

Rafael Mynssem Brum

# Modelos sociofísicos para a dinâmica de evasão fiscal em redes regulares e complexas

Orientador: Prof. Dr. Nuno Miguel Melo Crokidakis Peregrino



**INSTITUTO DE FÍSICA**  

---

**Universidade Federal Fluminense**

Niterói-RJ

2018

Ficha catalográfica automática - SDC/BIF  
Gerada com informações fornecidas pelo autor

B893m Brum, Rafael Mynssem  
Modelos sociofísicos para a dinâmica de evasão fiscal em  
redes regulares e complexas / Rafael Mynssem Brum ; Nuno  
Miguel Melo Crokidakis Peregrino, orientador. Niterói, 2018.  
130 p. : il.

Tese (doutorado)-Universidade Federal Fluminense, Niterói,  
2018.

DOI: <http://dx.doi.org/10.22409/PPGF.2018.d.12045534758>

1. Sistema complexo. 2. Sonegação fiscal. 3. Simulação  
por computador. 4. Expoentes críticos. 5. Produção  
intelectual. I. Miguel Melo Crokidakis Peregrino, Nuno,  
orientador. II. Universidade Federal Fluminense. Instituto de  
Física. III. Título.

CDD -

Rafael Mynssem Brum

# Modelos sociofísicos para a dinâmica de evasão fiscal em redes regulares e complexas

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal Fluminense, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Física, área de concentração: Sistemas Complexos e Física Computacional. Orientador: Prof. Dr. Nuno Miguel Melo Crokidakis Peregrino.

Niterói-RJ

2018

BANCA EXAMINADORA:

---

Prof. Dr. Nuno Miguel Melo Crokidakis Peregrino  
UFF

---

Prof. Dr. Jürgen Fritz Stilek  
UFF

---

Prof. Dr. Lucas Mauricio Sigaud  
UFF

---

Prof. Dr. Alexis Ricardo Hernández Nuñez  
UFRJ

---

Prof. Dr. Edgardo Brigatti  
UFRJ

*Dedico este trabalho a todos que estiveram do meu lado de todas as formas possíveis.*

# *Agradecimentos*

Confesso que eu demorei bastante para começar a escrever estes agradecimentos. Em geral, essa é uma das partes em que eu começo a fazer primeiro.

Ao longo destes 4 anos, uma grande quantidade de pessoas me auxiliaram de inúmeras formas. Se eu esqueci de alguém (o que é bem provável), peço desculpas desde já.

Em primeiro lugar, eu agradeço ao meu maior apoio: a minha mãe Paula Fernanda dos Santos Mynssem por sempre (indiscutivelmente sempre) estar do meu lado em todas as situações de angústia, dúvida, medo, cansaço, desmotivação assim como nos momentos de alegria, confiança, esperança e animação. Obrigado por seu meu maior exemplo na vida, por ser uma mulher forte e independente, por lutar todos os dias para deixar nossos dias melhores. Quero agradecer também ao meu irmão Marcos Mynssem também pelo apoio e por também me servir de exemplo através de sua força e perseverança. Você será um bom homem. Em breve espero fazer mais por vocês dois.

Um agradecimento em especial para a minha querida avó Maria Edilza pela grandiosa doçura e por seu sempre presente sorriso nas situações mais adversas. Não existe a menor condição de eu escrever estes agradecimentos sem que eu agradecesse ao meu amado avô José Paulo Mynssem que literalmente foi o melhor homem que eu já conheci. Tive sorte de poder viver muitos anos ao seu lado. Queria muito poder te abraçar.

A alguns anos, eu tive a sorte de fazer alguns bons amigos na cidade de Saquarema. Espero conseguir carregar todos estes amigos para sempre comigo. Então, obrigado Rodrigo Garcia, Thiago Vidal, Gabriela Souza, Leonardo Dutra, Fábio Bianchini, Laio Cardozo, Antonio Bandeira, Zilcer Zimmermann, Rafael Barbosa, José Nascimento, Ludmila Duarte, Giovanna Liberato e Yagho Ramos.

Quero agradecer aos meus colegas do grupo de Sistemas Complexos e Física Computacional da Universidade Federal Fluminense que tanto me ajudaram: Marcelo Pires, André Oestereich, Marcus Vinícius, Marcos Castro, João Paulo e Allan Vieira.

Recentemente eu tive a oportunidade de conhecer muitas pessoas maravilhosas. Eu devo um pouquinho deste trabalho a cada uma delas devido ao incentivo que me deram

durante este último ano. Então, meus agradecimentos à: André Luiz, Beatriz Gonçalves, Bruno Vasconcelos, Daniel Lessa, Eduardo Martins, Letícia Vidal, Marco Bonetti, Maria Clara Mussi, Mariana de Freitas, Mariano Copes, Matheus Perrut, Matheus Marrotti, Pedro de Souza, Pedro Paiva, Renato Castilho, Samiry Rodrigues, Alice Tatianna, Thales de Souza, Victor Assumpção, Thiago Prado, Matheus Erthal, Eduardo Canellas, Pedro Cotrim, Fernando Gatto, Gabriel Guerreiro, Abel Warakia, Matheus Baldas, Rafael Amorim, Gabriel Rossi, e Vitor Ferreira.

Eu vou sentir saudades dos colegas do Instituto de Física, pessoas que eu conheço desde a graduação e que ao longo de todos estes anos contribuíram com a minha formação. Muito obrigado então Alfredo Antunes, Renan Oliveira, Júlio Dias, Alvaro Siguiné, Marcel Nogueira, Erica Cardoso, Barbara Paes, Rosembergue Rocha, Rodrigo Francisco, Tatiane Pereira, Alice Sant'Anna, Claudio Reis, Débora Nunes, Gabriela Seródio, Beatriz Santos e Viviane Alfradique .

Também quero agradecer a todos os funcionários e funcionárias do Instituto de Física que através do seu trabalho me propiciaram condições adequadas para que eu pudesse fazer o meu. Em especial, meu muito obrigado à Karen Guimarães, Luci de Souza Pôrto, Samuel Macedo, Vania Macedo e Fernanda Caetano.

Não seria possível escrever este trabalho sem o auxílio do meu orientador Nuno Crokidakis. Em 2014, depois de uma conversa informal eu sabia que precisava trabalhar com ele. O Nuno me ajudou a realizar meu antigo sonho de trabalhar nesta área e confiou em mim para ser seu aluno. Obrigado então por tudo. Em breve eu espero poder ser seu colega de trabalho.

O tempo em que estive no doutorado se confunde com o tempo em que nos conhecemos. Quero agradecer a Camille Vilhena por estes anos ao meu lado, me incentivando e me ajudando a crescer. Eu devo muito a ela e um dia vou fazer valer todo o amor que recebi.

Agradeço ao fato de ser possível usar o *IP* da UFF para baixar artigos de praticamente qualquer fonte sem que eu desembolse uma fortuna para tal. É um tanto quanto complicada a sobrevivência financeira durante o período da pós-graduação. Despender a fortuna que em geral é cobrada pelo acesso ao material necessário atrapalharia (e muito) o desenvolvimento deste trabalho.

Por falar em acessar artigos, não somente eu, assim como milhares de outros estudantes de pós-graduação, graduação e profissionais já formados, já utilizaram a criação da Alexandra Elbakyan, criadora do *Sci-Hub*, o maior repositório online gratuito contendo

milhões de artigos científicos. Muito obrigado Alexandra. Em tempos conturbados, onde a obscuridade intelectual se propaga cada vez mais pelo mundo, você em contraponto a tudo isto abriu uma janela que democratiza o acesso ao conhecimento para toda uma geração.

Por fim, eu quero agradecer a Capes pelo financiamento sem o qual não seria possível o desenvolvimento deste trabalho. .



"No edifício do pensamento não  
encontrei nenhuma categoria na qual  
pousar a cabeça. Em contrapartida,  
que belo travesseiro é o Caos!"

---

Emil Cioran

# *Lista de Figuras*

|   |  |       |
|---|--|-------|
| 1 | Redes completamente conectadas com 2, 3, 4, 5, 6 e 7 sítios e suas respectivas arestas. . . . .  | p. 46 |
| 2 | Conexões de um sítio (em vermelho) com seus 4 e 6 vizinhos para as redes quadrada e cúbica, respectivamente. . . . .   | p. 47 |
| 3 | 3 exemplos de redes aleatórias com 10 sítios, construídas com diferentes probabilidades $p$ de conexão entre pares. Quanto maior é o valor de $p$ , maior é a quantidade de conexões totais. . . . .   | p. 48 |
| 4 | Exemplo de uma rede aleatória (figura a) e da distribuição da conexão para 10 redes com $10^4$ sítios e probabilidade conexão $p = 0.2$ (figura b). Notamos uma concentração para valores de conectividade iguais $k = 2000$ em que se torna menos provável encontrarmos sítios com conectividade muito maior e muito menor do que a média dada por $k_{médio} = pN$ . Imagem obtida de [76]. . . . .                              | p. 49 |
| 5 | Exemplo de uma rede BA onde é possível perceber a existência de alguns poucos <i>hubs</i> e uma maioria de sítios conectados com poucos outros sítios. . . . .   | p. 50 |
| 6 | Exemplo de uma rede BA (figura a) e da distribuição de conexões para 10 redes com $10^4$ sítios, onde cada novo sítio se conecta a outros 5 já presentes (figura b). No gráfico da distribuição da conexão, é possível averiguar a existência dos <i>hubs</i> , visto que uma quantidade muito pequena de sítios possui muitas conexões e a maioria dos sítios da rede se conectam à poucos outros. Imagem obtida de [76]. . . . . | p. 51 |
| 7 | Diagrama de fases da água simplificado. O eixo vertical representa a pressão em atm e o horizontal a temperatura em $^{\circ}C$ . Neste diagrama podemos observar as curvas de coexistência além do ponto crítico e do ponto triplo. A imagem foi obtida em [83]. . . . .  | p. 52 |

|    |  |       |
|----|--|-------|
| 8  | Densidades $\rho_L$ e $\rho_G$ de um fluido em função da temperatura $T$ ao longo da curva de pressão de vapor. Conforme o sistema se aproxima da transição de fase, o parâmetro de ordem dado pela diferença das densidades se aproxima do valor nulo. Imagem obtida de [84]. . . . .   | p. 53 |
| 9  | Diagrama de fase de um ferromagneto em campo magnético externo $H$ nulo. Imagem obtida de [82]. . . . .  | p. 54 |
| 10 | Comportamento da magnetização $M$ em função da temperatura $T$ de um ferromagneto na ausência de campo magnético externo ( $H = 0$ ). Para temperaturas inferiores à temperatura crítica $T_c$ , existe a predominância de alguma orientação. Quando a temperatura aumenta, o módulo da magnetização diminui até o momento em que $M$ se torna nulo, mostrando assim a transição de fase do modelo. Imagem obtida de [82]. . . . .   | p. 55 |
| 11 | Curva de coexistência de 8 diferentes fluidos. Nos eixos vertical e horizontal, respectivamente, temos a temperatura reduzida $\frac{T}{T_c}$ e a densidade reduzida $\frac{\rho}{\rho_c}$ . Obtido de [82]. . . . .   | p. 58 |
| 12 | Comportamento do comprimento de correlação $\xi$ em um sistema finito em função da temperatura $T$ . Conforme a temperatura se aproxima do valor crítico $T_c$ , nota-se o aumento do valor de $\xi$ . A aproximação da temperatura se dá por valores maiores em direção aos menores (de cima para baixo). Imagem obtida de [84]. O sistema mostrado é de um gás na rede, onde as células pintadas são <i>spins up</i> . O comprimento de correlação $\xi$ é aproximadamente o diâmetro das ilhas de <i>spins</i> alinhados. . . . . | p. 60 |
| 13 | Comportamento da magnetização por spin e da suscetibilidade magnética, respectivamente esquerda e direita, em função de $T/T_c$ no modelo de Ising na rede quadrada para diferentes tamanhos de rede ( $L = 20, 40, 50$ e $60$ ). Nestas simulações, $T_c$ é o valor da temperatura crítica do modelo obtida analiticamente. Imagens obtidas de [92]. . . . .  | p. 62 |
| 14 | Colapsos da magnetização por spin e da suscetibilidade magnética, respectivamente esquerda e direita, no modelo de Ising na rede quadrada para diferentes tamanhos de rede ( $L = 20, 40, 50$ e $60$ ) dos gráficos da imagem (13). Imagens obtidas de [92]. . . . .   | p. 63 |

- 15 Comportamento da densidade de sítios preenchidos  $\rho$  no Processo de Contato em campo médio em função do tempo  $t$ . Nesta imagem, o parâmetro utilizado associado à transição de fase é chamado de  $p$ . Podemos observar as três curvas: uma para  $p < p_c$ , outra para  $p > p_c$  e entre estas curvas, aquela em que  $p = p_c$  onde  $p_c$  representa o parâmetro crítico do modelo. Imagem obtida de [96]. . . . . p. 68
- 16 Comportamento da densidade estacionária de indivíduos infectados  $\rho$  em função do parâmetro  $\lambda$ . O parâmetro crítico é mostrado como  $\lambda_c$ . Para  $\lambda \leq \lambda_c$ ,  $\rho = 0$  e para  $\lambda > \lambda_c$ ,  $\rho \neq 0$  revelando assim, os estados absorvente e ativo da doença, respectivamente. Imagem obtida de [97]. . . . . p. 69
- 17 Diagrama visual para representar as mudanças de estado do modelo proposto. Na figura estão representadas as mudanças resultantes de interações entre indivíduos honestos e sonegadores ( $X_1$  e  $X_3$ ), assim como a transição que os indivíduos suscetíveis ( $X_2$ ) sofrem devido à insatisfação e à transição que um sonegador ( $X_3$ ) sofre por causa da fiscalização. . . p. 72
- 18 Evolução temporal para as três densidades populacionais  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  utilizando a aproximação de campo médio do modelo, baseado nas equações (4.5)-(4.7). Os parâmetros fixados são  $\alpha = 0.2$  e  $\delta = 0.3$ . Os gráficos à esquerda mostram a evolução para  $\epsilon = 0.2$  e valores típicos de  $\lambda$ , enquanto nos gráficos à direita, mostramos a evolução para  $\lambda = 0.8$  para valores típicos de  $\epsilon$ . . . . . p. 74
- 19 Densidades estacionárias  $x_1^*$ ,  $x_2^*$  e  $x_3^*$  para os três tipos de indivíduos na aproximação de campo médio do modelo, dadas pelas equações (4.9)-(4.11). As densidades estacionárias foram plotadas em função do parâmetro socioeconômico  $\lambda$  para típicos valores de  $\epsilon$ . Fixamos os valores de  $\alpha$  e  $\delta$  em 0.2 e 0.3, respectivamente. . . . . p. 76
- 20 Evolução temporal para as três densidades populacionais  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  na rede ER. Os parâmetros fixados são  $\alpha = 0.2$  e  $\delta = 0.3$ . Os gráficos à esquerda mostram a evolução para  $\epsilon = 0.2$  e valores típicos de  $\lambda$ , enquanto nos gráficos à direita, mostramos a evolução para  $\lambda = 0.8$  para valores típicos de  $\epsilon$ . Simulamos redes com  $10^4$  sítios (indivíduos). . . . . p. 78

|    |  |       |
|----|--|-------|
| 21 | Densidades estacionárias $x_1^*$ , $x_2^*$ e $x_3^*$ como função do parâmetro socio-econômico $\lambda$ para $\epsilon = 0.1$ , $\epsilon = 0.3$ e $\epsilon = 0.5$ para o modelo simulado na rede ER. Fixamos os valores de $\alpha$ e $\delta$ em 0.2 e 0.3, respectivamente. Simulamos redes com $10^4$ sítios (indivíduos). . . . .  | p. 79 |
| 22 | Evolução temporal para as três densidades populacionais $x_1$ , $x_2$ e $x_3$ na rede BA. Os parâmetros fixados são $\alpha = 0.2$ e $\delta = 0.3$ . Os gráficos à esquerda mostram a evolução para $\epsilon = 0.2$ e valores típicos de $\lambda$ , enquanto nos gráficos à direita, mostramos a evolução para $\lambda = 0.8$ para valores típicos de $\epsilon$ . Simulamos redes com $10^4$ sítios (indivíduos). . . . .   | p. 80 |
| 23 | Densidades estacionárias $x_1^*$ , $x_2^*$ e $x_3^*$ como função do parâmetro socio-econômico $\lambda$ para $\epsilon = 0.1$ , $\epsilon = 0.3$ e $\epsilon = 0.5$ para o modelo simulado na rede BA. Fixamos os valores de $\alpha$ e $\delta$ em 0.2 e 0.3, respectivamente. Simulamos redes com $10^4$ sítios (indivíduos). . . . .  | p. 82 |
| 24 | Comportamento de $\lambda_c(N)$ em função do inverso do tamanho da rede $N^{-1}$ para a rede aleatória (à esquerda) e para a rede livre de escala (à direita). Os parâmetros fixados foram $\alpha = 0.2$ e $\delta = 0.3$ e ambos os gráficos foram obtidos de simulações para $\epsilon = 0.1$ , 0.3 e 0.5. A linha reta no gráfico à direita indica o decaimento em lei de potência de $\lambda_c(N)$ para a rede BA, o que sugere a ausência do limiar epidêmico. Simulamos redes com $N = 500, 1000, 2000, 10000$ e $20000$ sítios. . . . . | p. 83 |
| 25 | Evolução temporal para as quatro densidades populacionais $x_1$ , $x_2$ , $x_3$ e $x_4$ para a aproximação de campo médio do modelo estendido proposto, baseado nas equações (4.17) - (4.20). Os parâmetros fixados são $\alpha = 0.2$ e $\delta = 0.3$ . Os gráficos à esquerda mostram a evolução para $\epsilon = 0.2$ e valores típicos de $\lambda$ , enquanto nos gráficos à direita, mostramos a evolução para $\lambda = 0.8$ para valores típicos de $\epsilon$ . . . . .   | p. 86 |
| 26 | Densidades estacionárias $x_1^*$ , $x_2^*$ , $x_3^*$ e $x_4^*$ do modelo proposto com 4 estados utilizando a aproximação de campo médio para os valores $\alpha = 0.5$ , $\delta = 0.5$ e variando os valores de $\epsilon$ em 0.1, 0.3 e 0.5 em função do parâmetro $\lambda$ . Nos gráficos onde os valores de $\epsilon$ são menores do que 0.5 é possível observar as duas transições de fase obtidas através das equações (4.21) - (4.24). . . . .  | p. 88 |

- 27 Densidades estacionárias  $x_2^*$ ,  $x_4^*$  e  $x_3^*$  em função do parâmetro  $\lambda$  obtidas através das equações (4.21) - (4.24) para os valores  $\alpha = 0.5$ ,  $\delta = 0.5$  e  $\epsilon = 0.3$ . No gráfico podemos observar as duas transições de fase associadas a  $\lambda = \lambda_2$  e  $\lambda = \lambda_1$  (equações 4.27 e 4.28) onde  $\lambda_2 = 0.3$  e  $\lambda_1 \approx 0.66$ . Para valores de  $\lambda$  menores que  $\lambda_2$ , notamos o estado absorvente onde todos os indivíduos estão no estado  $X_1$  e para valores de  $\lambda$  maiores do que  $\lambda_1$  o estado  $x_1$  desaparece, restando os outros comportamentos na sociedade. p. 89
- 28 Comportamento de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  em função de  $\epsilon$  para  $\alpha = 0.5$  e  $\delta = 0.5$ . Neste diagrama observamos três regiões (indicadas por I, II e III) que mostram qualitativamente como estão os quatro estados: Região I:  $\lambda > \lambda_1$  indicando que a densidade de indivíduos  $x_1$  vai a zero. O comportamento honesto desaparece da população. Região II:  $\lambda_2 < \lambda < \lambda_1$  temos os quatro estados presentes na população. Quanto maior é o valor de  $\lambda$  nesta região, menor se torna o valor de  $x_1^*$ . Região III:  $\lambda < \lambda_2$  mostra o estado absorvente onde toda a população se encontra no estado honesto. . . . p. 90
- 29 Módulo da magnetização  $|m|$  em função do ruído  $f$  em redes aleatórias com diferentes parâmetros de inércia  $\theta$ : (a)  $\theta = 0$ , (b)  $\theta = 0.2$ , (c)  $\theta = 0.3$  e (d)  $\theta = 0.35$ . Os quadrados e círculos correspondem às simulações do tipo *forward* e *backward*, respectivamente. Parâmetros da rede:  $N = 10000$  e  $z = 20$ . Gráficos obtidos de [108]. . . . . p. 95
- 30 Resultados da evolução temporal da densidade de evasores com  $N = 10000$ ,  $z = 20$ ,  $\theta = 0.00$  para  $p_a = 0.05$  e  $p_a = 0.90$  e que em cada valor de probabilidade de auditoria utilizamos  $k = 10$  ou  $k = 50$ . . . . . p. 99
- 31 Resultados da evolução temporal da densidade de evasores com  $N = 10000$ ,  $z = 20$ ,  $\theta = 0.20$  para  $p_a = 0.05$  e  $p_a = 0.90$  e que em cada valor de probabilidade de auditoria utilizamos  $k = 10$  ou  $k = 50$ . . . . . p. 100
- 32 Resultados da evolução temporal da densidade de evasores com  $N = 10000$ ,  $z = 20$ ,  $\theta = 0.30$  para  $p_a = 0.05$  e  $p_a = 0.90$  e que em cada valor de probabilidade de auditoria utilizamos  $k = 10$  ou  $k = 50$ . . . . . p. 101
- 33 Resultados da evolução temporal da densidade de evasores com  $N = 10000$ ,  $z = 20$ ,  $\theta = 0.35$  para  $p_a = 0.05$  e  $p_a = 0.90$  e que em cada valor de probabilidade de auditoria utilizamos  $k = 10$  ou  $k = 50$ . . . . . p. 102

|    |  |        |
|----|--|--------|
| 34 | Densidades estacionárias para combinações de $p_a$ e $k$ onde $p_a = \{0.05, 0.90\}$ , $k = \{10, 50\}$ . Cada gráfico mostra os resultados para um valor diferente de inércia ( $\theta = 0.00, 0.20, 0.30, 0.35$ ). Nestas simulações utilizamos uma rede aleatória $N = 10^4$ e conectividade média $z = 20$ . . . . .  | p. 105 |
| 35 | Densidades estacionárias para combinações de $p_a$ e $k$ onde $p_a = \{0.05, 0.90\}$ , $k = \{10, 50\}$ . Cada gráfico mostra os resultados para diferentes valores de inércia ( $\theta = 0.00, 0.20, 0.30, 0.35$ ). Nestas simulações utilizamos uma rede aleatória $N = 10^4$ e conectividade média $z = 20$ . . . . .  | p. 106 |
| 36 | Resultados da densidade de evasores em função da probabilidade de auditoria para dois valores distintos de tempo de vigilância: $k = 10$ e $k = 50$ . Foram utilizados os valores de ruído iguais a 0.1, 0.3 e 0.8. $N = 10000$ e $\theta = 0.00$ . . . . .  | p. 109 |
| 37 | Resultados da densidade de evasores em função da probabilidade de auditoria para dois valores distintos de tempo de vigilância: $k = 10$ e $k = 50$ . Foram utilizados os valores de ruído iguais a 0.1, 0.3 e 0.8. $N = 10000$ e $\theta = 0.20$ . . . . .  | p. 110 |
| 38 | Resultados da densidade de evasores em função da probabilidade de auditoria para dois valores distintos de tempo de vigilância: $k = 10$ e $k = 50$ . Foram utilizados os valores de ruído iguais a 0.1, 0.3 e 0.8. $N = 10000$ e $\theta = 0.30$ . . . . .  | p. 111 |
| 39 | Resultados da densidade de evasores em função da probabilidade de auditoria para dois valores distintos de tempo de vigilância: $k = 10$ e $k = 50$ . Foram utilizados os valores de ruído iguais a 0.1, 0.3 e 0.8. $N = 10000$ e $\theta = 0.35$ . . . . .  | p. 112 |
| 40 | Densidades de indivíduos sonegadores ( $x_3$ ) em função do tempo na rede quadrada (esquerda) com $L = 100$ , $\alpha = 0.2$ , $\delta = 0.3$ e $\epsilon = 0.1$ e na rede cúbica (direita) com $L = 22$ , $\alpha = 0.2$ , $\delta = 0.3$ e $\epsilon = 0.2$ . Em ambos os gráficos, as curvas foram obtidas utilizando alguns valores sutilmente distintos de $\lambda$ . Valores estes em que é possível começar a notar a mudança do decaimento exponencial para a forma na lei de potência. . . . . | p. 115 |

- 41 Densidades estacionárias de indivíduos sonegadores em função de  $\lambda$  para a rede completamente conectada, rede quadrada e rede cúbica. Em todos os gráficos, foram simulados tamanhos diferentes dependendo do tipo de rede. . . . . p. 117
- 42 Colapsos das densidades estacionárias de indivíduos sonegadores para a rede completamente conectada, rede quadrada e rede cúbica das curvas obtidas pelos gráficos da figura (41). O colapso nos sugere que os expoentes obtidos através das curvas são os expoentes críticos do modelo. As grandezas mostradas nos eixos foram baseadas nas equações (3.20) e (3.21) que são as utilizadas para eliminar a dependência do tamanho das redes para a análise do parâmetro de ordem. . . . . p. 119
- 43 Exemplo de indivíduos na rede quadrada. Nesta imagem, um indivíduo honesto  $X_1$  tem como primeiros vizinhos um indivíduo suscetível  $X_2$  e três indivíduos sonegadores  $X_3$ . Neste caso, o indivíduo honesto pode vir a mudar de estado de acordo com a interação dada por 4.1. Neste caso, a probabilidade de transição é  $\frac{3\lambda}{4}$ . . . . . p. 121



## *Lista de Tabelas*

- 1 Dias trabalhados em média por ano para um trabalhador pagar impostos no Brasil desde o ano de 1988 até 2017. A tabela foi obtida em [28]. . . p. 37
- 2 PIB (em milhões de dólares), sonegação no país em relação ao PIB, carga tributária percentual e o valor total sonegado (em milhões de dólares) dos 10 países que mais deixaram de arrecadar impostos devido a sonegação fiscal em 2011. Obtido de [48]. . . . . p. 38
- 3 PIB em bilhões de dólares, percentual do PIB em tributação e investimento per capita em dólares para alguns países obtido de [70]. Os dados da pesquisa foram obtidos em 2016. . . . . p. 43
- 4 Algumas transições de fase e seus respectivos parâmetros de ordem [84]. p. 55
- 5 Definição dos expoentes críticos mais utilizados em sistemas de fluido [82]. p. 57
- 6 Definição dos expoentes críticos mais utilizados em sistemas magnéticos [82]. . . . . p. 57
- 7 Tabela dos expoentes  $\nu$  e  $\beta$  obtidos para as redes completamente conectada, quadrada e cúbica para o modelo apresentado no capítulo 4. . . . p. 120
- 8 Tabela dos expoentes  $\nu$  e  $\beta$  obtidos para as redes completamente conectada, quadrada e cúbica no modelo de Processo de Contato. Obtida de [87]. . . . . p. 120

# *Sumário*

|  |       |
|--|-------|
| <b>Resumo</b>  | p. 21 |
| <b>Abstract</b>  | p. 23 |
| <b>1 Introdução e Metodologia</b>                            | p. 25 |
| 1.1 Introdução . . . . .                                     | p. 25 |
| 1.2 Trabalhos anteriores . . . . .                           | p. 27 |
| 1.3 Equação Mestra . . . . .                                 | p. 28 |
| 1.3.1 Demonstração . . . . .                                 | p. 28 |
| 1.3.2 Caso Geral . . . . .                                   | p. 30 |
| 1.4 Modelo Baseado em Agentes . . . . .                      | p. 32 |
| <b>2 Evasão Fiscal</b>                                       | p. 33 |
| 2.1 Introdução . . . . .                                     | p. 33 |
| 2.1.1 Justificativa para a tributação . . . . .              | p. 33 |
| 2.1.2 O que é evasão fiscal? . . . . .                       | p. 34 |
| 2.1.2.1 Elisão fiscal . . . . .                              | p. 35 |
| 2.1.3 Impactos da sonegação . . . . .                        | p. 35 |
| 2.2 Sistema tributário brasileiro . . . . .                  | p. 36 |
| 2.2.1 Sonegação fiscal no Brasil . . . . .                   | p. 38 |
| 2.2.2 Fiscalização no Brasil . . . . .                       | p. 39 |
| 2.2.2.1 Acompanhamento eletrônico de contribuintes . . . . . | p. 39 |
| 2.2.2.2 Fiscalização presencial . . . . .                    | p. 39 |

|          |  |              |
|----------|--|--------------|
| 2.3      | Evasão fiscal no mundo . . . . .   | p. 40        |
| 2.3.1    | Comentários gerais . . . . .   | p. 40        |
| 2.3.2    | O lugar do Brasil no cenário mundial . . . . .                               | p. 42        |
| 2.4      | Conclusão . . . . .  | p. 43        |
| <b>3</b> | <b>Redes, Transições de Fase e Processo de Contato</b>                       | <b>p. 45</b> |
| 3.1      | Redes Utilizadas . . . . .   | p. 45        |
| 3.1.1    | Rede Completamente Conectada (Aproximação de Campo Médio)                    | p. 46        |
| 3.1.2    | Redes regulares (Redes Quadrada e Cúbica) . . . . .                          | p. 47        |
| 3.1.3    | Rede de Erdős-Rényi (Rede Aleatória) . . . . .                               | p. 47        |
| 3.1.4    | Rede de Barabási-Albert . . . . .  | p. 49        |
| 3.2      | Transições de fase, expoentes críticos e análise de tamanho finito . . . . . | p. 52        |
| 3.2.1    | Introdução . . . . .   | p. 52        |
| 3.2.2    | Expoentes críticos . . . . .   | p. 56        |
| 3.2.3    | Análise de tamanho finito . . . . .  | p. 58        |
| 3.3      | Processo de Contato . . . . .  | p. 63        |
| 3.3.1    | Análise em Campo Médio . . . . .   | p. 65        |
| <b>4</b> | <b>Dinâmica de evasão fiscal através de um modelo epidêmico</b>              | <b>p. 70</b> |
| 4.1      | Modelo Proposto . . . . .  | p. 70        |
| 4.2      | Resultados Obtidos . . . . .   | p. 72        |
| 4.2.1    | Rede Completamente Conectada – Campo médio . . . . .                         | p. 72        |
| 4.2.2    | Rede de Erdős-Rényi . . . . .  | p. 77        |
| 4.2.3    | Rede Barabási-Albert . . . . .   | p. 79        |
| 4.3      | Extensão do modelo - Inclusão do 4º estado . . . . .                         | p. 83        |
| 4.3.1    | Rede Completamente Conectada - Campo médio . . . . .                         | p. 84        |
| 4.3.2    | Análise temporal . . . . .   | p. 85        |

|          |   |               |
|----------|---|---------------|
| 4.3.3    | Densidades estacionárias de evasores . . . . .  | p. 87         |
| 4.4      | Comentários Finais . . . . .  | p. 90         |
| <b>5</b> | <b>Dinâmica de evasão fiscal através do modelo do Votante Majoritário em redes aleatórias</b> | <b>p. 92</b>  |
| 5.1      | Modelo do Votante Majoritário com e sem ruído . . . . .                                       | p. 92         |
| 5.2      | Modelo do Votante Majoritário com parâmetro de inércia . . . . .                              | p. 93         |
| 5.3      | Modelo Proposto . . . . .   | p. 96         |
| 5.4      | Metodologia . . . . .   | p. 96         |
| 5.5      | Resultados e conclusões . . . . .   | p. 97         |
| 5.5.1    | Análise temporal . . . . .  | p. 97         |
| 5.5.2    | Densidades estacionárias de evasores . . . . .  | p. 104        |
| 5.6      | Comentários Finais . . . . .  | p. 112        |
| <b>6</b> | <b>Modelo de Evasão em Redes Regulares</b>  | <b>p. 114</b> |
| 6.1      | Introdução . . . . .  | p. 114        |
| 6.2      | Metodologia . . . . .   | p. 114        |
| <b>7</b> | <b>Conclusões</b>   | <b>p. 122</b> |
|          | <b>Referências</b>  | <b>p. 125</b> |

## *Resumo*

Modelos baseados em agentes em dinâmicas sociais representam um dos mais ativos problemas na mecânica estatística de sistemas complexos e têm sido extensivamente explorados nos últimos anos em uma variedade de sistemas, tais como: dinâmica de opiniões, disseminação de doenças, sistemas com competição, propagação de rumores, entre outros. Seus resultados são também muito importantes do ponto de vista das sociedades organizadas: ciclos de epidemias, comportamento estacionário de doenças, predominância de certa posição política, plebiscitos e muitos outros exemplos.

A nossa preocupação neste trabalho se concentrou em um problema de âmbito global, responsável pelo maior impedimento na captação de recursos financeiros pelos governos: a sonegação fiscal. Para tal, nós estudamos o problema da dinâmica de evasão fiscal em sociedades artificiais por meio da solução analítica de taxas de probabilidades e também através da simulação computacional destas sociedades artificiais (quando soluções analíticas não puderam ser encontradas).

Tendo como foco o comportamento sonegador, propomos 2 modelos (com diferentes implementações) visando representar as estruturas internas responsáveis pelas mudanças de comportamento não-sonegador  $\leftrightarrow$  sonegador. Levamos também em consideração em ambos os modelos (de forma distinta) os impactos provenientes dos órgãos de fiscalização que são responsáveis pelo controle/punição de indivíduos sonegadores identificados na população.

Em um primeiro momento, consideramos três tipos de indivíduos em relação ao cumprimento das obrigações fiscais: contribuintes honestos, evasores fiscais e indivíduos suscetíveis. Analisamos as interações sociais que podem ocorrer entre estes indivíduos assim como o impacto da fiscalização do governo sobre a sociedade.

Analisamos as consequências socioeconômicas do modelo em algumas redes visando uma conexão com sociedades reais. Estudamos o modelo em redes regulares a fim de obtermos análises relacionadas a transições de fase e assim, encontrarmos os expoentes críticos do modelo. Também generalizamos o modelo a fim de considerar a existência de um 4º estado. Este, por sua vez, representando um indivíduo que foi descoberto pela

fiscalização ou que não sonega devido ao receio de ser identificado pela fiscalização.

Desenvolvemos outro modelo, este por sua vez baseado no modelo do Votante Majoritário com ruído em redes aleatórias (rede de Erdős-Rényi ou rede ER). Utilizamos também neste trabalho os mecanismos conhecidos como modelo de Zaklan a fim de entender melhor a influência da fiscalização no comportamento sonegador através de alguns parâmetros internos desta fiscalização. Incluiremos, por fim, neste modelo, um parâmetro responsável pelo indivíduo permanecer com seu atual comportamento (estado atual) independente da vizinhança, ou seja, um fator de inércia comportamental.

Analisamos cenários distintos onde a fiscalização pode ser fraca ou forte (tanto na detecção quanto no comportamento) e em como a densidade de evasores evolui de acordo com estes cenários.

Palavras-chave: evasão fiscal, sistemas complexos, simulação computacional, expoentes críticos, redes regulares, redes complexas, transição de fase, dinâmica social.

## *Abstract*

Models based on agents in social dynamics represent one of the most active problems in the statistical mechanics of complex systems and have been extensively explored on a variety of systems in the last few years, such as: dynamics of opinions, disease spreading, systems with competition, rumor spreading, among others. Their results are also very important from the point of view of organized societies: cycles of epidemics, stationary disease scenario, certain predominant political position, plebiscites and many other examples.

Our concern in this work has focused on a problem of global scope, responsible for the greatest impediment in attracting financial resources by governments: tax evasion. For this, we study the problem dynamics of tax evasion in artificial societies through the analytic solution of probability rates and also through the computational simulation of artificial societies (when analytic solutions couldn't be found).

Having the evasive behavior on focus, we propose 2 models (with different implementations) aiming to represent the internal structures responsible for the changes of behavior not evader  $\leftrightarrow$  evader. We also take in consideration in both models (in different ways) the impacts from inspection institutions that are responsible for control/punishment of evading individuals identified in the population.

At first, we considered three types of individuals in relation to the fulfillment of tax obligations: honest contributors, tax evaders, and susceptible individuals. We analyze the social interactions that can happen between these individuals as well as the impact from the government supervision over society.

We analyze the model's socioeconomic consequences in some real societies. We studied the model in regular graphs in order to obtain analyzes related to phase transitions and to obtain the critical model exponents.

We developed another model, this one, in its turn, is based on the model of the majority voter with noise in random networks (Erdős-Rényi network or ER network). We also use the mechanisms known as Zaklan's model in order to understand better the influence of inspection on evasive behavior through inspection's some internal parameters. Finally,

we will include in this model, a parameter responsible for the individual's permanence with their current behavior (current state) independent of the surroundings, that is, a behavior inertia factor.

We analyzed distinct scenarios where the fiscalization is weak and strong (both detection and monitoring) and how the evaders density evolves according to these scenarios.

Key words: tax evasion, complex systems, computational simulation, critical exponents, regular networks, complex networks, phase transition, social dynamics.



# *1 Introdução e Metodologia*

Neste primeiro capítulo, faremos uma breve revisão sobre alguns trabalhos que serviram de inspiração. Introduziremos a metodologia que será utilizada e demonstraremos a expressão geral da Equação mestra para estados discretos.

## **1.1 Introdução**

O caráter probabilístico está presente em diversos fenômenos naturais, seja de forma explícita ou intrínseca. Desde sua concepção original, a Mecânica Estatística obteve êxito ao descrever aspectos macroscópicos de sistemas conhecidos, como a condutividade térmica e o calor específico dos metais, o processo de transição de fase para um ferromagneto, etc.

Com este sucesso das aplicações de ferramentas e métodos da Mecânica Estatística, foi iniciada uma tentativa de implementar todo este arcabouço intelectual em outros tipos de sistemas que não eram de comum atuação da física da época: sistemas biológicos, sociais, econômicos, linguísticos, etc. Quando optamos por estudar sistemas sociais, devemos ter em mente que não estamos lidando com partículas ou átomos e sim com indivíduos e que cada um destes “componentes” frequentemente interagem com outros indivíduos, resultando assim, na evolução do sistema.

O alvo deste trabalho será a chamada sociofísica, ou dinâmica social que em alguns momentos é encarada com olhos céticos quanto a sua eficácia, tanto pelos físicos tradicionais quanto pelos cientistas sociais. Os físicos tradicionais estranham a utilização de ferramentas clássicas antes utilizadas em contextos como sistemas de partículas, spins, átomos, etc. e que agora são utilizadas em sistemas que não pertenceriam ao escopo da Física. Já os cientistas sociais não acreditam nas representações extremamente simplificadas das interações entre indivíduos e os mecanismos internos que os levam a tomar suas decisões, escolhas, obter suas opiniões, comportamentos, etc.

Em primeiro lugar, a Mecânica Estatística se destina a explicar grandezas macroscópicas de um sistema e, para tanto, baseia-se nas características dos constituintes microscópicos do mesmo. Quando queremos estudar por exemplo a magnetização média de um material ferromagneto, podemos fazê-lo por meio da determinação dos spins individuais do material, posteriormente realizar uma média e assim também o fazemos para o cálculo da energia total, da entropia e outros potenciais termodinâmicos. Por que, então, não podemos fazer o mesmo para a obtenção de uma média das opiniões sobre um determinado assunto? Isso é justamente o que os pesquisadores de dinâmica de opiniões fazem quando caracterizam engajamento de uma pessoa frente a um determinado assunto (política, posicionamento em relação a uma causa, comportamento “honesto” ou “desonesto”, etc.).

Em segundo lugar, é verdade que as interações entre organismos biológicos e suas ações “independentes” ou “autônomas” são em via de regra extremamente complexas e intrincadas. Ainda não compreendemos a totalidade das conexões entre neurônios que regem o cérebro humano (conectoma). Como, então, poderíamos estar aptos a descrever o comportamento de uma sociedade?

O que verificamos em décadas recentes é que muitos aspectos das sociedades demonstram emergências, comportamentos coletivos e consensos, particularidades que podem ser obtidas através da simplificação dos mecanismos que por exemplo são responsáveis pela mudança de comportamento que levam um indivíduo sonegador vir a contribuir com os mesmos. É possível, no entanto, construir um modelo em que possamos estimar uma densidade de indivíduos sonegadores em uma sociedade, afinal, esta é a proposta deste trabalho.

O grande desafio, então, da sociofísica é a determinação de um modelo coerente para descrever estados de interesse (saudável, doente, honesto, sonegador, suscetível, apoiadores convictos de uma causa, indeciso, etc). É igualmente importante entendermos como os constituintes do nosso sistema (indivíduos) se relacionam e se conectam, como é afinal a estrutura organizacional entre esses indivíduos. Para nos auxiliar, temos toda uma área que estuda esta questão: a Teoria dos Grafos [1]. Podemos interpretar a distribuição de indivíduos dentro de uma sociedade como os vértices de um grafo e as conexões entre indivíduos como as arestas. A importância e a utilização dos grafos, ou redes como chamaremos em breve, serão melhores discutidas em seções futuras.

Em resumo, a sociofísica é um campo amplo com muitas divisões e aplicações: propagação de rumores, dinâmica de opiniões, votações, arrecadação de impostos, disseminação

de doenças, etc. no qual se tem obtido êxito em prever e explicar comportamentos, consensos, radicalismos e muitas outras características da sociedade [2], [3], [4] [5], [6], [7]. Estamos interessados em estudar e descrever um dos maiores, senão o maior, dos empecilhos na obtenção de receita em qualquer governo: a evasão fiscal.

Nas seções seguintes vamos discutir um pouco a importância deste problema e apresentar um modelo original que se propõe a descrever esta dinâmica de comportamento.

## 1.2 Trabalhos anteriores

Um modelo interessante foi proposto por Zaklan e colaboradores [8] ao analisar o problema da evasão fiscal através de uma analogia direta com o modelo de Ising na rede quadrada [9]. Em vez de termos spins *up* e *down* distribuídos em uma rede quadrada, temos indivíduos honestos e evasores que podem ou não mudar seus “estados” por meio da influência dos indivíduos presentes em suas vizinhanças e de uma “temperatura social”  $T$ . Para baixas temperaturas sociais, poucos indivíduos mudam de estado e, em contrapartida, para valores elevados de temperaturas sociais, maior é a quantidade de mudanças. No modelo de Zaklan temos, também, um fator de controle fiscal e punição. Através uma probabilidade  $p_a$ , um indivíduo sonegador pode ser pego pela fiscalização e ser obrigado a permanecer  $k$  passos de tempo sendo contribuinte (honesto).

Em outro modelo, que também utiliza dois estados para descrever o comportamento com os tributos (honesto ou evasor) utiliza-se como base o modelo do votante majoritário com ruído [10]. Através de um parâmetro socioeconômico  $q$  chamado de ruído, um indivíduo adquire a mesma opinião da minoria. Este ruído mostra o quão averso do consenso da sociedade estão os indivíduos.

Um terceiro modelo, que também vale ser comentado e cuja existência, foi importante para o nosso trabalho foi desenvolvido por Jon S. Davis e colaboradores [11]. Neste trabalho, foi introduzido um novo estado que, por sua vez, é intermediário aos habituais honestos e sonegadores: o estado suscetível. Ou seja, este modelo incorpora à sociedade um novo grupo de indivíduos que contribuem, mas que por não estarem satisfeitos com a utilização dos impostos ou com a sua alíquota, se tornam potenciais evasores se lhes for conveniente em algum momento.

Influências entre diferentes tipos de indivíduos também aparecem neste estudo. Um dos modelos que propomos pode ser compreendido como uma expansão do trabalho de Jon S. Davis e colaboradores em que reinterpretaremos alguns parâmetros socioeconômicos e

novos procedimentos de mudança entre os diferentes estados, além de considerarmos novas interações e também diferentes redes de interação entre os indivíduos.

No desenvolvimento deste trabalho, iremos propor também alguns modelos baseados em agentes para analisar a dinâmica de evasão fiscal em determinadas sociedades. O que caracteriza nossa sociedade é a rede adotada para simbolizar a estrutura de contatos entre os indivíduos e um conjunto de parâmetros socioeconômicos. A transição (mudança entre os estados ou, como podemos chamar, comportamentos) se dá através de mecanismos similares aos estudados em processos epidêmicos [5], [6], [12], [13], [14]. Incorporaremos também o efeito da ação de órgãos fiscalizadores (por exemplo a Receita Federal no Brasil e *IRS - Internal Revenue Service* nos EUA) sobre o comportamento dos indivíduos.

Para cada um dos modelos que apresentaremos, obtivemos resultados interessantes que serão devidamente discutidos em suas respectivas seções.

## 1.3 Equação Mestra

Um procedimento típico que exerce papel de destaque no estudo de sistemas sociofísicos consiste em definir taxas de transição probabilísticas para as mudanças entre configurações distintas do sistema correspondentes a diferentes valores das macro-variáveis. Estas taxas são utilizadas como blocos de construção visando a obtenção das equações para a evolução probabilística do conjunto destas macro-variáveis. Chamamos então de equação mestra [15] a equação que descreve a taxa de variação da probabilidade para um sistema ocupar cada um de um conjunto discreto de estados em um determinado instante de tempo  $t$ .

### 1.3.1 Demonstração

Para começarmos, vamos imaginar 2 possíveis estados para um agente. Sejam então os estados 1 e 2.

Sejam  $\omega(1 \rightarrow 2)$  a taxa com que um agente no estado 1 muda para o estado 2 e  $\omega(2 \rightarrow 1)$  a taxa de transição inversa. Assim,  $\omega(1 \rightarrow 2)dt$  é a probabilidade com que um agente no estado 1 passe a estar no estado 2 entre os instantes  $t$  e  $t + dt$ . Por outro lado, o processo inverso, ou seja, o que levaria o elemento do sistema atualmente do estado 2 para o estado 1 não precisa necessariamente acontecer com a mesma taxa  $\omega(1 \rightarrow 2)$  e pode até mesmo não existir. Por exemplo, um átomo instável depois de sofrer fissão não retorna

ao átomo original. A partir de um tempo  $t$ , vamos descobrir as probabilidades  $P_1(t)$  e  $P_2(t)$  representando, respectivamente, as probabilidades de encontrarmos um agente específico no estado 1 e no estado 2. Para tal, vamos considerar dois instantes de tempo sucessivos  $t$  e  $t + dt$ . Como observação importante, estamos considerando este processo como uma cadeia de Markov, ou seja, uma mudança de estado no tempo  $t$  não depende do que aconteceu em tempos anteriores e sim no instante atual. Sendo assim, estamos considerando um sistema sem memória. Esta aproximação nem sempre é condizente com sistemas sociais [16], entretanto, iremos utilizá-la a fim de conseguirmos obter neste caso, as probabilidades  $P_1(t)$  e  $P_2(t)$ . Vamos encontrar primeiro a probabilidade  $P_1(t)$  e inferir  $P_2(t)$  a partir da primeira.

Imaginemos um elemento do nosso sistema estando no tempo  $t + dt$  no estado 1, temos então que esta configuração só possa ter sido originada por duas situações no instante anterior  $t$ :

- 1) O elemento já estava no estado 1 e não mudou de estado.
- 2) O elemento estava anteriormente no estado 2 e mudou para o estado 1.

Desta forma, podemos escrever a probabilidade  $P_1(t + dt)$  de encontrarmos o agente no estado 1 no tempo  $t + dt$  como:

$$P_1(t + dt) = P_1(t).Probabilidade(permanecer\ em\ 1) \quad (1.1)$$

$$+ P_2(t).Probabilidade(mudar\ de\ 2\ para\ 1). \quad (1.2)$$

Como as  $\omega_{i \rightarrow j}$  representam as taxas das mudanças do estado  $i$  para o estado  $j$  ( $i \neq j$ ) no tempo  $t$ ,  $\omega_{i \rightarrow j}dt$  representa a probabilidade de mudança de estado (entre os mesmos estados considerados) entre os instantes  $t + dt$ . Assim, podemos reescrever a equação (1.2) como:

$$P_1(t + dt) = P_1(1 - \omega_{1 \rightarrow 2}dt) + P_2\omega_{2 \rightarrow 1}dt + O(dt^2), \quad (1.3)$$

onde o termo  $1 - \omega_{1 \rightarrow 2}dt$  é o complementar de  $\omega_{1 \rightarrow 2}$ , ou seja, a probabilidade do agente estar no estado 1 e permanecer lá. O termo  $O(dt^2)$  representa a probabilidade do agente ser encontrado no estado 1 no instante  $t + dt$  devido a duas mudanças: do estado 1 para o estado 2 e do estado 2 para o estado 1. Desta forma:

$$O(dt^2) = \omega_{1 \rightarrow 2}dt \times \omega_{2 \rightarrow 1}dt. \quad (1.4)$$

Entretanto, para intervalos de tempo curtos ( $dt \rightarrow 0$ ) este termo é desprezível. Podemos obter uma expressão para a diferencial  $dP_1(t)$ :

$$dP_1(t) = P_1(t + dt) - P_1(t) = -P_1(t)\omega_{1 \rightarrow 2}dt + P_2(t)\omega_{2 \rightarrow 1}dt. \quad (1.5)$$

Para  $dt \rightarrow 0$ , temos então:

$$\frac{dP_1(t)}{dt} = -\omega_{1 \rightarrow 2}P_1(t) + \omega_{2 \rightarrow 1}P_2(t). \quad (1.6)$$

De maneira análoga temos:

$$\frac{dP_2(t)}{dt} = -\omega_{2 \rightarrow 1}P_2(t) + \omega_{1 \rightarrow 2}P_1(t). \quad (1.7)$$

Estas expressões para as taxas de variação de  $P_1(t)$  e  $P_2(t)$  formam o que conhecemos como equações mestras para este sistema simples (um elemento podendo estar em um de dois estados discretos distintos).

### 1.3.2 Caso Geral

Vamos a partir daqui expandir de algumas formas estas expressões visando analisar sistemas mais gerais. Primeiramente, vamos considerar que em vez de somente um agente, podemos ter um total de  $N$  elementos distintos que podem ainda ser encontrados em um de dois estados discretos distintos (os mesmos estados considerados até agora). Seja então o caso em que  $n$  destes  $N$  agentes estejam no estado 1 por exemplo e, com isso, obviamente  $N - n$  estejam no estado 2 no instante de tempo  $t + dt$ . Para esta configuração, 1 de 3 possíveis eventos devem ter acontecido:

- 1) Nenhum agente mudou de estado.
- 2) Existiam  $n - 1$  agentes no estado 1 e  $N - n + 1$  agentes no estado 2 no instante  $t$  de tal forma que um destes  $N - n + 1$  agentes mudou de estado para o estado 1.
- 3) Existiam  $n + 1$  agentes no estado 1 e  $N - n - 1$  agentes no estado 2 no instante  $t$  de tal forma que um destes  $n + 1$  agentes mudou de estado para o estado 2.

Assim, com estes possíveis casos em mente, podemos obter uma expressão para a probabilidade  $p(n; t + dt)$  de encontrarmos  $n$  agentes no estado 1 no instante  $t + dt$ :

$$p(n; t + dt) = p(n; t). \text{Probabilidade}(\text{nenhum agente muda de estado}) \quad (1.8)$$

$$+ p(n - 1; t). \text{Probabilidade}(\text{um dos } N - n + 1 \text{ agentes muda de estado}) \quad (1.9)$$

$$+ p(n+1; t). \text{Probabilidade(um dos } n+1 \text{ agentes muda de estado)}. \quad (1.10)$$

$$p(n; t+dt) = p(n; t)\{1 - [n\omega_{1 \rightarrow 2} + (N-n)\omega_{2 \rightarrow 1}]dt\} \quad (1.11)$$

$$+ p(n-1; t)(N-n+1)\omega_{2 \rightarrow 1}dt \quad (1.12)$$

$$+ p(n+1; t)(N-n-1)\omega_{1 \rightarrow 2}dt + O(dt^2). \quad (1.13)$$

Podemos reescrever a equação 1.13 da seguinte forma:

$$\frac{\partial p(n; t)}{\partial t} = -[n\omega_{1 \rightarrow 2} + (N-n)\omega_{2 \rightarrow 1}]p(n; t) \quad (1.14)$$

$$+ (N-n+1)\omega_{2 \rightarrow 1}p(n-1; t) + (n+1)\omega_{1 \rightarrow 2}p(n+1; t). \quad (1.15)$$

Como temos  $N$  agentes, teremos então  $N+1$  equações mestras, 1 para cada agente do sistema.

Vamos finalmente estudar o caso mais geral onde além de considerarmos  $N$  agentes, temos  $i$  estados discretos possíveis. Seja então  $P_i(t)$  a probabilidade de um agente ser encontrado no estado  $i$  em um tempo  $t$ . Se este elemento do sistema está no instante  $t$  no estado  $i$ , ele pode ir para qualquer outro estado  $j$  com uma taxa  $\omega(i \rightarrow j)$ . Assim, a probabilidade de encontrarmos o agente no estado  $j \neq i$  no tempo  $t+dt$  é dado por:  $\sum_{i \neq j} \omega(i \rightarrow j)dt$ , assim como a probabilidade que ele permaneça no estado  $i$  é dada por:  $1 - \sum_{i \neq j} \omega(i \rightarrow j)dt$ . Ao mesmo tempo, a probabilidade de que exista alguma mudança de algum estado  $j \neq i$  para o estado  $i$  no tempo  $t+dt$  é dado por:  $\sum_{i \neq j} \omega(j \rightarrow i)dt$  e a de que ele não mude de estado é dada por:  $1 - \sum_{i \neq j} \omega(j \rightarrow i)dt$ . Assim, a probabilidade  $P_i(t+dt)$  de encontrarmos o agente no estado  $i$  no tempo  $t+dt$  pode ser escrito como:

$$P_i(t+dt) = P_i(t)[1 - \sum_{i \neq j} \omega(j \rightarrow i)dt] \quad (1.16)$$

$$+ P_j(t) \sum_{i \neq j} \omega(i \rightarrow j)dt + O(dt^2). \quad (1.17)$$

Para  $dt \rightarrow 0$ :

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = \sum_{j \neq i} [-\omega(i \rightarrow j)P_i(t) + \omega(j \rightarrow i)P_j(t)]. \quad (1.18)$$

Utilizando novamente a notação  $\omega_{i \rightarrow j} \equiv \omega(i \rightarrow j)$  e considerando que estas taxas não necessariamente sejam constantes no tempo:

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = \sum_{j \neq i} [-\omega_{i \rightarrow j}(t)P_i(t) + \omega_{j \rightarrow i}(t)P_j(t)]. \quad (1.19)$$

Para a resolução da equação acima, precisamos dos valores iniciais  $P(t = t_0)$ , para todos os  $i$  estados possíveis.

Como comentário final, podemos estender a equação (1.19) para o caso em que os estados possíveis são um conjunto contínuo. Como exemplo, podemos considerar o movimento browniano unidimensional onde uma partícula pode estar em uma posição  $x$  e mudar aleatoriamente para uma posição  $y$  com uma taxa  $\omega(x \rightarrow y)$ . Podemos escrever uma equação para a taxa de variação da densidade de probabilidade  $f(x; t)$  de encontrarmos a partícula na posição  $x$  no tempo  $t$  através da seguinte expressão:

$$\frac{\partial f(x; t)}{\partial t} = \int [\omega(y \rightarrow x)f(y; t) - \omega(x \rightarrow y)f(x; t)]dy. \quad (1.20)$$

## 1.4 Modelo Baseado em Agentes

Em algumas situações, equações diferenciais que descrevem aspectos ou grandezas do sistema estudado são extremamente difíceis de serem resolvidas. Uma das maneiras de contornarmos este empecilho é a utilização de modelos baseados em agentes. Na maioria dos casos, esta estratégia envolve o uso de computadores, através de simulação computacional. As características de cada “indivíduo” são armazenadas na memória do computador e atualizadas de acordo com certas regras que descrevem o problema (objeto de estudo). Estes agentes podem interagir de forma direta e indireta. As interações diretas são geralmente locais e regidas pela topologia da rede utilizada, daí a importância da escolha ou consideração da rede para o estudo de um sistema social.

Podemos impor pequenas distinções entre diferentes simulações por meio da utilização de números aleatórios. Ao simularmos, então, um mesmo sistema várias vezes em condições iniciais distintas, em geral obteremos respostas distintas também. O resultado final para as grandezas macroscópicas de interesse é obtido pela média dos diferentes resultados obtidos. Esta abordagem é extremamente flexível e permite introduzir características heterogêneas para os indivíduos e para suas interações.



## 2 *Evasão Fiscal*

No presente capítulo, iremos discutir os problemas da evasão fiscal. Para tal, apresentaremos a justificativa para a tributação, os impactos da sonegação fiscal no Brasil e no mundo e como a evasão é combatida. Este capítulo irá definir o problema central deste trabalho e assim, a nossa motivação.

### 2.1 Introdução

Problemas socioeconômicos têm sido alvos de diversos estudos, discussões e abordagens nos últimos anos [6], [12]. Existe, inclusive, uma área da física chamada econofísica [17] que se propõe a estudar problemas da economia com ferramentas de processos estocásticos e dinâmica não-linear. Problemas interdisciplinares deste tipo são muitas vezes estudados através de simulação computacional.

Uma das explicações do aumento considerável de artigos abordando este assunto (problemas interdisciplinares através de simulação computacional) é o veloz crescimento da capacidade de processamento que também cresce vertiginosamente. Entre estes problemas, podemos destacar a dinâmica de evasão fiscal.

A evasão fiscal representa um grande inibidor de arrecadação para os governos e o Brasil, por sua vez, possui uma das maiores porcentagens de sonegadores do mundo [18]. Por este motivo, o problema tem sido estudado extensivamente há muito tempo por economistas e recentemente por físicos [8], [19], [20], [21], [22] e [23].

#### 2.1.1 Justificativa para a tributação

É de responsabilidade do governo a tarefa de organizar e regular as relações existentes na sociedade. Para tal, o governo pode requerer a arrecadação de recursos através de impostos sobre a população que, por sua vez, devem ser gastos em funções típicas do governo. Funções estas que se o governo não as fizer, a princípio ninguém as fará, visto

que as mesmas são de bens públicos. Em nosso escopo, bens públicos são definidos no artigo 99 da Lei N° 10.406, de 10 de Janeiro de 2002 [24] como:

"os de uso especial, tais como edifícios ou terrenos destinados a serviço ou estabelecimento da administração federal, estadual, territorial ou municipal, inclusive os de suas autarquias"

Em se tratando da política fiscal, as funções atribuídas ao governo podem ser classificadas em 3 classes básicas:

- Função alocativa: Fornecimento dos bens públicos, determinando o tipo e a quantidade destes bens. Além disso, a função alocativa possui a responsabilidade de adequar os níveis de contribuição de cada contribuinte.
- Função distributiva: Faz relação aos ajustes na distribuição de renda e da riqueza de forma justa. Observa-se esta função quando nos deparamos com programas sociais como: Bolsa família, programa Fome Zero e afins.
- Função estabilizadora: Por meios de ajustes do governo utilizando políticas macroeconômicas, tem-se como objetivo a otimização dos empregos, a busca da estabilidade dos preços e a promoção do crescimento econômico.

Além de financiar os gastos públicos, a atuação da tributação implica em consequências sobre os indivíduos e sobre a economia podendo, inclusive, ser utilizada para incentivo [25].

### 2.1.2 O que é evasão fiscal?

De acordo com [26], a evasão fiscal é a prática que infringe a lei, cometida após a ocorrência do fato gerador da obrigação tributária, objetivando reduzi-la ou ocultá-la. A evasão fiscal está prevista e capitulada na Lei dos Crimes contra a Ordem Tributária, Econômica e contra as Relações de Consumo (Lei n° 8.137/90) [27].

A evasão fiscal é ilícita, visto que se trata de uma tentativa do contribuinte de se ver livre de suas obrigações fiscais após as mesmas terem sido geradas. Com isso, o contribuinte de maneira fraudulenta não paga seus tributos, omitindo informações ou prestando declarações falsas, inserindo elementos inexatos, ou omitindo operações de qualquer natureza, em documento ou livro exigido pela lei fiscal [29], falsificação ou alteração de

nota fiscal, fatura duplicada, nota de venda ou qualquer outro documento associado à operações tributáveis.

Sobre estes exemplos citados, existe uma grande quantidade de desdobramentos destas práticas. No entanto, não se deve afirmar que qualquer prática para a diminuição da carga tributária configura evasão fiscal e, por consequência, ato ilícito. Como exemplo de prática lícita, podemos citar a elisão fiscal.

### **2.1.2.1 Elisão fiscal**

A elisão fiscal é configurada por um conjunto de escolhas autorizadas pela legislação fiscal (ou não efetivamente proibidas). Essas práticas também possuem como objetivo protelar ou evitar o pagamento de tributos.

Uma das diferenças fundamentais da elisão para a evasão fiscal está na primeira ser apresentada antes do fato gerador ocorrer. A elisão fiscal pode ser classificada como sendo induzida pela própria lei, assim como, por brechas na mesma.

Como exemplo de elisão induzida e incentivada, temos no Brasil a "Lei do Simples" [35] que é um sistema de tributação simplificada criada para facilitar o recolhimento de contribuições das micro e pequenas empresas. Já, como exemplo de elisão exercida através de brechas, temos uma empresa hipotética prestadora de serviços que após mudar seu domicílio para um município, consegue uma redução da alíquota [36] do ISS (imposto sobre serviço) [37]. Ainda sobre este exemplo, se de fato esta empresa possui como sede física o município de menor alíquota do ISS isso não configura ação ilícita. Entretanto, se a sede no outro município for de fachada, fica configurado ato ilícito.

### **2.1.3 Impactos da sonegação**

Um dos impactos diretos da sonegação está nos contribuintes que tentam estar em dia com suas obrigações fiscais. Quando uma parcela da população sonega, os não-sonegadores se veem sobrecarregados e frustrados [33].

O sistema tributário nacional não leva em consideração as condições socioeconômicas do contribuinte [38]. Impostos como o IPI [39] e o ICMS [40] possuem a mesma alíquota (percentual com que um tributo incide sobre o valor de algo tributado) sobre pessoas de rendas distintas. Com isso, não se faz valer o princípio jurídico constitucional tributário da progressividade [41].

Não bastante toda a problemática envolvida, a sonegação fiscal e escândalos de corrupção andam de mãos dadas [42], [43].

## 2.2 Sistema tributário brasileiro

A normatização do sistema tributário nacional está prevista na Constituição Federal de 1988 [44] a partir do artigo 145 e no Código Tributário Nacional [45]. Esta normatização tem como finalidade a regulamentação de toda e qualquer atividade tributária no país, utilizando taxas, impostos, contribuições de melhoria e contribuições especiais como forma de controle. Através deste sistema, o governo pode intervir em determinados setores da economia, se assim achar necessário visando estimular ou reduzir a produção ou consumo de produtos e serviços.

O Brasil é considerado um país com grande carga tributária [28], [46], [47], [48], [49]. Em 2012 foi realizada uma pesquisa que mostra o Brasil como sendo detentor do sistema tributário mais caro e complexo do mundo [46]. No total, cerca de 85 tributos são cobrados [50]. Além disso, o país sofre com o elevado índice de insatisfação em relação ao retorno destas arrecadações [47]. De acordo com o IBPT, o brasileiro em média precisou trabalhar 153 dias para pagar todos os seus impostos no ano de 2017 [28].

Na tabela 1, que mostra a quantidade de dias (e meses) em média que o brasileiro precisa trabalhar para estar em dia com suas responsabilidades fiscais entre os anos de 1986 até 2017, podemos notar um aumento percentual de aproximadamente 46% desta relação no período analisado. A sufocante carga tributária e o péssimo retorno destes impostos acarreta em maiores motivos para o comportamento sonegador tão elevado no país [48].

| <b>Ano</b> | <b>Dias</b> | <b>Meses</b>        |
|------------|-------------|---------------------|
| 1986       | 82          | 2 meses e 22 dias   |
| 1987       | 74          | 2 meses e 14 dias   |
| 1988       | 73          | 2 meses e 13 dia    |
| 1989       | 81          | 2 meses e 21 dias   |
| 1990       | 109         | 3 meses e 19 dias   |
| 1991       | 90          | 3 meses             |
| 1992       | 93          | 3 meses e 3 dias    |
| 1993       | 92          | 3 meses e 2 dias    |
| 1994       | 104         | 3 meses e 14 dias   |
| 1995       | 106         | 3 meses e 16 dias   |
| 1996       | 100         | 3 meses e 10 dias   |
| 1997       | 100         | 3 meses e 10 dias   |
| 1998       | 107         | 3 meses e 17 dias   |
| 1999       | 115         | 3 meses e 25 dias   |
| 2000       | 121         | 4 meses e 1 dia     |
| 2001       | 130         | 4 meses e 10 dias   |
| 2002       | 133         | 4 meses e 13 dias   |
| 2003       | 135         | 4 meses e 15 dias   |
| 2004       | 138         | 4 meses e 18 dias   |
| 2005       | 140         | 4 meses e 20 dias   |
| 2006       | 145         | 4 meses e 25 dias   |
| 2007       | 146         | 4 meses e 26 dias   |
| 2008       | 148         | 4 meses e 28 dias   |
| 2009       | 147         | 4 meses e 27 dias   |
| 2010       | 148         | 4 meses e 28 dias   |
| 2011       | 149         | 4 meses e 29 dias   |
| 2012       | 150         | 4 meses e 30 dias   |
| 2013       | 150         | 4 meses e 30 dias   |
| 2014       | 151         | 5 meses             |
| 2015       | 151         | 5 meses             |
| 2016       | 153         | 5 meses e um dia    |
| 2017       | 153         | 5 meses e dois dias |

Tabela 1: Dias trabalhados em média por ano para um trabalhador pagar impostos no Brasil desde o ano de 1988 até 2017. A tabela foi obtida em [28].

| País        | PIB<br>(\$ milhões) | Sonegação<br>(% do PIB) | Tributação (%) | Total sonegado<br>(\$ milhões) |
|-------------|---------------------|-------------------------|----------------|--------------------------------|
| U.S.A       | 14,582,400          | 8.6%                    | 26.9%          | 337,349                        |
| Brasil      | 2,087,890           | 39%                     | 34.4%          | 280,111                        |
| Itália      | 2,051,412           | 27%                     | 43.1%          | 238,723                        |
| Rússia      | 1,479,819           | 43.8%                   | 34.1%          | 221,023                        |
| Alemanha    | 3,309,669           | 16%                     | 40.6%          | 214,996                        |
| França      | 2,650,002           | 15%                     | 44.6%          | 171,264                        |
| Japão       | 5,497,813           | 11%                     | 28.3%          | 171,147                        |
| China       | 5,878,629           | 12.7%                   | 18%            | 134,385                        |
| Reino Unido | 2,246,079           | 12.5%                   | 38.9%          | 109,216                        |
| Espanha     | 1,407,405           | 22.5%                   | 33.9%          | 107,350                        |

Tabela 2: PIB (em milhões de dólares), sonegação no país em relação ao PIB, carga tributária percentual e o valor total sonegado (em milhões de dólares) dos 10 países que mais deixaram de arrecadar impostos devido a sonegação fiscal em 2011. Obtido de [48].

### 2.2.1 Sonegação fiscal no Brasil

A sonegação fiscal no Brasil é muito antiga. Já no Brasil colônia existia a prática dos "santos do pau oco". A Coroa Portuguesa tributava o ouro extraído no país em 20%. Afim de burlar esta contribuição, alguns mineradores escondiam o ouro dentro de figuras religiosas feitas de madeira possuindo cavidades preparadas para este fim. Além da elevada carga tributária já citada, o Brasil está na lista dos países que menos oferecem retorno de qualidade para seus contribuintes [47]. De acordo com o IBPT, mais de 300 mil normas referentes a matéria tributária de 1988 até 2015 foram criadas. A maioria destas normas são excessivas, tendo como consequência o exaurimento dos contribuintes, confundindo-os e exigindo um trabalho enorme para a compreensão e cumprimento de todas as regras vigentes. Além deste montante de normas tributárias, existe um problema gravíssimo com relação à forma como os impostos são criados/cobrados. De acordo com o parágrafo 1 do artigo 145 da Constituição Federal de 1988 [44]:

"Sempre que possível, os impostos terão caráter pessoal e serão graduados segundo a capacidade econômica do contribuinte, facultado à administração tributária, especialmente para conferir efetividade a esses objetivos, identifi-

car, respeitados os direitos individuais e nos termos da lei, o patrimônio, os rendimentos e as atividades econômicas do contribuinte."

Entretanto, de acordo com [49], a maioria dos impostos no país não levam em consideração as condições econômicas dos contribuintes visto que, se o imposto for de incidência indireta, como nos exemplos já comentados do IPI [39] e do ICMS [40], a transferência do ônus financeiro para outra pessoa dificulta a graduação na medida exata da capacidade do contribuinte (ferindo a progressividade). Esse é um dos motivos de se dizer que quem geralmente paga os impostos são os cidadãos consumidores (o cidadão comum).

## **2.2.2 Fiscalização no Brasil**

A Receita Federal (ou secretaria da Receita Federal) [51] é um órgão subordinado ao Ministério da Fazenda [52] responsável por zelar pelos tributos e atuar no combate à sonegação, entre outras práticas ilícitas. De fato, esta não é uma tarefa simples, visto que mesmo empresas e pessoas físicas que possuem interesse em estar em dia com suas atribuições fiscais, muitas vezes encontram problemas em fazê-lo devido à grande complexidade tributária do país. Ademais, existem, também empresas e indivíduos que através da evasão tentam diminuir e até mesmo evitar completamente a tributação. Para realizar esta fiscalização, a Receita Federal trabalha através de dois procedimentos: acompanhamento eletrônico de contribuintes e a fiscalização pessoal.

### **2.2.2.1 Acompanhamento eletrônico de contribuintes**

Através da utilização de computadores, são realizados cruzamentos de dados de todos os contribuintes brasileiros. Exemplo: uma determinada empresa entrega sua declaração de imposto de renda, na qual consta uma série de informações que, por sua vez, são utilizadas para confirmar os dados obtidos através de outras declarações de renda.

Esta checagem eletrônica é o primeiro ponto para o acompanhamento dos contribuintes. Assim, nem sempre um fiscal precisa realizar uma perícia presencial.

### **2.2.2.2 Fiscalização presencial**

Um agente da Receita Federal é enviado, ou a pessoa física é intimada para comparecer à Receita Federal. O agente desenvolve uma série de atividades que tem por objetivo aprofundar a análise eletrônica realizada previamente. Geralmente, é dada uma atenção

maior para movimentações bancárias. Às vezes, um dos procedimentos adotados pela fiscalização é a intimação para apresentação dos extratos bancários. Para cada um dos créditos pede-se a explicação legal e o imposto relativo pago.

Fica evidente o dispêndio de recursos humanos para este tipo de acompanhamento. Manter a atual eficiência da identificação de indivíduos sonegadores na população por si só já é uma tarefa árdua.

## 2.3 Evasão fiscal no mundo

### 2.3.1 Comentários gerais

Na pesquisa mostrada em [48], o autor se propõe a realizar a difícil missão de avaliar os impactos da sonegação fiscal nos maiores países evasores do mundo (em relação ao montante sonegado).

A tabela 2 foi criada pela *Tax Justice Network*, uma rede internacional independente fundada em 2003 dedicada à pesquisa de alto nível, análise e advocacia nas áreas de tributação internacional e regulamentação financeira [54]. Nela podemos encontrar o PIB, a porcentagem de sonegação em relação ao PIB, a carga tributária e o que deixa de ser arrecadado devido à sonegação dos 10 países com o maior montante sonegado.

Gradativamente, através do auxílio de informações de outras fontes acadêmicas, governamentais e da mídia, o escopo total dos impactos da evasão fiscal começam a se tornar mais claros. Podemos entender estes resultados através de vários olhares. Em primeiro lugar, embora seja dissonante do senso comum, a relação entre altas taxas de impostos e a evasão fiscal não é tão imediata. Como foi observado por David Cay Johnston:

"Os EUA possuem menor taxa tributária do que 8 dos 9 outros países da lista."

Nas palavras de John Christensen, diretor da *Tax Justice Network International Secretariat*:

"A evasão fiscal é endêmica e tem atualmente piorado na maioria dos países, apesar das menores taxas de impostos e de licenças muito generosas."

Ainda em suas palavras:



"Em muitos casos, a situação deteriorou-se devido ao uso de estruturas *offshore* [53] sofisticadas, que usam jurisdições secretas, terem se tornado mais difundidas nas últimas décadas. Desta forma, algumas ações políticas, a fim de contornar estas perdas de arrecadações, resultaram na criação, ou aumento, de impostos indiretos, como tributações sobre vendas e direitos aduaneiros (regras para regulamentação e controle de operações de comércio exterior) que são extremamente regressivos e, portanto, afetam mais veementemente as pessoas comuns, em vez de enfrentar a evasão endêmica por indivíduos ricos e as grandes empresas que, por sua vez, representam a maior parcela do montante que é sonegado".

Sobre a maior parcela do que é evadido ser de responsabilidade daqueles que possuem maior poder aquisitivo, o jornal *The Guardian* e a revista *Fast Company* publicaram em 2017 matérias sobre o assunto [55], [56]. Além disso, mais sobre as consequências de tributação sobre as menores classes econômicas podem ser vistas no trabalho de H. Immervoll et al [57].

Como podemos observar na tabela 2, os EUA lideram o *ranking* dos maiores países sonegadores. Entretanto, este destaque não se dá exatamente à porcentagem do PIB sonegada (que é baixa em relação aos outros países), mas sim devido ao fato dos EUA possuírem o maior PIB do mundo (tanto em 2011 quanto hoje) [58] e, assim, qualquer fração de evasão em relação ao PIB do país se torna significativa.

De fato, os estadunidenses são mais dispostos em média a cumprirem suas obrigações fiscais se comparados aos habitantes dos outros países. Este comportamento é conhecido como "moral fiscal" (ou moral tributária) [59].

A "economia das sombras", como é chamado o montante que é sonegado, representa 8.6% do PIB dos EUA e é notavelmente menor do que qualquer um dos países da lista. Entretanto, é provável que a moral fiscal dos EUA tenha piorado depois da pesquisa citada, devido aos tributos que se tornaram mais complexos.

A *Internal Revenue Service (IRS)* é uma agência que faz parte do departamento do Tesouro dos EUA e é responsável pela cobrança de impostos do país e administra o *Internal Revenue Code* promulgado pelo Congresso americano [60]. De acordo com sua divisão criminal, o número de casos recomendados para julgamento aumentou 33% entre os exercícios fiscais de 2009 e 2011. Entretanto, de acordo com Scott Klinger, do grupo de vigilância da *Business for Shared Prosperity*:

"O IRS está se movendo em direção a um regime de execução mais negligente de algumas maneiras."

Scott Klinger se refere aos cortes do orçamento do IRS [61], [62], [63], [64] que o colocam em desvantagem contra grandes multinacionais, como a *General Eletric*, que possui 1000 funcionários em seu departamento de impostos empregando sofisticadas técnicas de minimização de impostos. Como outros exemplos de multinacionais que possuem grandes setores dedicados à tributação, podemos citar a *Apple* e a *Amazon* que recentemente sofreram uma ofensiva da União Européia devido a práticas de otimização fiscal [65], [66].

Além de todas estas explicações referentes aos EUA, podemos também citar o exemplo da China na sétima posição no ranking. O país atualmente possui a segunda maior economia do mundo [58], mas o que chama a atenção é o fato da sonegação fiscal na China ser fortemente punida. Até recentemente, o governo chinês poderia punir com a morte indivíduos culpados por evasão fiscal [67]. Mesmo assim, a taxa de sonegação da China é maior que a do Japão e do Reino Unido. Isso é um pequeno indício de que o peso da punição não é a única ferramenta para inibir o comportamento sonegador.

### 2.3.2 O lugar do Brasil no cenário mundial

Como detentor da maior economia da América Latina, possuindo o maior PIB [68], o Brasil assume a segunda posição no *ranking* dos maiores países sonegadores, como podemos ver na tabela 2. Especialistas apontam as leis fiscais antiquadas [69] como responsáveis pela dificuldade do crescimento econômico. Nota-se que no quadro geral, o país não possui a maior tributação entre os países da lista.

Como já comentado, muitos são os fatores que fazem com que o país possua uma "economia das sombras" tão significativa. Mesmo a carga tributária do Brasil sendo menor que a da Itália, Alemanha, França, e Reino Unido, a insatisfação referente a como estes recursos são utilizados acarreta na desmotivação dos brasileiros em arcar com suas responsabilidades fiscais [49], tendo como resultado uma menor moral fiscal.

Pesquisas revelam que se o sentimento do contribuinte for de insatisfação, a sua predisposição em sonegar será maior [31] e [32]. Ainda de acordo com os estudos, constata-se que um estado mais legítimo e responsável é condição indispensável para implementações de políticas fiscais mais efetivas nos países em desenvolvimento.

A revista *Le Monde Diplomatique Brasil* publicou recentemente um artigo em que se discute qual deveria ser o melhor caminho: cortes de tributos e diminuição de investi-

mentos estatais ou uma reforma tributária mais estrutural. Neste estudo, fica claro que o que o Brasil arrecada por cidadão é muito menor do que o que outros países arrecadam, porém, estes outros países conseguem prover uma situação social muito melhor do que a nossa. A conclusão resumida é que o que de fato importa não é a porcentagem da carga tributária em relação ao PIB e sim o quanto o país se dispõe a investir por cidadão.

Na tabela 3, encontramos alguns dos dados obtidos de [70]. Na época em que a pesquisa foi publicada, dos países da tabela, somente a Alemanha possuía uma carga tributária percentual maior do que a do Brasil e, mesmo assim o Brasil fica em último lugar em relação ao que o governo investe por cidadão (educação, saúde, saneamento básico e etc).

| <b>Pais</b>   | <b>PIB em US\$<br/>bilhões</b> | <b>Tributação<br/>(% PIB)</b> | <b>Investimento<br/>(per capita) em US\$</b> |
|---------------|--------------------------------|-------------------------------|--|
| EUA           | 18.570                         | 25,4                          | 14.422                                       |
| Brasil        | 1.799                          | 33,7                          | 2.928  |
| Alemanha      | 3.467                          | 36,7                          | 15.703                                       |
| Japão         | 4.139                          | 29,5                          | 9.539  |
| Coreia do Sul | 1.411                          | 24,3                          | 6.725  |
| Chile         | 277                            | 20,2                          | 3.111  |

Tabela 3: PIB em bilhões de dólares, percentual do PIB em tributação e investimento per capita em dólares para alguns países obtido de [70]. Os dados da pesquisa foram obtidos em 2016.

## 2.4 Conclusão

A sonegação é um dos maiores empecilhos para a arrecadação dos governos, visto que a principal fonte de receita de um governo é a tributação [34]. Ela é um problema endêmico e mundial afetando não somente países com grandes taxas de tributação ,como o Brasil, assim como aqueles onde a tributação é considerada pequena (China por exemplo).

Além de ser um problema tão prejudicial a todos os países, a evasão fiscal é, muitas vezes, difícil de ser mensurada [71], deixando, assim, o problema com mais camadas de sofisticação. Depois desta explicação do problema, que foi desde a justificativa para a tributação, passando pela configuração do crime de sonegação, seus impactos, a situação dos maiores sonegadores e por fim até como o Brasil se encontra neste quadro, fica claro o motivo de alocar esforços visando entender melhor como a sonegação surge e se propaga.

Neste trabalho, apresentaremos alguns modelos que tentam descrever a dinâmica do comportamento de indivíduos em relação à sonegação fiscal. Estes indivíduos podem ou não sonegar, interagir entre si e adotar posturas dependendo de sua satisfação com o cenário tributário. Investigaremos, também, como é o impacto dos órgãos de fiscalização sobre estes comportamentos.

## *3 Redes, Transições de Fase e Processo de Contato*

Ao longo de todo este trabalho, estudaremos, entre outras coisas, o impacto da interação entre os indivíduos de uma sociedade. Para isso, faz-se necessário entender como estes indivíduos se conectam. Neste capítulo, faremos uma breve apresentação sobre as redes que iremos utilizar no desenvolver do trabalho. Além disso, será discutido um pouco sobre o problema das transições de fase e por fim, discutiremos sobre o modelo chamado de Processo de Contato que, por sua vez, será utilizado como base em alguns momentos.

### **3.1 Redes Utilizadas**

De nada adianta possuir um modelo que descreve alguma dinâmica social se não levarmos em consideração a rede de contatos na qual estes indivíduos estão inseridos. Visto que não estudamos uma sociedade específica e, sim, simulamos um conjunto de indivíduos, a escolha da rede utilizada reflete não somente a estrutura social que estamos interessados em simular como também as propriedades específicas que podemos obter do modelo dependendo da nossa escolha. No trabalho que propomos, com um certo abuso de linguagem, classificamos em 2 tipos as redes que utilizamos: redes regulares e redes complexas.

Definimos as redes regulares como aquelas em que padrões puramente geométricos são necessários para sua construção (ex: rede completamente conectada, rede quadrada e rede cúbica). Nestas redes, temos que cada um dos sítios se conecta com o mesmo número de outros sítios, tornando, assim, as redes isotrópicas (considerando condições de contorno adequadas). Redes deste tipo são importantes, por exemplo, na determinação de expoentes críticos e, quando possível, para o estudo da classe de universalidade do modelo.

Por outro lado, se estivermos interessados em investigar e analisar aspectos mais

realistas da aplicação de um modelo socioeconômico (como é o nosso caso), podemos utilizar as chamadas redes complexas. Aqui podemos novamente fazer uso de uma certa liberdade e considerar uma rede complexa como sendo aquela em que sua topologia é definida por regras probabilísticas. Como exemplos utilizamos a rede Erdős-Rényi (rede ER) e a rede Barabási-Albert (rede BA). A descrição de cada rede, assim como o estudo do modelo em cada uma destas, redes será feita a seguir.

### 3.1.1 Rede Completamente Conectada (Aproximação de Campo Médio)

Na rede completamente conectada (RCC ou *fully connected network*) cada um dos  $N$  sítios possui conexão com os outros  $N - 1$  sítios resultando, assim, em uma estrutura com elevado grau de conectividade para cada sítio. Na figura 1, podemos encontrar algumas redes completamente conectadas representadas por  $K_i$  ( $i = 2, 3, 4, 5, 6$  e  $7$ ), onde  $i$  representa o número total de vértices na rede. O fato de geralmente estas redes serem representadas como polígonos regulares é apenas uma maneira para a melhor visualização das conexões e em nada tem a ver com a organização geográfica dos sítios. De fato, do ponto de vista topológico, as distâncias entre os sítios da rede não são relevantes.

Devido a este elevado grau de conectividade, é comum utilizar a RCC como estrutura que representa a conexão entre elementos em modelos de campo médio, visto que é igualmente provável a interação entre quaisquer 2 sítios desta rede (não existe conexão proibida nem preferencial).

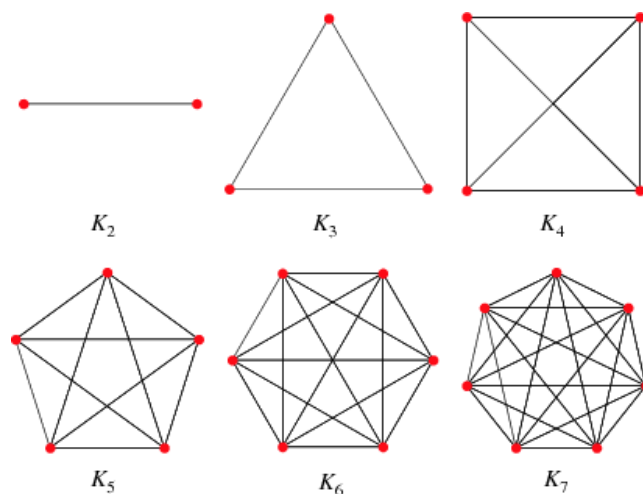


Figura 1: Redes completamente conectadas com 2, 3, 4, 5, 6 e 7 sítios e suas respectivas arestas.

### 3.1.2 Redes regulares (Redes Quadrada e Cúbica)

Nas redes quadradas e cúbicas, estamos diante de uma abordagem muito diferente da que utilizamos quando estudamos nosso modelo na rede completamente conectada, pois temos que cada sítio pode interagir com seus 4 e 6 primeiros vizinhos, respectivamente, que em geral é um número bem menor do que o total na rede.

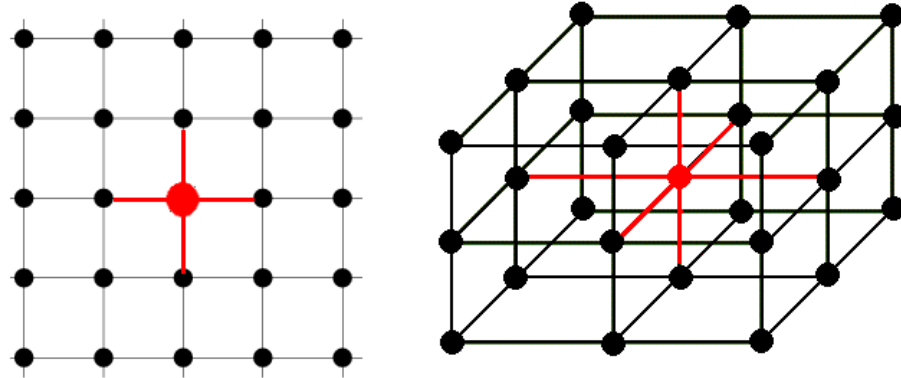


Figura 2: Conexões de um sítio (em vermelho) com seus 4 e 6 vizinhos para as redes quadrada e cúbica, respectivamente.

A utilização das redes quadrada e cúbica é clássica no estudo de diversos sistemas da mecânica estatística. Modelo de Ising [9], percolação [72], caminhadas aleatórias [73] e configurações de varetas [74] são apenas alguns dos exemplos que podemos citar. Por mais que um número limitado de contatos para um indivíduo seja mais realista do que a totalidade de sítios da rede, as redes regulares, como a quadrada e a cúbica, não são as melhores opções para descrever as redes de conexão/contato que envolvam troca de informação de uma sociedade real. Utilizamos duas redes chamadas complexas para análises socioeconômicas.

### 3.1.3 Rede de Erdős-Rényi (Rede Aleatória)

A conexão entre os vértices desta rede é completamente aleatória e dada por uma probabilidade  $p$  e cada vértice, então, pode estar conectado a outro com a mesma probabilidade. Quanto maior for este parâmetro, maior será o número de conexões e, de forma análoga, mais raras serão as conexões se o valor de  $p$  for muito baixo. A rede aleatória foi desenvolvida em 1959 por Paul Erdős e Alfred Rényi como uma primeira tentativa de

modelar matematicamente uma rede com estrutura aleatória [75].

Nesta tentativa, os criadores não estavam interessados em descrever conexões com os processos reais que envolvem redes, mas outros pesquisadores assim o fizeram e nas décadas seguintes o modelo de grafo aleatório, ou rede de Erdős–Rényi, como a chamaremos daqui para frente, foi extensivamente estudado, aplicado e generalizado [75].

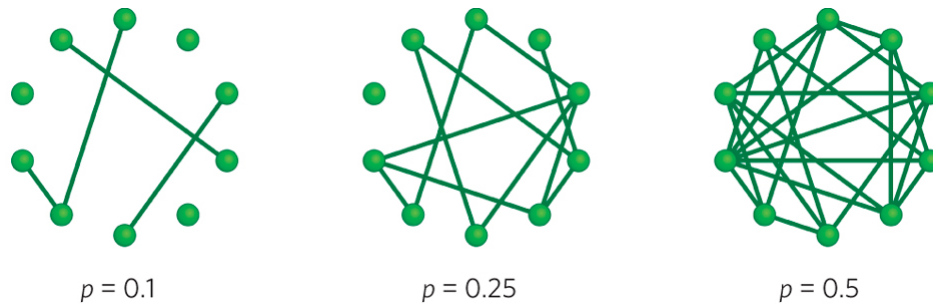


Figura 3: 3 exemplos de redes aleatórias com 10 sítios, construídas com diferentes probabilidades  $p$  de conexão entre pares. Quanto maior é o valor de  $p$ , maior é a quantidade de conexões totais.

Na figura (3), mostramos a evolução das conexões de uma rede aleatória com 10 sítios em função da probabilidade de conexão  $p$ . Quanto maior for o valor de  $p$ , maior será a conectividade média de cada sítio, e assim maior será o número de conexões que um indivíduo pode ter dentro da sociedade. Podemos reparar, também, de maneira direta que o número de conexões não é igual para cada sítio, o que reflete uma característica real das redes de contato sociais. No caso limite de  $p = 1.0$ , a rede aleatória se torna a rede completamente conectada.

Por mais que as conexões entre os sítios da rede ER sejam probabilísticas, como a probabilidade  $p$  é a mesma para cada sítio, dizemos que a rede é complexa homogênea, ou seja, em média, depois de muitas realizações da rede, todos os sítios possuirão o mesmo número de conexões  $\langle k \rangle = pN$ .



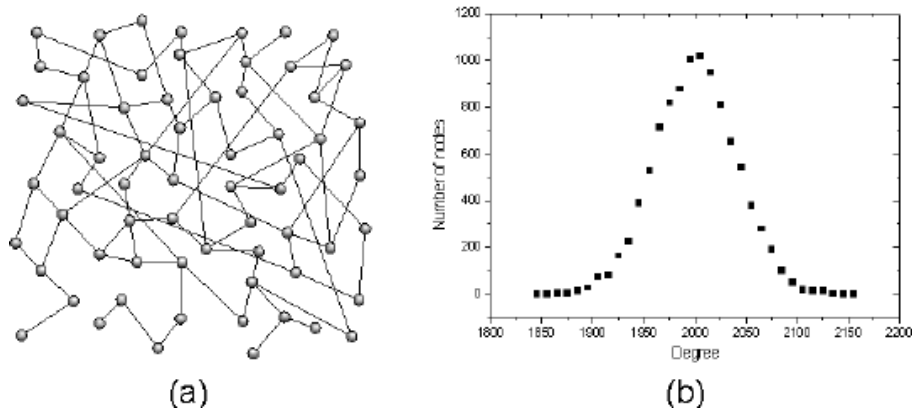


Figura 4: Exemplo de uma rede aleatória (figura a) e da distribuição da conexão para 10 redes com  $10^4$  sítios e probabilidade conexão  $p = 0.2$  (figura b). Notamos uma concentração para valores de conectividade iguais  $k = 2000$  em que se torna menos provável encontrarmos sítios com conectividade muito maior e muito menor do que a média dada por  $k_{médio} = pN$ . Imagem obtida de [76].

Na imagem 4, mostra-se um exemplo de rede ER (esquerda), assim como um gráfico da distribuição de conexões (direita). Esta figura é típica para a rede ER, visto que temos uma grande concentração de sítios com o mesmo número de conexões e, assim, se torna cada vez mais difícil encontrar sítios com muito mais ou muito menos conexões.

### 3.1.4 Rede de Barabási-Albert

Albert – László Barabási e Réka Albert em 1999 desenvolveram um novo tipo de rede para tentar capturar as características de um sistema relativamente novo e em expansão: a Internet [78] cuja descrição não era compatível com nenhum modelo existente na época. A rede Barabási–Albert (rede BA), como ficou conhecida posteriormente, é construída através dos seguintes passos:

1) Geração dinâmica de sítios: Os sítios são inseridos não de uma vez na rede, mas sucessivamente.

2) Ligações preferenciais: Todo novo sítio que for inserido à rede, se conectará à outro sítio. A conexão é tão mais provável quanto maior for o número de conexões do sítio já presente na rede.

Estes dois procedimentos simples, resultaram em uma rede com propriedades muito

interessantes e bem realistas. Esta mesma rede foi utilizada em diversas comparações, como a já citada *Internet*, a rede de conexões entre artistas de *Hollywood*, a estrutura com que os neurônios estão interligados e até mesmo redes sociais em obras de ficção [79] e em muitos outros exemplos [80]. Na rede BA, temos que a maioria dos indivíduos possui poucas conexões e que uma minoria, chamada de *hubs*, se conecta a muitos outros indivíduos.

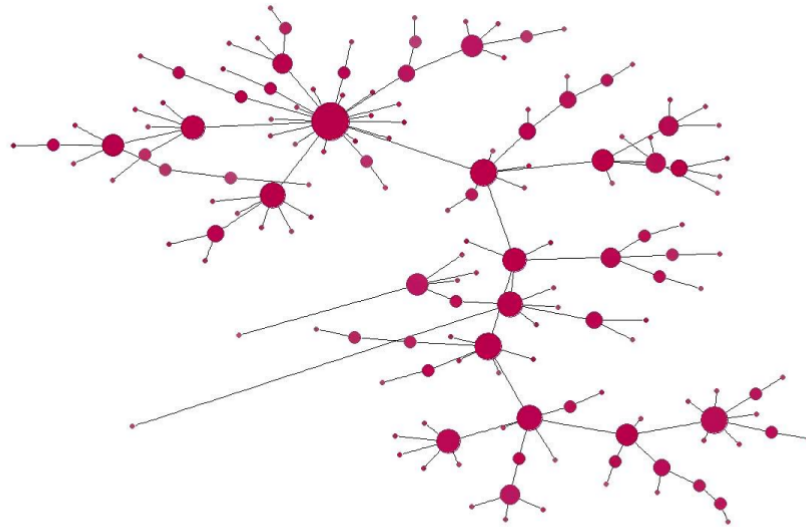


Figura 5: Exemplo de uma rede BA onde é possível perceber a existência de alguns poucos *hubs* e uma maioria de sítios conectados com poucos outros sítios.

Os *hubs* apresentam um papel importante na disseminação de informações dentro da rede. É comum o uso do termo “resistente” a ataque aleatório para descrever a característica da rede BA, pois se sítios são removidos ao acaso, a estrutura principal e a forma como a rede transmite informações não mudam drasticamente já que, como os *hubs* são poucos, a chance de um deles ser retirado aleatoriamente é pequena. Entretanto, esta mesma vantagem se torna um grande inconveniente quando ataques orientados são feitos à rede. Se os *hubs* forem identificados e alvos de ataques, os danos causados à rede são muito grandes. Em 2000, um caso de ataque cibernético ficou mundialmente conhecido, um *hacker* chamado *MafiaBoy* realizou ataques de negação de serviço (*Distributed Denial of Service* ou *DDoS*) a servidores responsáveis por *sites* importantes da época. Um dos seus alvos foram os servidores do *site Yahoo!*. Feito isso, suas ações removeram do ar o *eBay*, *CNN*, *Amazon*, *Dell* entre outros. Os servidores destas empresas ficaram

congestionados, resultando um colapso de inúmeros serviços e transações e causando um prejuízo calculado em torno de 1,7 bilhões de dólares [81]. Os servidores dos *sites* destas empresas eram uma espécie de *hub* da rede (*internet*) e quando estes sítios de tamanho destaque e importância foram atacados, a rede sofreu danos maiores do que se os ataques fossem direcionados a *sites* de baixa relevância.

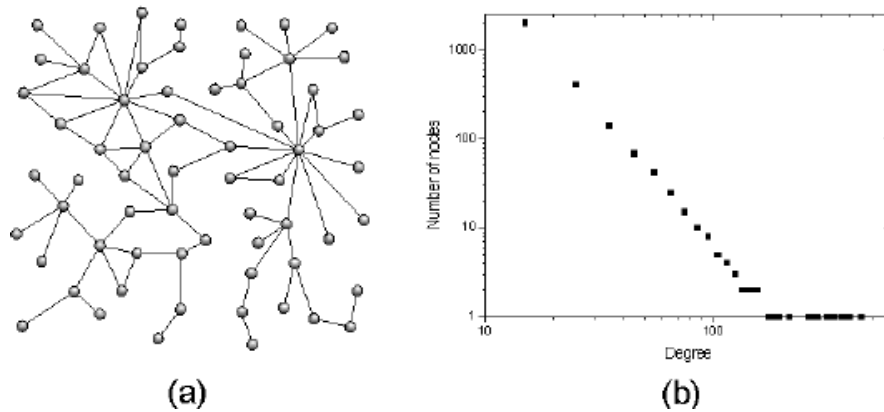


Figura 6: Exemplo de uma rede BA (figura a) e da distribuição de conexões para 10 redes com  $10^4$  sítios, onde cada novo sítio se conecta a outros 5 já presentes (figura b). No gráfico da distribuição da conexão, é possível averiguar a existência dos *hubs*, visto que uma quantidade muito pequena de sítios possui muitas conexões e a maioria dos sítios da rede se conectam à poucos outros. Imagem obtida de [76].

Ao contrário da rede ER, a de Barabási-Albert não possui uma distribuição de número de conexões aproximadamente igual para todos os sítios (a própria existência dos *hubs* demonstra isso) e por isso, a rede BA é classificada como uma rede complexa heterogênea. Também é muito comum chamarmos de rede livre de escala. As redes livre de escala são redes complexas em que o grau de distribuição segue uma lei de potência (assim como na figura (6)). A probabilidade de um nó ter  $k$  ligações neste tipo de rede é dada por  $P(k) \sim k^{-\gamma}$ , onde  $\gamma$  é o expoente de livre escala da rede [77]. Na figura 6, temos um exemplo de rede BA (esquerda) e da distribuição de conexões para uma rede livre de escala com 10000 sítios (direita). Podemos notar, com este segundo gráfico, a grande característica deste tipo de rede resultante da conexão preferencial e da criação dinâmica de sítios: existe um pequeno grupo de sítios com uma quantidade muito grande de conexões e a maioria dos sítios possuem poucas conexões, em relação à rede como um todo.

## 3.2 Transições de fase, expoentes críticos e análise de tamanho finito

### 3.2.1 Introdução

Transições de fase ocorrem quando são verificadas singularidades (divergências) nas energias livres de sistemas termodinâmicos ou em suas derivadas [82]. O que é geralmente observado é uma mudança acentuada nas propriedades da substância em questão. Como alguns possíveis exemplos que poderíamos citar, temos os fluidos, como a água, e os materiais magnéticos.

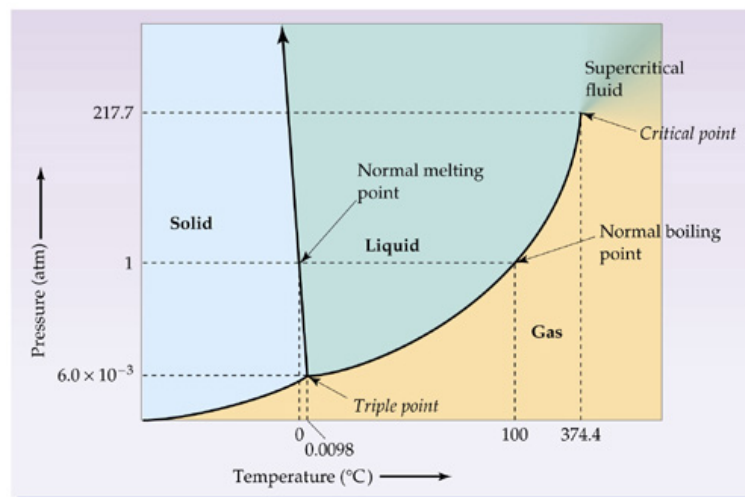


Figura 7: Diagrama de fases da água simplificado. O eixo vertical representa a pressão em atm e o horizontal a temperatura em  $^{\circ}\text{C}$ . Neste diagrama podemos observar as curvas de coexistência além do ponto crítico e do ponto triplo. A imagem foi obtida em [83].

Se observarmos o tão conhecido diagrama de fases da água, como mostrado na figura (7) obtido de [83], notaremos alguns comportamentos muito interessantes. Conforme variamos os valores de pressão e temperatura, a substância (água) pode ser encontrada nos estados sólido, líquido ou gasoso. As curvas do diagrama separam as regiões onde cada fase é bem definida e estável. Atravessando estas delimitações, a densidade sofre uma mudança brusca. Este tipo de mudança caracteriza as transições de fase de primeira ordem (transições descontínuas).

Notamos também, no diagrama da figura 7, que a curva de fusão, ou seja, a curva que separa as fases sólido e líquido, aparentemente continua indefinidamente [84]. Entretanto, a curva de vaporização (a que separa as fases líquida e gasosa) termina em um ponto

muito especial chamado de "ponto crítico". O ponto crítico é caracterizado por valores de pressão, densidade e temperatura críticas ( $P_c$ ,  $\rho_c$  e  $T_c$ ). Para valores destas grandezas (pressão, densidade e temperatura) maiores do que os críticos, a água converte-se continuamente em líquido para gás e vice-versa. Temos aqui uma transição de segunda ordem (transição contínua).

Podemos observar outro ponto especial: o ponto triplo, caracterizado por valores de pressão e temperatura, respectivamente dados por  $6.10^{-3}$  atm e  $0.0098^\circ C$ . Neste ponto, os estados sólido, líquido e gasoso podem ser encontrados coexistindo em equilíbrio.

Na imagem (figura 8), temos o gráfico para as densidades da água no estado líquido e gasoso ( $\rho_L$  e  $\rho_G$  respectivamente) em função da temperatura  $T$  próximo da temperatura crítica  $T_c$ . A diferença entre os valores destas densidades é o que comumente chamamos de parâmetro de ordem do sistema. Conforme o valor de  $T$  se aproxima de  $T_c$ , menor se torna o parâmetro de ordem. Isto indica que se torna cada vez mais difícil distinguir as duas fases.

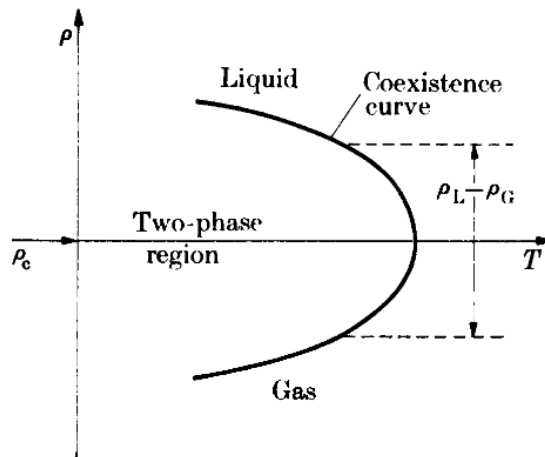


Figura 8: Densidades  $\rho_L$  e  $\rho_G$  de um fluido em função da temperatura  $T$  ao longo da curva de pressão de vapor. Conforme o sistema se aproxima da transição de fase, o parâmetro de ordem dado pela diferença das densidades se aproxima do valor nulo. Imagem obtida de [84].

Como esta diferença é um indicador de proximidade do ponto crítico, é costume chamá-la de parâmetro de ordem. Vamos agora analisar o diagrama de fase de um material ferromagnético simples na ausência de campo magnético externo  $H$ , mostrado na figura (9).

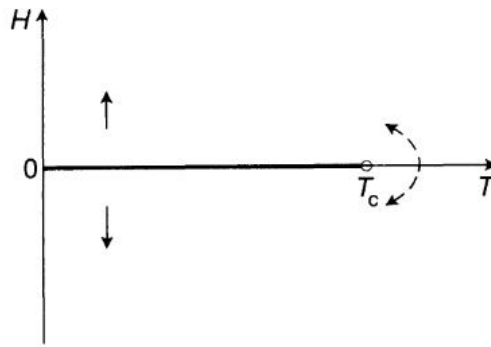


Figura 9: Diagrama de fase de um ferromagneto em campo magnético externo  $H$  nulo. Imagem obtida de [82].

A curva mostrada a princípio parece não possuir nenhuma relação com o diagrama de fase de um fluido, como o da água mostrado na figura (7), porém, se prestarmos um pouco de atenção notaremos que esta curva simples é análoga à curva de coexistência das fases líquida-gasosa, visto que ela representa a transição de 1<sup>a</sup> ordem para o caso ferromagnético.

Na figura (10), podemos visualizar o que ocorre com a magnetização em função da temperatura na curva de coexistência  $H = 0$ . O parâmetro de ordem para este sistema é a própria magnetização  $M$  que diminui seu módulo conforme a temperatura  $T$  aumenta. A partir do momento em que a temperatura se iguala à temperatura crítica e para valores maiores, o parâmetro de ordem se torna nulo, revelando, assim, a distribuição igualitária entre os spins que compõem o material.

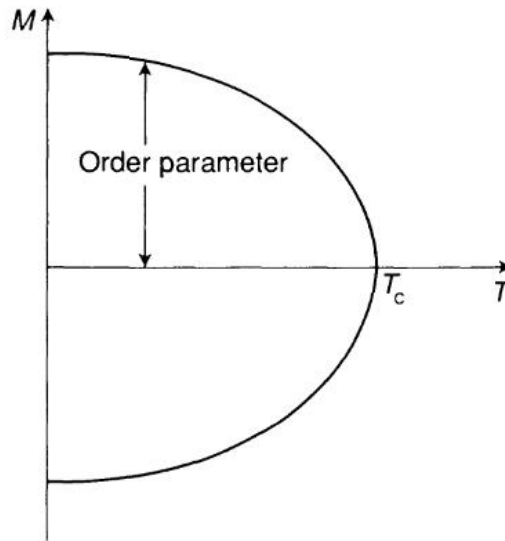


Figura 10: Comportamento da magnetização  $M$  em função da temperatura  $T$  de um ferromagneto na ausência de campo magnético externo ( $H = 0$ ). Para temperaturas inferiores à temperatura crítica  $T_c$ , existe a predominância de alguma orientação. Quando a temperatura aumenta, o módulo da magnetização diminui até o momento em que  $M$  se torna nulo, mostrando assim a transição de fase do modelo. Imagem obtida de [82].

Observa-se, então, como em dois sistemas tão distintos (água e materiais ferromagnéticos) são encontradas propriedades tão semelhantes, quando levamos em conta seus diagramas de fase. Obviamente, existem outras transições de fase conhecidas em materiais, entre algumas que podemos citar encontram-se as da tabela 4 obtidas em [84].

| Transição                           | Parâmetro de ordem associado             |
|-------------------------------------|--|
| Líquido-gás                         | $\rho_L - \rho_G$                        |
| Ferromagnética                      | Magnetização $M$                         |
| Antiferromagnética                  | Magnetização de sub-rede                 |
| Modelo de Heisenberg ferromagnético | Magnetização $M$                         |
| Modelo de Ising ferromagnético      | $s_j$                                    |
| Supercondutores                     | Função de onda efetiva dos superelétrons |
| Superfluido                         | $\langle \Psi \rangle$ (Função de onda)  |
| Ferroelétrica                       | Polarização da rede                      |
| Separação de fases                  | Concentração                             |

Tabela 4: Algumas transições de fase e seus respectivos parâmetros de ordem [84].

### 3.2.2 Expoentes críticos

Como já foi brevemente discutido, uma série de mudanças abruptas nas grandezas termodinâmicas ocorrem nas proximidades das transições de fase. Em especial, nas transições contínuas, podemos estudar melhor estas grandezas nestas condições especiais. Para isso, podemos utilizar parâmetros chamados "expoentes críticos".

Vamos definir um parâmetro adimensional que descreve a proximidade que o sistema se encontra em relação a alguma transição de fase caracterizada por algum parâmetro crítico, por exemplo a temperatura crítica  $T_c$ . Seja então  $t = \frac{T-T_c}{T_c}$  a chamada temperatura reduzida. Dizemos, então, que  $\lambda$  é um expoente crítico associado a função  $F(t)$  quando temos:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln|F(t)|}{\ln|t|}. \quad (3.1)$$

A razão da utilização do limite de  $t$  tendendo a 0 se dá pelo fato dos expoentes críticos terem sentido somente nas proximidades de suas respectivas transições de fase, ou seja, quando  $t \rightarrow 0$  (que é a mesma coisa que dizer que  $T \rightarrow T_c$ ). Utilizando a equação (3.1), podemos escrever:

$$F(t) \sim |t|^\lambda. \quad (3.2)$$

Ou seja, a função  $F(t)$  assintoticamente se comporta como  $|t|^\lambda$  quando próxima da transição de fase. Podemos expandir a função  $F(t)$  como uma série de potência [82], [84], [99] na forma:

$$F(t) = A|t|^\lambda(1 + bt^{\lambda_1} + ct^{\lambda_2} + \dots), \quad (3.3)$$

para  $\lambda > 0$ . Entretanto, é possível mostrar que nas imediações da transição de fase, o termo mais substancial da expressão (3.3) é de fato  $|t|^\lambda$  (para  $\lambda > 0$ ). As tabelas 5 e 6 mostram os expoentes críticos mais comuns para sistemas de fluidos e sistemas magnéticos, respectivamente, assim como suas funções associadas. Mas afinal, qual é o interesse em determinar os expoentes críticos de um sistema? Por que existe este empenho se poderíamos apenas utilizar a temperatura crítica, por exemplo?



|                                       |   |
|---------------------------------------|---|
| Calor específico a volume constante   | $C_v \sim  t ^{-\alpha}$  |
| Diferença das densidades líquido-gás  | $(\rho_L - \rho_G) \sim (-t)^\beta$                                 |
| Compressibilidade isotérmica          | $\kappa_T \sim  t ^{-\gamma}$                                       |
| Isotérma crítica                      | $P - P_c \sim  \rho_l - \rho_g ^\delta \text{sgn}(\rho_l - \rho_g)$ |
| Comprimento de correlação             | $\xi \sim  t ^{-\nu}$   |
| Função de correlação de pares a $T_c$ | $G(\vec{r}) \sim 1/r^{d-2+\eta}$                                    |

Tabela 5: Definição dos expoentes críticos mais utilizados em sistemas de fluido [82].

|   |   |
|---|---|
| Calor específico a campo nulo           | $C_H \sim  t ^{-\alpha}$                        |
| Magnetização a campo nulo               | $M \sim (-t)^\beta$                             |
| Suscetibilidade isotérmica a campo nulo | $\chi_T \sim  t ^{-\gamma}$                     |
| Isotérma crítica                        | $H \sim  M ^\delta \text{sgn}(\rho_l - \rho_g)$ |
| Comprimento de correlação               | $\xi \sim  t ^{-\nu}$                           |
| Função de correlação de pares a $T_c$   | $G(\vec{r}) \sim 1/r^{d-2+\eta}$                |

Tabela 6: Definição dos expoentes críticos mais utilizados em sistemas magnéticos [82].

Uma das razões é que enquanto a temperatura crítica possui uma dependência muito sensível das propriedades microscópicas da substância em questão, os expoentes críticos, por sua vez, dependem geralmente de uma quantidade pequena de outros parâmetros como o alcance das interações, a dimensão do sistema, suas simetrias e a dimensionalidade do parâmetro de ordem [100]. Com esta baixa dependência dos expoentes críticos, o seguinte questionamento surge: Será que, dois sistemas de origens distintas, mas que possuam as mesmas dependências citadas, poderiam apresentar os mesmos expoentes críticos? A resposta é sim. Quando dois ou mais sistemas apresentam os mesmos expoentes críticos, dizemos que estes sistemas estão na mesma classe de universalidade. Temos como um exemplo famoso a figura 11, onde temos 8 fluidos diferentes que apresentam o mesmo comportamento de temperatura reduzida em função da densidade reduzida ( $\rho/\rho_c$ ).

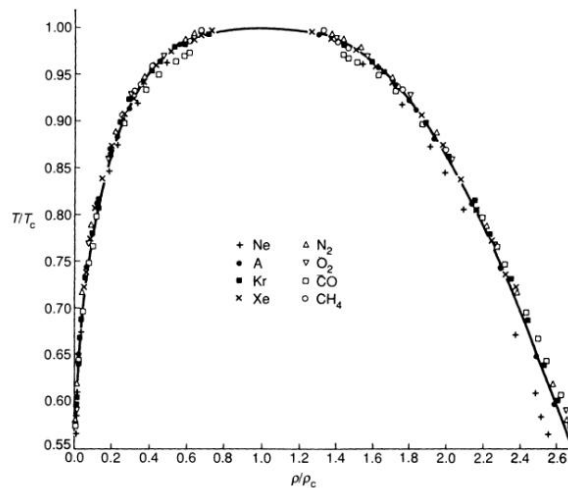


Figura 11: Curva de coexistência de 8 diferentes fluidos. Nos eixos vertical e horizontal, respectivamente, temos a temperatura reduzida  $\frac{T}{T_c}$  e a densidade reduzida  $\frac{\rho}{\rho_c}$ . Obtido de [82].

Desta forma, se torna muito mais prático, ao estudar por exemplo um sistema muito complicado, estudarmos primeiro como é o comportamento próximo da transição de um sistema mais simples, mas que seja da mesma classe de universalidade. Se temos fortes indícios de que dois ou mais modelos estão na mesma classe de universalidade, podemos focar nossas atenções ao modelo que apresente a maior simplicidade e através da descoberta de seus expoentes críticos, assumir que os mesmos serão iguais nos modelos mais complicados.

### 3.2.3 Análise de tamanho finito

As transições de fase são fenômenos macroscópicos que são consequências das interações dos componentes microscópicos do sistema, ex: spins em materiais ferromagnéticos e moléculas de água. Modelos em rede também estão suscetíveis a transições de fase, neste exemplo, os sítios da rede são os componentes microscópicos do sistema.

Em nossa análise preliminar dos expoentes críticos, estávamos implicitamente considerando que nosso sistema estava no chamado limite termodinâmico [85]. O limite termodinâmico é caracterizado pela utilização de um número infinito ou extremamente elevado de componentes do sistema (spins, átomos, partículas, moléculas e etc). Se voltarmos a considerar porções de água e materiais ferromagnéticos, os mesmos terão em média quantidades múltiplas de  $10^{23}$  de componentes microscópicos que de fato repre-

sentam números muito elevados e, assim, podemos considerá-los como sistemas no limite termodinâmico.

Quando, por exemplo, analisamos as transições de fase de um modelo analiticamente, estamos utilizando o limite termodinâmico. Entretanto, não podemos dispor sempre deste limite. Isso porque nem sempre temos modelos que possuem soluções analíticas, seja pela aparente inexistência de tais soluções ou pela grande dificuldade que as mesmas necessitariam para serem obtidas. Desta forma, precisamos encontrar maneiras de trabalhar com sistemas com poucos componentes, em relação ao de sistemas no limite termodinâmico, de forma a conseguirmos analisar suas transições de fase como se o sistema em questão estivesse no limite termodinâmico.

Quando não possuímos as soluções analíticas de um modelo, existe a opção de recorreremos às simulações computacionais [86]. Em simulações computacionais, as propriedades dos componentes microscópicos do sistema no qual o modelo se compromete a descrever ficam armazenadas em memória para futura utilização (spins, posição na rede, especificação de vizinhança e etc). Visto que é muito comum estarmos interessados em sistemas com um número muito elevado de componentes, é evidente que o armazenamento de tantas informações relevantes pode ser um grande empecilho. Desta forma, faz-se necessário um método para obter os expoentes críticos destes sistemas. Utilizando a análise de tamanho finito [82], [84], [87], [88], podemos obter estimativas para estes expoentes através da simulação de sistemas com números finitos de componentes.

Pensando em um sistema magnético simples no limite termodinâmico, vamos considerar as grandezas: comprimento de correlação ( $\xi$ ), magnetização ( $M$ ), suscetibilidade magnética ( $\chi$ ) e o calor específico ( $C$ ). Vamos considerar a existência de uma transição de fase e que estamos próximos da mesma ( $t \rightarrow 0$ ). Devido a esta proximidade, as grandezas citadas obedecem às leis de potência mostradas na tabela 6. Através da definição de  $\xi$  também obtida na tabela 6, podemos escrever:

$$|t| \sim \xi^{-1/\nu}. \quad (3.4)$$

Se substituirmos esta expressão nas definições dos expoente críticos da tabela 6, obtemos os comportamentos de  $M$ ,  $\chi$  e  $C$  próximos da transição de fase contínua:

$$\chi \sim \xi^{\gamma/\nu}, \quad (3.5)$$

$$C \sim \xi^{\alpha/\nu}, \quad (3.6)$$

$$M \sim \xi^{-\beta/\nu}. \quad (3.7)$$

Durante uma transição de fase contínua de um sistema no limite termodinâmico (infinitos componentes), o comprimento de correlação diverge ( $\xi \rightarrow \infty$ ). Entretanto, em sistemas finitos o comprimento de correlação se torna igual ao tamanho do sistema, ou seja,  $\xi \rightarrow \infty$  quando  $T \rightarrow T_c$  (figura (12)).

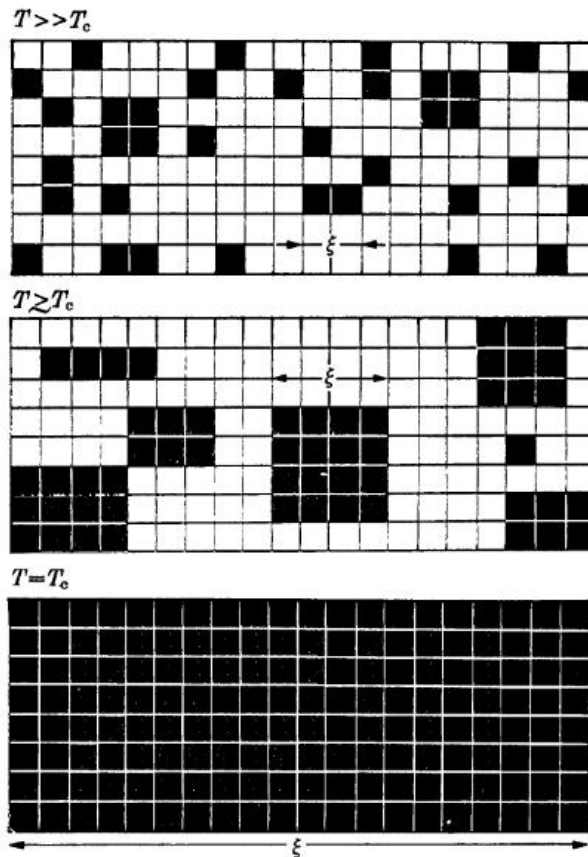


Figura 12: Comportamento do comprimento de correlação  $\xi$  em um sistema finito em função da temperatura  $T$ . Conforme a temperatura se aproxima do valor crítico  $T_c$ , nota-se o aumento do valor de  $\xi$ . A aproximação da temperatura se dá por valores maiores em direção aos menores (de cima para baixo). Imagem obtida de [84]. O sistema mostrado é de um gás na rede, onde as células pintadas são *spins up*. O comprimento de correlação  $\xi$  é aproximadamente o diâmetro das ilhas de *spins* alinhados.

O que este comportamento nos sugere é que os efeitos do tamanho finito provocam modificações nas divergências das grandezas termodinâmicas ( $C$ ,  $M$  e  $\xi$  por exemplo) nas proximidades dos pontos críticos, que esperavam-se serem encontrados se o sistema estivesse no limite termodinâmico [89]. A teoria de escala de tamanho finito (*finite size scaling*) foi proposta por Michael Fisher [88]. Falaremos brevemente sobre ela agora.

A figura (12) nos sugere que  $\xi$  se torna igual ao tamanho do sistema quando  $t \rightarrow 0$ , ou seja, quando  $T \rightarrow T_c$ . Definiremos, então, a temperatura pseudo-crítica  $T_c(L)$  de um sistema de tamanho  $L$  como sendo aquela em que o comprimento de correlação se torna próximo de  $L$ . Ou seja:

$$\xi(T_c(L)) \sim L \quad (3.8)$$

Se relacionarmos esta expressão com as recém obtidas em (3.5)-(3.7), vamos obter a relação das funções  $\chi$ ,  $C$  e  $M$  com o tamanho  $L$  do sistema nas proximidades da transição de fase:

$$\chi \sim L^{\gamma/\nu}, \quad (3.9)$$

$$C \sim L^{\alpha/\nu}, \quad (3.10)$$

$$M \sim L^{-\beta/\nu}. \quad (3.11)$$

Além disso,

$$\xi \sim L \sim (T_c(L) - T_c)^{-\nu}, \quad (3.12)$$

$$(T_c(L) - T_c) \sim L^{-1/\nu}. \quad (3.13)$$

Podemos demonstrar [90], [91] que para sistemas finitos, quanto  $t \rightarrow 0$ :

$$\chi_L = k_1 L^{\gamma/\nu}, \quad (3.14)$$

$$C_L = k_2 L^{\alpha/\nu}, \quad (3.15)$$

$$M_L = k_3 L^{-\beta/\nu}, \quad (3.16)$$

$$(T_c(L) - T_c) = k_4 L^{-1/\nu}. \quad (3.17)$$

Desta forma:

$$k_1 = \chi_L L^{-\gamma/\nu}, \quad (3.18)$$

$$k_2 = C_L L^{-\alpha/\nu}, \quad (3.19)$$

$$k_3 = M_L L^{\beta/\nu}, \quad (3.20)$$

$$k_4 = (T_c(L) - T_c) L^{1/\nu}. \quad (3.21)$$

As expressões recém obtidas são de extrema importância. Através das mesmas, podemos estimar os expoentes críticos de um modelo no limite termodinâmico por meio de seu estudo em sistemas finitos. Para tanto, devemos simular o sistema computacionalmente

para diferentes tamanhos  $L$  e obtermos algumas de suas grandezas termodinâmicas, ou todas, em função do parâmetro  $T$ , por exemplo.

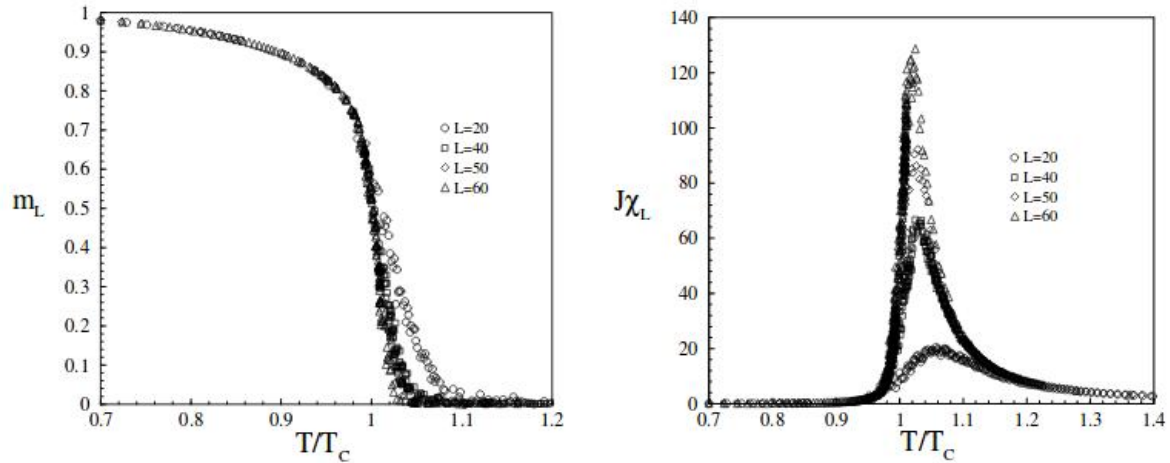


Figura 13: Comportamento da magnetização por spin e da suscetibilidade magnética, respectivamente esquerda e direita, em função de  $T/T_c$  no modelo de Ising na rede quadrada para diferentes tamanhos de rede ( $L = 20, 40, 50$  e  $60$ ). Nestas simulações,  $T_c$  é o valor da temperatura crítica do modelo obtida analiticamente. Imagens obtidas de [92].

Para uma determinada grandeza, temos seus expoentes críticos associados nas proximidades da transição de fase. Se ao exibirmos o gráfico dos valores desta grandeza para os diferentes tamanhos  $L$  e se, ao realizarmos as transformações das grandezas para os seus análogos através das equações (3.18)-(3.21), os valores dos expoentes forem os corretos, as curvas para os diferentes tamanhos serão indistinguíveis. Nesta situação, temos como resultado o colapso das curvas. Quando este comportamento for obtido, os expoentes utilizados serão os expoentes do modelo no limite termodinâmico. Afinal, não existe distinção das curvas para os diferentes tamanhos. Além disso, obteremos o parâmetro crítico  $T_c$ . Ou seja, através de ajustes sucessivos na construção dos gráficos das grandezas termodinâmicas obtidas por simulação utilizando as transformações através das equações (3.18)-(3.21), quando as curvas se tornarem indistinguíveis (colapso), saberemos que os expoentes que foram utilizados serão os expoentes críticos do modelo.

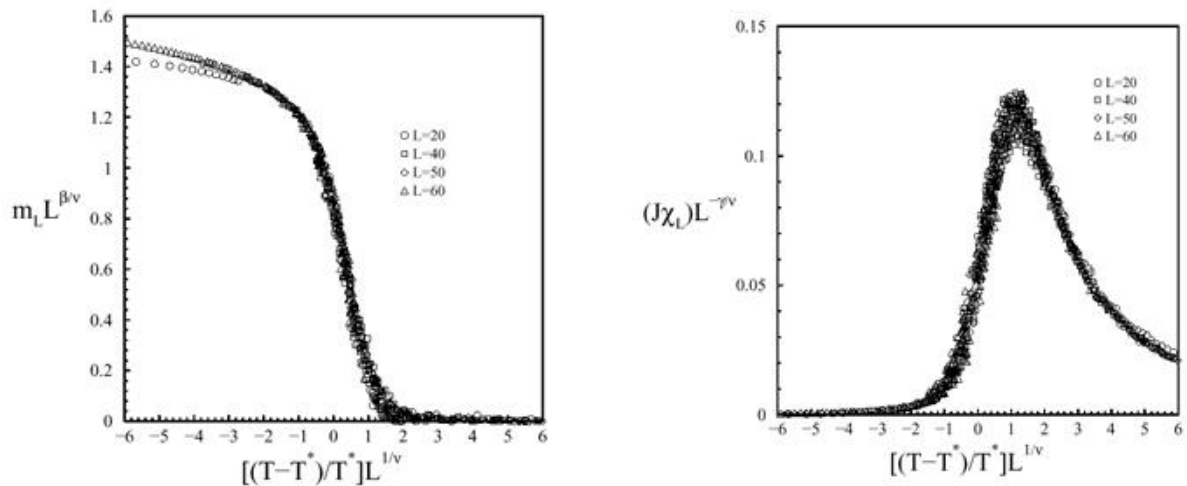


Figura 14: Colapsos da magnetização por spin e da suscetibilidade magnética, respectivamente esquerda e direita, no modelo de Ising na rede quadrada para diferentes tamanhos de rede ( $L = 20, 40, 50$  e  $60$ ) dos gráficos da imagem (13). Imagens obtidas de [92].

Nos gráficos da figura (13), são mostrados os resultados de simulações computacionais da magnetização e da suscetibilidade magnética do modelo de Ising na rede quadrada para tamanhos  $L = 20, 40, 50$  e  $60$  [92]. Nos gráficos da figura (14), realiza-se o colapso dos gráficos da figura 13, obtendo assim os expoentes  $\beta = 0.126$ ,  $\gamma = 1.73$  e  $\nu = 1.02$ .

Estas "curvas colapsadas" em alguns sistemas são complicadas de serem obtidas, exigindo, assim, uma grande quantidade de processos de "tentativas e erros" até que os expoentes críticos sejam ajustados. Em [93], podemos encontrar o repositório aberto de um *software* em que é possível obter, com certa precisão, o valor dos expoentes críticos do modelo, sendo necessário somente os valores das grandezas termodinâmicas associadas.

### 3.3 Processo de Contato

Vamos analisar, rapidamente, um modelo com estados absorventes, ou seja, estados intrinsecamente reversíveis. As taxas de transição que os definem, impedem que eles obedeçam a condição de balanço detalhado ( $\omega_{i \rightarrow j} \neq \omega_{j \rightarrow i}$ ). Em um estado absorvente, qualquer transição do estado para outro é proibida. "Uma vez estando naquele estado, não é possível sair". Modelos que exibam transições contínuas para estados absorventes possuem o mesmo comportamento crítico, próximos destas transições de fase, ou seja, estão na mesma classe de universalidade.

Proposto por T.E Harris [94], como um modelo simplificado para processos epidêmi-

cos, o processo de contato (PC) se tornou uma ferramenta muito útil, também, para a modelagem de sistemas sociais. Cabe ressaltar que o PC pode ser utilizado para descrever não somente estes processos, assim como reações químicas, sistemas de partículas interagentes, etc. Um dos modelos que vamos propor neste trabalho demonstra algumas similaridades com o PC e, por esta razão, faremos uma pequena apresentação de suas ideias centrais.

Na disseminação de uma epidemia, sua evolução, em uma população os indivíduos podem ser levados a uma fase ativa da epidemia, com a proliferação da doença, ou a uma fase absorvente, na qual todos eles estejam saudáveis. Nesta última configuração, a propagação da epidemia é cessada, pois não existem mais indivíduos infectados que possam transmitir a doença. Desta maneira, a população se vê livre da doença, permanecendo saudável.

Em uma dada rede, cada indivíduo da população pode ser caracterizado por um estado  $\eta$  com valor 0 ou 1 onde: 0 caracteriza o indivíduo saudável, que podemos associar como o sítio estando vazio, e de maneira oposta o valor 1 para  $\eta$  representa um indivíduo infectado, ou seja, um sítio ocupado. No processo de contato, a evolução do sistema é dada por duas regras simples quando analisamos um sítio  $i$  qualquer da rede:

1) Se o sítio estiver vazio ele passa a ser ocupado com uma taxa proporcional ao número  $n$  de sítios ocupados ao seu redor (primeiro vizinhos), ou seja, a infecção de um indivíduo é proporcional à quantidade de vizinhos infectados que aquele indivíduo possui.

2) Se o sítio estiver ocupado ele se esvazia com uma taxa  $\alpha$  (é usual escolher  $\alpha = 1$  por simplicidade).

A taxa de transição  $\omega_i$  para um sítio  $i$  da rede no PC vale:

$$\omega_i(\eta) = \frac{\lambda}{z}(1 - 2\eta_i) \sum_{\delta} \eta_{i+\delta} + \eta_i, \quad (3.22)$$

onde  $z$  é o número de vizinhos do sítio  $i$  e o somatório é realizado sobre todos os vizinhos do sítio  $i$ . Se  $\eta_i = 0$ ,  $\omega_i(\eta) = \frac{\lambda}{z} \sum_{\delta} \eta_{i+\delta}$ , que representa a criação de uma partícula. Se  $\eta_i = 1$ ,  $\omega_i(\eta) = 1$ , que, por sua vez, é a aniquilação da partícula (esvaziamento do sítio) com probabilidade de 100% (simplificação adotada quando impomos  $\alpha = 1$ ). O modelo possui a seguinte equação mestra (equação 1.19) para a evolução temporal da probabilidade  $P(\eta, t)$  do estado  $\eta$ :

$$\frac{dP(\eta, t)}{dt} = \sum_i [\omega_i(\eta^i)P(\eta^i, t) - \omega_i(\eta)P(\eta, t)], \quad (3.23)$$



onde  $\eta^i$  representa o vetor de configuração  $\eta$ , porém, com o estado do sítio  $i$  trocado, ou seja:

$$\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_i, \dots, \eta_N). \quad (3.24)$$

$$\eta^i = (\eta_1, \eta_2, \dots, 1 - \eta_i, \dots, \eta_N). \quad (3.25)$$

Sabemos que a média de uma função  $f(\eta)$  pode ser escrita como:

$$\langle f(\eta) \rangle = \sum_{\eta} f(\eta) P(\eta, t). \quad (3.26)$$

De tal forma que:

$$\frac{d\langle f(\eta) \rangle}{dt} = \sum_{\eta} f(\eta) \frac{dP(\eta, t)}{dt}. \quad (3.27)$$

Se substituirmos o valor de  $\frac{dP(\eta, t)}{dt}$  da equação mestra (3.23) na equação (3.27) iremos obter:

$$\frac{d\langle f(\eta) \rangle}{dt} = \sum_{\eta} f(\eta) \sum_i [\omega_i(\eta^i) P(\eta^i, t) - \omega_i(\eta) P(\eta, t)]. \quad (3.28)$$

$$\frac{d\langle f(\eta) \rangle}{dt} = \sum_{\eta} \langle [f(\eta^i) - f(\eta_i)] \omega_i(\eta) \rangle. \quad (3.29)$$

Utilizando  $f(\eta) = \eta_i$ , a expressão anterior pode ser escrita como:

$$\frac{d\langle \eta_i \rangle}{dt} = \sum_{\eta} \langle [\eta^i - \eta_i] \omega_i(\eta) \rangle. \quad (3.30)$$

$$\frac{d\langle \eta_i \rangle}{dt} = \langle [1 - 2\eta_i] \omega_i(\eta) \rangle, \quad (3.31)$$

pois  $\eta^i - \eta_i = 1 - 2\eta_i$ . Se substituirmos a equação (3.22) na equação (3.31), obteremos a seguinte expressão para a taxa de transição de  $\langle \eta_i \rangle$ :

$$\frac{d\langle \eta_i \rangle}{dt} = \frac{\lambda}{z} \sum_{\delta} \langle (1 - \eta_i) \eta_{i+\delta} \rangle - \langle \eta_i \rangle. \quad (3.32)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = (\lambda - 1)\rho - \lambda\phi, \quad (3.33)$$

onde  $\rho = \langle \eta_i \rangle$  representa a densidade de sítios ocupados (indivíduos infectados) e  $\phi = \langle \eta_i \eta_j \rangle$  é a correlação entre os sítios  $i$  e  $j$ . A densidade  $\rho$  a partir de agora será chamada de parâmetro de ordem do sistema e nele focaremos nossa atenção.

### 3.3.1 Análise em Campo Médio

Devido ao termo de correlação  $\phi$ , a equação (3.33) se torna complicada de ser solucionada. Desta forma, faremos a aproximação de campo médio onde a correlação será escrita

como  $\phi = \langle \eta_i \rangle \langle \eta_j \rangle = \rho^2$  e, assim, obteremos uma expressão para a taxa de variação da densidade de partículas:

$$\frac{d\rho}{dt} = (\lambda - 1)\rho - \lambda\rho^2. \quad (3.34)$$

Mesmo a aproximação de campo médio sendo em alguns momentos considerada grosseira, podemos obter informações interessantes a partir da equação (3.34). Tomando a derivada temporal como nula, podemos analisar o comportamento estacionário do sistema:

$$(\lambda - 1)\rho - \lambda\rho^2 = 0. \quad (3.35)$$

Esta equação possui 2 soluções:  $\rho^* = 0$  (solução trivial) que representa o estado absorvente e  $\rho^* = \frac{\lambda-1}{\lambda}$  que, por sua vez, representa o estado ativo. Quando analisamos a densidade de partículas, estamos investigando a densidade de indivíduos infectados na população. Este estado ativo só pode ser alcançado quando  $\lambda > 1$ , caso contrário ( $\lambda \leq 1$ ),  $\rho^* = 0$  e não teremos mais nenhuma dinâmica no sistema. Desta forma, obtemos um valor crítico para  $\lambda$ , sendo então  $\lambda_c = 1$ . Portanto, o sistema exibe, no estado estacionário, uma transição de fase entre um estado absorvente e um estado ativo. Esta transição é descrita pelo parâmetro de ordem  $\rho$ , que nas proximidades do ponto crítico apresenta o seguinte comportamento:

$$\rho \sim (\lambda - \lambda_c). \quad (3.36)$$

Já podemos obter o expoente crítico  $\beta$  associado ao parâmetro de ordem próximo da transição, pois nesta região:

$$\rho \sim (\lambda - \lambda_c)^\beta. \quad (3.37)$$

Se fizermos a simples comparação das últimas expressões, encontraremos  $\beta = 1$ . Para uma solução completa, voltemos para a equação (3.34). Se resolvermos esta equação, obteremos a expressão da densidade de partículas em função do tempo:

$$\rho(t) = \frac{\lambda - 1}{\lambda - c \exp[-(\lambda - 1)t]}. \quad (3.38)$$

Se utilizarmos como condição inicial  $\rho(t = 0) = \rho_0$ , obteremos  $c = \lambda - \frac{\lambda-1}{\rho_0}$ . Para tempos muito longos ( $t \rightarrow \infty$ ), podemos ter três situações dependendo do valor de  $\lambda$  que estamos trabalhando ( $\lambda < \lambda_c$ ,  $\lambda > \lambda_c$  ou  $\lambda = \lambda_c$ ).

a) Para  $\lambda < \lambda_c$ :  $\rho(t) = A \exp[(\lambda - 1)t]$  que tende a zero para  $t \rightarrow \infty$ . Assim, para  $\lambda < \lambda_c$  temos um decaimento exponencial para zero, ou seja, para o estado absorvente.

b) Para  $\lambda > \lambda_c$ :  $\rho(t) = \frac{\lambda-1}{\lambda} + B \exp[-(\lambda - 1)t]$ , que revela um relaxamento exponencial para um estado ativo quando  $t \rightarrow \infty$ .

c) No ponto crítico ( $\lambda = \lambda_c = 1$ ), a equação (3.34) se torna:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho^2. \quad (3.39)$$

Que apresenta a seguinte solução:

$$\rho(t) = \frac{1}{t + C}, \quad (3.40)$$

onde  $C = \rho_0^{-1}$ . Ou seja, o decaimento deixa de ser exponencial e passa a ser algébrico para tempos muito longos, que, por sua vez, é mais lento do que o decaimento exponencial. Esta diferença na velocidade de decaimento, inclusive, é um dos artifícios utilizados na investigação de possíveis transições de fase em modelos onde soluções analíticas para o parâmetro de ordem não podem ser obtidas. No caso, através das curvas do parâmetro de ordem em função do tempo, obtidas por meio de simulações computacionais, observa-se aquela que apresenta um decaimento em forma de lei de potência. Podemos afirmar com certa precisão que o valor do parâmetro utilizado para gerar esta curva é o valor crítico associado à transição de fase contínua do modelo.

Na figura (15), temos um exemplo de gráfico gerado para um modelo análogo ao do processo de contato. Neste modelo, o parâmetro associado à transição de fase é o  $p$ . No gráfico da figura, é mostrado o comportamento do parâmetro de ordem  $\rho$  em função do tempo  $t$  para três valores de  $p$ :  $p < p_c$ ,  $p > p_c$  e  $p = p_c$ . Podemos observar no gráfico as situações discutidas: para  $p < p_c$ , o parâmetro de ordem decresce rapidamente, para  $p > p_c$ , o parâmetro de ordem se estabiliza em valores não nulos e para  $p = p_c$ , o valor de  $\rho$  decresce obedecendo uma lei de potência.

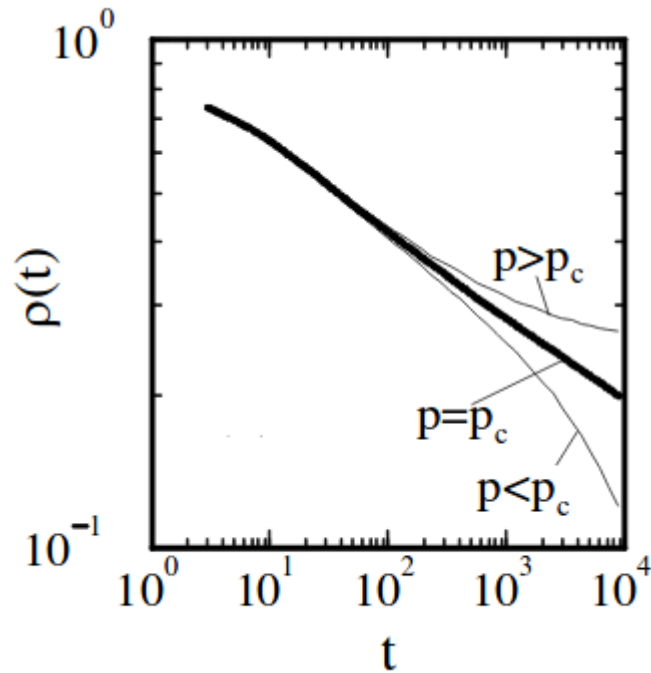


Figura 15: Comportamento da densidade de sítios preenchidos  $\rho$  no Processo de Contato em campo médio em função do tempo  $t$ . Nesta imagem, o parâmetro utilizado associado à transição de fase é chamado de  $p$ . Podemos observar as três curvas: uma para  $p < p_c$ , outra para  $p > p_c$  e entre estas curvas, aquela em que  $p = p_c$  onde  $p_c$  representa o parâmetro crítico do modelo. Imagem obtida de [96].

Esta abordagem para estimativa do parâmetro crítico baseada no comportamento de decaimento do parâmetro de ordem em função do tempo será utilizada em momentos futuros deste trabalho. Na situação em especial, não foi possível a obtenção de soluções analíticas para o parâmetro de ordem do modelo em função do tempo, assim como, soluções para o comportamento de seus valores estacionários. Por mais que este tipo de análise seja muito rudimentar, ela fornece um ponto de partida onde podemos nos concentrar em um intervalo de parâmetros para análises mais cuidadosas.

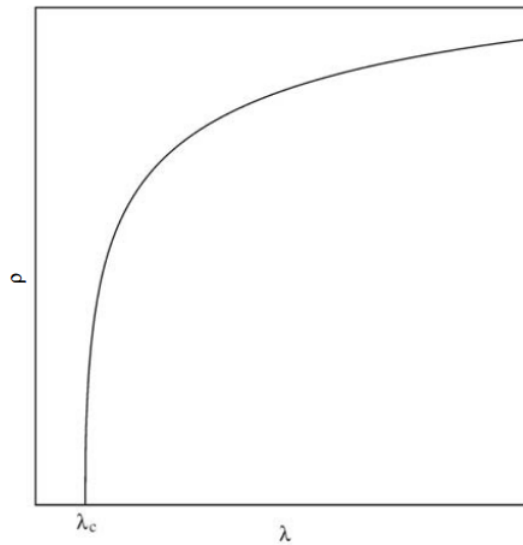


Figura 16: Comportamento da densidade estacionária de indivíduos infectados  $\rho$  em função do parâmetro  $\lambda$ . O parâmetro crítico é mostrado como  $\lambda_c$ . Para  $\lambda \leq \lambda_c$ ,  $\rho = 0$  e para  $\lambda > \lambda_c$ ,  $\rho \neq 0$  revelando assim, os estados absorvente e ativo da doença, respectivamente. Imagem obtida de [97].

Na figura (16), observamos o comportamento da densidade  $\rho$  estacionária de indivíduos infectados em função de  $\lambda$  [97]. Notamos duas regiões representando o estado absorvente e o estado ativo da doença quando  $\rho = 0$  e  $\rho \neq 0$ , respectivamente. A diferença entre as fases é dado pelo parâmetro crítico  $\lambda_c$ . Para valores de  $\lambda$  menores ou iguais ao crítico, a doença desaparece da população e para valores maiores, a doença se estabiliza com valor não nulo.

## 4 *Dinâmica de evasão fiscal através de um modelo epidêmico*

Iremos apresentar nosso primeiro modelo. Os resultados aqui presentes são baseados no artigo publicado na *International Journal of Modern Physics C* com o título *Dynamics of tax evasion through an epidemic-like model* [98]. Posteriormente, iremos propor uma extensão do modelo através da inclusão de um novo estado e investigar as consequências disto para a dinâmica da população.

### 4.1 Modelo Proposto

Consideramos uma população constituída por  $N$  elementos definidos em uma dada rede de contatos. Cada indivíduo  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) pode estar entre 1 de 3 estados possíveis  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$  em quantidades respectivamente dadas por  $N_1$ ,  $N_2$  e  $N_3$ . O estado  $X_1$  representa um contribuinte honesto, isto é, um indivíduo 100% convicto de sua honestidade e que não considera em nenhum momento a evasão fiscal como alternativa (ou que não a considera mais, como será explicado a seguir). Este indivíduo sempre foi um contribuinte, ou foi um evasor recentemente pego pela fiscalização, ou, ainda, foi influenciado pelos seus contatos sociais. Por outro lado, o estado  $X_3$  representa o evasor fiscal. Para este indivíduo continuar sonegando, depende-se tanto das interações sociais quanto da eficiência da fiscalização. Finalmente, o terceiro estado, o estado intermediário  $X_2$  representa o indivíduo insatisfeito com o sistema tributário, (uma combinação de fiscalização baixa com o conhecimento de evasores que não mudam seu comportamento). Estes contribuintes não são evasores, mas eles podem evadir se perceberem que os ganhos compensam os riscos. Para este grupo, a evasão é uma opção válida, ao contrário de  $X_1$ , e por este motivo podemos classificar os indivíduos  $X_2$  como suscetíveis, ou seja, os indivíduos deste grupo são potenciais evasores.

Em nosso modelo, consideramos 4 maneiras distintas pelas quais um indivíduo pode

mudar seu estado (comportamento). Estas 4 maneiras estão divididas em 2 mecanismos: pressão social e fiscalização. Estas interações são mostradas no diagrama abaixo:

$$X_1 + X_3 \xrightarrow{\lambda} X_2 + X_3 \quad (4.1)$$

$$X_2 \xrightarrow{\alpha} X_3 \quad (4.2)$$

$$X_3 + X_1 \xrightarrow{\delta} X_1 + X_1 \quad (4.3)$$

$$X_3 \xrightarrow{\epsilon} X_1 \quad (4.4)$$

A interpretação destas transições se dá a seguir:

A equação (4.1) representa o encontro entre um indivíduo  $X_1$  e um indivíduo  $X_3$ . Neste caso, através da probabilidade  $\lambda$  o indivíduo sonegador influencia o honesto que, por sua vez, passa a se tornar suscetível. Por causa desta transição, o parâmetro socioeconômico  $\lambda$  representa a eficiência de persuasão dos indivíduos sonegadores.

Na transição caracterizada pela equação (4.2), um indivíduo  $X_2$  se torna  $X_3$ , ou seja, um indivíduo que já era suscetível adota o comportamento de sonegador através do parâmetro  $\alpha$ , que representa o descontentamento em relação ao sistema tributário. Neste caso, ser inadimplente com as responsabilidades fiscais é mais vantajoso do que suas possíveis consequências. Como observação, cabe citar que esta transição, que leva um indivíduo no estado  $X_2$  para  $X_3$ , foi introduzida para que não tenhamos uma mudança de comportamento abrupta de honesto convicto para sonegador ( $X_1 \rightarrow X_3$ ).

Retornando ao mecanismo de pressão social, a equação (4.3) mostra novamente o contato entre um indivíduo sonegador e um honesto, porém, dessa vez é o indivíduo  $X_1$  que “alerta”, “remedia” ou simplesmente convence o indivíduo  $X_3$ , tornando-o um contribuinte convicto através da probabilidade  $\delta$ . Faz todo o sentido, então, interpretar esta probabilidade como a eficiência de convencimento ou persuasão dos indivíduos honestos.

Por último, temos a transição descrita pela equação (4.4). Nela um indivíduo sonegador se torna honesto devido a algum efeito de fiscalização, representado pela probabilidade  $\epsilon$ . Quanto maior for a fiscalização, maior será o “fluxo” de indivíduos sonegadores se tornando honestos. Esta mudança pode acontecer tanto pelo sonegador ter sido efetivamente reconhecido em auditoria fiscal quanto por uma ação preventiva realizada pelo próprio indivíduo, onde o ditado “é melhor prevenir do que remediar” foi utilizado. Podemos encontrar um resumo de todas estas transições no diagrama da figura (17).

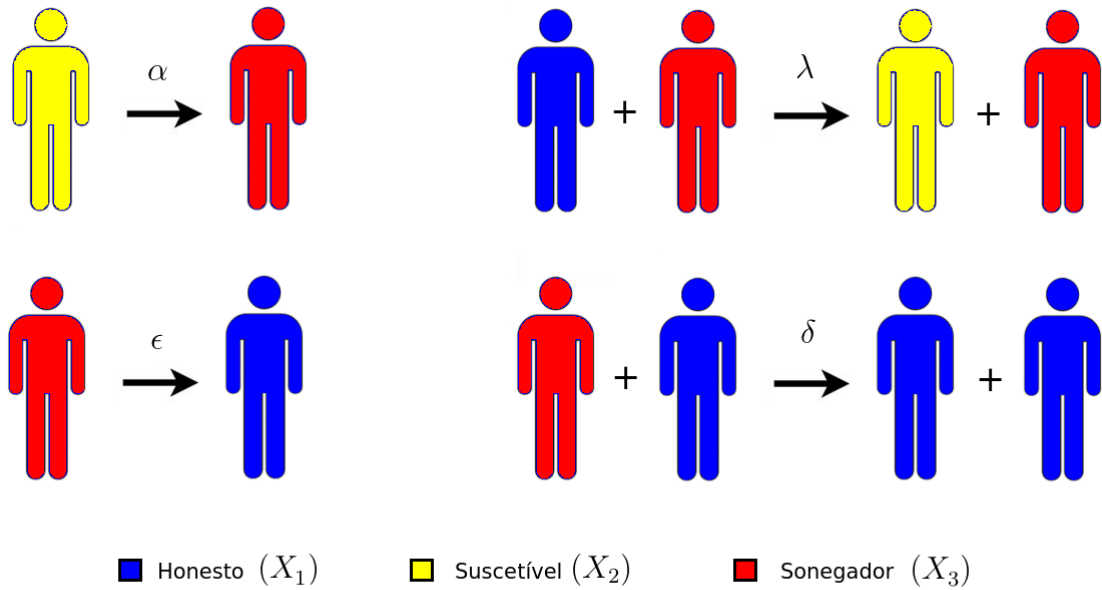


Figura 17: Diagrama visual para representar as mudanças de estado do modelo proposto. Na figura estão representadas as mudanças resultantes de interações entre indivíduos honestos e sonegadores ( $X_1$  e  $X_3$ ), assim como a transição que os indivíduos suscetíveis ( $X_2$ ) sofrem devido à insatisfação e à transição que um sonegador ( $X_3$ ) sofre por causa da fiscalização.

## 4.2 Resultados Obtidos

### 4.2.1 Rede Completamente Conectada – Campo médio

Nesta seção apresentaremos os resultados obtidos ao estudarmos o modelo de evasão fiscal proposto utilizando as redes complexas. Porém, para termos resultados com os quais comparar, primeiramente utilizamos a rede completamente conectada. Antes mesmo de a utilizarmos para a simulação, é possível escrevermos um conjunto de equações diferenciais no tempo para as densidades de cada tipo de indivíduo. Estas equações representam as equações mestras do sistema nesta rede.

$$\frac{dx_1}{dt} = \epsilon x_3 - \lambda x_1 x_3 + \delta x_1 x_3 \quad (4.5)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\alpha x_2 + \lambda x_1 x_3 \quad (4.6)$$



$$\frac{dx_3}{dt} = \alpha x_2 - \epsilon x_3 - \delta x_1 x_3 \quad (4.7)$$

Onde  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  são as densidades de cada tipo de indivíduo, ou seja,  $x_i = N_i/N$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Trabalhar com as densidades em vez das quantidades nos permite escrever o seguinte vínculo:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1, \quad (4.8)$$

Que é apenas uma condição de normalização. O sistema de equações diferenciais acima pode ser facilmente resolvido através de integração numérica simples. Como valores iniciais para as densidades  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  utilizamos 0.98, 0.02 e 0.0, respectivamente, e desta forma podemos obter os gráficos da figura (18) abaixo onde estivemos mais interessados em analisar como as densidades se comportam no tempo em relação aos parâmetros socioeconômicos  $\epsilon$  e  $\lambda$  (fixamos  $\alpha$  e  $\delta$  em 0.2 e 0.3, respectivamente).

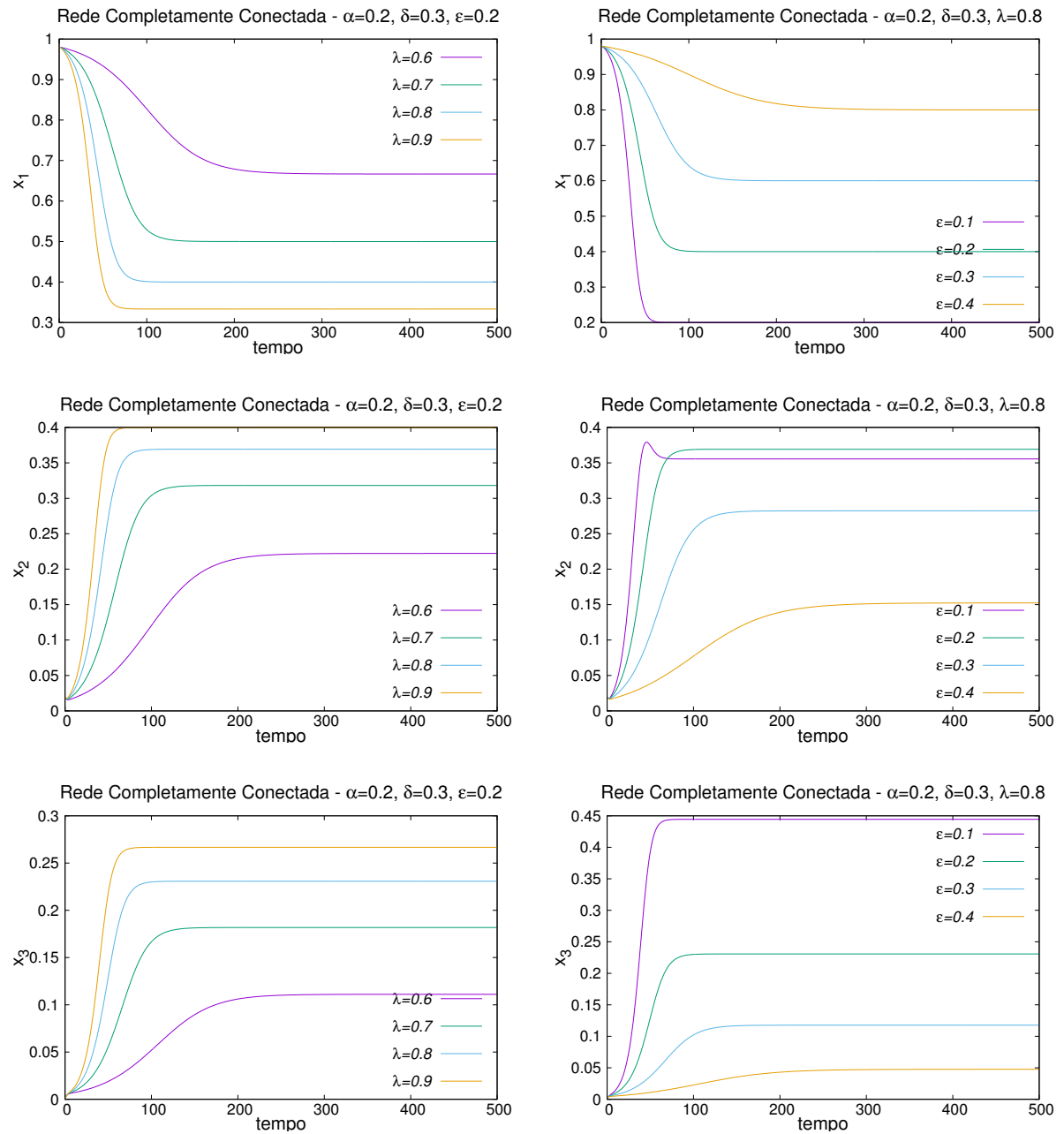


Figura 18: Evolução temporal para as três densidades populacionais  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  utilizando a aproximação de campo médio do modelo, baseado nas equações (4.5)-(4.7). Os parâmetros fixados são  $\alpha = 0.2$  e  $\delta = 0.3$ . Os gráficos à esquerda mostram a evolução para  $\epsilon = 0.2$  e valores típicos de  $\lambda$ , enquanto nos gráficos à direita, mostramos a evolução para  $\lambda = 0.8$  para valores típicos de  $\epsilon$ .

Com este conjunto de equações, é possível encontrar as soluções estacionárias para estas densidades:  $x_1^*$ ,  $x_2^*$  e  $x_3^*$  que dependem somente dos parâmetros socioeconômicos. As soluções dadas pelas equações 4.9-4.11 são referentes a utilização de  $\lambda > \epsilon + \delta$ . Para

valores de  $\lambda \leq \epsilon + \delta$ , temos uma solução simples dada por:  $x_1^* = 1$  e  $x_2^* = x_3^* = 0$ .

$$x_1^* = \frac{\epsilon}{\lambda - \delta}, \quad (4.9)$$

$$x_2^* = \frac{\lambda\epsilon}{\lambda - \delta} \left[ \frac{\lambda - \delta - \epsilon}{\lambda\epsilon + \alpha(\lambda - \delta)} \right], \quad (4.10)$$

$$x_3^* = \alpha \left[ \frac{\lambda - \delta - \epsilon}{\lambda\epsilon + \alpha(\lambda - \delta)} \right] = \frac{\alpha}{\lambda\epsilon + \alpha(\lambda - \delta)} [\lambda - (\delta + \epsilon)]. \quad (4.11)$$

Para obtermos estas soluções, precisamos calcular os valores de  $x_j$  para  $dx_j/dt = 0$  onde  $j = 1, 2, 3$ . Durante o desenvolvimento destas soluções, um valor crítico para  $\lambda$  que provém do fato de  $x_3^*$  ser proporcional a  $(\lambda - \lambda_c)$  foi encontrado e assim,  $\lambda_c = \epsilon + \delta$ . Este novo parâmetro possui uma interpretação muito importante, ele determina o “limiar epidêmico” dos indivíduos sonegadores, ou seja, se o sistema apresentar um valor  $\lambda \leq \lambda_c$  os indivíduos sonegadores não se manterão na sociedade depois de um certo tempo, e se tivermos  $\lambda > \lambda_c$  a densidade estacionária dos sonegadores estabiliza em um valor não nulo, mantendo desta forma o comportamento sonegador presente na sociedade.

A rede completamente conectada se torna muito eficiente para representar estruturas muito interconectadas como, por exemplo, pessoas dentro de um mesmo setor de uma empresa, membros de comunidades pequenas, etc. Porém, a sua utilização se torna grosseira em outras situações já que, em grupos mais genéricos, a chance de cada indivíduo conhecer todos os outros é muito baixa. Através desta rede o modelo é tratado como possuindo o comportamento de campo médio [95].

Ao observar o gráfico do comportamento de  $x_3^*$  em função de  $\lambda$  na figura (19), notamos como a conduta sonegadora é sensível ao efeito da fiscalização na aproximação de campo médio. Notamos também que, em campo médio, temos grandes dificuldades em obter a transição de fase associada a  $x_3$  até mesmo para valores não muito elevados de  $\epsilon$ . Isso nos revela a eficácia da fiscalização neste tipo de estrutura de contatos.

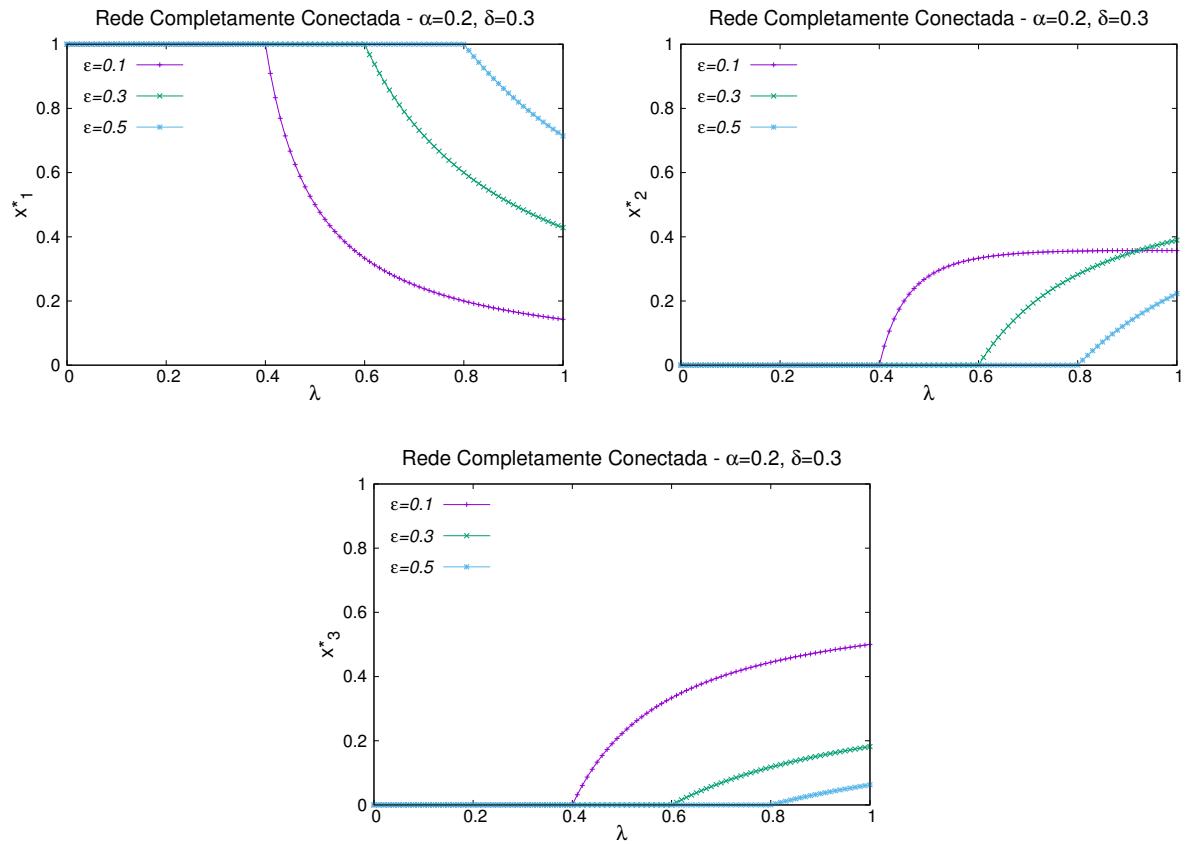


Figura 19: Densidades estacionárias  $x_1^*$ ,  $x_2^*$  e  $x_3^*$  para os três tipos de indivíduos na aproximação de campo médio do modelo, dadas pelas equações (4.9)-(4.11). As densidades estacionárias foram plotadas em função do parâmetro socioeconômico  $\lambda$  para típicos valores de  $\epsilon$ . Fixamos os valores de  $\alpha$  e  $\delta$  em 0.2 e 0.3, respectivamente.

O motivo de termos desenvolvido, em um primeiro momento, o modelo na rede completamente conectada foi devido à dificuldade inicial encontrada em obter soluções analíticas para os estados estacionários  $x_1^*$ ,  $x_2^*$  e  $x_3^*$  tanto para a rede ER quanto para a rede BA. Para contornar esta situação, utilizamos simulações computacionais, ou seja, simulamos as redes de contato e cada um dos indivíduos através de um modelo baseado em agentes.

Para este estudo nas redes complexas, seguiremos os seguintes passos:

1. Gerar a rede (ER ou BA) com  $N$  sítios através de sua matriz de adjacência.
2. Distribuir os indivíduos  $X_1$  e  $X_2$  na rede (no início das simulações, não existem indivíduos  $X_3$ ) com a porcentagem de 98% e 2%, respectivamente.
3. Para cada passo da simulação:

- (a) Por  $N$  vezes (para que em média todos os sítios sejam escolhidos):
- i. Escolhemos aleatoriamente um elemento da rede, se este indivíduo for  $X_1$  ou  $X_3$ , sorteia-se outro indivíduo da rede, que seja seu vizinho, para simular a interação dada por 4.1 ou 4.3. Se o par escolhido pode interagir, sorteia-se as probabilidades  $\lambda$  ou  $\delta$  (dependendo do par). Além disso, se o primeiro elemento escolhido for do tipo  $X_3$ , sorteia-se em adição a probabilidade  $\epsilon$ , responsável pela transição dada por 4.4.
  - ii. Se o indivíduo sorteado for do tipo  $X_2$ , sorteia-se a probabilidade  $\alpha$  responsável pela transição 4.2.
- (b) Realizar a atualização dos estados de todos os indivíduos.
- (c) Calcular as grandezas de interesse.

## 4.2.2 Rede de Erdős-Rényi

Os gráficos mostrados na figura (20) são análogos aos que foram mostrados na seção sobre a rede completamente conectada. Utilizamos os mesmos valores para as densidades  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  iniciais e também fixamos os valores  $\alpha$  e  $\delta$  em 0.2 e 0.3, respectivamente, para analisar como cada densidade se comporta em relação a valores típicos dos parâmetros  $\epsilon$  e  $\lambda$ . A diferença está no método de obter estes dados. Simulamos computacionalmente a rede juntamente com seus indivíduos. Pode-se observar que certos comportamentos esperados também são obtidos na figura (20), dentre os quais podemos citar a diminuição dos indivíduos honestos conforme o parâmetro  $\lambda$  aumenta (1º gráfico à esquerda), assim como os sonegadores aumentam (3º gráfico à esquerda). Quando o parâmetro  $\epsilon$  aumenta, a relação anterior se inverte, ou seja, maior é a quantidade de indivíduos honestos (1º gráfico à direita) e menor é a de sonegadores (3º gráfico à direita). Este resultado já era esperado, visto que os parâmetros  $\lambda$  e  $\epsilon$  representam, respectivamente, o poder de influência dos sonegadores e a fiscalização que atua na sociedade.

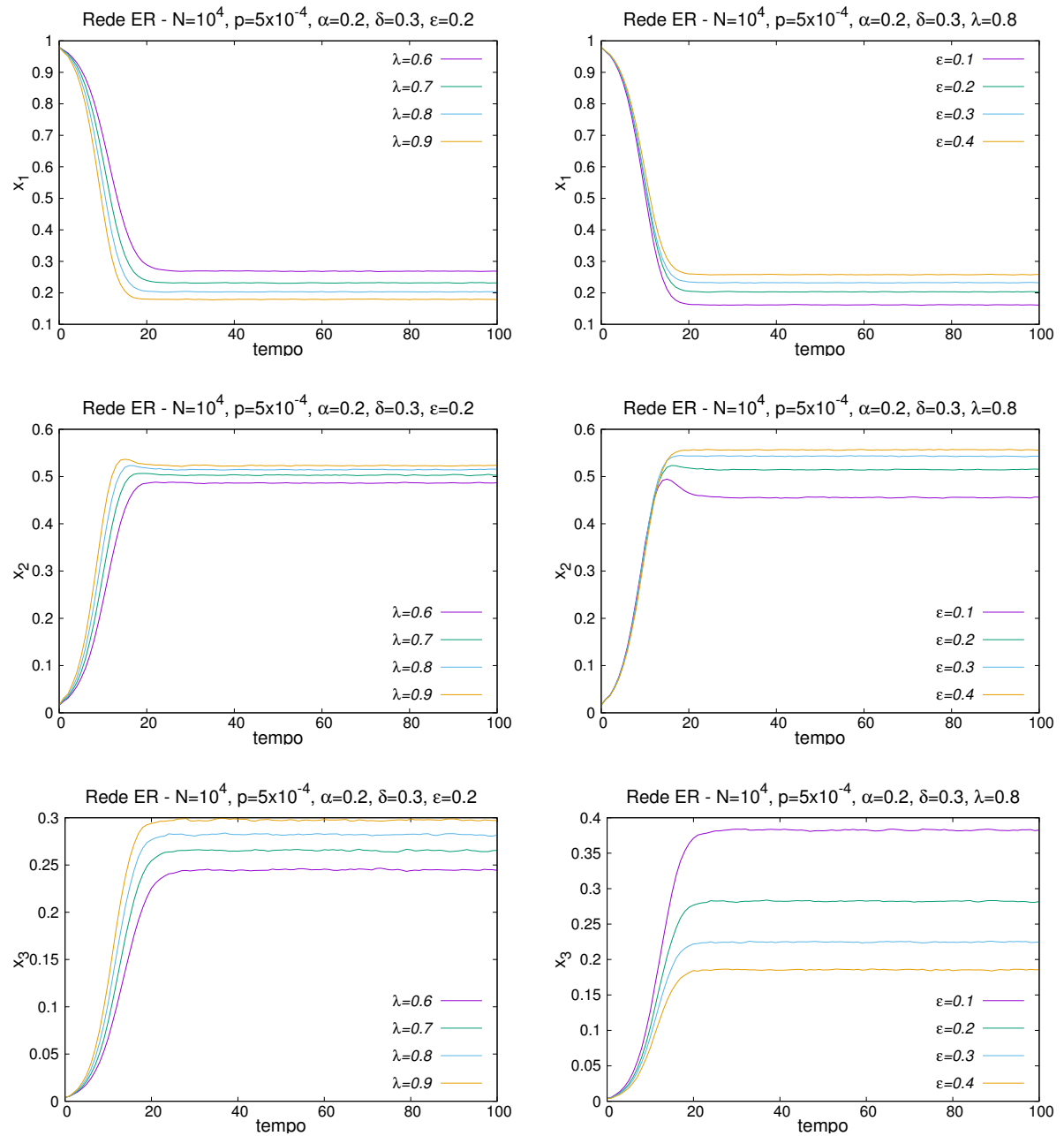


Figura 20: Evolução temporal para as três densidades populacionais  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  na rede ER. Os parâmetros fixados são  $\alpha = 0.2$  e  $\delta = 0.3$ . Os gráficos à esquerda mostram a evolução para  $\epsilon = 0.2$  e valores típicos de  $\lambda$ , enquanto nos gráficos à direita, mostramos a evolução para  $\lambda = 0.8$  para valores típicos de  $\epsilon$ . Simulamos redes com  $10^4$  sítios (indivíduos).

Também analisamos as densidades estacionárias  $x_1^*$ ,  $x_2^*$  e  $x_3^*$  em função do parâmetro  $\lambda$  (figura (21)). Comportamentos parecidos com os do estudo em campo médio foram obtidos. É visível também uma “menor sensibilidade” por parte dos sonegadores ao parâ-

metro  $\epsilon$  em relação ao que obtivemos utilizando a aproximação de campo médio, pois a fração de indivíduos  $x_3^*$  diminui mais na rede ER do que na rede completamente conectada para a mesma variação de  $\epsilon$ .

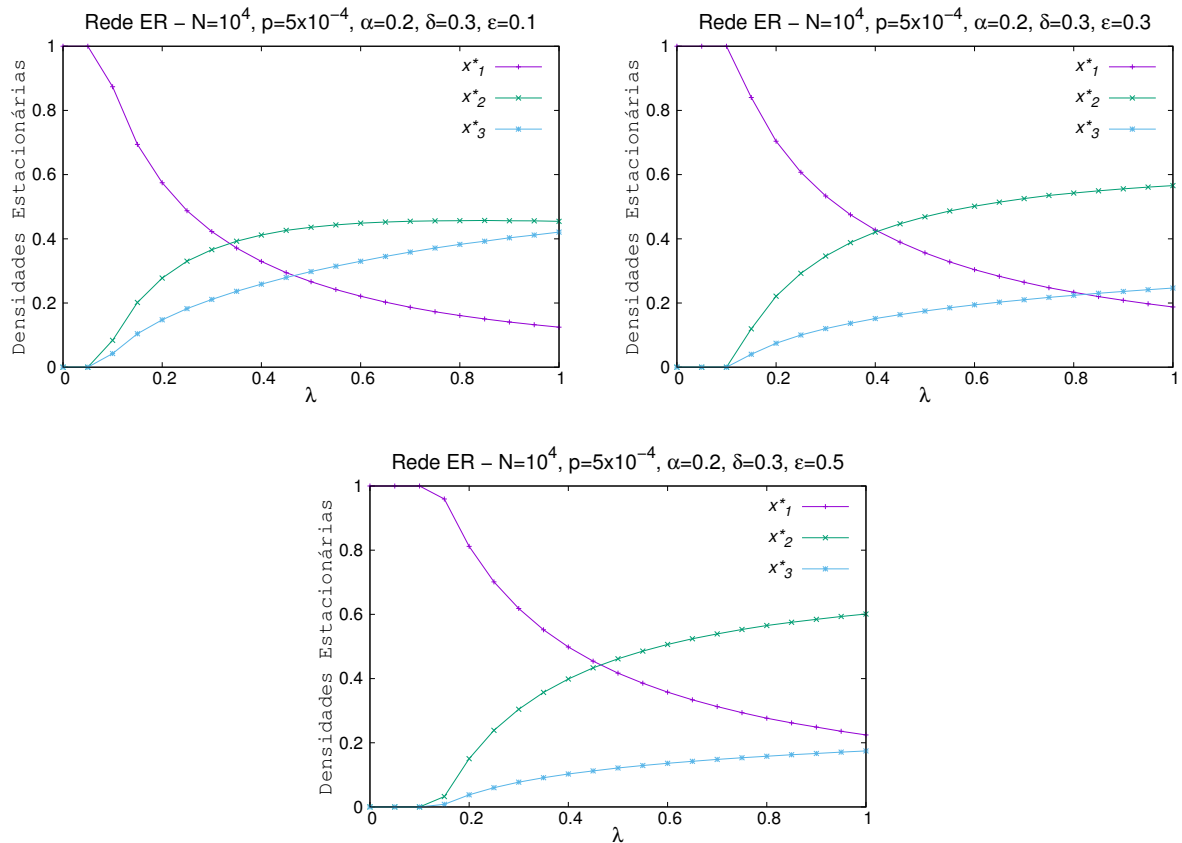


Figura 21: Densidades estacionárias  $x_1^*$ ,  $x_2^*$  e  $x_3^*$  como função do parâmetro socioeconômico  $\lambda$  para  $\epsilon = 0.1$ ,  $\epsilon = 0.3$  e  $\epsilon = 0.5$  para o modelo simulado na rede ER. Fixamos os valores de  $\alpha$  e  $\delta$  em 0.2 e 0.3, respectivamente. Simulamos redes com  $10^4$  sítios (indivíduos).

### 4.2.3 Rede Barabási-Albert

Finalmente, estudamos a dinâmica de evasão fiscal na rede BA, onde estivemos interessados em analisar o impacto das ideias que dão origem ao modelo em uma rede que mais se assemelha à estrutura real de conexões de uma sociedade [80]. Também fizemos uso de simulações computacionais para contornar a dificuldade na obtenção das soluções para as densidades estacionárias em função dos parâmetros socioeconômicos. Na figura (22) encontram-se os gráficos obtidos das análises em função do tempo das densidades de indivíduos. Nesse caso também obtivemos os comportamentos esperados de crescimento e diminuição, por exemplo, dos indivíduos  $x_1$  e  $x_3$  para diferentes valores de  $\lambda$  e  $\epsilon$  (fixando

novamente os outros parâmetros  $\alpha$  e  $\delta$  em 0.2 e 0.3, respectivamente).

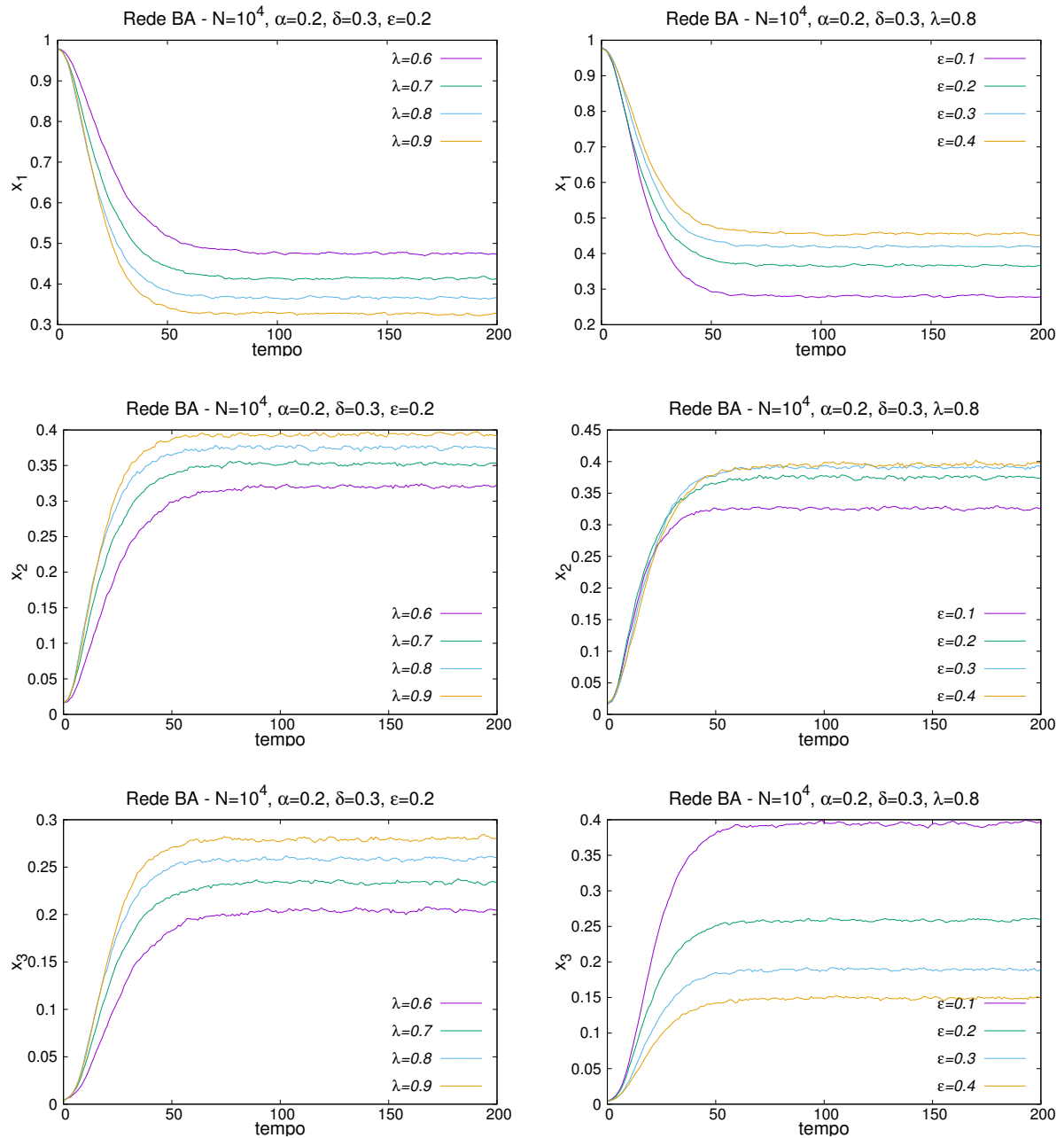


Figura 22: Evolução temporal para as três densidades populacionais  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  na rede BA. Os parâmetros fixados são  $\alpha = 0.2$  e  $\delta = 0.3$ . Os gráficos à esquerda mostram a evolução para  $\epsilon = 0.2$  e valores típicos de  $\lambda$ , enquanto nos gráficos à direita, mostramos a evolução para  $\lambda = 0.8$  para valores típicos de  $\epsilon$ . Simulamos redes com  $10^4$  sítios (indivíduos).

Na figura (23), plotamos os gráficos que mostram o comportamento das densidades estacionárias em função de  $\lambda$  para alguns valores diferentes de  $\epsilon$  (0.1, 0.3 e 0.5), onde



verificamos que a densidade de sonegadores quando utilizamos a rede BA é um pouco menos sensível ainda à fiscalização do que na rede ER. Uma comparação que parece faltar em relação ao modelo em campo médio é sobre se em redes complexas o modelo apresenta algum tipo de transição de fase. Lembrando que como não temos soluções analíticas para nenhuma das densidades estacionárias, não foi possível determinar com o mesmo método que usamos na rede completamente conectada se existe algum  $\lambda_c$  associado. Um problema interessante que foi encarado durante o desenvolvimento do trabalho estava nos gráficos de  $x_3^*$  em função de  $\lambda$ , onde aparentemente tanto na rede ER quanto na rede BA obtemos, também, transições de fase com a mesma interpretação daquela dada para campo médio, porém, com valores diferentes de  $\lambda_c$ .

Um dos contratemplos que geralmente aparecem quando realizamos simulações envolvendo agentes está no fato de que, para discutirmos propriedades macroscópicas como, transições de fase, precisamos analisar o sistema no limite termodinâmico, ou seja, com um número infinito de indivíduos (ou sítios na rede), e isto é logicamente impossível de se fazer devido à capacidade finita de memória dos computadores. Para contornar este problema, simulamos o mesmo sistema, com os mesmos parâmetros socioeconômicos, porém, variando o tamanho da rede, ou seja, realizamos simulações com números diferentes de indivíduos.

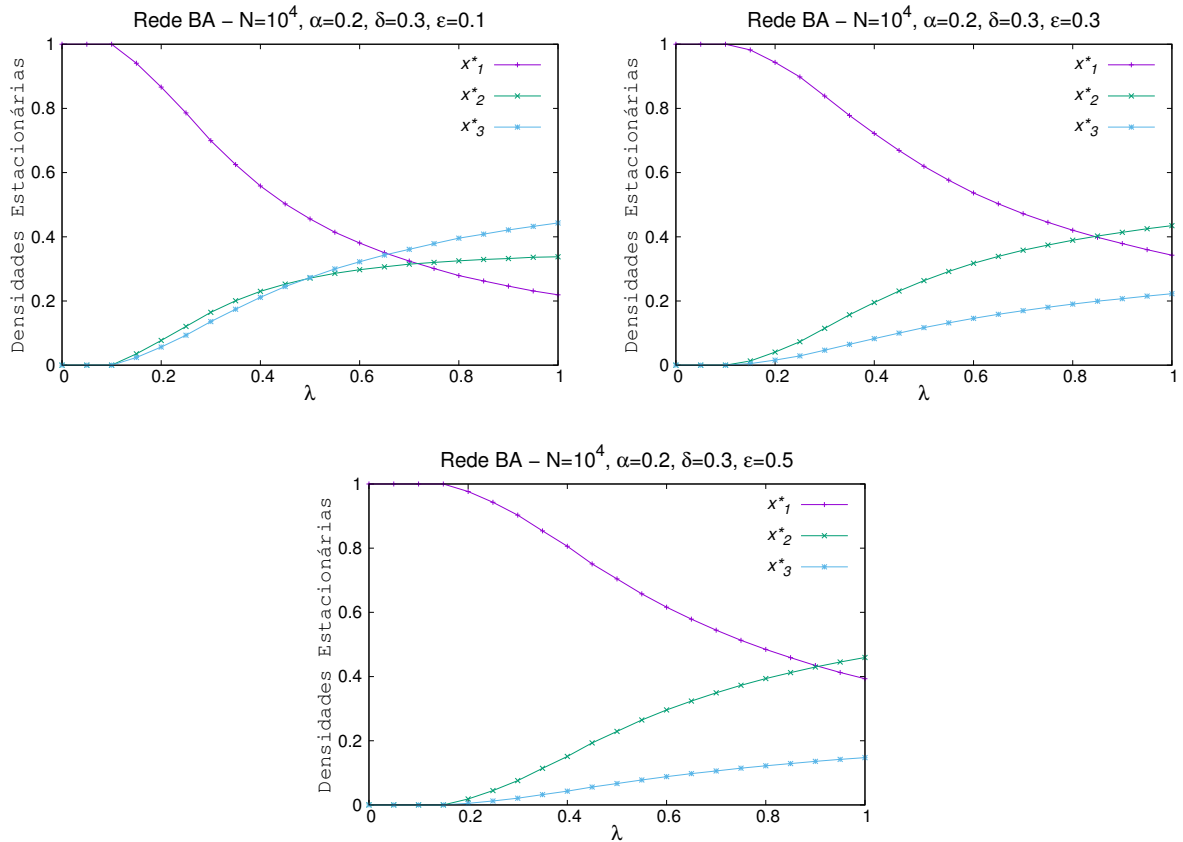


Figura 23: Densidades estacionárias  $x_1^*$ ,  $x_2^*$  e  $x_3^*$  como função do parâmetro socioeconômico  $\lambda$  para  $\epsilon = 0.1$ ,  $\epsilon = 0.3$  e  $\epsilon = 0.5$  para o modelo simulado na rede BA. Fixamos os valores de  $\alpha$  e  $\delta$  em 0.2 e 0.3, respectivamente. Simulamos redes com  $10^4$  sítios (indivíduos).

Utilizamos este método para avaliarmos se o modelo apresenta transição de fase em algumas das redes complexas analisadas. A maneira como fizemos isso foi a seguinte: para cada tamanho da rede simulado ( $N = 500, 1000, 2000, 10000$  e  $20000$  sítios), armazenamos o valor de  $\lambda_c(N)$ , ou seja, o valor do que parece ser o parâmetro crítico dos sistemas para o tamanho  $N$ . Chamamos este valor de parâmetro pseudo-crítico. Feito isso, criamos o gráfico deste valor do parâmetro pseudo-crítico em função do inverso do tamanho da rede. Este procedimento foi realizado para as duas redes e para 3 valores distintos do parâmetro  $\epsilon$  ( $\epsilon = 0.1$ ,  $\epsilon = 0.3$  e  $\epsilon = 0.5$ ). Os resultados são mostrados na figura (24).

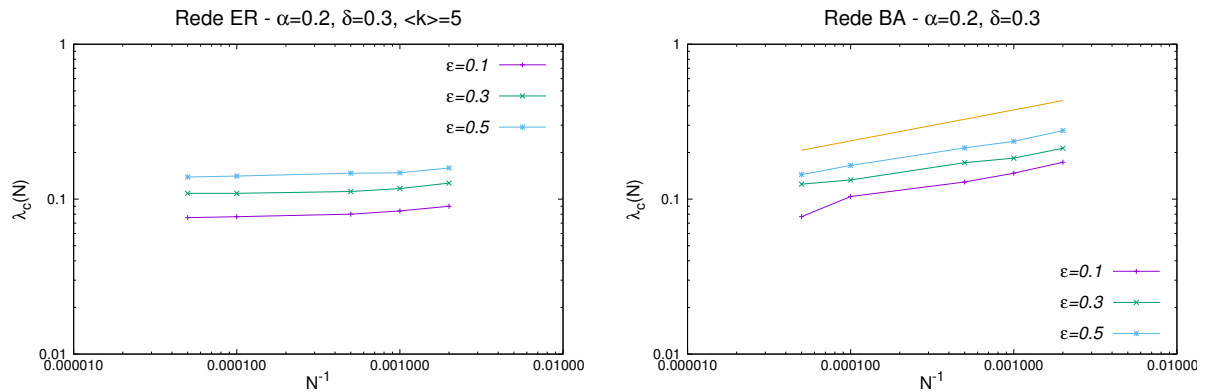


Figura 24: Comportamento de  $\lambda_c(N)$  em função do inverso do tamanho da rede  $N^{-1}$  para a rede aleatória (à esquerda) e para a rede livre de escala (à direita). Os parâmetros fixados foram  $\alpha = 0.2$  e  $\delta = 0.3$  e ambos os gráficos foram obtidos de simulações para  $\epsilon = 0.1, 0.3$  e  $0.5$ . A linha reta no gráfico à direita indica o decaimento em lei de potência de  $\lambda_c(N)$  para a rede BA, o que sugere a ausência do limiar epidêmico. Simulamos redes com  $N = 500, 1000, 2000, 10000$  e  $20000$  sítios.

Ao olharmos com mais atenção para estes gráficos da figura (24), é possível observar que quando  $N$  tende a infinito, o valor de  $\lambda_c(N)$  utilizando a rede ER tende a um valor constante não-nulo, enquanto que rede BA o valor de  $\lambda_c(N)$  tende a zero. Assim, isso sugere a existência de transição de fase do modelo na rede aleatória e a inexistência de limiar epidêmico na rede livre de escala (é comum modelos parecidos com o que propomos apresentarem este comportamento na rede BA [102], [103], [104]). Mas o que significa esta propriedade única até o momento? O que significa a inexistência do limiar epidêmico na rede BA? A resposta mostra um comportamento sutil. Dada alguma sociedade cuja estrutura de contatos for como uma rede livre de escala, se em algum momento algum indivíduo se tornar um sonegador, este tipo de comportamento jamais será extinto, assim sendo, podemos até tentar minimizar a densidade de indivíduos sonegadores, mas eles sempre estarão presentes na sociedade.

### 4.3 Extensão do modelo - Inclusão do 4º estado

Nas seções anteriores, apresentamos um modelo onde a dinâmica de evasão fiscal estudada utilizava, para tal, três possíveis estados, ou seja, três comportamentos que um indivíduo pode apresentar: o indivíduo contribui e está satisfeito com isso ( $x_1$ ), o indivíduo contribui e não está satisfeito ( $x_2$ ) e por fim, o indivíduo é um sonegador ( $x_3$ ).

Intitulamos estes estados, respectivamente como: honesto, suscetível e sonegador. Para tal, como já discutido, utilizamos 4 parâmetros socioeconômicos:  $\alpha$ ,  $\epsilon$ ,  $\delta$  e  $\lambda$  que, por sua vez, são responsáveis pelas mudanças (transições) entre os estados  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  através das equações (4.1)-(4.4).

Já discutimos bastante sobre os resultados deste modelo em algumas redes e suas interpretações. Entretanto, as premissas que adotamos podem parecer muito simplificadas. Em especial, a transição mostrada pela regra (4.4), onde, através da atuação da fiscalização, um sonegador se torna imediatamente honesto pela probabilidade  $\epsilon$ . Esta transição não é tão real assim, afinal, a interpretação desta mudança foi devida à imposição da fiscalização. É de se esperar que se alguém que assumia o comportamento sonegador fosse obrigado a contribuir, ele não estaria satisfeito com isso já que a adoção de tal comportamento seria forçada e não proveniente de reflexão e moral.

Vamos propor, então, uma extensão do modelo utilizando para isso um novo estado  $x_4$ . Este estado, por sua vez, representa um indivíduo que era sonegador e que através da atuação da fiscalização vai para outro estado que não é o honesto e, sim, este estado  $x_4$ . Neste estado, o indivíduo pode se tornar novamente suscetível ( $x_2$ ) ou honesto, dependendo das interações com outros indivíduos. O novo esquema de transições assumindo o novo estado  $x_4$  é dado por:

$$X_1 + X_3 \xrightarrow{\lambda} X_2 + X_3 \quad (4.12)$$

$$X_2 \xrightarrow{\alpha} X_3 \quad (4.13)$$

$$X_4 + X_3 \xrightarrow{\lambda} X_2 + X_3 \quad (4.14)$$

$$X_3 \xrightarrow{\epsilon} X_4 \quad (4.15)$$

$$X_1 + X_4 \xrightarrow{\delta} X_1 + X_1 \quad (4.16)$$

### 4.3.1 Rede Completamente Conectada - Campo médio

De maneira análoga ao que fizemos no começo do capítulo, vamos estudar o modelo estendido através da rede completamente conectada, ou seja, vamos utilizar a aproximação de campo médio. Com isto, o conjunto de regras (4.12)-(4.16) pode ser compreendido através do conjunto de equações diferenciais para as taxas de variação das densidades populacionais  $x_i$  ( $i = 1,2,3,4$ ), onde  $x_i = \frac{X_i}{N}$  e  $N$  é o número total de indivíduos da população.

$$\frac{dx_1}{dt} = -\lambda x_1 x_3 + \delta x_1 x_4 \quad (4.17)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\alpha x_2 + \lambda x_1 x_3 + \lambda x_4 x_3 \quad (4.18)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \alpha x_2 - \epsilon x_3 \quad (4.19)$$

$$\frac{dx_4}{dt} = \alpha x_2 + \epsilon x_3 - \delta x_1 x_4 \quad (4.20)$$

Como já observado, este conjunto de equações diferenciais são as equações mestras (1.19) do sistema. Além destas equações, temos a condição de normalização  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ .

### 4.3.2 Análise temporal

Os gráficos da figura (25) nos auxiliam a entender um pouco melhor o comportamento das densidades populacionais  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  e  $x_4$  em função do tempo. Estes gráficos foram obtidos através da integração numérica das equações (4.17) - (4.20). Podemos reparar que os comportamentos qualitativos de  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  não são tão distintos daqueles obtidos nos gráficos da figura (18). Por este motivo, focaremos nossa atenção no comportamento da densidade  $x_4$  em função do tempo.

Em primeiro lugar, podemos observar que quanto maior o valor de  $\lambda$  adotado (fixado os outros parâmetros), menor se torna o valor estacionário de  $x_4$ . Este comportamento é proveniente da influência de sonegadores fazendo com que indivíduos no estado  $x_4$  se tornem suscetíveis ( $x_2$ ) (equação(4.12)). Em contrapartida, quanto maior o valor do parâmetro  $\epsilon$  (também fixando os outros parâmetros), maior será o valor da densidade  $x_4$  (depois de algumas interações). Observamos este comportamento, pois através da atuação da fiscalização sobre indivíduos sonegadores ( $x_3$ ) (equação 4.15) estes, por sua vez, passam para o estado  $x_4$ .

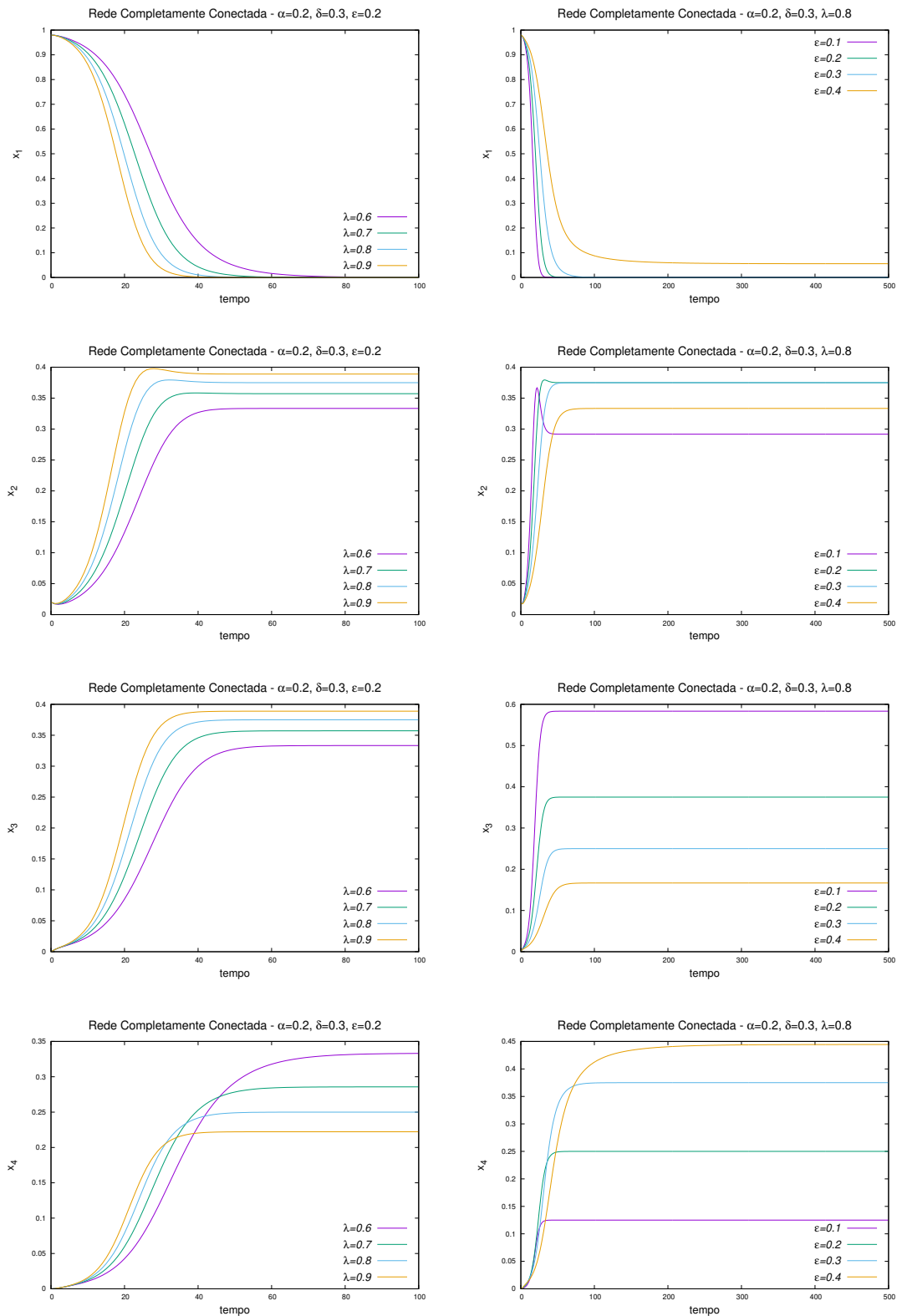


Figura 25: Evolução temporal para as quatro densidades populacionais  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  e  $x_4$  para a aproximação de campo médio do modelo estendido proposto, baseado nas equações (4.17) - (4.20). Os parâmetros fixados são  $\alpha = 0.2$  e  $\delta = 0.3$ . Os gráficos à esquerda mostram a evolução para  $\epsilon = 0.2$  e valores típicos de  $\lambda$ , enquanto nos gráficos à direita, mostramos a evolução para  $\lambda = 0.8$  para valores típicos de  $\epsilon$ .

### 4.3.3 Densidades estacionárias de evasores

Podemos resolver as equações (4.17) - (4.20) para a situação onde estas densidades não mudam, ou seja, podemos obter os valores estacionários das densidades populacionais  $x_i^*$  em função apenas dos parâmetros socioeconômicos  $\alpha$ ,  $\epsilon$ ,  $\delta$  e  $\lambda$ . Estes valores são dados por:

$$x_1^* = k_1(\lambda - \lambda_1), \quad (4.21)$$

$$x_3^* = k_2(\lambda - \lambda_2), \quad (4.22)$$

$$x_2^* = \frac{\epsilon}{\alpha} x_3^*, \quad (4.23)$$

$$x_4^* = \frac{\lambda}{\delta} x_3^*. \quad (4.24)$$

onde:

$$k_1 = \frac{-\alpha}{\delta\lambda(\alpha + \epsilon)}, \quad (4.25)$$

$$k_2 = \frac{\alpha}{\lambda(\alpha + \epsilon)}, \quad (4.26)$$

$$\lambda_1 = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \sqrt{1 + \frac{4\delta(\alpha + \epsilon)}{\alpha\epsilon}}, \quad (4.27)$$

$$\lambda_2 = \epsilon. \quad (4.28)$$

Notamos, então, que mesmo com esta simples generalização, em que adicionamos apenas um novo estado, obtemos toda uma riqueza de informações. Entre elas, a existência de duas transições de fase. Uma delas associada ao valor  $\lambda = \lambda_1$  onde temos que toda a população passa a adotar outros comportamentos que não exclusivamente o honesto ( $x_1^*$ ) (para valores de  $\lambda$  menores do que  $\lambda_1$  toda a população apresenta comportamento honesto estando então, em um estado absorvente). A outra aparece quando  $\lambda = \lambda_2$  e desta forma, o comportamento honesto é totalmente abolido da sociedade sobrando os estados intermediários e o sonegador ( $x_2^*$ ,  $x_4^*$  e  $x_3^*$  respectivamente). Como observação, é fácil notar que  $\lambda_1 > \lambda_2$ .

Nos gráficos da figura (26) podemos visualizar estas duas transições para valores pequenos de  $\epsilon$  ( $\epsilon = 0.1$  e  $\epsilon = 0.3$ ). Para o maior valor de  $\epsilon$  considerado ( $\epsilon = 0.5$ ) não conseguimos notar a transição associada com a eliminação do comportamento honesto da população, visto que o valor de  $\lambda_1$  obtido pela equação (4.27) não poderia ser alcançado.

Já no gráfico da figura 27, reunimos todas as densidades populacionais  $x_2^*$ ,  $x_4^*$  e  $x_3^*$

com valores apropriados a fim de mostrar melhor as duas transições de fase. Notamos dois comportamentos bem distintos: O primeiro caracterizado por valores de  $\lambda$  menores do que os de  $\lambda_2 = 0.3$ . Neste regime, todos os indivíduos da população estão no estado  $x_1$ , revelando, assim, a existência de um estado absorvente que impede qualquer outro comportamento que não seja o honesto ( $x_1$ ). Já o segundo, onde os valores de  $\lambda$  são maiores que  $\lambda_1 \approx 0.66$ , o comportamento honesto desaparece da população.

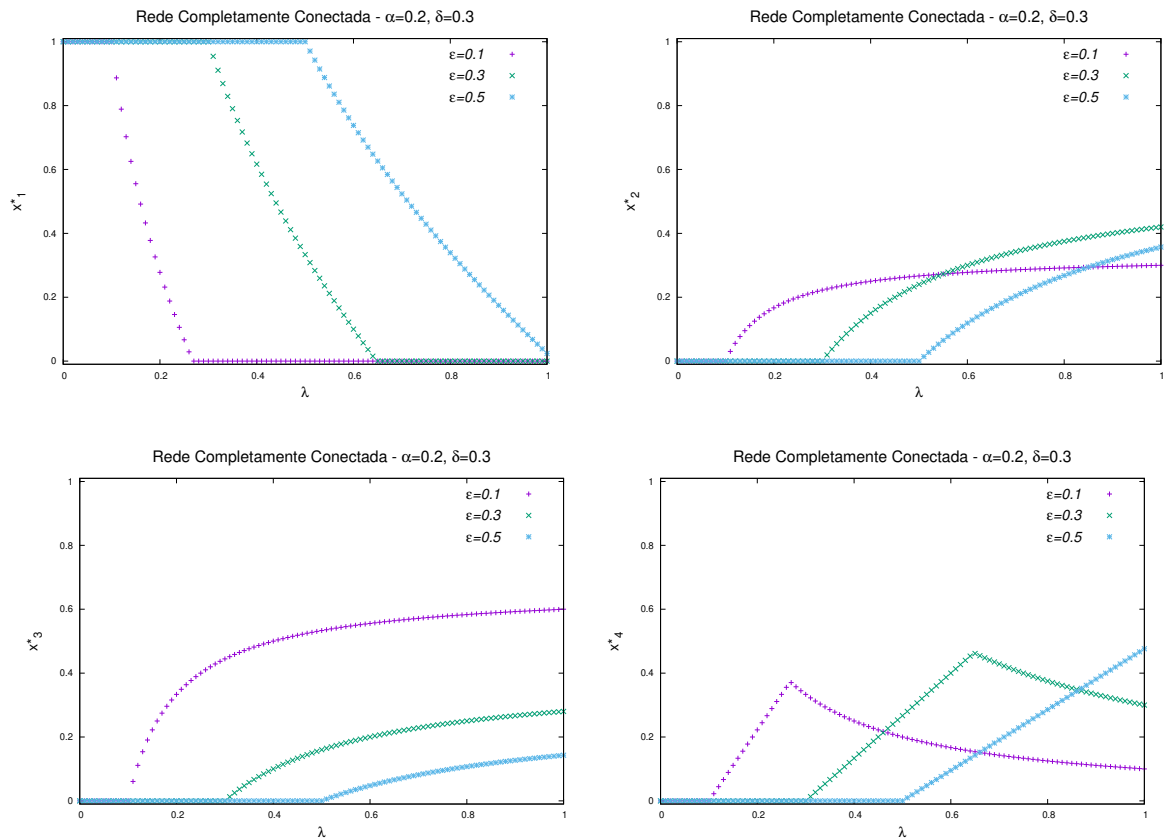


Figura 26: Densidades estacionárias  $x_1^*$ ,  $x_2^*$ ,  $x_3^*$  e  $x_4^*$  do modelo proposto com 4 estados utilizando a aproximação de campo médio para os valores  $\alpha = 0.5$ ,  $\delta = 0.5$  e variando os valores de  $\epsilon$  em 0.1, 0.3 e 0.5 em função do parâmetro  $\lambda$ . Nos gráficos onde os valores de  $\epsilon$  são menores do que 0.5 é possível observar as duas transições de fase obtidas através das equações (4.21) - (4.24).



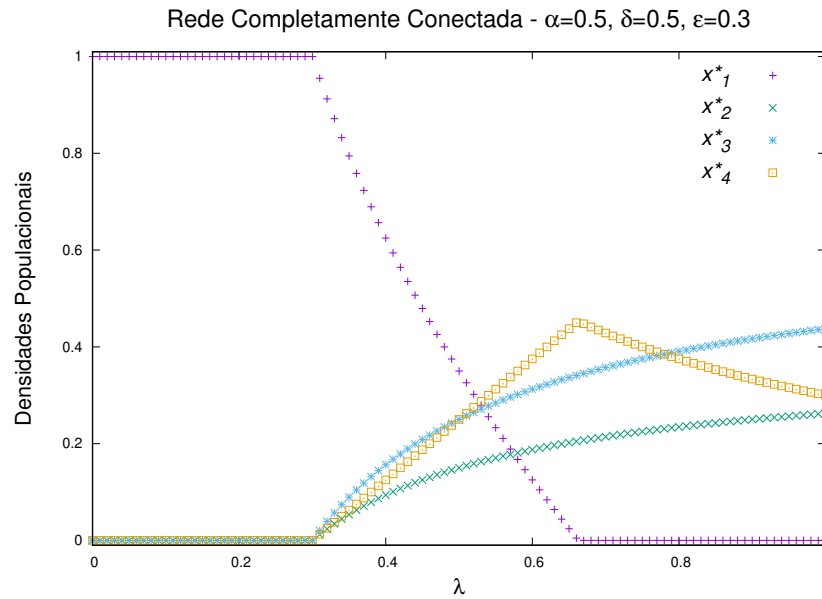


Figura 27: Densidades estacionárias  $x_2^*$ ,  $x_4^*$  e  $x_3^*$  em função do parâmetro  $\lambda$  obtidas através das equações (4.21) - (4.24) para os valores  $\alpha = 0.5$ ,  $\delta = 0.5$  e  $\epsilon = 0.3$ . No gráfico podemos observar as duas transições de fase associadas a  $\lambda = \lambda_2$  e  $\lambda = \lambda_1$  (equações 4.27 e 4.28) onde  $\lambda_2 = 0.3$  e  $\lambda_1 \approx 0.66$ . Para valores de  $\lambda$  menores que  $\lambda_2$ , notamos o estado absorvente onde todos os indivíduos estão no estado  $X_1$  e para valores de  $\lambda$  maiores do que  $\lambda_1$  o estado  $x_1$  desaparece, restando os outros comportamentos na sociedade.

Na figura (28), podemos encontrar um diagrama que mostra o comportamento de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  em função de  $\epsilon$  para  $\alpha = 0.5$  e  $\delta = 0.5$ . Nestes gráficos nos deparamos com três regiões indicadas por I, II e III.

Na região I, temos os valores de  $\lambda$  que são maiores do que  $\lambda_1$  e desta forma, o sistema se encontra no estado de ausência da densidade  $x_1$ . Na região II, os valores de  $\lambda$  agora estão entre  $\lambda_1$  e  $\lambda_1$  ( $\lambda_2 < \lambda < \lambda_1$ ). Nesta região, todos os estados podem ser encontrados. Por último, na região III, temos os valores de  $\lambda$  menores do que  $\lambda_2$ . Esta região representa o estado absorvente, onde todos os indivíduos estão no estado  $X_1$ .

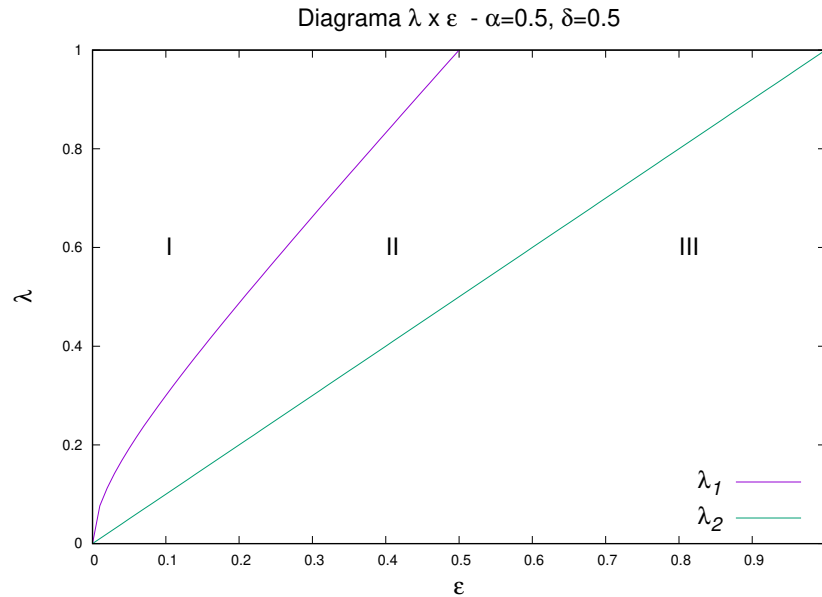


Figura 28: Comportamento de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  em função de  $\epsilon$  para  $\alpha = 0.5$  e  $\delta = 0.5$ . Neste diagrama observamos três regiões (indicadas por I, II e III) que mostram qualitativamente como estão os quatro estados: Região I:  $\lambda > \lambda_1$  indicando que a densidade de indivíduos  $x_1$  vai a zero. O comportamento honesto desaparece da população. Região II:  $\lambda_2 < \lambda < \lambda_1$  temos os quatro estados presentes na população. Quanto maior é o valor de  $\lambda$  nesta região, menor se torna o valor de  $x_1^*$ . Região III:  $\lambda < \lambda_2$  mostra o estado absorvente onde toda a população se encontra no estado honesto.

## 4.4 Comentários Finais

Neste capítulo, fizemos uma análise socioeconômica do nosso modelo proposto em duas redes complexas, a rede aleatória e a rede Barabási–Albert. Como complemento para este estudo anterior, utilizamos também a rede completamente conectada que, por sua vez, é uma rede regular de máximo grau de conexão, para que assim pudéssemos estudar o modelo de evasão fiscal em campo médio e desta forma conseguimos obter além de um conjunto de equações diferenciais para as densidades  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_3$  no tempo, as respectivas soluções analíticas para as densidades estacionárias  $x_1^*$ ,  $x_2^*$  e  $x_3^*$ , método que não foi possível implementar nas redes complexas e, por isso, o uso justificado de simulações computacionais.

Em resumo, nos concentramos em realizar uma análise socioeconômica do modelo proposto em redes complexas, pois estas representam, de forma mais satisfatória, a estrutura

das redes de informação entre indivíduos nas sociedades.

Realizamos um breve estudo sobre uma extensão do modelo cujo objetivo foi a adoção de um novo estado ( $x_4$ ) em adição aos outros já discutidos. Através desta extensão, obtivemos uma nova transição de fase associada ao desaparecimento do comportamento honesto ( $x_1$ ) na sociedade.

Vale ressaltar, também, que algumas comparações qualitativas com dados reais podem ser feitas. Alguns autores estimam que a taxa de evasão fiscal do Brasil se encontra em torno de 15-22 % ou até mesmo valores maiores [105]. Estas estimativas são encontradas como resultados de nosso modelo quando o simulamos utilizando baixos valores para a fiscalização (como é o caso do Brasil).

## 5 *Dinâmica de evasão fiscal através do modelo do Votante Majoritário em redes aleatórias*

O modelo aqui apresentado tem como base o do Votante Majoritário com ruído. Nele, iremos adicionar os mecanismos de fiscalização do modelo de Zaklan, além de um termo de inércia comportamental.

### 5.1 Modelo do Votante Majoritário com e sem ruído

O modelo do votante majoritário (*majority voter model* - MVM) é utilizado para descrever o processo de adoção de opiniões por indivíduos em uma sociedade. Na versão mais simples do MVM, cada indivíduo da sociedade adota o posicionamento da maioria de seus contatos sociais imediatos. No que chamamos então de modelo do votante majoritário sem ruído (esta versão mais simples), nenhum indivíduo possui opinião própria pois, independente de seu estado, o mesmo assumirá imediatamente a opinião da maioria [101].

Como tal descrição da dinâmica de opiniões no mundo real é por demais simples, utiliza-se em adição ao modelo um parâmetro de ruído, representado por  $q$  neste trabalho. Este ruído faz com que um indivíduo possa assumir a opinião (estado) oposta a de sua vizinhança (mesmo que a vizinhança já possua a mesma opinião atual do indivíduo). Assim, este termo de ruído pode ser entendido como um fator que mede o não-conformismo dos indivíduos. Esta contrariedade é aleatória, ou seja, não necessariamente o indivíduo adquire o estado da maioria de sua vizinhança. Ao contrário do modelo do votante majoritário sem ruído, que acarreta em algum momento a aceitação por toda a sociedade de alguma opinião, o modelo com ruído possibilita a existência de uma fração da sociedade que sempre apresentará opinião contrária a da maioria ao invés da obediência cega ao senso comum.

## 5.2 Modelo do Votante Majoritário com parâmetro de inércia

O presente trabalho tem como objetivo analisar o problema da evasão fiscal através de um modelo de dinâmica de opiniões onde cada indivíduo pode sofrer influência de sua vizinhança. Utilizaremos como base o modelo do Votante Majoritário com ruído [15], [106]. Ao invés do estado de cada sítio ser dado por uma opinião, o caracterizaremos como um comportamento em relação à contribuição fiscal de qualquer espécie (honesto ou desonesto). Para uma sociedade mapeada como uma rede de  $N$  sítios, onde cada sítio  $i$  se conecta com  $k_i$  outros sítios, a taxa de mudança de estado deste indivíduo é dada por:

$$w(\sigma_i) = \frac{1}{2}[1 - (1 - 2q)\sigma_i S(\Delta)], \quad (5.1)$$

onde  $\sigma_i$  é o estado do sítio  $i$  ( $\sigma_i = +1$  para honestos e  $\sigma_i = -1$  para desonestos),  $\Delta = \sum_{j=1}^N \frac{a_{i,j}\sigma_j}{k_i}$  ( $a_{ij}$  são os elementos da matriz de adjacência e  $k_i$  é a conectividade de cada elemento  $i$ . Quando  $a_{ij} = 1$  existe conexão entre os sítios  $i$  e  $j$  e  $a_{ij} = 0$ , caso estes sítios não estejam conectados) e  $S$  é a função sinal ( $S(x) = 1$  se  $x > 0$ ,  $S(x) = -1$  se  $x < 0$  e  $S(x) = 0$  se  $x = 0$ ). O termo  $\Delta$  é a influência total de opiniões dada pela vizinhança do sítio  $i$  sobre o mesmo. Em relação a esta estrutura de contatos, utilizaremos a rede de Erdős-Rényi (rede aleatória) [107], desta forma, garantimos que os indivíduos da sociedade não possuam o mesmo número de conexões com outros vizinhos como é geralmente observado na sociedade.

Em adição ao modelo do Votante Majoritário, incluiremos em  $\Delta$  um termo de inércia dado por  $\theta$  [108]. Este termo representa a insistência de cada indivíduo em permanecer em seu estado independente de sua vizinhança. Deve ficar claro entretanto, que o termo  $\theta$  é completamente distinto do ruído  $q$ , visto que enquanto o primeiro representa uma certa "teimosia" ou insistência em permanecer fiel a um comportamento (honesto ou evasor), o segundo mostra um comportamento contrário ao da vizinhança, mesmo se esta por sua vez agir igual ao próprio indivíduo. O termo  $q$  pode ser interpretado como um indicador de não-conformismo [109], [110]. Quanto mais averso da sociedade for cada indivíduo, maior será o valor de  $q$ . Com a inserção da inércia, o termo  $\Delta$  passa a ser escrito como:

$$\Delta = (1 - \theta) \sum_{j=1}^N \frac{a_{i,j}\sigma_j}{k_i} + \theta\sigma_i. \quad (5.2)$$

Para  $\theta = 0$ , retornaremos ao modelo do Votante Majoritário com ruído.

Fazendo um paralelo com sistemas clássicos de spins, podemos obter a "magnetização"

por sítio  $|m|$ , ou seja, a coerência do estado coletivo por indivíduo para cada valor de ruído  $q$  onde:

$$|m| = \left| \left\langle \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_i \right\rangle \right|, \quad (5.3)$$

onde a média  $\langle \rangle$  é realizada sobre simulações distintas.

Quando o ruído  $q$  for muito pequeno, o modelo segue a regra da maioria e a magnetização por spin tende a 1, o que indica a total convergência do estado (+1 ou -1) por todos os indivíduos (lembrando que a definição que estamos utilizando para a magnetização é referente ao seu módulo). Quando o ruído aumenta, o sistema entra na chamada fase desordenada onde se torna igualmente provável, depois de uma escolha aleatória, encontrarmos um indivíduo sonegador tanto quanto um honesto. Assim, não existe um consenso e "a população está completamente dividida". Neste estado desordenado, a magnetização se torna nula no limite termodinâmico do número de indivíduos que compõem a sociedade em questão.

Em simulações deste tipo, duas estratégias para a evolução do sistema podem ser consideradas: *forward* e *backward*. Nas simulações onde é utilizado o método *forward*, a magnetização, por exemplo, é obtida calculando seu valor estacionário, enquanto o parâmetro de ruído é incrementado de 0 até o valor máximo desejado e utilizando a configuração final da última simulação como condição inicial para o próximo conjunto de simulações do novo valor de ruído. Já no *backward*, iniciam-se as simulações com o maior valor de ruído considerado e decrementa-o até 0, também utilizando para o cálculo da magnetização a última configuração obtida como condição inicial para a obtenção do próximo valor de  $m$  [108].

Levando em conta o termo de inércia  $\theta$ , também obtemos uma transição de fase ordem-desordem descontínua caracterizado por um valor  $\theta_c$ . Para valores maiores ou iguais a este valor crítico, nota-se uma curva de histerese para  $m$ , conforme pode ser visto na figura (29) (onde o ruído foi representado por  $f$ ). Esta curva mostra que o estado estacionário do sistema é muito sensível às condições iniciais com as quais o simulamos [112]. Visto que, a partir de  $\theta_c = 0.30$ , as curvas utilizando os métodos *forward* e *backward* não mais coincidem.

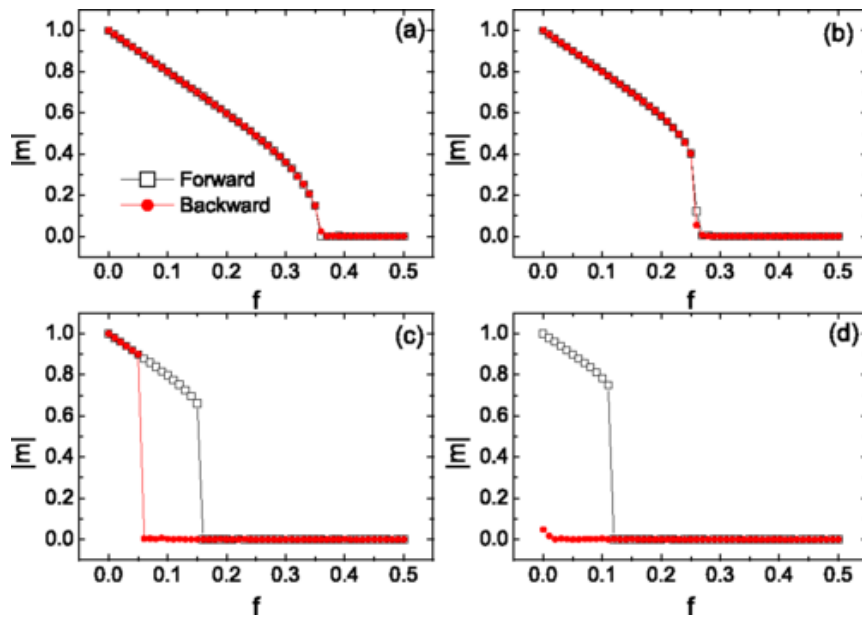


Figura 29: Módulo da magnetização  $|m|$  em função do ruído  $f$  em redes aleatórias com diferentes parâmetros de inércia  $\theta$ : (a)  $\theta = 0$ , (b)  $\theta = 0.2$ , (c)  $\theta = 0.3$  e (d)  $\theta = 0.35$ . Os quadrados e círculos correspondem às simulações do tipo *forward* e *backward*, respectivamente. Parâmetros da rede:  $N = 10000$  e  $z = 20$ . Gráficos obtidos de [108].

Todas as análises feitas até agora levam em consideração apenas, para mecanismos de mudanças de estados dos indivíduos, os próprios agentes da rede. Assim, estas mudanças se dão através de influências da vizinhança de cada sítio e da tendência de cada indivíduo de continuar com seu estado atual. Porém, para podermos investigar de maneira mais realista o problema da evasão fiscal, devemos incorporar efeitos externos à sociedade como, por exemplo, a fiscalização. A fiscalização desempenha um papel fundamental influenciando o comportamento dos integrantes da sociedade. Em [8], o autor considerou um mecanismo de fiscalização caracterizado por 2 processos, cada um deles associado a um parâmetro:

1) Através de uma probabilidade  $p_a$ , uma comissão de auditoria relacionada ao órgão de fiscalização identifica um evasor fiscal na sociedade.

2) Um sonegador descoberto desta forma, sofre punição (ou receia sofrer), permanecendo vigiado por um período  $k$  de tempo e, desta forma, obrigado a contribuir.

A combinação destes processos ficou conhecido como modelo de Zaklan.

## 5.3 Modelo Proposto

O modelo que propomos, então, para estudar a dinâmica de evasão fiscal é composto da seguinte forma:

1) Os indivíduos que formam a sociedade podem apresentar um entre dois tipos distintos de comportamentos: honesto ou evasor. O estado honesto é aquele em que o indivíduo contribui com seus impostos e não considera a evasão como uma opção válida. Já os indivíduos desonestos, ou sonegadores, são aqueles que não contribuem com seus impostos, seja totalmente ou parcialmente de maneira ilegal (sonegação fiscal). Caracterizaremos o comportamento de um indivíduo  $i$  da população através de uma variável discreta  $\sigma_i$ . Temos  $\sigma_i = +1$  se ele for honesto ou  $\sigma_i = -1$  se ele for um sonegador.

2) A forma como os indivíduos estão conectados na sociedade é através de uma rede. Neste trabalho, utilizaremos a rede aleatória.

3) Indivíduos da rede se influenciam e podem mudar seus comportamentos através de seus contatos. Esta interação se dá pelo modelo do Votante Majoritário com ruído e inércia (equações 5.1 e 5.2).

4) Além das influências entre indivíduos, sonegadores podem mudar de estado a todo momento devido à fiscalização. A cada instante (passo de Monte Carlo), a fiscalização investigará todos os agentes da sociedade. Com uma probabilidade  $p_a$ , um indivíduo sonegador é descoberto pela fiscalização e, desta forma, obrigado a permanecer  $k$  passos de tempo contribuindo, ou seja, mudar para o estado honesto e permanecer nele por este tempo.

## 5.4 Metodologia

Escolhemos o modelo proposto através de simulações computacionais onde a estrutura que define a conexão entre os indivíduos é dada por uma rede aleatória com 10000 sítios e conectividade média  $z = 20$ . Utilizamos esta rede pois a mesma consegue representar satisfatoriamente algumas estruturas de conexão reais em vários setores da sociedade. Inicialmente, cada sítio  $i$  está no estado  $\sigma_i = +1$ , ou seja, todos os indivíduos começam no estado honesto. Estaremos sempre interessados em observar o comportamento da densidade de evasores na população, em outras palavras, o percentual de indivíduos que sonegam impostos.



Como parâmetros adotados da dinâmica social, utilizamos os valores de  $\theta$  analisados em [108] ( $\theta = 0.00, 0.20, 0.30$  e  $0.35$ ), auditorias pouco e muito eficientes ( $p_a = 5\%$  e  $p_a = 90\%$ ), tempos curtos e longos de vigilância sobre indivíduos auditados ( $k = 10$  e  $k = 50$ ) e diversos valores de  $q$  que expressam o inconformismo dos indivíduos. Inicialmente, realizaremos análises temporais das densidades de sonegadores para alguns valores de  $q$  e posteriormente, serão discutidos alguns resultados para as densidades estacionárias, tanto em função de  $q$ , como em função de  $p_a$ . Durante estas simulações, a evolução dos sistema foi feita em *forward*.

## 5.5 Resultados e conclusões

### 5.5.1 Análise temporal

Nas figuras (30)-(33) plotamos as curvas para as densidades de sonegadores em função do tempo utilizando diferentes valores de ruído  $q$  (em todos os gráficos utilizamos 10 valores de  $q$ ). Estes termos de ruído variam de maneira a ficarem próximos dos encontrados nas transições de fase obtidas em [108] onde temos aproximadamente como ruídos críticos os valores:  $q_c \approx 0.35$  para  $\theta = 0.00$ ,  $q_c \approx 0.25$  para  $\theta = 0.20$ ,  $q_c \approx 0.15$  para  $\theta = 0.30$  e  $q_c \approx 0.11$  para  $\theta = 0.35$ . Nos gráficos da figura (30), utilizamos  $\theta = 0.00$ , ou seja, não consideramos a inércia dos indivíduos. Desta forma, podemos analisar de maneira mais fácil as implicações das regras do modelo de Zaklan e, assim, termos um ponto de partida e comparação quando levamos em consideração a inércia.

No modelo original do Votante Majoritário com ruído [15], [108] e [111], quando o termo de não-conformismo  $q$  chega a um valor crítico  $q_c$ , a "magnetização por spin", ou coerência do estado coletivo se torna nula no limite termodinâmico chegando, então, em uma fase desordenada onde não existe o consenso. Como o modelo só utiliza dois estados (honesto e evasor), na fase desordenada, ambos os estados se tornam igualmente prováveis, ou seja, o comportamento sonegador é encontrado em 50% dos indivíduos da sociedade.

Com a inclusão das regras de fiscalização, mesmo para uma capacidade de atuação dos órgãos de fiscalização baixa ( $k = 10$  e  $p_a = 0.05$ ) (figura (30) superior esquerda) nota-se a diminuição da densidade de evasores que a reduz para valores próximos de 30%. Aumentando os parâmetros  $k$  e  $p_a$ , a redução do comportamento evasor se torna mais evidente até o momento de atuação máxima da fiscalização considerada ( $k = 50$  e  $p_a = 0.90$ ), onde os sonegadores praticamente desaparecem da população (com ocorrências em torno de 3%). Ainda considerando esta situação onde temos tanto  $k$  quanto  $p_a$  elevados, é possí-

vel notar um comportamento oscilatório muito acentuado. Nestas oscilações, as diferentes curvas para ruídos distintos se tornam menos indistinguíveis e podemos observar que para aproximadamente os 300 primeiros passos temporais temos um período próximo de 50 (o valor de  $k$  adotado nestas simulações). Este comportamento será observado sempre nestas condições de fiscalização em nosso modelo para todos os valores de  $\theta$  utilizados.

Ainda sobre os resultados mostrados na figura (30), o gráfico inferior direito nos mostra um resultado interessante: as 10 curvas referentes aos ruídos distintos considerados são praticamente indistinguíveis e a conclusão que podemos tirar deste resultado é que quando a fiscalização é forte em todos os seus aspectos, o comportamento macroscópico resultante da dinâmica de interação independe do ruído. Ou seja, a partir de um certo valor de  $q$ , o aumento deste parâmetro não afeta a densidade de sonegadores. Em uma primeira análise, este resultado do modelo poderia não parecer tão geral, pois os gráficos da figura (30) foram obtidos para uma condição muito específica ( $\theta = 0.00$ ), entretanto, obtivemos comportamentos parecidos ao considerarmos outros valores de inércia.

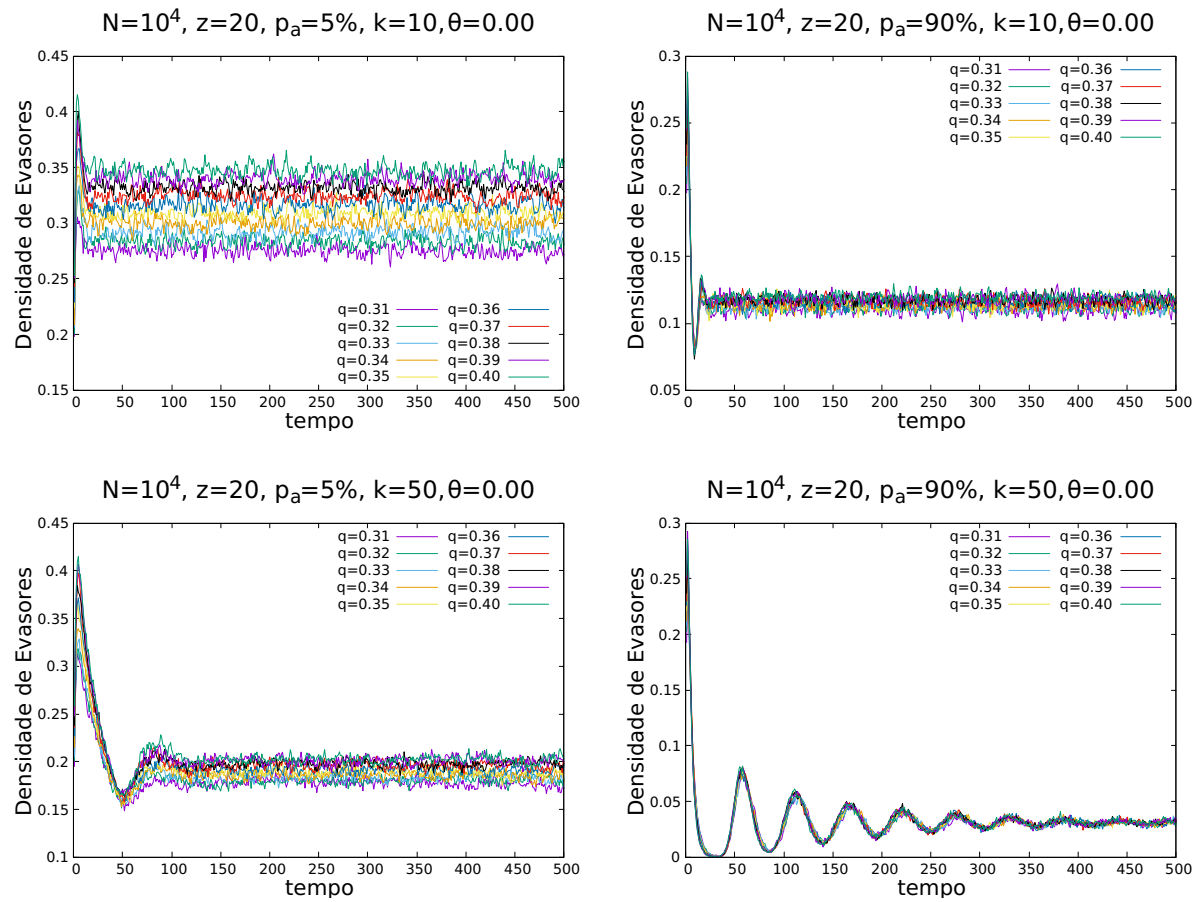


Figura 30: Resultados da evolução temporal da densidade de evasores com  $N = 10000$ ,  $z = 20$ ,  $\theta = 0.00$  para  $p_a = 0.05$  e  $p_a = 0.90$  e que em cada valor de probabilidade de auditoria utilizamos  $k = 10$  ou  $k = 50$ .

A partir da figura (31), adicionaremos o termo de inércia  $\theta=0.20$ , assim, cada indivíduo irá possuir uma resistência natural à mudança de estado. Ao compararmos os resultados das densidades de evasores com os obtidos na figura (30), notamos uma redução destes indivíduos, com exceção da situação em que a atuação da fiscalização é máxima ( $k = 50$  e  $p_a = 0.90$ ) onde o comportamento sonegador é extremamente baixo (em torno de 3%) e que já foi discutido anteriormente. Assim, como todos os agentes da sociedade são inicialmente honestos, a inércia dos indivíduos, por menor que seja, favorece o estado honesto.

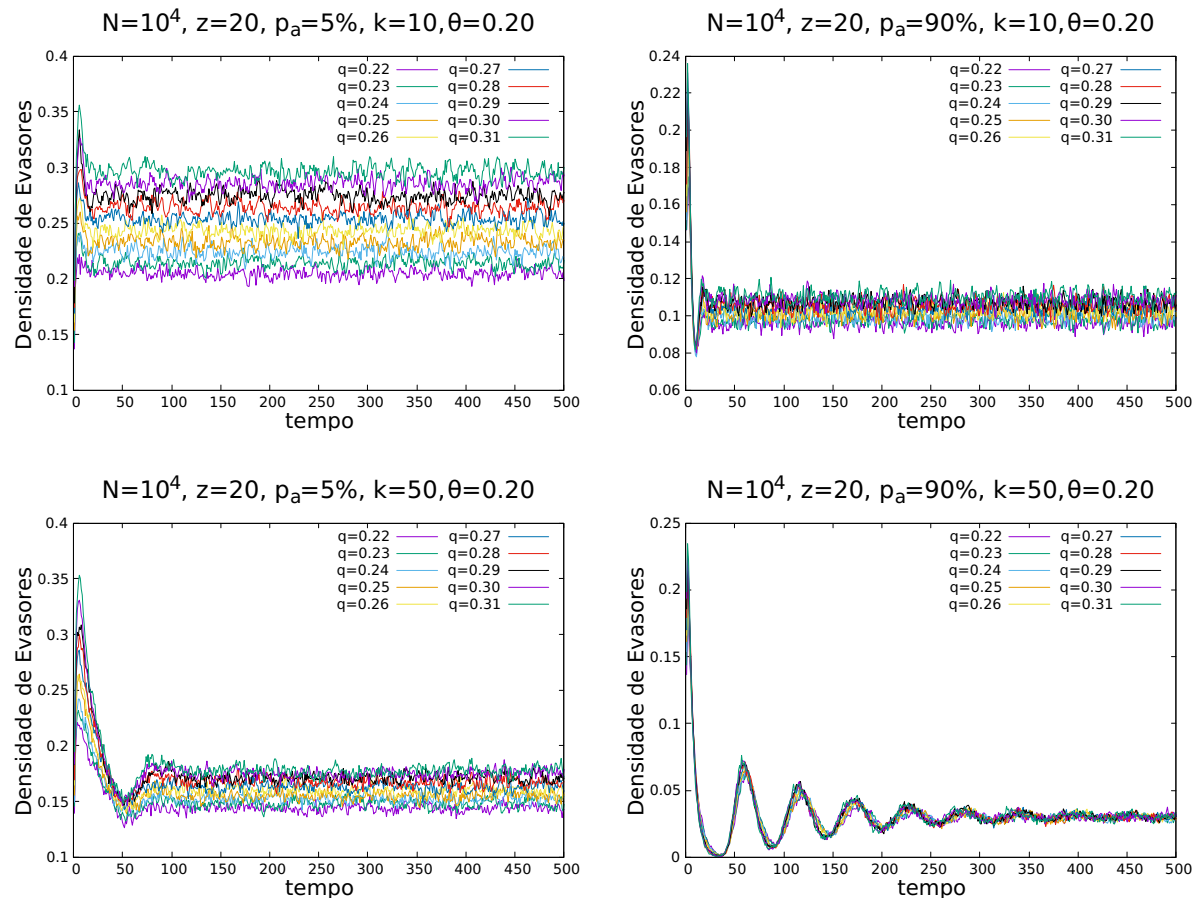


Figura 31: Resultados da evolução temporal da densidade de evasores com  $N = 10000$ ,  $z = 20$ ,  $\theta = 0.20$  para  $p_a = 0.05$  e  $p_a = 0.90$  e que em cada valor de probabilidade de auditoria utilizamos  $k = 10$  ou  $k = 50$ .

Nos gráficos da figura (32), são mostrados os resultados para a evolução temporal da densidade de evasores utilizando como parâmetro de inércia  $\theta = 0.30$ . Notamos um comportamento oscilatório muito forte quando a atuação da fiscalização como um todo é elevada ( $k = 50$  e  $p_a = 90\%$ ). Este efeito será melhor discutido em breve. Nota-se, também, maiores flutuações das densidades se comparadas com os gráficos da figura (30) (sem inércia).

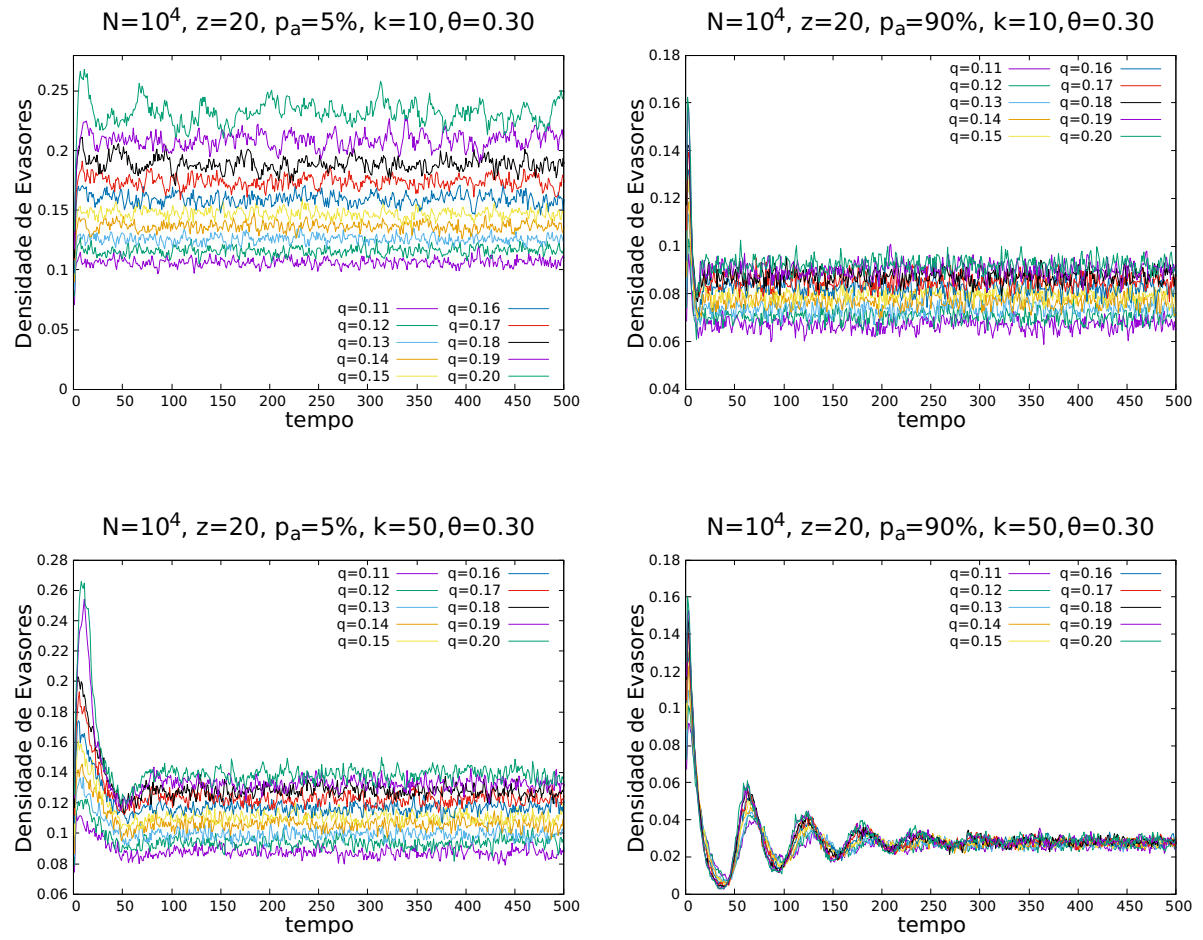


Figura 32: Resultados da evolução temporal da densidade de evasores com  $N = 10000$ ,  $z = 20$ ,  $\theta = 0.30$  para  $p_a = 0.05$  e  $p_a = 0.90$  e que em cada valor de probabilidade de auditoria utilizamos  $k = 10$  ou  $k = 50$ .

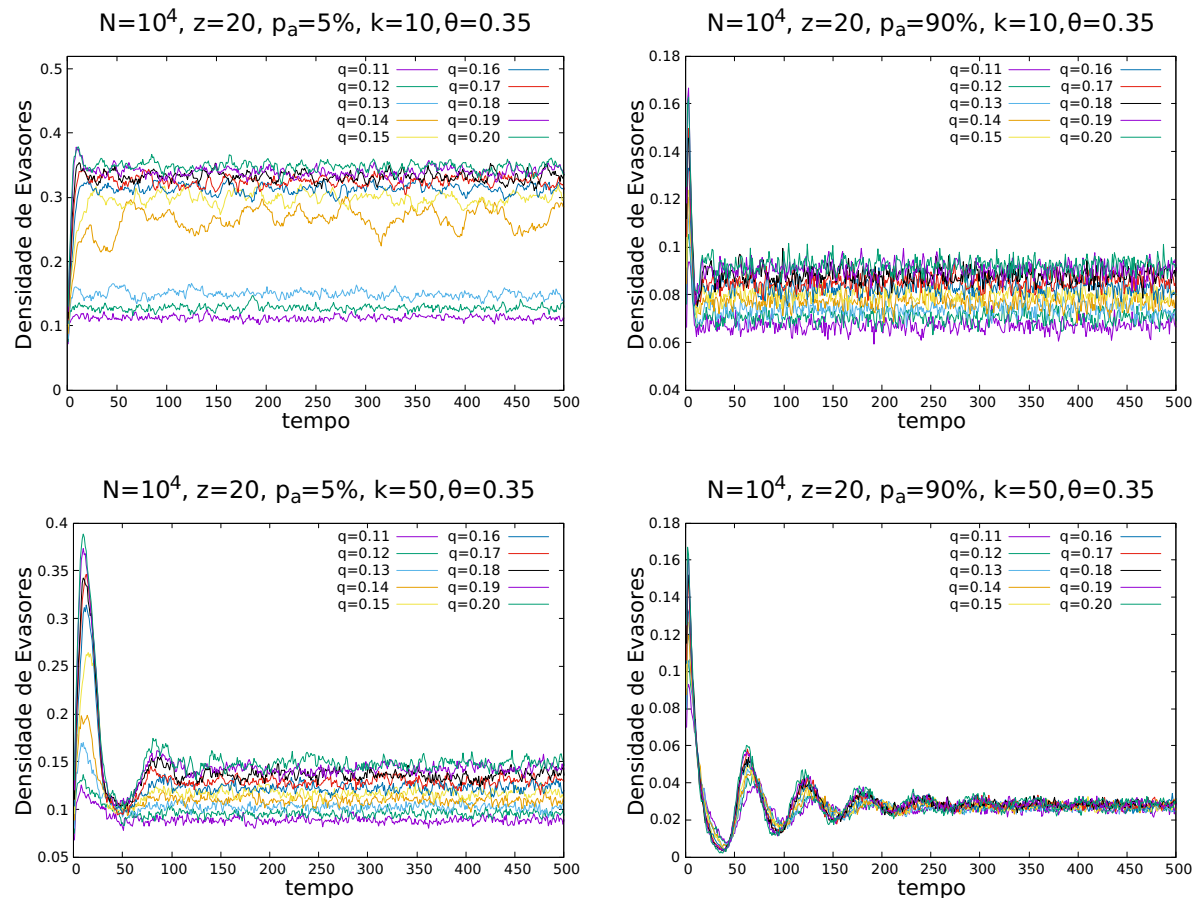


Figura 33: Resultados da evolução temporal da densidade de evasores com  $N = 10000$ ,  $z = 20$ ,  $\theta = 0.35$  para  $p_a = 0.05$  e  $p_a = 0.90$  e que em cada valor de probabilidade de auditoria utilizamos  $k = 10$  ou  $k = 50$ .

Como já foi brevemente comentado, quando temos uma combinação de forte auditoria ( $p_a = 90\%$ ) e vigilância contínua ( $k = 50$ ), a densidade de sonegadores oscila fortemente nos instantes iniciais de simulação. Este fenômeno não é observado de maneira tão notável com baixa auditoria e pouca vigilância. As fortes oscilações revelam a influência da fiscalização sobre os evasores. Na verdade, estas oscilações revelam como os efeitos da fiscalização inibem o comportamento evasor no início da dinâmica até que sua densidade não se altere. Este comportamento é análogo a um oscilador amortecido. Estas fortes oscilações resultantes da extensiva atuação dos mecanismos de fiscalização também foram obtidas nas simulações que resultaram nas figuras (30) e (31). Obviamente, se não existissem as influências da fiscalização, as densidades de sonegadores não oscilariam e estacionariam em maiores valores (em relação aos mesmos  $q$ 's). No início das simulações, não atribuímos o comportamento sonegador a nenhum dos indivíduos da rede, desta forma, conforme utilizamos valores não nulos de ruído, obtemos um aparecimento de in-

divíduos sonegadores. Como a quantidade de evasores é pequena no começo, é mais difícil para a auditoria identificar os evasores. Entretanto, quando a densidade de evasores se torna suficientemente elevada, mais sonegadores são identificados e monitorados. Por este motivo, temos um padrão oscilatório com período próximo ao do valor de  $k$ .

Outro efeito interessante também relacionado com a combinação de auditoria forte e grande tempo de vigilância se dá na diferença entre as densidades estacionárias de sonegadores, para diferentes valores de ruído  $q$  próximos da transição encontrada em [108]. Isto mostra que nessas condições, de forte fiscalização, e a partir de valores muito elevados de não-conformismo, este ruído não mais influencia de maneira tão marcante a dinâmica da população. Quando os parâmetros relacionados à fiscalização são baixos, a densidade de sonegadores aumenta conforme o ruído cresce. Esta dependência do ruído era esperada, pois como já comentado, em nossas simulações toda a rede é composta inicialmente de indivíduos honestos e o aumento de  $q$  (comportamento contrário ao da maioria da vizinhança) resulta no aparecimento cada vez maior de sonegadores.

Para sermos mais específicos, se compararmos a convergência das curvas com as combinações:  $k$  baixo com  $p_a$  alto e  $k$  alto com  $p_a$  baixo, podemos notar facilmente que esta convergência é mais sensível à probabilidade de auditoria, ou seja, os efeitos do não-conformismo da população tendem a desaparecer mais facilmente aumentando a eficiência dos órgãos fiscalizadores em analisar possíveis evasores e não ao tempo de vigilância sobre indivíduos pegos por esta auditoria. Os gráficos das figuras (36)-(39) corroboram esta análise. Este resultado proveniente do nosso modelo não é tão animador em relação aos custos das operações dos órgãos de fiscalização, pois melhorar a eficiência de auditoria é mais caro do que aumentar o tempo de vigilância sobre sonegadores descobertos. Quando um indivíduo sonegador é identificado, o mesmo entra em um sistema de controle e vigilância para coibir reincidências. Aumentar o tempo de monitoramento para estes agentes nada mais é do que olhar novamente para eles através do sistema do qual já estão inseridos. Já a auditoria, que identifica os sonegadores, requer análises minuciosas de dados fiscais. Aumentar a eficiência da auditoria implica em investimento em técnicas e procedimentos para estas análises, além de material e pessoal, algo que é notavelmente custoso. Em todos estes gráficos, as curvas das densidades para  $k = 50$  são sempre mais elevadas do que aquelas associadas obtidas com  $k = 10$  para qualquer valor de  $p_a$  não nulo.

Quanto ao efeito da inércia dos indivíduos, para os maiores valores de  $k$  e  $p_a$ , a influência do parâmetro pode ser desprezada, visto que os gráficos mostram que independente de  $\theta$ , temos que a densidade de evasores tende a convergir para 3%, também independente

do valor de ruído  $q$  utilizado, como já abordamos anteriormente. A fiscalização, então, de acordo com o que o modelo nos sugere, se sobressai à tendência dos indivíduos de permanecerem em seus estados, independente deles.

Ainda no que se refere a utilização das regras de fiscalização do modelo de Zaklan presentes em [8], por mais simples que a consideração sobre como deve ser tratada a fiscalização, com os mecanismos de acompanhamento de sonegadores identificados e a eficiência na auditoria, conseguimos resultados interessantes, pois podemos comparar a influência de cada um dos parâmetros em nossas simulações. Verificamos que o aumento da eficiência da auditoria é mais impactante para a redução da densidade de sonegadores do que se aumentarmos o tempo de vigilância.

No capítulo anterior (baseado em [98]), uma dinâmica de evasão fiscal também foi proposta e como esperado, a atuação da fiscalização também foi considerada no modelo estudado. Entretanto, toda o papel da fiscalização foi analisado através de um único parâmetro  $\epsilon$  (que faz o mesmo papel de  $p_a$ ). No trabalho citado, os sonegadores devidamente identificados pela fiscalização são obrigados apenas no momento da auditoria a se tornarem honestos e nenhum tipo de vigilância posterior é aplicada.

### 5.5.2 Densidades estacionárias de evasores

Depois de uma rápida análise da evolução temporal através dos gráficos das figuras (30)-(33), investigaremos as curvas das densidades estacionárias do modelo obtidas através de simulações computacionais. Nos gráficos da figura (34), são apresentados os resultados das densidades estacionárias de evasores para sistemas com inércia e parâmetros associados à fiscalização distintos. Utilizamos, em todas as simulações, redes aleatórias com  $N = 10^4$  sítios e conectividade média  $z = 20$ . Os gráficos desta figura são referentes à sistemas com:  $k = 10$  e  $p_a = 5\%$ ,  $k = 10$  e  $p_a = 90\%$ ,  $k = 50$  e  $p_a = 5\%$  e  $k = 50$  e  $p_a = 90\%$ . Escolhemos estes valores, como já comentado, visando analisar extremos da atuação da fiscalização sobre a dinâmica do sistema.



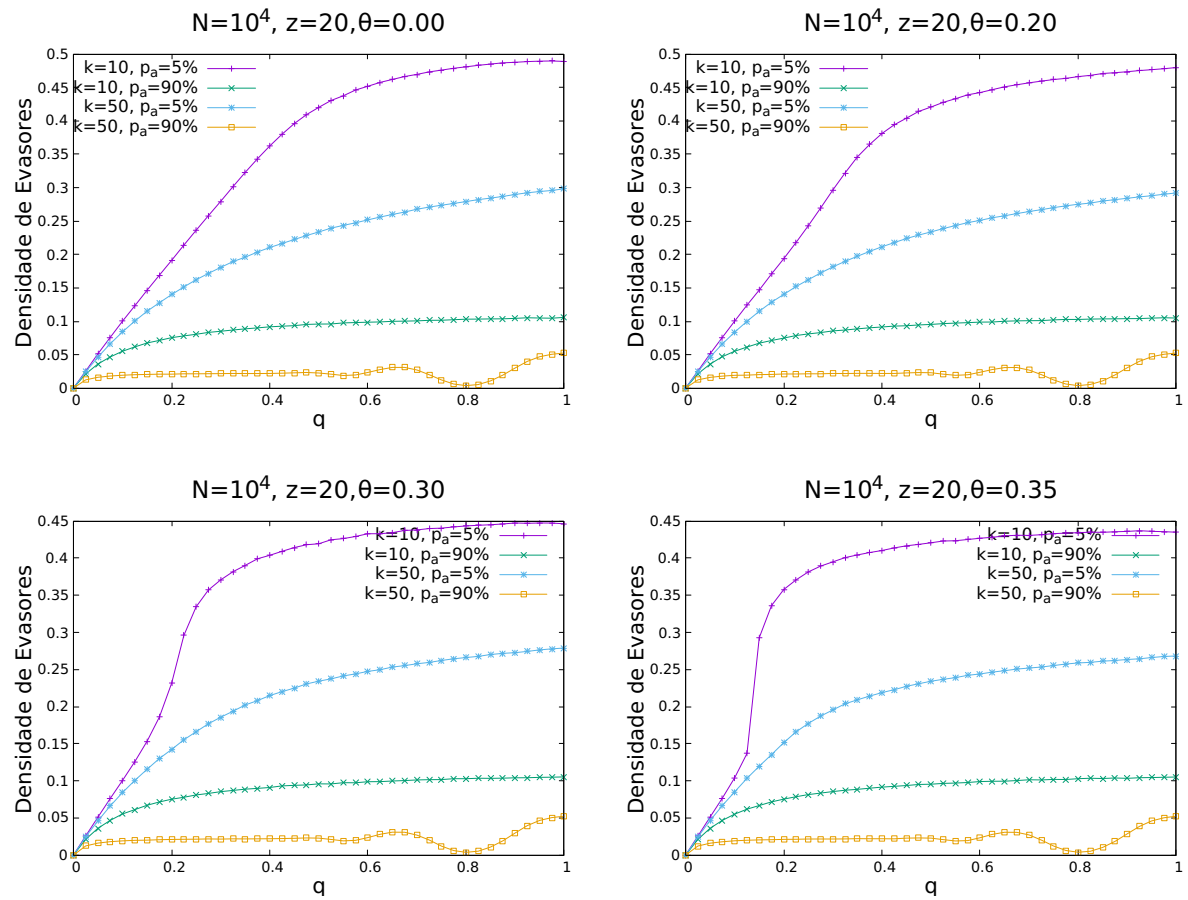


Figura 34: Densidades estacionárias para combinações de  $p_a$  e  $k$  onde  $p_a = \{0.05, 0.90\}$ ,  $k = \{10, 50\}$ . Cada gráfico mostra os resultados para um valor diferente de inércia ( $\theta = 0.00, 0.20, 0.30, 0.35$ ). Nestas simulações utilizamos uma rede aleatória  $N = 10^4$  e conectividade média  $z = 20$ .

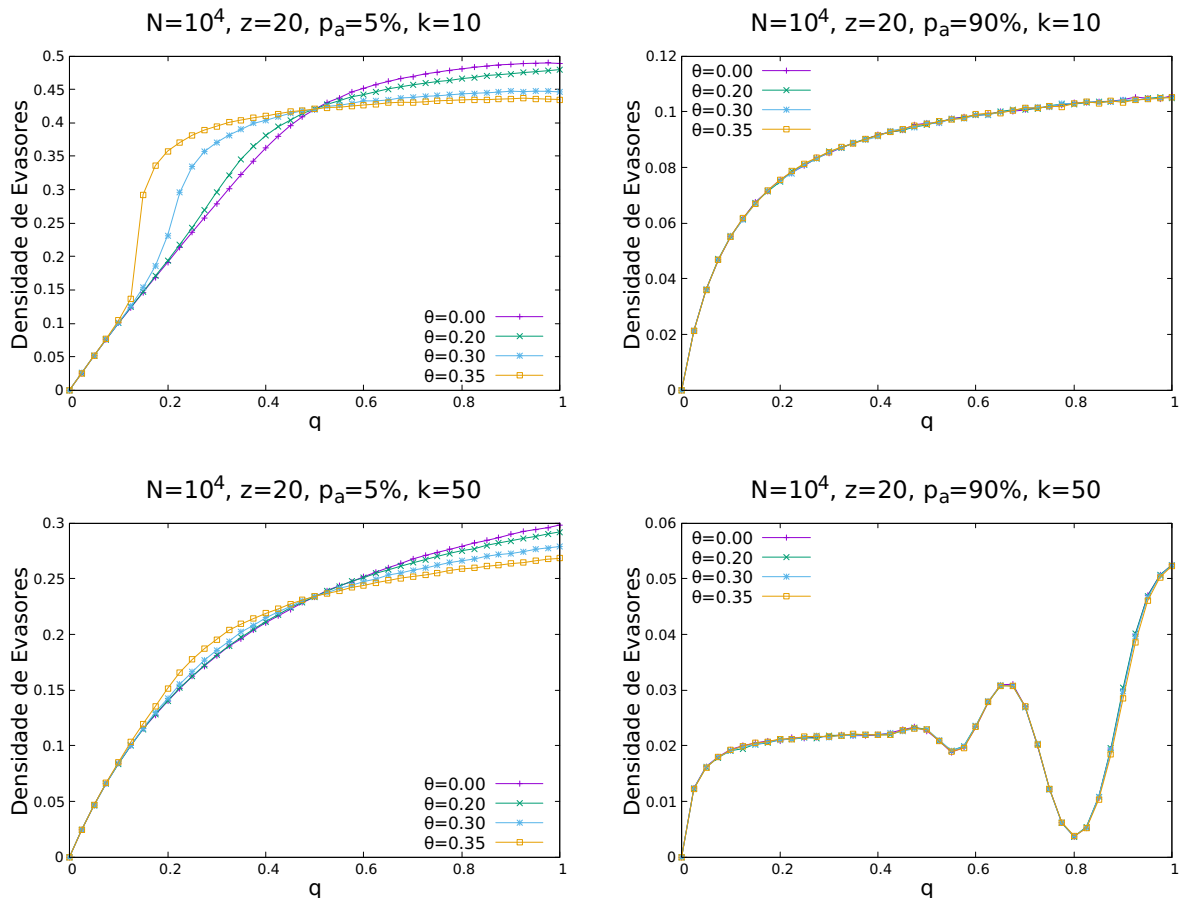


Figura 35: Densidades estacionárias para combinações de  $p_a$  e  $k$  onde  $p_a = \{0.05, 0.90\}$ ,  $k = \{10, 50\}$ . Cada gráfico mostra os resultados para diferentes valores de inércia ( $\theta = 0.00, 0.20, 0.30, 0.35$ ). Nestas simulações utilizamos uma rede aleatória  $N = 10^4$  e conectividade média  $z = 20$ .

Podemos notar de imediato ainda na figura (34) que, ao contrário do modelo do Votante Majoritário e de outros modelos nele baseados [108], [111], não obtivemos uma transição de fase do tipo "ordem-desordem". Mesmo para valores muito elevados de não-conformismo da população, não existe completa igualdade entre os indivíduos de comportamentos diferentes. Nos gráficos da figura (35), quando a eficiência da auditoria se torna muito elevada, não existe mais distinção entre as curvas das densidades de sonegadores para os diferentes valores de inércia. Além disso, estes resultados para as densidades (gráficos superior e inferior do lado direito) são muito baixos, mesmo para ruídos extremos (simulamos desde  $q = 0.0$  até  $q = 1.0$ ). Este comportamento não ocorre para o maior valor de  $k$  utilizado ( $k = 50$ ), mostrando assim que o modelo sugere que frente a somente uma auditoria muito eficiente, a inércia de cada indivíduo, ou seja, a tendência individual de permanecer seguindo o mesmo comportamento deixa de ser relevante no comportamento

coletivo resultante da população.

Ainda sobre os resultados mostrados na figura (34), independente da inércia e para qualquer valor não nulo de  $q$ , as densidades seguem a seguinte ordem crescente:  $k = 50$  e  $p_a = 90\%$ ,  $k = 10$  e  $p_a = 90\%$ ,  $k = 50$  e  $p_a = 5\%$  e por último,  $k = 10$  e  $p_a = 5\%$ . Como já discutido na seção anterior, através dos gráficos presentes nas figuras (30)-(33), o mecanismo associado à eficiência da auditoria consegue impactar mais o comportamento sonegador do que o tempo de vigilância, visto que em todos os gráficos da figura (34), os menores valores para as densidades de sonegadores são os obtidos pelas curvas onde  $p_a = 90\%$ . A inércia, então, só aparenta exercer algum impacto significativo sobre a dinâmica da população quando temos  $k = 10$  e  $p_a = 5\%$ , ou seja, quando a fiscalização como um todo é fraca.

Nos gráficos onde a auditoria é ineficiente ( $p_a = 5\%$ ), as curvas para as densidades estacionárias são distintas para os diferentes valores de inércia adotados, entretanto, as curvas se cruzam em  $q = 0.5$ . Na literatura já conhecida sobre o modelo do Votante Majoritário, tanto em redes regulares quanto em redes aleatórias [15], [21], [22], [23], [108] e [111], as simulações eram realizadas com um intervalo de ruído  $q \in [0 : 0.5]$ . O motivo desta escolha estava na existência da transição de fase ordem-desordem, assim, o valor da magnetização diminuía para 0 no limite termodinâmico para valores  $q_c < 0.5$  em geral. Em nosso modelo, tal comportamento não está presente. Desta forma, realizamos simulações mais abrangentes, onde  $0 \leq q \leq 1$ .

Tanto na figura (34) quanto na figura (35), quando utilizamos  $\theta = 0.35$ ,  $p_a = 5\%$  e  $k = 10$  (gráficos inferior direito e superior esquerdo, respectivamente), as curvas das densidades de sonegadores associadas a estes parâmetros crescem abruptamente, indo de 0.14 para 0.29, aproximadamente, em um intervalo de  $q$  de apenas 0.025. Este comportamento é um resquício da transição de fase descontínua encontrada e discutida em [108]. Como temos a presença de uma fiscalização, não obteremos um cenário onde a sociedade está dividida igualmente entre honestos e evasores, como já analisamos.

O aumento do comportamento evasor somente foi observado com o valor mais elevado de inércia utilizada nas simulações ( $\theta = 0.35$ ) e fiscalização baixa ( $k = 10$  e  $p_a = 5\%$ ). A fiscalização precisa ser baixa, pois não seria possível obter um aumento significativo de evasores caso contrário. Diferente do que foi observado em [108], não observamos, mesmo para uma fraca atuação da fiscalização, um aumento abrupto dos evasores para  $\theta = 0.30$  de tal forma que sua densidade passe a valer 0.5, como esperado na transição de fase com dois estados. Esta ausência é novamente justificada pela fiscalização que, por mais

insignificante que seja, coíbe o comportamento evasor.

Por último, nas figuras (36)-(39), plotamos a densidade estacionária de evasores em função da probabilidade de auditoria  $p_a$ , novamente para redes aleatórias com  $N = 10000$  sítios e  $z = 20$ , mas para três valores de ruído:  $q = 0.1, 0.3$  e  $0.8$ . Em cada gráfico, utilizamos sempre o valor mínimo e máximo de tempo de vigilância  $k$  utilizado ao longo do trabalho ( $k = 10$  e  $k = 50$ ). Para os três valores não-nulos de inércia utilizados ( $\theta = 0.20, \theta = 0.30$  e  $\theta = 0.35$ ), o modelo sugere que não existe diferença considerável para a densidade de evasores quando  $p_a = 0$  e para  $q \geq 0$ , ou seja, quando não estão presentes os mecanismos de fiscalização. Como também já visto, independente do valor de ruído utilizado, a densidade de sonegadores nunca se torna nula, mesmo para uma auditoria muito eficiente ( $p_a = 1.0$ ). Os valores das densidades estacionárias para este valor de eficiência de auditoria parecem também não depender do valor de inércia utilizado e sim do tempo de vigilância. Quando a auditoria se torna muito eficiente, decisões baseadas na insistência em permanecer com um comportamento habitual deixam de ser expressivas.

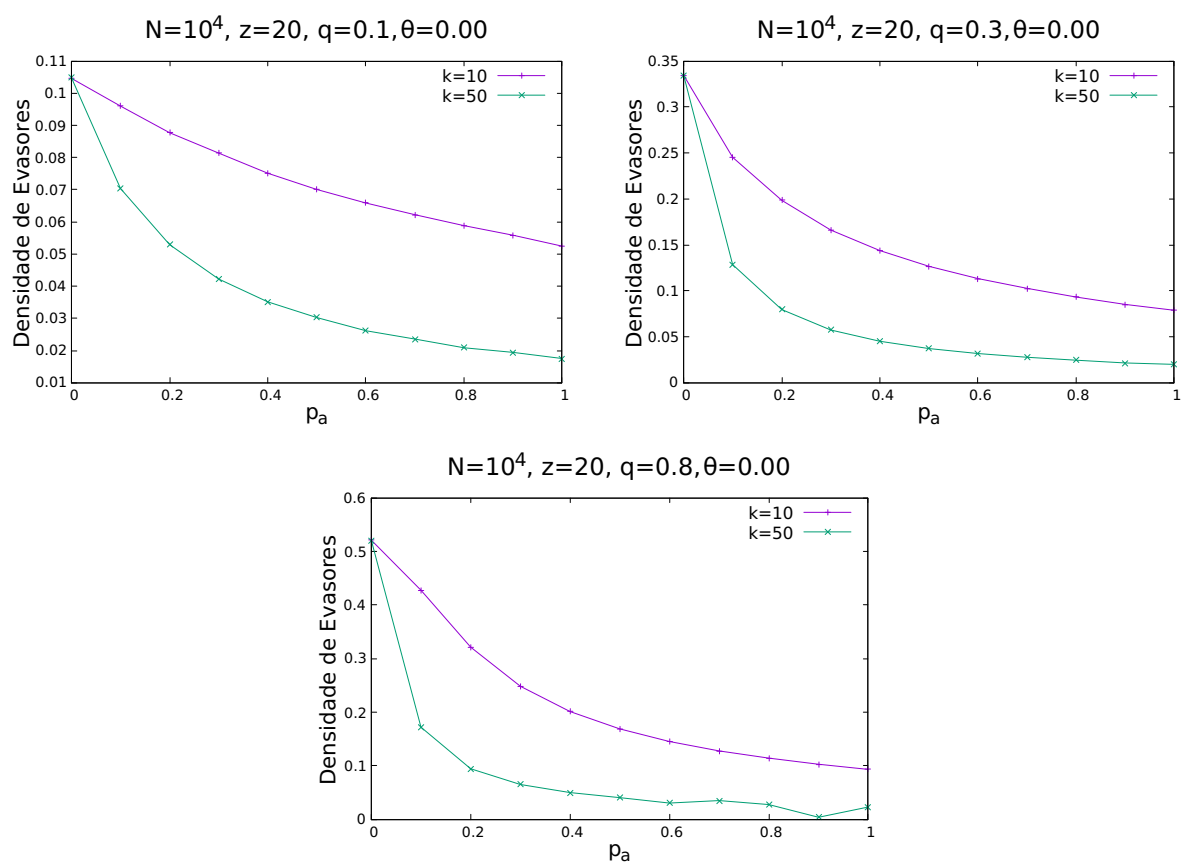


Figura 36: Resultados da densidade de evasores em função da probabilidade de auditoria para dois valores distintos de tempo de vigilância:  $k = 10$  e  $k = 50$ . Foram utilizados os valores de ruído iguais a 0.1, 0.3 e 0.8.  $N = 10000$  e  $\theta = 0.00$ .

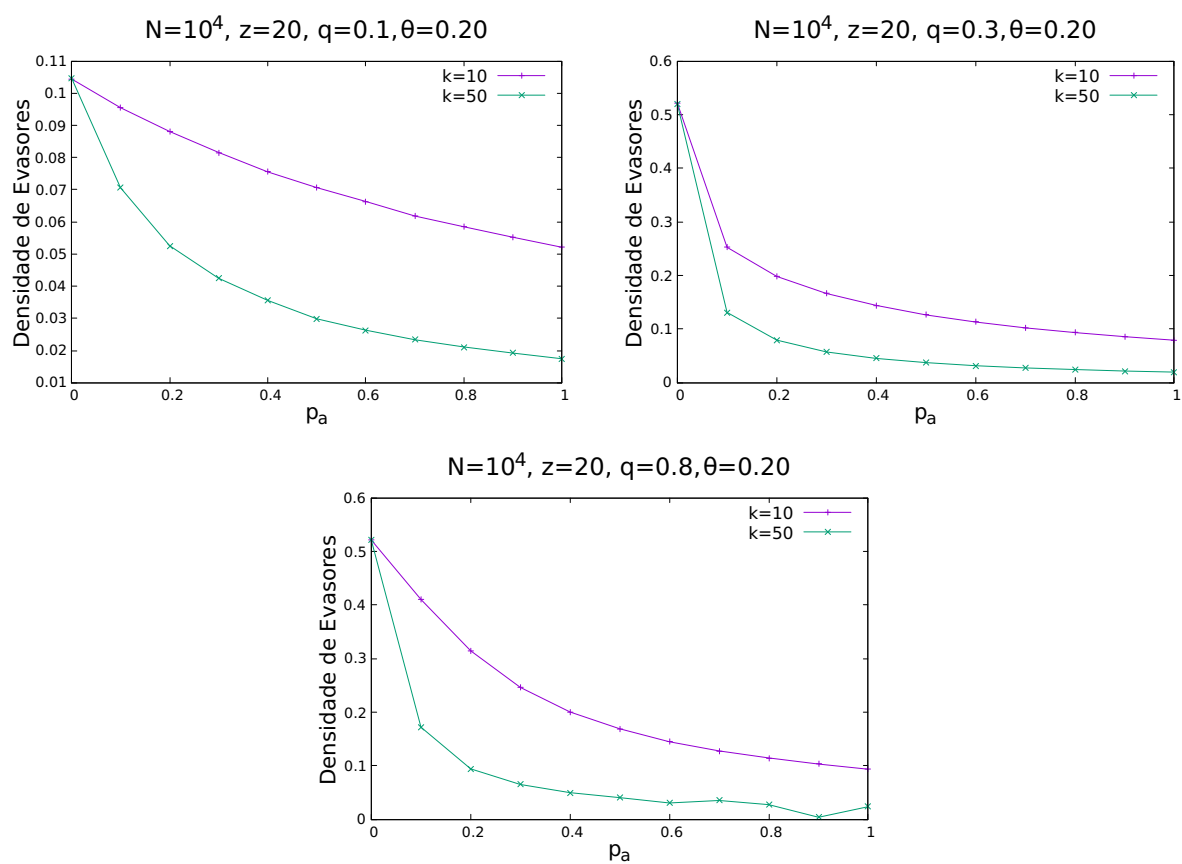


Figura 37: Resultados da densidade de evasores em função da probabilidade de auditoria para dois valores distintos de tempo de vigilância:  $k = 10$  e  $k = 50$ . Foram utilizados os valores de ruído iguais a 0.1, 0.3 e 0.8.  $N = 10000$  e  $\theta = 0.20$ .

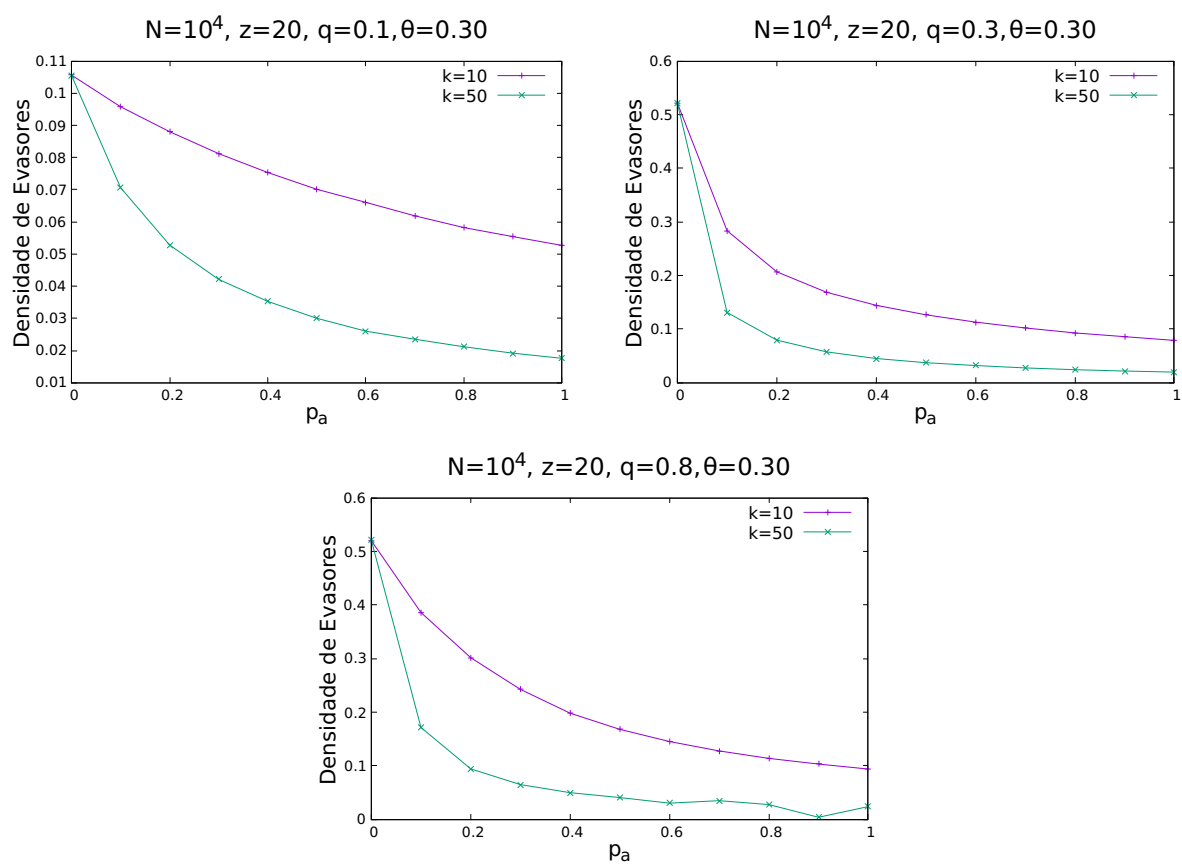


Figura 38: Resultados da densidade de evasores em função da probabilidade de auditoria para dois valores distintos de tempo de vigilância:  $k = 10$  e  $k = 50$ . Foram utilizados os valores de ruído iguais a 0.1, 0.3 e 0.8.  $N = 10000$  e  $\theta = 0.30$ .

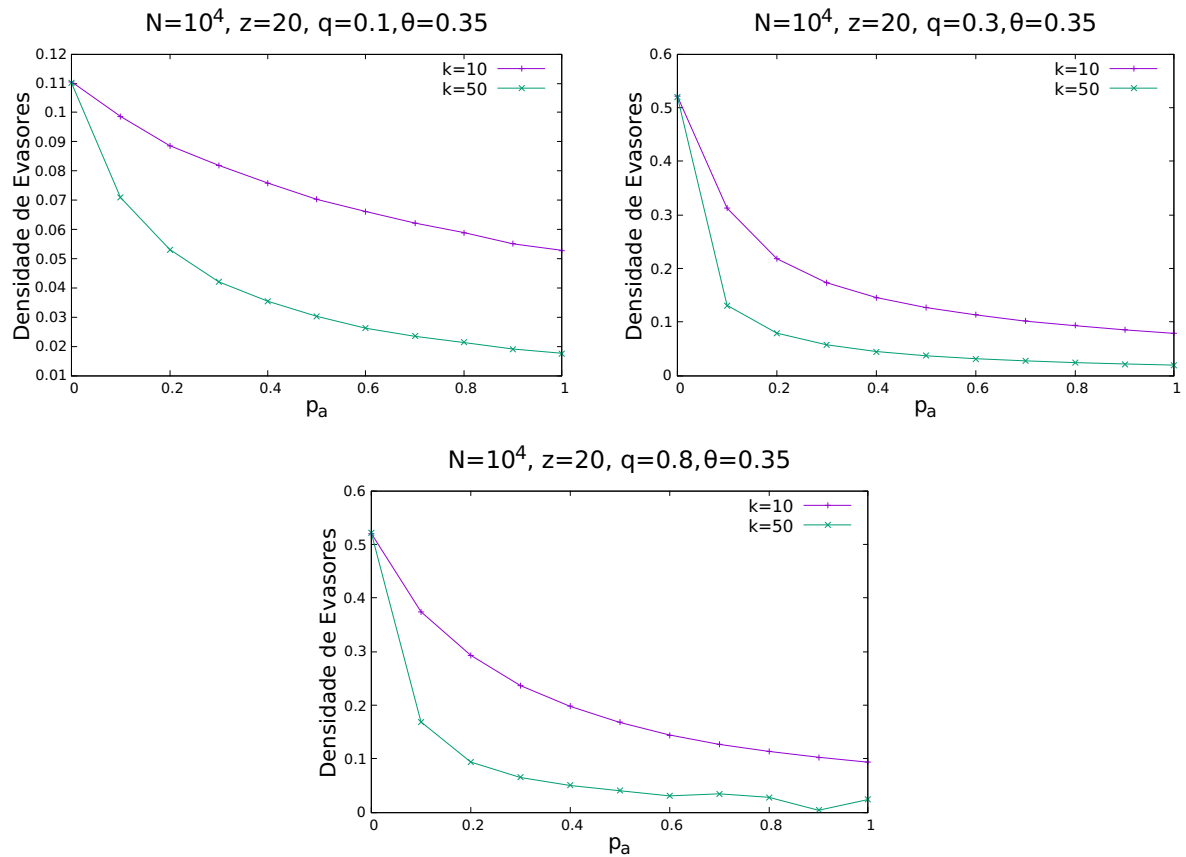


Figura 39: Resultados da densidade de evasores em função da probabilidade de auditoria para dois valores distintos de tempo de vigilância:  $k = 10$  e  $k = 50$ . Foram utilizados os valores de ruído iguais a 0.1, 0.3 e 0.8.  $N = 10000$  e  $\theta = 0.35$ .

Todos estes resultados foram corroborados através das análises das densidades estacionárias.

Analisamos como se comportam as densidades variando o ruído  $q$  de 0 até 1. Neste momento, fica claro que o modelo não apresenta transição de fase ordem-desordem. Incluímos também o estudo da implicância da variação da probabilidade de auditoria  $p_a$  na densidade de evasores.

## 5.6 Comentários Finais

Propomos um modelo para analisar o impacto da fiscalização sobre uma sociedade simulada computacionalmente. Esta proposta se baseou no modelo do votante majoritário com ruído e inércia em redes aleatórias. Para representar a fiscalização sobre esta sociedade, utilizamos o modelo de Zaklan como originalmente proposto em redes qua-



dradas onde, os órgãos fiscalizadores atuam através de dois mecanismos complementares: auditoria fiscal sobre os contribuintes e vigilância (monitoramento) sobre sonegadores identificados. Esta sociedade foi estudada como um conjunto de sítios de uma rede aleatória (com  $N = 10000$  sítios e conectividade média  $z = 20$ ). Inicialmente, analisamos cenários de evolução temporal com diferentes combinações dos parâmetros de fiscalização e inércia. Avaliamos como a densidade de evasores se comporta em cada uma das combinações para 10 valores de ruído. Estes valores considerados foram escolhidos de forma a ficarem próximos dos encontrados em transições de fase obtidas em [108]. Em cada uma destas avaliações, fixamos os parâmetros de fiscalização e fomos aumentando o valor da inércia. Utilizamos  $\theta = 0.00, 0.20, 0.30$  e  $0.35$ .

Desde a simulação realizada com a combinação menos eficiente de fiscalização ( $k = 10$  e  $p_a = 5\%$ ), é possível verificar imediatamente a diminuição do comportamento evasor como, por exemplo, de aproximadamente 50% para 32% nas regiões próximas da transição em relação a não atuação da fiscalização e a utilizada para  $\theta = 0.00$  (ausência de inércia). Para os outros valores de  $\theta$ , também observamos esta diminuição, e de forma mais acentuada.

Em todas estas simulações, não se observou uma divisão igualitária entre sonegadores e evasores na população. Desta forma, realizamos medições da densidade estacionária de evasores em função do parâmetro  $q$  de 0 até 1 com intervalos de 0.025. Em nenhum momento foi possível obter a transição de fase ordem-desordem observada quando não estão presentes os mecanismos de fiscalização (figura 29). Assim, a fiscalização, mesmo que muito fraca, limita a atuação de sonegadores na rede. Ficou claro, também, que este controle feito pela fiscalização não é igualmente exercido pelos seus mecanismos internos. Uma das propostas do trabalho era avaliar como cada ação da fiscalização impactava a população. O que o modelo sugere é que o controle sobre o comportamento evasor é mais eficiente se aumentarmos a auditoria fiscal em vez de aumentarmos o tempo de vigilância sobre sonegadores identificados pela "malha fina".

## 6 *Modelo de Evasão em Redes Regulares*

O presente capítulo abordará o modelo descrito no capítulo 4 baseado em [98] nas redes quadrada e cúbica a fim de tentarmos compreender melhor as transições de fase presentes no modelo, já observadas quando o estudamos utilizando a aproximação de campo médio. Apresentaremos, também, os resultados de simulações utilizando a rede completamente conectada.

### 6.1 Introdução

Até o momento, para estudos mais quantitativos, utilizamos majoritariamente a rede completamente conectada (*fully connected network*) em nossas abordagens. Neste capítulo, estudaremos o modelo de 3 estados apresentado no capítulo 4 em algumas redes regulares: a rede quadrada e cúbica com condições periódicas de contorno. A utilização destas condições de contorno é justificada pelo fato de que as mesmas implicam em um mesmo número de conexões (4 e 6 respectivamente para as redes quadradas e cúbicas) para cada sítio da rede.

### 6.2 Metodologia

Como não dispomos de um conjunto de equações mestras e, por sua vez, soluções analíticas para as densidades estacionárias, que nem as que foram obtidas no estudo do modelo na rede completamente conectada, utilizaremos simulações computacionais para descrever a dinâmica obtida do modelo nas redes regulares. O processo de simulação utilizado é análogo ao descrito no final da subseção 4.2.1, com a diferença de que, em vez de descrevermos a rede pela sua matriz de adjacência, utilizamos matrizes 2D e 3D (respectivamente para a rede quadrada e rede cúbica). Tendo estas simulações, investigamos

o comportamento da densidade de evasores em função do tempo para alguns valores de  $\lambda$  sutilmente diferentes. Estes valores de  $\lambda$  são aqueles que acreditamos estarem associados a uma possível transição de fase, pois como já comentado, não possuímos as soluções analíticas para as densidades estacionárias. Nos gráficos da figura (40) são mostrados dois exemplos do que acabamos de descrever. Temos os comportamentos das densidades  $x_3$  em função do tempo para alguns valores de  $\lambda$ . Podemos reparar que os valores de  $\lambda$  diferem na terceira casa decimal. É possível notar a dificuldade para a observação do decaimento de  $x_3$  nas curvas obtidas através de  $\lambda = 0.485$  e  $\lambda = 0.559$  para as redes quadrada e cúbica, respectivamente. Isto é devido ao elevado tempo (passos de Monte Carlo) necessário para a convergência. De fato, a figura 40 apresenta curvas truncadas. Felizmente, utilizamos estes gráficos apenas como base para inferir a faixa de valores em que possa ser encontrado o valor crítico  $\lambda_c$ .

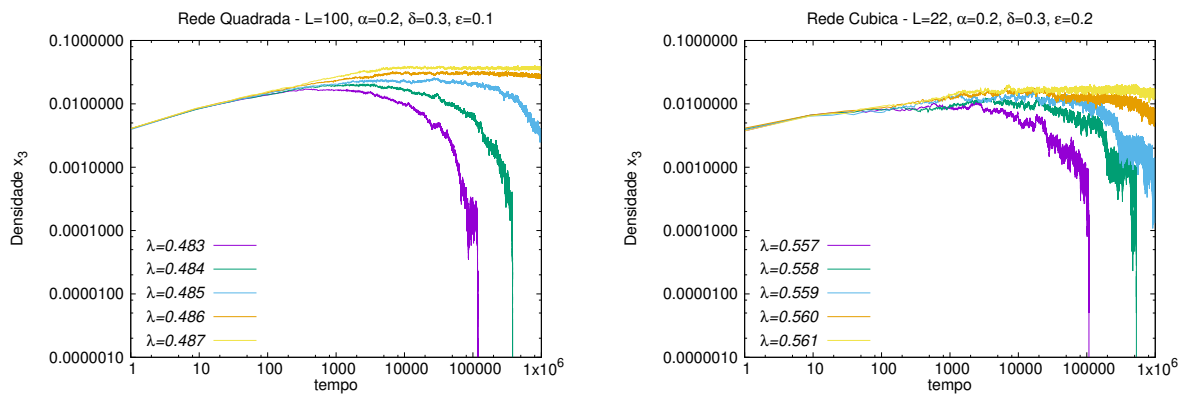


Figura 40: Densidades de indivíduos sonegadores ( $x_3$ ) em função do tempo na rede quadrada (esquerda) com  $L = 100$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $\delta = 0.3$  e  $\epsilon = 0.1$  e na rede cúbica (direita) com  $L = 22$ ,  $\alpha = 0.2$ ,  $\delta = 0.3$  e  $\epsilon = 0.2$ . Em ambos os gráficos, as curvas foram obtidas utilizando alguns valores sutilmente distintos de  $\lambda$ . Valores estes em que é possível começar a notar a mudança do decaimento exponencial para a forma na lei de potência.

A ideia principal a ser considerada é que para valores de  $\lambda$  menores ao que acreditamos ser o valor crítico da transição de fase, a densidade de sonegadores se torna nula muito rapidamente (os valores não são inicialmente nulos devido a flutuações nas simulações). Agora, para valores de  $\lambda$  maiores do que o crítico buscado, a densidade de sonegadores estabiliza em valores não nulos, indicando a própria transição de fase já discutida no capítulo 4. As buscas, então, se concentram nas curvas obtidas através de simulação utilizando valores de  $\lambda$  próximos ao que acreditamos ser o crítico. Para estas curvas, a densidade de sonegadores decai se comportando aproximadamente como uma lei de potência, já que

possuímos somente estimativas deste comportamento. Quando conseguimos observar este decaimento, temos uma indicação de que estamos observando uma transição de fase.

Como detalhe muito importante que devemos destacar, mesmo se obtivermos um gráfico com uma curva de decaimento da forma de uma lei de potência, devemos ser cuidadosos e não podemos afirmar que o valor de  $\lambda$  associado a tal comportamento seja o crítico. O erro surge quando simulamos o modelo no computador, o simulamos em uma rede finita (seja quadrada, cúbica ou etc) e assim, se por exemplo achamos que obtivemos o valor crítico  $\lambda_c$ , o que de fato encontramos foi o chamado valor pseudo-crítico  $\lambda_c(L)$  para o tamanho da rede considerada. Para inferirmos o valor de  $\lambda_c$ , precisamos simular o modelo para a rede em questão para tamanhos diferentes, e desta forma, encontrarmos o que deve ser  $\lambda_c$  considerando o limite termodinâmico. Lembrando que esta foi a estratégia utilizada na averiguação do limiar epidêmico do modelo nas redes BA e ER visto no capítulo 4.

Nos gráficos da figura (41), observamos a densidade estacionária de sonegadores em função do parâmetro de  $\lambda$  nas redes completamente conectada, quadrada e cúbica para determinados conjuntos de parâmetros socioeconômicos  $\alpha$ ,  $\delta$  e  $\epsilon$  e diferentes tamanhos  $L$  das redes. Ainda na figura (41), o valor de  $\lambda$  ao qual  $x_3^*$  deixa de ser nulo para cada curva é o valor pseudo-crítico  $\lambda_c(L)$  associado àquela rede, para aquele tamanho  $L$  utilizado e para o conjunto de valores  $\alpha$ ,  $\delta$  e  $\epsilon$  escolhidos.

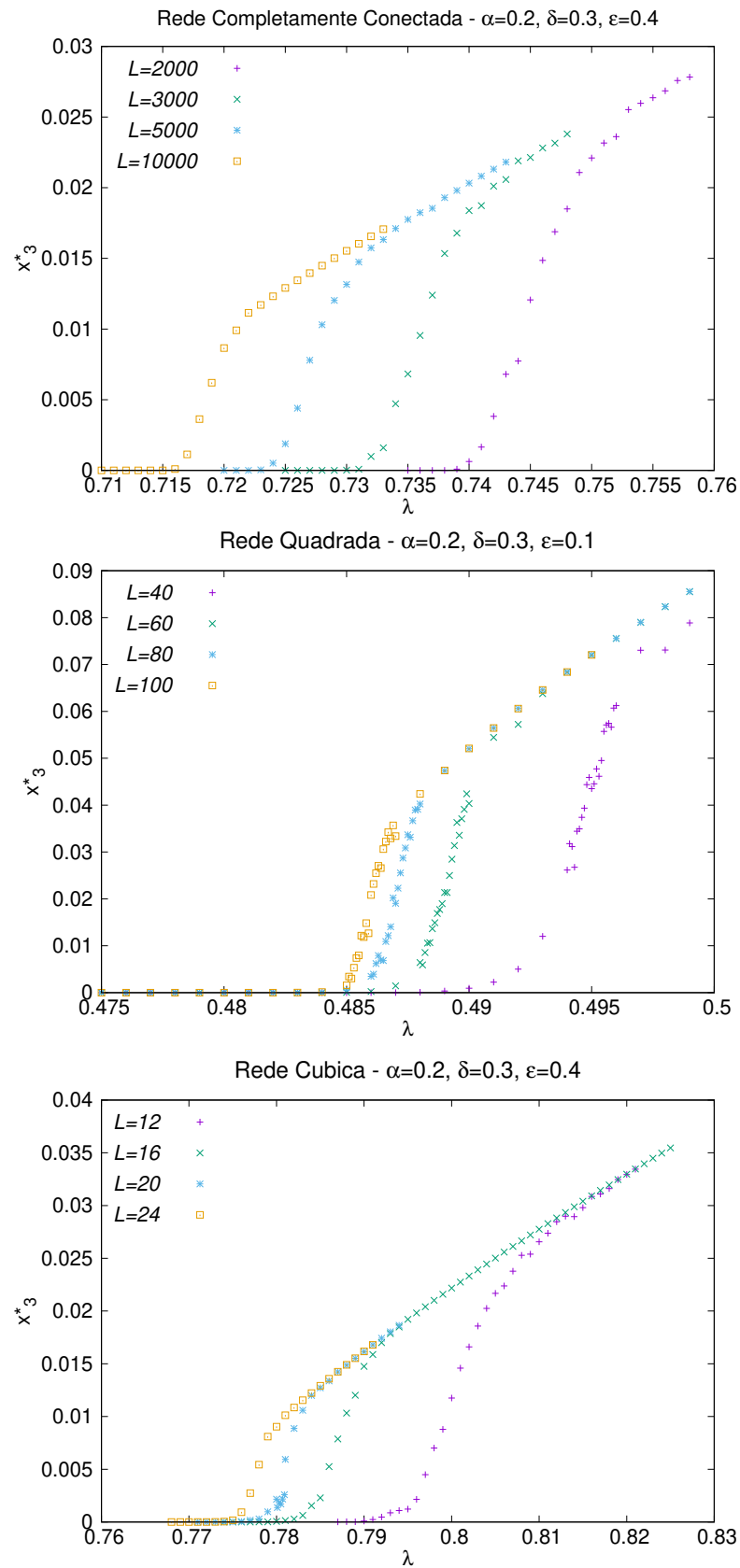


Figura 41: Densidades estacionárias de indivíduos sonegadores em função de  $\lambda$  para a rede completamente conectada, rede quadrada e rede cúbica. Em todos os gráficos, foram simulados tamanhos diferentes dependendo do tipo de rede.

Nota-se que quanto maior é o valor de  $L$  mais nos aproximamos de obter o valor de  $\lambda_c$ . Entretanto, diferente de outros modelos onde o parâmetro crítico é único e por este motivo pode ser um dos valores para identificar o modelo em questão, em nosso caso, o valor de  $\lambda_c$  depende do conjunto de parâmetros socioeconômicos e por este motivo precisamos de outros valores para a identificação do modelo.

Ainda de acordo com os dados obtidos e mostrados na figura (41), podemos obter alguns expoentes críticos do modelo para estas redes utilizadas (rede completamente conectada, rede quadrada e rede cúbica). Para tal, iremos construir, para cada tipo de rede, os gráficos de  $x_3^* L^{\frac{\beta}{\nu}}$  em função de  $(\lambda - \lambda_c) L^{\frac{1}{\nu}}$  que, são adaptações das equações (3.20) e (3.21) para o nosso problema e para nossas grandezas de interesse.

Para cada tipo de rede de onde obtivemos os gráficos da figura (41), usaremos os tamanhos de rede diferentes  $L$ , os mesmos tamanhos utilizados nas simulações para as respectivas redes. Como observação, para a rede completamente conectada, o tamanho da rede  $L$  é o próprio número de sítios da rede.

Através da escolha correta dos valores de  $\lambda_c$ ,  $\nu$  e  $\beta$ , iremos notar que as curvas irão se tornar indistinguíveis, ou seja, não existirá a dependência do tamanho e, desta forma, os parâmetros utilizados  $\lambda_c$ ,  $\nu$  e  $\beta$  serão, respectivamente, o parâmetro crítico (para os parâmetros  $\alpha$ ,  $\delta$  e  $\epsilon$ ) e os expoentes críticos, respectivamente. As escolhas iniciais de  $\lambda_c$  são mais fáceis, pois o comportamento das curvas da figura 41 nos fornece uma boa estimativa. Através da calibração adequada de  $\lambda_c$ ,  $\nu$  e  $\beta$ , obtemos os gráficos da figura 42.

Como já mencionado, os gráficos da figura 42 mostram os colapsos das curvas  $x_3 L^{\frac{\beta}{\nu}}$  em função de  $(\lambda - \lambda_3) L^{\frac{1}{\nu}}$ . Quanto mais indistinguíveis forem as curvas, mais precisos serão  $\lambda_c$  e os expoentes  $\nu$  e  $\beta$  que obtivemos. Com estes resultados, construímos a tabela 7.

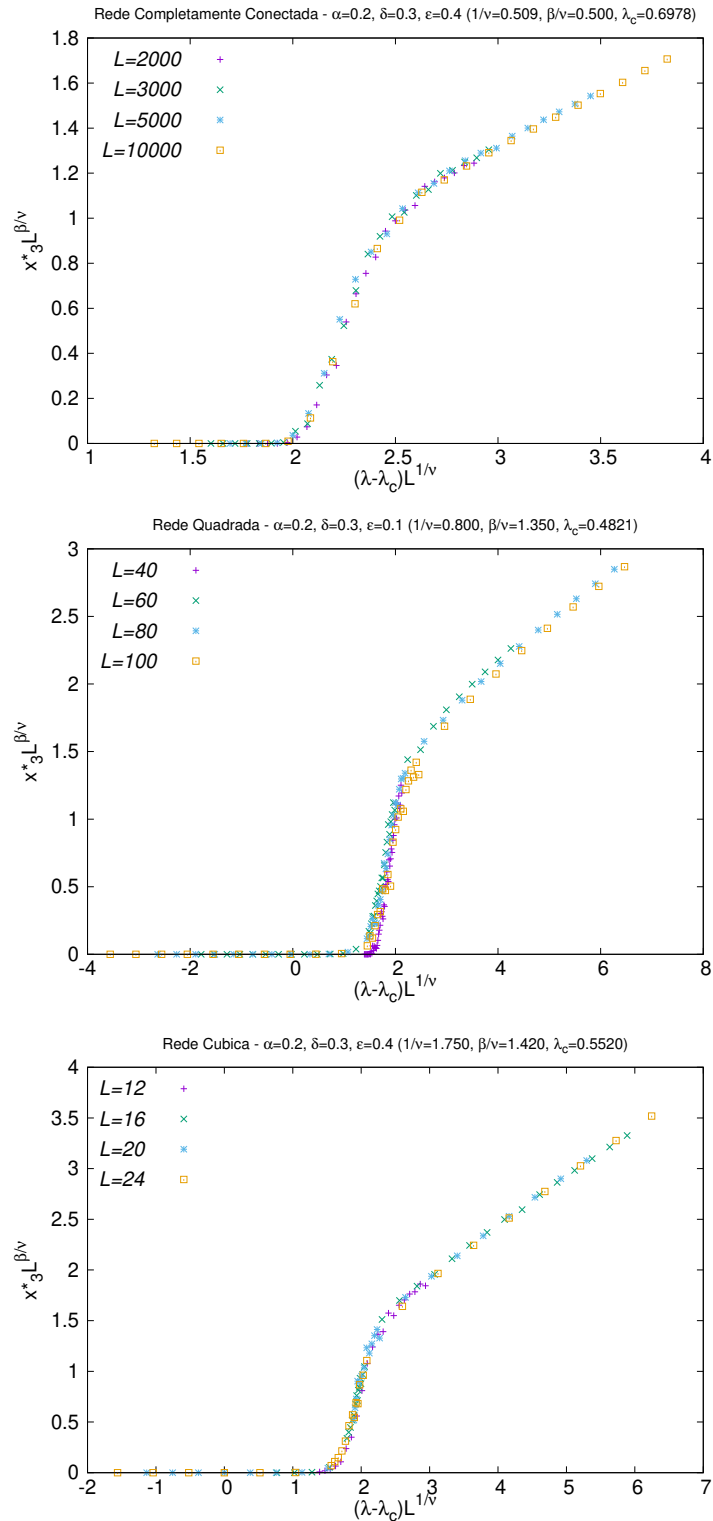


Figura 42: Colapsos das densidades estacionárias de indivíduos sonégadores para a rede completamente conectada, rede quadrada e rede cúbica das curvas obtidas pelos gráficos da figura (41). O colapso nos sugere que os expoentes obtidos através das curvas são os expoentes críticos do modelo. As grandezas mostradas nos eixos foram baseadas nas equações (3.20) e (3.21) que são as utilizadas para eliminar a dependência do tamanho das redes para a análise do parâmetro de ordem.

Com estes resultados em mãos, construímos a tabela 7.

| Rede                    | $\nu$  | $\beta$ |
|-------------------------|--------|---------|
| Completamente Conectada | 1.9646 | 0.9823  |
| Quadrada                | 0.7407 | 0.5926  |
| Cúbica                  | 0.5710 | 0.8110  |

Tabela 7: Tabela dos expoentes  $\nu$  e  $\beta$  obtidos para as redes completamente conectada, quadrada e cúbica para o modelo apresentado no capítulo 4.

| Rede                    | $\nu$ | $\beta$ |
|-------------------------|-------|---------|
| Completamente Conectada | 0.500 | 1.000   |
| Quadrada                | 0.733 | 0.583   |
| Cúbica                  | 0.581 | 0.805   |

Tabela 8: Tabela dos expoentes  $\nu$  e  $\beta$  obtidos para as redes completamente conectada, quadrada e cúbica no modelo de Processo de Contato. Obtida de [87].

É fácil notar a discrepância do valor encontrado para o expoente  $\nu$  na rede completamente conectada. Entretanto, vamos considerar o seguinte: tomaremos  $\nu = \nu' d$ , onde  $d$  é a dimensão crítica superior do modelo, ou seja, o valor da dimensão em que a partir dela não obteremos mais mudanças nos expoentes críticos. Se, por ventura, o valor de  $d$  do nosso modelo for  $d = 4$  (o mesmo valor para o modelo de Processo de Contato), iremos obter  $\nu' \approx 0.491$  que de fato é muito próximo do valor de  $\nu$  (variação percentual em torno de 1.83 %) em campo médio no modelo de Processo de contato. Esta forma de interpretarmos  $\nu'$  é usual em redes do tipo "*Small-World*", assim como a rede completamente conectada [4].

Ainda estamos no processo de obtenção de outros expoentes críticos e de refinamento dos dados obtidos. Entretanto, com os nossos resultados preliminares, acreditamos que o modelo está na mesma classe de universalidade do modelo de Percolação direcionada [87], onde também se encontra o modelo de Processo de contato. Esperamos, também, que seja possível estimar no futuro o valor da dimensão crítica superior do nosso modelo. Desta forma, teremos uma maior sugestão de que a classe de universalidade é a mesma do modelo de Processo de Contato.

A suposição anterior é baseada tanto na proximidade dos expoentes que obtivemos com os do próprio modelo de percolação direcionada, que podem ser vistos na tabela 8,



como pela abordagem que utilizamos ao implementarmos computacionalmente as interações entre indivíduos do modelo proposto no capítulo 4, que por sua vez são análogas a como são definidas no modelo de processo de contato (capítulo 3). Por exemplo, em uma interação entre um indivíduo no estado  $X_1$  com um do estado  $X_3$  em que o indivíduo sonegador influencia o honesto, maior será a probabilidade do indivíduo honesto se tornar suscetível ( $X_2$ ) quanto maior for a quantidade de vizinhos evasores deste indivíduo em questão.

Como exemplo, vamos supor um indivíduo na rede quadrada e que se encontra no estado  $X_1$ . Este indivíduo tem, em um determinado instante, como seus primeiros vizinhos três indivíduos sonegadores ( $X_3$ ) e um indivíduo suscetível ( $X_2$ ) assim como é mostrado na figura 43.

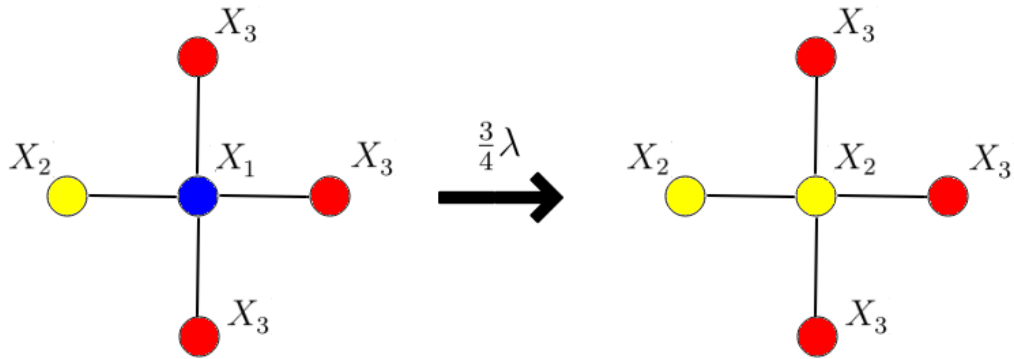


Figura 43: Exemplo de indivíduos na rede quadrada. Nesta imagem, um indivíduo honesto  $X_1$  tem como primeiros vizinhos um indivíduo suscetível  $X_2$  e três indivíduos sonegadores  $X_3$ . Neste caso, o indivíduo honesto pode vir a mudar de estado de acordo com a interação dada por 4.1. Neste caso, a probabilidade de transição é  $\frac{3\lambda}{4}$ .

Neste caso então, o indivíduo  $X_1$  pode vir a se tornar do tipo  $X_2$  através da interação (4.1). Para tal, é necessário que pelo menos 1 de seus 4 primeiros vizinhos seja sonegador, condição esta que está sendo satisfeita. A mudança de estado dada por (4.1) está associada com a probabilidade  $\lambda$ . Neste exemplo em específico, como temos 3 indivíduos sonegadores que podem influenciar o indivíduo no estado  $X_1$ , a mudança pode vir a acontecer com uma probabilidade  $\frac{3}{4}\lambda$ . A mudança de estado dada por (4.3) é simulada de maneira análoga, porém, com a probabilidade  $\delta$  associada.

Esta abordagem que utilizamos para simular nosso modelo em redes regulares é análoga à dinâmica de evolução do Processo de contato.

## 7 *Conclusões*

Ao longo de todo este trabalho, estivemos interessados em propor modelos que tentassem descrever, através da suposição de regras simples, as dinâmicas que governam o comportamento sonegador dentro de uma sociedade.

Antes de mais nada, realizamos uma breve revisão sobre alguns dos trabalhos anteriores que serviram de inspiração para todos os modelos que propomos. Explicamos as metodologias que foram utilizadas para as interpretações e obtenções dos dados apresentados. Já nos capítulos iniciais, apresentamos o problema central que foi utilizado como motivação para todos os nossos esforços: a sonegação fiscal. Definimos como se configura a sonegação fiscal e a diferenciamos de outras práticas como a elisão fiscal. Mostramos os problemas enfrentados pelo Brasil e em como ele se encaixa no cenário mundial comparado com os outros 9 maiores países evasores. Discutimos um pouco sobre moral fiscal e por fim, sobre órgãos fiscalizadores que tiveram uma importância vital em nosso trabalho.

Abordamos, também, de maneira sucinta as redes que viemos a utilizar no desenvolvimento de nossos estudos. Se tratando este de um trabalho sobre (entre outras coisas) interações entre indivíduos de uma sociedade, se faz necessário representar de forma coerente como são estas estruturas que conectam estes indivíduos. Como no final do trabalho estivemos interessados em obter uma descrição quantitativa de um dos modelos apresentados através de uma transição que o mesmo apresenta, também abordamos um pouco a ferramenta que nos permite estudar e obter informações sobre sistemas finitos próximos a estas transições: a análise de tamanho finito.

Finalmente, depois de toda esta preparação e motivação, apresentamos nosso primeiro modelo cuja base é proveniente de nosso trabalho publicado na *International Journal of Modern Physics C* com o título: *Dynamics of tax evasion through an epidemic-like model* [98]. O modelo que propomos tem como forma original um modelo baseado em agentes com três estados possíveis. Estes estados correspondem ao engajamento dos indivíduos com suas obrigações fiscais e em como estes indivíduos estão satisfeitos com o panorama

tributário. Através de quatro parâmetros socioeconômicos, os indivíduos podem influenciar uns aos outros, tomarem atitudes autônomas (não provenientes de interações com outros indivíduos) e sofrer a ação da fiscalização. Estudamos a dinâmica criada por estes indivíduos em sociedades artificiais. Utilizando a rede completamente conectada, obtivemos um conjunto de equações diferenciais para as taxas das densidades de cada tipo de indivíduo. Com estas equações e ainda utilizando a rede completamente conectada, fomos capazes de obter soluções analíticas para as densidades estacionárias em função unicamente dos parâmetros socioeconômicos. Obtivemos um indicativo então da existência de uma transição de fase do tipo ordem-desordem, onde dependendo da capacidade de influência de indivíduos sonegadores, poderíamos ter uma situação onde somente o comportamento honesto permanece para longos tempos na população ou, termos sempre presente o comportamento sonegador. Estudamos o modelo através das redes ER e BA. O nosso intuito com isto era obter características qualitativas a respeito do impacto da topologia destas redes, que mais se aproximam da realidade quanto à estrutura de conexão entre indivíduos. Na rede ER o comportamento sonegador pode, de fato, desaparecer em longos tempos, mas na rede BA não podemos nos livrar dele. A nossa análise qualitativa se mostrou coerente com a porcentagem média de evasão nacional.

Por fim, realizamos um breve estudo sobre as consequências da existência de um quarto estado, este por sua vez associado ao indivíduo sonegador que foi pego pela fiscalização, não se tornando diretamente um indivíduo não-sonegador e satisfeito. Com esta nova possibilidade, verificamos a existência de um nova transição de fase (em adição à anterior) que mostrava um cenário onde, desta vez, o comportamento honesto é aquele que desaparece da população. Nesta extensão, também fizemos uso da rede completamente conectada e assim conseguimos obter soluções analíticas para todas as densidades estacionárias.

O próximo modelo sugerido tinha como inspiração maior o modelo do Votante Majoritário com ruído com dois estados (honesto e desonesto). Incluímos a este modelo um termo de inércia comportamental cuja interpretação se dá por uma "teimosia" dos indivíduos em permanecer em seu estado (com seu comportamento atual). Nesta parte do trabalho, também utilizamos (em adição ao que já foi proposto) dois mecanismos associados à fiscalização: tempo de observação sobre indivíduos identificados como sonegadores e auditorias fiscais. Estudamos este novo modelo nas redes completamente conectada e na rede ER. Notamos que a inclusão destes mecanismos de fiscalização impediam a ocorrência de transições de fase.

Ao final do presente trabalho, estudamos o modelo de três estados descrito no capítulo 4 utilizando para tal as redes quadrada, cúbica e novamente através da rede completamente conectada. Entretanto, foram utilizadas simulações computacionais para obter outras informações. O objetivo era poder determinar os expoentes críticos do modelo nestas redes associados à transição de fase já discutida. Como também não possuíamos soluções analíticas, tivemos novamente que recorrer a simulações computacionais.

Esperamos, em trabalhos futuros, melhorar a precisão dos expoentes que obtivemos além de conseguirmos encontrar outros expoentes críticos a fim de definirmos de forma mais segura (se possível) o modelo em alguma classe de universalidade. Como já abordado, esperamos que esta classe seja a mesma do modelo de processo de contato.

## *Referências*

- [1] S. N. Dorogovtsev and J. F. F. Mendes, "Evolution of Networks: From Biological Nets to the Internet and WWW", Oxford University Press (2014).
- [2] S. Galam, "The Trump phenomenon as explanation from sociophysics", International Journal of Modern Physics B **31**, 1742015 (2016).
- [3] S. Mukherjee and A. Chatterjee, "Disorder-induced phase transition in an opinion dynamics model: Results in two and three dimensions", Physical Review E **94**, 062317 (2016).
- [4] S. Biswas, A. Chatterjee and P. Sen, "Disorder induced phase transition in kinetic models of opinion dynamics", Physica A **391**, 3257 (2012).
- [5] S. Galam, "Sociophysics: A Physicist's Modeling of Psycho-political Phenomena", Springer, 2012 edition (Berlin, 2012).
- [6] P. Sen and B. K. Chakrabarti, "Sociophysics: An Introduction", Oxford University Press (Oxford, 2013).
- [7] C. Castellano, S. Fortunato and V. Loreto, "Statistical physics of social dynamics", Reviews of Modern Physics **81**, 591 (2009).
- [8] G. Zaklan, F. Westerhoff and D. Stauffer, "Analysing tax evasion dynamics via the Ising model", Journal of Economic Interaction and Coordination **4**, 1 (2009).
- [9] Harvey Gould, Jan Tobochnik and Wolfgang Christian, "An Introduction to Computer Simulation Methods: Applications to Physical Systems", Addison-Wesley, 3th edition, 2006).
- [10] M. J. de Oliveira, "Isotropic majority-vote model on a square lattice", Journal of Statistical Physics **66**, 273 (1992).
- [11] Jon S. Davis, Gary Hecht and Jon D. Perkins, "Social Behaviors, Enforcement, and Tax Compliance Dynamics", The Accounting Review **78**, 39 (2003).
- [12] D. Stauffer, S. Moss de Oliveira, P. M. C. de Oliveira and J. S. Sa Martins, "Biology, Sociology, Geology by Computational Physicists"(Elsevier, Amsterdam, 2006).
- [13] A. Barrat, M. Barthelemy and A. Vespignani, "Dynamical processes on complex networks", Cambridge University Press (2008).
- [14] R. Pastor-Satorras, C. Castellano, P. Van Mieghem and A. Vespignani, "Epidemic processes in complex networks", Reviews of Modern Physics **87**, 925 (2015).

- [15] T. Tomé e M. J de Oliveira, "Stochastic Dynamics and Irreversibility", Springer (2015 edition, 2014).
- [16] N. B. Tuma and M. T. Hannan, "Social Dynamics Models and Methods", Academic Press (November 12, 2012).
- [17] Rosario N. Mantegna and H. Eugene Stanley, "Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance", Cambridge University Press, 1st edition (2007).
- [18] I. Utsumi, "Tax Evasion in Brazil", <http://thebrazilbusiness.com/article/tax-evasion-in-brazil>.
- [19] G. Zaklan, F. W. S. Lima and F. Westerhoff, "Controlling tax evasion fluctuations", *Physica A* **387**, 5857 (2008).
- [20] F. W. S. Lima and G. Zaklan, "A multi-agent-based approach to tax morale", *International Journal of Modern Physics C* **19**, 1797 (2008).
- [21] F. W. S. Lima, "Controlling the Tax Evasion Dynamics via Majority-Vote Model on Various Topologies", *Theoretical Economics Letters* **2**, 87 (2012).
- [22] N. Crokidakis, "A three-state kinetic agent-based model to analyze tax evasion dynamics", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **414**, 321 (2014).
- [23] F. W. S. Lima "Analysing and controlling the tax evasion dynamics via majority-vote model", *Journal of Physics: Conference Series*, **246**, conference 1 (2010).
- [24] "Lei N° 10.406, de 10 de Janeiro de 2002", [http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/leis/2002/110406.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/2002/110406.htm)
- [25] "How do taxes affect the economy in the long run?", <https://www.taxpolicycenter.org/briefing-book/how-do-taxes-affect-economy-long-run>
- [26] M. V. Saavedra, "Elisão e evasão fiscal", <https://www.boletimjuridico.com.br/doutrina/artigo/636/elisao-evasao-fiscal>
- [27] "Lei n° 8.137, de 27 de Dezembro de 1990", [http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/LEIS/L8137.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/LEIS/L8137.htm)
- [28] "Brasileiro trabalhará até sexta-feira, 2 de junho, só para pagar impostos, releva IBPT", <https://ibpt.com.br/noticia/2587/Brasileiro-trabalhara-ate-sexta-feira-2-de-junho-so-para-pagar-impostos-releva-IBPT>
- [29] "Lei Complementar n° 131, de 27 de Maio de 2009", [http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/leis/LCP/Lcp131.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/LCP/Lcp131.htm)
- [30] "Lei n° 4.729, de 14 de Julho de 1965", [http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/Leis/1950-1969/L4729.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/Leis/1950-1969/L4729.htm)
- [31] B. Torgler, "Tax morale in Latin America", *Public Choice* **122**, 133 (2005).
- [32] L. P. Feld and B. S. Frey, "Trust breeds trust : how taxpayers are treated", *Economics of Governance* **3** 87 (2002).

- [33] ANFIP – Associação Nacional dos Auditores Fiscais da Receita Federal do Brasil, "Sonegação, Fraudes e Evasão fiscal - Volume II", Fundação ANFIP (1997).
- [34] Brasil, Ministério da Fazenda, Escola de Administração Fazendária, Programa Nacional de Educação Fiscal – PNEF, "Função social dos tributos"(2014).
- [35] "Lei Complementar nº 123/2006 de 14 de Dezembro de 2006", [http://www.planalto.gov.br/CCivil\\_03/leis/LCP/Lcp123.htm](http://www.planalto.gov.br/CCivil_03/leis/LCP/Lcp123.htm)
- [36] "O que é Aliquota? Entenda como funciona", <https://direitosbrasil.com/o-que-e-aliquota/>
- [37] "Lei complementar nº 116, de 31 de Julho de 2003", <http://www.portaltributario.com.br/legislacao/lc116.htm>
- [38] "A Progressividade na Tributação Brasileira: por maior justiça tributária e fiscal", Cartilha feita pelo Departamento Intersindical de Estatística e Estudos Socioeconômicos DIEESE, Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada IPEA e pelo Sindifisco Nacional, São Paulo, agosto de 2011
- [39] "IPI - Imposto sobre produtos industrializados", <http://www.portaltributario.com.br/tributos/ipi.html>
- [40] "ICMS - Imposto sobre circulação de mercadorias e prestação de serviços", <http://www.portaltributario.com.br/tributos/icms.html>
- [41] "O princípio da progressividade no ordenamento jurídico brasileiro", <https://jus.com.br/artigos/12901/o-principio-da-progressividade-no-ordenamento-juridico-brasileiro/2>
- [42] James Alm, Jorge Martinez-Vazquez and Chandler McClellan, "Corruption and firm tax evasion", *Journal of Economic Behavior & Organization* **124**, 146 (2016).
- [43] Anastasia Litina, Theodore Palivos, "Corruption, tax evasion and social values", *Journal of Economic Behavior & Organization*, 124, 164, (2016).
- [44] "Constituição da República Federativa do Brasil de 1988", [http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/constituicao/constituicao.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicao.htm)
- [45] "Lei nº 5.172, de 25 de Outubro de 1966", [http://www.planalto.gov.br/ccivil\\_03/LEIS/L5172.htm](http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/LEIS/L5172.htm)
- [46] "Why are the taxes in Brazil so high?", <http://thebrazilbusiness.com/reflection/why-are-the-taxes-in-brazil-so-high>
- [47] "Pelo 5º ano seguido, Brasil arrecada muito, mas não dá retorno", <https://ibpt.com.br/noticia/2171/pelo-5o-ano-seguido-brasil-arrecada-muitomas-nao-da-retorno>
- [48] "10 Worst Countries for Tax Evasion", <https://investorplace.com/?p=84497>
- [49] Guilherme Francisco dos Santos, "Tributação excessiva do estado como causa de sonegação fiscal", Faculdade do Norte Novo de Apucarana, Curso de Direito, Trabalho de Conclusão de Curso (Apucarana, 2012).

- [50] "Resumo dos principais tributos ou sistemas de tributação no Brasil", <http://www.portaltributario.com.br/tributos>
- [51] "Receita Federal - Ministério da Fazenda", <http://idg.receita.fazenda.gov.br>
- [52] "Ministério da Fazenda", <http://www.fazenda.gov.br>
- [53] "Offshore Portfolio Investment Strategy - OPIS", <https://www.investopedia.com/terms/o/opis.asp#ixzz5Ofei0NB1>
- [54] "Tax Justice Network", <https://www.taxjustice.net>
- [55] "The Rich Are Different From You And Me: They Evade Way More Taxes", <https://www.fastcompany.com/40460511/the-rich-are-different-from-you-and-me-they-evade-way-more-taxes>
- [56] "Tax evaders exposed: why the super-rich are even richer than we thought", <https://www.theguardian.com/inequality/2017/jun/14/tax-evaders-exposed-why-super-rich-are-even-richer-than-we-thought>
- [57] H. Immervoll, H. Levy, J. R. Nogueira, C. O' Donoghue and R. B. de Siqueira, "The Impact of Brazil's Tax-Benefit System, on Inequality and Poverty", *SSRN Electronic Journal*, **2114** (2006).
- [58] "International Monetary Fund", <http://www.imf.org/external/datamapper/NGDPD@WEO/OEMDC/ADVEC/WEOWORLD>
- [59] J. Alm and B. Torgler, "Culture differences and tax morale in the United States and in Europe", *Journal of Economic Psychology* **27**, 224 (2006).
- [60] "Internal Revenue Service", <https://www.irs.gov/>
- [61] "Proposed IRS Cuts Would Mean Loss Of \$4 Billion In Revenue", [https://www.huffingtonpost.com/entry/irs-budget-cuts\\_n\\_1007294](https://www.huffingtonpost.com/entry/irs-budget-cuts_n_1007294)
- [62] "IRS chief says Trump's budget would sharply cut taxpayer service", [https://www.washingtonpost.com/news/powerpost/wp/2018/06/01/irs-chief-says-trumps-budget-would-sharply-cut-taxpayer-service/?utm\\_term=.ef1d90346429](https://www.washingtonpost.com/news/powerpost/wp/2018/06/01/irs-chief-says-trumps-budget-would-sharply-cut-taxpayer-service/?utm_term=.ef1d90346429)
- [63] "IRS chief departs, blasting Congress for budget cuts threatening tax agency", [https://www.washingtonpost.com/news/powerpost/wp/2017/11/07/irs-chief-departs-blasting-congress-for-budget-cuts-threatening-tax-agency/?noredirect=on&utm\\_term=.9c12c0b63886](https://www.washingtonpost.com/news/powerpost/wp/2017/11/07/irs-chief-departs-blasting-congress-for-budget-cuts-threatening-tax-agency/?noredirect=on&utm_term=.9c12c0b63886)
- [64] "Years of budget cuts shrink the IRS, and corporations are the big winners", <https://www.cnn.com/2018/05/11/budget-cuts-shrink-the-irs-and-corporations-are-the-big-winners.html>
- [65] "UE lança ofensiva contra Amazon e Apple por otimização fiscal" <https://g1.globo.com/economia/noticia/ue-lanca-ofensiva-contra-amazon-e-apple-por-otimizacao-fiscal.ghtml>



- [66] "União Europeia determina que a Amazon pague 250 milhões de euros em impostos devidos", <https://oglobo.globo.com/economia/uniao-europeia-determina-que-amazon-pague-250-milhoes-de-euros-em-impostos-devidos-21908183>
- [67] "China, where you can be shot for tax evasion", <http://www.dailymail.co.uk/debate/article-1239060/China-shot-tax-evasion.html>
- [68] "The Richest Countries In South America", <https://www.worldatlas.com/articles/the-richest-countries-in-south-america.html>
- [69] "Brazil's Tax System Hits Entrepreneurial Spirit", <http://www.unpan.org/PublicAdministrationNews/tabid/117/mctl/ArticleView/ModuleID/1471/articleId/16203/default.aspx>
- [70] "Le Monde Diplomatique Brasil", Setembro 2018 Edição 134.
- [71] Siqueira, Marcelo Lettieri and Ramos, Francisco S, "A economia da sonegação: teorias e evidências empíricas", *Revista de Economia Contemporânea* **9**, 555 (2005).
- [72] P. H. L. Martins and J. A. Plascak, "Percolation on two-and three-dimensional lattices", *Physical Review E* **67**, 046119 (2003).
- [73] J. L. Martin, "The exact enumeration of self-avoiding walks on a lattice", *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **58**, 92 1962.
- [74] L. Onsager, "The Effects of Shape on the Interaction of Colloidal Particles", *Annals of the New York Academy of Sciences* **51**, 627 (1949).
- [75] A.L. Barabási, "Linked: How Everything Is Connected to Everything Else and What It Means for Business, Science, and Everyday Life"(Basic Books (AZ), 2014).
- [76] L. F. Costa, F. A. Rodrigues, G. Travieso and P. R Villas Boas, "Characterization of Complex Networks: A Survey of measurements", *Advances in Physics* **56**, 167 (2007).
- [77] A. Clauset, C.R. Shalizi and M.E.J. Newman, "Power-law distributions in empirical data", *SIAM review* **51**, 4, 661 (2009).
- [78] R. Albert, H. Jeong and A.L Barabási, "Internet: Diameter of the World-Wide Web", *Nature*, **401**, 130 (1999).
- [79] M. A. Ribeiro, R. A. Vosgerau, M. L. P. Andruchiw and S. E. S. Pinto, "The complex social network of The Lord of Rings", *Revista Brasileira de Ensino de Física*, **38**, 1304 (2016).
- [80] A. L. Barabási and R. Albert, "Statistical mechanics of complex networks", *Reviews of Modern Physics* **74**, 47 (2002).
- [81] "Canada Arrests 15-Year-Old In Web Attack"<https://www.nytimes.com/2000/04/20/business/canada-arrests-15-year-old-in-web-attack.html>
- [82] J. M. Yeomans, "Statistical Mechanics of Phase Transitions", Oxford University Press, 1st edition (1992).

- [83] [http://wps.prenhall.com/wps/media/objects/4678/4791085/ch10\\_11.htm](http://wps.prenhall.com/wps/media/objects/4678/4791085/ch10_11.htm)
- [84] H. E. Stanley, "Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena", Oxford University Press, Reprint edition (1987).
- [85] S. R. A. Salinas, "Introdução à Física Estatística"(Edusp, 1999).
- [86] Harvey Gould , Jan Tobochnik and Wolfgang Christian, "An Introduction to Computer Simulation Methods: Applications to Physical Systems", 3rd Edition, Addison-Wesley; 3 edition (January 19, 2006).
- [87] J. Marro and R. Dickman, "Nonequilibrium Phase Transitions in Lattice Models"(Collection Alea-Saclay: Monographs and Texts in Statistical Physics, 1 edition (2005)).
- [88] M. E. Fisher and M. N. Barber, "Scaling Theory for Finite-Size Effects in the Critical Region", Physical Review Letters **28**, 1516 (1972).
- [89] Murilo Lacerda Santos, "Simulação de Monte Carlo no modelo de Ising na rede quadrada", Dissertação de mestrado, UFMG (2014).
- [90] M. E. J. Newman and G. T. Barkema, "Monte Carlo Methods in Statistical Physics", Clarendon Press, 1st edition (April 15, 1999).
- [91] J. G. Brankov, "Introduction to Finite-Size Scaling (Leuven Notes in Mathematical and Theoretical Physics)", Leuven University Press, 1st edition (1996).
- [92] P. C. da Silva, U. L. Fulco , F. D. Nobre, L. R. da Silva, and L. S. Lucena, "Recursive-Search Method for Ferromagnetic Ising Systems: Combination with a Finite-Size Scaling Approach", Brazilian Journal of Physics **32**, (2002).
- [93] <https://github.com/andreoestereich/collapsator>
- [94] T. E. Harris, "Contact Interactions on a Lattice", The Annals of Probability, **2**, 969-988 6 (1974).
- [95] L. P. Kadanoff, "More is the Same; Phase Transitions and Mean Field Theories", Journal of Statistical Physics **137**, 777 (2009).
- [96] H. Hinrichsen, "Nonequilibrium Critical Phenomena and Phase Transitions into Absorbing States", Advances in Physics **49**, 815 (2010).
- [97] A.G. Dickman, R. Dickman, F.A. Barbosa, "Transições de fase sem termodinâmica", Revista Brasileira de Ensino de Física **28**, 1 23-33 (2006).
- [98] R. M. Brum and N. Crokidakis, "Dynamics of tax evasion through an epidemic-like model", International Journal of Modern Physics C **28**, 1750023 (2017).
- [99] R. R. Zadorosny, A. Presotto, E. Duarte, E. Sardella, "Fenomenologia da Supercondutividade e Supercondutores Mesoscópicos", <https://arxiv.org/abs/1505.01150> (2015).
- [100] R. K Pathria and P. D. Beale, "Statistical Mechanics", Academic Press, 3rd edition (March 14, 2011).

- [101] T. M. Liggett, "Interacting Particle Systems", Springer (December 22, 2004).
- [102] M. Boguná, R. Pastor-Satorras and A. Vespignani, "Absence of Epidemic Threshold in Scale-Free Networks with Degree Correlations", *Physical Review Letters* **90** number 2, 028701 (2003).
- [103] S. Chatterjee and R. Durrett "Contact processes on random graphs with power law degree distributions have critical value 0", *The Annals of Probability* **37**, 6 2332-2356 (2009).
- [104] R. Durrett, "Some features of the spread of epidemics and information on a random graph", *National Academy of Sciences*, **107**, 10 4491-4498 (2010).
- [105] M. L. Siqueira and F. S. Ramos, "The economics of tax evasion: theories and empirical evidences", *Revista de Economia Contemporânea* **9**, 555 (2005).
- [106] M. J. de Oliveira, "Isotropic majority-vote model on a square lattice", *Journal of Statistical Physics* **66**, 273 (1992).
- [107] Erdős. P, Rényi. A, "On Random Graphs. I", *Publicationes Mathematicae* **6**, 290 (1959).
- [108] Chen H, Shen C, Zhang H, Li G, Hou Z and Kurths J, "First-order phase transition in a majority-vote model with inertia", *Physical Review E* **95**, 042304 (2017).
- [109] R. H. Willis, "Two Dimensions of Conformity-Nonconformity", *Sociometry* **26**, 499 (1963).
- [110] P. R. Nail and G. MacDonald, "Proposal of a four-dimensional model of social response", *Psychological Bulletin* **126**, 454 (2000).
- [111] L. F. C. Pereira and F. G. B. Moreira, "Majority-vote model on random graphs", *Physical Review E* **71** 016123 (2005).
- [112] Z. Su, W. Wang, L. Li, J. Xiao and H. E. Stanley, "Emergence of hysteresis loop in social contagions on complex networks", *Scientific Reports* **7**, 6103 (2017).