\gamma_\mu \partial^\mu = \gamma_0 \partial^0 + \gamma_i \partial^i$, com as matrizes γ^μ definidas como

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \gamma^i = \beta \alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.14})$$

Tais matrizes obedecem às seguintes relações de anticomutação

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (\text{A.15})$$

com $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$. Ainda uma quinta matriz γ é definida como sendo o produto das demais,

$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ e apresenta as seguintes propriedades,

$$(\gamma^5)^\dagger = \gamma^5, \quad (\gamma^5)^2 = I \quad \text{e} \quad \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0. \quad (\text{A.16})$$

Finalmente, as matrizes de Gell-Mann são definidas como

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

com as seguintes relações de comutação,

$$[\lambda_a, \lambda_b] = 2if_{abc}\lambda_c. \quad (\text{A.18})$$

As chamadas constantes de estrutura são dadas por

$$f_{123} = 1, \quad f_{147} = f_{165} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{376} = \frac{1}{2}, \quad \text{e} \quad f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (\text{A.19})$$

APÊNDICE B – Derivadas dos campos mesônicos

O cálculo de algumas quantidades relativas aos modelos não-lineares de Walecka, tais como incompressibilidade e as derivadas da energia de simetria, L e K_{sym} , só podem ser obtidas através do cálculo das derivadas dos campos mesônicos da teoria com relação à densidade. Este procedimento é feito de forma implícita já que os campos σ e ω não são explicitamente determinados, veja as equações (1.19) e (1.20). Considerando a matéria nuclear simétrica onde $y = 1/2$, ou seja, para $\bar{\rho}_0 = 0$, temos que a derivada dos campos σ e ω_0 com relação a ρ são dadas por

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \rho} = \frac{a_1 b_2 + a_2 b_3}{a_1 b_1 - a_3 b_3} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \omega_0}{\partial \rho} = \frac{a_2 b_1 + a_3 b_2}{a_1 b_1 - a_3 b_3}, \quad (\text{B.1})$$

onde

$$a_1 = m_\omega^2 + 3c g_\omega^4 \omega_0^2 - g_\sigma g_\omega^2 \sigma (2\alpha_1 - \alpha_1' g_\sigma \sigma), \quad (\text{B.2})$$

$$a_2 = g_\omega, \quad (\text{B.3})$$

$$a_3 = 2g_\sigma g_\omega^2 \omega_0 (\alpha_1 - \alpha_1' g_\sigma \sigma), \quad (\text{B.4})$$

$$b_1 = m_\sigma^2 + 2A\sigma + 3B\sigma^2 - g_\sigma^2 g_\omega^2 \omega_0^2 \alpha_1' + 3g_\sigma^2 \left(\frac{\rho_s}{M^*} - \frac{\rho}{E_F^*} \right), \quad (\text{B.5})$$

$$b_2 = -\frac{g_\sigma M^*}{E_F^*} \quad \text{e} \quad (\text{B.6})$$

$$b_3 = -a_3. \quad (\text{B.7})$$

O cálculo realizado para a obtenção de $\partial \sigma / \partial \rho$ deve levar em conta a derivada da densidade escalar ρ_s , dada por

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial \rho} = \frac{M^*}{E_F^*} + 3g_\sigma \left(\frac{\rho_s}{M^*} - \frac{\rho}{E_F^*} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial \rho}, \quad (\text{B.8})$$

encontrada a partir das expressões (1.17) e (1.39).

Como uma aplicação aos modelos do tipo $\sigma^3 - \sigma^4$, tais derivadas, nesse caso escritas como

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \rho} = -\frac{g_\sigma M^*}{E_F^* \left[m_\sigma^2 + 2A\sigma + 3B\sigma^2 + 3g_\sigma^2 \left(\frac{\rho_s}{M^*} - \frac{\rho}{E_F^*} \right) \right]} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \omega_0}{\partial \rho} = \frac{g_\omega}{m_\omega^2}, \quad (\text{B.9})$$

são utilizadas por exemplo no cálculo da incompressibilidade, dada por

$$K = 9G_\omega^2 \rho + \frac{3k_F^2}{E_F^*} - \frac{9M^{*2} \rho}{E_F^{*2} \left[\frac{1}{G_\sigma^2} + 2a\Delta M + 3b(\Delta M)^2 + 3 \left(\frac{\rho_s}{M^*} - \frac{\rho}{E_F^*} \right) \right]}, \quad (\text{B.10})$$

lembrando que $E_F^* = (k_F^2 + M^{*2})^{1/2}$, $a = A/g_\sigma^3$, $b = B/g_\sigma^4$, $\Delta M = M^* - M$ e $G_i^2 = g_i^2/m_i^2$ para $i = \sigma, \omega$.

APÊNDICE C – Derivação do limite não relativístico dos modelos de contato

Para tomarmos o limite não relativístico, é preciso antes definir a equação de Dirac para o modelo de contato. Assim como no caso dos modelos não lineares de Walecka, utilizamos as equações de Euler-Lagrange para o spinor $\bar{\psi}$, agora com a densidade lagrangiana dos modelos NLPC, expressão (2.2), juntamente com a aproximação de campo médio para chegar em

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu - M + G'_\sigma{}^2 \rho_s - \gamma^0 G'_\omega{}^2 \rho + A' \rho_s^2 + B' \rho_s^3) \psi &= 0 \\ (i\gamma^0 \partial_0 + i\gamma^a \partial_a - M + G'_\sigma{}^2 \rho_s - \gamma^0 G'_\omega{}^2 \rho + A' \rho_s^2 + B' \rho_s^3) \psi &= 0. \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

Multiplicando à esquerda toda a equação pela matriz

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & -1_{2 \times 2} \end{pmatrix} \quad (\text{C.2})$$

onde $1_{2 \times 2}$ e $0_{2 \times 2}$ são as matrizes 2×2 identidade e nula respectivamente, temos que

$$\begin{aligned} \left[i\partial_0 + i\gamma^0 \gamma^a \partial_a + \gamma^0 (G'_\sigma{}^2 \rho_s - M + A' \rho_s^2 + B' \rho_s^3) - G'_\omega{}^2 \rho \right] \psi &= 0 \\ \left[-i\alpha^a \partial_a + \gamma^0 (M - G'_\sigma{}^2 \rho_s - A' \rho_s^2 - B' \rho_s^3) + G'_\omega{}^2 \rho \right] \psi &= i \frac{\partial \psi}{\partial t}, \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

logo,

$$\left[\vec{\alpha} \cdot \vec{k} + \gamma^0 (M + S) + V \right] \psi = i \frac{\partial \psi}{\partial t} = E \psi, \quad (\text{C.4})$$

onde $\alpha^a = \gamma^0 \gamma^a$, $k_a = i\partial_a$, $S = -G'_\sigma{}^2 \rho_s - A' \rho_s^2 - B' \rho_s^3$ e $V = G'_\omega{}^2 \rho$. Como

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{k} = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & \vec{\sigma} \cdot \vec{k} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{k} & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.5})$$

podemos ainda reescrever a equação de Dirac da seguinte forma

$$\begin{pmatrix} M+S+V & \vec{\sigma} \cdot \vec{k} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{k} & -M-S+V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (\text{C.6})$$

com ϕ e χ sendo as componentes, grande e pequena, do spinor ψ . A partir desta equação matricial, obtemos

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{k} \chi + (M+S+V)\phi = E\phi \quad \text{e} \quad (\text{C.7})$$

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{k} \phi - (M+S-V)\chi = E\chi. \quad (\text{C.8})$$

Um dos objetivos do limite não relativístico é a eliminação da pequena componente da equação de Dirac. Para isso a expressão (C.8) é utilizada para reescrever χ em termos de ϕ . Substituindo esse resultado em (C.7) encontramos

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{k} B \vec{\sigma} \cdot \vec{k} + M+S+V)\phi = E\phi, \quad (\text{C.9})$$

com

$$B = \frac{1}{M+S-V+E} = B_0 \frac{1}{1 + (\varepsilon - S - V)B_0} \simeq B_0 + B_0^2(S+V-\varepsilon), \quad (\text{C.10})$$

$$B_0 = \frac{1}{2(M+S)} \quad (\text{C.11})$$

e $\varepsilon = E - M$. Note que $x = (\varepsilon - S - V)B_0$ foi o parâmetro de expansão usado na aproximação dada em (C.10). O uso dessa expansão em (C.9) leva a

$$\left[\vec{\sigma} \cdot \vec{k} B_0 \vec{\sigma} \cdot \vec{k} + \vec{\sigma} \cdot \vec{k} B_0^2(S+V) \vec{\sigma} \cdot \vec{k} - \vec{\sigma} \cdot \vec{k} B_0^2 \varepsilon \vec{\sigma} \cdot \vec{k} + S+V \right] \phi = \varepsilon \phi \quad (\text{C.12})$$

$$\left[\vec{\sigma} \cdot \vec{k} B_0 \vec{\sigma} \cdot \vec{k} + \vec{\sigma} \cdot \vec{k} B_0^2(S+V) \vec{\sigma} \cdot \vec{k} + S+V \right] \phi = \varepsilon \hat{I} \phi, \quad (\text{C.13})$$

onde o operador \hat{I} é definido como

$$\hat{I} = 1 + \vec{\sigma} \cdot \vec{k} B_0^2 \vec{\sigma} \cdot \vec{k}. \quad (\text{C.14})$$

Multiplicando à esquerda ambos os membros de (C.13) por $\hat{I}^{-1/2}$ e, introduzindo o operador identidade, escrito convenientemente como $1 = \hat{I}^{-1/2} \hat{I}^{1/2}$, antes da função ϕ do lado esquerdo de (C.13), obtemos

$$\begin{aligned}\hat{I}^{-1/2} \left[\vec{\sigma} \cdot \vec{k} B_0 \vec{\sigma} \cdot \vec{k} + \vec{\sigma} \cdot \vec{k} B_0^2 (S+V) \vec{\sigma} \cdot \vec{k} + S+V \right] \hat{I}^{-1/2} \hat{I}^{1/2} \phi &= \varepsilon \hat{I}^{-1/2} \hat{I} \phi \\ \hat{I}^{-1/2} \left[\vec{\sigma} \cdot \vec{k} B_0 \vec{\sigma} \cdot \vec{k} + \vec{\sigma} \cdot \vec{k} B_0^2 (S+V) \vec{\sigma} \cdot \vec{k} + S+V \right] \hat{I}^{-1/2} \hat{I}^{1/2} \phi &= \varepsilon \hat{I}^{1/2} \phi,\end{aligned}\quad (\text{C.15})$$

com $\hat{I}^{-1/2}$ e $\hat{I}^{1/2}$ definidos respectivamente como

$$\hat{I}^{-1/2} = (1 + \vec{\sigma} \cdot \vec{k} B_0^2 \vec{\sigma} \cdot \vec{k})^{-1/2} \equiv 1 - \frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{k} B_0^2 \vec{\sigma} \cdot \vec{k} + \frac{3}{8} (\vec{\sigma} \cdot \vec{k} B_0^2 \vec{\sigma} \cdot \vec{k})^2 + \dots \quad \text{e} \quad (\text{C.16})$$

$$\hat{I}^{1/2} = (1 + \vec{\sigma} \cdot \vec{k} B_0^2 \vec{\sigma} \cdot \vec{k})^{1/2} \equiv 1 + \frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{k} B_0^2 \vec{\sigma} \cdot \vec{k} - \frac{1}{8} (\vec{\sigma} \cdot \vec{k} B_0^2 \vec{\sigma} \cdot \vec{k})^2 + \dots \quad (\text{C.17})$$

Note que (C.15) sugere a equação de Schrödinger dada por

$$\hat{H}^{class} \varphi^{class} = \varepsilon \varphi^{class}, \quad (\text{C.18})$$

com

$$\hat{H}^{class} = \hat{I}^{-1/2} \left[\vec{\sigma} \cdot \vec{k} B_0 \vec{\sigma} \cdot \vec{k} + S+V + \vec{\sigma} \cdot \vec{k} B_0^2 (S+V) \vec{\sigma} \cdot \vec{k} \right] \hat{I}^{-1/2} \quad \text{e} \quad \varphi^{class} = \hat{I}^{1/2} \phi. \quad (\text{C.19})$$

Ressaltamos ainda que φ^{class} é a quantidade que deve ser considerada como função de onda não relativística e não a grande componente do spinor de Dirac, ϕ . Isso é devido ao fato de que φ^{class} é a grandeza propriamente normalizada, o que pode ser visto a partir do cálculo do valor médio do operador \hat{H}^{class} a seguir. Como a energia do sistema de ser igual a

$$\langle \hat{H}^{class} \rangle = \int d^3x \varphi^{class \dagger} \hat{H}^{class} \varphi^{class} = \varepsilon \int d^3x \varphi^{class \dagger} \varphi^{class} = \varepsilon, \quad (\text{C.20})$$

temos, obrigatoriamente, que

$$\int d^3x \varphi^{class \dagger} \varphi^{class} = \int d^3x \phi^\dagger (1 + \vec{\sigma} \cdot \vec{k} B_0^2 \vec{\sigma} \cdot \vec{k}) \phi = 1 \neq \int d^3x \phi^\dagger \phi. \quad (\text{C.21})$$

Expandindo o operador \hat{H}^{class} até a ordem k^4 temos, considerando apenas os dois primeiros termos de $\hat{I}^{-1/2}$ em (C.16), que

$$\begin{aligned}\hat{H}^{class} &= \vec{\sigma} \cdot \vec{k} B_0 \vec{\sigma} \cdot \vec{k} + S+V + \vec{\sigma} \cdot \vec{k} B_0^2 (S+V) \vec{\sigma} \cdot \vec{k} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\{ \vec{\sigma} \cdot \vec{k} B_0^2 \vec{\sigma} \cdot \vec{k}, S+V + \vec{\sigma} \cdot \vec{k} B_0 \vec{\sigma} \cdot \vec{k} \right\},\end{aligned}\quad (\text{C.22})$$

com $\{ \}$ denotando a operação de anti-comutação e lembrando que $(\vec{\sigma} \cdot \vec{k})^2 = k^2$, $S+V$ é da ordem de k^2 e B_0 é da ordem da unidade [27]. Assim, temos que os dois primeiros termos de

(C.22) são da ordem de k^2 .

C.1 Densidades vetorial e escalar

Veamos qual a consequência da eliminação da pequena componente χ da equação de Dirac nas densidades vetorial e escalar. Em termos de ϕ e χ , ρ é escrito como

$$\begin{aligned}
\rho &= \bar{\psi}\gamma^0\psi = \phi^\dagger\phi + \chi^\dagger\chi \\
&= \phi^\dagger\phi + \phi^\dagger\vec{\sigma}\cdot\vec{k}B^2\vec{\sigma}\cdot\vec{k}\phi \\
&= \varphi^{class\dagger}\hat{I}^{-1/2}\hat{I}^{-1/2}\varphi^{class} + \varphi^{class\dagger}\hat{I}^{-1/2}\vec{\sigma}\cdot\vec{k}B^2\vec{\sigma}\cdot\vec{k}\hat{I}^{-1/2}\varphi^{class} \\
&= \varphi^{class\dagger}\hat{I}^{-1}\varphi^{class} + \varphi^{class\dagger}\hat{I}^{-1/2}\vec{\sigma}\cdot\vec{k}B^2\vec{\sigma}\cdot\vec{k}\hat{I}^{-1/2}\varphi^{class}.
\end{aligned} \tag{C.23}$$

Aproximando ρ até ordem de k^2 , ou seja, tomando $\hat{I}^{-1} = (1 + \vec{\sigma}\cdot\vec{k}B_0^2\vec{\sigma}\cdot\vec{k})^{-1} \simeq 1 - \vec{\sigma}\cdot\vec{k}B_0^2\vec{\sigma}\cdot\vec{k}$, $B \simeq B_0$ e, apenas os dois primeiros termos de (C.16), chega-se em

$$\begin{aligned}
\rho &= \varphi^{class\dagger}(1 - \vec{\sigma}\cdot\vec{k}B_0^2\vec{\sigma}\cdot\vec{k})\varphi^{class} \\
&+ \varphi^{class\dagger}\left(1 - \frac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{k}B_0^2\vec{\sigma}\cdot\vec{k}\right)\vec{\sigma}\cdot\vec{k}B_0^2\vec{\sigma}\cdot\vec{k}\left(1 - \frac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{k}B_0^2\vec{\sigma}\cdot\vec{k}\right)\varphi^{class} \\
&= \varphi^{class\dagger}\varphi^{class} - \varphi^{class\dagger}\vec{\sigma}\cdot\vec{k}B_0^2\vec{\sigma}\cdot\vec{k}\varphi^{class} + \varphi^{class\dagger}\vec{\sigma}\cdot\vec{k}B_0^2\vec{\sigma}\cdot\vec{k}\varphi^{class} \\
&= |\varphi^{class}|^2.
\end{aligned} \tag{C.24}$$

Com o uso das mesmas aproximações até ordem k^2 para \hat{I}^{-1} , $\hat{I}^{-1/2}$ e B , obtemos para a densidade escalar ρ_s ,

$$\begin{aligned}
\rho_s &= \bar{\psi}\psi = \phi^\dagger\phi - \chi^\dagger\chi \\
&= \varphi^{class\dagger}(1 - \vec{\sigma}\cdot\vec{k}B_0^2\vec{\sigma}\cdot\vec{k})\varphi^{class} \\
&- \varphi^{class\dagger}\left(1 - \frac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{k}B_0^2\vec{\sigma}\cdot\vec{k}\right)\vec{\sigma}\cdot\vec{k}B_0^2\vec{\sigma}\cdot\vec{k}\left(1 - \frac{1}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{k}B_0^2\vec{\sigma}\cdot\vec{k}\right)\varphi^{class} \\
&= \varphi^{class\dagger}\varphi^{class} - \varphi^{class\dagger}\vec{\sigma}\cdot\vec{k}B_0^2\vec{\sigma}\cdot\vec{k}\varphi^{class} - \varphi^{class\dagger}\vec{\sigma}\cdot\vec{k}B_0^2\vec{\sigma}\cdot\vec{k}\varphi^{class} \\
&= |\varphi^{class}|^2 - 2\varphi^{class\dagger}\vec{\sigma}\cdot\vec{k}B_0^2\vec{\sigma}\cdot\vec{k}\varphi^{class} \\
&= \rho(1 - 2B_0^2k^2).
\end{aligned} \tag{C.25}$$

Note que a aproximação $\rho_s = \rho$, feita para o modelo linear de Walecka em [141], é na verdade o primeiro termo da expansão (C.25).

C.2 Limite do contínuo para a densidade de energia

Até a ordem k^2 , o limite não relativístico tomado nos modelos NLPC gera a energia de partícula única, dada por

$$H^{class} = \frac{k^2}{2M} + (G'_{\omega}{}^2 - G'_{\sigma}{}^2)\rho - A'\rho^2 - B'\rho^3 + 2B_0^2 k^2 \rho (G'_{\sigma}{}^2 + 2A'\rho + 3B'\rho^2). \quad (C.26)$$

A energia de um sistema de N partículas é dada então por,

$$E = \frac{\gamma}{2M} \sum_{i=0}^{k_F} k_i^2 + N[(G'_{\omega}{}^2 - G'_{\sigma}{}^2)\rho - A'\rho^2 - B'\rho^3] + 2B_0^2 \rho (G'_{\sigma}{}^2 + 2A'\rho + 3B'\rho^2) \gamma \sum_{i=0}^{k_F} k_i^2 \quad (C.27)$$

com k_F sendo o momento de Fermi e γ o número de nucleons em cada nível de energia, respeitando o princípio da exclusão de Pauli. Como k é uma grandeza contínua, o somatório pode ser convertido em uma integral através do seguinte procedimento. Supondo que em uma dimensão valha a discretização de k como $k = \frac{2\pi n}{L}$ (condições periódicas de contorno) onde n é um inteiro e L é o período, escreve-se

$$\frac{\gamma}{L} \sum_{i=0}^{k_F} k_i^2 = \frac{\gamma}{2\pi} \sum_{i=0}^{k_F} \frac{2\pi}{L} k_i^2 = \frac{\gamma}{2\pi} \sum_{i=0}^{k_F} \Delta k k_i^2. \quad (C.28)$$

O limite do contínuo significa fazer $L \rightarrow \infty$, o que torna

$$\frac{\gamma}{L} \sum_{i=0}^{k_F} k_i^2 = \frac{\gamma}{2\pi} \int_0^{k_F} k^2 dk. \quad (C.29)$$

Logo, em três dimensões temos

$$\begin{aligned} \gamma \sum_{i=0}^{k_F} k_i^2 &= \frac{\gamma V}{(2\pi)^3} \int k^2 d^3k = \frac{\gamma V}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0^{k_F} k^4 dk = \frac{\gamma V}{2\pi^2} \frac{k_F^5}{5} = \frac{\gamma V}{10\pi^2} \left(\frac{6\pi^2}{\gamma} \right)^{5/3} \rho^{5/3} \\ &= \frac{3V}{5} \left(\frac{6\pi^2}{\gamma} \right)^{2/3} \rho^{5/3}, \end{aligned} \quad (C.30)$$

lembrando que o volume do sistema é dado por $V = L^3$. Assim, chega-se finalmente à densidade de energia do sistema ($\mathcal{E} = E/V$), dada por

$$\mathcal{E}_{NR} = c_1 \rho^2 + c_2 \rho^3 + c_3 \rho^4 + c_4(\rho) \frac{3}{40} \left(\frac{6\pi^2}{\gamma} \right)^{2/3} \rho^{8/3} + \frac{3}{10M} \left(\frac{6\pi^2}{\gamma} \right)^{2/3} \rho^{5/3}, \quad (C.31)$$

com

$$c_1 = G'_{\omega} - G'_{\sigma}, \quad c_2 = -A', \quad c_3 = -B', \quad c_4(\rho) = \frac{4}{M^2}(G'_{\sigma} + 2A'\rho + 3B'\rho^2) \quad (\text{C.32})$$

e $B_0 = 1/2M$.

C.3 Outras equações de estado

A partir de (C.31), outras equações de estado para o limite não relativístico dos modelos NLPC podem ser determinadas. O potencial químico, dado por

$$\mu_{NR} = \frac{\partial \mathcal{E}_{NR}}{\partial \rho} = 2c_1\rho + 3c_2\rho^2 + 4c_3\rho^3 + c_5(\rho)\frac{1}{5}\left(\frac{6\pi^2}{\gamma}\right)^{2/3}\rho^{5/3} + \frac{1}{2M}\left(\frac{6\pi^2}{\gamma}\right)^{2/3}\rho^{2/3}, \quad (\text{C.33})$$

com

$$c_5(\rho) = \frac{4}{M^2}\left(G'_{\sigma} + \frac{11}{4}A'\rho + \frac{21}{4}B'\rho^2\right) \quad (\text{C.34})$$

é uma delas. A partir desta expressão e, usando a relação termodinâmica dada por $P = \mu\rho - \mathcal{E}$, encontra-se a seguinte forma funcional para a pressão,

$$P_{NR} = c_1\rho^2 + 2c_2\rho^3 + 3c_3\rho^4 + c_6(\rho)\frac{1}{8}\left(\frac{6\pi^2}{\gamma}\right)^{2/3}\rho^{8/3} + \frac{1}{5M}\left(\frac{6\pi^2}{\gamma}\right)^{2/3}\rho^{5/3}, \quad (\text{C.35})$$

onde

$$c_6(\rho) = \frac{4}{M^2}\left(G'_{\sigma} + \frac{16}{5}A'\rho + \frac{33}{5}B'\rho^2\right). \quad (\text{C.36})$$

Por fim, a incompressibilidade é escrita como

$$\begin{aligned} K_{NR} &= 9\frac{\partial P_{NR}}{\partial \rho} \\ &= 18c_1\rho + 54c_2\rho^2 + 108c_3\rho^3 + c_7(\rho)\left(\frac{6\pi^2}{\gamma}\right)^{2/3}\rho^{5/3} + \frac{3}{M}\left(\frac{6\pi^2}{\gamma}\right)^{2/3}\rho^{2/3}, \end{aligned} \quad (\text{C.37})$$

para

$$c_7(\rho) = \frac{4}{M^2}\left(3G'_{\sigma} + \frac{66}{5}A'\rho + \frac{693}{20}B'\rho^2\right). \quad (\text{C.38})$$

Outra forma de se obter as equações (C.35) e (C.37), é fazer uso de (C.31) através de $P = \rho^2\frac{\partial(\mathcal{E}/\rho)}{\partial \rho}$ e $K = 9\rho\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial \rho^2}$, respectivamente.

APÊNDICE D – Teoria quântica de campos: alguns conceitos

O objetivo deste Apêndice, que tem por base as referências [92, 118, 142], é apresentar de forma bastante qualitativa alguns importantes conceitos de Teoria Quântica de Campos utilizados na tese, mais especificamente no capítulo 4.

D.1 Invariância local de gauge

A densidade lagrangiana de Dirac, dada por

$$\mathcal{L}_D = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi, \quad (\text{D.1})$$

representa um sistema de férmions livres de massa m , representados pelo spinor ψ . Ao impor que este campo se transforme segundo $\psi \rightarrow \psi' = e^{i\omega}\psi$, com ω sendo um número real, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_D &= \bar{\psi}'(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi' = e^{-i\omega}\bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)e^{i\omega}\psi \\ &= \mathcal{L}_D. \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Diz-se então que a lagrangiana de Dirac é invariante segundo a transformação global $\psi \rightarrow \psi' = e^{i\omega}\psi$. Considerando agora que ω depende da posição, ou seja, fazendo $\omega = \omega(x)$, temos que o campo fermiônico segue a regra de transformação local $\psi \rightarrow \psi' = e^{i\omega(x)}\psi$. Dessa forma, a lagrangiana de Dirac altera-se para

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_D &= \bar{\psi}'(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi' \\ &= ie^{-i\omega(x)}\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu(e^{i\omega(x)}\psi) - e^{-i\omega(x)}e^{i\omega(x)}m\bar{\psi}\psi \\ &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - \bar{\psi}\gamma^\mu \psi \partial_\mu \omega(x) \\ &= \mathcal{L}_D - \bar{\psi}\gamma^\mu \psi \partial_\mu \omega(x). \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

Vê-se então que \mathcal{L}_D não é invariante sob a transformação local no campo fermiônico ψ . Note entretanto que se redefinirmos tal densidade lagrangiana para

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi + \bar{\psi}\gamma^\mu \psi A_\mu, \quad (\text{D.4})$$

com A_μ sendo um campo bosônico e, junto à condição $\psi \rightarrow \psi' = e^{i\omega(x)}\psi$, adicionarmos a seguinte transformação local $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \omega(x)$, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \bar{\psi}'(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi' + \bar{\psi}'\gamma^\mu \psi' A'_\mu \\ &= \mathcal{L}_D - \bar{\psi}\gamma^\mu \psi \partial_\mu \omega(x) + e^{-i\omega(x)} e^{i\omega(x)} \bar{\psi}\gamma^\mu \psi (A_\mu + \partial_\mu \omega(x)) \\ &= \mathcal{L}_D - \bar{\psi}\gamma^\mu \psi \partial_\mu \omega(x) + \bar{\psi}\gamma^\mu \psi \partial_\mu \omega(x) + \bar{\psi}\gamma^\mu \psi A_\mu \\ &= \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

Ou seja, tais transformações locais nos campos ψ e A_μ deixam \mathcal{L} (e não \mathcal{L}_D) invariante. Diz-se então que o sistema descrito por \mathcal{L} possui *invariância local de gauge*. Outra maneira de se obter a expressão invariante de gauge dada em (D.4), é substituir a derivada ∂_μ em (D.1) pela chamada derivada covariante, ou seja, fazer

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - iA_\mu. \quad (\text{D.6})$$

Generalizando o exemplo anterior, pode-se afirmar que um sistema é dito invariante sob transformações locais de gauge quando seus campos se transformam segundo

$$\psi \rightarrow \psi' = U\psi \quad \text{e} \quad (\text{D.7})$$

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = U(A_\mu + i\partial_\mu)U^\dagger, \quad (\text{D.8})$$

com $U^\dagger U = 1$, para sistemas nos quais na densidade lagrangiana as derivadas usuais são substituídas pelas derivadas covariantes, Eq. (D.6). Note que é possível verificar a invariância do exemplo anterior, Eq. (D.4), ao se usar o operador $U = e^{i\omega(x)}$.

D.2 Formalismo de tempo imaginário

Em Teoria Quântica de Campos, a amplitude de probabilidade de um estado descrito por um campo cuja configuração é $\phi_i(x)$ em $t = t_i$ realizar uma transição para um estado cuja configuração é dada pelo campo $\phi_f(x)$ em $t = t_f$, para $t_f > t_i$, é escrita em termos da seguinte integral

funcional [118]:

$$\langle \phi_f, t_f | \phi_i, t_i \rangle = \langle \phi_f | e^{-i(t_f - t_i)\hat{H}} | \phi_i \rangle \quad (\text{D.9})$$

$$= \int D\phi \exp \left[i \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3x \mathcal{L}(\phi) \right] \quad (\text{D.10})$$

$$= \int D\phi e^{iS(\phi)} \quad (\text{D.11})$$

com $S(\phi)$ sendo a ação e \hat{H} o hamiltoniano do sistema.

O tratamento da Teoria Quântica de Campos a temperatura finita é feito a partir da conexão desta teoria com a Mecânica Estatística Quântica. Para realizar tal relação de forma direta, é preciso antes escrever a amplitude de probabilidade, dada na Eq. (D.11), no espaço euclidiano. Para tal, usemos o exemplo onde \mathcal{L}_M é dada por

$$\mathcal{L}_M = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi), \quad (\text{D.12})$$

com $V(\phi)$ representando os termos de interação. O subíndice indica que a densidade lagrangiana está expressa no espaço de Minkowski. Para escrever \mathcal{L}_M no espaço euclidiano, usa-se a chamada rotação de Wick dada por $t = -it_E$. Com isso temos que $dt = -idt_E$ e, consequentemente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M &= \frac{1}{2} \partial_t \phi \partial_t \phi - \frac{1}{2} \partial_i \phi \partial^i \phi - V(\phi) \\ &= -\frac{1}{2} \partial_{t_E} \phi \partial_{t_E} \phi - \frac{1}{2} \partial_i \phi \partial^i \phi - V(\phi) \\ &= -\left(\frac{1}{2} \partial_{t_E} \phi \partial_{t_E} \phi + \frac{1}{2} \partial_i \phi \partial^i \phi + V(\phi) \right) \\ &\equiv -\mathcal{L}_E. \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

Assim, a Eq. (D.10) pode ser reescrita como

$$\langle \phi_f, t | \phi_i, 0 \rangle = \langle \phi_f | e^{-it\hat{H}} | \phi_i \rangle \quad (\text{D.14})$$

$$= \int D\phi \exp \left[- \int_0^{it} dt_E \int d^3x_E \mathcal{L}_E(\phi) \right] \quad (\text{D.15})$$

$$= \int D\phi e^{-S_E(\phi)}, \quad (\text{D.16})$$

agora com $S_E(\phi)$ sendo a ação euclidiana e, para o caso particular em que $t_i = 0$ e $t_f = t$. De posse da amplitude de probabilidade na versão euclidiana, pode-se agora fazer a conexão com

a Mecânica Estatística observando que a função de partição quântica, definida como

$$\mathcal{Z} = \text{Tr} e^{-\beta \hat{H}} = \sum_n \langle n | e^{-\beta \hat{H}} | n \rangle, \quad (\text{D.17})$$

com $\beta = 1/T$, pode ser representada por uma integral funcional, já que sua comparação com a expressão (D.14) junto às associações $\beta = it$ e $|\phi_f\rangle = |\phi_i\rangle = |n\rangle$ [142], levam à

$$\mathcal{Z} = \int D\phi \exp \left[- \int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}(\phi) \right], \quad (\text{D.18})$$

onde devido à operação do traço, devem ser verificadas as condições de periodicidade, $\phi(0) = \phi(\beta)$, ou antiperiodicidade, $\psi(0) = -\psi(\beta)$, para campos bosônicos ou fermiônicos respectivamente.

Embora este tratamento tenha sido feito a partir de um exemplo específico e para o caso particular onde $t_i = 0$ e $t_f = t$, a conexão entre as teorias é válida para qualquer sistema.

D.3 Simetria quiral

Usemos novamente o exemplo do sistema de férmions livres para desta vez apresentar o conceito de quiralidade. A equação que deve ser verificada para tal sistema é a de Dirac, dada por

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0. \quad (\text{D.19})$$

A solução para o spinor ψ , escrita como

$$\psi(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k [a_{\vec{k}} u(\vec{k}) e^{-ik_\mu x^\mu} + b_{\vec{k}}^\dagger v(\vec{k}) e^{ik_\mu x^\mu}], \quad (\text{D.20})$$

quando substituída em (D.19), gera

$$(\gamma^\mu k_\mu - m)u(\vec{k}) = 0 \quad \text{e} \quad (\text{D.21})$$

$$(\gamma^\mu k_\mu + m)v(\vec{k}) = 0. \quad (\text{D.22})$$

Para efeito de análise do número de soluções que as equações acima possuem, consideremos o caso em que $\vec{k} = 0$. Nesse caso $\gamma^\mu k_\mu = \gamma^0 k_0 = \gamma^0 \sqrt{k^2 + m^2} = \gamma^0 m$ e, conseqüentemente, a

expressão (D.21) por exemplo torna-se

$$(\gamma^0 m - I_{2 \times 2} m)u(\vec{k} = 0) = 0 \quad (\text{D.23})$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{D.24})$$

com duas soluções linearmente independentes dadas por

$$u_1(\vec{k} = 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad u_2(\vec{k} = 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.25})$$

O mesmo procedimento leva a obtenção também de duas soluções linearmente independentes para o spinor $v(\vec{k})$. De uma forma geral, ou seja mesmo para $\vec{k} \neq 0$, vê-se então que é necessário distinguir entre duas soluções para os spinores u e v . Uma das formas de realizar tal distinção é procurar um operador que comute com o hamiltoniano de Dirac, $\hat{H}_D = -\gamma^0(\gamma^i \partial_i - m)$, encontrado a partir de (D.19), para então determinar um novo número quântico que diferencie os estados. Tal operador é dado por

$$\hat{\Lambda} \equiv \vec{S} \cdot \frac{\vec{k}}{k} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \cdot \frac{\vec{k}}{k}, \quad (\text{D.26})$$

com $\vec{\sigma} = \sigma_x \hat{x} + \sigma_y \hat{y} + \sigma_z \hat{z}$. Seus autovalores, dados por $\pm 1/2$, são os números quânticos que definem a *helicidade* da partícula, que fisicamente representa a projeção do spin do férmion na direção de seu movimento. A figura D.1 representa partículas cujas helicidades são positivas e negativas.

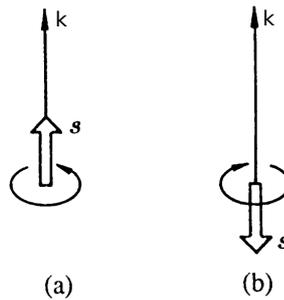


Figura D.1: Partículas de helicidade (a) positiva e (b) negativa.

Pela definição, nota-se que a helicidade é uma grandeza que essencialmente depende do referencial adotado pelo observador. Por exemplo, um observador parado em relação à partícula representada na figura D.1a mede o valor $1/2$ para sua helicidade. Se agora o mesmo observador move-se com $k_{obs} > k$, temos que sua medida para a helicidade da partícula resulta no valor $-1/2$. Naturalmente, se o observador move-se com $k_{obs} = k$ conclui que a helicidade da partícula é nula. Diante deste contexto, conclui-se que um férmion de massa nula tem medida absoluta de sua helicidade, já que neste caso sua velocidade é igual à da luz. Uma consequência direta desta propriedade na equação de Dirac, que neste limite de massa fermiônica nula é dada por

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi = 0, \quad (\text{D.27})$$

é que como $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$, temos, ao multiplicar γ^5 pela esquerda em (D.27), que $i\gamma^5 \gamma^\mu \partial_\mu \psi = -i\partial_\mu \gamma^\mu \gamma^5 \psi = 0$, logo mostra-se que tanto ψ quanto $\gamma^5 \psi$ são soluções de (D.27), assim as combinações lineares dadas por

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma^5)\psi \quad \text{e} \quad (\text{D.28})$$

$$\psi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma^5)\psi \quad (\text{D.29})$$

também são. Nesta notação ψ_L (spinor *left-handed*) e ψ_R (spinor *right-handed*) estão associados a férmions de helicidade $-1/2$ e $1/2$ respectivamente. Seus adjuntos são escritos como

$$\bar{\psi}_L = \psi_L^\dagger \gamma^0 = \frac{1}{2}\psi^\dagger (1 - \gamma^5)\gamma^0 = \frac{1}{2}\bar{\psi}(1 + \gamma^5) \quad \text{e} \quad (\text{D.30})$$

$$\bar{\psi}_R = \psi_R^\dagger \gamma^0 = \frac{1}{2}\psi^\dagger (1 + \gamma^5)\gamma^0 = \frac{1}{2}\bar{\psi}(1 - \gamma^5). \quad (\text{D.31})$$

Com estas definições é possível reescrever a densidade lagrangiana de Dirac, Eq. (D.1), da seguinte forma

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_D &= i(\bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R)\gamma^\mu \partial_\mu (\psi_L + \psi_R) - m(\bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R)(\psi_L + \psi_R) \\ &= i\bar{\psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + i\bar{\psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi_R + i\bar{\psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + i\bar{\psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \psi_R \\ &\quad + m(\bar{\psi}_L \psi_L + \bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L + \bar{\psi}_R \psi_R) \\ \mathcal{L}_D &= i\bar{\psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L + i\bar{\psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \psi_R + m(\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L), \end{aligned} \quad (\text{D.32})$$

onde usamos

$$\begin{aligned}
i\bar{\psi}_L \gamma^\mu \partial_\mu \psi_R &= \frac{i}{4} \bar{\psi} (1 + \gamma^5) \gamma^\mu \partial_\mu (1 + \gamma^5) \psi \\
&= \frac{i}{4} (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \partial_\mu \psi + \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^5 \partial_\mu \psi) \\
&= \frac{i}{4} (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \partial_\mu \psi - \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \partial_\mu \psi - \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi) \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{D.33}$$

$$\begin{aligned}
i\bar{\psi}_R \gamma^\mu \partial_\mu \psi_L &= \frac{i}{4} \bar{\psi} (1 - \gamma^5) \gamma^\mu \partial_\mu (1 - \gamma^5) \psi \\
&= \frac{i}{4} (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \partial_\mu \psi - \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \partial_\mu \psi + \bar{\psi} \gamma^5 \gamma^\mu \gamma^5 \partial_\mu \psi) \\
&= \frac{i}{4} (\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \partial_\mu \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \partial_\mu \psi - \bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi) \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{D.34}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_L \psi_L &= \frac{1}{4} \bar{\psi} (1 + \gamma^5) (1 - \gamma^5) \psi = \frac{1}{4} (\bar{\psi} \psi - \bar{\psi} \gamma^5 \psi + \bar{\psi} \gamma^5 \psi - \bar{\psi} \psi) \\
&= 0 \quad \text{e}
\end{aligned} \tag{D.35}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}_R \psi_R &= \frac{1}{4} \bar{\psi} (1 - \gamma^5) (1 + \gamma^5) \psi = \frac{1}{4} (\bar{\psi} \psi + \bar{\psi} \gamma^5 \psi - \bar{\psi} \gamma^5 \psi - \bar{\psi} \psi) \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{D.36}$$

juntamente com as propriedades $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0$ e $(\gamma^5)^2 = 1$.

Nota-se então por (D.32), que é possível representar um férmion por seus respectivos campos de helicidade bem definida, e que tais campos são totalmente desacoplados entre si apenas no caso particular em que o férmion possui massa nula, já que o termo de massa é o responsável pela mistura entre ψ_L e ψ_R . Assim, diz-se que um sistema apresenta *simetria quiral* quando a densidade lagrangiana que o descreve é escrita de forma em que os campos left-handed e right-handed estão totalmente desacoplados. Por outro lado, sistemas nos quais estes campos são misturados, tais como o descrito por (D.32), são ditos apresentarem quebra explícita da simetria quiral.

Outra forma equivalente de verificar a realização da simetria quiral em uma teoria qualquer é através da análise da transformação global dada por

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha\gamma^5} \psi, \tag{D.37}$$

com α sendo um número real. Neste caso, a simetria quiral é realizada quando a densidade lagrangiana do sistema é invariante sob a transformação (D.37), o que continua não sendo o

caso de (D.32) devido ao termo $m\bar{\psi}\psi$.

Como $\langle\bar{\psi}\psi\rangle$ é um termo que impede a realização da simetria quiral, é natural adotá-lo como um parâmetro de ordem da transição de fases onde a simetria quiral é quebrada/restaurada¹. No caso específico da QCD por exemplo, tal parâmetro de ordem é considerado aproximado já que devido à massa não-nula dos quarks, a simetria quiral é explicitamente quebrada na densidade lagrangiana. A restauração é esperada ocorrer no regime de altas temperaturas ou densidades.

¹Simetria quiral quebrada: $\langle\bar{\psi}\psi\rangle \neq 0$. Restaurada: $\langle\bar{\psi}\psi\rangle = 0$.

APÊNDICE E – Casos particulares do modelo PNJL

E.1 Setor puro de glúons

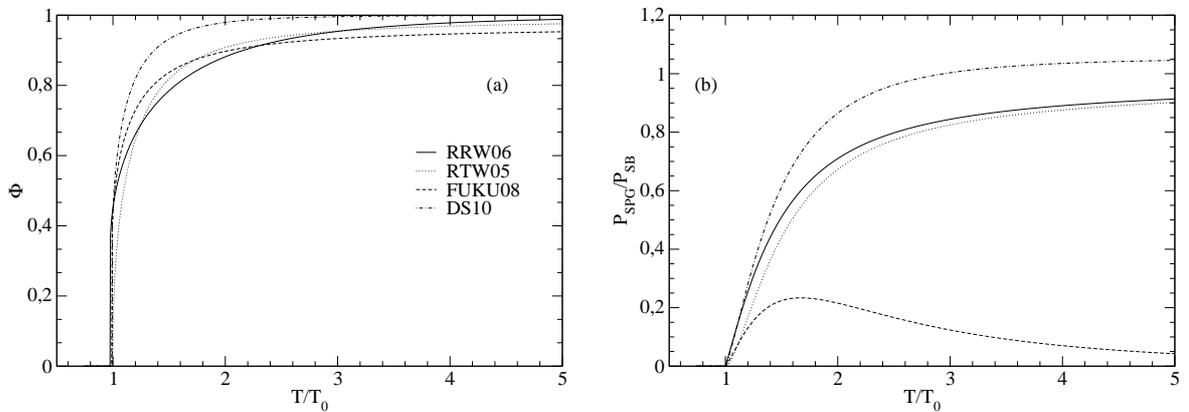
Um dos casos particulares que podem ser tratados no modelo PNJL é o setor puro de glúons, o que é reproduzido eliminando-se em Ω_{PNJL} a parte referente às interações de quarks. Assim, a pressão, densidade de energia e densidade de entropia do sistema são, respectivamente, dados por

$$P_{\text{SPG}} = -\Omega_{\text{SPG}} = -\mathcal{U}(\Phi, T), \quad \varepsilon_{\text{SPG}} = \mathcal{U}(\Phi, T) - T \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial T} \quad \text{e} \quad \mathcal{S}_{\text{SPG}} = -\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial T}. \quad (\text{E.1})$$

A condição de minimização do grande potencial termodinâmico, equação (4.29), reduz-se para

$$\frac{\partial \mathcal{U}(\Phi, T)}{\partial \Phi} = 0. \quad (\text{E.2})$$

A figura E.1 mostra como Φ e as quantidades termodinâmicas dadas em (E.1) comportam-se em função da temperatura para as diferentes parametrizações usadas no capítulo 4.



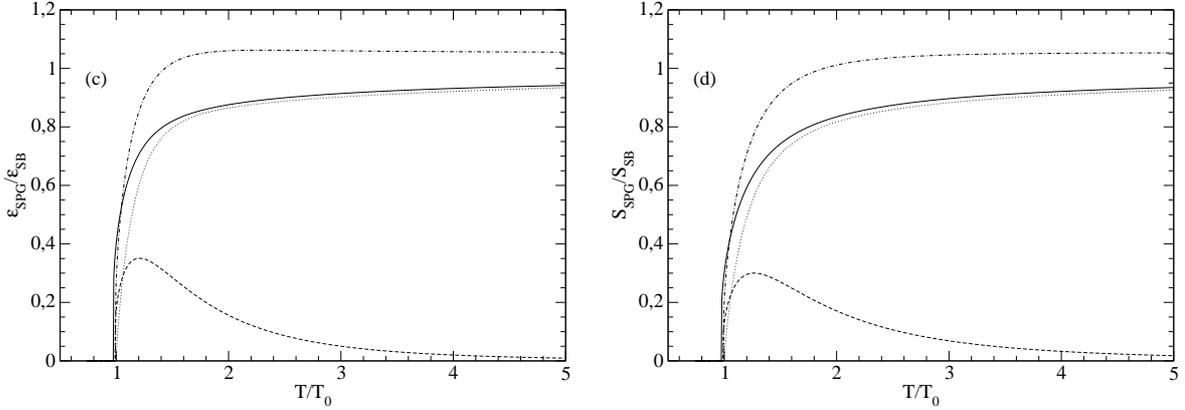


Figura E.1: (a) Φ . (b), (c) e (d) Pressão, densidade de energia e densidade de entropia, respectivamente, escalonados por seus valores no limite de Stefan-Boltzmann. Para todas as figuras $T_0 = 270$ MeV e, para a parametrização DS10 foi tomado $\mu_q = 0$.

Note pela figura E.1a, que as parametrizações utilizadas exibem uma transição de fases de primeira ordem no parâmetro Φ em uma temperatura $T_0 \simeq 270$ MeV¹. Na verdade esse é um resultado esperado, já que as parametrizações do modelo PNJL são construídas de forma a verificar tal transição no setor puro de glúons.

Já as figuras E.1b-E.1d mostram que todos os potenciais de Polyakov, com exceção da parametrização FUKU08 [125], reproduzem por construção o limite de Stefan-Boltzmann em altas temperaturas, onde especificamente para o setor puro de glúons apresenta os valores $P_{SB} = \frac{16\pi^2 T^4}{90}$, $\mathcal{E}_{SB} = 3P_{SB}$ e $\mathcal{S}_{SB} = 4P_{SB}/T$ respectivamente para a pressão, densidade de energia e densidade de entropia.

E.2 Expressões em temperatura nula: setor NJL

Nesta seção, apresentaremos as expressões para temperatura nula do modelo PNJL, que na verdade, são exatamente as mesmas do modelo NJL. Também mostraremos os valores dos parâmetros G , Λ e M_0 que são encontrados para fixar alguns observáveis neste regime de temperatura e para $\rho_q = 0$. Em tais cálculos, nos concentraremos nas parametrizações do modelo PNJL nas quais $\Phi = 0$ para $T = 0$, ou seja, consideraremos os casos em que $\mathcal{U}(\Phi, \Phi^*, T = 0) = 0$.

Para $T = 0$, a densidade de energia dada na equação (4.21) e a densidade escalar, dada em

¹Como já mencionado no capítulo 4, para o setor puro de glúons considera-se Φ como um parâmetro de ordem exato para a transição confinamento/desconfinamento.

(4.14), são substituídas por

$$\mathcal{E}_{\text{PNJL}}(T=0) = \frac{G\rho_{sq}^2}{2} + \frac{\gamma_q}{8\pi^2} \left[k_{Fq}^4 \xi \left(\frac{M_q}{k_{Fq}} \right) - \Lambda^4 \xi \left(\frac{M_q}{\Lambda} \right) \right] \quad \text{e} \quad (\text{E.3})$$

$$\rho_{sq}(T=0) = \frac{\gamma_q M_q}{4\pi^2} \left[k_{Fq}^2 \zeta \left(\frac{M_q}{k_{Fq}} \right) - \Lambda^2 \zeta \left(\frac{M_q}{\Lambda} \right) \right] \quad (\text{E.4})$$

com

$$\xi(z) = \left(1 + \frac{z^2}{2} \right) \sqrt{1+z^2} - \frac{z^4}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{1+z^2}+1}{z} \right) \quad \text{e} \quad (\text{E.5})$$

$$\zeta(z) = \sqrt{1+z^2} - \frac{z^2}{2} \ln \left(\frac{\sqrt{1+z^2}+1}{\sqrt{1+z^2}-1} \right), \quad (\text{E.6})$$

onde k_{Fq} é o momento de Fermi do quark. A densidade de quarks é $\rho_q = \frac{\gamma_q}{6\pi^2} k_{Fq}^3$ e a pressão é dada por

$$P_{\text{PNJL}}(T=0) = \mu_q \rho_q - \mathcal{E}_{\text{PNJL}}(T=0), \quad (\text{E.7})$$

com o potencial químico dos quarks sendo $\mu_q = (k_{Fq}^2 + M_q^2)^{1/2}$.

Assim, as expressões para o vácuo obtidas fazendo-se $k_{Fq} = 0$, são

$$\mathcal{E}_{\text{vac}} = \frac{G\rho_{sq}^{\text{vac}2}}{2} - \frac{\gamma_q \Lambda^4}{8\pi^2} \xi \left(\frac{M_q^{\text{vac}}}{\Lambda} \right), \quad \text{e} \quad (\text{E.8})$$

$$\rho_{sq}^{\text{vac}} = -\frac{\gamma_q M_q^{\text{vac}} \Lambda^2}{4\pi^2} \zeta \left(\frac{M_q^{\text{vac}}}{\Lambda} \right). \quad (\text{E.9})$$

Logo, fixando os valores de $m_\pi = 140,51$ MeV, $f_\pi = 94,04$ MeV e $|\langle \bar{u}u \rangle|^{1/3} = 251,32$ MeV e, usando a expressão (E.9) junto à relação de Gell-Mann-Oakes-Renner,

$$m_\pi^2 f_\pi^2 = -M_0 \rho_{sq}, \quad (\text{E.10})$$

onde

$$f_\pi^2 = \frac{N_s N_c M_q^2}{2\pi^2 N_f} \int_0^\Lambda \frac{k^2 dk}{(k^2 + M_q^2)^{3/2}}, \quad (\text{E.11})$$

obtem-se $\Lambda = 651$ MeV, $M_0 = 5,5$ MeV e $G = 10,08$ GeV⁻². A massa constituinte do quark no vácuo obtida para tais valores é $M_q^{\text{vac}} = 325,53$ MeV.

A exigência de que tenhamos $\mathcal{E}_{\text{PNJL}}(T = \rho_q = 0) = 0$ leva à seguinte expressão final para a

densidade de energia em $T = 0$,

$$\mathcal{E}_{\text{PNJL}}(T = 0) = \frac{G\rho_{sq}^2}{2} + \frac{\gamma_q}{8\pi^2} \left[k_{Fq}^4 \xi\left(\frac{M_q}{k_{Fq}}\right) - \Lambda^4 \xi\left(\frac{M_q}{\Lambda}\right) \right] - \Omega_{vac}, \quad (\text{E.12})$$

onde $\Omega_{vac} \equiv \mathcal{E}_{vac}$. Note pela expressão (E.7), que a mesma condição também garante que $P_{\text{PNJL}}(T = \rho_q = 0) = 0$. Para o conjunto de parâmetros dados por $\Lambda = 651$ MeV, $M_0 = 5,5$ MeV e $G = 10,08$ GeV⁻², temos que $|\Omega_{vac}|^{1/4} = 409,15$ MeV. No capítulo 4 desta tese, consideramos este valor de Ω_{vac} para todos os potenciais de Polyakov do modelo PNJL, incluindo também a parametrização DS10.

Referências Bibliográficas

- [1] J. M. Eisenberg e W. Greiner, *Nuclear theory, vol. 3*, North-Holland Publishing Company (1972).
- [2] P. Ring e P. Schuck, *The nuclear many-body problem*, Springer-Verlag (2000).
- [3] T. H. R. Skyrme, *Philos. Mag.* **1**, 1043 (1956); *Nucl. Phys.* **9**, 615 (1959).
- [4] J. Dechargé e D. Gogny, *Phys. Rev. C* **21**, 1568 (1980).
- [5] J. D. Walecka, *Ann. Phys.* **83**, 491 (1974).
- [6] J. R. Stone, J. C. Miller, R. Koncewicz, P. D. Stevenson e M. R. Strayer, *Phys. Rev. C* **68**, 034324 (2003).
- [7] N. K. Glendenning, *Compact stars*, Springer-Verlag (1997).
- [8] J. Piekarewicz, *Phys. Rev. C* **76**, 064310 (2007).
- [9] J. B. Natowitz, et al, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 212701 (2002).
- [10] M. Chiapparini, M. E. Bracco, A. Delfino, M. Malheiro, D. P. Menezes e C. Providência, *Nucl. Phys. A* **826**, 178 (2009).
- [11] J. D. Walecka, *Theoretical nuclear and subnuclear physics*, 2ed. Imperial College Press (2004).
- [12] J. Boguta e A. R. Bodmer, *Nucl. Phys. A* **292**, 414 (1977).
- [13] S. Typel e H. H. Wolter, *Nucl. Phys. A* **656**, 331 (1999); T. Nikšić, D. Vretenar, P. Finelli e P. Ring, *Phys. Rev. C* **66**, 024306 (2002); W. Long, J. Meng, N. V. Giai e S. G. Zhou, *Phys. Rev. C* **69**, 034319 (2004); S. Typel, *Phys. Rev. C* **71**, 064301 (2005); T. Klahn, D. Blaschke, S. Typel, et al, *Phys. Rev. C* **74**, 035802 (2006).
- [14] J. Zimanyi e S. A. Moszkowski, *Phys. Rev. C* **42**, 1416 (1990); A. Delfino, C. T. Coelho e M. Malheiro, *Phys. Lett. B* **345**, 361 (1995); A. Delfino, C. T. Coelho e M. Malheiro, *Phys. Rev. C* **51**, 2188 (1995); A. Delfino, M. Chiapparini, M. Malheiro, et al, *Z. Phys. A* **355**, 145 (1996); M. Chiapparini, A. Delfino, M. Malheiro e A. Gattone, *Z. Phys. A* **357**, 47 (1997).
- [15] H. Müller e B. D. Serot, *Nucl. Phys. A* **606**, 508 (1996).
- [16] F. J. Fattoyev e J. Piekarewicz, *Phys. Rev. C* **82**, 025805 (2010).

- [17] B. K. Agrawal, Phys. Rev. C **81**, 034323 (2010).
- [18] M. Jaminon e C. Mahaux, Phys. Rev. C **40**, 354 (1989); Nucl. Phys. A **365**, 371 (1981).
- [19] R. J. Furnstahl, J. J. Rusnak e B. D. Serot, Nucl. Phys. A **632**, 607 (1998).
- [20] B. D. Serot e J. D. Walecka, Adv. Nucl. Phys. **16**, 1 (1986).
- [21] W. Greiner e J. Maruhn, *Nuclear models*, Springer (1995).
- [22] J. P. Blaizot, Phys. Rep. **64**, 171 (1980).
- [23] M. Dutra, O. Lourenço, J. S. S. Martins, A. Delfino, J. R. Stone, P. D. Stevenson e C. Providência, *The Skyrme interaction and nuclear matter constraints, em submissão*.
- [24] M. Dutra, *Modelos de Skyrme submetidos a vínculos da matéria nuclear simétrica e de nêutrons*, Tese de doutorado, Universidade Federal Fluminense, Instituto de Física (2011).
- [25] O. Lourenço, M. Dutra, V. S. Timóteo e A. Delfino, Nucl. Phys. B **199** 349, (2010).
- [26] B. D. Serot e J. D. Walecka, Int. Jour. Mod. Phys. E **6**, 515 (1997); arXiv:9701058v1 [nucl-th].
- [27] P. -G. Reinhard, Rep. Prog. Phys. **52**, 439 (1989).
- [28] G. A. Lalazissis, J. König e P. Ring, Phys. Rev. C **55**, 540 (1997).
- [29] Y. Sugahara e H. Toki, Nucl. Phys. A **579**, 557 (1994).
- [30] H. Müller e B. D. Serot, Phys. Rev. C **52**, 2072 (1995).
- [31] B. G. T. Rutel e J. Piekarewicz, Phys. Rev. Lett. **95**, 122501 (2005).
- [32] M. Bender, K. Rutz, P. -G. Reinhard, et al., Phys. Rev. C **60**, 034304 (1999).
- [33] M. Dutra, O. Lourenço, A. Delfino, J. S. Sá Martins, C. Providência, S. S. Avancini e D. P. Menezes, Phys. Rev. C **77**, 035201 (2008).
- [34] D. Vautherin e D. M. Brink, Phys. Rev. C **5**, 629 (1972).
- [35] E. Chabanat, P. Bonche, P. Haensel, J. Meyer e R. Schaefer, Nucl. Phys. A **627**, 710 (1997).
- [36] A. Delfino, T. Frederico, V. S. Timóteo e L. Tomio, Phys. Lett. B **634**, 185 (2006).
- [37] W. Kohn e L. J. Sham, Phys. Rev. A **140**, 1133 (1965); W. Kohn, Rev. Mod. Phys. **71**, 1253 (1999).
- [38] R. M. Dreizler e E. K. U. Gross, *Density functional theory*, Springer (1990).
- [39] M. Brack, Helv. Phys. Acta **58**, 715 (1985).
- [40] R. J. Furnstahl, J. Phys. G **31**, S1357 (2005).

- [41] D. Vretenar, arXiv:0802.0838 [nucl-th]; P. Finelli, N. Kaiser, D. Vretenar e W. Weise, Nucl. Phys. **A 791**, 57 (2007).
- [42] B. A. Nikolaus, T. Hoch e D. G. Madland, Phys. Rev. **C 46**, 1757 (1992).
- [43] G. Gelmini e B. Ritzi, Phys. Lett. **B 357**, 431 (1995); A. Delfino, M. Malheiro e T. Frederico, Braz. J. Phys. **31**, 518 (2001).
- [44] O. Lourenço, *Conexão entre modelos hadrônicos não lineares e modelos de contato*, Dissertação de mestrado, Universidade Federal Fluminense, Instituto de Física (2007).
- [45] O. Lourenço, M. Dutra, A. Delfino e R. L. P. G. Amaral, Int. Jour. Mod. Phys. **E 16**, 3037 (2007).
- [46] T. Nikšić, D. Vretenar, G. A. Lalazissis e P. Ring, Phys. Rev. **C 77**, 034302 (2008).
- [47] O. Lourenço, R. L. P. G. Amaral, M. Dutra e A. Delfino, Phys. Rev. **C 80**, 045206 (2009).
- [48] O. Lourenço, M. Dutra, A. Delfino e J. S. Sá Martins, Phys. Rev. **C 81**, 038201 (2010).
- [49] A. Manohar e H. Georgi, Nucl. Phys. **B 234**, 189 (1984); H. Georgi, Phys. Lett. **B 298**, 187 (1993).
- [50] H. Georgi, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. **43**, 209 (1993).
- [51] R. J. Furnstahl, B. D. Serot e H. B. Tang, Nucl. Phys. **A 615**, 441 (1997).
- [52] B. L. Friman e P. A. Henning, Phys. Lett. **B 206**, 579 (1988).
- [53] T. Bürvenich, D. G. Madland, J. A. Maruhn e P. -G. Reinhard, Phys. Rev. **C 65**, 044308 (2002).
- [54] J. Boguta e S. A. Moszkowski, Nucl. Phys. **A 403**, 445 (1983).
- [55] A. Sulaksono, T. Bürvenich, J. A. Maruhn, P.-G. Reinhard e W. Greiner, Ann. Phys. **308**, 354 (2003).
- [56] J. R. Stone e P. -G. Reinhard, Prog. Part. Nucl. Phys. **58**, 587 (2007).
- [57] S. J. Lee e A. Z. Mekjian, Phys. Rev. **C 63**, 044605 (2001).
- [58] R. J. Furnstahl e J. C. Hackworth, Phys. Rev. **C 56**, 2875 (1997).
- [59] Li Guo-Qiang, J. Phys. **G 17**, 1 (1991).
- [60] N. V. Giai e H. Sagawa, Phys. Lett. **B 106**, 379 (1981).
- [61] L. Bennour, P.-H. Heenen, P. Bonche, J. Dobaczewski e H. Flocard, Phys. Rev. **C 40**, 2834 (1989).
- [62] A. Delfino, O. Lourenço, M. Dutra e J. S. S. Martins, Int. Jour. Mod. Phys. **D 19**, 1469 (2010).

- [63] J. B. Silva, O. Lourenço, A. Delfino, J. S. Sá Martins e M. Dutra, *Phys. Lett.* **B 664**, 246 (2008).
- [64] M. Dutra, O. Lourenço, A. Delfino e J. S. Sá Martins, *Int. Jour. Mod. Phys.* **D 16**, 277 (2007).
- [65] M. Dutra, O. Lourenço, A. Delfino e J. S. Sá Martins, *Int. Jour. Mod. Phys.* **E 16**, 3006 (2007).
- [66] M. Dutra, *Transição de fase na matéria nuclear assimétrica*, Dissertação de mestrado, Universidade Federal Fluminense, Instituto de Física (2007).
- [67] R. J. Furnstahl e B. D. Serot, *Phys. Rev.* **C 41**, 262 (1990).
- [68] O. Lourenço, M. Dutra, A. Delfino e J. S. Sá Martins, *Int. Jour. Mod. Phys.* **D 16**, 285 (2007).
- [69] T. Passamini e M. L. Cescato, *Int. Jour. Mod. Phys.* **D 16**, 297 (2007).
- [70] A. Z. Mekjian e M.B. Tsang, *Adv. Nucl. Phys* **26**, 89 (2001).
- [71] J. E. Finn, et al, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 1321 (1982)
- [72] G. F. Peaslee, et al, *Phys. Rev.* **C 49**, R2271 (1994).
- [73] C. A. Olgivie, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 1214 (1991).
- [74] M. B. Tsang, et al, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1502 (1993).
- [75] J. B. Natowitz, et al, *Phys. Rev.* **C 65**, 34618 (2002).
- [76] J. Pochodzalla, et al, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1040 (1995); D. P. Menezes e C. Providência, *Phys. Rev.* **C 64**, 044306 (1999).
- [77] S. R. Souza, P. Danielewicz, S. Das Gupta, R. Donangelo, W. A. Friedman, W. G. Lynch, W. P. Tan e M. B. Tsang, *Phys. Rev.* **C 67**, 051602(R) (2003); S. R. Souza, R. Donangelo, W. G. Lynch, W. P. Tan e M. B. Tsang, *Phys. Rev.* **C 69**, 031607 (2004); S. R. Souza, M. B. Tsang, R. Donangelo, W. G. Lynch e A. W. Steiner, *Phys. Rev.* **C 78**, 014605 (2008); S. R. Souza, B. V. Carlson, R. Donangelo, W. G. Lynch, A. W. Steiner e M. B. Tsang, *Phys. Rev.* **C 79**, 054602 (2009).
- [78] L. P. Csernai e J. J. Kapusta, *Phys. Rep.* **131**, 223 (1986); H. Müller e R. M. Dreizler, *Nucl. Phys.* **A 563**, 649 (1993); M. Malheiro, A. Delfino e C. T. Coelho, *Phys. Rev.* **C 58**, 426 (1998); A. Bhattacharya e S. Raha, *Phys. Rev.* **C 53**, 522 (1996).
- [79] J. Theis, G. F. Graebner, G. Buchwald, J. A. Maruhn, W. Greiner, H. Stöcker e J. Polony, *Phys. Rev.* **D 28**, 2286 (1983).

- [80] H. Müller, Nucl. Phys. **A 618**, 349 (1997); A. Delfino, J. B. Silva, M. Malheiro, M. Chiapparini e M. E. Bracco, J. Phys. **G 28**, 2249 (2002); U. Heinz, P. R. Subramanian, H. Stöcker e W. Greiner, J. Phys. **G 12**, 1237 (1986); Bo-Qiang Ma, Qi-Ren Zhang, D. H. Riske e W. Greiner, Phys. Lett. **B 315**, 29 (1993).
- [81] S. Salinas, *Introdução à física estatística*, Edusp (1997).
- [82] J. M. Yeomans, *Statistical mechanics of phase transitions*, Oxford University Press (1992).
- [83] J. B. Silva, A. Delfino, J. S. Sá Martins, S. Moss de Oliveira e C. Cordeiro, Phys. Rev. **C 69**, 024606 (2004).
- [84] M. Dutra, O. Lourenço, A. Delfino e J. S. Sá Martins, Int. Jour. Mod. Phys. **D 19**, 1583 (2010).
- [85] W. Stocker, Phys. Lett. **B 142**, 319 (1984).
- [86] X. Vinas, M. Barranco, J. Treiner e S. Stingari, Astron. Astrophys. **L 34**, 182 (1987).
- [87] A. Das, R. Nayak, L. Satpathy, J. Phys. **G 18**, 869 (1992).
- [88] J. S. Sá Martins e A. Delfino, Phys. Rev. **C 61**, 044615 (2000).
- [89] A. Delfino, M. Jansen e V. S. Timóteo, Phys. Rev. **C 78**, 034909 (2008).
- [90] M. Asakawa e K. Yazaki, Nucl. Phys. **A 505**, 668 (1989).
- [91] P. B. Munzinger, K. Redlich e J. Stachel, arXiv:0304013v1 [nucl-th].
- [92] W. Greiner, S. Schramm e E. Stein, *Quantum chromodynamics*, 3ed. Springer-Verlag (2007).
- [93] J. D. Griffiths, *Introduction to elementary particles*, John Willey & Sons (1987).
- [94] Simon Roessner, *Field theoretical modelling of the QCD phase diagram*, Dissertação de Mestrado, Technische Universität München, Physik-Departement (2006); *Phases of QCD*, Tese de Doutorado, Technische Universität München, Physik-Departement (2009).
- [95] J. B. Kogut, Rev. Mod. Phys. **51**, 659 (1979); Rev. Mod. Phys. **55**, 775 (1983).
- [96] H. J. Rothe, *Lattice gauge theories. An introduction*, World Scientific (1997).
- [97] D. P. Landau e K. Binder, *A guide to Monte Carlo simulations in statistical physics*, Cambridge University Press (2000).
- [98] K. Splittorff e J. J. M. Verbaarschot, Phys. Rev. Lett. **98**, 031601 (2007).
- [99] C. R. Allton, et al, Phys. Rev. **D 66**, 074507 (2002); C. R. Allton, et al, Phys. Rev. **D 68**, 014507 (2003); C. R. Allton, et al, Phys. Rev. **D 71**, 054508 (2005);
- [100] Z. Fodor e S.D. Katz, Phys. Lett. **B 534**, 87 (2002); J. High Energy Phys. 03, 014 (2002); Z. Fodor, S. D. Katz e K. K. Szabo, Phys. Lett. **B 568**, 73 (2003).

- [101] E. Laermann, O. Philipsen, *Annu. Rev. Nucl. Part. Sci.* **53**, 163 (2003).
- [102] P. de Forcrand e O. Philipsen, *Nucl. Phys.* **B 642**, 290 (2002); *Nucl. Phys.* **B 673**, 170 (2003); M. D’Elia e M. P. Lombardo, *Phys. Rev.* **D 67**, 014505 (2003); **70**, 074509 (2004); M. D’Elia, F. Di Renzo e M. P. Lombardo, *Phys. Rev.* **D 76**, 114509 (2007).
- [103] Z. Fodor, S. D. Katz e C. Schmidt, *J. High Energy Phys.* **03**, 121 (2007).
- [104] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn e V. F. Weisskopf, *Phys. Rev.* **D 9**, 3471 (1974); A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn, *Phys. Rev.* **D 10**, 2599 (1974); T. DeGrand, R. L. Jaffe, K. Johnson, J. Kiskis, *Phys. Rev.* **D 12**, 2060 (1975).
- [105] Y. Nambu, G. Jona-Lasinio, *Phys. Rev.* **122**, 345 (1961); **124**, 246 (1961).
- [106] M. Buballa, *Phys. Rep.* **407**, 205 (2005).
- [107] U. Vogl e W. Weise, *Prog. Part. Nucl. Phys.* **27**, 195 (1991); S. P. Klevansky, *Rev. Mod. Phys.* **64**, 649 (1992); T. Hatsuda e T. Kunihiro, *Phys. Rep.* **247**, 221 (1994).
- [108] M. Hanauske, L. M. Satarov, I. N. Mishustin, H. Stöcker e W. Greiner, *Phys. Rev.* **D 64**, 043005 (2001).
- [109] K. Fukushima, *Phys. Lett.* **B 591**, 277 (2004).
- [110] C. Ratti, M. A. Thaler e W. Weise, *Phys. Rev.* **D 73**, 014019 (2006).
- [111] C. Ratti, S. Roessner, M.A. Thaler e W. Weise, *Eur. Phys. J.* **C 49**, 213 (2007).
- [112] C. Ratti, S. Roessner e W. Weise, *Phys. Lett.* **B 649**, 57 (2007).
- [113] S. Roessner, C. Ratti e W. Weise, *Phys. Rev.* **D 75**, 034007 (2007).
- [114] C. Ratti, S. Roessner e W. Weise, *J. Phys. Phys.* **G 34**, S647 (2007).
- [115] S. Roessner, T. Hell, C. Ratti e W. Weise, *Nucl. Phys.* **A 814**, 118 (2008).
- [116] T. Hell, S. Roessner, M. Cristoforetti e W. Weise, *Phys. Rev.* **D 79**, 014022 (2009).
- [117] K. G. Wilson, *Phys. Rev.* **D 10**, 2445 (1974).
- [118] W. Greiner e J. Reinhardt, *Field quantization*, Springer-Verlag (1996).
- [119] L. McLerran e B. Svetitsky, *Phys. Rev.* **D 24**, 450 (1981).
- [120] N. Weiss, *Phys. Rev.* **D 25**, 2667 (1982).
- [121] K. Holland e U. J. Wiese, arXiv:0011193v1 [hep-ph].
- [122] J. I. Kapusta e C. Gale, *Finite-temperature field theory. Principles and applications*, 2ed. Cambridge University Press (2006).

- [123] H. Hansen, W. M. Alberico, A. Beraudo, A. Molinari, M. Nardi e C. Ratti, Phys. Rev. **D 75**, 065004 (2007); P. Costa, M. C. Ruivo, C. A. de Sousa, H. Hansen e W. M. Alberico, Phys. Rev. **D 79**, 116003 (2009).
- [124] Ramona Vogt, *Ultrarelativistic heavy-ion collisions*, Elsevier (2007).
- [125] K. Fukushima, Phys. Rev. **D 77**, 114028 (2008).
- [126] V. A. Dexheimer e S. Schramm, Phys. Rev. **C 81**, 045201 (2010); V. A. Dexheimer e S. Schramm, Nucl. Phys. **A 827**, 579 (2009).
- [127] M. Cheng, N. H. Christ, S. Datta, et al, Phys. Rev. **D 77**, 014511 (2008).
- [128] A. Bazavov, T. Bhattacharya, M. Cheng, et al, Phys. Rev. **D 80**, 014504 (2009).
- [129] S. K. Ghosh, T. K. Mukherjee, M. G. Mustafa e R. Ray, Phys. Rev. **D 73**, 114007 (2006).
- [130] K. Fukushima e T. Hatsuda, Rep. Prog. Phys. **74**, 014001 (2011).
- [131] E. S. Browman e J. I. Kapusta, Phys. Rev. **C 79**, 015202 (2009).
- [132] M. Stephanov, PoS (LAT2006) 024.
- [133] H. Mao, J. Jin e M. Huang, J. Phys. **G 37**, 035001 (2010).
- [134] L. McLerran e R. D. Pisarski, Nucl. Phys. **A 796**, 83 (2007); L. McLerran, Nucl. Phys. **A 830**, 709c (2009); L. McLerran, K. Redlich e C. Sasaki, Nucl. Phys. **A 824**, 86 (2009).
- [135] M. Ciminale, R. Gatto, N. D. Ippolito, G. Nardulli e M. Ruggieri, Phys. Rev. **D 77**, 054023 (2008).
- [136] U. Heinz, P. R. Subramanian, H. Stöcker e W. Greiner, J. Phys. **G 12**, 1237 (1986).
- [137] Bo-Qiang Ma, Qi-Ren Zhang, D. H. Rischke e W. Greiner, Phys. Lett. **B 315**, 29 (1993).
- [138] A. Delfino, M. Chiapparini, M. E. Bracco, L. Castro e S. E. Epsztein, J. Phys. **G 27**, 2251 (2001).
- [139] O. Lourenço, M. Dutra, A. Delfino e M. Malheiro, *PNJL and hadronic models in the quark-hadron phase transition, a ser submetido ao Physics Letters B*.
- [140] O. Lourenço, M. Dutra, A. Delfino e M. Malheiro, *The hadron-quark phase transition in a hadronic and PNJL models perspective, a ser submetido ao Physical Review D*.
- [141] A. Delfino, J. B. Silva e M. Malheiro, Phys. Rev. **C 73**, 037311 (2006).
- [142] F. T. Brandt, *Tópicos sobre campos de gauge a temperatura finita*, Tese de Livre Docência, Universidade de São Paulo, Instituto de Física (2004).