



INSTITUTO DE FÍSICA
Universidade Federal Fluminense

**Análise do setor não perturbativo
das teorias de Yang-Mills: Cadeias
de vórtices e instantons como fontes
de confinamento**

André Luís Leite de Lemos

Niterói-RJ

2011

André Luís Leite de Lemos

ANÁLISE DO SETOR NÃO PERTURBATIVO
DAS TEORIAS DE YANG-MILLS: CADEIAS
DE VÓRTICES E INSTANTONS COMO
FONTES DE CONFINAMENTO

Tese apresentada ao programa de Pós-graduação em Física da UFF como requisito parcial para obtenção do grau de doutor em Física.

Orientador: Luis Esteban Oxman

Niterói-RJ, Julho de 2011

Tese de doutorado com o título “*Análise do setor não perturbativo das teorias de Yang-Mills: Cadeias de vórtices e instantons como fontes de confinamento*”, defendida por André Luís Leite de Lemos e aprovada em 10 de agosto de 2011, em Niterói, Estado do Rio de Janeiro, pela banca examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Luís Esteban Oxman
Orientador
Universidade Federal Fluminense

Prof. Dr. Clóvis José Wotzasek
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Daniel Gustavo Barci
Universidade Estadual do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Jose Abdalla Helayël Neto
Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas

Prof. Dr. Marcelo Santos Guimarães
Universidade Estadual do Rio de Janeiro

Prof. Dr. Marcelo Silva Sarandy
Universidade Federal Fluminense

Profa. Dra. Maria Emília Xavier Guimarães
Universidade Federal Fluminense

Prof. Dr. Rodrigo Ferreira Sobreiro
Universidade Fluminense

Dedico este trabalho à minha esposa Josiane e ao meu filho Kauã.

Agradecimentos

Quero expressar os meus profundos agradecimentos a todas as pessoas que me apoiaram direta e indiretamente, durante este período de quatro anos de doutorado. Em especial, aos meus pais Emir Leite de Lemos e Marlene Leite de Lemos e meu irmão Emir Leite de Lemos Fortes, que apesar da distância sempre demonstraram grande carinho e preocupação para comigo. Aos meus sogros Claudio Vieira de Azevedo e Eliete Pereira de Azevedo, por toda confiança que depositaram em mim. Aos amigos vizinhos Adriano L. da Costa e Lécia L. da Costa por toda ajuda que me deram nos momentos que mais precisei.

Não posso deixar de agradecer ao meu professor, orientador e grande amigo Luis Esteban Oxman por ter orientado com tanto entusiasmo e dedicação. Aos meus amigos do *Instituto de Física da Universidade Federal Fluminense*, em especial: Nuno Crokidakis, Gabriel da Costa, Bruno Teixeira, Viktor Becerra, Márcio Jorge T. da Costa, Flávio A. da Silveira, Alexandre Lima, Thiago Caramês, Anderson Tomaz, e todos os colegas, professores e demais funcionários, que me apoiaram e fizeram com que este período em que trabalhei nesta tese se tornasse especial.

Aos professores Clóvis Wotzasek, Romulo Rougemont, Leonardo Grigorio e Marcelo Guimarães pelo grande interesse que demonstraram pelo meu trabalho bem como todas as conversas motivadoras que tivemos.

Um agradecimento todo especial a minha esposa Josiane, pelo seu carinho, paciência e companheirismo em todos os momentos. Por todos os belíssimos momentos que passamos e pelos muitos que virão.

Quero agradecer também ao programa de *Pós-graduação em Física da Universidade Federal Fluminense*, em particular, ao pessoal da secretaria e biblioteca pela eficiência, organização e boa vontade que demonstraram sempre que precisei e ao *CNPQ* pelo apoio financeiro.

À todas as pessoas que me apoiaram de alguma forma e, porventura, injustamente não foram citadas aqui. Expresso meus sinceros agradecimentos.

Resumo

A representação de Cho-Faddeev-Niemi das teorias de Yang-Mills nos permite evidenciar, de uma maneira simples, a estrutura topológica da teoria. Neste sentido, instantons e vórtices de centro surgem naturalmente correlacionados através de uma decomposição dos campos de calibre em uma base local no espaço de cor. Por outro lado, a maneira como estas contribuições aparecem na função de partição da teoria não é nada trivial, pois envolve integrações sobre todas as classes de transformações que geram as possíveis bases para esses defeitos. O primeiro passo para começar a tratar os defeitos físicos presentes no sistema é desacoplar e eliminar os objetos não observáveis como cordas e superfícies de Dirac, dependendo de se trabalhamos em um espaço-tempo com três ou quatro dimensões, respectivamente. Utilizando um argumento puramente topológico, é possível desacoplar os defeitos de Dirac aparentemente presentes em objetos físicos como a função de partição, mantendo apenas os defeitos físicos nas respectivas bordas. Após este procedimento obtivemos, através de um cálculo bastante controlado, uma representação para a função de partição da teoria de Yang-Mills com grupo $SU(2)$, no espaço-tempo Euclidiano 3-dimensional, que inclui o efeito de um ensemble de cadeias de instantons e vórtices correlacionados. A teoria efetiva encontrada corresponde a uma extensão do modelo proposto por 't Hooft, para um campo de vórtices com simetria $Z(2)$, que exibe uma transição de fase confinante determinada essencialmente por um parâmetro de desordem associado ao termo quadrático dos campos de vórtices. A extensão que obtivemos, por meio do cálculo cuidadoso da função de partição para um ensemble de defeitos interagentes, inclui uma interação com campos duais da teoria de Yang-Mills acoplados através da derivada covariante. Esta extensão foi proposta recentemente através de argumentos heurísticos que permitiram discutir a relação entre as transformações duais e a observabilidade das superfícies de Wilson.

Abstract

The Cho-Faddeev-Niemi representation provides a framework to deal with the topological structure of Yang-Mills theories in a simple manner. Instantons in $3D$ or monopoles in $4D$ naturally arise correlated with center vortices, as defects of the local color frame used to decompose the gauge fields. However, the analysis of these contributions is far from trivial, as it involves integrations over all classes of frame defects. In the first part of this work, by using a purely topological argument, we showed how to decouple the nonobservable Dirac defects, apparently present in physical quantities such as the partition function, in favor of their borders, where instantons or monopoles are placed. In the second part, by means of a quite controlled calculation, we obtained a representation for the partition function in $3D$ $SU(2)$ Yang-Mills theory that includes the effect of an ensemble of correlated instantons and center vortices, after assuming a phenomenological action for them. This effective theory corresponds to an extension of the $Z(2)$ 't Hooft vortex model, which displays a confining/deconfining phase transition. In our model, the $Z(2)$ vortex field appears minimally coupled to the dual vector field that can be defined in $3D$ Yang-Mills theories. This extension was recently proposed by following heuristic arguments that allow discussing the relationship between large dual transformations and the observability of Wilson surfaces.

Sumário

Lista de Figuras

| | |
|---|-------|
| Introdução | p. 11 |
| 1 Aspectos gerais das teorias de Yang-Mills | p. 16 |
| 1.1 Construindo uma teoria de calibre não-Abeliana | p. 16 |
| 1.2 A quantização de Faddeev-Popov | p. 19 |
| 1.3 A simetria BRST | p. 21 |
| 1.4 A construção do espaço de Fock | p. 23 |
| 2 Configurações topológicas clássicas | p. 29 |
| 2.1 Critérios de estabilidade | p. 29 |
| 2.2 Classes de homotopia e os vórtices de Nielsen-Olesen | p. 34 |
| 2.3 Monopolos e cordas | p. 38 |
| 2.4 Vórtices de centro | p. 39 |
| 3 Configurações topológicas quânticas e confinamento | p. 42 |
| 3.1 Gás de instantons na QED_3 compacta | p. 42 |
| 3.2 Monopolos em $SU(N)$ e o método da projeção Abeliãna | p. 47 |
| 3.3 Vórtices de centro quânticos | p. 49 |
| 3.4 Dominância Abeliãna \times dominância de centro | p. 55 |
| 4 Tratamento para os defeitos de Dirac na QED_3 compacta com campos carregados e Yang-Mills com grupo $SU(2)$ | p. 58 |

| | | |
|----------|--|---------------|
| 4.1 | QED ₃ compacta com campos de matéria | p. 59 |
| 4.2 | A representação de Cho-Fadeev-Niemi para Yang-Mills com grupo SU(2) | p. 60 |
| 4.3 | Instantons e monopolos como defeitos da base local de cor | p. 63 |
| 4.4 | Fixação de calibre | p. 65 |
| 4.4.1 | Fixando o calibre na QED ₃ com campos carregados | p. 65 |
| 4.4.2 | Fixando o calibre na teoria de Yang-Mills com grupo SU(2) | p. 66 |
| 4.5 | As funções de partição | p. 68 |
| 4.5.1 | Função de partição para QED ₃ compacta com campos carregados na presença de instantons no \mathcal{R}^3 | p. 68 |
| 4.5.2 | Função de partição para Yang-Mills com grupo SU(2) na presença de monopolos no \mathcal{R}^4 | p. 69 |
| 4.6 | Tratamento para as cordas e superfícies de Dirac | p. 69 |
| 4.6.1 | A decomposição de Hodge | p. 71 |
| 4.6.2 | Transformação de variáveis dos campos na QED ₃ compacta com campos carregados | p. 72 |
| 4.6.3 | Transformação singular dos campos no setor topologicamente trivial de SU(2) | p. 75 |
| 4.6.4 | Argumento geral para eliminação dos defeitos de Dirac | p. 77 |
| 5 | Instantons e vórtices de centro correlacionados em SU(2) | p. 83 |
| 5.1 | Vórtices de centro como defeitos da base local de cor | p. 85 |
| 5.2 | Ensemble de cadeia de instantons | p. 88 |
| 5.3 | Peso estatístico para um único vórtice de centro | p. 92 |
| 5.4 | A teoria de campos efetiva | p. 95 |
| | Conclusões | p. 99 |
| | Referências | p. 103 |

Lista de Figuras

| | | |
|----|--|-------|
| 1 | Potencial com a forma $\lambda(\phi^2 - F^2)^2/4$ | p. 30 |
| 2 | Potencial no modelo de Sine-Gordon | p. 31 |
| 3 | Forma estática de ϕ para diferentes condições de contorno em $x \rightarrow \pm\infty$ | p. 32 |
| 4 | Pontos opostos na esfera S^3 identificados | p. 37 |
| 5 | 1 ^a classe de homotopia para caminhos fechados no $SO(3)$ | p. 37 |
| 6 | 2 ^a classe de homotopia para caminhos fechados no $SO(3)$ | p. 38 |
| 7 | Orientação de $ \phi\rangle$ com x fora do interior de C | p. 52 |
| 8 | Orientação de $ \phi\rangle$ com x dentro do interior de C | p. 53 |
| 9 | Formação da parede de domínio em C | p. 53 |
| 10 | Razão de Creutz das tensões em função da separação R (veja ref. [70]) | p. 56 |
| 11 | Caminho fechado \mathcal{C} formado pela composição $[\mathbf{x}] \circ [\bar{\mathbf{x}}]^{-1}$ | p. 70 |
| 12 | Corda de Dirac fechada localizada em $\partial\Sigma$ enlaçada por um loop l | p. 73 |
| 13 | Instanton/anti-instanton unidos por uma corda de Dirac (em azul) localizados sobre uma linha de campo de B_μ (em preto) | p. 79 |
| 14 | Instanton/anti-instanton em pontos genéricos ligados por uma corda de Dirac (em azul) + n contribuições de uma corda de Dirac fechada localizada em $\partial\Sigma$ (em verde) antiparalela a linha de campo B_μ (em preto) . | p. 81 |
| 15 | Instanton/anti-instanton correlacionado com um par de vórtices de centro | p. 90 |
| 16 | Diferentes maneiras de correlacionar 2 pares de instantons e anti-instantons com pares de vórtices de centro. | p. 90 |
| 17 | Vórtices interagentes com extremos e orientações nas extremidades fixos são associados com o peso $q(x, u, x_0, u_0, L)$ | p. 94 |

Introdução

Um dos grandes problemas da física teórica na atualidade é entender o mecanismo por trás do fenômeno do confinamento das cargas de cor na cromodinâmica quântica (QCD). Nesta teoria, quarks e gluons aparecem como excitações fundamentais de sua descrição perturbativa. Contudo, nenhuma partícula carregada desse tipo é observada na Natureza.

Muitos cenários foram propostos no intuito de buscar entender a dinâmica responsável pela transição para fase confinante ou os graus de liberdade relevantes nessa fase. É importante observar que a QCD é uma teoria muito bem estabelecida e de fato suas equações podem ser estudadas numericamente na rede, permitindo construir um espectro em extraordinário acordo com as partículas observadas em baixas energias [1],[2].

Do ponto de vista teórico, quando tratamos do limite infravermelho (baixas energias), o problema se torna altamente não trivial. Neste limite, a constante de acoplamento é tal que a interação entre os quarks aumenta à medida que eles se separam. Desta forma um tratamento perturbativo se torna completamente impraticável e caminhos alternativos são então bem vindos.

O foco principal do nosso trabalho é buscar uma descrição efetiva do fenômeno de confinamento. A chave para este problema pode estar na estrutura topológica da teoria em questão. Alguns cenários tais como a supercondutividade dual [3], a dominância Abelian [4], a dominância de centro [5]-[9], a implementação de horizontes de Gribov [10, 11] e o comportamento infravermelho associado do propagador do gluon [12], foram exploradas na intenção de entender este fenômeno.

Em nossos trabalhos, exploraremos cenários que incluem defeitos cromomagnéticos na descrição da teoria. Por exemplo, na supercondutividade dual, o vácuo da QCD se comportaria como um supercondutor de correntes cromomagnéticas e com isso as linhas de campo produzidas pelas cargas cromoeletricas estariam comprimidas em um fino tubo de fluxo cromoeletrico, unindo pares de quarks e antiquarks. Assim, a energia de interação aumentaria com o aumento da separação entre os quarks. Este belo mecanismo foi realizado em modelos com grupo $SU(N)$ em (2+1)D com campos carregados que se transformam na representação adjunta, onde vórtices de centro $Z(N)$ condensam [3], na

QED compacta em 3 e 4 dimensões [13, 14] que contêm singularidades de tipo monopolo, e em teorias de Yang-Mills supersimétricas $\mathcal{N} = 2$ [15].

Um ponto importante nesse tipo de estudo é como identificar tais defeitos magnéticos na teoria. Por exemplo, monopolos podem ser implementados através da projeção Abeliãna, onde uma condição de fixação de calibre que diagonaliza um campo que se transforma na representação adjunta de $SU(N)$ é considerada [16]. Uma outra maneira de implementar monopolos na teoria é através da representação de Cho-Faddeev-Niemi (CFN) [17]-[23]. Nesta representação, os campos de calibre (gluons) são decompostos em uma base local do espaço de cor. Uma extensão desta representação foi proposta em [24], permitindo acomodar não só monopolos mas também vórtices de centro, correlacionados ou não correlacionados, dentro deste formalismo. Monopolos e vórtices de centro surgem então, naturalmente, como defeitos associados a base local do espaço de cor com a vantagem de não exigirmos a priori nenhuma condição de fixação de calibre.

Monopolos poderiam explicar a lei de escala de Casimir “Casimir scaling” [25], que prevê a dependência da tensão da corda, para tensões intermediárias, com relação ao Casimir do grupo, fato observado numericamente na rede, para $SU(2)$ e $SU(3)$ [26]-[28]. Já os vórtices de centro poderiam explicar a dependência da tensão da corda com a representação do grupo $Z(N)$ “N-ality” [29]. De fato, cenários baseados somente em monopolos ou somente em vórtices de centro são apenas parcialmente bem sucedidos para descrever o comportamento do potencial confinante entre os quarks. Muito embora, apesar de modelos que envolvam vórtices serem bem estabelecidos quando formulados na rede, quando tratamos destes modelos no contínuo surge a questão da instabilidade dos vórtices associada com a razão giromagnética dos gluons não diagonais conhecida como instabilidade de Savvidy-Nielsen-Olesen [30]. Todavia, é possível modificar essa análise de estabilidade considerando a definição usual de vórtice fino [31] reescrita em termos de uma base local de cor e então realizando uma deformação diagonal dessas configurações definindo um novo tipo de vórtice com espessura em teorias de Yang-Mills (veja ref. [32]). Com base nesse resultado, consideramos um ensemble de instantons e vórtices de centro correlacionados em uma teoria de Yang-Mills com grupo de simetria $SU(2)$ no espaço-tempo Euclidiano 3-dimensional [33], propondo uma dinâmica associada aos vórtices (representados como defeitos de uma base local de cor).

Um passo importante nesse estudo é como tratar objetos não físicos que aparecem na teoria quando introduzimos defeitos como instantons e monopolos, sobretudo quando se trata da função de partição. Nessa direção, desenvolvemos um procedimento para

desacoplar objetos não físicos, que permite eliminar as cordas ou superfícies de Dirac da representação da função de partição, mantendo apenas os objetos físicos localizados nas bordas (monopolos e anti-monopolos) [34].

Todavia, como já mencionamos, podemos considerar também a possibilidade de instantons acoplarem-se aos anti-instantons não por cordas de Dirac, mas sim por pares de vórtices de centro, cada qual com fluxo cromomagnético igual à $\frac{2\pi}{g}$. A forma como essas configurações se manifestam na função de partição da teoria não é nada trivial. O fato de considerarmos um ensemble de instantons e vórtices correlacionados impõe que devemos integrar sobre todas as possíveis configurações que compõe esse ensemble, em outras palavras, integrar sobre todas as classes de transformações que geram as respectivas bases no espaço local de cor, cujos defeitos representam os instantons e vórtices correlacionados.

Um dos ingredientes para tratar o ensemble de instantons e vórtices surgiu de estudos sobre polímeros no limite onde as cadeias são semi-flexíveis [35]. Essas cadeias possuem propriedades especiais que permitem interpretar a integração sobre essas estruturas como um propagador associado a uma partícula e, quando um fator de Boltzman proporcional ao comprimento da cadeia é acrescentado, ao integrarmos sobre os possíveis comprimentos, o resultado que se obtém é o propagador de uma teoria relativística. Contudo, somente se levarmos em conta as propriedades físicas corretas desta cadeia obtemos este resultado. Kleinert [36] mostrou que neste sistemas não é possível reproduzir um objeto que possa ser identificado como propagador associado a uma teoria relativística se não levarmos em conta o efeito de rigidez da cadeia “stiffness”.

A rigidez pode ser introduzida de duas formas equivalentes: primeiro, considerando um modelo de cadeias aleatórias onde existe uma completa isotropia dos vetores tangentes nos pontos da cadeia, em outras palavras, os monômeros rotacionam com a mesma probabilidade angular em todas as direções para todos os segmentos da cadeia. Ao tomarmos o limite para o contínuo, a rigidez é introduzida neste caso assumindo um tamanho efetivo para os segmentos da cadeia. Desta maneira, o sistema deixaria de se comportar como uma cadeia aleatória tendendo a se alinhar em uma determinada direção. A outra forma seria considerar na ação clássica associada a cadeia de polímeros um termo cinético em termos da derivada do vetor tangente em cada ponto da cadeia com relação ao parâmetro de comprimento de arco. Este termo cinético tem uma interpretação de custo energético para curvar a cadeia em um dado ponto, ou seja, nos fornece informação sobre a rigidez.

Inspirados nessa idéia, uma analogia entre cadeias de polímeros semiflexíveis e cadeias de instantons e vórtices correlacionados, propomos uma dinâmica associada a essas confi-

gurações, parametrizando certas propriedades físicas, que permitem a integração sobre o ensemble desses defeitos. O termo cinético, relacionado com a rigidez, será indispensável, mas não suficiente, para descrever a cadeia de instantons e vórtices correlacionados. Além da rigidez deveremos introduzir também efeitos de auto-interações entre as cadeias assim como uma interação entre as cadeias e um campo vetorial. Esta última deve ser considerada pois na própria representação de CFN da função de partição de Yang-Mills existe um termo de interação deste tipo.

Através de um tratamento cuidadoso que descreve as possíveis configurações que compõem este ensemble, e utilizando o resultado da integração sobre uma linha de vórtice com extremos fixos que conecta um par instanton/anti-instanton, foi possível obter uma teoria efetiva para os defeitos que corresponde à uma extensão do modelo proposto por 't Hooft, para um campo de vórtices com simetria $Z(2)$, que exhibe uma transição de fase confinante determinada essencialmente por um parâmetro de desordem associado ao termo quadrático do campo de vórtices.

Esta tese está organizada da seguinte maneira: no primeiro capítulo faremos uma revisão sobre os principais aspectos da teoria de Yang-Mills desde a construção de uma teoria não-Abeliana de campos passando pelo processo de quantização de Fadeev-Popov até a construção do espaço de Fock dos estados físicos. No segundo capítulo abordaremos algumas configurações topológicas clássicas enfatizando principalmente a maneira como definimos monopolos e vórtices de centro em teorias de calibre não-Abelianas. Complementando o que foi visto no capítulo anterior, no terceiro capítulo, estudaremos propriedades de algumas configurações topológicas implementadas ao nível quântico. Destacando alguns trabalhos que foram de suma importância nesta tese com o de A. M. Polyakov (1977) onde focaremos no tratamento da QED_3 compacta admitindo portanto singularidades tipo monopolos (instantons) e os trabalhos de 't Hooft de '78 e '81 sobre projeção Abelianas e quantização de sólitons com simetria $Z(N)$. No final deste capítulo faremos uma discussão sobre dominância Abeliana e dominância de centro com base em alguns resultados obtidos por simulações na rede. No capítulo 4, descreveremos o primeiro trabalho realizado na elaboração desta tese onde analisaremos as propriedades da QED_3 compacta com campos carregados e Yang-Mills com grupo $SU(2)$ em 4D na presença de configurações topológicas (monopolos). No caso de Yang-Mills, como veremos, afim de introduzir o setor de defeitos usaremos uma decomposição dos campos de calibre em uma base local do espaço de cor. A escolha dessa base local não é arbitrária e como veremos estará relacionada com uma transformação singular de $SU(2)$ com topologia não trivial. O foco principal deste capítulo é realizar um tratamento cuidadoso para os defeitos de Di-

rac que aparecem na representação da função de partição. No capítulo 5, motivados pelos resultados na rede sobre dominância Abelian e dominância de centro bem como a naturalidade com que vórtices de centro correlacionados com defeitos tipo monopolos aparecem quando usamos uma extensão da decomposição de Cho-Fadeev-Niemi [24], descreveremos o segundo trabalho realizado durante esta tese onde buscamos obter um modelo efetivo para Yang-Mills com grupo $SU(2)$ em 3D, em baixas energias. Finalizaremos esta tese apresentando uma discussão dos resultados obtidos e nossas conclusões.

1 *Aspectos gerais das teorias de Yang-Mills*

Começarei esta tese fazendo uma revisão dos principais aspectos perturbativos das teorias de Yang-Mills. Começando pela proposta inicial de Yang e Mills para uma teoria de calibre não-Abeliana clássica, passando pelo processo de quantização pelo método de Faddeev-Popov e a construção perturbativa do espaço de Fock dos estados físicos. Todo este capítulo foi baseado nas notas de aula do curso ministrado pelo professor Silvio P. Sorella na XVI Escola Jorge André Swieca e encontra-se na referência [39].

1.1 Construindo uma teoria de calibre não-Abeliana

Antes de construir uma teoria de calibre não-Abeliana é fundamental primeiramente entender o que é uma simetria de calibre. Para tal, tem-se como exemplo bem ilustrativo uma teoria Abeliana com campo escalar complexo ϕ definida definida pela densidade Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial_\mu \phi + \frac{\lambda}{4} (\phi^* \phi)^2. \quad (1.1)$$

1

É fácil notar que esta Lagrangeana é invariante sob uma transformação de tipo $U(1)$ global, ou seja,

$$\phi' = e^{i\alpha} \phi \quad , \quad \phi'^* = e^{-i\alpha} \phi^*, \quad (1.2)$$

onde α é uma constante. Uma invariância de calibre exige que a teoria seja invariante quando α passa a depender dos pontos do espaço-tempo $\alpha \rightarrow \alpha(x)$. Neste caso o sistema

¹Neste capítulo trabalharemos em todo momento no espaço-tempo Euclideano 4-dimensional.

deveria ser invariante sob uma transformação $U(1)$ local.

$$\phi' = e^{i\alpha(x)}\phi \quad , \quad \phi'^* = e^{-i\alpha(x)}\phi^*. \quad (1.3)$$

Todavia a Lagrangeana \mathcal{L} da forma como esta na eq.(1.1) não é invariante sob essa transformação. Afim de torná-la consistente com a simetria de calibre, introduz-se um objeto vetorial A_μ chamado de campo de calibre. Esse campo é introduzido na teoria através da derivada covariante, que substitui a derivada ordinária, $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$,

$$D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu. \quad (1.4)$$

Como o campo de calibre A_μ é introduzido de uma maneira arbitrária na teoria, pode-se exigir que ele se transforme da forma

$$A'_\mu \rightarrow A_\mu - ie\partial_\mu\alpha, \quad (1.5)$$

dessa maneira a Lagrangeana \mathcal{L} passa a ser invariante sob uma transformação $U(1)$ local, ou seja, possui simetria de calibre.

Tendo introduzido um novo campo A_μ , é necessário atribuir uma dinâmica para este. É possível observar que

$$F_{\mu\nu} = \frac{i}{e}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (1.6)$$

satisfaz a importante propriedade

$$F_{\mu\nu}(A') = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = F_{\mu\nu}(A), \quad (1.7)$$

ou seja, $F_{\mu\nu}$ é um invariante de calibre. Adiciona-se um termo na Lagrangeana que além de invariante de calibre também seja um escalar de Lorentz $F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + (D_\mu\phi)^*D_\mu\phi + \frac{\lambda}{4}(\phi^*\phi)^2. \quad (1.8)$$

Portanto o conjunto de transformações

$$\begin{aligned} \delta\phi &= e^{i\alpha}\phi \\ \delta\phi^* &= e^{-i\alpha}\phi^* \\ \delta A_\mu &= \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha, \end{aligned} \quad (1.9)$$

mantem a Lagrangeana invariante $\delta\mathcal{L} = 0$.

Uma vez entendido o conceito de simetria de calibre em uma teoria Abelianas, buscaremos estender essa simetria no contexto de uma teoria não-Abelianas. Ou seja, no fundo o que queremos é construir uma teoria invariante de calibre onde os campos A_μ não são mais simples vetores mas sim matrizes que tomam valores em uma certa álgebra de Lie. O grupo escolhido para representar tais objetos é o grupo $SU(N)$ cujos geradores $(T^a)^{ij}$, $a = 1, 2, \dots, N^2 - 1$ satisfazem,

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c \quad (1.10)$$

com a propriedade

$$Tr(T^a T^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}. \quad (1.11)$$

esta última conhecida como identidade de Jacobi.

Desejamos, portanto, construir uma teoria que seja invariante sob transformações locais de $SU(N)$

$$\phi^i \rightarrow U^{ij}\phi^j, \quad U^{ij} = (e^{i\omega(x)^a T^a})^{ij} \quad (1.12)$$

Da mesma forma como foi feito para o caso Abelianas, introduz-se uma derivada covariante

$$(D_\mu\phi)^i = (\delta^{ij}\partial_\mu - igA_\mu^{ij})\phi^j \quad (1.13)$$

onde

$$A_\mu^{ij} = A_\mu^a (T^a)^{ij}. \quad (1.14)$$

Os campos de calibre A_μ^a são necessários para que

$$(D_\mu\phi)^i \rightarrow U^{ij}(D_\mu\phi)^j, \quad (1.15)$$

sempre que junto com (1.13) consideraremos também a lei de transformação,

$$A'_\mu = UA_\mu U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1}. \quad (1.16)$$

O tensor de intensidades pode ser escrito na forma

$$F_{\mu\nu} = \frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]. \quad (1.17)$$

Pode-se verificar que

$$F'_{\mu\nu} = UF_{\mu\nu}U^{-1} \quad (1.18)$$

e se tomar o traço sobre os índices internos, tem-se que $Tr(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu})$ é invariante sob transformações locais de $SU(N)$.

De posse desses objetos invariantes de calibre pode-se construir uma ação para esta

teoria, definida no espaço-tempo Euclidiano 4-dimensional, que seja invariante sob transformações locais de $SU(N)$,

$$S_{YM} = \frac{1}{2} \int d^4x \text{Tr} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a, \quad (1.19)$$

onde

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= F_{\mu\nu}^a T^a, \\ F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^a A_\nu^b. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Além disso, é possível incluir um termo para um setor de matéria na representação fundamental

$$S_m = \int d^4x (D_\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) + \frac{\lambda}{4} (\phi^\dagger \phi)^2 \quad (1.21)$$

que também é invariante sob transformações locais de $SU(N)$

$$\begin{aligned} \delta \phi^i &= i\omega^a (T^a)^{ij} \phi^j, \\ \delta \phi^{i\dagger} &= -i\omega^a \phi^{j\dagger} (T^a)^{ij}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

1.2 A quantização de Faddeev-Popov

Buscaremos agora uma forma de quantizar as teorias de Yang-Mills. Uma das maneiras que pode-se utilizar para este processo é através da integração funcional, definindo a função de partição,

$$\int [\mathcal{D}A] e^{-S_{YM}}. \quad (1.23)$$

Contudo, apesar de ser a priori a maneira mais simples de quantizar as teorias de Yang-Mills, existe um problema fundamental. A questão é que em (1.23) estaríamos integrando funcionalmente sobre campos A_μ que são conectados por transformações de calibre (1.16). É possível definir o que é conhecido como órbita de calibre de uma dada configuração A_μ formada por todas as configurações fisicamente equivalentes, que podem ser obtidas de uma configuração A_μ através de uma transformação de calibre. É necessário, portanto, considerar o espaço de todas as órbitas de calibre e tomar, para cada órbita, uma única configuração de campo. Desta forma apenas configurações não equivalentes estariam sendo selecionadas. Este procedimento consiste essencialmente em determinar o que é conhecido como região modular fundamental (RMF). Nessa região teriam apenas configurações não equivalentes. Contudo, apesar das propriedades matemáticas da RMF serem bem estabelecidas, um procedimento de quantização da teoria que envolve somar sobre

todas as configurações da RMF ainda não é totalmente bem entendida.

O esquema de quantização de Faddeev-Popov proposto em 1967 é conhecido como a primeira tentativa de somente escolher configurações fisicamente inequivalentes. Isto é feito fixando um calibre para os campos, por exemplo o calibre de Landau,

$$\partial_\mu A_\mu^a = 0. \quad (1.24)$$

Essa condição selecionará uma única configuração de campo se não existirem outros campos equivalentes pertencentes a mesma órbita de calibre que compartilham a mesma condição. Isto é, quando

$$\partial_\mu A_\mu^U = \partial_\mu(U A_\mu U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1}) = 0 \quad (1.25)$$

não possui outra solução para U que não seja a solução trivial, $U = \text{constante}$. Porém, em 1978, Gribov em seu trabalho [40], apontou para o fato de que a eq.(1.26) teria soluções não triviais, para certas configurações A_μ , as quais são conhecidas como cópias de Gribov. Após isso, no mesmo ano, Singer mostrou que o problema das cópias de Gribov não era algo relacionado a escolha particular de um certo calibre mas de fato uma propriedade geral do procedimento da fixação de calibre, ao menos ao que concerne a calibres renormalizáveis locais e invariantes de Lorentz.

A questão de como tratar as cópias de Gribov, ainda é um assunto em aberto em teorias de Yang-Mills. Essas configurações tem importantes contribuições no regime não perturbativo e acredita-se que o tratamento correto esteja diretamente conectado com o confinamento dos gluons. O que se faz geralmente é considerar uma região mais abrangente no espaço funcional dos campos no qual teriam configurações não equivalentes, porém, do ponto de vista das transformações de calibre infinitesimais. Essa região é conhecida como região de Gribov. Existem trabalhos nessa linha que conseguem descrever a dinâmica dos gluons dentro da região de Gribov (ver [41] e suas referências).

Inicialmente, apenas o setor perturbativo das teorias de Yang-Mills será analisado, ou seja, restringindo-se ao limite ultravioleta da teoria. Neste caso pode-se ignorar o problema das cópias de Gribov e assim usar o método de Faddeev-Popov usual para a quantização.

O método de Faddeev-Popov implementa dentro da integral funcional de Feynman a condição de calibre (1.25). Tem-se assim, para a função de partição, a expressão

$$Z = \int [\mathcal{D}A] \delta(\partial_\mu A_\mu^a) \det \left(\partial_\mu D_\mu^{ab} \delta^{(4)}(x-y) \right) e^{-S_{YM}} \quad (1.26)$$

onde $\delta(\partial_\mu A_\mu^a)$ pode ser escrito introduzindo multiplicadores de Lagrange b^a ,

$$\delta(\partial_\mu A_\mu^a) \propto \int [\mathcal{D}b] e^{-\int d^4x b^a \partial_\mu A_\mu^a}. \quad (1.27)$$

Contudo, a expressão (1.27) pode ser escrita em uma forma local introduzindo os chamados campos fantasmas (ghosts) de Faddeev-Popov \bar{c} , c ,

$$\det\left(\partial_\mu D_\mu^{ab} \delta^{(4)}(x-y)\right) \propto \int [\mathcal{D}\bar{c}][\mathcal{D}c] e^{-\int d^4x \bar{c}^a \partial_\mu D_\mu^{ab} c^b}, \quad (1.28)$$

onde D_μ^{ab} é essencialmente uma derivada covariante

$$D_\mu^{ab} = \delta^{ab} \partial_\mu - i e f^{abc} A_\mu^c. \quad (1.29)$$

Usando as expressões (1.28) e (1.29), pode-se escrever a função de partição na forma

$$Z = \int [\mathcal{D}A][\mathcal{D}b][\mathcal{D}\bar{c}][\mathcal{D}c] e^{-S_{FP}}, \quad (1.30)$$

onde S_{FP} é a ação de Faddeev-Popov e tem a forma

$$S_{FP} = \int d^4x \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + b^a \partial_\mu A_\mu^a + \bar{c}^a \partial_\mu D_\mu^{ab} c^b \right). \quad (1.31)$$

Um aspecto importante desta teoria que foi mostrado por 't Hooft e Veltman no início dos anos '70, é que a ação de Faddeev-Popov é renormalizável em todas as ordens de teoria de perturbações. Um elemento fundamental no tratamento das divergências ultravioletas em teorias de calibre é a chamada regularização dimensional, introduzida primeiramente por Bollini e Giambiagi na referência [42].

1.3 A simetria BRST

Durante meado dos anos '70, os físicos: Becchi, Rouet, Stora e Tyutin, descobriram que a ação de Faddeev-Popov possui uma simetria que atualmente é conhecida como simetria BRST. Esta simetria implica de fato na renormalizabilidade da ação de Faddeev-Popov, além disso permite provar de uma forma bastante elegante a unitariedade da teoria. Outro ponto importante é que esta simetria não se apresenta somente nas teorias de Yang-Mills mas também está presente em outras teorias de calibre, como teorias de calibre topológicas, teoria de cordas, teorias supersimétricas, etc...

Consideram-se as seguintes transformações:

$$\begin{aligned}
sA_\mu^a &= -D_\mu^{ab}c^b = -(\partial_\mu c^a + gf^{abc}A_\mu^b c^c), \\
sc^a &= \frac{1}{2}gf^{abc}c^b c^c, \\
s\bar{c}^a &= b^a \\
sb^a &= 0,
\end{aligned} \tag{1.32}$$

pode-se verificar que a ação de Faddeev-Popov é invariante,

$$sS_{FP} = 0. \tag{1.33}$$

A simetria BRST também pode ser vista em outros calibres. Implementando o método de Faddeev-Popov em um calibre arbitrário, tem-se que

$$S_{FP} = \int d^4x \frac{1}{4}F^2 + s \int d^4x \bar{c}^a \zeta^a(A, b, c, \bar{c}), \tag{1.34}$$

sendo s nilpotente, $s^2 = 0$, a invariância BRST é preservada. Diferentes calibres correspondem a diferentes escolhas de ζ .

Uma questão fundamental que pode ser colocada é qual o melhor calibre que pode ser escolhido para uma teoria de Yang-Mills. Certos calibres fornecem uma enorme vantagem prática no cálculo dos diagramas de Feynman em ordens mais altas. Em geral, calibres invariantes de Lorentz mostram-se mais convenientes para cálculos explícitos em altas ordens [43]. Na literatura também encontram-se outros calibres que quebram a simetria de Lorentz: calibre de Coulomb, calibre axial, calibre de cone de luz, calibre temporal, etc. Para cálculos de diagramas de Feynman em altas ordens estes calibres trazem certa dificuldade e além disso divergências não-locais são encontradas tornando-os não muito fáceis de se trabalhar [44]. Em alguns casos esses calibres tem tido ótimas aplicações não perturbativas [45].

Outro ponto importante é a questão da renormalizabilidade. Dado um calibre, é preciso provar explicitamente que todos os contratermos na ação tem precisamente a mesma forma dos inicialmente considerados. Essa prova é usualmente feita encontrando simetrias adicionais que sejam próprias do calibre e que garanta que todos os contratermos tenham precisamente a mesma forma do calibre escolhido. Em particular, o gauge de

Landau possui 3 simetrias adicionais,

$$\begin{aligned}
\delta^{(1)}b^a &= cte & , & & \delta^{(1)}(c, \bar{c}, A) &= 0; \\
\delta^{(2)}\bar{c}^a &= cte & , & & \delta^{(2)}(b, c, A) &= 0; \\
\delta^{(3)}c^a &= -\lambda^a & , & & \lambda^a &= cte; \\
\delta^{(3)}b^a &= -gf^{abc}\bar{c}^b\lambda^c & , & & \delta^{(3)}(A, \bar{c}) &= 0.
\end{aligned} \tag{1.35}$$

Essas simetrias garantem que todos os contratermos afetados pelas condições de calibre sejam de tipo calibre de Landau.

1.4 A construção do espaço de Fock

Vimos anteriormente que a ação de Faddeev-Popov é invariante sob transformações de BRST. Veremos agora como essa simetria pode ser empregada na construção do subespaço físico da teoria, cujos estados apresentam norma positiva correspondente as duas polarizações físicas (transversas) do campo de calibre. Essa discussão pode ser encontrada com mais detalhes em [47]-[49]

Para realizar esta construção é necessário trabalhar no espaço-tempo de Minkowski. Isso pode ser feito fazendo uma rotação de Wick da ação de Faddeev-Popov (1.32). Feito isso, considere o caso particular onde $g = 0$,

$$S_{FP} = \int d^4x \left(\frac{1}{4} F^{a\mu\nu} F_{\mu\nu}^a + b^a \partial^\mu A_\mu^a + \frac{1}{2} b^2 + \bar{c}^a \partial^2 c^a \right). \tag{1.36}$$

Esta ação corresponde a parte livre da teoria não-Abeliana, tal ação pode ser usada para descrever campos assintóticos, ou seja, muito útil na construção do espaço de Fock da teoria perturbativa. Ela pode ser quantizada no calibre de Feynman,

$$-\frac{(\partial_\mu A_\mu^a)^2}{2} = \delta\mathcal{L}. \tag{1.37}$$

Reparem que a ação (1.36) exhibe uma simetria BRST,

$$\begin{aligned}
sA_\mu^a &= -\partial_\mu c^a, \\
sc^a &= 0, \\
s\bar{c}^a &= b^a, \\
sb^a &= 0.
\end{aligned} \tag{1.38}$$

As equações de movimento podem ser obtidas apartir da ação (1.36),

$$\begin{aligned}\frac{\delta S}{\delta b} &= \partial A + b = 0; \\ \frac{\delta S}{\delta A_\mu} &= \partial^2 A - \partial^\mu(\partial A + b) = \partial^2 A^\mu = 0; \\ \frac{\delta S}{\delta c} &= -\partial^2 \bar{c} = 0, \quad , \quad \frac{\delta S}{\delta \bar{c}} = \partial^2 c = 0.\end{aligned}\tag{1.39}$$

onde os índices de cor foram omitidos por simplicidade.

Um passo importante na construção do subespaço dos estados físicos da teoria é garantir que a ação (1.36) seja Hermitiana. Para tal assumem-se que os campos satisfazem uma condição de Hermeticidade,

$$\begin{aligned}c^\dagger &= c \\ \bar{c}^\dagger &= -\bar{c}, \\ A_\mu^\dagger &= A_\mu, \\ b^\dagger &= b.\end{aligned}\tag{1.40}$$

As soluções para as equações de movimento (1.39) são claramente expansões em termos de ondas planas. Utilizando a condição (1.40), é possível expressá-las como uma expansão em série de Fourier

$$\begin{aligned}A_0(x) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \left(a_0(k) e^{-ikx} + a_0^\dagger(k) e^{ikx} \right) \\ A_i(x) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \sum_{m=1}^3 \left(a_m(k) \epsilon_i^{(m)} e^{-ikx} + a_m^\dagger(k) \epsilon_i^{(m)} e^{ikx} \right)\end{aligned}\tag{1.41}$$

onde

$$\omega_k = k^0 = |\vec{k}|\tag{1.42}$$

e $\epsilon_i^{(m)}(k)$ são os vetores de polarização, $m = 3$ sendo a polarização longitudinal e $m = 1, 2$ as polarizações transversais.

O mesmo pode ser feito para os campos fantasmas,

$$\begin{aligned}c(x) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \left(c(k) e^{-ikx} + c^\dagger(k) e^{ikx} \right) \\ \bar{c}(x) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \left(\bar{c}(k) e^{-ikx} - \bar{c}^\dagger(k) e^{ikx} \right)\end{aligned}\tag{1.43}$$

e finalmente para o campo auxiliar b , tem-se

$$b(x) = i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2} \left((a_0(k) - a_3(k))e^{ikx} - (a_0^\dagger(k) - a_3^\dagger(k))e^{-ikx} \right). \quad (1.44)$$

De posse disso, pode-se seguir adiante com o processo de quantização canônica. É necessário agora obter os momenta conjugados da teoria a partir da Lagrangeana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + b \partial^\mu A_\mu + \partial^\mu \bar{c} \partial_\mu c. \quad (1.45)$$

Eles correspondem a,

$$\begin{aligned} \Pi_i^A &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_i)} = -F_{0i} \quad , \quad \Pi_0^A = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_0)} = b; \\ \Pi^c &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 c)} = \partial^0 \bar{c} \quad , \quad \Pi^{\bar{c}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \bar{c})} = -\partial^0 c. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Impondo agora regras de comutação para os campos A_μ , Π_μ^A e anti-comutação para os associados aos fantasmas c , \bar{c} , Π^c , $\Pi^{\bar{c}}$, ondo agora regras de comutação para os campos A_μ , Π_μ^A e anti-comutação para os associados aos fantasmas c , \bar{c} , Π^c , $\Pi^{\bar{c}}$,

$$\begin{aligned} [A_\mu(t, \vec{x}), \Pi_\nu^A(t, \vec{y})] &= i g_{\mu\nu} \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \\ \{c(t, \vec{x}), \partial^0 \bar{c}(t, \vec{y})\} &= i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \\ \{\bar{c}(t, \vec{x}), \partial^0 c(t, \vec{y})\} &= -i \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{y}), \end{aligned} \quad (1.47)$$

o que da origem a uma relação também de comutação e anti-comutação para os operadores de criação e aniquilação, coeficientes das expansões de Fourier dos campos,

$$\begin{aligned} [a_0(k), a_0^\dagger(q)] &= -2(2\pi)^3 \omega_k \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{q}), \\ [a_i(k), a_j^\dagger(q)] &= 2(2\pi)^3 \omega_k \delta_{ij} \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{q}), \\ \{c(k), \bar{c}^\dagger(q)\} &= -2(2\pi)^3 \omega_k \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{q}), \\ \{\bar{c}(k), c^\dagger(q)\} &= -2(2\pi)^3 \omega_k \delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{q}). \end{aligned} \quad (1.48)$$

Para construir o subespaço dos estados físicos, primeiramente defini-se um estado de vácuo $|0\rangle$ o qual é aniquilado por todos os operadores de destruição,

$$a_0(k)|0\rangle = a_j(k)|0\rangle = c(k)|0\rangle = \bar{c}(k)|0\rangle = 0. \quad (1.49)$$

Os estados de n partículas são obtidos atuando com os operadores de criação no estado de vácuo. Contudo, isto leva à um problema. Existirão estados cuja norma é negativa. Temos que

$$\begin{aligned} \langle 0|a_0(q)a_0^\dagger(k)|0\rangle &= \langle 0|[a_0(q), a_0^\dagger(k)]|0\rangle = -2(2\pi)^3\omega_q\delta^{(3)}(\vec{q} - \vec{k}), \\ \langle 0|\bar{c}(q_1)c(k_1)c^\dagger(k)\bar{c}^\dagger(q)|0\rangle &= -4\pi(2\pi)^3(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{k}_1 - \vec{q})\delta^{(3)}(\vec{k} - \vec{q}_1), \end{aligned} \quad (1.50)$$

em contraste, por exemplo, com

$$\langle 0|a_j(q)a_i^\dagger(k)|0\rangle = 2(2\pi)^3\omega_q\delta_{ij}\delta^{(3)}(\vec{q} - \vec{k}). \quad (1.51)$$

Portanto, a_0^\dagger , \bar{c}^\dagger e c^\dagger criam estados com norma negativa, enquanto que a_3^\dagger cria modos longitudinais que não são físicos. Veremos agora como a simetria BRST pode ajudar na construção do subespaço dos estados físicos.

Pode-se calcular a corrente conservada devido a essa simetria BRST utilizando o teorema de Noether,

$$J_{BRST}^\mu = b\partial^\mu c - (\partial^\mu b)c \quad (1.52)$$

e conseqüentemente a carga associada,

$$\begin{aligned} Q_{BRST} &= \int d^3x(b\partial^0 c - (\partial^0 b)c) \\ &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[c_k^\dagger \left(a_0(k) - a_3(k) \right) + c(k) \left(a_0^\dagger(k) - a_3^\dagger(k) \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Assim como o operador de BRST s , o operador de carga Q_{BRST} , também é nilpotente.

$$Q_{BRST}^2 = 0. \quad (1.54)$$

É necessário definir outro operador \mathcal{N} ,

$$\mathcal{N} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\omega_k} \left(a_3^\dagger(k)a_3(k) - a_0^\dagger(k)a_0(k) - c^\dagger(k)\bar{c}(k) - \bar{c}^\dagger(k)c(k) \right) \quad (1.55)$$

o qual contabiliza todos os modos não físicos,

$$\mathcal{N}[a_0^{\dagger n} a_0^{\dagger m} c^{\dagger p} \bar{c}^{\dagger q}]|0\rangle = (n + m + p + q)[a_0^{\dagger n} a_0^{\dagger m} c^{\dagger p} \bar{c}^{\dagger q}]|0\rangle \quad (1.56)$$

e admitir que este operador \mathcal{N} pode ser expresso através do anti-comutador entre Q_{BRST} e um certo operador \mathcal{R} dado por

$$\mathcal{R} = \int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} \frac{1}{8\pi\omega_k^2} \left[\left(a_0^\dagger(k) + a_3^\dagger(k) \right) \bar{c}(k) + \bar{c}^\dagger(k) \left(a_0(k) + a_3(k) \right) \right]. \quad (1.57)$$

Portanto,

$$\mathcal{N} = \{Q_{BRST}, \mathcal{R}\}. \quad (1.58)$$

Feita essa construção, é possível definir o que é um estado físico do ponto de vista da simetria BRST. Um estado $|f\rangle$ é dito um estado físico se e somente se $|f\rangle$ for aniquilado pelo operador de carga Q_{BRST} ,

$$Q_{BRST}|f\rangle = 0 \quad (1.59)$$

e se não puder ser obtido através da atuação do operador Q_{BRST} sobre outro estado,

$$|f\rangle \neq Q_{BRST}|\bar{f}\rangle. \quad (1.60)$$

De uma outra maneira pode-se dizer que o subespaço de Hilbert dos estados físicos \mathcal{H}_{phys} é tal que

$$\mathcal{H}_{phys} = \{|f\rangle; Q_{BRST}|f\rangle = 0; |f\rangle \neq Q_{BRST}|\bar{f}\rangle\}. \quad (1.61)$$

É possível mostrar, portanto, que \mathcal{H}_{phys} não contém modos não físicos, sendo uma varredura de estados com norma positiva correspondentes as duas polarizações transversais do campo de calibre. Suponha que $|\alpha\rangle$ seja aniquilado pelo operador Q_{BRST} ,

$$Q_{BRST}|\alpha\rangle = 0 \quad (1.62)$$

e que contenha certos modos não físicos,

$$\mathcal{N}|\alpha\rangle = n|\alpha\rangle \quad , \quad n \neq 0. \quad (1.63)$$

Da propriedade (1.63), segue que

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= \frac{1}{n}\mathcal{N}|\alpha\rangle = \frac{1}{n}\{Q_{BRST}, \mathcal{R}\}|\alpha\rangle \\ &= Q_{BRST}\left(\frac{1}{n}\mathcal{R}|\alpha\rangle\right), \end{aligned} \quad (1.64)$$

isto mostra que estados invariantes que contêm modos não físicos não podem pertencer ao subespaço físico visto a condição (1.61).

Estados invariantes por BRST que pertençam ao subespaço físico \mathcal{H}_{phys} são aqueles que são gerados pelos operadores a_1^\dagger, a_2^\dagger correspondentes as duas polarizações transversas

de A_μ . Um estado genérico $|f\rangle$ do subespaço físico \mathcal{H}_{phys} é uma combinação de estados da forma,

$$|f\rangle = a_1^{\dagger m} a_2^{\dagger n} |0\rangle. \quad (1.65)$$

Todavia, como citado logo no início da seção, foi considerado um limite perturbativo da teoria onde pode-se desprezar por assim dizer o problema das cópias de Gribov. Quando próximo a escala de baixas energias, onde a constante de acoplamento começa a se tornar grande o suficiente, efeitos não perturbativos começam a se tornar relevantes e deverão ser levados em conta. Nesse limite infravermelho deve-se levar em conta a presença das cópias de Gribov e o efeito do horizonte de Gribov [40]. Uma maneira é identificar os defeitos topológicos presentes que contribuem de forma significativa no processo de quantização da teoria. Dentro dessa perspectiva, estamos interessados em analisar efeitos de defeitos topológicos presentes em teorias de Yang-Mills que devem compor o horizonte de Gribov. Esse procedimento consiste primeiramente em identificar quais as configurações topológicas relevantes no sistema, que possam contribuir por exemplo na origem do confinamento de cor em Yang-Mills. O passo seguinte é realizar uma integração sobre esse ensemble de configurações, o que em geral é uma tarefa muito complicada. Seguindo este caminho, deveríamos obter uma teoria efetiva para Yang-Mills em baixas energias que leve em conta graus de liberdade relevantes que estariam no horizonte.

2 *Configurações topológicas clássicas*

Neste capítulo mostraremos algumas configurações que exibem algumas propriedades de sólitons, configurações de campos, que soluções de equações de movimento clássicas, cuja estabilidade é consequência da estrutura topológica da teoria. Todo o conteúdo deste capítulo está baseado em trabalhos de 't Hooft e outros autores, podendo ser vistos com detalhes nas referências [50], [51].

2.1 Critérios de estabilidade

Com exceção de algumas partículas como o elétron, o neutrino e outras partículas elementares, todos os objetos físicos do nosso mundo são objetos estendidos espacialmente. Contudo, a maioria destes objetos podem ser tratados como estados ligados de constituintes mais elementares. Se todos estes forem desconsiderados, então resta uma classe bastante peculiar de objetos: objetos que não podem ser tratados apenas como um feixe de partículas, mas algo mais ou menos localizado, configurações de campos. Estes campos devem obedecer equações bastante especiais afim de permitir que hajam soluções finitas e localizadas de energia.

Para explicar a estabilidade topológica primeiramente voltamos nossa atenção a modelos com uma dimensão espacial e uma dimensão temporal [56]. Considere um campo escalar ϕ que satisfaz à equação,

$$\partial_t^2 \phi - \partial_x^2 \phi + \frac{\partial}{\partial \phi} V(\phi) = 0, \quad (2.1)$$

que corresponde ao Lagrangeano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_t \phi)^2 - \frac{1}{2}(\partial_x \phi)^2 - V(\phi). \quad (2.2)$$

Os dois casos considerados são:

a) $V(\phi) = \frac{\lambda}{4!}(\phi^2 - F^2)^2$

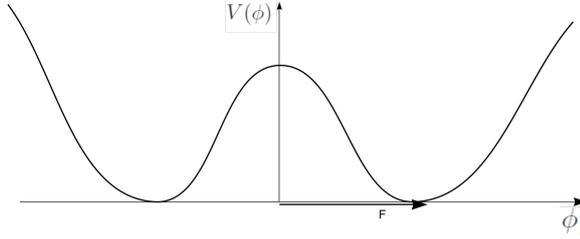


Figura 1: Potencial com a forma $\lambda(\phi^2 - F^2)^2/4$

onde pode-se escrever $\phi = F + \phi'$,

$$V = \frac{1}{2}m^2\phi'^2 + \frac{g}{3!}\phi'^3 + \frac{\lambda}{4!}\phi'^4, \quad (2.3)$$

com

$$m^2 = \frac{1}{3}\lambda F^2 \quad ; \quad g = \lambda F. \quad (2.4)$$

b) $V(\phi) = A(1 - \cos \frac{2\pi\phi}{F})$ (Sine-Gordon)

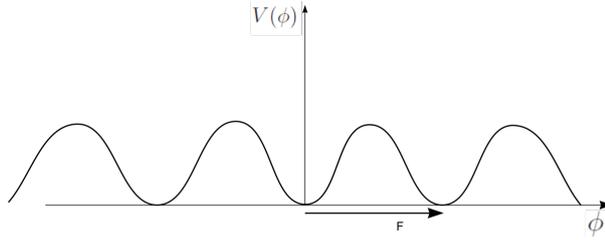


Figura 2: Potencial no modelo de Sine-Gordon

onde pode-se usar

$$A = \frac{m^4}{\lambda} \quad ; \quad F = \frac{2\pi m}{\sqrt{\lambda}}, \quad (2.5)$$

e com isso

$$V = \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + \dots \quad (2.6)$$

Em ambos casos m corresponde a massa da partícula, e λ é a constante de acoplamento usual.

A energia de uma configuração é dada por,

$$H = \int dx \mathcal{H}, \quad (2.7)$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\partial_t\phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_x\phi)^2 + V(\phi). \quad (2.8)$$

Estes exemplos tem a propriedade de que existe mais de uma configuração de campos que minimiza globalmente a energia (“vácuos” clássicos degenerados). Estas configurações são dadas por $\phi(x) \equiv \phi$ com,

a) $\phi = nF, n = \pm 1;$

b) $\phi = nF, n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$

Existem outras soluções estacionárias de energia total finita, tais que ϕ tende a um valor n_1 quando $x \rightarrow -\infty$ e outro valor n_2 quando $x \rightarrow +\infty$.

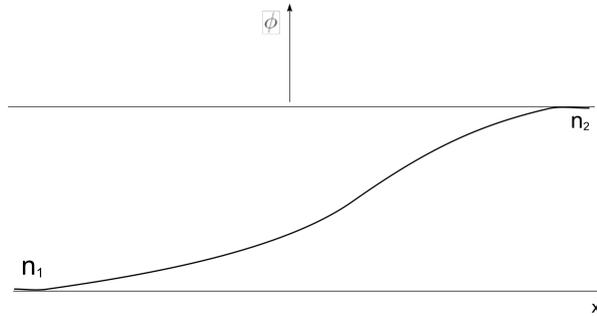


Figura 3: Forma estática de ϕ para diferentes condições de contorno em $x \rightarrow \pm\infty$

Neste caso, existirá uma região de transição que carrega energia, onde

$$\phi(x) \neq nF, n \in \mathbb{Z} \quad ; \quad \partial_x \phi \neq 0. \quad (2.9)$$

Em nossos exemplos as soluções são dadas por:

a)

$$\phi(x) = F \tanh \frac{1}{2} mx, \quad (2.10)$$

b)

$$\phi(x) = \frac{2F}{\pi} \arctan e^{mx}. \quad (2.11)$$

Notem que, quando $x \rightarrow +\infty$,

a)

$$F \tanh \frac{1}{2} mx \rightarrow F(1 - 2e^{-mx}), \quad (2.12)$$

b)

$$\frac{2F}{\pi} \arctan e^{mx} \rightarrow F(1 - \frac{2}{\pi} e^{-mx}), \quad (2.13)$$

portanto, o valor de vácuo é atingido exponencialmente, com a massa da partícula física no expoente. A energia total destes objetos, os sólitons, é dada por

$$E = \int \left[\frac{1}{2} (\partial_x \phi)^2 + V(\phi) \right] dx = 2 \int dx V(\phi), \quad (2.14)$$

no caso a):

$$E = \frac{2m^3}{\lambda}, \quad (2.15)$$

no caso b):

$$E = \frac{8m^3}{\lambda}. \quad (2.16)$$

Considere o caso de n dimensões espaciais ao invés de uma. Dada uma solução estacionária $\phi(x)$, a energia,

$$E = K + V \quad , \quad K = \int \frac{1}{2} (\partial_x \phi)^2 d^n x \quad , \quad V = \int V(\phi) d^n x, \quad (2.17)$$

deverá ser estacionária perante qualquer variação infinitesimal. Em particular, deve ser estacionária ao considerar uma transformação de escala

$$\phi(x) \rightarrow \phi\left(\frac{x}{\Lambda}\right), \quad (2.18)$$

que implica as transformações,

$$K \rightarrow K(\Lambda) = \Lambda^{n-2} K \quad ; \quad V \rightarrow V(\Lambda) = \Lambda^n V. \quad (2.19)$$

Portanto,

$$\left. \frac{\partial}{\partial \Lambda} \left(K(\Lambda) + V(\Lambda) \right) \right|_{\Lambda=1} = (n-2)K + nV = 0. \quad (2.20)$$

Porém, sendo K e V positivos, apenas o caso com $n = 1$ será compatível com a eq.(2.20). Este é o motivo pelo qual uma extensão a maiores dimensões de sólitons determinados por campos somente escalares não pode ser bem sucedida (Teorema de Derrick [53]).

Existe uma outra razão pela qual teorias escalares não comportam sólitons em duas ou mais dimensões espaciais. Só pode haver estabilidade topológica se as condições de contorno diferem de $\phi \rightarrow \text{constante}$ em $|x| \rightarrow \infty$. Imagine agora a situação onde ϕ passa a ser um multiplete $\vec{\phi}$ com n componentes (n sendo também o número de dimensões espaciais) e que $V(\vec{\phi})$ tenha um contínuo de mínimos dados por $|\vec{\phi}| = F$. Pode-se admitir

o mapeamento

$$\vec{\phi}(\vec{x}) \rightarrow F \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \quad (2.21)$$

em $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ como uma condição de contorno. Isto implicaria na estabilidade topológica, porém,

$$|\vec{\partial}\vec{\phi}| \rightarrow \frac{F}{|\vec{x}|} \quad (2.22)$$

e

$$K = \int \frac{1}{2} |\vec{\partial}\vec{\phi}|^2 d^n x \rightarrow \int F^2 \frac{d^n x}{x^2}, \quad (2.23)$$

diverge para x muito grande a menos que n seja igual a 1.

A única maneira de reobter a estabilidade topológica dos sólitons em teorias com dimensões espaciais superiores a um será adicionando um campo de calibre:

$$\partial_i \vec{\phi} \rightarrow D_i \vec{\phi} = (\partial_i + g A_i^a T^a) \vec{\phi}. \quad (2.24)$$

As componentes espaciais do campo vetorial A_i podem ser tais que $D_i \vec{\phi} \rightarrow 0$ mais rapidamente que $\frac{1}{x^2}$, e desta maneira a energia total seja finita.

A teoria mais simples com um sóliton em 2 dimensões espaciais é a eletrodinâmica quântica escalar no modo de Higgs [54],[57]:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - D_\mu^* \psi^* D_\mu \psi - \frac{\lambda}{2} (\psi^* \psi - F^2)^2. \quad (2.25)$$

onde a derivada covariante é dada por

$$D_\mu = \partial_\mu + iq A_\mu. \quad (2.26)$$

2.2 Classes de homotopia e os vórtices de Nielsen-Olesen

Consideraremos o modelo descrito pela eq.(2.25). Afim de obter configurações topológicas, impõem-se as condições de contorno

$$\psi \rightarrow e^{in\theta} F \quad , \quad r \rightarrow \infty \quad (2.27)$$

serão consideradas. Cada escolha de n produz uma solução às equações de movimento. A única maneira de fazer a transição contínua de uma configuração com um dado n para outro seria sair do espaço dos vácuos clássicos, $\psi^*\psi = F^2$ em $r \rightarrow \infty$. Porém, deveríamos passar assim por configurações para as quais a densidade de energia não tende a zero em $r \rightarrow \infty$. Claramente, tais transições estão proibidas. Assim, qualquer flutuação externa que seja ligada não poderá produzir evoluções tais que o valor de n seja mudado. Este fato constitui a base da estabilidade topológica dos objetos definidos pela condição (2.27). Note que um argumento similar também se aplica nos casos unidimensionais discutidos no capítulo 2.

Do ponto de vista matemático, o espaço de vácuos clássicos para o campo $\psi_1^2 + \psi_2^2 = F^2$ corresponde a um círculo, onde ψ_1 e ψ_2 são as partes real e imaginária de ψ , respectivamente. Dois mapeamentos contínuos de um círculo em um círculo são chamados homotópicos se eles puderem ser deformados continuamente um no outro. Todas as classes de mapas, homotópicos uns aos outros, formam uma classe de equivalência. Mapeamentos de círculos em círculos, ou de qualquer esfera S_{N-1} em outra esfera S_{N-1} são rotulados por um inteiro n .

Afim de redefinir as condições de contorno para o caso geral, primeiramente considere uma região do espaço ou espaço-tempo onde todos os campos vetoriais se anulam e todos os campos escalares tem seus valores no círculo de vácuos e apontam para uma região predeterminada no isoespaço, por exemplo, na direção,

$$\begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.28)$$

No modelo descrito pela eq.(2.25), por exemplo, é possível fazer a transformação de calibre,

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow A_\mu - \frac{1}{q} \partial_\mu \Lambda(x), \\ \psi &\rightarrow e^{i\Lambda(x)} \psi. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Fazendo isso é possível obter potenciais vetores não nulos e os campos escalares irão apontar em direções arbitrárias no isoespaço. Fisicamente, naquela região considerada, ainda existirá uma configuração que não contribui para a densidade de energia. Qualquer

configuração de energia finita deverá portanto se comportar, quando $|x| \rightarrow \infty$, da maneira seguinte:

$$\begin{aligned} A_\mu &\rightarrow -\frac{1}{q}\partial_\mu\Omega(x,t) \\ \psi &\rightarrow e^{i\Omega(x,t)}F. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Assim, em geral, as condições de contorno para qualquer configuração de energia total finita são definidas por um mapa da circunferência definida em $r \rightarrow \infty$, cujos pontos podem ser rotulados pelo valor correspondente de θ , na circunferência de mínimos do potencial, junto com o comportamento dado na eq.(2.30).

Como dito anteriormente, este mapeamento define um conjunto discreto de classes de homotopia,

$$\Omega(\theta) = e^{in\theta}. \quad (2.31)$$

Pode-se agora pensar em generalizar o nosso modelo em um modelo similar porém não-Abeliano. Assume-se que as rotações na eq.(2.31) sejam substituídas por matrizes de rotação $\Omega(x)$ 3x3, reais e ortogonais, com determinante igual a um. Essas matrizes formam o grupo não-abeliano $SO(3)$. Assim como no supercondutor $U(1)$, que existe um campo de Higgs ou o um conjunto de campos de Higgs que quebram espontâneamente a simetria. Uma questão que pode ser levantada é se este modelo permite tubos de fluxos estáveis assim como no caso Abeliano. Para analisar esta questão, deve-se investigar as classes de homotopia do mapeamento do espaço periódico dos ângulos nas matrizes de $SO(3)$. É bem conhecido que o grupo $SO(3)$ é localmente isomorfo com o grupo $SU(2)$. A correspondência é feita identificando os 3-vetores com tensores 2x2 de traço nulo. Uma matriz de $SU(2)$ atuando em um tensor corresponde a uma rotação de $SO(3)$ de um 3-vetor.

Matrizes de $SU(2)$ podem ser facilmente manipuladas. É possível decompô-las:

$$\begin{aligned} \Omega &= a_0 + i \sum_{l=1}^3 a_l \sigma_l \\ \Omega^\dagger &= a_0^* - i \sum_{l=1}^3 a_l^* \sigma_l. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Sendo, $\Omega\Omega^\dagger = 1$ e $\det \Omega = 1$, então a_0, a_l são reais e $\sum_{l=0}^3 a_l^2 = 1$.

Nitidamente, vê-se que as matrizes de $SU(2)$ formam uma casa esférica S^3 .

As matrizes de $SO(3)$ não formam uma casca esférica S^3 . Isso pois uma rotação de $SU(2)$

$$\Omega = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

deixa os tensores 2×2 invariantes. Consequentemente, dois pontos opostos em uma esfera S^3 correspondem a mesma matriz de $SO(3)$.

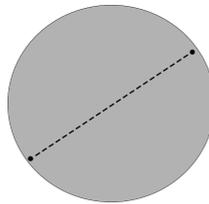


Figura 4: Pontos opostos na esfera S^3 identificados

As classes de homotopia, nesses casos, são bem diferentes das do modelo $U(1)$. Qualquer contorno traçado em S^3 pode ser deformado continuamente em um ponto, portanto mapeamentos de um círculo em $SU(2)$ são caracterizados por apenas uma classe de homotopia trivial.

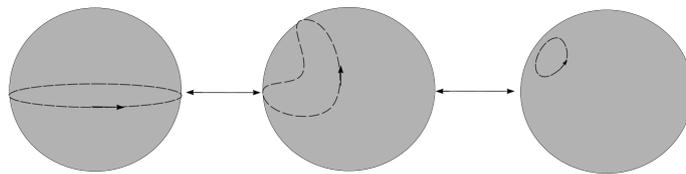


Figura 5: 1^{a} classe de homotopia para caminhos fechados no $SO(3)$

Contudo, se trata-se do grupo $SO(3)$, pode-se construir uma classe de homotopia diferente. Será formada por todos os caminhos que partem de um ponto em S^3 e se fecham em um ponto oposto.

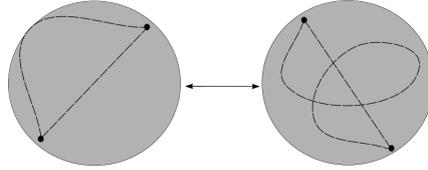


Figura 6: 2ª classe de homotopia para caminhos fechados no $SO(3)$

A existência de uma classe de homotopia não-trivial, implica que no modelo $SO(3)$ também podem-se construir condições de contorno não-triviais para sólitons em duas dimensões espaciais. Isso quer dizer que este modelo admite um tubo de fluxo estável. Porém, neste caso, se dois desses sólitons estiverem juntos, então o mapa correspondente de $SO(3)$ pertence a classe de homotopia trivial. Portanto, pares de sólitons não são topologicamente estáveis o que significa que eles podem aniquilar uns aos outros.

2.3 Monopolos e cordas

A maneira mais natural de estudar essas estruturas, dentro do contexto de teorias com grupo $SO(3)$, é analisar o modelo de Georgi-Glashow [55] introduzido em 1974 como um possível candidato para descrever as interações fracas. Com as observações da descrição realística das interações fracas, este modelo acabou se tornando obsoleto. Todavia, ele possui algumas propriedades interessantes como veremos adiante.

Em termos da representação (2.32), um monopolo magnético na origem pode ser definido pelo comportamento

$$\Omega(z \rightarrow +\infty, \phi) = \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

onde ϕ é o ângulo em torno do eixo z , que representa um par de vórtices magnéticos (corda de Dirac) saindo do monopolo. Do outro lado não há tubo de fluxo “chegando”, portanto $\Omega(z \rightarrow -\infty, \phi)$ é independente de ϕ . Neste caso, Ω é contínuo em todo o espaço exceto na localização do monopolo. Pode-se definir Ω em todo o espaço, como sendo

$$\Omega(\theta, \phi) = \cos \frac{1}{2}\theta \begin{pmatrix} e^{i\phi} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi} \end{pmatrix} + \sin \frac{1}{2}\theta \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

O campo de Higgs neste modelo é um isovetor e no entorno de um único monopolo tem-se

$$\Omega(\theta, \phi) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix} = \frac{F}{|\vec{x}|} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

onde subentende-se que Ω foi previamente escrito na notação de $SO(3)$.

Fica bem evidente que as condições de contorno eq.(2.36) para o campo de Higgs, acomoda um sóliton estável no centro.

2.4 Vórtices de centro

Existem belos trabalhos na literatura que definem, nas teorias de Yang-Mills, rigorosamente essas estruturas tanto na rede [5] como no contínuo [31]. Aqui iremos resumir brevemente como esses objetos são definidos na versão contínua, destacando os pontos principais desta construção utilizando como principal referência o trabalho de M. Engelhardt e H. Reinhardt [31]. Em seguida veremos como esses objetos são definidos ao nível quântico seguindo essencialmente o método desenvolvido por t'Hooft em seu trabalho de '78 [3]. Vale a pena enfatizar desde já que esses objetos são de grande importância em nossos trabalhos uma vez que deseja-se estudar as propriedades das teorias de Yang-Mills na presença de um ensemble de instantons e vórtices de centro correlacionados.

A maneira mais comum como esses objetos são introduzidos em uma teoria de Yang-Mills é através de uma escolha de calibre conhecida como calibre maximal de centro. Esse calibre é definido na formulação da rede e depois tomado o limite para o contínuo. Essa passagem para o contínuo exhibe certas dificuldades que não nos deteremos para discutir nesta tese. A idéia aqui é definir essas configurações de vórtices diretamente na versão contínua da teoria.

Considere uma transformação $V(k, \Sigma, x)$, $V \in SU(N)$, muito similar a uma transformação de calibre exceto pelo importante fato de ser descontínua em hipersuperfícies Σ , $(D - 1)$ -dimensionais sendo D a dimensão do espaço-tempo. Seja t a coordenada local perpendicular à Σ , com $t = 0$ localizada em Σ , x_{\perp} denotando as demais coordenadas

locais no espaço-tempo. Então,

$$\begin{aligned} V(k, \Sigma, x_{\perp}, t = \epsilon)V^{\dagger}(k, \Sigma, x_{\perp}, t = -\epsilon) &= Z(k), \\ V(k, \Sigma, x_{\perp}, t = -\epsilon)\partial_{\mu}V^{\dagger}(\Sigma, x_{\perp}, t = -\epsilon) &= V(k, \Sigma, x_{\perp}, t = \epsilon)\partial_{\mu}V^{\dagger}(\Sigma, x_{\perp}, t = \epsilon) \end{aligned} \quad (2.37)$$

onde $\epsilon \rightarrow 0$ e k rotula os $N - 1$ elementos de centro não-triviais $Z(k)$ do grupo $SU(N)$. Isso então quer dizer que V tem um salto de uma fase de centro $Z(k)$ nas hipersuperfícies Σ .

Aplicamos agora a transformação V acima sobre uma configuração de campo A inicialmente suave,

$$A \rightarrow A^V = VAV^{\dagger} + V\partial V^{\dagger}. \quad (2.38)$$

Mesmo sendo V singular em Σ , o primeiro termo do lado direito da eq.(2.38) continua representando uma configuração de campo suave, exceto nas bordas $\partial\Sigma$ de Σ , já que é insensível a fase de centro V tomada na superfície Σ . Para o segundo termo é necessário olhar com mais cautela e para tal, considere uma linha de Wilson definida como sendo

$$W[A](C) = Tr \left(P \exp \int_C dx_{\mu} A_{\mu} \right) \quad (2.39)$$

descrita por uma trajetória em linha reta C de $(x_{\perp}, t = -\epsilon)$ à $(x_{\perp}, t = \epsilon)$, onde o traço é tomado no espaço interno de cor e P é o operador de ordenamento.

Uma vez que a linha de Wilson se transforma de acordo com

$$W[A](C) \rightarrow W[A^V](C) = V(x_{\perp}, t = \epsilon)W[A](C)V^{\dagger}(x_{\perp}, t = -\epsilon) \quad (2.40)$$

e além disso, $W[A](C) = 1 + O(\epsilon)$, então

$$W[A^V](C) = Z(k) + O(\epsilon). \quad (2.41)$$

As singularidades de A^V nas hipersuperfícies Σ descrevem configurações de vórtices ideais $\mathcal{A}(\Sigma)$. Contudo, $V\partial V^{\dagger}$ é um puro calibre e sua parte regular deve compensar o efeito do vórtice ideal descrito pelas singularidades em Σ de tal forma que o laço de Wilson associado com a configuração $V\partial V^{\dagger}$ seja trivial. Desta maneira $V\partial V^{\dagger}$ pode ser decomposto na forma

$$V(\Sigma)\partial V^{\dagger}(\Sigma) = \mathcal{A}(\Sigma) - a(\partial\Sigma) \quad (2.42)$$

onde a configuração de vórtice ideal $\mathcal{A}(\Sigma)$ localiza-se na hipersuperfície Σ e $a(\partial\Sigma)$ descreve

um vórtice fino localizado sobre $\partial\Sigma$ dado por

$$\begin{aligned} a|_{\Sigma} &= -\lim V(\Sigma, x_{\perp}, t = -\epsilon)\partial V^{\dagger}(\Sigma, x_{\perp}, t = -\epsilon) \\ &= -\lim V(\Sigma, x_{\perp}, t = \epsilon)\partial V^{\dagger}(\Sigma, x_{\perp}, t = \epsilon) \end{aligned} \quad (2.43)$$

de acordo com as equações (2.37). Longe de Σ , o vórtice fino a pode ser definido por

$$a = -V\partial V^{\dagger} \quad (2.44)$$

uma vez que os vórtices ideais só estão definidos em Σ . Agora note que para uma dada configuração de vórtice fino, é possível saber qual é a transformação V correspondente que gera essa configuração através de

$$V(y) = \exp\left(i \int_{P(y_0, y)} a_{\mu} dx_{\mu}\right), \quad (2.45)$$

onde y_0 é um ponto inicial arbitrário. Outro ponto que pede a atenção é que o vórtice fino a é uma configuração não-Abeliana portanto não se faz necessário o uso do operador de ordenamento de trajetórias na definição da eq.(2.45). A ambiguidade na escolha de y_0 apenas deixa uma fase constante indeterminada em V , a ambiguidade mais grave é como a trajetória $P(y_0, y)$ contorna as localizações dos vórtices finos contidos em a . Essa escolha determina a hipersuperfície Σ na qual V tem um salto e portanto descreve a configuração de vórtice ideal associada \mathcal{A} .

Com exemplo, o caso da transformação de $SU(2)$,

$$V = e^{\phi T_3}, \quad (2.46)$$

no plano descrito pelas coordenadas polares r, ϕ com $\phi \in [0, 2\pi[$. Para $\phi = 0$, tem-se que

$$V(r, \phi = \epsilon)V^{\dagger}(r, \phi = 2\pi - \epsilon) = -1 + O(\epsilon) \quad (2.47)$$

e, distante de $\phi = 0$,

$$\begin{aligned} a_{\phi} &= -\frac{1}{r}V\partial_{\phi}V^{\dagger} = \frac{1}{r}T_3, \\ a_r &= -V\partial_rV^{\dagger} = 0. \end{aligned} \quad (2.48)$$

ou seja, observa-se a presença de um vórtice ideal em $\phi = 0$ e um vórtice fino na origem $r = 0$. Pela simples mudança no intervalo onde ϕ é definido é possível deformar arbitrariamente o vórtice ideal $\mathcal{A}(\Sigma)$ sem modificar o vórtice fino $a(\partial\Sigma)$.

3 *Configurações topológicas quânticas e confinamento*

Neste capítulo faremos uma discussão das principais idéias contidas nos trabalhos de A. M. Polyakov (1977) e G. t'Hooft ('78 e '81). Esses são trabalhos de crucial importância no que concerne ao estudo das propriedades das teorias de Yang-Mills em baixas energias. O primeiro trabalho citado (Polyakov, 1977) mostra como lidar com configurações de instantons na QED₃ compacta, utilizando o modelo Georgi-Glashow em (2+1)D, e integrando sobre as configurações de defeitos (gás de instantons). No segundo trabalho citado, de '78 de t'Hooft, veremos como monopolos podem ser introduzidos em uma teoria de $SU(N)$ através do método da projeção Abeliãna que faz uso de uma condição de fixação de calibre bastante particular. Por último, o trabalho de '81 do mesmo autor descrevendo um vácuo para a teoria onde os objetos que condensam são vórtices de centro. Analisaremos propriedades de confinamento obtidas pelo cálculo do laço de Wilson, onde uma lei da área corresponde a uma energia de interação que cresce linearmente com a distância entre as cargas (quarks no caso da QCD) o que indica que o sistema encontra-se em uma fase confinante. Finalmente, comentaremos alguns dos principais resultados obtidos na rede para estes modelos e discutiremos a competição entre dominância Abeliãna e dominância de centro.

3.1 Gás de instantons na QED₃ compacta

Existem duas diferentes formulações para a eletrodinâmica quântica (QED), compacta e não-compacta, que possuem séries perturbativas idênticas porém propriedades físicas completamente diferentes. Dizemos que o grupo Abeliãno da QED é compacto se este for um subgrupo de um grupo não-Abeliãno como o grupo $SU(2)$. A razão é que o grupo $SU(2)$ é por si só compacto (esfera 3-dimensional) e o subgrupo Abeliãno correspondente é necessariamente um círculo nessa esfera.

O modelo mais simples para descrever QED_3 compacta é o de Georgi-Glashow. A ação para este modelo é dada por

$$S = \int d^d x \left(\frac{1}{4e^2} F_{\mu\nu}^2 + (\nabla\phi)^2 + \frac{1}{4}\lambda(\phi^2 - F^2)^2 \right), \quad (3.1)$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + A_\mu \times A_\nu \quad (3.2)$$

e

$$\nabla_\mu \phi = \partial_\mu \phi + A_\mu \times \phi, \quad (3.3)$$

sendo ϕ , um tripleto, definido como sendo o campo de Higgs. É importante destacar que estaremos trabalhando na formulação Euclideana da teoria. É bem conhecido na literatura que existem mínimos não-triviais para a eq.(3.1). Para $D=3$, uma solução de tipo instanton tem a forma [65], [60],

$$\begin{aligned} A_\mu^a &= a(r)\epsilon_{\mu\nu\rho} \frac{x_b}{r} \\ \phi^a &= \frac{x_a}{r} u(r). \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde $a(r)$ e $u(r)$ são funções regulares, sendo que $u(r) \rightarrow F$ quando $r \rightarrow \infty$, tais que a ação (3.1) é minimizada.

Realizando uma transformação singular no campo ϕ [61] e escolhendo o calibre unitário, para grandes distâncias do instanton a solução tem a forma

$$\begin{aligned} \phi^a &= \eta\delta_{a3}, \\ F_\mu^3 &= \epsilon_{\mu\nu\rho}\partial_\nu A_\rho^3 = \frac{1}{2} \frac{x_\mu}{|x|^3} - 2\pi\delta_{\mu 3}\theta(x_3)\delta(x_1)\delta(x_2). \end{aligned} \quad (3.5)$$

A expressão acima, eq.(3.5), é a expressão de Dirac para o campo magnético produzido por um monopolo e fica evidente que o segundo termo do lado direito desta equação representa uma corda de Dirac localizada na porção negativa do eixo z que compensa o fluxo magnético total através de uma superfície fechada que contém o instanton.

O mínimo para a ação S na eq.(3.1) pode ser obtido em uma situação onde consideramos vários instantons e anti-instantons, bem separados, fixados em certos pontos x_a . A solução para F_μ , evidentemente será uma superposição das contribuições para cada instanton. Contudo no cálculo de S dividimos em 2 regiões de domínio limitadas por uma esfera de raio $\frac{1}{e\eta} \ll R \ll |x_{ab}|$. Dentro dessa esfera a solução como superposição de soluções de cada instanton não é válida. Na região exterior da esfera assumimos a validade da superposição das contribuições de cada um dos instantons no cálculo de S .

Como resultado temos a seguinte expressão para a ação de um conjunto de instantons e anti-instantons,

$$S = -\frac{m_W}{e^2} \epsilon \left(\frac{\lambda}{e^2} \right) \sum_a q_a^2 + \frac{\pi}{2e^2} \sum_{a \neq b} \frac{q_a q_b}{|\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b|}. \quad (3.6)$$

onde $q_a = \pm 1$ e $m_W^2 \simeq \eta^2 e^2$. Instantons com carga maior que um não são essenciais nessa construção uma vez que podem ser vistos como um limite de 2 ou mais instantons de carga igual a um bem próximos uns dos outros.

Desejamos obter um funcional gerador para esta teoria. Primeiramente expressemos a função de partição para um ensemble de instantons e anti-instantons devidamente espaçados, utilizando a ação dada pela eq.(3.6),

$$Z = \sum_N \frac{\xi^N}{N!} \int \prod_{j=1}^N d\mathbf{R}_j \exp \left(-\frac{\pi}{2e^2} \sum_{a \neq b} \frac{q_a q_b}{R_{ab}} \right) \quad (3.7)$$

onde $R_{ab} = |\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b|$.

É possível rescrever a eq.(3.7) como uma integral funcional,

$$Z = \int \mathcal{D}\chi e^{-(\pi e^2/2) \int d^3x (\nabla\chi)^2} \sum_{q_a = \pm 1} \frac{\xi^N}{N!} \int d\mathbf{R}_1 \dots d\mathbf{R}_N e^{i \sum_a q_a \chi(\mathbf{R}_a)}, \quad (3.8)$$

e integrando sobre o ensemble se obtém,

$$Z = \int \mathcal{D}\chi e^{-(\pi e^2/2) \int d^3x [(\nabla\chi)^2 - M^2 \cos \chi]}, \quad (3.9)$$

onde $M^2 = \frac{4}{\pi e^2}$. Um funcional gerador pode ser também definido acoplando uma fonte externa $\eta(x)$ ao campo χ da seguinte maneira,

$$Z[\eta] = \int \mathcal{D}\chi e^{-(\pi e^2/2) \int d^3x [(\nabla(\chi - \eta))^2 - 2M^2 \cos \chi]}. \quad (3.10)$$

Na teoria inicial, a variável de laço de Wilson é definida por

$$F[C] = e^{-W[C]} = \langle e^{i \oint_C A_\mu^3 dx_\mu} \rangle. \quad (3.11)$$

Para um contorno C dado por um retângulo $R \times T$, a eq.(3.11) representa a amplitude para um processo de criação de um par de quark e anti-quark pesados onde eles são separados por uma certa distância R permanecendo com esta separação enquanto evoluem no tempo, e em um certo instante $t = T$ esse par é aniquilado. Note que essa amplitude pode ser

reformulada definindo

$$\Psi_{ij}(t) \equiv \left[\exp \left(ig \int_0^R dx_1 A_1(\mathbf{x}, t) \right) \right]_{ij}, \quad (3.12)$$

onde omitimos por simplicidade a dependência de Ψ_{ij} com relação a x_2 e x_3 . Dessa forma temos

$$F[C] = \langle \Psi_{ij}(0) \Psi_{ji}^\dagger(T) \rangle. \quad (3.13)$$

Inserimos identidade $\sum_n |n\rangle \langle n| = 1$ na eq.(3.13), onde estamos assumindo que $|n\rangle$ são autoestados intermediários do operador Hamiltoniano, na presença das cargas, com autovalores E_n . Desta maneira, a variável de laço de Wilson toma a seguinte forma:

$$F[C] = \sum_n \langle \Psi_{ij}(0) | n \rangle \langle n | \Psi_{ji}^\dagger(T) \rangle = \sum_n | \langle \Psi_{ij}(0) | n \rangle |^2 e^{-E_n T}, \quad (3.14)$$

onde é claro, para $T \rightarrow \infty$, apenas o estado com mais baixa energia sobrevive no somatório da eq.(3.14), $F[C] \sim e^{E_0(R) \cdot T}$.

É claro, se a dependência da variável de laço de Wilson for com relação a área da superfície mínima $\Sigma_{min}[C]$ cuja borda é o contorno C , então de

$$F[C] \rightarrow e^{-\sigma |\Sigma_{min}[C]|} \sim e^{-E_0(R) \cdot T}, \quad (3.15)$$

teríamos uma energia de interação entre as cargas linear com respeito a R ,

$$E(R) = \sigma R. \quad (3.16)$$

Portanto, uma lei de área para o laço de Wilson implicaria que a energia aumenta quando a distância entre quarks e anti-quarks aumenta prevenindo as cargas de serem vistas como estados assintóticos do sistema.

Estamos assumindo que $F[C]$ possui uma lei da área $\Sigma_{min}[C]$, porém, para mostrar o confinamento de cargas em QED_3 compacta precisamos mostrar que essa lei é verificada. Polyakov, demonstrou explicitamente este cálculo em seu trabalho de '77. O ponto importante é que a eq.(3.11) pode ser rescrita da seguinte maneira

$$F[C] \approx \langle e^{i \int_S H_\mu dS_\mu} \rangle \quad (3.17)$$

onde

$$H_\mu = \frac{1}{m_W} \phi \epsilon_{\mu\nu\rho} F_{\nu\lambda} \quad (3.18)$$

que para grandes distâncias não é nada mais nada menos que o dual do tensor de intensidades de Maxwell do eletromagnetismo. Na aproximação semiclássica, H_μ está conectado

com a densidade de cargas

$$H_\mu(x) = \frac{1}{2} \int d^3y \frac{(x-y)_\mu}{|x-y|} \rho(y), \quad (3.19)$$

$$\rho(x) = \sum_a q_a \delta^{(3)}(x - x_a). \quad (3.20)$$

Portanto, substituindo (3.19) em (3.17), temos

$$F[C] = \langle e^{i \int d^3x \eta(x) \rho(x)} \rangle, \quad (3.21)$$

onde

$$\eta(x) = \int_S dS_y \cdot \frac{(x-y)}{|x-y|^3}. \quad (3.22)$$

Agora, tendo $F[C]$ na forma como mostra a eq.(3.21) podemos relacioná-lo com o funcional gerador dado pela eq.(3.10),

$$F[C] = \frac{Z[\eta]}{Z[0]}. \quad (3.23)$$

Utilizando a aproximação de ponto de sela “saddle point”, a contribuição principal de χ é a que extremiza o funcional eq.(3.10) e é determinado por uma equação não-linear da forma

$$\nabla^2(\chi_0 - \eta) = M^2 \sin \chi_0. \quad (3.24)$$

Assumindo que o contorno C é planar e localizado no plano xy ($R \times T$), então a eq.(3.24) toma a forma

$$\nabla^2 \chi_0 = 2\pi \delta(z) \theta_S(xy) + M^2 \sin \chi_0, \quad (3.25)$$

onde $\chi_0(z) = 4 \arctan(e^{-mz})$ para $z > 0$ e $-4 \arctan(e^{mz})$ para $z < 0$. esta configuração χ é uma parede de domínio que se localiza sobre a superfície S_{min} , que tem como borda o laço C . Ela se associa com o sóliton de Sine-Gordon discutido na seção 2.1. Substituindo (3.25) na expressão (3.23), obtemos, segundo antecipamos,

$$F[C] = e^{-\gamma S}. \quad (3.26)$$

Isto é, uma lei da área para o de laço de Wilson na eq.(3.26), que implica confinamento.

Poderíamos pensar em realizar estes procedimentos em um modelo de QED₃ compacta na presença de campos carregados gerais (matéria). Essa idéia foi iniciada no trabalho [34], onde estabelecemos um formalismo cuidadoso para obter uma representação para a função de partição onde as cordas de Dirac são desacopladas em favor dos defeitos físicos nas bordas, ou seja, os instantons e anti-instantons. A problemática aparece pois os defeitos (instantons+cordas de Dirac) se acoplam a um campo externo (λ_μ) que está vinculado

ao setor de matéria da teoria. Como veremos, no caso em que $\lambda_\mu \rightarrow 0$, recuperaremos exatamente o resultado obtido por Polyakov para $F[C]$. Esse procedimento de tomar $\lambda_\mu \rightarrow 0$, ou seja, suprimir o setor carregado da teoria, quando realizado no contexto das teorias de Yang-Mills, significa desprezar os efeitos das contribuições não-diagonais do campo de calibre. Isso na literatura é conhecido como dominância Abelianana. Na seção (3.4) discutiremos com um pouco mais de detalhes esta questão da dominância Abelianana nas teorias de Yang-Mills em baixas energias, com base em resultados obtidos em trabalhos realizados na rede. Adiantando um pouco a discussão que fechará este capítulo, o fato é que resultados de simulação na rede mostram que a região de validade da dominância Abelianana é limitada. Para uma separação suficientemente grande para os quarks, esse domínio passa a ser ditado pela condensação de vórtices de centro.

3.2 Monopolos em $SU(N)$ e o método da projeção Abelianana

Um passo fundamental ao se trabalhar com teorias de calibre é a escolha do tipo do calibre que deverá ser fixado. Essa escolha pode facilitar ou não os cálculos por exemplo de diagramas de Feynman da teoria. À parte dessa problemática, uma fixação de calibre, sobretudo, fixa quais os graus de liberdade relevantes na teoria. Portanto se desejamos isolar os parâmetros fisicamente relevantes tudo o que temos que fazer é escolher apropriadamente o calibre em que devemos trabalhar.

Em uma teoria não-Abelianana, uma forma mais simples de isolar os parâmetros físicos é fixando primeiramente a parte não-Abelianana da redundância de calibre, reduzindo o grupo de simetria ao subgrupo maximal Abelianano. Com esta fixação, introduziremos singularidades em nosso sistema. Como veremos para o caso do grupo $SU(N)$, o subgrupo Abelianano se torna $U(1)^{N-1}$, ou seja, temos uma teoria efetiva com $N - 1$ tipos de cargas elétricas. Estas singularidades são essencialmente monopolos com respeito a este subgrupo.

A idéia é fixar o calibre baseando-se em um tensor χ que se transforma na representação adjunta de $SU(N)$,

$$\chi' = \Omega \chi \Omega^{-1} \tag{3.27}$$

Ou seja, χ poderia ser do tipo

$$\begin{aligned}\chi &= G_{\mu\nu}G_{\mu\nu} \\ \chi &= G_{\mu\nu}D^2G_{\mu\nu},\end{aligned}\tag{3.28}$$

ou mesmo $\chi = G_{12}$, onde

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - g^i[A_\mu, A_\nu].\tag{3.29}$$

A escolha do calibre está atrelada ao fato que os autovalores de χ são invariantes de calibre. Portanto, uma boa condição de fixação de calibre será aquela que diagonaliza o campo χ ,

$$\chi = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_N].\tag{3.30}$$

Neste contexto, as singularidades ocorrem quando dois ou mais autovalores de χ coincidem. A natureza dessas singularidades irá depender do grupo de calibre.

No caso do grupo $SU(N)$, o calibre (3.30) é bastante interessante. Em pontos genéricos, onde os λ_i não coincidem, o calibre não é determinado completamente, uma vez que qualquer rotação Ω ,

$$\Omega = \text{diag}[e^{i\phi_1}, \dots, e^{i\phi_N}] \quad , \quad \sum_{i=1}^N \phi_i = 0.\tag{3.31}$$

deixa o χ diagonal invariante. O subgrupo de Ω que satisfaz a eq.(3.31) é o subgrupo Abelian $U(1)^{N-1}$. As componentes diagonais dos campos de calibre são neutras e as não diagonais são carregadas. Contudo, além de “cargas elétricas”o nosso sistema pode apresentar singularidades, quando os autovalores de χ coincidem. Por exemplo, para o grupo $SU(2)$,

$$\chi = a_0\mathbb{I} + a_1\sigma_1 + a_2\sigma_2 + a_3\sigma_3\tag{3.32}$$

onde σ_k são as matrizes de Pauli. Se dois dos autovalores de χ coincidem, devido a exigência de χ ser Hermitiano, então $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Claramente temos 3 condições que fixam 3 coordenadas espaciais. Isso também é valido para qualquer N de $SU(N)$ uma vez que a condição para que dois autovalores de uma matriz $N \times N$ coincidam implica em 3 vínculos, ou seja, as singularidades são sempre de tipo pontual.

Como veremos na seção 4.3 existe uma maneira alternativa de introduzir esse tipo de singularidade na teoria sem exigir de antemão uma condição de fixação de calibre. A idéia é realizar uma decomposição dos campos de calibre em uma base local do espaço de cor convenientemente escolhida. Essa decomposição é conhecida como decomposição

de Cho-Fadeev-Niemi [17]. Uma das grandes vantagens é que podemos estendê-la para acomodar não só objetos singulares pontuais como citados anteriormente mas também podemos através dessa representação introduzir defeitos de tipo vórtice de centro, como discutiremos na seção 5.1.

3.3 Vórtices de centro quânticos

Afim de ilustrar da maneira mais simples como definir quanticamente estes objetos, consideremos um modelo em 2 dimensões espaciais e 1 dimensão temporal [3]. O grupo de calibre em questão é o grupo $SU(N)$ e iremos considerar que a simetria é quebrada espontâneamente por campos escalares de Higgs H . Esses campos de Higgs devem invariantes sob o centro $Z(N)$ do grupo de calibre $SU(N)$, subgrupo este das matrizes $e^{2\pi in/N} \mathbb{I}$ ($n \in \mathbb{Z}$). É importante deixar claro desde já que, não estamos considerando a presença de quarks dinâmicos, os quais não são invariantes sob transformações de $Z(N)$.

Considere uma região R no espaço 2-dimensional rodeada por outra outra região B onde o campo de Higgs se encontra localmente no setor de vácuo,

$$| \langle H(x) \rangle | = F. \quad (3.33)$$

Portanto, deve existir, na região B , uma rotação $\Omega(x)$ tal que

$$\Omega(x)H(x) = H_0 \quad (3.34)$$

onde H_0 é fixado e $\Omega(x)$ é uma rotação representada na notação de 't Hooft, ou seja, $H(x)$ se transforma na representação adjunta. $\Omega(x)$ é determinado a menos de elementos de $Z(N)$. Também iremos exigir a ausência de singularidades, portanto, $\Omega(x)$ é contínuo. Considere um contorno $C(\theta)$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) na região B , tal que $C(0) = C(2\pi)$. Se a região B não for simplesmente conectada, assumindo o sentido horário, temos

$$\Omega(2\pi) = e^{2\pi in/N} \Omega(0), \quad (3.35)$$

com $0 \leq n < N$, sendo n um inteiro. Devido a descontinuidade de $\Omega(x)$, n é conservado. Se $n \neq 0$ e R ausente de singularidades então, as configurações de campo em R não podem ser obtidas através de uma rotação do tipo (3.34). Portanto deve haver uma quantidade finita de energia em R . Para $n = 1$, temos a configuração com mais baixa energia E , que descreve um sóliton de massa $M = E$.

Uma alternativa para representar esses campos é estender a transformação $\Omega(x)$

definindo-a também na região R (possível se admitirmos Ω singular em um certo ponto x_0 em R). A vantagem é que agora $H = H_0$ em todo lugar em B independentemente do número de sólitons n em R , contudo, o preço é uma singularidade localizada em x_0 .

Agora, definiremos um conjunto de operadores $\hat{\phi}(x)$ como em [62, 63]. Seja $|A_i(x), H(x)\rangle$ um estado no espaço de Hilbert que é autoestado das componentes espaciais dos campos vetoriais e dos campos de Higgs, com autovalores $A_i(x)$ e $H(x)$, respectivamente. Sendo assim definimos

$$\phi(x_0)|A_i(x), H(x)\rangle = |A_i^{\Omega^{|x_0|}}(x), H^{\Omega^{|x_0|}}(x)\rangle, \quad (3.36)$$

onde $\Omega^{|x_0|}$ é uma rotação tal que para qualquer curva fechada $C(\theta)$ que envolva x_0 uma vez, temos

$$\Omega^{|x_0|}(2\pi) = e^{\pm 2\pi i/N} \Omega^{|x_0|}(0). \quad (3.37)$$

No formalismo operatorial das teorias de calibre é conveniente usarmos o calibre $A_0(\mathbf{x}, t) = 0$. Portanto, rotações de calibre independentes do tempo $\Omega(x)$ continuam a formar um grupo de invariância. contudo, para estados físicos,

$$\langle AH|\psi\rangle = \langle A^\Omega H^\Omega|\psi\rangle, \quad (3.38)$$

onde Ω é uma rotação de calibre univalente. Portanto, $\hat{\phi}(x)$ seria trivial se $\Omega^{|x_0|}$ não tivesse singularidade em \mathbf{x}_0 .

Em geral, para um operador que seja invariante de calibre composto por campos em x , vale

$$[R(x), \hat{\phi}(y)] = 0 \quad (3.39)$$

para $x \neq y$ mas não necessariamente para $x = y$. Desta forma podemos afirmar que $\hat{\phi}$ é um operador de campo local quando atuado em estados físicos. Da definição fica evidente que $\hat{\phi}(x)$ absorve uma unidade topológica, ou seja, $\hat{\phi}(x)$ é um operador de aniquilação (criação) de um sóliton (anti-sóliton).

Com isso, pode-se obter as funções de correlação envolvendo os operadores $\phi(x)$ utilizando as técnicas convencionais de ponto de sela nas integrais funcionais. Na fase de Coulomb, a função de Green obtida é (veja ref.[3]),

$$\begin{aligned} G(0, t_1) &= \langle T(\phi(\mathbf{0}, t_1)\phi^\dagger(\mathbf{0}, 0)) \rangle . \\ &= A \exp\left(\frac{(N-1)\pi}{2g^2|\tau|N} + O(\log(g^2\tau))\right), \end{aligned} \quad (3.40)$$

onde $t_1 = i\tau$ sendo τ real e A uma constante.

É de se esperar que as funções de Green satisfaçam os axiomas de Wightman [64]. Em $SU(N)$ pura, o problema é que apenas as correções quânticas fornecem alguma estrutura interessante para essas funções de Green. Contudo, pode-se assumir que essas funções resultantes possam ser obtidas a partir de uma Lagrangeana efetiva,

$$\mathcal{L}_{eff}(\phi, \phi^*) = -\partial_\mu \phi^* \partial_\mu \phi - M^2 \phi^* \phi - \frac{\lambda_1}{N!} (\phi^N + (\phi^*)^N) - \frac{1}{2} \lambda_2 (\phi^* \phi)^2. \quad (3.41)$$

Aqui o termo de interação, proporcional a λ_1 , fornece a interação entre os N sólitons e é responsável pela não nulidade das funções de correlação $\langle \hat{\phi}(x_1) \hat{\phi}(x_2) \dots \hat{\phi}(x_n) \rangle$ devido a simetria $Z(N)$. Reparem que esta Lagrangeana efetiva é invariante sob transformações globais discretas de $Z(N)$,

$$\begin{aligned} \phi &\rightarrow e^{2\pi i/N} \phi \\ \phi^* &\rightarrow e^{-2\pi i/N} \phi^*, \end{aligned} \quad (3.42)$$

essa é a simetria associada a conservação topológica do número quântico de sólitons. O termo de massa é devido ao mecanismo de Higgs.

Na fase de Higgs, os vórtices de centro são objetos com $M^2 > 0$. Então, neste caso o vácuo da teoria terá simetria $Z(N)$. Contudo, se fosse $M^2 < 0$, então existiria uma quebra espontânea da simetria $Z(N)$ global $\langle \phi \rangle \rightarrow F \neq 0$. Por exemplo, o comportamento dado na eq.(3.40) seria compatível com tal fase. Nesta fase o vácuo possui uma degenerescência discreta com N possíveis valores. Como a simetria em questão é uma simetria discreta, não existem partículas tipo Goldstone, ou seja, todas as partículas físicas tem massa finita.

Vamos agora analisar o laço de Wilson cujo contorno é dado por um caminho C ,

$$\hat{W}[C] = Tr P \exp \left(\oint_C ig A_k(x) dx^k \right), \quad (3.43)$$

onde o traço é definido no espaço interno de cor e P é o operador de ordenamento sobre o caminho C , uma vez que estamos trabalhando em uma teoria não-Abeliana. $\hat{W}[C]$ é um operador invariante de calibre que não comuta com ϕ (3.39),

$$\hat{W}[C](\mathbf{x}) \hat{\phi}(\mathbf{x}) = \hat{\phi}(\mathbf{x}) \hat{W}(C)(\mathbf{x}) e^{2\pi i n/N}, \quad (3.44)$$

se \mathbf{x}_0 estiver no interior do contorno C e comuta,

$$\hat{W}[C](\mathbf{x}) \hat{\phi}(\mathbf{x}) = \hat{\phi}(\mathbf{x}) \hat{W}(C)(\mathbf{x}_0), \quad (3.45)$$

se \mathbf{x}_0 estiver fora do interior do contorno C . O inteiro n conta o número de vezes que C contorna \mathbf{x}_0 no sentido horário menos o número de vezes que contorna \mathbf{x}_0 no sentido anti-horário.

Portanto, escolhendo um estado $|\phi\rangle$, autoestado do operador $\hat{\phi}$ com autovalor $\phi(x)$, temos que

$$\hat{\phi}(x) \left(\hat{W}(C) |\phi\rangle \right) = e^{-\frac{2\pi i n}{N}} \phi(x) \left(\hat{W}(C) |\phi\rangle \right), \quad (3.46)$$

se x estiver no interior do contorno C .

Veja que existe de fato uma barreira de domínio que separa duas regiões nas quais o estado $|\phi\rangle$ encontra-se orientado em diferentes direções. Por exemplo, para x fora do interior do contorno C , tal que a relação de comutação é satisfeita (3.45), o estado $|\phi\rangle$ encontra-se orientado como segue a ilustração:

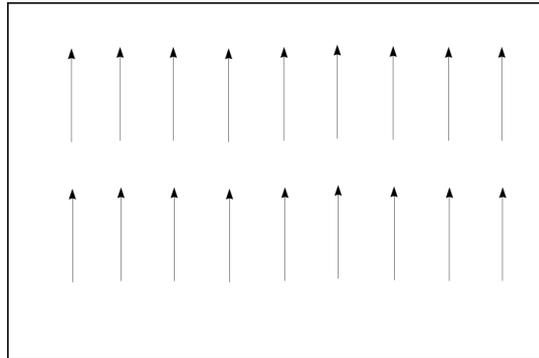


Figura 7: Orientação de $|\phi\rangle$ com x fora do interior de C

Para x pertencente ao interior do contorno C , utilizando a relação (3.44), ao atuar $\hat{\phi}(x)\left(\hat{W}(C)|\phi\right)$, temos que a orientação da representada pelo estado $|\phi\rangle$ será rotacionada de uma fase $e^{-\frac{2\pi in}{N}}$,

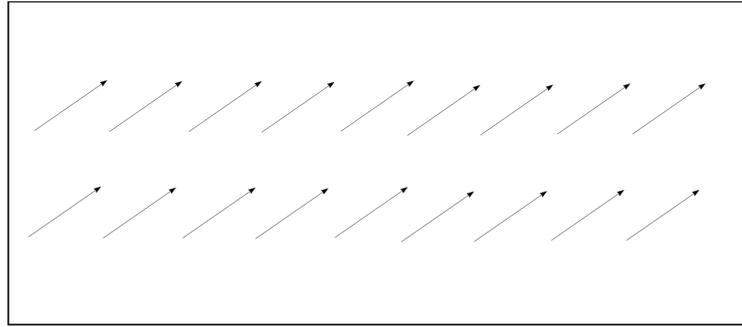


Figura 8: Orientação de $|\phi\rangle$ com x dentro do interior de C

$\hat{W}[C]$, portanto, tem o papel de levar um vácuo em outro vácuo dentro de C , no caso em que $Z(N)$ global está quebrada espontaneamente. Colocando de uma outra maneira, $\hat{W}[C]$ cria uma parede de domínio exatamente na curva C ,

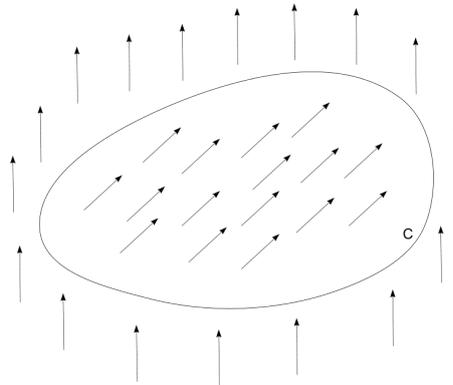


Figura 9: Formação da parede de domínio em C

Até o momento não consideramos a presença de quarks neste modelo. Campos de quarks não são invariantes sob simetria $Z(N)$.

Vamos considerar agora operadores $\hat{\psi}$ que atuam no espaço de estados de quarks. Neste espaço, poderíamos escolher uma base $|\psi(x)\rangle$ com perfil bem definido, $|\psi(x)\rangle : \hat{\psi}(x)|\psi(x)\rangle = \psi(x)|\psi(x)\rangle$. Porém, vemos que o operador que cria vórtices de centro não pode ser definido de maneira apropriada neste espaço, já que a sua aplicação sobre $|\psi\rangle$ retornaria um estado $|\psi'\rangle$ com ψ' multivalente. Isto não pode ser aceito. Porém, um objeto físico invariante de calibre pode sim ser definido neste espaço. Este objeto é o operador

$$\bar{\psi}(\mathbf{x}_1)[P \exp \int_{x_1}^{x_2} igA_k(x)dx_k]\psi(\mathbf{x}_2). \quad (3.47)$$

Da mesma maneira que (3.43) cria uma parede de domínio localizada sobre C , o operador (3.47) cria um par quark/anti-quark que vem junto com uma parede de domínio que se localiza sobre um caminho que une \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 . Esta parede possui uma energia que é linear com seu comprimento, correspondendo assim a corda cromoeétrica que confina o quark e o anti-quark na fase na qual $Z(N)$ é quebrada espontaneamente (fase na qual a parede de domínio é topologicamente estável).

Desta maneira podemos concluir que em teorias de $SU(N)$ onde os campos escalares estão em uma representação que sejam invariantes com relação ao centro $Z(N)$ de $SU(N)$, existe uma invariância global $Z(N)$. Se o mecanismo de Higgs quebra completamente a invariância de $SU(N)$ então o vácuo é invariante com respeito a $Z(N)$. Por outro lado, poderíamos ter uma quebra espontânea da simetria $Z(N)$ global. Neste modo, os objetos carregados de cor estão permanentemente confinados por um potencial de interação entre as cargas (linear com a separação) devido a presença das paredes de domínios (vórtices) conectando os quarks.

No trabalho que apresentaremos no capítulo 5, obteremos um modelo efetivo para $SU(N)$ que exhibe propriedades de quebra ou não da simetria $Z(N)$ global e formação de paredes de domínio. Em nosso trabalho, através de um procedimento cuidadoso, propomos uma ação fenomenológica para os vórtices de centro, introduzidos na teoria como defeitos associados a uma certa base local do espaço de cor. Esses vórtices aparecem correlacionados com pares de instantons formando estruturas que chamamos de cadeias de instantons. Propondo uma ação fenomenológica para os vórtices, inspirada ao analisar modelos para polímeros semiflexíveis autointeragentes na presença de uma fonte externa, foi possível obter um modelo efetivo que exhibe propriedades similares as descritas pelo modelo de 't Hooft na eq.(3.41). Porém, a grande diferença é que em nosso modelo os campos de vórtices aparecem minimamente acoplados com um campo dual λ , vinculado ao setor carregado, que surge naturalmente nas teorias de Yang-Mills.

3.4 Dominância Abelianas \times dominância de centro

Conjectura-se que no regime infravermelho da teoria a dinâmica do sistema seja dominada estritamente por configurações Abelianas e isso poderia explicar a origem do potencial confinante entre os quarks na teoria. Todavia, existe uma outra maneira de explicar a origem de uma fase confinante em uma teoria de Yang-Mills que não seja pelo método da projeção Abeliana [16]. Essa outra proposta consiste em considerar que os objetos que condensam na teoria são na verdade vórtices de centro como os que descrevemos nas seções 2.5 e 3.3. Essa idéia se tornou popular no final dos anos '70 com os trabalhos de 't Hooft [65], Mack [66] e Nielsen Olesen [67]. A ideia é que o vácuo da QCD é preenchido por vórtices magnéticos fechados (no espaço-tempo Euclidiano 3-dimensional) ou superfícies (no espaço-tempo Euclidiano 4-dimensional) de espessura finita e que carregam fluxo magnético no centro do grupo de calibre. O efeito de criar um vórtice de centro “linkado” com um dado laço de Wilson, é multiplicar o laço de Wilson pelo elemento do grupo de centro,

$$W(C) \rightarrow e^{\frac{i2\pi n}{N}} W(C) \quad , \quad n = 1, \dots, N - 1. \quad (3.48)$$

Uma fase confinante poderia ser originada devido a flutuações no número de vórtices enlaçados por um laço de Wilson (lei da área), assumindo que o vácuo da teoria seja formado por um condensado de vórtices.

Resultados na rede mostram que, para grandes comprimentos da corda que separa os quarks existe uma dependência da tensão com a representação do subgrupo de centro $Z(N)$ de $SU(N)$ (N-ality) [29]. Isso sugere que neste domínio o vácuo da teoria seria formado predominantemente por condensado de vórtices de centro. Em contraponto a dominância Abeliana também é verificada em um domínio de comprimentos intermediários para a corda. Neste domínio o que se verifica na rede é uma lei de escala para a razão entre as tensões para diferentes representações do grupo $SU(N)$ que vai com a razão entre os autovalores do operador de Casimir do grupo nessas diferentes representações elevado ao quadrado. Essa lei de escala é conhecida como Casimir-scaling [25].

De fato existe uma espécie de competição entre dominância Abeliana e de centro que depende do tamanho do tubo de vórtice que conecta os quarks. Dependendo dessa distância o vácuo passa a ser dominado por vórtices ou por monopolos.

Um dos resultados importantes obtido com simulações na rede está representado no gráfico abaixo e mostra a relação entre a razão de Creutz (razão das tensões em diferentes representações) e a separação entre os quarks R ,

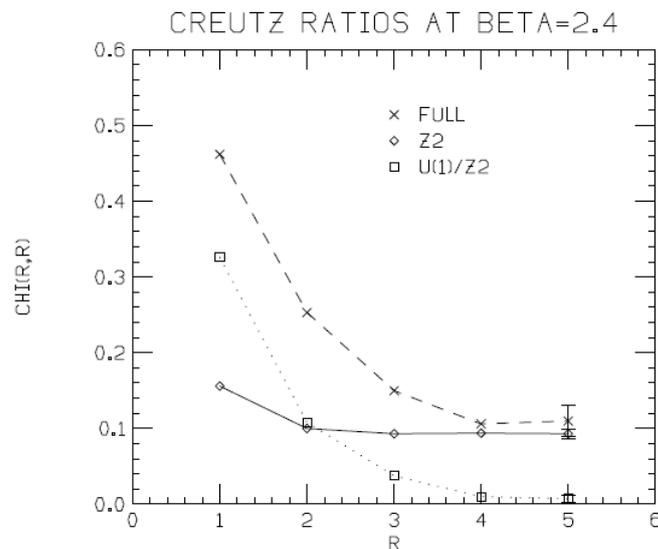


Figura 10: Razão de Creutz das tensões em função da separação R (veja ref. [70])

O gráfico com linha tracejada refere-se a teoria completa, o pontilhado usando a projeção Abelian e a linha sólida representando a teoria com projeção de centro. Reparem, portanto, que se consideramos a projeção Abelian, para grandes distâncias, a tensão na corda vai a zero.

Esses resultados nos mostram que um modelo baseado somente em uma teoria com projeção Abelian ou somente projeção de centro é parcialmente bem sucedido ao reproduzir as tensões esperadas nas cordas que separam as cargas confinadas. Se desejamos um modelo que realmente reproduza todas as características observadas na rede, Casimir-scaling para médias distâncias e n -ality para grandes distâncias, precisamos levar em conta efeitos tanto dos monopolos como também de vórtices de centro. Motivados por esta idéia, buscamos em nosso trabalho obter um modelo efetivo para Yang-Mills com grupo $SU(2)$ considerando a presença de defeitos tipo-monopolos correlacionados com vórtices de centro. Esse modelo como chamaremos a atenção mais para o final desta

tese viabiliza realizar um tratamento importante com relação as superfícies de Wilson que aparecem acopladas à uma fonte externa associada ao setor carregado de Yang-Mills. Este tratamento encontra-se na referência [84].

4 *Tratamento para os defeitos de Dirac na QED₃ compacta com campos carregados e Yang-Mills com grupo SU(2)*

Analisando teorias de calibre na presença de defeitos magnéticos como instantons e monopolos, inevitavelmente, devemos levar em conta a presença de Defeitos de Dirac que aparecem por consistência matemática na teoria. Esses defeitos de Dirac representam graus de liberdade não físicos dos campos de calibre e de alguma maneira não podem estar presentes em observáveis físicos tais como a função de partição. Na primeira quantização, uma vez que a condição de Dirac para a quantização da carga elétrica é imposta, estes defeitos desaparecem das grandezas físicas como a probabilidade de transição da partícula entre pontos inicial e final. Todavia, se desejamos realizar esse tratamento do ponto de vista de segunda quantização, este desacoplamento se torna mais complicado.

Neste capítulo, descreveremos um procedimento formal para tratar os defeitos de Dirac que podem surgir nas teorias de calibre. Em nosso caso particular, analisamos a QED₃ compacta acoplada a campos carregados na presença de instantons e também Yang-Mills com grupo $SU(2)$ em $4D$ na presença de monopolos. Nesta última usaremos uma representação para os campos de calibre em uma base local do espaço de cor onde configurações de monopolos e superfícies de Dirac aparecem como defeitos associados a esta base. Em ambas teorias, a estrutura (monopolo + defeito de Dirac), aparece acoplada com uma fonte externa associada com o setor de campos carregados.

Afim de tratar os defeitos magnéticos que aparecem na função de partição, procederemos em duas etapas: primeiramente iremos separar a contribuição das bordas dos defeitos de Dirac (onde localizam-se os defeitos físicos) do restante da estrutura. Isto é feito utilizando uma decomposição de Hodge do campo dual que se acopla com o defeito. A parte restante será tratada na etapa seguinte, onde conseguimos eliminá-la da repre-

sentação da função de partição. Este procedimento é o ponto central deste capítulo e mostrará, através de um argumento puramente topológico, como eliminar os defeitos de Dirac preservando apenas as bordas, que contêm os defeitos físicos, da representação da função de partição.

Este procedimento é fundamental como passo inicial para tratar ensembles de defeitos em teorias de calibre. No nosso caso, em particular, este procedimento nos permitiu dar um passo além e estudar um modelo que inclui não só defeitos como monopolos mas também vórtices magnéticos que descreveremos com detalhes no capítulo 5.

4.1 QED₃ compacta com campos de matéria

Um dos modelos que analisaremos é o caso da eletrodinâmica quântica escalar compacta no espaço-tempo Euclideo em três dimensões acoplada à um setor de matéria carregada. Na ausência de matéria, esse modelo, apesar de sua razoável simplicidade, exibe um comportamento confinante como mostrado em [13] e discutido na seção 3.1. A ação da teoria que consideramos, na presença de um par instanton/anti-instanton, é dada por

$$S = \int d^3x \left(\bar{D}_\mu \bar{\Phi} D_\mu \Phi + \frac{1}{2} (f_\mu + h_\mu)^2 \right), \quad (4.1)$$

onde

$$D_\mu = \partial_\mu - iq \left(A_\mu + C_\mu \right) \quad , \quad f_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho} \partial_\nu A_\rho. \quad (4.2)$$

O campo h_μ adicionado ao tensor dual f_μ na ação eq.(4.1) é tal que

$$\partial_\mu h_\mu = g_m [\delta^{(3)}(x - x^+) - \delta^{(3)}(x - x^-)], \quad (4.3)$$

e o potencial vetor C_μ , que satisfaz $h_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho} \partial_\nu C_\rho$, pode ser introduzido apenas em uma região que não contenha uma corda de Dirac $x_s(\sigma)$, $\sigma \in [0, 1]$, indo de x^- à x^+ ,

$$x_s(0) = x^- \quad , \quad x_s(1) = x^+. \quad (4.4)$$

Isto quer dizer, ao estender a definição do potencial vetor C_μ para todo o espaço-tempo Euclideo \mathcal{R}^3 , h_μ e $\epsilon_{\mu\nu\rho} \partial_\nu C_\rho$ devem diferir em um termo singular.

$$h_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho} \partial_\nu C_\rho + d_\mu, \quad , \quad d_\mu = g_m \int_{[x_s]} dy_\mu \delta^{(3)}(x - y). \quad (4.5)$$

Isto implica que o fluxo de d_μ através de uma superfície que é atravessada por uma corda de Dirac é $\pm g_m$. A independência de quantidades físicas na escolha de C_μ deve também incluir a independência das possíveis cordas de Dirac associadas. Como bem se sabe, a não observabilidade da corda de Dirac implica na famosa quantização de Dirac para a carga elétrica

$$q = ne \quad , \quad e = 2\pi/g_m \quad (4.6)$$

onde n é um inteiro.

4.2 A representação de Cho-Fadeev-Niemi para Yang-Mills com grupo $SU(2)$

O outro modelo que analisamos é a teoria de Yang-Mills com grupo de simetria $SU(2)$ no espaço-tempo Euclidiano 4-dimensional,

$$S_{YM} = \frac{1}{2} \int d^4x \operatorname{tr} (F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}) \quad , \quad F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T^a. \quad (4.7)$$

Os geradores são tais que $T^a = \tau^a/2$, $a = 1, 2, 3$, onde τ^a são as matrizes de Pauli, e o tensor de intensidades é expresso em termos dos campos de calibre A_μ^a , $a = 1, 2, 3$,

$$\vec{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \vec{A}_\nu - \partial_\nu \vec{A}_\mu + g \vec{A}_\mu \times \vec{A}_\nu, \quad , \quad \vec{A}_\mu = A_\mu^a \hat{e}_a \quad , \quad \vec{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a \hat{e}_a, \quad (4.8)$$

onde \hat{e}_a é a base canônica no espaço de cor.

A ação de Yang-Mills é invariante sob transformações de calibre regulares do campo \vec{A}_μ . Em contrapartida, para um dado campo \vec{A} , se fizermos uma transformação de calibre topologicamente não trivial $U \in SU(2)$

$$\vec{A}_\mu^U \vec{T} = U \vec{A}_\mu \vec{T} U^{-1} + \frac{i}{g} U \partial_\mu U^{-1}, \quad (4.9)$$

onde $U \in SU(2)$ é um mapeamento topologicamente não-trivial univalente ao longo de qualquer curva fechada (loop), a ação de Yang-Mills se modifica.

Em particular, o tensor de intensidades para \vec{A}_μ^U se modifica da forma

$$\vec{\mathcal{F}}_{\mu\nu}^U \vec{T} = U \vec{\mathcal{F}}_{\mu\nu} \vec{T} U^{-1} + \frac{i}{g} U [\partial_\mu, \partial_\nu] U^{-1}, \quad (4.10)$$

onde o segundo termo concentra-se em uma superfície 2-dimensional na qual U é singular. Notamos claramente que S_{YM} não é invariante sob essa classe de transformações.

Assim, as transformações U podem ser consideradas para introduzir defeitos de tipo monopolo/anti-monopolo, unidos por superfícies de Dirac sobre uma configuração regular \vec{A}_μ . Equivalentemente, podemos considerar a decomposição de Cho-Fadeev-Niemi, feita em termos de uma base geral e local no espaço de cor, \hat{m}_a , $a = 1, 2, 3$, que pode ser parametrizada por uma transformação ortogonal local $R(U) \in SO(3)$,

$$\hat{m}_a = R(U) \hat{e}_a, \quad (4.11)$$

e considerar a presença de defeitos para esta base. Esta base pode ser usada para representar os campos de calibre \vec{A}_μ como,

$$\vec{A}_\mu = A_\mu \hat{m} - \frac{1}{g} \hat{m} \times \partial_\mu \hat{m} + \vec{X}_\mu \quad , \quad \hat{m} \cdot \vec{X}_\mu = 0, \quad (4.12)$$

$$\hat{m}_a \hat{m}_b = \delta_{ab} \quad , \quad a, b = 1, 2, 3 \quad , \quad \hat{m} \equiv \hat{m}_3. \quad (4.13)$$

O tensor de intensidades, para a decomposição eq.(4.12), definido em todo espaço-tempo Euclideano, pode ser calculado, obtendo, [24],

$$\vec{F}_{\mu\nu} = (F_{\mu\nu} + H_{\mu\nu} + K_{\mu\nu}) \hat{m} + \vec{G}_{\mu\nu} + \vec{L}_{\mu\nu}, \quad (4.14)$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (4.15)$$

$$H_{\mu\nu} = -\frac{1}{g} \hat{m} \cdot (\partial_\mu \hat{m} \times \partial_\nu \hat{m}), \quad (4.16)$$

e

$$K_{\mu\nu} = -ig(\bar{\Phi}_\mu \Phi_\nu - \Phi_\mu \bar{\Phi}_\nu). \quad (4.17)$$

Os campos carregados Φ_μ e $\bar{\Phi}_\mu$ são definidos por

$$\begin{aligned} \Phi_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X_\mu^1 + iX_\mu^2) \\ \bar{\Phi}_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}(X_\mu^1 - iX_\mu^2). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Já os termos transversais, $\vec{G}_{\mu\nu}$ e $\vec{L}_{\mu\nu}$, são dados por

$$\vec{G}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^1 \hat{m}_1 + G_{\mu\nu}^2 \hat{m}_2 \quad (4.19)$$

onde

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(G_{\mu\nu}^1 + iG_{\mu\nu}^2), \\ &= [\partial_\mu + ig(A_\mu + C_\mu^{(n)})]\Phi_\nu - [\partial_\nu + ig(A_\nu + C_\nu^{(n)})]\Phi_\mu, \end{aligned} \quad (4.20)$$

sendo C_μ dado por

$$C_\mu^{(m)} = -\frac{1}{g}\hat{m}_1 \cdot \partial_\mu \hat{m}_2 \quad (4.21)$$

e

$$\vec{L}_{\mu\nu} = -(1/g)\hat{m} \times [\partial_\mu, \partial_\nu]\hat{m}. \quad (4.22)$$

Um ponto que é importante de destacar é se estivéssemos em um espaço-tempo Euclideano 3-dimensional, poderíamos considerar configurações \hat{m} contendo somente defeitos pontuais de tipo monopolo ou anti-monopolo. Consequentemente, como \hat{m} não contém defeitos localizados sobre curvas, $\vec{L}_{\mu\nu}$ será igual a zero.

Além disso, em uma dimensão geral, podemos representar $H_{\mu\nu}$ de uma maneira “Abelianizada”,

$$H_{\mu\nu} = \partial_\mu C_\nu^{(m)} - \partial_\nu C_\mu^{(m)} + D_{\mu\nu}^{(m)} \quad (4.23)$$

onde

$$D_{\mu\nu}^{(m)} = \frac{1}{g}\hat{m}_1 \cdot [\partial_\mu, \partial_\nu]\hat{m}_2 \quad (4.24)$$

está concentrado sobre as singularidades nas direções \hat{m}_1 e \hat{m}_2 . Em quatro dimensões, consideramos \hat{m} contendo defeitos sobre curvas fechadas (monopolos ou anti-monopolos). Em consequência, \hat{m}_1 e \hat{m}_2 terão singularidades concentradas sobre superfícies de Dirac. Novamente, $\vec{L}_{\mu\nu}$ será nulo neste caso.

Para estudar defeitos magnéticos, também será conveniente considerar expressões duais, nomeando os tensores duais em letras pequenas. Por exemplo, a forma dual de $H_{\mu\nu}$ é,

$$h_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\rho C_\sigma^{(m)} + d_{\mu\nu}^{(m)} \quad , \quad h_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}H_{\rho\sigma} \quad , \quad d_{\mu\nu}^{(m)} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}D_{\rho\sigma}^{(m)}. \quad (4.25)$$

4.3 Instantons e monopolos como defeitos da base local de cor

Sabemos que a ação de Yang-Mills é invariante sob transformações de calibre regulares $S \in \text{SU}(N)$,

$$\vec{A}_\mu^S \cdot \vec{T} = S \vec{A}_\mu \cdot \vec{T} S^{-1} + (i/g) S \partial_\mu S^{-1}, \quad , \quad \vec{F}_{\mu\nu}^S \cdot \vec{T} = S \vec{F}_{\mu\nu} \cdot \vec{T} S^{-1}, \quad (4.26)$$

o que implica em uma corrente de cor conservada,

$$J_\mu^a = g \epsilon^{abc} A_\nu^b F_{\mu\nu}^c, \quad (4.27)$$

que satisfaz a equação de continuidade.

Por outro lado, para um dado \vec{A}_μ , sabemos que se consideramos uma transformação de calibre topologicamente não trivial (4.9) o tensor de intensidades se modifica (4.10) e com isso a ação de Yang-Mills não permanece a mesma.

Podemos, portanto, representar os defeitos tipo monopolos considerando a parametrização dada pela eq.(4.9). Essa não é uma simples transformação de calibre, os campos \vec{A}_μ^U e \vec{A}_μ não são fisicamente equivalentes devido a presença do segundo termo da eq.(4.10), que é concentrado em uma superfície 2-dimensional onde U é singular.

Existe uma relação que podemos estabelecer entre a base escolhida para decompor os campos de calibre e as transformações de calibre que geram setores que contêm singularidades na teoria. Seja uma base \hat{m}_a , $a = 1, 2, 3$, induzida por uma transformação não trivial U ,

$$UT^a U^{-1} = \hat{m}_a \cdot \vec{T} \quad , \quad \hat{m}_a = R(U) \hat{e}_a. \quad (4.28)$$

Esta base pode ser parametrizada em termos dos ângulos de Euler,

$$U = e^{-i\alpha T_3} e^{-i\beta T_2} e^{-i\gamma T_3} \quad , \quad R(U) = e^{\alpha M_3} e^{\beta M_2} e^{\gamma M_3}, \quad (4.29)$$

onde M_a são os geradores de $SO(3)$.

Desta forma, o segundo termo da transformação de calibre eq.(4.9), usando o resultado obtido em [24], pode ser expresso por

$$\frac{i}{g} U \partial_\mu U^{-1} = -(C_\mu^{(m)} \hat{m} + \frac{1}{g} \hat{m} \times \partial_\mu \hat{m}) \cdot \vec{T}, \quad (4.30)$$

$$C_\mu^{(m)} = -\frac{1}{g} \hat{m}_1 \cdot \partial_\mu \hat{m}_2, \quad (4.31)$$

obtemos,

$$\vec{\mathcal{A}}_\mu^U \cdot \vec{T} = [(\mathcal{A}_\mu^3 - C_\mu^{(m)})\hat{m} - \frac{1}{g}\hat{m} \times \partial_\mu \hat{m} + \mathcal{A}_\mu^1 \hat{m}_1 + \mathcal{A}_\mu^2 \hat{m}_2] \cdot \vec{T}. \quad (4.32)$$

Ou seja, temos que

$$\vec{\mathcal{A}}_\mu^U = \vec{A}_\mu = A_\mu^{(m)}\hat{m} - \frac{1}{g}\hat{m} \times \partial_\mu \hat{m} + \vec{X}_\mu^{(m)}, \quad (4.33)$$

se identificamos

$$A_\mu^{(m)} = \mathcal{A}_\mu^3 - C_\mu^{(m)} \quad , \quad \vec{X}_\mu^{(m)} = \mathcal{A}_\mu^1 \hat{m}_1 + \mathcal{A}_\mu^2 \hat{m}_2. \quad (4.34)$$

Ambas representações dadas pelas eqs. (4.9) e (4.33) são equivalentes na descrição de monopolos. Porém, a representação dada pela eq.(4.33) será muito útil pois permitirá que possamos generalizar essa descrição para incluir também vórtices de centro na teoria. Considerando uma direção $\hat{m} = \pm \hat{r}$, ou seja, a direção no espaço de cor correlacionada com a direção espacial no espaço-tempo Euclidiano, podemos calcular a carga cromomagnética associada usando as eqs. (4.16) e (4.25),

$$g_m = \int ds_i h_{0i}^{(m)} = \mp \frac{4\pi}{g}, \quad (4.35)$$

ou seja $\hat{m} = \hat{r}$ ($\hat{m} = -\hat{r}$) corresponde a um anti-monopolo (monopolo). O fator dois, com respeito a carga cromomagnética do monopolo de Dirac, está associado com a natureza não Abelianas dos campos.

A configuração $\hat{m} = \hat{m}_3 = \hat{r}$ pode ser obtida usando em (4.29) $\alpha = \varphi$, $\beta = \theta$, onde φ e θ são as coordenadas polares angulares que definem \hat{r} , e qualquer escolha para γ pode ser considerada, desde que U seja univalente.

Podemos escolher $\gamma = -\varphi$. Neste caso, próximo de $\theta = 0$ temos que $R \approx I$, portanto a base não é singular no polo norte de uma superfície esférica que contém o defeito na origem. Por outro lado, quando $\theta \approx \pi$, usando $R_2(\pi)R_3(\gamma) = R_3(-\gamma)R_2(\pi)$, temos que $R \approx [R_3(\varphi)]^2 R_2(\pi)$, ou seja, em torno do polo sul \hat{m}_1 , \hat{m}_2 são obtidos de uma rotação 2φ de $-\hat{e}_1$, \hat{e}_2 ao longo de \hat{e}_3 . Portanto, o campo $C_\mu^{(m)}$ na eq.(4.31) está concentrado em uma superfície de Dirac localizada na parte negativa do eixo z para todo tempo (Euclidiano).

O potencial vetor associado aos monopolos, $C_\mu^{(m)}$, resulta [24],

$$C_\mu^{(m)} = \frac{1}{g}(\cos \beta \partial_\mu \alpha + \partial_\mu \gamma), \quad (4.36)$$

a escolha do parâmetro γ está associada com a posição da corda ou superfície de Dirac. No caso em que $\gamma = -\varphi$, U é univalente ao longo de qualquer curva fechada. Desta forma

temos,

$$C_\mu^{(m)} = \frac{1}{g}(\cos \theta - 1)\partial_\mu \varphi, \quad (4.37)$$

verificamos, novamente, que esta determinação está bem definida na porção positiva do eixo z , enquanto a corda ou superfície de Dirac encontra-se na porção negativa do eixo z para todo tempo Euclideo. Quando nos aproximamos da região próxima da singularidade ($\theta \approx \pi$), temos que,

$$C_\mu^{(m)} \approx -\frac{2}{g}\partial_\mu \varphi. \quad (4.38)$$

Vimos que monopolos podem ser associados com configurações não triviais na direção $\hat{m} = \hat{m}_3$, enquanto as superfícies de Dirac, que carregam fluxo cromomagnético $\frac{4\pi}{g}$, podem ser associadas com defeitos 2-dimensionais relacionados às componentes \hat{m}_1, \hat{m}_2 da base local do espaço de cor. No capítulo seguinte veremos que é possível, usando uma extensão $U \rightarrow VU$ onde V representa o setor de vórtices [24], incluir além de monopolos também vórtices de centro nesta descrição. Assim como os defeitos de Dirac, os vórtices de centro podem ser representados como defeitos associados as direções \hat{m}_1 e \hat{m}_2 do espaço local de cor.

4.4 Fixação de calibre

4.4.1 Fixando o calibre na QED₃ com campos carregados

Como em qualquer teoria de calibre, precisamos impor uma condição de fixação de calibre para os campos. No caso da QED₃ escolhemos o calibre de Lorentz,

$$\partial_\mu(A_\mu + C_\mu) = 0. \quad (4.39)$$

Iremos implementar esta condição de calibre funcionalmente na construção da função de partição da teoria. Isto pode ser feito introduzindo um multiplicador de Lagrange β , correspondente a medida,

$$F_{gf} = [\mathcal{D}\beta] e^{i \int d^3x \beta \partial_\mu(A_\mu + C_\mu)}. \quad (4.40)$$

Afim de explicitar os termos dependentes da corda de Dirac, linearizamos o acoplamento com o campo C_μ , na ação dada pela eq.(4.1) introduzindo campos auxiliares $\Lambda_\mu, \bar{\Lambda}_\mu$, e λ_μ ,

$$S = \int d^3x \left(\frac{1}{2} \lambda_\mu^2 + \bar{\Lambda}_\mu \Lambda_\mu - \frac{i}{2} \left(\bar{\Lambda}_\mu D_\mu \Phi + \bar{D}_\mu \bar{\Phi} \Lambda_\mu \right) - i \lambda_\mu \left(f_\mu + h_\mu \right) \right). \quad (4.41)$$

4.4.2 Fixando o calibre na teoria de Yang-Mills com grupo $SU(2)$

Para a teoria de Yang-Mills com grupo de simetria $SU(2)$, na representação de Cho-Faddeev-Niemi, fixaremos o calibre com base na referência [71]. Ou seja, iremos impor separadamente uma condição para os campos diagonais e uma outra para os não diagonais, isto é, os campos carregados que aparecem dentro dessa representação.

Portanto, para os campos diagonais impomos o mesmo calibre usado na QED_3 , o calibre de Lorentz,

$$\partial_\mu(A_\mu^{(m)} + C_\mu^{(m)}) = 0. \quad (4.42)$$

Já para o setor carregado, iremos impor um calibre estendido chamado de calibre maximal Abelian (MAG) [12],

$$\hat{D}_\mu \vec{X}_\mu^{(m)} = 0 \quad (4.43)$$

onde,

$$\hat{D}_\mu \vec{X}_\nu^{(m)} = \partial_\mu \vec{X}_\nu^{(m)} + g \hat{A}_\mu \times \vec{X}_\nu^{(m)}, \quad (4.44)$$

e

$$\hat{A}_\mu = A_\mu \hat{n} - \frac{1}{g} \hat{n} \times \partial_\mu \hat{n}. \quad (4.45)$$

Desta forma, podemos representar a derivada covariante \hat{D}_μ atuando sobre $\vec{X}_\mu^{(m)}$, usando as eqs. (4.44) e (4.45), na forma

$$\hat{D}_\mu \vec{X}_\nu^{(m)} = [\partial_\mu X_\nu^1 - g(A_\mu^{(m)} + C_\mu^{(m)})X_\nu^2] \hat{n}_1 + [\partial_\mu X_\nu^2 + g(A_\mu^{(m)} + C_\mu^{(m)})X_\nu^1] \hat{n}_2. \quad (4.46)$$

Este cálculo pode ser visto com detalhes no apêndice A da referência [24].

Assim como fizemos no caso da QED_3 compacta com campos carregados, essas condições podem ser introduzidas em um nível funcional através de multiplicadores de Lagrange β , $\vec{b} = b_1 \hat{n}_1 + b_2 \hat{n}_2$ para fixar os calibres dados pelas eqs. (4.42) e (4.43), respectivamente, e adicioná-los como uma medida funcional,

$$e^{i \int_M d^4x [\beta \partial_\mu (A_\mu^{(m)} + C_\mu^{(m)}) + \vec{b} \cdot \hat{D}_\mu \vec{X}_\mu^{(m)}]}. \quad (4.47)$$

Neste caso deveremos também levar em conta o determinante de Faddeev-Popov, exponenciado em termos dos campos fantasmas $\vec{c} = c_1 \hat{n}_1 + c_2 \hat{n}_2$ e \vec{c}^* . A ação para os fantasmas contém termos quadráticos em \hat{D}_μ ,

$$\int_M d^4x \vec{c}^* \cdot \hat{D}_\mu \hat{D}_\mu \vec{c}, \quad (4.48)$$

onde $\vec{c}^* = \bar{c}_1 \hat{n}_1 + \bar{c}_2 \hat{n}_2$. Este termo pode ser linearizado introduzindo campos auxiliares adicionais $\vec{a}^\mu = a_1^\mu \hat{n}_1 + a_2^\mu \hat{n}_2$, introduzidos na forma,

$$e^{i \int_M d^4x (\vec{a}_\mu^* \cdot \hat{D}_\mu \vec{c} + c.c)} e^{- \int_M d^4x \vec{a}_\mu^* \cdot \vec{a}_\mu}. \quad (4.49)$$

Como mostrado nas refs. [12, 72], o procedimento de renormalização tipicamente adiciona um termo quártico de fantasmas e outros termos acoplando os campos carregados \vec{X}_μ , contendo termos lineares em \hat{D}_μ .

Usando a eq.(4.46), podemos reescrever a eq.(4.43) na forma:

$$\mathcal{D}_\mu \Phi_\mu = 0 \quad , \quad \bar{\mathcal{D}}_\mu \bar{\Phi}_\mu = 0, \quad (4.50)$$

onde definimos,

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ig(A_\mu^{(m)} + C_\mu^{(m)}) \quad , \quad \bar{\mathcal{D}}_\mu = \partial_\mu - ig(A_\mu^{(m)} + C_\mu^{(m)}) \quad (4.51)$$

e o fator dado pela eq.(4.47) resulta em

$$e^{i \int_M d^4x [\beta \partial_\mu (A_\mu^{(m)} + C_\mu^{(m)}) + \bar{b} \mathcal{D}_\mu \Phi_\mu + b \bar{\mathcal{D}}_\mu \bar{\Phi}_\mu]} \quad , \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_1 + ib_2). \quad (4.52)$$

Usando a fórmula dada pela eq.(4.46), para $\hat{D}_\mu \vec{c}$, temos,

$$\hat{D}_\mu \vec{c} = [\partial_\mu c_1 - g(A_\mu^{(m)} + C_\mu^{(m)})c_2] \hat{n}_1 + [\partial_\mu c_2 + g(A_\mu^{(m)} + C_\mu^{(m)})c_1] \hat{n}_2, \quad (4.53)$$

e o fator dado pela eq.(4.49) toma a forma,

$$e^{i \int_M d^4x [\bar{a}_1^\mu [\partial_\mu c_1 - g(A_\mu^{(m)} + C_\mu^{(m)})c_2] + \bar{a}_2^\mu [\partial_\mu c_2 + g(A_\mu^{(m)} + C_\mu^{(m)})c_1] + c.c]} e^{- \int_M d^4x \vec{a}_\mu^* \cdot \vec{a}_\mu}. \quad (4.54)$$

O ponto importante é que a parte de fixação do calibre da medida depende da combinação $A_\mu^{(m)} + C_\mu^{(m)}$, e pode ser escrita como,

$$F_{gf} = F_{gf}^c e^{-i \int_M d^4x (A_\mu^{(m)} + C_\mu^{(m)}) K^\mu}, \quad (4.55)$$

onde F_{gf}^c é independente de $A_\mu^{(m)}$, coletando todos os outros fatores e medidas de integração para multiplicadores de Lagrange, fantasmas e campos auxiliares, enquanto $K^\mu = \partial^\mu \beta + \dots$, além dos campos mencionados, também depende de Φ_μ .

4.5 As funções de partição

4.5.1 Função de partição para QED_3 compacta com campos carregados na presença de instantons no \mathcal{R}^3

A função de partição da QED_3 compacta acoplada com campos escalares carregados, na presença de um par instanton/anti-instanton, tem a forma

$$Z = \int [\mathcal{D}A][\mathcal{D}\Phi][\mathcal{D}\bar{\Phi}] F_{gf} e^{-S}, \quad (4.56)$$

onde F_{gf} representa a condição de fixação de calibre implementada funcionalmente da forma apresentada pela eq.(4.40) e a ação S é dada por

$$S = \int d^3x \left(\frac{1}{2} \lambda_\mu^2 + \bar{\Lambda}_\mu \Lambda_\mu - \frac{i}{2} \left(\bar{\Lambda}_\mu D_\mu \Phi + \bar{D}_\mu \bar{\Phi} \Lambda_\mu \right) - i \lambda_\mu \left(f_\mu + h_\mu \right) \right). \quad (4.57)$$

Desta forma, a função de partição pode ser expressa por

$$Z = \int [\mathcal{D}\Psi][\mathcal{D}\beta] e^{-S_c - \int d^3x \frac{1}{2} \lambda_\mu^2 + i \int d^3x (\lambda_\mu (f_\mu + h_\mu) - J_\mu (A_\mu + C_\mu) + \beta \partial_\mu (A_\mu + C_\mu))}, \quad (4.58)$$

onde $[\mathcal{D}\Psi]$ é a medida sobre todos os campos presentes inicialmente e auxiliares. O termo S_c refere-se a ação do setor carregado da teoria,

$$S_c = \int d^3x \left(\bar{\Lambda}_\mu \Lambda_\mu - \frac{i}{2} (\bar{\Lambda}_\mu \partial_\mu \Phi + \Lambda_\mu \partial_\mu \bar{\Phi}) \right), \quad (4.59)$$

onde

$$J_\mu = \frac{iq}{2} (\bar{\Lambda}_\mu \Phi - \bar{\Phi} \Lambda_\mu). \quad (4.60)$$

Note que existe um vínculo implícito na eq.(4.58), devido a integração funcional sobre A_μ ,

$$\epsilon_{\mu\nu\rho} \partial_\nu \lambda_\rho = J_\mu^c \quad , \quad J_\mu^c = J_\mu + \partial_\mu \beta, \quad (4.61)$$

que implica em

$$\beta = -\frac{1}{\partial^2} \partial_\mu J_\mu. \quad (4.62)$$

Ou seja,

$$Z = \int [\mathcal{D}\Psi][\mathcal{D}\beta] e^{-S_c - \int d^3x \frac{1}{2} \lambda_\mu^2 + i \int d^3x [A_\mu (\epsilon_{\mu\nu\rho} \partial_\nu \lambda_\rho - J_\mu^c) + \lambda_\mu d_\mu]}. \quad (4.63)$$

onde usamos que

$$\int d^3x (\lambda_\mu h_\mu - J_\mu C_\mu + \beta \partial_\mu C_\mu) = \int d^3x \lambda_\mu (h_\mu - \epsilon_{\mu\nu\rho} \partial_\nu C_\rho). \quad (4.64)$$

4.5.2 Função de partição para Yang-Mills com grupo $SU(2)$ na presença de monopolos no \mathcal{R}^4

Procedendo da mesma maneira realizada para o caso da QED_3 compacta com campos carregados, no caso de Yang-Mills com grupo de simetria $SU(2)$ no espaço-tempo Euclideano 4-dimensional na presença de monopolos, teremos uma representação para a função de partição dada por

$$\begin{aligned} Z_{YM} &= \int [\mathcal{D}A][\mathcal{D}\Phi][\mathcal{D}\bar{\Phi}][\mathcal{D}\hat{n}] F_{gf} e^{-S_{YM}} \\ &= \int [\mathcal{D}\Psi] \tilde{F}_{gf} e^{-S_c - \int d^4x \frac{1}{4} \lambda_{\mu\nu} \lambda_{\mu\nu} + i \int d^4x [A_\mu (\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu \lambda_{\rho\sigma} - J_\mu^c) + \frac{1}{2} \lambda_{\mu\nu} (d_{\mu\nu} + k_{\mu\nu})]}, \end{aligned} \quad (4.65)$$

onde a corrente de cor conservada é dada por

$$J_c^\mu = J^\mu + K^\mu, \quad (4.66)$$

$[D\Psi]$ simboliza a medida de integração para A_μ , Φ_μ , $\bar{\Phi}_\mu$ e \hat{n} , assim como as integrações sobre os campos auxiliares $\lambda_{\mu\nu}$ e $\Lambda_{\mu\nu}$. O fator F_{gf} é referente a fixação de calibre que depende da combinação $A_\mu^{(m)} + C_\mu^{(m)}$ como mostra a eq.(4.55) e S_c é a ação do setor carregado dada por

$$S_c = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \bar{\Lambda}^{\mu\nu} \Lambda^{\mu\nu} - \frac{i}{2} (\bar{\Lambda}^{\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho \Phi_\sigma + \Lambda^{\mu\nu} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho \bar{\Phi}_\sigma) \right). \quad (4.67)$$

4.6 Tratamento para as cordas e superfícies de Dirac

Como bem sabemos, no formalismo da primeira quantização, é simples expressarmos uma quantidade física, como a densidade de probabilidade de propagação de uma partícula, de tal maneira que a corda de Dirac não esteja presente. Podemos enxergar isso olhando para a amplitude de propagação de uma carga elétrica da posição \mathbf{x}_i no instante de tempo t_i até a posição \mathbf{x}_f no instante de tempo t_f ,

$$\langle \mathbf{x}_f; t_f | \mathbf{x}_i; t_i \rangle = \int [Dx] e^{\frac{i}{\hbar} S} \quad , \quad S = \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\frac{1}{2} m \dot{x}_k^2 + \frac{q}{c} \dot{x}_k C_k \right). \quad (4.68)$$

Separando um caminho de referência $\bar{\mathbf{x}}(t)$, temos,

$$\langle \mathbf{x}_f; t_f | \mathbf{x}_i; t_i \rangle = e^{i\frac{q}{c\hbar} \int_{[\bar{\mathbf{x}}]} dx_k C_k} \int [Dx] e^{i\frac{S_{free}}{\hbar} + i\frac{q}{c\hbar} \oint_{\mathcal{C}} dx_k C_k}, \quad (4.69)$$

onde $\mathcal{C} = [\mathbf{x}] \circ [\bar{\mathbf{x}}]^{-1}$.

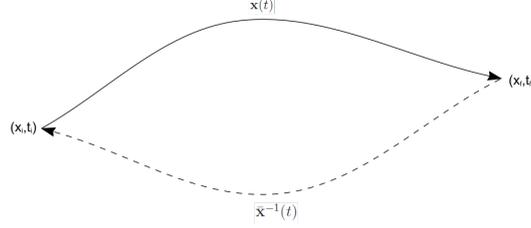


Figura 11: Caminho fechado \mathcal{C} formado pela composição $[\mathbf{x}] \circ [\bar{\mathbf{x}}]^{-1}$

A fase introduzida para um dado caminho $\mathbf{x}(t)$ relativo a $\bar{\mathbf{x}}(t)$ é,

$$\frac{q}{c\hbar} \oint_{\mathcal{C}} dx_k C_k = \frac{q}{c\hbar} \int_{S(\mathcal{C})} dS_k (h_k - d_k), \quad (4.70)$$

onde $S(\mathcal{C})$ é qualquer superfície cujo contorno é \mathcal{C} .

Se não há a presença de monopolos ($\mathbf{d} = 0$), torna-se evidente que uma quantidade física tal como a probabilidade de transição (quadrado da amplitude) não depende da escolha do potencial-vetor. Quando monopolos são introduzidos, para que o último termo na eq.(4.70) seja sempre trivial, para qualquer \mathbf{d} possível e superfície $S(\mathcal{C})$, a condição de quantização de Dirac deve ser imposta,

$$\frac{q}{c\hbar} g = 2\pi n. \quad (4.71)$$

Na segunda quantização, a ação para as partículas carregadas é

$$S = \int dt d^3x \bar{\Psi} (i\hbar\partial_t - H) \Psi \quad , \quad H = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \partial_k - \frac{q}{c} C_k \right)^2. \quad (4.72)$$

Definindo,

$$D_k = \sqrt{\frac{\hbar}{2m}} \left(\partial_k + i\frac{q}{c\hbar} C_k \right), \quad (4.73)$$

temos,

$$S/\hbar = \int dt d^3x (\bar{D}_k \bar{\Psi} D_k \Psi + i\bar{\Psi} \partial_t \Psi). \quad (4.74)$$

A função de partição do sistema pode ser expressa como,

$$Z = \int D\bar{\Psi} D\Psi e^{iS/\hbar}. \quad (4.75)$$

Contudo, a possibilidade de representar quantidades físicas cuja expressão não tenha nenhuma referência à corda de Dirac não é tão evidente quanto no caso da primeira quantização.

Afim de obter um resultado similar em teorias quânticas de campos com a presença de um setor carregado, procederemos em três etapas: primeiramente, iremos introduzir a decomposição de Hodge para os campos λ_μ e $\lambda_{\mu\nu}$ afim de isolarmos os termos dependentes das cordas ou superfícies de Dirac dos objetos que sejam invariantes de calibre, neste caso, situados nas bordas onde encontram-se os instantons ou monopolos. Em seguida, verificaremos que as cordas e superfícies de Dirac podem ser mudadas através de uma mudança de variáveis apropriada associada a uma transformação de calibre. Finalmente, mostraremos que é sempre possível mudar para uma configuração de cordas ou superfícies de Dirac tal que a função de partição dependa apenas das posições dos instantons ou monopolos.

4.6.1 A decomposição de Hodge

Afim de isolar os termos não físicos nas expressões para quantidades físicas como a função de partição, primeiramente notamos que a dependência com a corda ou superfícies de Dirac está contida em (segundo as eqs. (4.63) e (4.65)),

$$\int d^3x \lambda_\mu d_\mu \quad , \quad \int d^4x \frac{1}{2} \lambda_{\mu\nu} d_{\mu\nu}, \quad (4.76)$$

para QED_3 compacta e Yang-Mills com grupo de simetria $SU(2)$, respectivamente.

No primeiro caso, será conveniente considerar a seguinte decomposição:

$$\lambda_\mu = \partial_\mu \phi + B_\mu, \quad (4.77)$$

com,

$$\partial_\mu B_\mu = 0 \quad (4.78)$$

e devido a eq.(4.61), também temos implicitamente o vínculo

$$\epsilon_{\mu\nu\rho} \partial_\nu B_\rho = J_\mu^c. \quad (4.79)$$

Assim, temos que,

$$\int d^3x \lambda_\mu d_\mu = g_m [(\phi(x^-) - \phi(x^+))] + \int d^3x B_\mu d_\mu, \quad (4.80)$$

$$\int d^3x B_\mu d_\mu = g_m \int_{[x_s]} dx_\mu B_\mu. \quad (4.81)$$

Devemos também escrever a medida de integração de forma apropriada na eq.(4.63),

$$[\mathcal{D}\lambda] \rightarrow [\mathcal{D}B][\mathcal{D}\phi]F_{gf}^B, \quad (4.82)$$

onde F_{gf}^B é a parte da medida de integração referente a condição de fixação de calibre $\partial_\mu B_\mu = 0$,

$$F_{gf}^B = [\mathcal{D}\xi] e^{i \int d^4x \xi \partial_\mu B_\mu}. \quad (4.83)$$

De forma análoga, para Yang-Mills com grupo $SU(2)$ em quatro dimensões, decomponemos o campo auxiliar $\lambda_{\mu\nu}$ da seguinte forma:

$$\lambda_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi_\nu - \partial_\nu \phi_\mu + B_{\mu\nu}, \quad (4.84)$$

$$\partial_\mu \phi_\mu = 0 \quad , \quad \partial_\nu B_{\mu\nu} = 0, \quad (4.85)$$

com o vínculo implícito

$$\frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\nu B_{\rho\sigma} = J_\mu^c. \quad (4.86)$$

Ou seja,

$$\int d^4x \frac{1}{2} \lambda_{\mu\nu} d_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{g} \left(\oint_{\mathcal{C}^+} dy_\mu \phi_\mu - \oint_{\mathcal{C}^-} dy_\mu \phi_\mu \right) + \int d^4x \frac{1}{2} B_{\mu\nu} d_{\mu\nu}, \quad (4.87)$$

$$\int d^4x \frac{1}{2} B_{\mu\nu} d_{\mu\nu} = \frac{4\pi}{g} \int_{[x_w]} d^2\sigma_{\mu\nu} B_{\mu\nu}. \quad (4.88)$$

Os primeiros termos nas eqs. (4.80) e (4.87), dependem das localizações dos instantons e monopolos (invariantes de calibre), respectivamente, enquanto as cordas e superfícies de Dirac aparecem isoladas nos segundos termos.

4.6.2 Transformação de variáveis dos campos na QED₃ compacta com campos carregados

Na QED₃ compacta, vamos considerar a mudança de variáveis:

$$\Phi' = e^{iq\chi} \Phi \quad , \quad A'_\mu = A_\mu + \chi_\mu, \quad (4.89)$$

a qual possui Jacobiano trivial. A fase χ é multivalente. Ao longo de qualquer curva fechada (loop) que circunda uma corda de Dirac fechada $\partial\Sigma$, dada pela borda da superfície Σ , esta muda em uma quantidade $\Delta\chi$.

Afim de que $e^{iq\chi}$ seja univalente, devemos ter que,

$$q\Delta\chi = 2n\pi. \quad (4.90)$$

Com esta condição, $e^{iq\chi}$ é contínuo em qualquer Σ , assim obtemos,

$$\partial_\mu e^{iq\chi} = iq e^{iq\chi} \chi_\mu, \quad (4.91)$$

onde χ_μ é localmente dado por $\partial_\mu\chi$, não contendo nenhuma distribuição de tipo δ de Dirac localizada em Σ .

Agora, sob a mudança dada pela eq.(4.89), a ação transformada tem a forma

$$S' = \int d^3x \left(\bar{D}_\mu \bar{\Phi} D_\mu \Phi + \frac{1}{2} (f_\mu + h'_\mu)^2 \right), \quad (4.92)$$

$$h'_\mu = h_\mu + \epsilon_{\mu\nu\rho} \partial_\nu \chi_\rho. \quad (4.93)$$

Como $\partial_\mu h'_\mu = \partial_\mu h_\mu$, garantimos que nenhum monopolo novo está sendo introduzido neste processo. O segundo termo na eq.(4.93) apenas representa o fluxo concentrado em uma corda de Dirac fechada $\partial\Sigma$,

$$\pm g_m = \int dS_\mu \epsilon_{\mu\nu\rho} \partial_\nu \chi_\rho = \oint_l dx_\mu \chi_\mu = \Delta\chi, \quad (4.94)$$

onde a primeira integral é realizada sobre uma superfície atravessada por $\partial\Sigma$, ou seja, sua borda é uma curva fechada (loop) l que circunda $\partial\Sigma$.

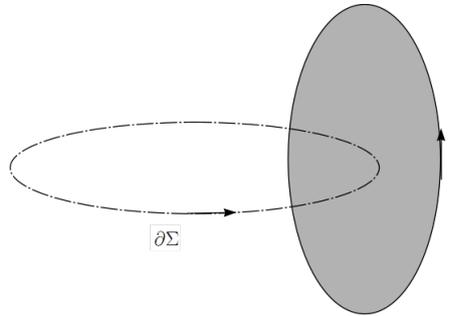


Figura 12: Corda de Dirac fechada localizada em $\partial\Sigma$ enlaçada por um loop l .

Em particular, esta transformação pode ser usada para mudar as cordas de Dirac

abertas, presas aos instantons de d_μ para d'_μ , escolhendo,

$$\epsilon_{\mu\nu\rho}\partial_\nu\chi_\rho = d'_\mu - d_\mu, \quad (4.95)$$

de forma análoga podemos proceder para mudar as superfícies de Dirac.

Obviamente, considerando a eq.(4.90) e o fato de χ ser multivalente na eq.(4.94), a quantização de Dirac dada pela eq.(4.6) é reobtida.

Em um nível quântico, na representação de Z (conforme a eq.(4.63)), também introduzimos um campo carregado Λ_μ . Realizando as mudanças de variáveis da eq.(4.89), juntamente com,

$$\Lambda'_\mu = e^{iq\chi} \Lambda, \quad (4.96)$$

obtemos,

$$Z = \int [\mathcal{D}\Psi][\mathcal{D}\beta] e^{-S_c + i \int d^3x \chi_\mu J_\mu - \int d^3x \frac{1}{2} \lambda_\mu^2 + i \int d^3x [(A_\mu + \chi_\mu)(\epsilon_{\mu\nu\rho}\partial_\nu\lambda_\rho - J_\mu^c) + \lambda_\mu d_\mu]}. \quad (4.97)$$

De acordo com a eq.(4.61), a diferença entre J_μ e J_μ^c é $\partial_\mu\beta$. Com isso, podemos substituir $J_\mu \rightarrow J_\mu^c$ no expoente da eq.(4.97), desde que

$$\int d^3x \chi_\mu \partial_\mu\beta = - \int d^3x \beta \partial_\mu\chi_\mu, \quad (4.98)$$

em outras palavras, devemos ter,

$$\partial_\mu\chi_\mu = \partial_\mu\partial_\mu\chi = 0. \quad (4.99)$$

A possibilidade de tal escolha será discutida com detalhes na próxima seção.

Desta forma, obtemos,

$$Z = \int [\mathcal{D}\Psi][\mathcal{D}\beta] e^{-S_c - \int d^3x \frac{1}{2} \lambda_\mu^2 + i \int d^3x A_\mu (\epsilon_{\mu\nu\rho}\partial_\nu A_\rho - J_\mu^c) + i \int d^3x \chi_\mu \epsilon_{\mu\nu\rho}\partial_\nu\lambda_\rho + i \int d^3x \lambda_\mu d_\mu}. \quad (4.100)$$

Finalmente, integrando por partes o termo contendo $\chi_\mu \epsilon_{\mu\nu\rho}\partial_\nu\lambda_\rho$, usando eq.(4.95), obtemos a função de partição (4.63) onde d_μ é substituído por d'_μ , mostrando assim a independência de Z com a escolha da corda de Dirac.

4.6.3 Transformação singular dos campos no setor topologicamente trivial de $SU(2)$

No caso de Yang-Mills com grupo $SU(2)$, vamos considerar uma transformação de calibre do campo \vec{A}_μ dada pela eq.(4.12), decomposto em termos das bases \hat{n}_a ,

$$\vec{A}_\mu^S \cdot \vec{T} = S \vec{A}_\mu \cdot \vec{T} S^{-1} + \frac{i}{g} S \partial_\mu S^{-1}, \quad (4.101)$$

que possui Jacobiano trivial.

Como vimos na ref.[24], em termos das variáveis de Cho-Fadeev-Niemi, a transformação de calibre do campo é,

$$\vec{A}_\mu^S = A'_\mu \hat{m}' - \frac{1}{g} \hat{m}' \times \partial_\mu \hat{m}' + X_\mu^1 \hat{m}'_1 + X_\mu^2 \hat{m}'_2, \quad (4.102)$$

$$A'_\mu = A_\mu + C_\mu^{(m)} - C_\mu^{(m')} \quad , \quad \hat{m}'_a = R(S) \hat{m}_a, \quad (4.103)$$

onde $C_\mu^{(m')}$ é calculado com as bases transformadas.

Em particular, podemos considerar uma transformação de calibre S ao longo da direção \hat{m} , representando uma rotação dos vetores de base \hat{m}_1 e \hat{m}_2 com uma fase χ . Esta fase é multivalente ao longo de um caminho fechado (loop) l que intercepta a superfície de Dirac fechada $\partial\Sigma$ a ser introduzida, que é borda do 3-volume Σ , tal que S é univalente. Neste caso, como $\hat{m}' = \hat{m}$, continuamos a ter $\vec{L}'_{\mu\nu} = 0$ na eq.(4.14).

Para estas transformações de calibre, $C_\mu^{(m)} - C_\mu^{(m')}$ passa a ser χ_μ , com χ_μ localmente dado por $\partial_\mu \chi$. Similarmente ao que acontecia em QED₃ compacta, $\partial_\mu \chi$ não apresenta nenhum termo localizado sobre qualquer 3-volume Σ . Isto surge pois $C_\mu^{(m)}$ e $C_\mu^{(m')}$ dependem das derivadas da base local do espaço de cor (eq.(4.21)), as quais são univalentes ao longo de qualquer caminho fechado (loop) l .

A segunda transformação na eq.(4.103) pode ser traduzida de maneira equivalente como uma mudança de fase χ do setor carregado, que na representação da função de partição eq.(4.65) inclui não apenas os campos Φ_μ , $\bar{\Phi}_\mu$ mas também os campos Λ_μ , $\bar{\Lambda}_\mu$, os campos fantasmas carregados, os multiplicadores de Lagrange carregados e os campos auxiliares carregados na medida de integração na eq.(4.55).

Com isso, o efeito desta transformação na ação de Yang-Mills é (veja ref. [24]),

$$S'_{YM} = \int d^4x \left[\frac{1}{4} (f_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu} + k_{\mu\nu})^2 + \frac{1}{2} \bar{g}^{\mu\nu} g^{\mu\nu} \right], \quad (4.104)$$

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\rho\chi_\sigma, \quad (4.105)$$

onde o segundo termo do lado direito da eq.(4.105) está localizado em $\partial\Sigma$. Em particular, para mudar a superfície de Dirac anexada aos monopolos, devemos considerar,

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\rho\chi_\sigma = d'_{\mu\nu} - d_{\mu\nu}, \quad (4.106)$$

representando um fluxo $4\pi/g$, concentrado na composição das superfícies inicial e final.

Após realizar a mudança de variáveis dada pela eq.(4.103), obtemos então,

$$\begin{aligned} Z_{YM} &= \int [\mathcal{D}A][\mathcal{D}\Phi][\mathcal{D}\bar{\Phi}][\mathcal{D}\hat{n}]F_{gf} e^{-S_{YM}} \\ &= \int [\mathcal{D}\Psi]\tilde{F}_{gf} e^{-S_c + i \int d^3x \chi_\mu (J_\mu + \tilde{K}_\mu)} \times \\ &\quad \times e^{-\int d^4x \frac{1}{4}\lambda_{\mu\nu}\lambda_{\mu\nu} + i \int d^4x [(A_\mu + \chi_\mu)(\frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu\lambda_{\rho\sigma} - J_\mu^c) + \frac{1}{2}\lambda_{\mu\nu}(d_{\mu\nu} + k_{\mu\nu})]}. \end{aligned} \quad (4.107)$$

Novamente, com a escolha $\partial_\mu\chi_\mu = \partial_\mu\partial_\mu\chi = 0$, podemos substituir $J_\mu + \tilde{K}_\mu \rightarrow J_\mu + \tilde{K}_\mu + \partial_\mu\beta = J_\mu + K_\mu = J_\mu^c$, e similarmente ao caso da QED_c(3), obtemos a função de partição, eq.(4.65), onde $d_{\mu\nu}$ é substituído por $d'_{\mu\nu}$, mostrando assim a independência de Z_{YM} com respeito a mudança da superfície de Dirac que conecta os monopolos e anti-monopolos localizados nas bordas.

Afim de obter uma forma explícita para χ_μ , notemos que esta pode ser associada com um par de vórtices de centro fechados localizados em $\partial\Sigma$. Como χ_μ não contém nenhuma distribuição de tipo δ localizada em Σ , podemos usar os resultados dados nas refs. [31, 73] para vórtices de centro fechados de tipo fino, levando em conta os fatores apropriados,

$$\chi_\mu = -g_m \int_\Sigma d^{D-1}\tilde{\sigma}_\nu(\delta_{\mu\nu}\partial^2 - \partial_\mu\partial_\nu)D(x - \bar{x}(\sigma)), \quad (4.108)$$

onde a carga magnética (mínima) g_m é dada por $2\pi/e$ ou $4\pi/g$, nos casos Abelianos ou não Abelianos, respectivamente, e $\bar{x}(\sigma)$ é a parametrização de Σ , uma superfície ou um 3-volume em $D = 3, 4$, respectivamente. A medida de integração é,

$$d^{D-1}\tilde{\sigma}_\mu = \frac{1}{(D-1)!}\epsilon_{\mu\alpha_1\dots\alpha_{D-1}}d^{D-1}\sigma_{\alpha_1\dots\alpha_{D-1}}, \quad (4.109)$$

$$d^{D-1}\sigma_{\alpha_1\dots\alpha_{D-1}} = \epsilon_{k_1\dots k_{D-1}}\frac{\partial\bar{x}_{\alpha_1}}{\partial\sigma_{k_1}}\dots\frac{\partial\bar{x}_{\alpha_{D-1}}}{\partial\sigma_{k_{D-1}}}d\sigma_1\dots d\sigma_{D-1}, \quad (4.110)$$

e $D(x)$ é a função de Green para o operador Laplaciano.

Como mostrado nas referências [31, 73], usando o teorema de Stokes, χ_μ pode ser

escrito apenas em termos de $\partial\Sigma$ que é a variedade onde os defeitos de Dirac fechados estão localizados ($\partial\partial\Sigma = 0$),

$$\chi_\mu = \frac{4\pi}{g} \int_{\partial\Sigma} d^{D-2} \tilde{\sigma}_{\mu\kappa} \partial_\kappa^x D(x - \bar{x}(\sigma)). \quad (4.111)$$

Por exemplo, em três dimensões, se consideramos uma corda de Dirac ao longo do eixo z , obtemos $\chi_0 = 0$, $\chi_i = -(2/g) \epsilon_{ij} \partial_j \ln \rho$, que não contêm singularidades em qualquer plano cuja borda é dada pelo eixo z , e pode ser localmente escrito como, $\chi_\mu = (2/g) \partial_\mu \varphi$, onde φ é o ângulo polar (multivalente).

Note também que em geral, como antecipado, devido a estrutura de índices na eq.(4.108), temos $\partial_\mu \chi_\mu = 0$.

4.6.4 Argumento geral para eliminação dos defeitos de Dirac

Como salientamos anteriormente, é desejável que possamos representar quantidades físicas como a função de partição apenas em termos das propriedades observáveis dos monopolos. A este respeito mostraremos que a integral de linha na eq.(4.81) e seu análogo em Yang-Mills poderão sempre ser anuladas para uma dada escolha das cordas de Dirac (superfícies de Dirac), ou seja, considerando uma mudança de variáveis apropriada.

Como mostramos na seção anterior, quando QED_3 compacta e Yang-Mills com grupo de simetria $SU(2)$ são consideradas nos calibres de Lorentz e Maximal Abeliano, respectivamente, e uma mudança de variáveis associada à uma fase multivalente que satisfaz $\partial_\mu \chi_\mu = \partial_\mu \partial_\mu \chi = 0$ é feita, a única mudança no integrando da função de partição é a substituição,

$$\int d^D x \lambda d \rightarrow \int d^D x \lambda d' = \int d^D x \lambda (d + \epsilon \partial \chi), \quad (4.112)$$

onde simplificamos a notação definindo,

$$\lambda(d + \epsilon \partial \chi) = \begin{cases} \lambda_\mu (d_\mu + \epsilon_{\mu\nu\rho} \partial_\nu \chi_\rho) & \text{ou,} \\ \lambda_{\mu\nu} (d_{\mu\nu} + \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho \chi_\sigma), \end{cases} \quad (4.113)$$

em $D = 3, 4$ dimensões, respectivamente. Por outro lado, na seção §4.6, introduzimos uma decomposição de Hodge de λ em termos dos campos ϕ , B_μ ou ϕ_μ , $B_{\mu\nu}$ em três e quatro dimensões, respectivamente. Como $\epsilon \partial \chi$ introduz uma corda ou superfície de Dirac fechada, as bordas em d' são as mesmas que em d . Ou seja, os termos envolvendo ϕ e ϕ_μ nas eqs. (4.80) e (4.87) não se modificam após as substituições mencionadas acima (eles se acoplam com os monopolos, cujas localizações são invariantes de calibre). A única

mudança nessas equações é no acoplamento dos defeitos de Dirac com o setor carregado,

$$\int d^D x B d \rightarrow \int d^D x B(d + \epsilon \partial \chi), \quad (4.114)$$

(lembrando que $\epsilon \partial B$ representa as correntes carregadas, conforme as eqs. (4.79) e (4.86)).

Como já discutimos, na QED_3 compacta e Yang-Mills com grupo de simetria $SU(2)$, devido $e^{iq\chi}$ ser univalente e a base local de cor também, na mudança de variáveis para A_μ , a função χ_μ não pode conter singularidades na superfície ou 3-volume Σ cuja borda é dada pela corda ou superfície de Dirac fechada que é acrescentada. Isto quer dizer que, χ_μ pode ser globalmente escrito como,

$$\chi_\mu = \partial_\mu \Theta + R_\mu, \quad (4.115)$$

onde Θ coincide com um determinado ramo de χ no espaço-tempo Euclideano menos Σ , e R_μ está localizado em Σ . Quando Σ é atravessada, Θ contém uma descontinuidade, definindo uma função do ponto que volta para o valor inicial quando percorrido um caminho fechado qualquer que enlaça o defeito de Dirac $\partial\Sigma$. Assim, o cálculo de $\partial_\mu \Theta$ contém uma distribuição de tipo δ concentrado em Σ , e R_μ deve ser tal a compensar esta descontinuidade, dando origem a um χ_μ sem termos singulares δ de Dirac.

Neste sentido, será útil considerar a fórmula obtida nas refs. [31, 73] para separar o que se conhece como vórtice de centro fino de vórtice de centro ideal, ou seja,

$$- \int_\Sigma d^{D-1} \tilde{\sigma}_\mu \delta^{(D)}(x - \bar{x}(\sigma)) - \int_\Sigma d^{D-1} \tilde{\sigma}_\nu (\delta_{\mu\nu} \partial^2 - \partial_\mu \partial_\nu) D(x - \bar{x}(\sigma)) = \partial_\mu \Omega, \quad (4.116)$$

onde Ω é o ângulo sólido (normalizado a 1) subentendido por Σ quando visto desde x . Este ângulo sólido é univalente ao longo de qualquer caminho fechado que circunda $\partial\Sigma$. Em outras palavras, usando a eq.(4.108), obtemos,

$$\Theta = g_m \Omega \quad , \quad R_\mu = g_m \int_\Sigma d^{D-1} \tilde{\sigma}_\mu \delta^{(D)}(x - \bar{x}(\sigma)). \quad (4.117)$$

Como Θ é univalente, temos que $\epsilon_{\mu\nu\rho} \partial_\nu \partial_\rho \Theta = 0$, $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial_\rho \partial_\sigma \Theta = 0$ em 3D e 4D, respectivamente, ou seja,

$$\int d^D x [\epsilon \partial \chi] B = \int d^D x [\epsilon \partial R] B, \quad (4.118)$$

para qualquer $B_\mu(x)$ bem comportado. Por exemplo, em $D = 3$,

$$\begin{aligned} \int d^3 x [\epsilon_{\mu\nu\rho} \partial_\nu \chi_\rho] B_\mu &= g_m \int d^3 x \int_\Sigma d^2 \tilde{\sigma}_\rho \epsilon_{\mu\nu\rho} \partial_\nu [\delta^{(3)}(x - \bar{x}(\sigma)) B_\mu(\bar{x}(\sigma))], \\ &= g_m \int_{\partial\Sigma} dy_\mu B_\mu(y), \end{aligned} \quad (4.119)$$

onde usamos o teorema de Stokes. Desta maneira, podemos explicitamente verificar que χ_μ introduz uma corda de Dirac fechada $\partial\Sigma$ (cf. eqs. (4.81) e (4.114)),

$$\int_{[x_s]} dx_\mu B_\mu \rightarrow \int_{[x'_s]} dx_\mu B_\mu. \quad (4.120)$$

Seguindo procedimento similar em $D = 4$, para as eqs. (4.88) e (4.114), a mudança de variáveis é equivalente a introduzir uma superfície de Dirac fechada $\partial\Sigma$,

$$\int_{[x_w]} d^2\sigma_{\mu\nu} B_{\mu\nu} \rightarrow \int_{[x'_w]} d^2\sigma_{\mu\nu} B_{\mu\nu}. \quad (4.121)$$

Agora, afim de mostrar que sempre é possível desacoplar os defeitos de Dirac do setor carregado no integrando da função de partição, vamos primeiramente considerar a situação simples, no espaço-tempo 3-dimensional, onde os campos carregados são tais que um par instanton/anti-instanton esteja situado em uma dada linha de campo de B_μ . O campo B_μ , que satisfaz as eqs. (4.78) e (4.79), pode ser visto como um campo “magnético” gerado pela corrente de carga J_μ^c , de modo que as linhas do campo associado devem ser fechadas e orientadas. Como os instantons e anti-instantons estão localizados nas extremidades das cordas de Dirac, podemos considerar duas cordas, $[x_s]$ e $[x'_s]$, contidas em uma linha de campo, com os vetores tangentes orientados paralelamente e anti-paralelamente à B_μ , respectivamente.

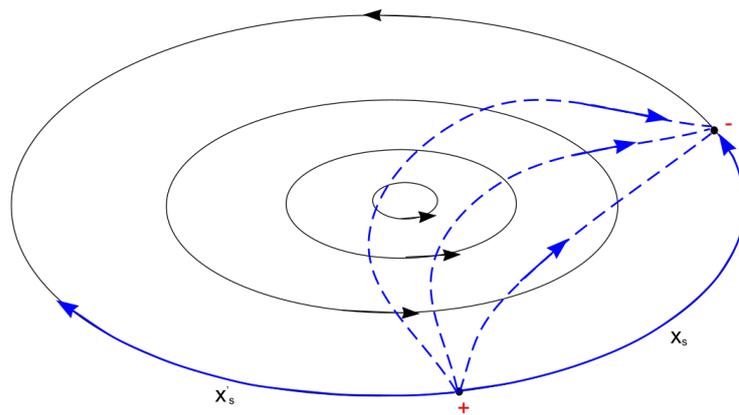


Figura 13: Instanton/anti-instanton unidos por uma corda de Dirac (em azul) localizados sobre uma linha de campo de B_μ (em preto)

Desta forma, quando mudamos de d_μ para d'_μ teremos,

$$P = \int_{[x_s]} dx_\mu B_\mu > 0 \quad , \quad N = \int_{[x'_s]} dx_\mu B_\mu < 0. \quad (4.122)$$

Então, se um sistema é definido no \mathcal{R}^3 , podemos deformar continuamente $[x'_s]$ em $[x_s]$, mantendo as extremidades fixas. Neste processo, a integral de linha de B_μ irá mudar continuamente de um valor positivo para um valor negativo, portanto, deverá existir uma corda intermediária tal que,

$$\int_{[x_s^0]} dx_\mu B_\mu = 0. \quad (4.123)$$

Apresentaremos agora uma prova geral deste argumento. Começaremos definindo,

$$I_{[x]} = \begin{cases} \int_{[x_s]} dx_\mu B_\mu & \text{ou,} \\ \int_{[x_w]} d^2 \sigma_{\mu\nu} B_{\mu\nu}. \end{cases} \quad (4.124)$$

Vamos considerar uma corda (superfície) de Dirac $[x]$ que conecta o anti-instanton (anti-monopolo) ao instanton (monopolo), localizados em x^- e x^+ (\mathcal{C}^- e \mathcal{C}^+). Se $I_{[x]}$ for zero, o problema está resolvido. Caso contrário, podemos assumir sem perda de generalidade que este termo tem uma contribuição positiva. Agora, considerando as mudanças de variáveis mencionadas acima, ganharemos um termo,

$$\begin{aligned} I_{[\partial\Sigma]} &= \int d^D x B \epsilon \partial \chi = \int d^D x R \epsilon \partial B \\ &= g_m \int_{\Sigma} d^{D-1} \tilde{\sigma}_\mu [\epsilon \partial B]_\mu. \end{aligned} \quad (4.125)$$

Se $\epsilon \partial B \equiv 0$ em todo o espaço-tempo Euclideano, juntamente com a propriedade que define B , ($\partial_\mu B_\mu = 0$, $\partial_\nu B_{\mu\nu} = 0$) nas eqs. (4.78), (4.85), implicaria um B identicamente nulo, e o termo contendo a corda de Dirac seria trivialmente zero. Agora, assumiremos então a existência de uma região do espaço-tempo tal que $\epsilon \partial B$ seja não-nulo. Neste caso, afim de ter $I_{[\partial\Sigma]}$ diferente de zero, é suficiente considerar Σ como um pequeno disco ou um 3-volume localizado nessa região com $d^{D-1} \tilde{\sigma}_\mu$ orientado ao longo da direção local de $[\epsilon \partial B]_\mu$. Claramente, se necessário, podemos usar $-\chi$ ao invés de χ de modo a tornar,

$$I_{[\partial\Sigma]} < 0. \quad (4.126)$$

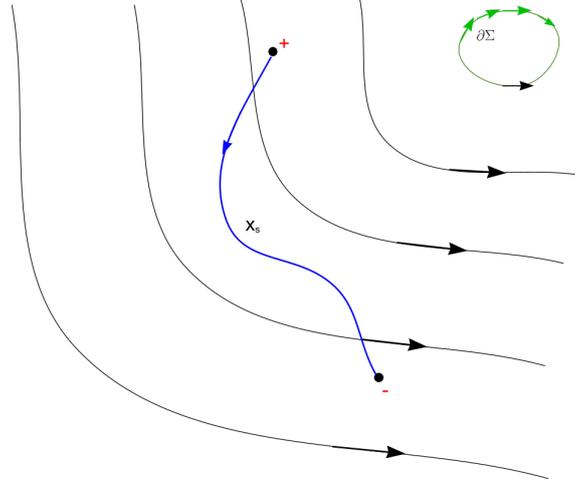


Figura 14: Instanton/anti-instanton em pontos genéricos ligados por uma corda de Dirac (em azul) + n contribuições de uma corda de Dirac fechada localizada em $\partial\Sigma$ (em verde) antiparalela a linha de campo B_μ (em preto)

O ponto importante é que uma fase $n\chi$, com n sendo um número natural, também define uma possível transformação de calibre singular, que também leva à uma transformação univalente dos campos carregados ao longo de qualquer caminho fechado (laços). Para as mudanças de variáveis associadas, teremos,

$$I_{[x']} = I_{[x]} + nI_{[\partial\Sigma]}, \quad (4.127)$$

que pode ser negativo para um valor suficientemente grande de n . Novamente, $[x']$ pode ser deformado em $[x]$, comprimindo $[\partial\Sigma]$ até zero, e neste processo uma corda ou superfície intermediária $[x^0]$ deverá existir tal que $I_{[x^0]} = 0$ seja verificado.

Resumindo, nesta seção mostramos que é sempre possível fazer uma escolha de variáveis com Jacobiano trivial, sem alterar as condições de fixação de calibre iniciais, tal que as cordas ou superfícies de Dirac são desacopladas do setor carregado da teoria. Por exemplo, na decomposição de Cho-Fadeev-Niemi da teoria de Yang-Mills com grupo $SU(2)$, isto leva à uma representação para a função de partição onde o único efeito das cordas ou superfícies de Dirac é dado pelo acoplamento dos invariantes de calibre localizados nas bordas (monopolos) com o campo dual ϕ_μ (veja eq.(4.87)),

$$\int d^4x \frac{1}{2} \lambda_{\mu\nu} d_{\mu\nu} \rightarrow \frac{4\pi}{g} \left(\oint_{e^+} dy_\mu \phi_\mu - \oint_{e^-} dy_\mu \phi_\mu \right). \quad (4.128)$$

Uma vez que as superfícies de Dirac são desacopladas, a integração sobre os monopolo-

los, pode ser representada através de um campo complexo ψ , acoplado com o campo de calibre ϕ_μ (veja referências [14], [74]-[76], [77]). Nesta linguagem, interações de contato entre monopolos, geram termos quárticos $\lambda(\bar{\psi}\psi)^2$ que podem estabilizar o sistema em uma fase com quebra espontânea de simetria, se a correlação entre monopolos e os campos de gluons gerarem um termo de massa efetiva negativa $-m^2\bar{\psi}\psi$. No contexto da decomposição de Cho-Fadeev-Niemi, esta teoria efetiva, representando a condensação dos graus de liberdade de monopolos, foi obtida na referência [37] através de um tratamento heurístico das superfícies de Dirac.

5 *Instantons e vórtices de centro correlacionados em $SU(2)$*

Se desejamos entender o fenômeno de confinamento de cor em teorias de Yang-Mills, uma das abordagens que pode ser considerada é levar em conta um setor de defeitos topológicos na teoria. Um modelo realístico para explicar o comportamento do potencial confinante em teorias de Yang-Mills deve considerar a presença de monopolos e vórtices de centro. Como já mencionamos algumas vezes, a inclusão dos vórtices tem motivação em resultados de simulações na rede que exibem uma dependência na tensão da corda confinante com a representação do centro $Z(N)$ do grupo $SU(N)$ [29]. A inclusão deste setor pode ser realizada por meio da extensão da representação de Cho-Fadeev-Niemi. Nosso objetivo aqui é gerar um modelo efetivo a partir de uma teoria de Yang-Mills com grupo $SU(2)$ em 3D na presença de instantons e vórtices de centro correlacionados. A teoria efetiva será obtida mediante uma integração sobre um ensemble de configurações de pares de instantons ligados por pares de vórtices de centro.

Neste sentido, desenvolvemos um tratamento para esse ensemble levando em conta os fatores de simetria das configurações. Utilizando um procedimento análogo a uma expansão perturbativa, podemos expressar a função de partição deste sistema em termos das contribuições referentes aos setores de pares instanton/anti-instanton. Todos os termos desta expansão envolverão um bloco fundamental que representa a integração sobre uma linha de vórtice, com extremos fixos, sujeita a uma interação. Os termos desta expansão podem ser obtidos através de derivadas funcionais de um funcional gerador. A forma do funcional gerador dependerá essencialmente da interpretação do bloco fundamental contido em todos os termos da expansão.

Uma das grandes dificuldades nesta parte do trabalho é como manipular a integração sobre uma linha de vórtice, com extremidades fixas, quando admitimos uma certa dinâmica. Essa dinâmica será ditada por uma ação fenomenológica que parametriza algumas propriedades físicas associadas a estas configurações. Alguns autores discutem

determinados modelos que envolvem integrações sobre objetos como linhas-de-mundo ou mesmo cadeias de polímero. Kleinert, [36], descreve uma série de modelos para cadeias de polímeros que envolvem propriedades como rigidez e efeitos de volume excludente (auto-interação entre os polímeros). Porém, a forma como é feita a passagem da formulação discreta para a formulação contínua não atendia a nossa necessidade de incluir interações dos vórtices com um campo vetorial.

Na busca por um formalismo consistente, encontramos nas referências [79], [78], prescrições para representar a integração sobre uma linha-de-mundo de uma partícula (no nosso caso um vórtice de centro) como uma integração funcional representando a amplitude de propagação de uma partícula relativística. Porém, tais teorias apresentam invariância por reparametrizações das linhas de mundo, enquanto que nós estávamos interessados em incluir o efeito da rigidez dos vórtices de centro. Uma propriedade que é importante para caracterizar o ensemble. Após várias tentativas concluímos que se quiséssemos avançar pelo caminho proposto, deveríamos trabalhar como foi feito em [35], [80], onde foram analisadas as probabilidades “end-to-end” para polímeros interagentes. Este procedimento viabilizou o tratamento dos ensembles de vórtices e instantons correlacionados permitindo-nos obter uma teoria efetiva que exhibe as propriedades esperadas para um modelo confinante.

A teoria efetiva que leva em conta um ensemble de pares de instantons e anti-instantons ligados através de vórtices de centro, sujeitos a interações com uma fonte externa e que exhiba as propriedades mencionadas acima, será uma teoria para um campo escalar complexo. Nesta teoria a derivada ordinária é substituída por uma derivada covariante com a conexão dada pelo campo vetorial dual que pode ser definido nas teorias de Yang-Mills. A teoria efetiva contém também termos quadráticos nos campos de vórtices somente invariante por transformações do grupo $Z(2)$.

Na representação do ensemble surge também um determinante funcional que foi aproximado através de uma expansão derivativa cujo efeito é muito importante uma vez que ele origina um termo de Maxwell para o campo dual. Este termo de Maxwell juntamente com o termo quadrático do campo dual, que surge naturalmente da linearização da ação de Yang-Mills, dá origem a uma teoria massiva para o campo dual. A hipótese de dominância Abelian é obtida considerando a massa associada e ao campo dual suficientemente grande ao ponto de suprimir a contribuição do setor carregado da teoria.

5.1 Vórtices de centro como defeitos da base local de cor

Até agora só descrevemos defeitos tipo monopolos em teorias de Yang-Mills porém, como já mencionamos a inclusão de um setor de vórtices de centro na teoria poderia explicar a dependência da tensão da corda com as possíveis representações do centro do grupo $SU(N)$, observada na rede. Basicamente, vórtices de centro são defeitos tais que a variável de loop de Wilson ganha um elemento de centro $Z(N)$ quando o defeito for enlaçado por um loop de Wilson, caso contrário o loop de Wilson permanece inalterado. Em 3D (4D), vórtices de centro são defeitos localizados em cordas 1-dimensionais (superfícies 2-dimensionais) fechadas que podem ser enlaçadas por loops. Para um vórtice com espessura essas propriedades são válidas para loops de Wilson passando a uma certa distância mínima δ do defeito.

Consideremos, por exemplo,

$$A_\mu^a T^a = \frac{1}{g} \partial_\mu \varphi \delta^{a3} T^a, \quad (5.1)$$

para $\rho > \delta$, e uma configuração diferente para $\rho < \delta$, que contribui de forma não-trivial para ação de Yang-Mills. ϕ e ρ correspondem as coordenadas polares entorno da corda formada pelo eixo z, onde o vórtice está localizado.

Se um loop \mathcal{C} , passando a uma distância maior que δ do vórtice de centro, for considerado, o loop de Wilson,

$$W(\mathcal{C}) = (1/2) \text{tr} P \exp(i g \oint dx_\mu A_\mu^a \tau^a / 2), \quad (5.2)$$

retornará $W(\mathcal{C}) = \cos \pi = -1$, se o vórtice estiver enlaçado pelo loop, e $W(\mathcal{C}) = 1$, caso contrário.

Diferentemente dos monopolos que podem ser parametrizados como na eq.(4.9), vórtices de centro, mesmo na região externa ao núcleo, não podem ser introduzidos por uma transformação tipo “calibre” com topologia não-trivial. Isto pois, como vimos na seção 2.5, para gerar uma configuração de tipo (5.1), fora do interior do vórtice, seria necessário considerar uma transformação de $SU(2)$ parametrizada por $e^{i\varphi T_3}$. Porém, como este mapa não é univalente, teríamos,

$$\frac{i}{g} e^{i\varphi T_3} \partial_\mu e^{-i\varphi T_3} = \frac{1}{g} \partial_\mu \varphi \delta^{a3} T^a + \text{vortice ideal}, \quad (5.3)$$

onde o termo adicional é um vórtice ideal localizado no 3-volume onde a transformação é

descontínua.

Mostraremos agora que existe uma maneira alternativa de definir vórtices de centro em uma teoria de Yang-Mills sem precisar nos preocuparmos com os vórtices ideais. A idéia, de forma similar como foi feita com os monopolos, é representar os vórtices de centro como defeitos da base local do espaço de cor.

Afim de introduzir tais vórtices de centro, seguiremos a prescrição contida na referência [24] que consiste em incluir um novo setor V associado aos vórtices. Isso pode ser feito simplesmente estendendo a classe de transformações (4.9), $U \rightarrow UV$, definindo uma nova base \hat{n}_a ($a = 1, 2, 3$), tal que

$$(VU)T^a(VU)^{-1} = VUT^aU^{-1}V^{-1} = \hat{n}_a \cdot \vec{T}. \quad (5.4)$$

$$\hat{n}_a = R(VU)\hat{e}_a = R(V)R(U)\hat{e}_a = R(V)\hat{m}_a, \quad (5.5)$$

onde \hat{m}_a foi a base utilizada para representar anteriormente só os monopolos (veja eq.(4.11)).

A propriedade que define $V \in SU(2)$ é tal que V não seja univalente ao longo de qualquer loop fechado. Quando um vórtice fechado é enlaçado por um caminho, temos que

$$V_f = e^{iq\pi} V_i, \quad (5.6)$$

onde $q = 1$ ou $q = 0$, dependendo se o vórtice estiver ou não enlaçado.

Por exemplo, podemos escolher V induzindo uma rotação que mantenha \hat{m} invariante,

$$V = e^{-i\gamma_v \hat{m} \cdot \vec{T}}, \quad (5.7)$$

onde γ_v muda de 2π quando passado entorno do vórtice uma vez. Também podemos escrever,

$$VU = e^{-i\gamma_v UT_3 U^{-1}} U = UV_3, \quad , \quad V_3 = e^{-i\gamma_v T_3}. \quad (5.8)$$

Com a parametrização dada pelas eqs. (5.5) e (5.7), temos,

$$\hat{n}_a = R_m(\gamma_v) \hat{m}_a \quad , \quad R_m(\gamma_v) = e^{\gamma_v \hat{m} \cdot \vec{M}}, \quad (5.9)$$

ou seja,

$$\hat{n} = \hat{m} \quad , \quad h_{\mu\nu}^{(n)} = h_{\mu\nu}^{(m)}, \quad (5.10)$$

e usando a eq. (4.21),

$$C_\mu^{(n)} = -\frac{1}{g} R_m \hat{m}_1 \cdot [R_m(\partial_\mu \hat{m}_2) + (\partial_\mu R_m) \hat{m}_2] = C_\mu^{(m)} + C_\mu^{(v)}, \quad (5.11)$$

$$C_\mu^{(m)} = -\frac{1}{g}\hat{m}_1 \cdot \partial_\mu \hat{m}_2 \quad , \quad C_\mu^{(v)} = -\frac{1}{g}\hat{m}_1 \cdot (R_m^{-1} \partial_\mu R_m) \hat{m}_2 = \frac{1}{g} \partial_\mu \gamma_v. \quad (5.12)$$

Desta forma, $C_\mu^{(v)}$ nos fornece uma configuração de vórtice, sem o vórtice ideal, pois R_m é sempre univalente ao longo de qualquer loop fechado.

Nesta descrição, monopolos e vórtices de centro estão naturalmente unificados. É preciso ter em mente que, do ponto de vista das transformações de calibre, os vórtices de centro e os defeitos de Dirac associados aos monopolos são bem diferentes. Por exemplo, em 3D, para uma corda de Dirac fechada, as componentes \hat{n}_1 e \hat{n}_2 rotacionam duas vezes quando seguimos um caminho que enlaça essa corda. Todavia, defeitos de Dirac não são observáveis, como verificamos na seção 4.6, eles podem ser mudados por uma transformação de calibre singular. Porém, mesmo que esta transformação seja singular, esta pertence ao setor topológico trivial de $SU(2)$ uma vez que pode ser continuamente deformada na identidade. No caso dos vórtices de centro fechados, \hat{n}_1 e \hat{n}_2 rotacionam apenas uma vez quando percorrido um loop que enlaça o vórtice, não podendo ser associado à uma transformação não-trivial.

A função de partição nesta representação pode ser obtida da mesma forma como foi feita na seção 4.5, levando em conta agora o fato que estamos representando os campos de calibre em uma base local \hat{n}_a induzida pelas transformações VU na forma mostrada pela eq.(5.4). Vamos agora nos restringir a teorias em três dimensões Euclidianas, onde a função de partição é dada por

$$Z_{YM} = \int [\mathcal{D}\lambda][\mathcal{D}\Psi] e^{-S_c - \int d^3x \frac{1}{2} \lambda_\mu \lambda_\mu} e^{i \int d^3x [\lambda_\mu k_\mu + A_\mu (\epsilon_{\mu\nu\rho} \partial_\nu \lambda_\rho - J_\mu^c)]} Z_{v,m}. \quad (5.13)$$

Aqui separamos o setor de defeitos, $Z_{v,m}$, do restante da função de partição definindo

$$Z_{v,m} = \int [Dm][Dv] e^{i \int d^3x \lambda_\mu d_\mu}. \quad (5.14)$$

A medida funcional $[Dm][Dv]$, representa a integração sobre o ensemble de cadeias de instantons e será especificada na próxima seção. Com relação à d_μ , este está concentrado nos defeitos e é obtido das equações,

$$h_\mu = \tilde{h}_\mu + d_\mu, \quad (5.15)$$

$$h_\mu = -\frac{1}{2g} \epsilon_{\mu\nu\rho} \hat{n} \cdot (\partial_\nu \hat{n} \times \partial_\rho \hat{n}) \quad , \quad \tilde{h}_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho} \partial_\nu C_\rho \quad , \quad C_\mu = -\frac{1}{g} \hat{n}_1 \cdot \partial_\mu \hat{n}_2. \quad (5.16)$$

Como exemplo, para um par instanton/anti-instanton correlacionado com vórtices de

centro, temos,

$$d_\mu = d_\mu^{(1)} + d_\mu^{(2)} \quad , \quad d_\mu^{(\alpha)} = \frac{2\pi}{g} \int d\sigma \frac{dx_\mu^\alpha}{d\sigma} \delta^{(3)}(x - x^\alpha(\sigma)). \quad (5.17)$$

Onde, $x^\alpha(\sigma)$, $\alpha = 1, 2$, é um par de linhas de vórtices de centro com as mesmas extremidades localizadas em x^+ , x^- , onde os instantons e anti-instantons estão localizados, portanto verifica-se,

$$\partial_\mu d_\mu^{(\alpha)} = \frac{2\pi}{g} (\delta^{(3)}(x - x^+) - \delta^{(3)}(x - x^-)). \quad (5.18)$$

5.2 Ensemble de cadeia de instantons

Uma vez que introduzimos os instantons e vórtices de centro na teoria, precisamos entender como a sua correlação se manifesta na estrutura dos diferentes termos da função de partição. Para começar a lidar com a integração sobre o ensemble de defeitos, antes de mais nada, escrevemos então a função de partição para a cadeia de instantons na forma,

$$Z_{v,m} = \int [\mathcal{D}\phi] e^{-S_\phi} \sum_n Z_n$$

$$Z_n = \int [\mathcal{D}m]_n [\mathcal{D}v]_n \exp \left[i \frac{2\pi}{g} \sum_{k=1}^{2n} \int_0^{L_k} ds \dot{x}_\alpha^{(k)} \lambda_\alpha(x^{(k)}) - S_d \right], \quad (5.19)$$

$$S_d = \sum_{k=1}^{2n} \int_0^{L_k} ds \left[\mu + \frac{1}{2\kappa} \dot{u}_\alpha^{(k)} \dot{u}_\alpha^{(k)} + \phi(x^{(k)}) \right]. \quad (5.20)$$

A integração n denota o número de pares de instantons e anti-instantons. Vórtices de centro estão conectados em pares aos objetos pontuais, portanto, para uma dada configuração de defeitos, com um certo n , o número de linhas de vórtices de centro é $2n$. Na fórmula anterior esses objetos de tipo corda foram denotados por $x^{(k)}(s)$, $k = 1, \dots, 2n$. Para cada vórtice de centro s denota o elemento de arco que vai de 0 à L_k , o comprimento total do vórtice (linha de mundo). Em termos do vetor tangente $u^{(k)}(s) = \dot{x}^{(k)}(s)$, a condição que define este parâmetro é $u_\alpha^{(k)} u_\alpha^{(k)} = 1$, onde α é somado sobre $\alpha = 1, 2, 3$ (sem somar sobre k).

Reparem que adicionamos uma ação fenomenológica na eq.(5.19) associada ao ensemble de configurações. Nesta ação, eq.(5.20), temos termos contendo parâmetros dimensionais que representam certas propriedades físicas associadas as cadeias de vórtices. O primeiro termo em S_d descreve a tensão dos vórtices de centro, em outras palavras, pode ser interpretado como um certo custo energético para “esticar” a linha de vórtice. O

segundo termo, é um termo típico de curvatura e nos fornece a informação de quão rígida é o vórtice em um certo ponto, ou mesmo o custo energético para curvar-lo. Note que usando a densidade $\rho(x) = \sum_k \int_0^{L_k} ds \delta(x - x^{(k)}(s))$, se a integral de trajetória sobre ϕ for feita com,

$$e^{-S_\phi} = e^{\frac{1}{2} \int d^3x d^3x' \phi(x) V^{-1}(x, x') \phi(x')},$$

então o fator de interação entre os vórtices de centro será obtido,

$$e^{-\frac{1}{2} \int d^3x d^3x' \rho(x) V(x, x') \rho(x')} \quad , \quad \int d^3y V^{-1}(x, y) V(y, z) = \delta(x - z). \quad (5.21)$$

Em particular, a escolha $V(x - y) = (1/\zeta) \delta(x - y)$,

$$e^{-S_\phi} = e^{\int d^3x \frac{\zeta}{2} \phi^2}, \quad (5.22)$$

corresponde a uma interação de contato, ou seja, essa interação impede que as linhas de vórtice fiquem superpostas. Para um certo n , a medida $[\mathcal{D}m]_n = \xi^{2n} d^3x_1 \dots d^3x_{2n}$ representa a integral sobre as posições dos $2n$ instantons e anti-instantons. O parâmetro ξ tem dimensão de massa, sendo necessário para concordância das dimensões dos diferentes termos. Para uma certa configuração de posições dos instantons, a medida de integração $[\mathcal{D}v]_n$ inclui a soma sobre todas as diferentes maneiras não equivalentes de conectá-los com vórtices de centro, com o fator de simetria associado. Além disso, para cada um dos $2n$ vórtices de centro, esta medida contém a integral de trajetória sobre todas as linhas-de-mundo $[Dx^{(k)}(s)]$ com extremos fixos, e comprimentos fixos L_k , seguidos pela integral sobre os comprimentos $\int_0^\infty dL_k$.

Portanto, da eq.(5.19), fica claro que todos os possíveis termos na função de partição dependem de um bloco fundamental, o peso associado aos vórtices de centro com extremos fixos,

$$Q(x, x_0) = \int_0^\infty dL e^{-\mu L} q(x, x_0, L),$$

$$q(x, x_0, L) = \int [Dx(s)] e^{-\int_0^L ds \left[\frac{1}{2\kappa} \dot{u}_\alpha \dot{u}_\alpha + \phi(x(s)) - i \frac{2\pi}{g} u_\alpha(s) \lambda_\alpha(x(s)) \right]}, \quad (5.23)$$

onde $[Dx(s)]$ representa a integral sobre todos os caminhos $x(s)$ com comprimento fixo L , e extremos em x_0 e x .

Para um par instanton/anti-instanton (fig. 15), temos a contribuição:

$$Z_1 = \frac{1}{2!} \int d^3x_1 d^3x_2 \xi^2 [Q_{x_2, x_1}^2 + Q_{x_1, x_2}^2].$$

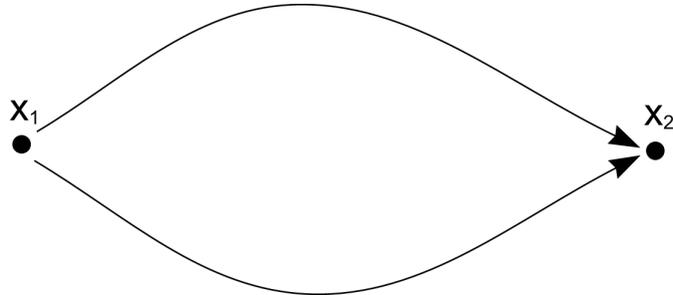


Figura 15: Instanton/anti-instanton correlacionado com um par de vórtices de centro

Para dois pares instanton/anti-instanton, temos seis diferentes maneiras de distribuir instantons e anti-instantons nas posições x_1, x_2, x_3 e x_4 . Essas posições podem ser unidas de três formas distintas, sendo que duas dessas são desconectadas e uma conectada (fig. 16).

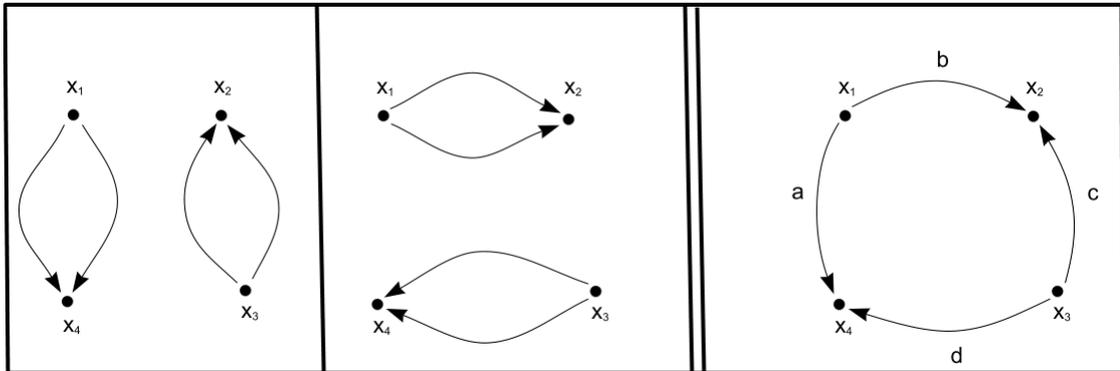


Figura 16: Diferentes maneiras de correlacionar 2 pares de instantons e anti-instantons com pares de vórtices de centro.

Note que para configurações conectadas temos que considerar alguns aspectos de simetria. Por exemplo, podemos gerar uma nova contribuição pela troca dos vórtices a, b , assim como os vórtices c, d , ou seja, existem $2! \cdot 2! = 4$ maneiras de efetuar uma certa configuração conectada. Levando em conta esses fatores de simetria apropriados, a contribuição

de dois pares tem a forma,

$$Z_2 = \frac{1}{4!} \int d^3x_1 d^3x_2 d^3x_3 d^3x_4 \xi^4 [Q_{x_4,x_1}^2 Q_{x_3,x_2}^2 + Q_{x_4,x_2}^2 Q_{x_3,x_1}^2 + 4Q_{x_4,x_2} Q_{x_4,x_1} Q_{x_3,x_2} Q_{x_3,x_1} + \text{permutations}] .$$

Podemos continuar analisando os diferentes termos na expansão, levando sempre em conta os fatores de simetria associados a cada configuração, e perceber que todos os termos podem ser obtidos de um funcional gerador da forma,

$$\begin{aligned} 1 + Z_1 + Z_2 + \dots = & \left\{ 1 + \int d^3x_1 I\left(\frac{\delta}{\delta C(x_1)}\right) + \frac{1}{2!} \int d^3x_1 d^3x_2 I\left(\frac{\delta}{\delta C(x_1)}\right) I\left(\frac{\delta}{\delta C(x_2)}\right) + \right. \\ & + \frac{1}{3!} \int d^3x_1 d^3x_2 d^3x_3 I\left(\frac{\delta}{\delta C(x_1)}\right) I\left(\frac{\delta}{\delta C(x_2)}\right) I\left(\frac{\delta}{\delta C(x_3)}\right) + \\ & + \frac{1}{4!} \int d^3x_1 d^3x_2 d^3x_3 d^3x_4 I\left(\frac{\delta}{\delta C(x_1)}\right) I\left(\frac{\delta}{\delta C(x_2)}\right) I\left(\frac{\delta}{\delta C(x_3)}\right) I\left(\frac{\delta}{\delta C(x_4)}\right) + \\ & \left. + \dots \right\} e^{-\int d^3x d^3y \bar{K}(x) Q(x,y) K(y)} \Big|_{C=0} . \end{aligned} \quad (5.24)$$

Tendo definido o operador,

$$I\left(\frac{\delta}{\delta C(x)}\right) = \xi \left(\left[\frac{\delta}{\delta \bar{K}(x)} \right]^2 + \left[\frac{\delta}{\delta K(x)} \right]^2 \right), \quad (5.25)$$

onde $C(x)$ representa o conjunto de fontes $K(x)$, $\bar{K}(x)$. Isto pode ser verificado realizando derivadas funcionais calculadas em $K(x) = 0$, $\bar{K}(x) = 0$. Em outras palavras, podemos escrever,

$$Z_{v,m} = \int [\mathcal{D}\phi] e^{-S_\phi} e^{\int d^3x I\left(\frac{\delta}{\delta C(x)}\right)} e^{-\int d^3x d^3y \bar{K}(x) Q(x,y) K(y)} \Big|_{C=0} . \quad (5.26)$$

Note que essa expansão está consistente com o que esperamos para as contribuições de cada termo do ensemble. Vejam que Z_1 , se aplicarmos a derivada funcional (5.25) na exponencial do funcional (5.26) e tomarmos as fontes iguais a zero, é nulo, como deveria ser pois apenas setores de pares de instantons contribuirão de maneira não trivial no cálculo de Z . Já a contribuição seguinte, Z_2 pode ser facilmente calculada aplicando

novamente as derivadas funcionais, definindo

$$\begin{aligned}
\langle \bar{K}Q \rangle_i &\equiv - \int d^3x \bar{K}(x) Q(x, x_i) e^{-\int d^3x d^3y \bar{K}(x) Q(x,y) K(y)}, \\
\langle QK \rangle_i &\equiv - \int d^3y Q(x_i, y) K(y) e^{-\int d^3x d^3y \bar{K}(x) Q(x,y) K(y)}, \\
I_i &\equiv \xi \left(\left[\frac{\delta}{\delta \bar{K}(x_i)} \right]^2 + \left[\frac{\delta}{\delta K(x_i)} \right]^2 \right),
\end{aligned} \tag{5.27}$$

temos que

$$\begin{aligned}
Z_2 &= \frac{1}{2!} \int d^3x_1 d^3x_2 I_1 I_2 e^{-\int d^3x d^3y \bar{K}(x) Q(x,y) K(y)} \Big|_{C=0} \\
&= \frac{\xi}{2!} \int d^3x_1 d^3x_2 I_1 \left[(\langle QK \rangle_2 \langle QK \rangle_2 + \langle \bar{K}Q \rangle_2 \langle \bar{K}Q \rangle_2) e^{-\int d^3x d^3y \bar{K}(x) Q(x,y) K(y)} \Big|_{C=0} \right].
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Dessa forma,

$$Z_2 = \frac{\xi^2}{2!} \int d^3x_1 d^3x_2 \left(Q^2(x_2, x_1) + Q^2(x_1, x_2) \right). \tag{5.29}$$

Seguindo o cálculo dos demais termos da expansão, pode-se verificar que todos os termos de ordem ímpar são nulos, como deveria de se esperar uma vez que apenas pares de instantons e anti-instantons contribuem não trivialmente no cálculo da função de partição. Dessa forma, fica claro que para obter uma teoria efetiva de vórtices, é essencial ter uma representação de campos para o fator Q , que permita realizar a integral sobre ϕ .

5.3 Peso estatístico para um único vórtice de centro

A discussão sobre como representar a integral de trajetórias sobre um objeto de tipo corda com rigidez não é algo simples mesmo no caso onde não há interações. Isto é usualmente realizado confiando na suposição de que a rigidez é equivalente a considerar um tamanho efetivo para os monômeros (segmentos de igual comprimento que formam um polímero) no cálculo da cadeia aleatória, pois este tende a endireitar localmente a cadeia. Isto tem suporte em cálculos complexos dos diferentes momenta associados as respectivas distribuições de probabilidade [36]. Por simplicidade, podemos partir de um modelo para cadeias aleatórias não interagentes, cuja probabilidade “end-to-end”, que é a probabilidade de se obter uma configuração com um extremo fixado em \mathbf{x} uma vez que

o outro extremo está fixado em \mathbf{x}_0 , é dada por,

$$q_N(x, x_0) = \prod_{n=1}^N \left[\int (d^3 \Delta x_n) \frac{1}{4\pi a^2} \delta(|\Delta x_n| - a) \right] \delta(x - x_0 - \sum_{n=1}^N \Delta x_n),$$

que para N muito grande, esta probabilidade se comporta como,

$$q_N(x, x_0) \approx \left(\frac{3}{2\pi N a^2} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{3(x - x_0)^2}{2N a^2} \right]. \quad (5.30)$$

Note que o limite do contínuo com $Na = L$, essencial em nossa descrição, não pode ser implementado aqui. Contudo, considerando um tamanho efetivo para os monômeros, como mencionamos anteriormente $a \rightarrow a_{\text{eff}}$, e substituindo $Na^2/3 \rightarrow L/\alpha$, $\alpha = 3/a_{\text{eff}}$, resulta,

$$q(x, x_0, L) = \left(\frac{\alpha}{2\pi L} \right)^{3/2} e^{-\frac{\alpha}{2L}(x-x_0)^2} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{-\frac{L}{2\alpha} k^2} e^{ik \cdot (x-x_0)}. \quad (5.31)$$

Ao integrar sobre os diferentes comprimentos da cadeia, com peso dado por $e^{-\mu L}$, como bem se sabe, $Q(x, x_0)$ torna-se a função de Green de uma teoria de campos livres,

$$Q(x, x_0) = 2\alpha \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{e^{ik \cdot (x-x_0)}}{k^2 + m^2}, \quad m^2 = 2\alpha\mu, \quad (5.32)$$

$$(-\nabla^2 + m^2) Q(x, x_0) = 2\alpha \delta(x - x_0). \quad (5.33)$$

Estamos interessados agora em apresentar uma extensão desta propriedade para o caso onde as interações escalares com ϕ e interações vetoriais com λ_μ estejam presentes, como é o caso da integral de trajetória sobre um único vórtice de centro na eq.(5.23). Neste caso, os momentos da distribuição para fontes externas gerais não podem ser obtidos de uma forma fechada. O que podemos fazer é obter uma representação para $Q(x, x_0)$ utilizando as técnicas [35] para polímeros semi-flexíveis interagentes adaptadas para extremos fixos e comprimentos variáveis,

$$Q(x, x_0) = \int_0^\infty dL e^{-\mu L} \int \frac{d^2 u_0}{4\pi} \frac{d^2 u}{4\pi} q(x, u, x_0, u_0, L), \quad (5.34)$$

onde $q(x, u, x_0, u_0, L)$ é a função de correlação para o vórtice de centro com comprimento, posições e vetores tangentes nas extremidades fixos (veja fig 17). Os diferenciais $d^2 u_0$, $d^2 u$ integram em uma esfera unitária S^2 e são normalizados tal que, $\int d^2 u_0 = \int d^2 u = 4\pi$.

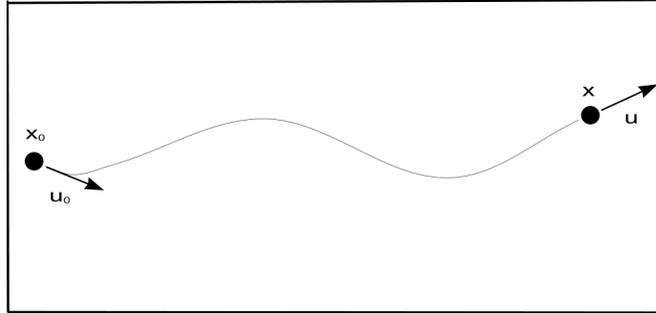


Figura 17: Vórtices interagentes com extremos e orientações nas extremidades fixos são associados com o peso $q(x, u, x_0, u_0, L)$.

O passo seguinte é gerar uma versão discretizada de $q(x, u, x_0, u_0, L)$ [33]. Isso é feito utilizando uma condição inicial $q_0(x, u, x_0, u_0, L)$ e uma relação recursiva apropriada que relaciona $q_{j+1}(x, u, x_0, u_0, L)$ com $q_j(x, u, x_0, u_0, L)$, levando no passo N-ésimo à distribuição,

$$q_N(x, u, x_0, u_0) = \int d^3x_1 d^2u_1 \dots d^3x_{N-1} d^2u_{N-1} e^{-\sum_{i=0}^N \omega(x_i, u_i)} \times \prod_{j=0}^{N-1} \phi(u_{j+1} - u_j) \delta(x_{j+1} - x_j - u_{j+1} \Delta L), \quad (5.35)$$

onde $x = x_N$, $u = u_N$ e $\omega(x, u)$ contém toda a informação sobre as interações escalar e vetorial.

Feito isso deveremos escolher apropriadamente a distribuição angular $\phi(u - u')$ que descreva a rigidez da cadeia. A função mais simples que exibe tais propriedades é uma Gaussiana,

$$\phi(u - u') = \mathcal{N} e^{-\frac{1}{2\kappa} \Delta L \left(\frac{u - u'}{\Delta L} \right)^2} \quad (5.36)$$

A função (5.35) é exatamente a discretização da função de correlação $q(x, u, x_0, u_0, L)$ correspondente a uma cadeia de N segmentos (monômeros). Tomando o limite $N \rightarrow \infty$ de $q_N(x, u, x_0, u_0)$ obtemos $q(x, u, x_0, u_0, L)$. Usando as mesmas relações de recursividade, pode-se relacionar $q_N(x, u, x_0, u_0)$ com $q_{N+1}(x, u, x_0, u_0)$. desta maneira, assumindo que $\phi(u - u')$ é localizado, e realizando uma expansão em torno de $u' \approx u$, obtém-se uma equação de difusão (detalhes na referências [35], [80]),

$$\partial_L q(x, u, x_0, u_0, L) = \left[\frac{\kappa}{2} \nabla_u^2 - \phi(x) - u \cdot D_x \right] q(x, u, x_0, u_0, L), \quad (5.37)$$

onde, ∇_u^2 é o operador Laplaciano na esfera unitária, $D_x = \nabla_x - i\frac{2\pi}{g}\lambda(x)$.

De posse da função $q(x, u, x_0, u_0, 0)$ é possível obter $Q(x, x_0)$ dado pela eq.(5.34), realizando uma sequência de integrações que consiste em primeiramente integrar sobre $\frac{d^2 u_0}{4\pi}$ e sem seguida integrar, juntamente com o fator de Boltzman $e^{-\mu L}$, sobre os diferentes tamanhos da cadeia, verifica-se que o resultado obtido é uma solução da equação,

$$\left[-\frac{\kappa}{2}\nabla_u^2 + \phi(x) + u \cdot D_x + \mu \right] Q(x, u, x_0) = \delta(x - x_0). \quad (5.38)$$

Finalmente, a função $Q(x, x_0)$ desejada é obtida realizando um última integração sobre $\frac{d^2 u}{4\pi}$. Como u está localizada sobre uma casca esférica, pode-se expandir a função $Q(x, u, x_0)$ em termos de autofunções do operador de momento angular,

$$Q(x, u, x_0) = \sum_{l=0} \mathcal{Q}_l(x, u, x_0). \quad (5.39)$$

Portanto, a função $Q(x, x_0)$ desejada é dada pela componente $l = 0$, $\mathcal{Q}_0(x, u, x_0)$ (independente de u). Se assumirmos o limite semi-flexível, ou seja, considerando as componentes com $l \geq 2$ muito pequenas então obtém-se (veja cálculo explícito na ref.[33]),

$$\left[-\frac{1}{3\kappa}D^2 + \phi(x) + \mu \right] Q(x, x_0) = \delta(x - x_0). \quad (5.40)$$

Este resultado fornece a contribuição da integração sobre uma linha de vórtice interagente, com extremos fixos, que contém as propriedades físicas parametrizadas por (5.20). Esse será o nosso bloco fundamental na construção de cada um dos termos na expansão da função de partição.

5.4 A teoria de campos efetiva

Como consequência do que foi discutido na seção anterior, o fator dependente de Q na função de partição $Z_{v,m}$ na eq.(5.26) pode ser expresso em termos de um campo complexo v ,

$$e^{-\int d^3x d^3y \bar{K}(x)Q(x,y)K(y)} = \det \hat{O} \int [\mathcal{D}v][\mathcal{D}\bar{v}] e^{-S_v - \int d^3x [\bar{K}v + \bar{v}K]}, \quad (5.41)$$

cuja ação é dada por

$$S_v = \int d^3x \bar{v} \hat{O} v \quad , \quad \hat{O} = \left[-\frac{1}{3\kappa}D^2 + \phi(x) + \mu \right]. \quad (5.42)$$

Desta forma, obtemos,

$$\begin{aligned} Z_{v,m} &= \int [\mathcal{D}\phi] e^{-S_\phi} e^{\int d^3x I(\frac{\delta}{\delta C(x)})} \det \hat{O} \int [\mathcal{D}v][\mathcal{D}\bar{v}] e^{-S_v - \int d^3x [\bar{K}v + \bar{v}K]} \Big|_{C=0} \\ &= \int [\mathcal{D}v][\mathcal{D}\bar{v}] \int [\mathcal{D}\phi] e^{-S_\phi} \det \hat{O} e^{-S_v - \int d^3x \xi [v^2 + \bar{v}^2]}, \end{aligned} \quad (5.43)$$

Afim de obter uma teoria efetiva, ainda temos que realizar a integração funcional sobre ϕ . Porém, note que o determinante $\det \hat{O}$ é dependente de ϕ . Dessa forma, precisamos olhar esse ponto com mais cautela. Como de costume, podemos expressar $\det \hat{O} = e^{\text{tr} \ln \hat{O}}$ e notar que $\text{tr} \ln \hat{O} = F[\phi, \lambda]$ é um funcional que deve ser necessariamente simétrico sob transformações $\lambda_\mu \rightarrow \lambda_\mu + \partial_\mu \omega$. Como não ocorre nenhuma quebra na simetria de paridade, e ϕ é real, F deve depender de λ_μ através da combinação $\epsilon_{\mu\nu\rho} \partial_\nu \lambda_\rho$. Desta forma, podemos expressar,

$$F[\phi, \lambda] = F_\phi[\phi] + F_\lambda[\epsilon\partial\lambda] + F_{\text{int}}[\phi, \epsilon\partial\lambda]. \quad (5.44)$$

Reparem que $F_{\lambda[\epsilon\partial\lambda]}$ é invariante de calibre. Isto pode ser facilmente demonstrado representando F_λ na forma

$$F_\lambda[\epsilon\partial\lambda] = \int \mathcal{D}\bar{\xi} \mathcal{D}\xi e^{-\int d^3x \bar{\xi} [-\frac{1}{3\kappa} D^2(\lambda) + \mu] \xi}. \quad (5.45)$$

Realizando a transformação de variáveis

$$\begin{aligned} \xi &\rightarrow \xi' = e^{i\frac{4\pi}{g}\alpha(x)} \xi, \\ \bar{\xi} &\rightarrow \bar{\xi}' = \bar{\xi} e^{-i\frac{4\pi}{g}\alpha(x)}. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Desta forma, temos,

$$F_\lambda[\epsilon\partial\lambda] = \int \mathcal{D}\bar{\xi}' \mathcal{D}\xi' e^{-\int d^3x \bar{\xi}' [-\frac{1}{3\kappa} D^2(\lambda + \partial\alpha) + \mu] \xi'}. \quad (5.47)$$

Afim de estruturar a expansão em derivadas, contendo termos locais, inicialmente supomos $\mu, \kappa \neq 0$. A expansão para $F_\phi[\phi] = \ln \det [-\frac{1}{3\kappa} \nabla^2 + \mu + \phi(x)]$, irá começar com o termo de potencial efetivo, sem nenhuma derivada de ϕ ,

$$F_\phi[\phi] = \int d^3x U_{\text{eff}}(\phi) + \dots, \quad (5.48)$$

$$\begin{aligned}
U_{\text{eff}}(\phi) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln [(k^2/3\kappa) + \mu + \phi(x)] \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln [(k^2/3\kappa) + \mu] + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \ln \left[1 + \frac{\phi}{(k^2/3\kappa) + \mu} \right] \\
&= A + B\phi - \frac{\phi^2}{2}I_0 + \frac{\phi^3}{3}I_1 - \frac{\phi^4}{4}I_2 + \dots
\end{aligned} \tag{5.49}$$

onde A e $B = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(k^2/3\kappa) + \mu}$ são divergentes, e I_n , $n = 0, 1, \dots$ são convergentes e dados por,

$$I_n = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{(k^2/3\kappa) + \mu} \right]^{n+2} = \frac{\kappa^{\frac{3}{2}}}{\mu^{\frac{1}{2}+n}} \int \frac{d^3u}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{1 + u^2/3} \right]^{n+2}. \tag{5.50}$$

A parte dominante originada de $F_\lambda[\epsilon\partial\lambda] = \ln \det \left[-\frac{1}{3\kappa}D^2 + \mu \right]$ será um termo de Maxwell $\propto \int d^3x \frac{1}{2m^2} f_\mu f_\mu$, com $f_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho} \partial_\nu \lambda_\rho$, e $m^2 = \kappa\mu$. Após incluir um termo linear em ϕ , na ação S_ϕ e renormalizar a teoria, a integral funcional sobre ϕ pode ser realizada pela substituição,

$$e^{-S_\phi + Tr \ln \hat{O}} \rightarrow e^{\int d^3x \left[B'\phi + \frac{\zeta'}{2}\phi^2 + \frac{1}{2m^2}f^2 \right]} \tag{5.51}$$

onde $\zeta' = \zeta - I_0$, e mantivemos os termos dominantes na expansão para μ grande. Completando os quadrados, podemos realizar a integração sobre a parte dependente de ϕ na eq.(5.43). A expressão final para a função de partição dos instantons e vórtices de centro correlacionados passa a ser,

$$Z_{v,m} = \mathcal{N} \int [\mathcal{D}\bar{v}][\mathcal{D}v] e^{-\int d^3x \left\{ \bar{v} \left[-\frac{1}{3\kappa}D^2 + \mu \right] v + \xi [v^2 + \bar{v}^2] + \frac{1}{2\zeta'} (\bar{v}v - B')^2 + \frac{1}{2m^2} f^2 \right\}}, \tag{5.52}$$

A obtenção desta função de partição é o resultado principal desta parte do trabalho. Combinando as equações (5.52) e (5.13), obtemos o modelo previsto nas referências [24, 84], onde o setor não-perturbativo dos instantons e vórtices de centro correlacionados são representados por um campo de vórtice efetivo,

$$\begin{aligned}
Z_{YM}^{\text{eff}} &= \int [\mathcal{D}\lambda][\mathcal{D}\Psi][\mathcal{D}v][\mathcal{D}\bar{v}] e^{-S_c} \\
&\times e^{-\int d^3x \left\{ \frac{1}{2}\lambda_\mu \lambda_\mu - i\lambda_\mu k_\mu + iA_\mu (J_\mu^c - \epsilon_{\mu\nu\rho} \partial_\nu \lambda_\rho) + \bar{v} \left[-\frac{1}{3\kappa}D^2 + \mu \right] v + \xi [v^2 + \bar{v}^2] + \frac{1}{2\zeta'} (\bar{v}v - B')^2 + \frac{1}{2m^2} f^2 \right\}},
\end{aligned} \tag{5.53}$$

que pode ser reduzido mantendo os termos relevantes quando realizada a integração funcional sobre o setor $[\mathcal{D}\Psi]$. Esta parte do procedimento pode ser vista na ref. [81]). Assim,

chegamos ao modelo efetivo,

$$Z^{\text{eff}} = \int [\mathcal{D}\lambda][\mathcal{D}v][\mathcal{D}\bar{v}] e^{-\int d^3x \left\{ \frac{1}{2} f_\mu \hat{K} f_\mu + \frac{\gamma}{2} \lambda_\mu \lambda_\mu + \bar{v} \left[-\frac{1}{3\kappa} D^2 + \mu \right] v + \xi [v^2 + \bar{v}^2] + \frac{1}{2\zeta'} (\bar{v}v - B')^2 \right\}}, \quad (5.54)$$

onde \hat{K} é um operador diferencial que depende do Laplaciano ∂^2 , e contém um termo de Maxwell, $\hat{K} = \frac{1}{m^2} + \dots$.

O setor de vórtices nas eqs. (5.53) e (5.54) correspondem a uma generalização do modelo de 't Hooft [3] onde um acoplamento adicional com o campo dual λ_μ , que representa o setor carregado das teorias de Yang-Mills, surgiu naturalmente dos cálculos. Note que o termo de Maxwell para o campo λ_μ tem contribuições oriundas somente do determinante do operador \hat{O} (5.44). Se admitimos que m^2 é suficientemente grande ao ponto de suprimir o setor λ_μ , estaremos suprimindo a contribuição do setor carregado. Essa é a hipótese de dominância Abeliã assumida no modelo de 't Hooft.

O ponto interessante sobre esta generalização é que permite relacionar diferentes fases do modelo de vórtice com a possibilidade ou não de realizar transformações grandes duais [84], permitindo desacoplar as superfícies de Wilson ou tornando-as variáveis a serem integradas juntamente com os outros campos, respectivamente.

Conclusões

A questão do confinamento de cor em teorias não-Abelianas ainda é um dos grandes problemas em aberto na Física. Apesar dos grandes esforços realizados nessa direção, ainda existem muitos aspectos que precisam ser devidamente explorados.

Do ponto de vista experimental, não há nenhuma evidência de partículas com carga de cor (quarks e gluons) em estados assintóticos, o que indica que esses objetos estão permanentemente confinados formando hadrons. Por outro lado sabemos que as interações entre quarks e gluons são descritas por uma teoria de campos de calibre não-Abelianos, ou seja, uma teoria de Yang-Mills. Porém como sabemos, uma teoria de Yang-Mills não contém, a priori, parâmetros dimensionais dos quais a tensão de uma corda confinante possa depender.

Belíssimos trabalhos sugerem que este comportamento poderia ser explicado analisando as propriedades topológicas das teorias de Yang-Mills. Essas idéias vem ganhando cada vez mais importância com base em resultados obtidos em simulações na rede [4]-[6], [69], [70]. Um dos cenários mais conhecidos para explicar o confinamento de quarks é baseado nas idéias de 't Hooft sobre confinamento por supercondutividade dual [3]. Nesse cenário, o vácuo da teoria é formado essencialmente por condensados de objetos cromomagnéticos (monopolos, vórtices,...), comportando-se como uma espécie de supercondutor (de correntes cromomagnéticas) [86]. Em consequência, as cargas cromoeletricas estariam confinadas devido a formação de um tubo de fluxo cromoeletrico entre elas. As propriedades do potencial confinante estão estritamente ligadas a natureza dos objetos que condensam. Por exemplo, um modelo no qual o vácuo é constituído basicamente por um condensado de monopolos explicaria o Casimir-scaling [25]-[28] observado na rede para separações intermediárias dos quarks. Contudo, este modelo falha quando analisamos as propriedades do potencial confinante para grandes separações dos quarks. Nesse regime, resultados obtidos na rede mostram que a tensão da corda depende da representação do centro $Z(N)$ subgrupo de $SU(N)$ (N-ality) [29] e isso poderia ser explicado considerando um modelo onde vórtices de centro condensam formando a estrutura de vácuo da teoria.

Portanto, com base nessas evidências, podemos pensar que o vácuo da teoria é formado

por uma composição de condensados de monopolos e vórtices de centro e que dependendo da separação entre os quarks teríamos a dominância de um ou outro desses condensados. Um modelo que acomodasse ambas estruturas seria um bom candidato para explicar de forma completa o potencial confinante de quarks à baixas energias. Com o intuito de explorar esta idéia, buscamos obter um modelo efetivo em 3D, obtido a partir de uma teoria de Yang-Mills na presença de configurações de monopolos e vórtices de centro que formam cadeias. O modelo efetivo surge a partir de uma integração sobre um ensemble de defeitos desta teoria.

O primeiro passo dado consiste em tratar, ao nível quântico, os defeitos de Dirac que aparecem quando consideramos a presença de monopolos (em 4D) e instantons (em 3D). Em meu primeiro trabalho [34], descrito no capítulo 4 desta tese, realizamos um estudo cuidadoso para obtermos uma representação para a função de partição na qual somente aparecem as bordas dos defeitos de Dirac, onde se encontram os monopolos ou instantons. A forma como esses defeitos de Dirac se acoplam no integrando da função de partição não é trivial, o que faz com que esse tratamento seja bastante importante ao procurar um modelo efetivo considerando a presença de defeitos de tipo monopolo. Esse procedimento de eliminação dos defeitos de Dirac foi realizado no contexto da QED_3 compacta na presença de campos carregados e em Yang-Mills com grupo $SU(2)$ em $D = 4$.

No caso da QED_3 compacta introduzimos os defeitos da forma usual, adicionando um termo singular ao tensor dual de Maxwell na ação da teoria. Esse termo singular está localizado sobre uma corda de Dirac que conecta um par instanton/anti-instanton. Na primeira quantização, a não observabilidade da corda de Dirac implica a quantização da carga do elétron, condição que automaticamente desacopla as cordas de Dirac em favor das bordas nas probabilidades de transição. Todavia, como faço questão de enfatizar, do ponto de vista da segunda quantização, mostrar esse desacoplamento não é nada trivial. No caso de Yang-Mills com grupo $SU(2)$ em $4D$ introduzimos os monopolos utilizando uma representação para a teoria que consiste em usar uma certa base local do espaço de cor para decompor os campos de calibre. Essa base não é gerada de forma arbitrária e está relacionada com uma transformação singular U de $SU(2)$ com topologia não trivial. Essa decomposição dos campos de calibre é conhecida como decomposição de Cho-Fadeev-Niemi [17]-[23] e a sua grande vantagem é não exigir de antemão uma condição de fixação de calibre para introduzir monopolos. A forma como os defeitos (monopolos + superfície de Dirac) aparecem em Yang-Mills é similar a forma como (instantons + cordas de Dirac) aparecem na QED_3 . Em ambos os casos os defeitos se acoplam com um campo dual λ que está vinculado com o setor carregado das teorias. Contudo, a parte que se

acopla verdadeiramente aos defeitos de Dirac (cordas ou superfícies de Dirac) é a porção transversal do campo dual λ , desta forma conseguimos desacoplar a parte não física do restante. Afim de eliminar a porção não física, introduzimos através de uma transformação de calibre de $SU(2)$ singular mas com topologia trivial, um defeito de Dirac fechado. O argumento de eliminação dos graus de liberdade não físicos então consiste em mostrar que é sempre possível deformar continuamente esse defeito de Dirac a tal ponto que anule a contribuição da parte transversal de λ acoplada ao defeito. Esse argumento topológico de eliminação está descrito em detalhes na subseção 4.6.4.

Vale ressaltar que no caso da QED_3 compacta com campos carregados, se tivéssemos uma quebra espontânea de simetria $U(1)$, ao invés de uma corda de Dirac teríamos objetos físicos (vórtices de Nielsen-Olesen) ligando os instantons. Então, o argumento de eliminação proposto no trabalho não poderia ser aplicado uma vez que neste caso deve sempre existir uma correlação entre os campos carregados e a posição do vórtice. Isso pois o valor destes campos no centro do vórtice é necessariamente nulo. Neste caso, as transformações de calibre singulares não podem ser feitas e precisamos levar em conta toda a estrutura (vórtices+instantons) no cálculo da função de partição.

Continuando com o desenvolvimento dos objetivos enunciados no início deste capítulo, buscamos derivar uma teoria efetiva para Yang-Mills com grupo $SU(2)$ em $3D$ levando em conta configurações de instantons e vórtices de centro correlacionados. Para incluir o setor de vórtices, usamos uma extensão da representação de Cho-Faddev-Niemi [24] afim de incluir um setor associado aos vórtices de centro. Nesta representação, as configurações topológicas são associadas a defeitos de uma base local no espaço de cor, em particular, instantons e vórtices de centro aparecem correlacionados formando cadeias. Afim de integrar sobre o setor de defeitos e obter uma teoria efetiva para este modelo incluímos um termo puramente fenomenológico na ação, que contém as características físicas relevantes dos vórtices de centro, fenomenologia esta que foi inspirada em trabalhos de física de polímeros [35]. O modelo efetivo resultante é uma generalização do modelo efetivo proposto por 't Hooft [3] para uma teoria com simetria de centro $Z(N)$ global. A principal diferença é que, em nosso modelo, o campo que representa os vórtices aparece minimamente acoplado com o campo λ_μ . Se considerarmos que a massa associada ao campo λ_μ é muito grande, o setor carregado da teoria fica suprimido, obtendo a dominância Abelian e recuperando o mesmo modelo proposto por t'Hooft (cf. eq.(3.41)).

Este modelo efetivo é importante pois através dele pode-se discutir o tratamento correto para as superfícies de Wilson, como recentemente foi mostrado em [84]. Na fase

onde não há quebra espontânea de simetria $Z(2)$ global pode-se definir uma classe de transformações para λ_μ (transformações grandes duais). Estas são transformações que tem a forma de uma transformação de calibre, mas que estão associadas com uma fase que é descontínua na superfície de Wilson fechada que deseja ser acrescentada à superfície de Wilson inicial. Esta mudança na superfície é feita com o intuito de desacoplar as superfícies de Wilson em favor da sua borda, na representação do loop de Wilson, assim como foi feito nesta tese com os defeitos de Dirac. Por outro lado se o sistema se encontra na fase onde há quebra espontânea da simetria $Z(2)$ global, então as transformações grandes duais não podem ser realizadas e com isso as superfícies de Wilson deverão ser tratadas como variáveis dinâmicas do sistema e integradas. Nesta fase, as superfícies de Wilson se tornam observáveis, sinalizando uma lei da área e conseqüentemente, uma fase onde os quarks estão confinados.

Referências

- [1] F. Fucito, G. Martinelli, C. Omerob, G. Parisid, R. Petronzio and F. Rapuano, Nucl. Phys. **B210** (1982) 3.
- [2] A. Majumder and B. Müller, Phys. Rev. Lett. 105 (2010) 252002
- [3] G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B138** (1978) 1.
- [4] Z. F. Ezawa and A. Iwasaki, Phys. Rev. **D25** (1982) 2681.
- [5] L. Del Debbio, M. Faber, J. Greensite, S. Olejnik, Phys. Rev. **D55** (1997) 2298.
- [6] L. Del Debbio, M. Faber, J. Giedt, J. Greensite, and S. Olejnik, Phys. Rev. **D58** (1998) 094501.
- [7] P. de Forcrand and M. D'Elia, Phys. Rev. Lett. **82** (1999) 4582.
- [8] J. Greensite, Prog. Part. Nucl. Phys. **51** (2003) 1.
- [9] M. Engelhardt, M. Quandt, H. Reinhardt, Nucl. Phys. **B685** (2004) 227.
- [10] V. N. Gribov, Nucl. Phys. **B139** (1978) 1.
- [11] D. Zwanziger, Nucl. Phys. **B399** (1993) 477.
- [12] M. A .L. Capri, V. E. R. Lemes, R. F. Sobreiro, S. P. Sorella and R. Thibes, Phys. Rev. **D77** (2008) 105023
- [13] A. M. Polyakov, Phys. Lett. **B59** (1975) 82; A. M. Polyakov, Nucl. Phys. **B120** (1977) 429.
- [14] A. M. Polyakov, "Gauge Fields and Strings", Contemporary concepts in physics, Vol. 3 (Harwood Academic Publishers, 1987).
- [15] N. Seiberg and E. Witten, Nucl. Phys. **B426** (1994) 19 [Erratum-ibid. **B430** (1994) 485].
- [16] G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B190** (1981) 455.
- [17] Y. M. Cho, Phys. Rev. **D62** (2000) 074009.
- [18] Y. M. Cho, H. W. Lee and D. G. Pak, Phys. Lett. **B525** (2002) 347.
- [19] W. S. Bae, Y.M. Cho and Sang-Woo Kim, Phys. Rev. **D65** (2002) 025005.
- [20] Y. M. Cho, M. L. Walker, D. G. Pak, JHEP **05** (2004) 073.
- [21] Y.M. Cho and D.G. Pak, Phys. Lett. **B632** (2006) 745.

- [22] L. Faddeev and A. J. Niemi, Phys. Rev. Lett. **82** (1999) 1624.
- [23] S. V. Shabanov, Phys. Lett. **B458** (1999) 322.
- [24] L. E. Oxman, JHEP **12** (2008) 89.
- [25] L. Del Debbio, M. Faber, J. Greensite, and S. Olejník, Phys. Rev. **D53** (1996) 5891.
- [26] C. Piccioni, Casimir scaling in SU(2) lattice gauge theory, Phys. Rev. **D73** (2006) 114509
- [27] S. Deldar, Static SU(3) potentials for sources in various representations, Phys. Rev. **D62** (2000)
- [28] G. S. Bali, Casimir scaling of SU(3) static potentials, Phys. Rev. **D62** (2000) 114503
- [29] L. Del Debbio, H. Panagopoulos, E. Vicari, JHEP **0309** (2003) 034.
- [30] G. K. Savvidy, Phys. Lett. **B1** (1977) 133.
- [31] M. Engelhardt, H. Reinhardt, Nucl. Phys. **B567** (2000) 249.
- [32] L. E. Oxman, arXiv:1007.0518v1 [hep-th].
- [33] A. L. L. de Lemos, L. E. Oxman, B. F. I. Teixeira, arXiv:1105.0711 [hep-th].
- [34] A. L. L. de Lemos, L. E. Oxman, M. Moriconi, 2010 J. Phys. A: Math. Theor. **43** 015401.
- [35] D. C. Morse and G. H. Fredrickson, Phys. Rev. Lett. **73** (1994) 3235.
- [36] H. Kleinert, Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets (World Scientific, Singapore, 2006).
- [37] Y. M. Cho, Phys. Rev. **D21** (1980) 1080; Phys. Rev. Lett. **46** (1981) 302; Phys. Rev. **D23** (1981) 2415.
- [38] L. Faddeev and A. J. Niemi, Phys. Rev. Lett. **82** (1999) 1624
- [39] S. P. Sorella, “Introduction to the Yang-Mills Theory and BRST Symmetry”, XVI Escola Jorge André Swieca (2011)
- [40] V. N. Gribov, Nucl. Phys. **B139** (1978) 1.
- [41] M. A. L. Capri, A. J. Gomez, M. S. Guimaraes, V. E. R. Lemes, S. P. Sorella, D. G. Tedesco, Phys. Rev. **D83** (2011) 105001
- [42] C.G. Bollini and J.J. Giambiagi, Nuovo Cim. **B12** (1972) 20-25.
- [43] K. G. Chetyrkin, Nucl. Phys. **N710** (2005) 499-510.
- [44] A. Andrasi, J. C. Taylor, e-print: arXiv:1010.5911 [hep-th].
- [45] D. Karabali, V. P. Nair, Nucl. Phys **B464** (1996) 135-152.
- [46] C. G. Bollini and J. J. Giambiagi, Phys. Rev. **D53** (1996) 10.

- [47] T. Kugo and Ojima, Prog. Theoret. Phys, vol. 60 (1978) 1869.
- [48] C. Becchi and C. Imbimbo, Scholarpedia, (2008) 3(10):7135.
- [49] D. Dudal, N. Vandersickel, H. Verschelde, Phys. Rev. **D76** (2007) 025006.
- [50] G. 't Hooft, "Under the Spell of the Gauge Principle", Advanced Series in Mathematical Physics Vol. 19, (World Scientific, Singapore, 1994).
- [51] P. Goddard and P. Mansfield, Rep. Prog. Phys. **49** (1986) 725-781.
- [52] T. D. Lee and G. C. Wick, Phys. rev. **D9** (1974) 2291.
- [53] G.H. Derrick, J. Math. Phys. 5 (1964) 1252.
- [54] H. B. Nielsen and P. Olesen, Nucl. Phys. **B61** (1973) 45.
- [55] Howard Georgi and Sheldon Glashow, Phys. Rev. Lett. 32 (1974) 438.
- [56] S. Coleman, in New Phenomena in Subnuclear Physics, International School of Subnuclear Physics, part A, ed. A. Zichichi (Plenum Press, New York, 1977).
- [57] B. Zumino, in Renormalization and Invariance in Quantum Field Theory, NATO Adv. Summer Inst., ed. E.R.Caianiello (Plenum Press, New York, 1974).
- [58] P. E. Haagensen and K. Johnson, hep-th/9702204
- [59] G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B79** (1974) 276.
- [60] A. Polyakov, JETP (Sov. Phys.) Letters 20 (1975) 988.
- [61] J. Honerkamp, Nucl. Phys. **B48** (1972) 269.
- [62] L. P. Kadanoff and H. Ceva, Phys. rev. **B3** (1971) 3918.
- [63] S. Mandelstam, Phys. Rev. **D11** (1975) 3026.
- [64] R. F. Streater and A. S. Wightman, PCT, Spin and Statistics and All That, Princeton University Press, Landmarks in Mathematics and Physics, 2000.
- [65] G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B153** (1979) 141.
- [66] G. Mack, in recent Developments in Gauge Theories, edited by G. 't Hooft et Al. (Plenum, new York, 1980).
- [67] H. Nilsen and P. Olesen, Nucl. Phys. **B160** (1979) 380.
- [68] K. Wilson, Phys. Rev. **D10** (1974) 2445.
- [69] J. Greensite, K. Langfeld, S. Olejnik, H. Reinhardt and T. Tok, Phys. rev. **D75** (2007) 034501.
- [70] J. Greensite, K. Langfeld, S. Olejnik, H. Reinhardt and T. Tok, Phys. Rev. **D75** (2007).
- [71] K.-I. Kondo, T. Murakami, T. Shinohara, Eur. Phys. J. **C42** (2005) 475.

- [72] D. Dudal, J. A. Gracey, V. E. R. Lemes, M. S. Sarandy, R. F. Sobreiro, S. P. Sorella, H. Verschelde, Phys.Rev. **D70** (2004) 114038.
- [73] H. Reinhardt, Nucl. Phys. **B628** (2002) 133.
- [74] K. Bardakci and S. Samuel, Phys. Rev. **D18** (1978) 2849.
- [75] M. B. Halpern, A. Jevicki and P. Senjanovic, Phys. Rev. **D16** (1977) 2476.
- [76] M. B. Halpern and W. Siegel, Phys. Rev. **D16** (1977) 2486.
- [77] D. Antonov, Surveys High Energ. Phys. **14** (2000) 265, hep-th/9909209.
- [78] E. S. Fradkin and D. M. Gitman, Phys. Rev. **D44** (1991) 10.
- [79] A. Polyakov, in Fields, Strings and Critical Phenomena, edited by E. Brézin and J. Zinn-Justin (Les Houches, 1988).
- [80] G. Fredrickson, The Equilibrium Theory of Inhomogeneous Polymers (Clarendon Press, Oxford, 2006).
- [81] Kei-Ichi Kondo, Prog. Theor. Phys. Suppl. **131** (1998) 243.
- [82] J. Ambjorn, Quantization of geometry, in Les Houches (eds. F. David, P. Ginsparg, J. Zinn-Justin, 1994), hep-th/9411179.
- [83] M. N. Chernodub, V. I. Zakharov, Phys. Rev. Lett. **98** (2007) 082002.
- [84] L. E. Oxman, Phys. Rev. **D82** (2010) 105020.
- [85] Peter W. Higgs, Phys. Rev. Lett. 13(16) (1964) 508.
- [86] A. A. Abrikosov, Rev. of Mod. Phys. 76 (2004) 975.