

A Matemática da Tomografia

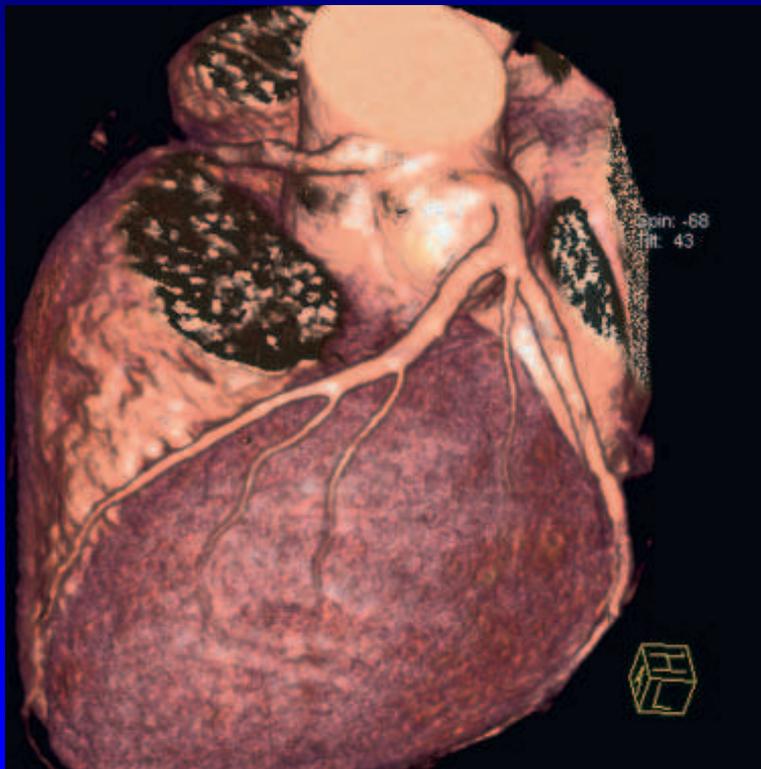
R. Cipolatti



Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro

IF-UFF - 2009





Scan length	350 mm
Scan time	6.0 s
kV	120 kV
Effective mAs	150 mAs
Rotation time	0.37 s
Slice collimation	64 x 0.6 mm
Pitch	1.2
Resolution	0.4 x 0.4 x 0.4 mm

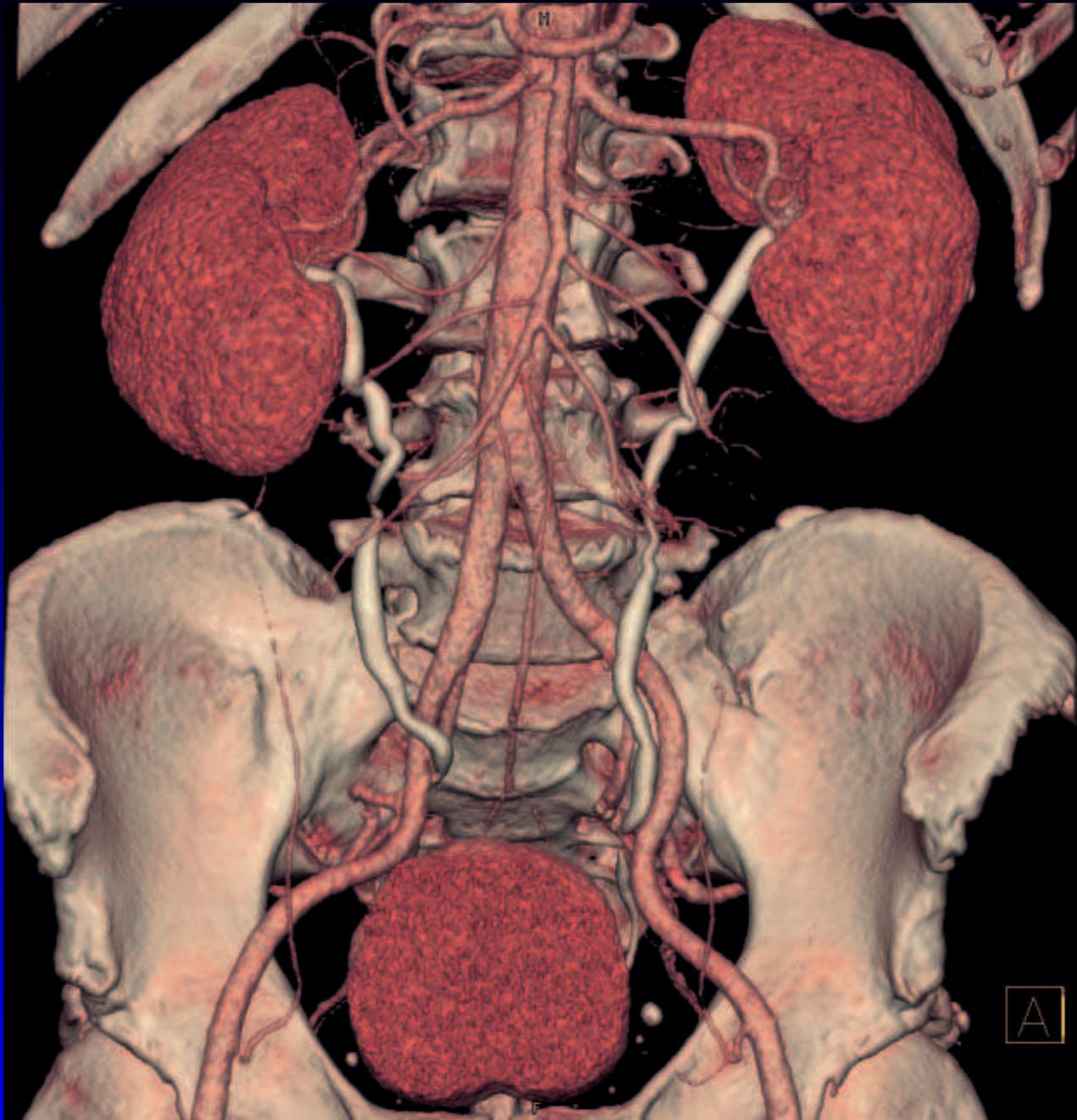
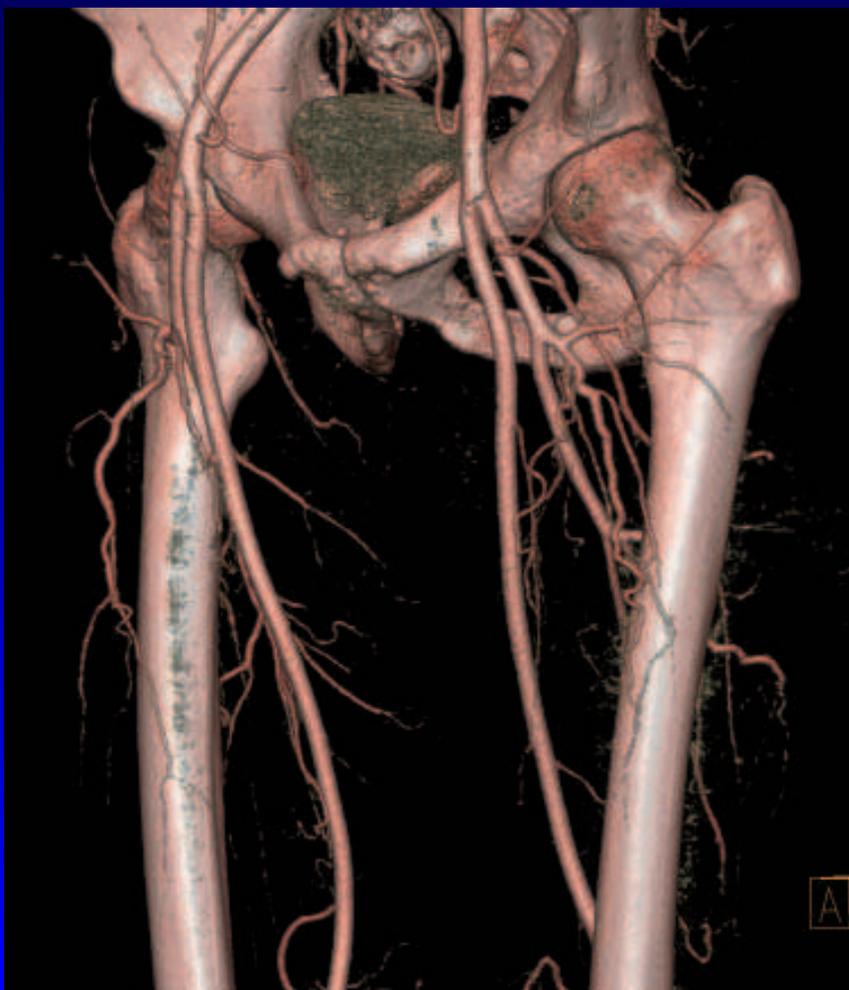
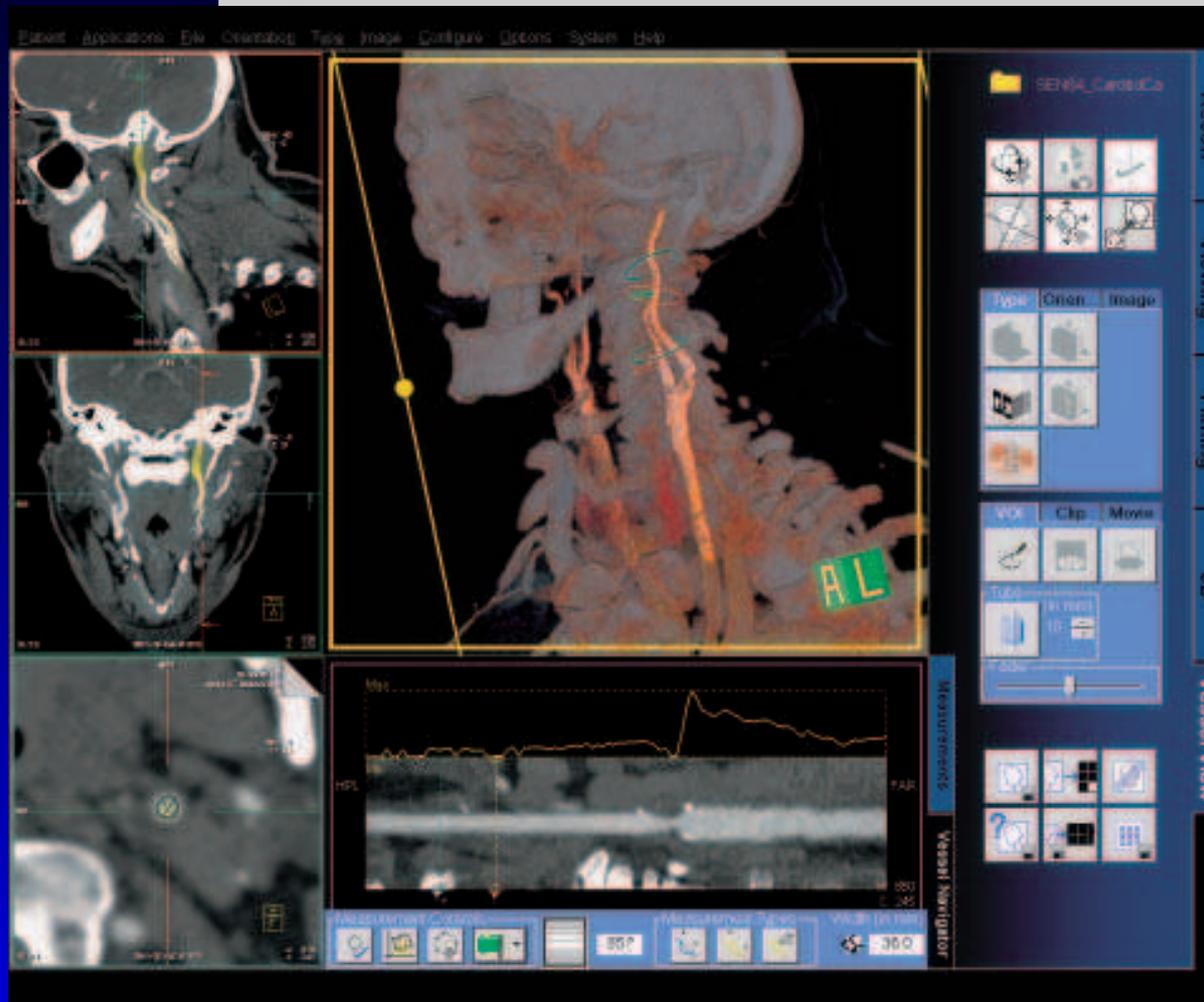


Image Quality, Detail and Speed



The SOMATOM Sensation 40 and the SOMATOM Sensation 64 firmly establish a new benchmark for diagnostic excellence. They place the latest and most innovative technology into your hands while integrating seamless workflow with a broad portfolio of advanced clinical applications.

These cutting-edge systems utilize the revolutionary z-Sharp Technology, with the unique STRATON X-ray tube, Double z-Sampling, and the Ultra Fast Ceramic (UFC™) detector, resulting in unprecedented detail and speed. These technologies double the scan information without an increase in dose. This enables up to 64-slice acquisition for all applications with the industry's highest isotropic resolution of below 0.4 mm voxel size.



syngo Vessel View – Sophisticated vascular diagnosis tool

Automated double lumen vessel segmentation

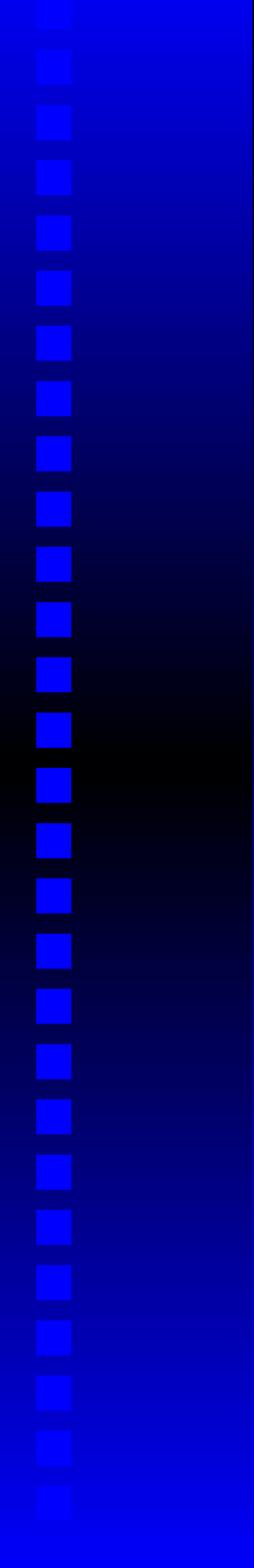
Patient Applications Edit View Image Scroll Options System Help

Recon Viewing Filtering 3D Perfusion

Max. Enh. [HU] 219.8
 Rel. Thresh. [%] 15

View Tools

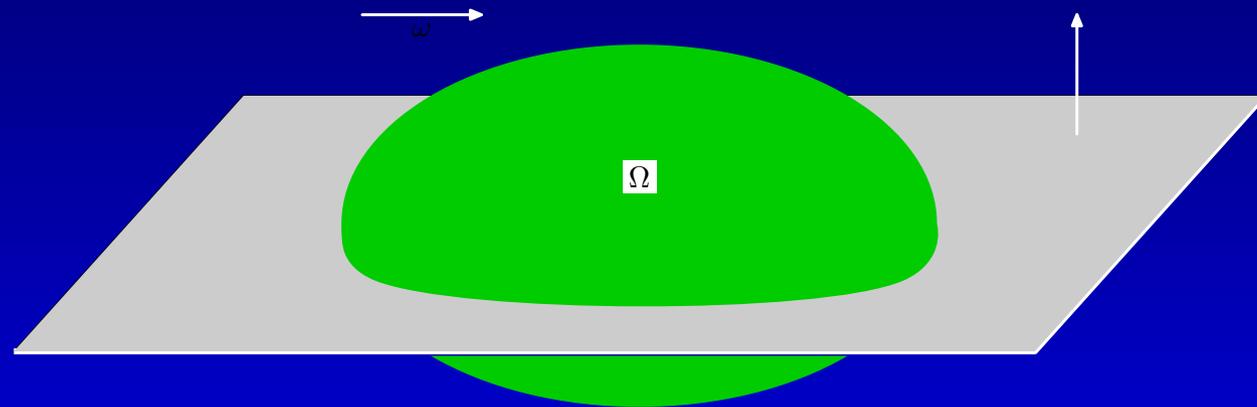
End Evaluation



O que é Tomografia?

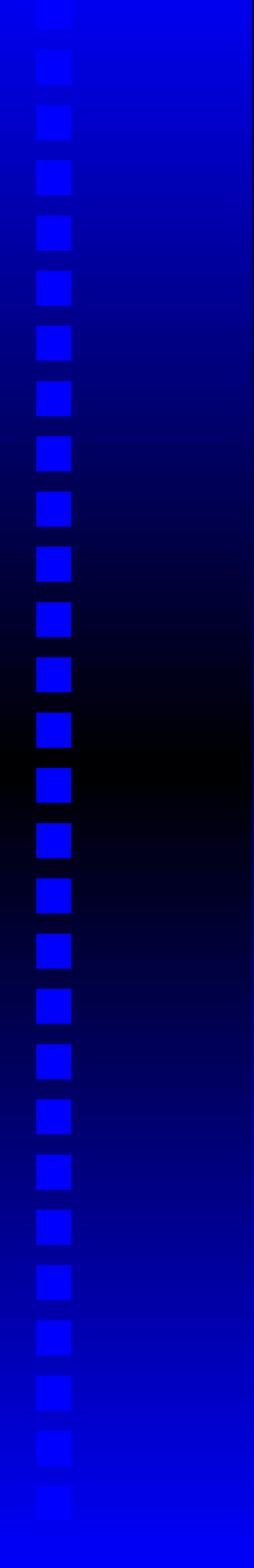
O que é a tomografia?

- *Tomografia = tomos + graphein,*
- *tomos = corte, talho; graphein = escrita, grafia*
- *Processo pelo qual se obtém uma representação gráfica de seções de um corpo tridimensional.*



O que é a tomografia?

- *“Qualquer técnica de geração de imagens que simule a estrutura interna de um corpo a partir de dados colhidos externamente”.*
- *O problema da reconstrução do interior de um objeto através de projeções surge em várias áreas das ciências, tais como diagnósticos médicos, pesquisa geológicas, microscopia, entre outros.*



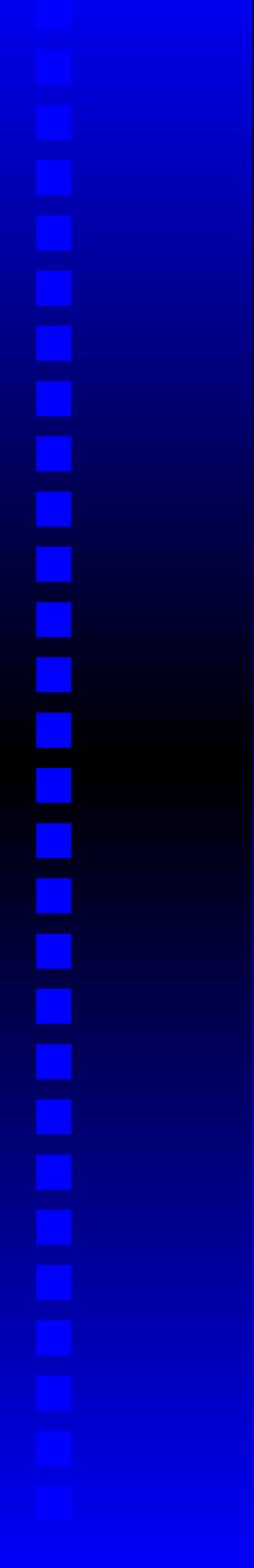
Técnicas para Geração de Imagens em Medicina

Técnicas para Geração de Imagens para Medicina

- *Radiografia;*
- *Tomografia por Transmissão – CT;*
- *Tomografia por Emissão – ECT (SPECT, PET);*
- *Ultra-sonografia;*
- *Electrical Impedance Tomography – EIT;*
- *Ressonância Magnética – MRI.*

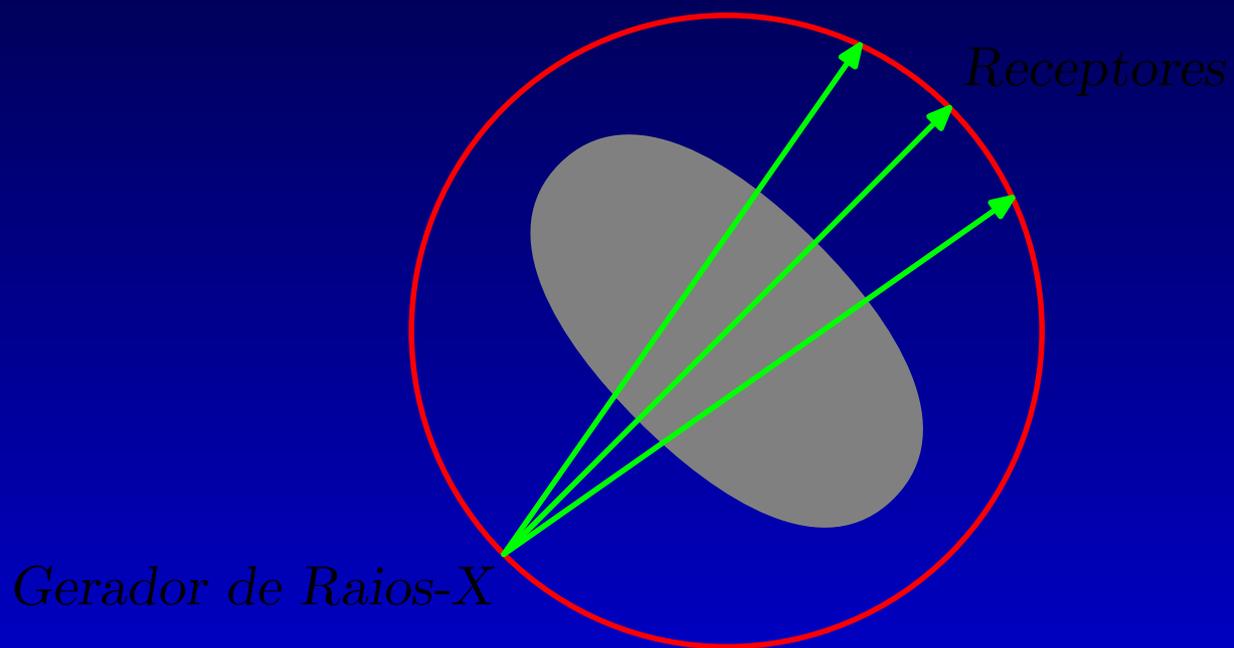
Técnicas para Geração de Imagens em Medicina Nuclear

- *Single Photon Emission Tomography – SPECT,*
- *Positron Emission Tomography – PET;*
- *Medicina Nuclear – Material radioativo é introduzido no paciente e metabolizado pelo órgão sob investigação. A radiação gama emitida é registrada por uma câmera SPECT que gira em torno do paciente. O técnica PET funciona de modo análogo, sendo o agente metabolizado um emissor de pósitrons.*
- *Principal aplicação: presença e extensão de tumores.*



Tomografia por Transmissão

CT: Tomografia por Transmissão



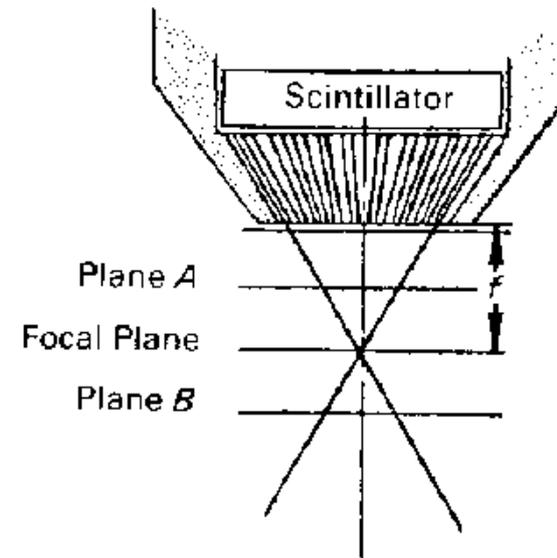
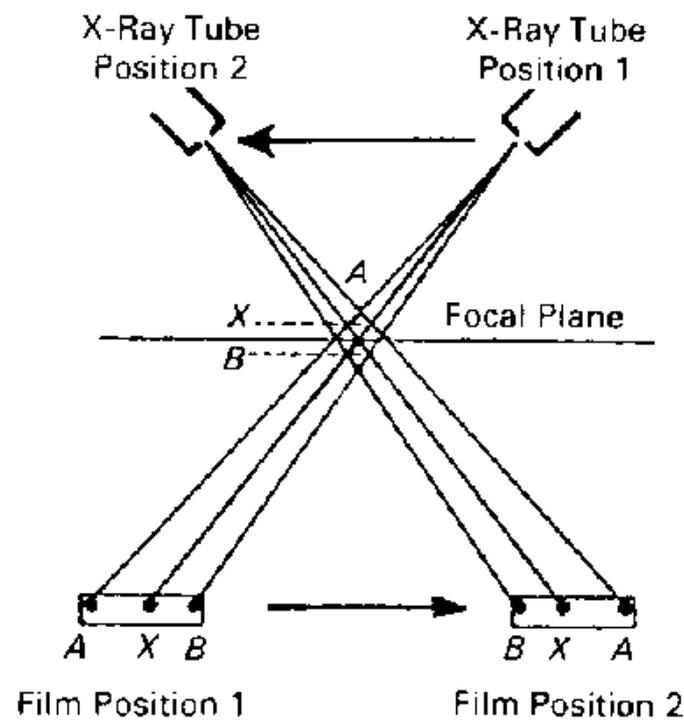


Fig. 1. Methods of conventional tomography. (a) In X-ray tomography the tube and the film cassette move simultaneously in opposite directions such that points in the focal point plane X do not move with respect to the film cassette, while points outside the plane (A and B) do move and are blurred. (b) In emission tomography the holes in the collimator have a fixed focus point (f) such that photons outside the focal plane are not detected as efficiently, again resulting in a blurring effect.

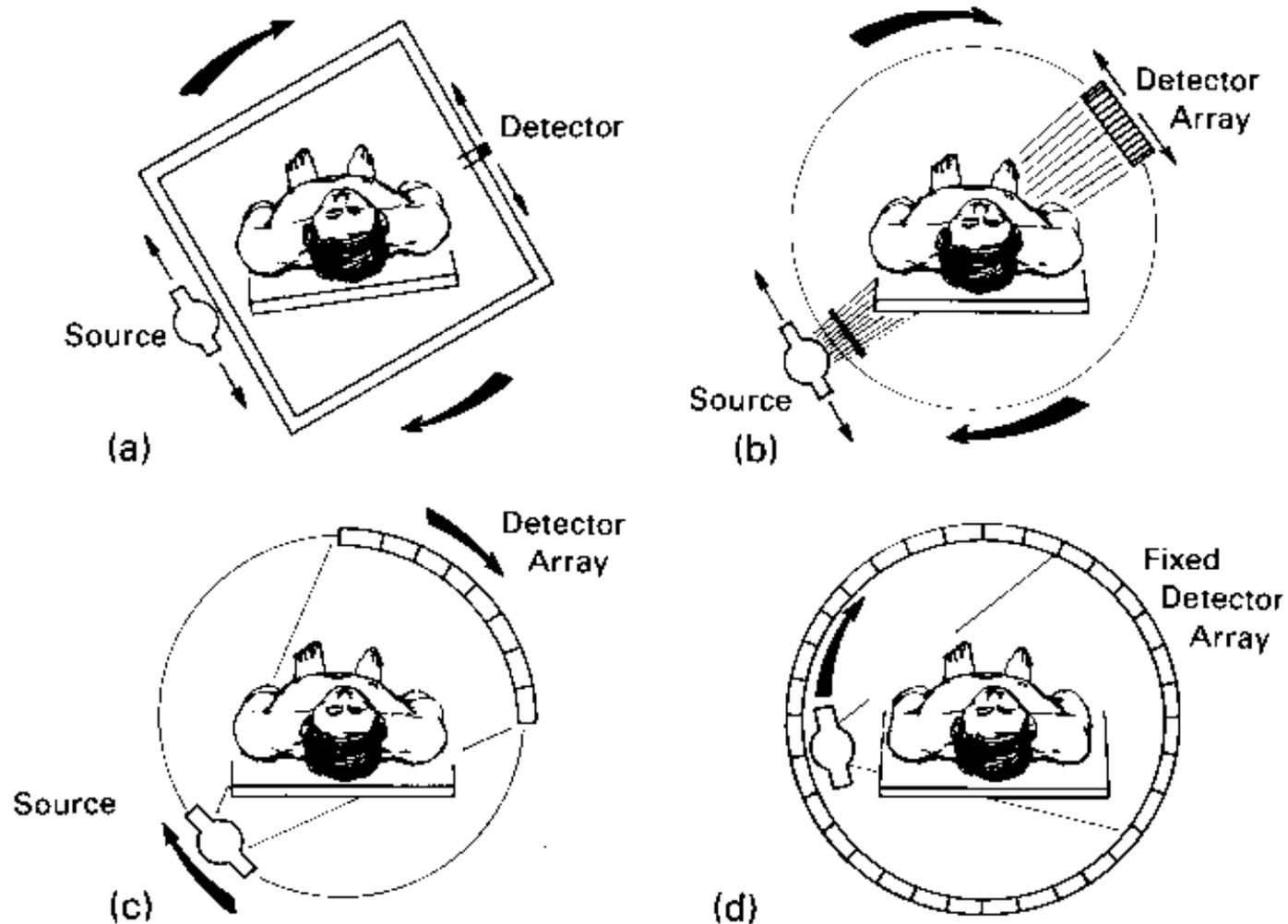
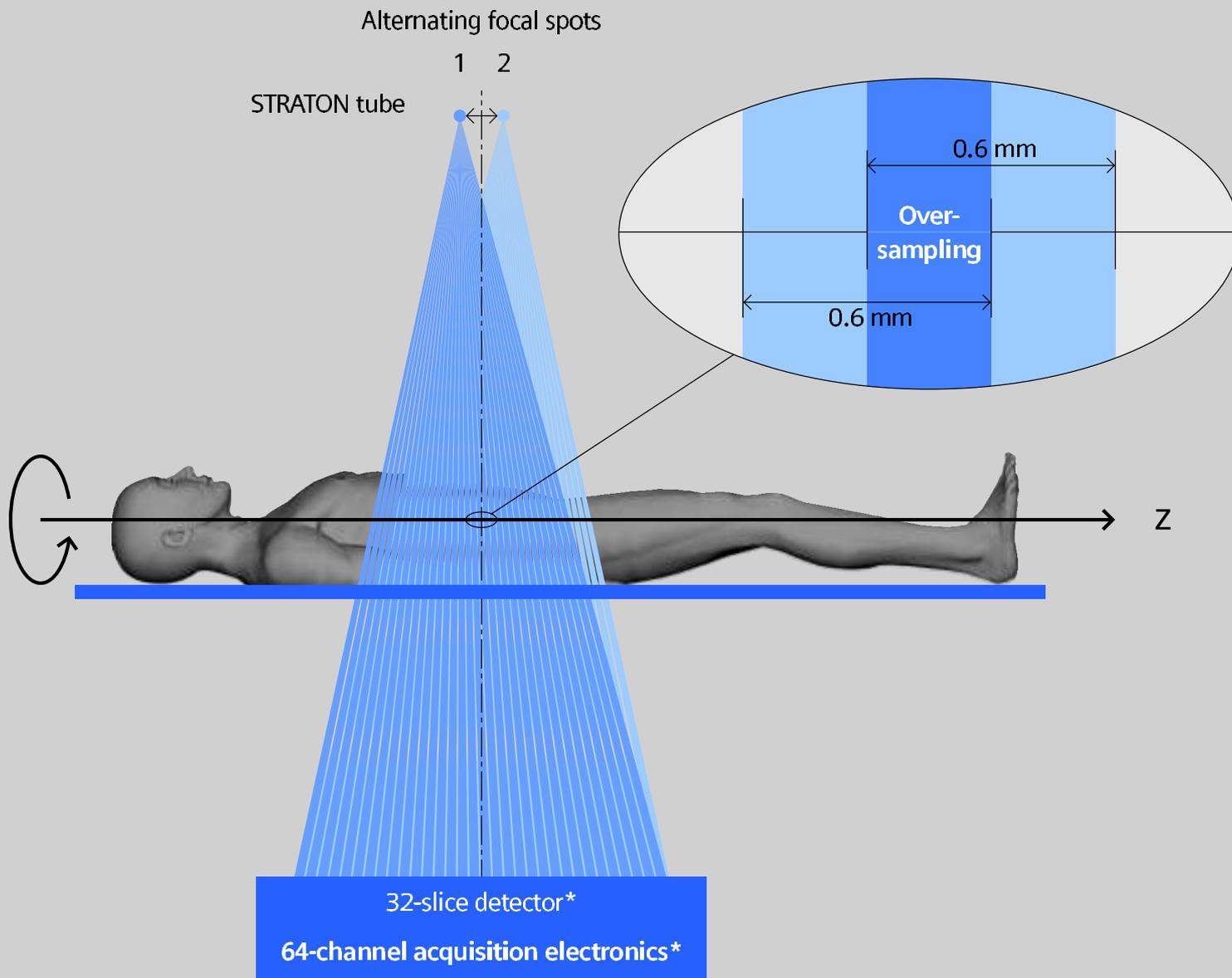


Fig. 4. Machine generations. (a) In first-generation CT scanners, the X-ray source and the detector were rigidly attached to each other by a gantry and moved in a translate-rotate motion. (b) Second-generation scanners continued the translate-rotate motion but added multiple detectors. (c) In third-generation machines the fan beam source and detector array moved together on a fixed circular path. (d) Fourth-generation machines provided a fixed circular detector array with a movable source.

Unique z-Sharp Technology



Um “ ε ” de história

Um “ ϵ ” de história

Nada disso existiria se ...

- *Ondas eletromagnéticas não tivessem sido previstas por James Clark Maxwell em 1862 e observadas experimentalmente por Heinrich Hertz em 1887;*
- *Os Raios-X não tivessem sido descobertos acidentalmente por W. K. Roentgen, em 1895. Por esta descoberta, ele ganhou o Prêmio Nobel em 1901;*

Um “ ϵ ” de história

Nada disso existiria se ...

- *As primeiras técnicas de reconstrução não tivessem sido desenvolvidas por Bracewell (1956), em rádio-astronomia;*
- *Essas técnicas não tivessem sido aplicadas na microscopia eletrônica, para a reconstrução da estrutura de moléculas.*

Um “ ϵ ” de história

*Uma etapa fundamental para o desenvolvimento dos processos de reconstrução de imagens foi atingida em 1963, a partir do trabalho de Allan Cormack, da Universidade de Tufts, quando desenvolveu **MODELOS MATEMÁTICOS** que permitiram obter imagens muito mais precisas.*

Um “ε” de história

Esses modelos foram utilizados no primeiro equipamento de tomografia por Raios-X, construído em 1972, por Hounsfield, nos laboratórios EMI, Inglaterra.

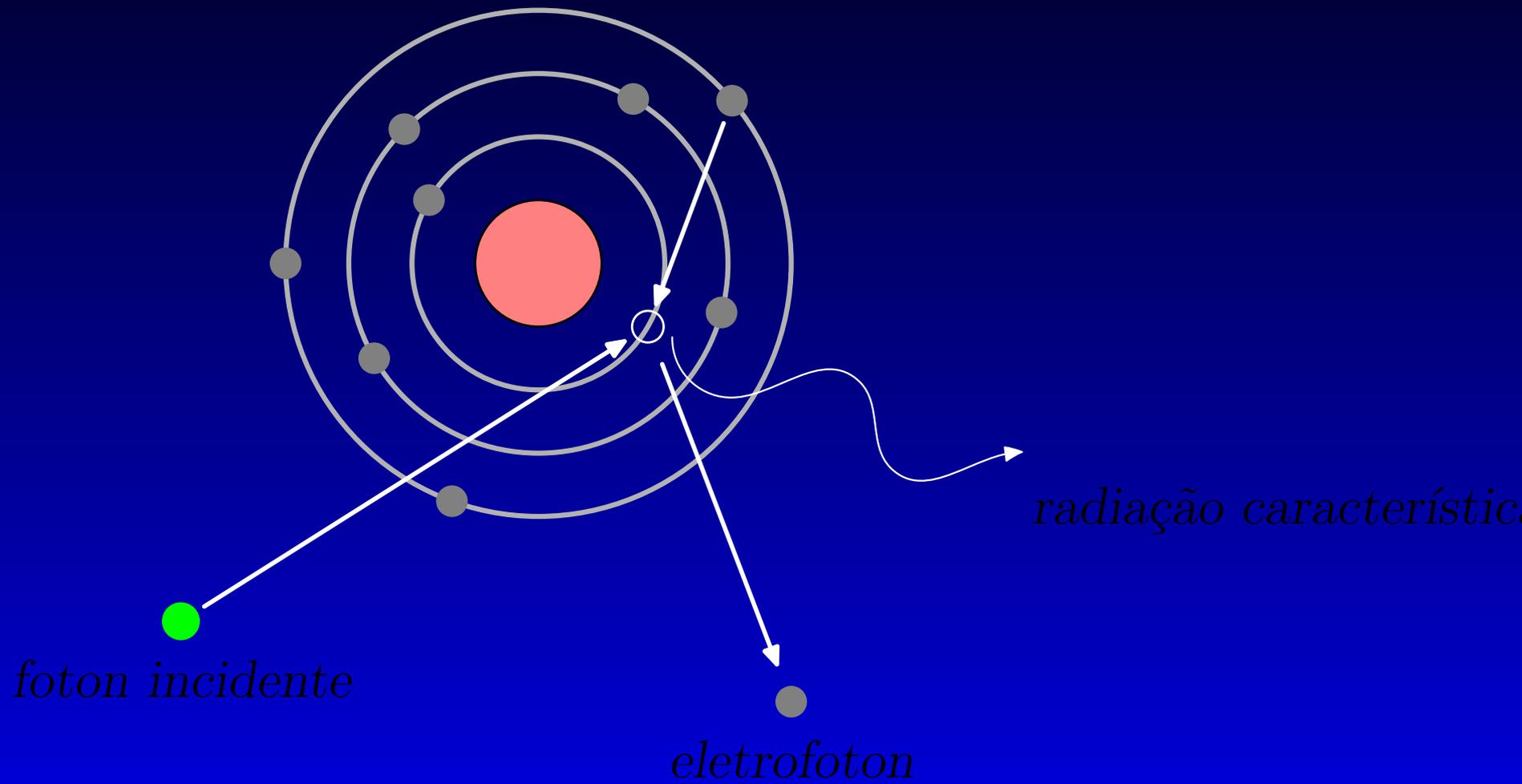
Por esses desenvolvimentos, Cormack e Hounsfield receberam o Prêmio Nobel de medicina em 1979.

Interação dos Raios-X com Matéria

Tipos de interação de Raios-X com a matéria

- *Efeito Fotoelétrico (raios-X de alta energia – CT);*
- *Espalhamento de Compton (raios-X de alta energia – CT);*
- *Produção de Pares (raios-X de altíssima energia – ECT);*
- *Foto-desintegração (raios-X de altíssima energia – ECT).*

Efeito fotoelétrico



Espalhamento de Compton

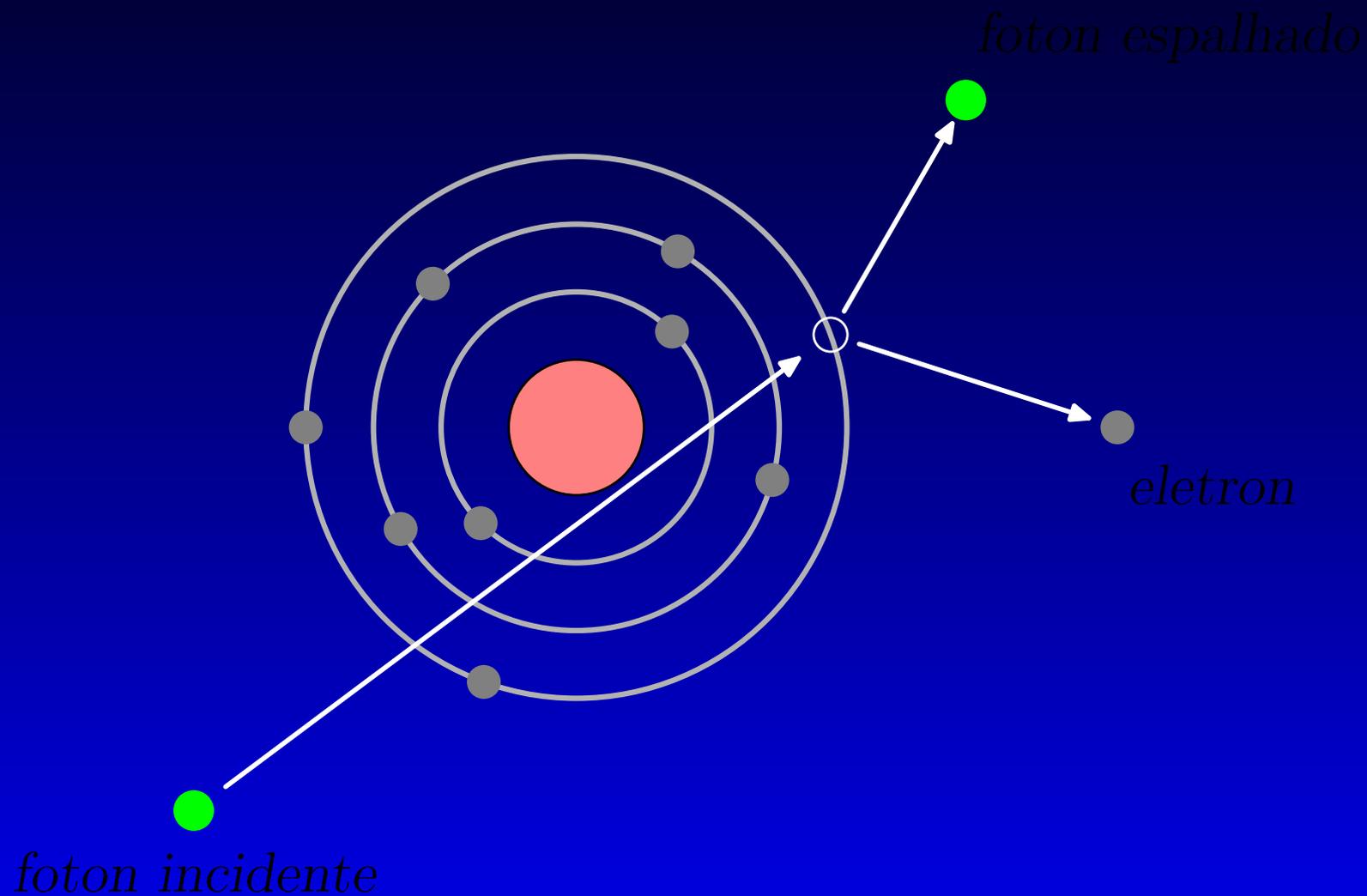
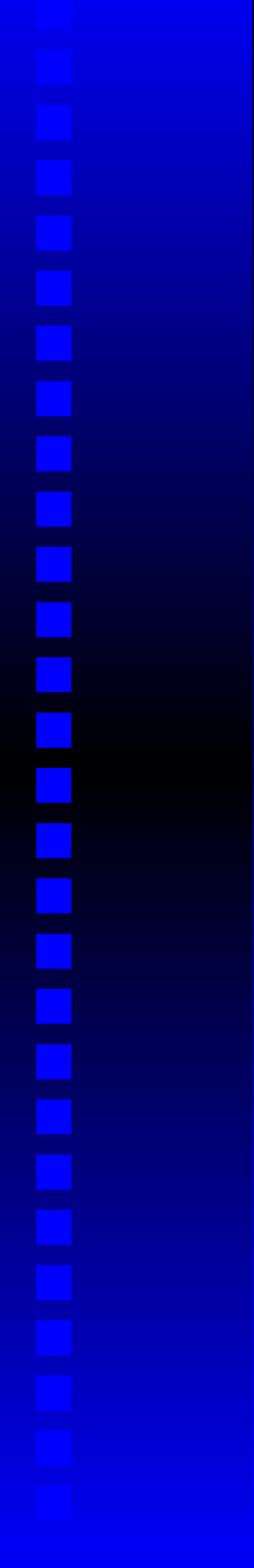


Table I
Electromagnetic wave spectrum

Energy (eV)	Frequency (Hz)		Wavelength (m)
4×10^{-11}	10^4	AM radio waves	10^4
4×10^{-10}	10^5		10^3
4×10^{-9}	10^6		10^2
4×10^{-8}	10^7		10^1
4×10^{-7}	10^8	Short radio waves FM radio waves and TV	10^0
4×10^{-6}	10^9		10^{-1}
4×10^{-5}	10^{10}	Microwaves and radar	10^{-2}
4×10^{-4}	10^{11}		10^{-3}
4×10^{-3}	10^{12}		10^{-4}
4×10^{-2}	10^{13}	Infrared light	10^{-5}
4×10^{-1}	10^{14}	Visible light	10^{-6}
4×10^0	10^{15}		Ultraviolet light
4×10^1	10^{16}	X-ray	10^{-8}
4×10^2	10^{17}		10^{-9}
4×10^3	10^{18}		10^{-10}
4×10^4	10^{19}		10^{-11}
4×10^5	10^{20}		10^{-12}
4×10^6	10^{21}		10^{-13}
4×10^7	10^{22}	Gamma ray	10^{-14}
		Cosmic ray	



Modelo Matemático para CT

O Modelo Matemático para CT

O fóton, considerado como partícula, pode ser caracterizado por:

- *sua localização $x = (x_1, x_2, x_3)$;*
- *sua direção de deslocamento $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$;*
- *a energia de seu movimento.*

O Modelo Matemático para CT

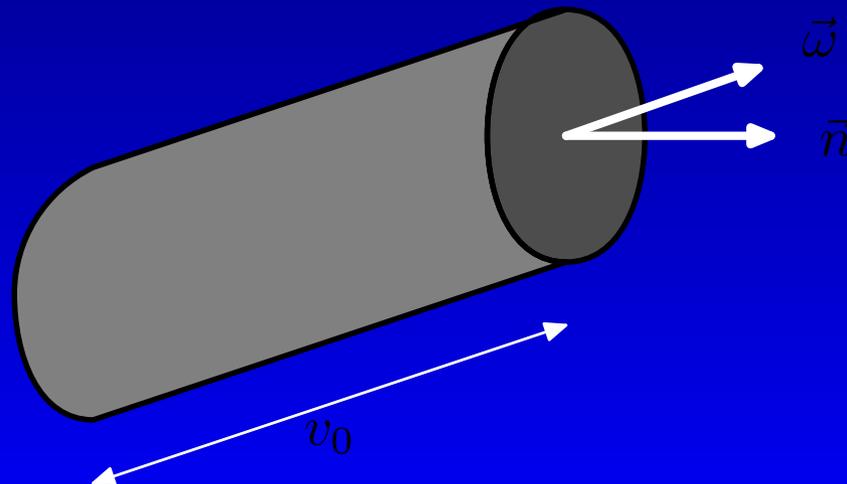
A função $\phi(t, \omega, x)$ denota a densidade de radiação em x , na direção ω e no instante t . A quantidade de fótons que se deslocam na direção ω e que no instante t se encontram em uma região $V \subset \mathbb{R}^3$ é dada por

$$\int_V \phi(t, \omega, x) dV.$$

O Modelo Matemático para CT

Para estabelecer a equação que descreve a dinâmica da radiação, precisamos introduzir o conceito de Densidade de Fluxo de Radiação:

$$J(t, \omega, x) = v_0 \varphi(t, \omega, x) \omega.$$



O Modelo Matemático para CT

- *Os fótons que NÃO estão interagindo com o corpo satisfazem a equação do transporte:*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \omega, x) + \omega \cdot \nabla_x \varphi(t, \omega, x) = 0$$

- *cuja solução explícita é:*

$$\varphi(t, \omega, x) = \varphi_0(x - t\omega).$$

Onda Livre



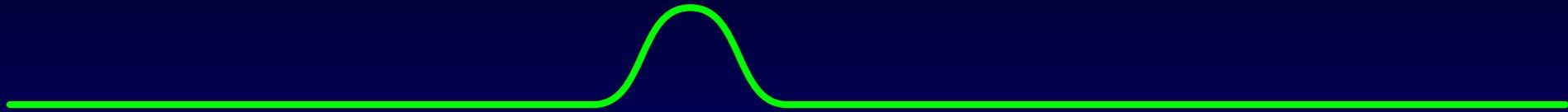
Onda Livre



Onda Livre



Onda Livre



Onda Livre



Onda Livre



Onda Livre



Onda Livre



O Modelo Matemático para CT

- *No caso da interação com o corpo, mas desconsiderando-se o espalhamento, temos a equação do transporte com termo de absorção:*

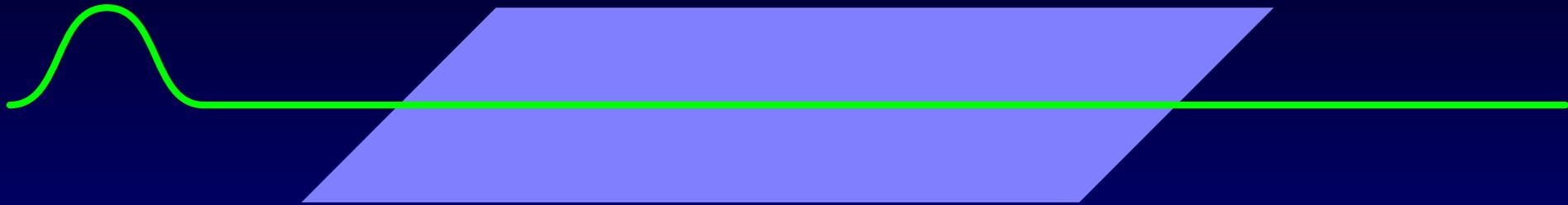
$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \omega, x) + \omega \cdot \nabla_x \varphi(t, \omega, x) + q(x) \varphi(t, \omega, x) = 0,$$

- *cuja solução explícita é:*

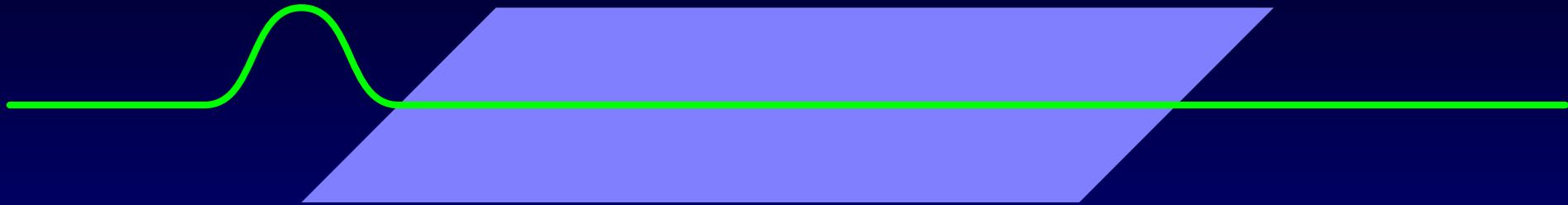
$$\varphi(t, \omega, x) = \varphi_0(x - t\omega) e^{-\int_0^t q(x - s\omega) ds}$$

- $q(x)$ é o “**coeficiente total de extinção**”.

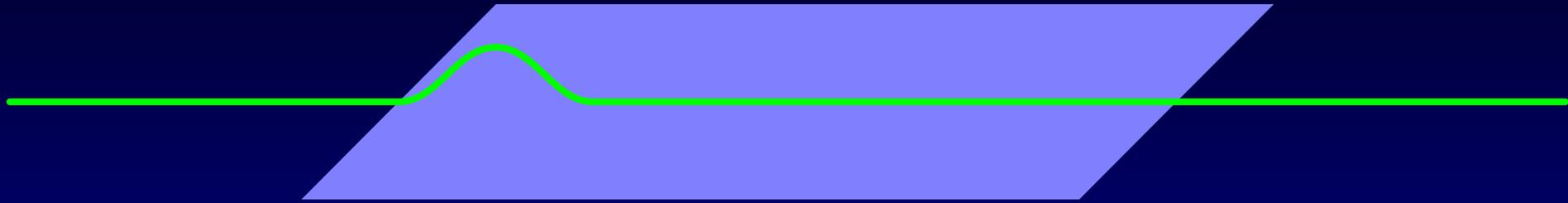
Onda Dissipada



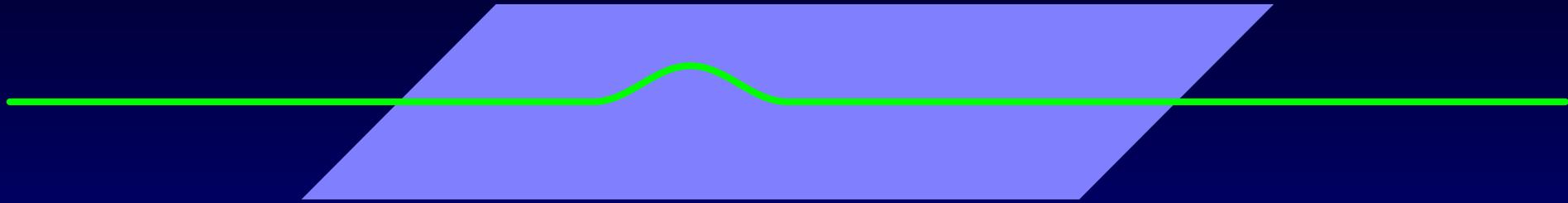
Onda Dissipada



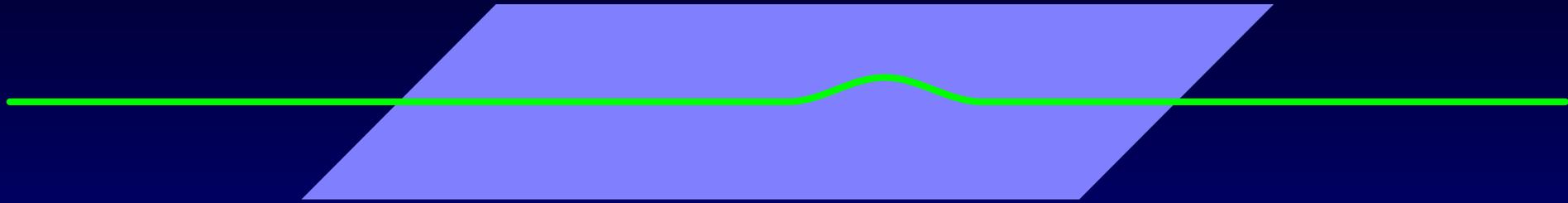
Onda Dissipada



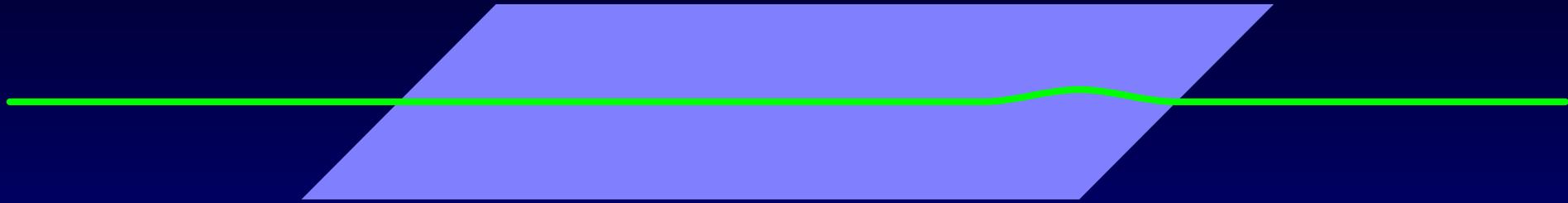
Onda Dissipada



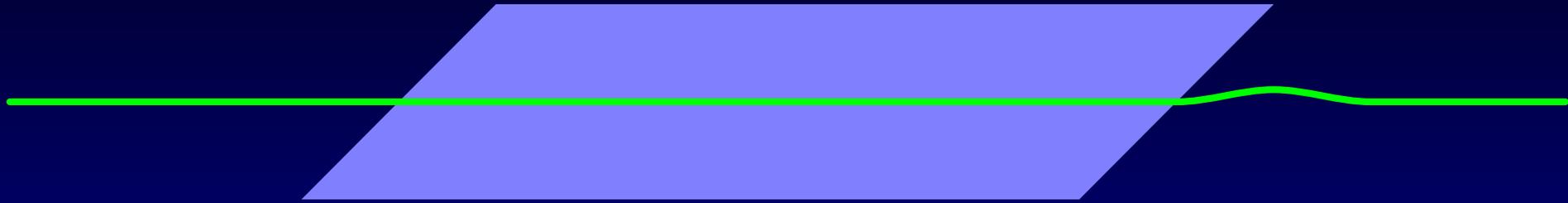
Onda Dissipada



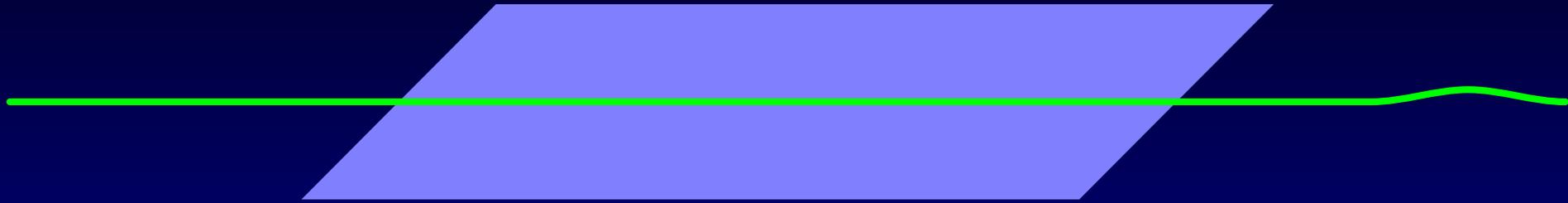
Onda Dissipada



Onda Dissipada



Onda Dissipada



O Modelo Matemático para CT

- *No caso da interação com o corpo considerando-se o espalhamento, temos a equação linear de Boltzmann:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, \omega, x) + \omega \cdot \nabla_x \varphi(t, \omega, x) + \tilde{q}(x) \varphi(t, \omega, x) \\ = \int_{\mathbb{S}} f(x, \omega, \omega') \varphi(t, \omega', x) d\omega' \end{aligned}$$

- onde $f(x, \omega', \omega)$ é o “**núcleo de colisão**”.

O Modelo Matemático para CT

- *No caso da interação com o corpo considerando-se o espalhamento, a solução tem a forma:*

$$\varphi(t, \omega, x) = \varphi_0(x - t\omega) e^{-\int_0^t \tilde{q}(x - s\omega) ds} + R(t, \omega, x)$$

- *Na prática, considera-se $R(t, \omega, x)$ como ruído.*

O Modelo Matemático para CT

- *Densidade de radiação emitida de x na direção ω :*

$$I_e(x) = \varphi_0(x)$$

- *Densidade de radiação detectada:*

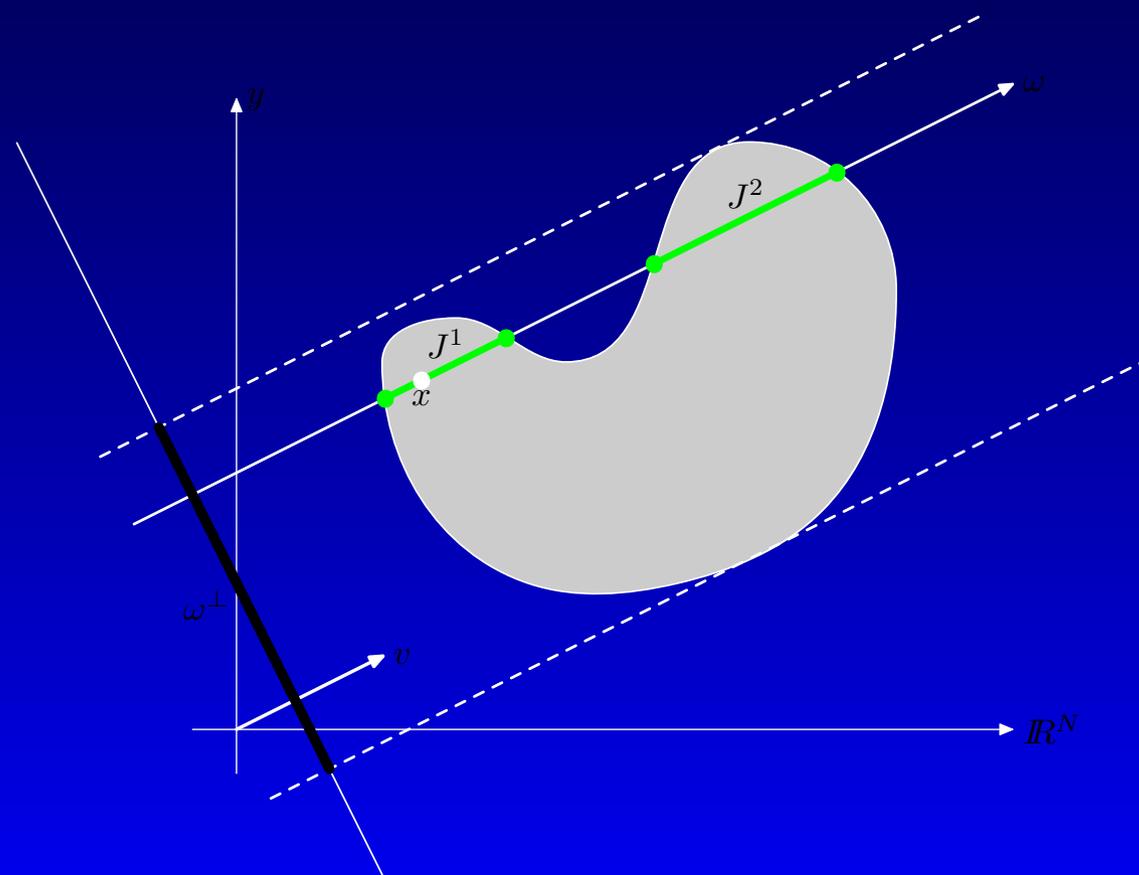
$$I_d(x) = \varphi_0(x) e^{-\int_{-\infty}^{\infty} q(x-s\omega) ds}$$

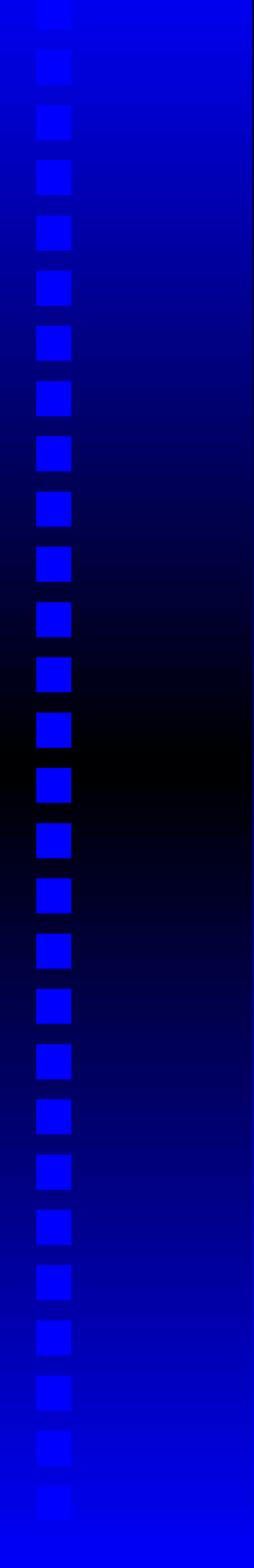
- *Valor calculado:*

$$\ln \frac{I_e(x)}{I_d(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} q(x - s\omega) ds$$

O Modelo Matemático para CT

O problema se reduz à questão de determinar $q(x)$ a partir do conhecimento de suas integrais de linha que passam pela região Ω





A Transformada Raios-X

A Transformada Raio-X

- **Problema:** É possível determinar uma função $q(x)$ com domínio em Ω a partir de suas integrais de linha?

$$P_{\omega}[q](x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{q}(x - s\omega) ds$$

- A solução deste problema foi obtida em 1917 pelo matemático austríaco J. Radon, nos seus estudos de reconstrução de imagens para as equações do campo gravitacional.

A Transformada Raio-X em \mathbb{R}^2

- *No caso bi-dimensional, $x = (x_1, x_2)$,
 $\omega = (\cos \theta, \sin \theta)$*

$$P_\theta[q](x) := \int_{-\infty}^{\infty} q(x_1 + t \cos \theta, x_2 + t \sin \theta) dt$$

- ***Problema:** É possível determinar $q(x)$ conhecendo-se a sua Transformada Raio-X, $P_\theta[q](x)$, para todo x e para todo θ ?*

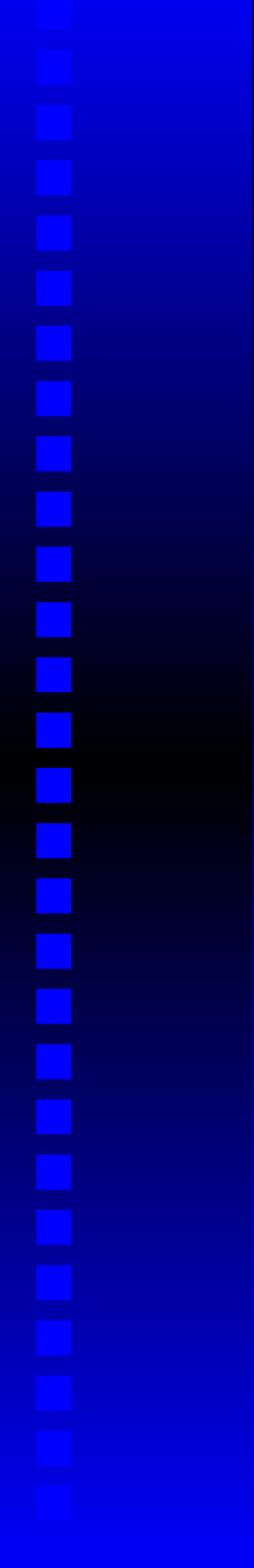
Funções radiais: exercício

- *No caso de funções radiais $q : B \rightarrow \mathbb{R}$*
- $B = \{(x_1, x_2) ; x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$.
- $q(x_1, x_2) = \rho(r) = \rho(\sqrt{x^2 + y^2})$
- *Neste caso*

$$g(r) = P_\theta[q](r) = 2 \int_0^{\sqrt{1-r^2}} \rho\left(\sqrt{r^2 + t^2}\right) dt$$

- *É fácil inverter a fórmula acima (exercício):*

$$\rho(r) = -\frac{1}{r\pi} \frac{d}{dr} \left[\int_r^1 \frac{sg(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds \right], \forall r \in (0, 1).$$



Problemas matemáticos

Problemas matemáticos

- *Densidade de radiação emitida de x na direção ω :*

$$I_e(x) = \varphi_0(x)$$

- *Densidade de radiação detectada:*

$$I_d(x) = \varphi_0(x) e^{-\int_{-\infty}^{\infty} q(x-s\omega) ds}$$

- *Valor calculado:*

$$\ln \frac{I_e(x)}{I_d(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} q(x - s\omega) ds$$

Problemas Matemáticos

Neste caso, o problema se reduz à questão de determinar $q(x)$ a partir do conhecimento de suas integrais de linha que passam pela região Ω , problema que foi resolvido por J. Radon em 1917.

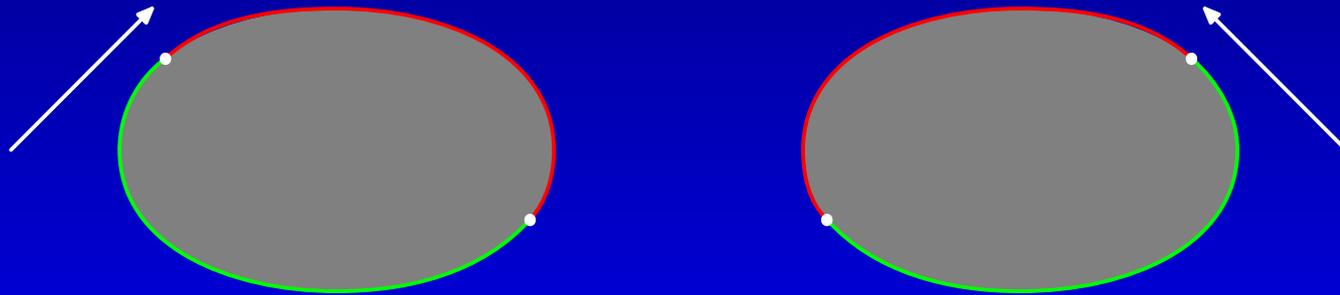
Problemas Matemáticos

Problema 1: É possível determinar o coeficiente $q(x)$ sem desconsiderar os espalhamento?

Problema 2: É possível determinar o coeficiente de espalhamento $f(x, \omega' \omega)$?

Problemas matemáticos

- $Q = S \times \Omega, \quad \Sigma = S \times \partial\Omega;$
- $\Sigma^- = \{(\omega, \sigma) \in \Sigma; \omega \cdot \nu(\sigma) < 0\}.$
- $\Sigma^+ = \{(\omega, \sigma) \in \Sigma; \omega \cdot \nu(\sigma) > 0\}.$



Problemas matemáticos

- $\frac{\partial u}{\partial t} + \omega \cdot \nabla_x u + qu = K_f[u]$
 $u(0, \omega, x) = 0$
 $u(t, \omega, \sigma) = \varphi(t, \omega, \sigma), \quad t \in (0, T), \quad (\omega, \sigma) \in \Sigma^-$

Problemas matemáticos

- $\frac{\partial u}{\partial t} + \omega \cdot \nabla_x u + qu = K_f[u]$
 $u(0, \omega, x) = 0$
 $u(t, \omega, \sigma) = \varphi(t, \omega, \sigma), t \in (0, T), (\omega, \sigma) \in \Sigma^-$
- *Mede-se* $u(t, \omega, \sigma)$ *sobre* $(\omega, \sigma) \in \Sigma^+$
O operador **Albedo** $\mathcal{A}_{q,f}[\varphi] = u|_{\Sigma^+}$
Considera-se a função $\mathcal{A} : (q, f) \mapsto \mathcal{A}_{q,f}$.

O Problema da Determinação de Parâmetros

- *Identificação: injetividade de A ;*

O Problema da Determinação de Parâmetros

- *Identificação: injetividade de A ;*
- *Caracterização: Descrição da imagem de A ;*

O Problema da Determinação de Parâmetros

- *Identificação*: injetividade de \mathcal{A} ;
- *Caracterização*: Descrição da imagem de \mathcal{A} ;
- *Estabilidade*: continuidade de \mathcal{A}^{-1} ;

O Problema da Determinação de Parâmetros

- *Identificação*: injetividade de \mathcal{A} ;
- *Caracterização*: Descrição da imagem de \mathcal{A} ;
- *Estabilidade*: continuidade de \mathcal{A}^{-1} ;
- *Reconstrução*: fórmula ou processo para determinar os coeficientes a partir de \mathcal{A} .

O Problema da Determinação de Parâmetros

- *O Problema de Identificação:*

$$\mathcal{A}_{q_1, f_1}[g] = \mathcal{A}_{q_2, f_2}[g] \quad \Rightarrow \quad q_1 = q_2, f_1 = f_2$$

Choulli-Stefanov, Comm. PDE (96);

O Problema da Determinação de Parâmetros

- *O Problema de Identificação:*

$$\mathcal{A}_{q_1, f_1}[g] = \mathcal{A}_{q_2, f_2}[g] \quad \Rightarrow \quad q_1 = q_2, f_1 = f_2$$

Choulli-Stefanov, Comm. PDE (96);

- *O Problema de Estabilidade:*

$$\|q_1 - q_2\| + \|f_1 - f_2\| \leq \Psi\left(\|\mathcal{A}_{q_1, f_1} - \mathcal{A}_{q_2, f_2}\|\right)$$

Mathias-Roberty-Eu, Rev. Mat. Complut. (2006);

O Problema da Determinação de Parâmetros

- *O Problema de Identificação:*

$$\mathcal{A}_{q_1, f_1}[g] = \mathcal{A}_{q_2, f_2}[g] \quad \Rightarrow \quad q_1 = q_2, f_1 = f_2$$

Choulli-Stefanov, Comm. PDE (96);

- *O Problema de Estabilidade:*

$$\|q_1 - q_2\| + \|f_1 - f_2\| \leq \Psi\left(\|\mathcal{A}_{q_1, f_1} - \mathcal{A}_{q_2, f_2}\|\right)$$

Mathias-Roberty-Eu, Rev. Mat. Complut. (2006);

- *Essas questões se referem a uma infinidade de medidas!!!*

Número finito de medidas

- *Problema 1: É possível determinar $q(x)$ a partir de um número finito de integrais de linha?*

Número finito de medidas

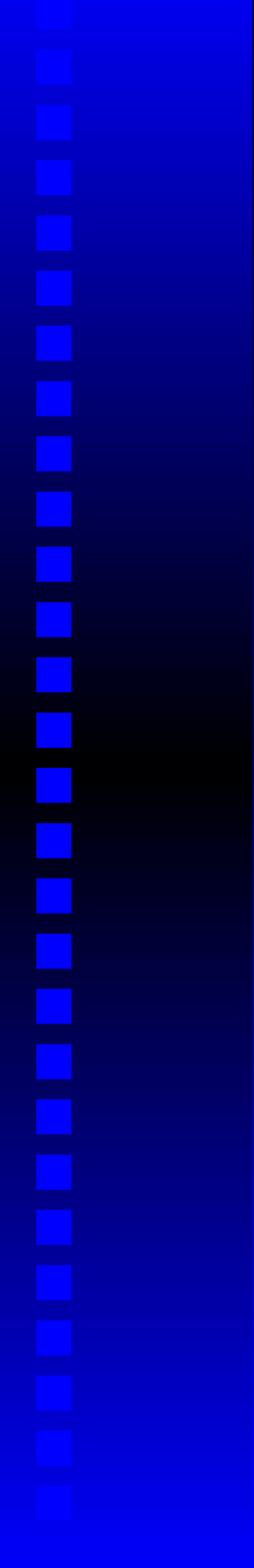
- *Problema 1: É possível determinar $q(x)$ a partir de um número finito de integrais de linha?*
- *Não!!! Dadas m direções $\omega_1, \dots, \omega_m$, é possível encontrar uma função $q(x)$ tal que $P_{\omega_j}[q] = 0$.*

Número finito de medidas

- **Problema 1:** *É possível determinar $q(x)$ a partir de um número finito de integrais de linha?*
- **Não!!!** *Dadas m direções $\omega_1, \dots, \omega_m$, é possível encontrar uma função $q(x)$ tal que $P_{\omega_j}[q] = 0$.*
- **Problema 2:** *É possível determinar $q(x)$ a partir de um número finito de integrais de linha, sabendo-se que q pertence a um espaço vetorial de dimensão finita?*

Número finito de medidas

- **Problema 1:** É possível determinar $q(x)$ a partir de um número finito de integrais de linha?
- **Não!!!** Dadas m direções $\omega_1, \dots, \omega_m$, é possível encontrar uma função $q(x)$ tal que $P_{\omega_j}[q] = 0$.
- **Problema 2:** É possível determinar $q(x)$ a partir de um número finito de integrais de linha, sabendo-se que q pertence a um espaço vetorial de dimensão finita?
- **SIM!!!** (Computational & Applied Mathematics, V. 25, 2006, 331-351.)



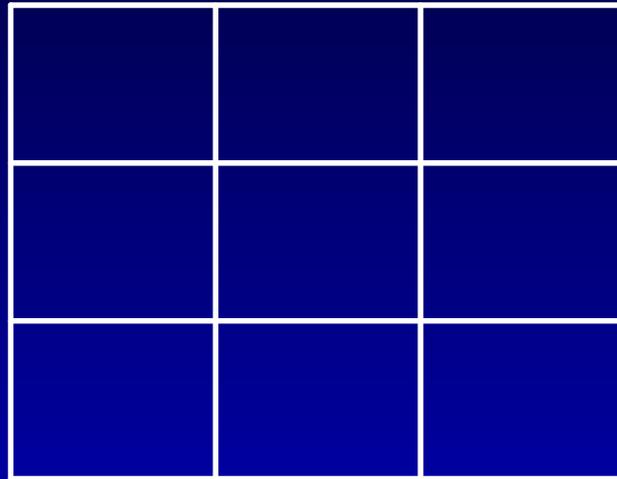
Problemas numéricos

Resolução numérica

- $\Omega = \bigcup_{j=1}^m Q_j, \quad \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n,$

Resolução numérica

- $\Omega = \bigcup_{j=1}^m Q_j, \quad \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n,$

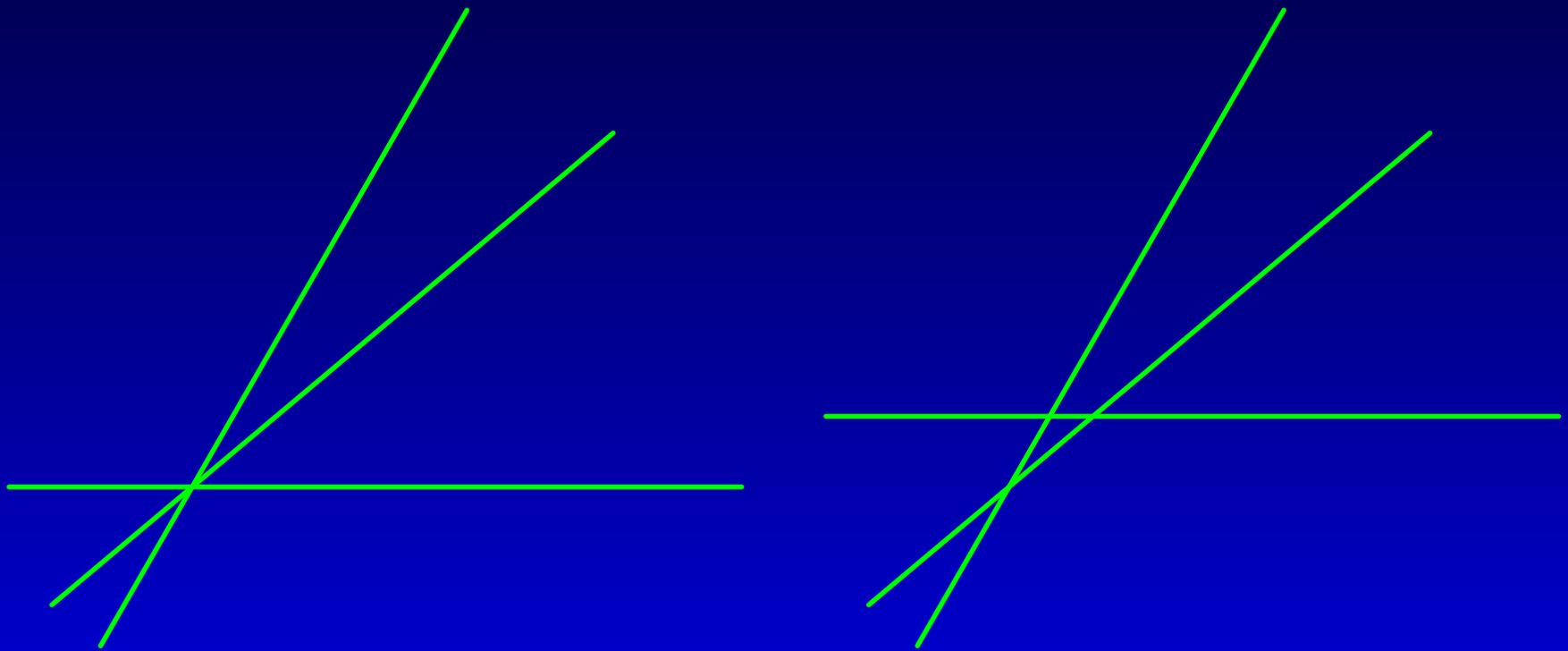


- $q(x) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \chi_{Q_j}(x),$
 $P_{\theta_i}[q](x) = \sum_{j=1}^m \alpha_j P_{\theta_i}[\chi_{Q_j}](x) = \sum_{j=1}^m a_{ij} \alpha_j$

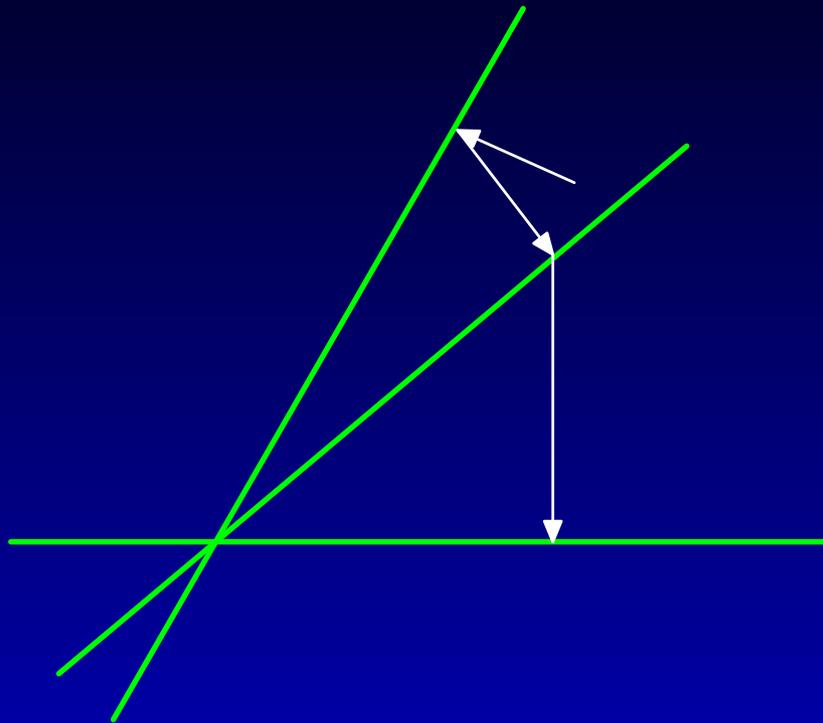
Resolução numérica

Tem-se n equações e m incógnitas;

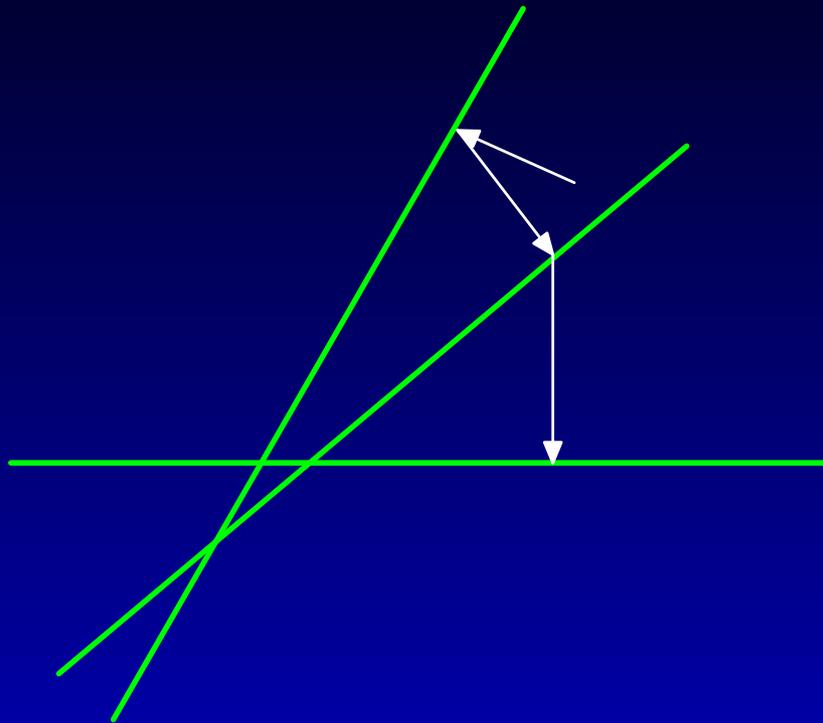
Em geral $n > m$ (sistema sobre-determinado);



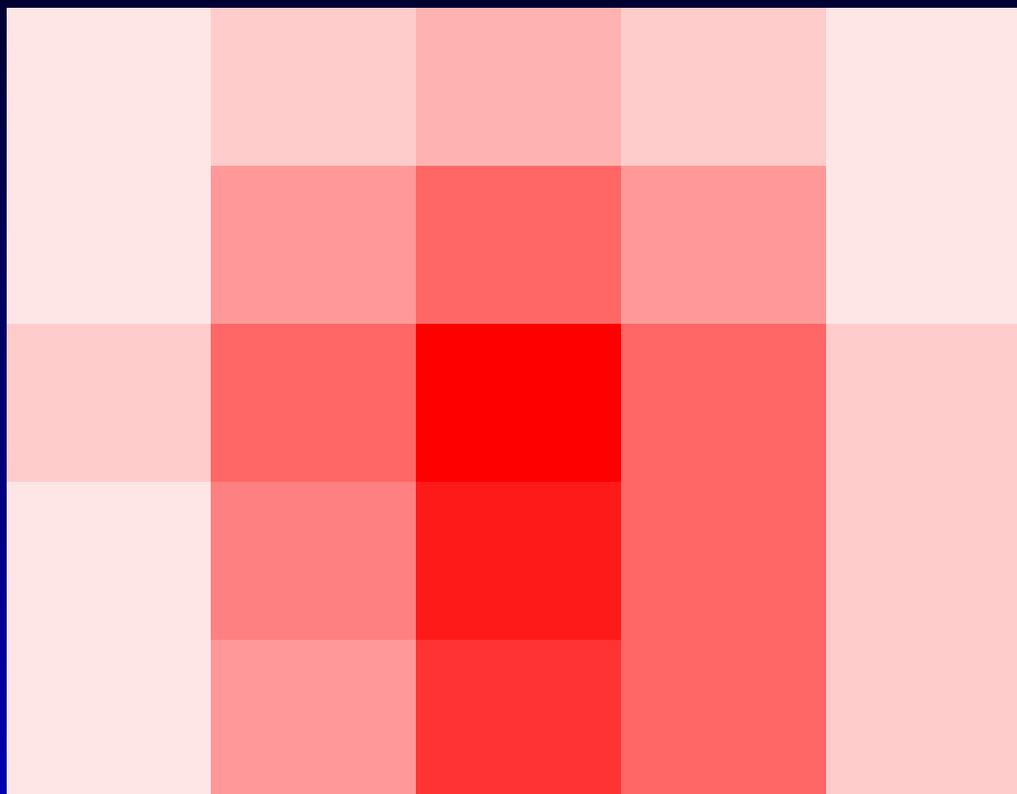
O método de Kaczmarz



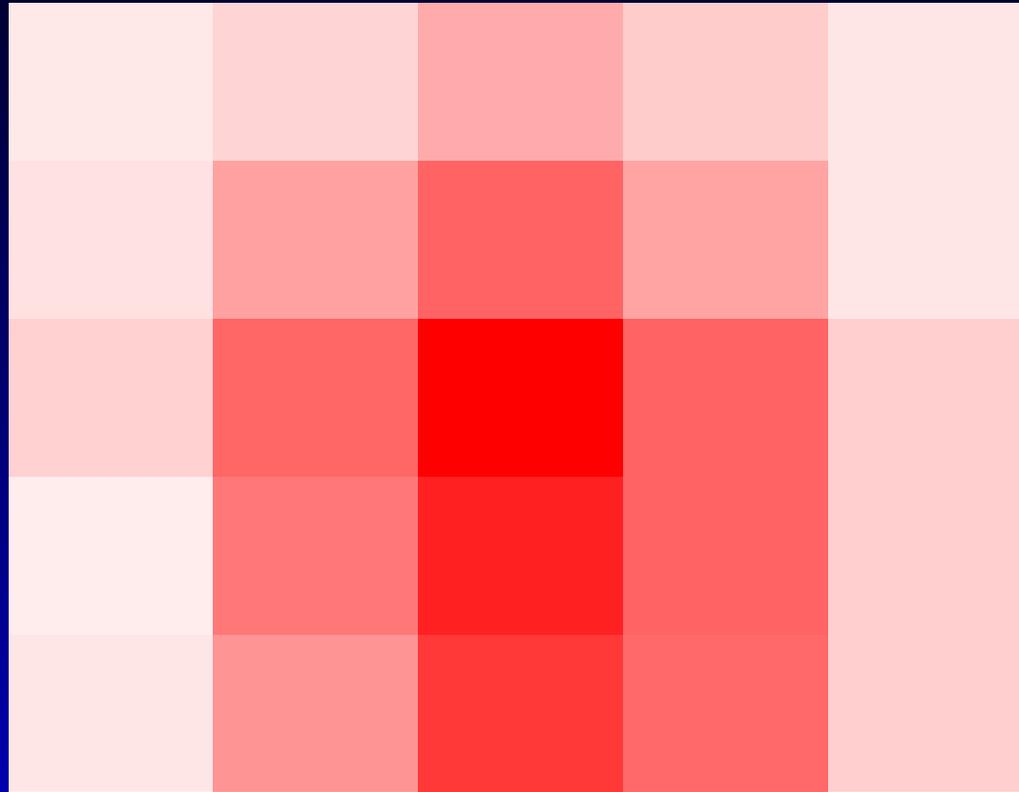
O método de Kaczmarz



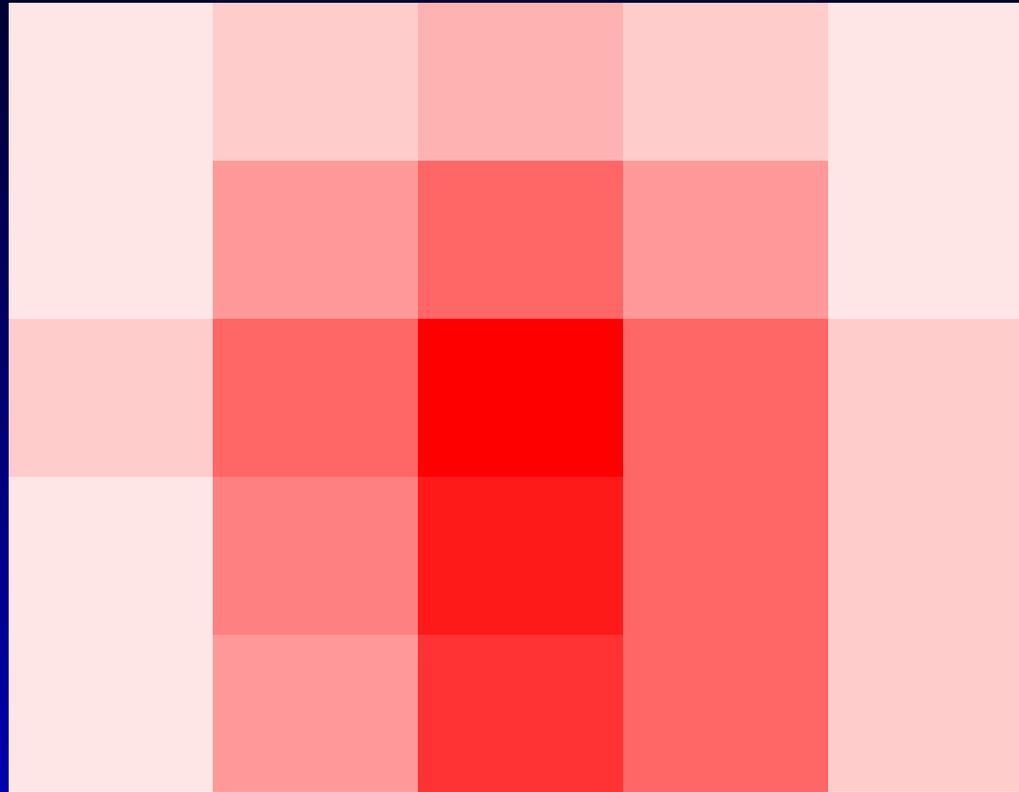
Exemplo: dados exatos



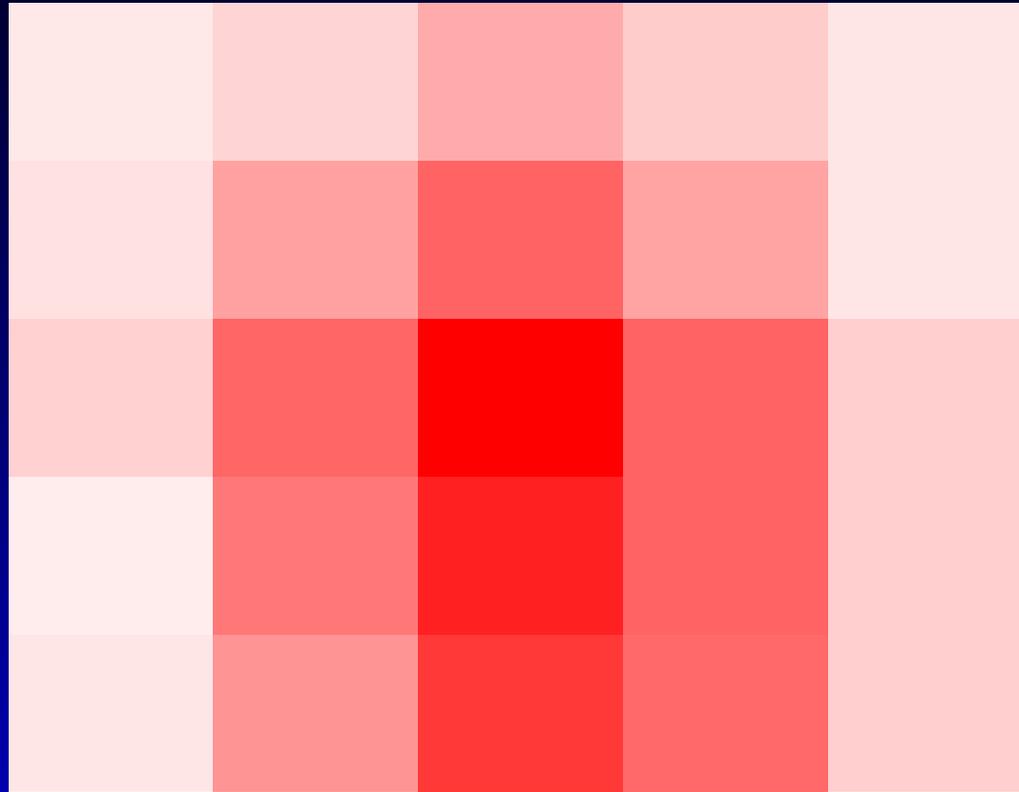
Exemplo: dados calculados



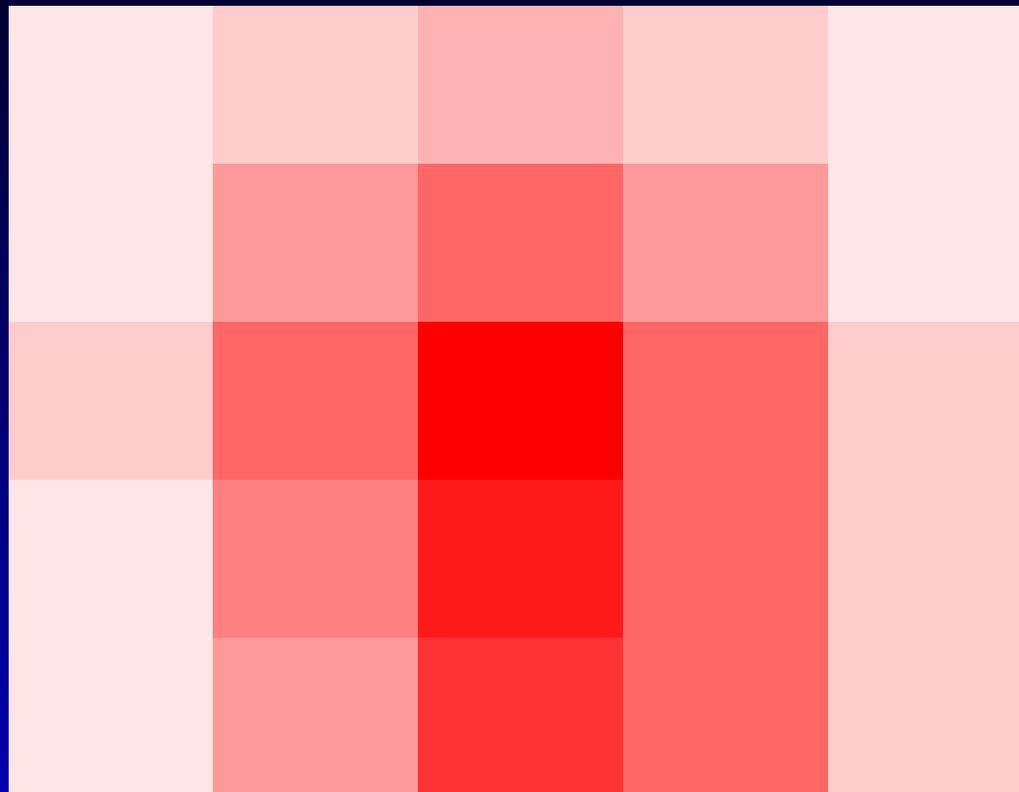
Exemplo: dados exatos



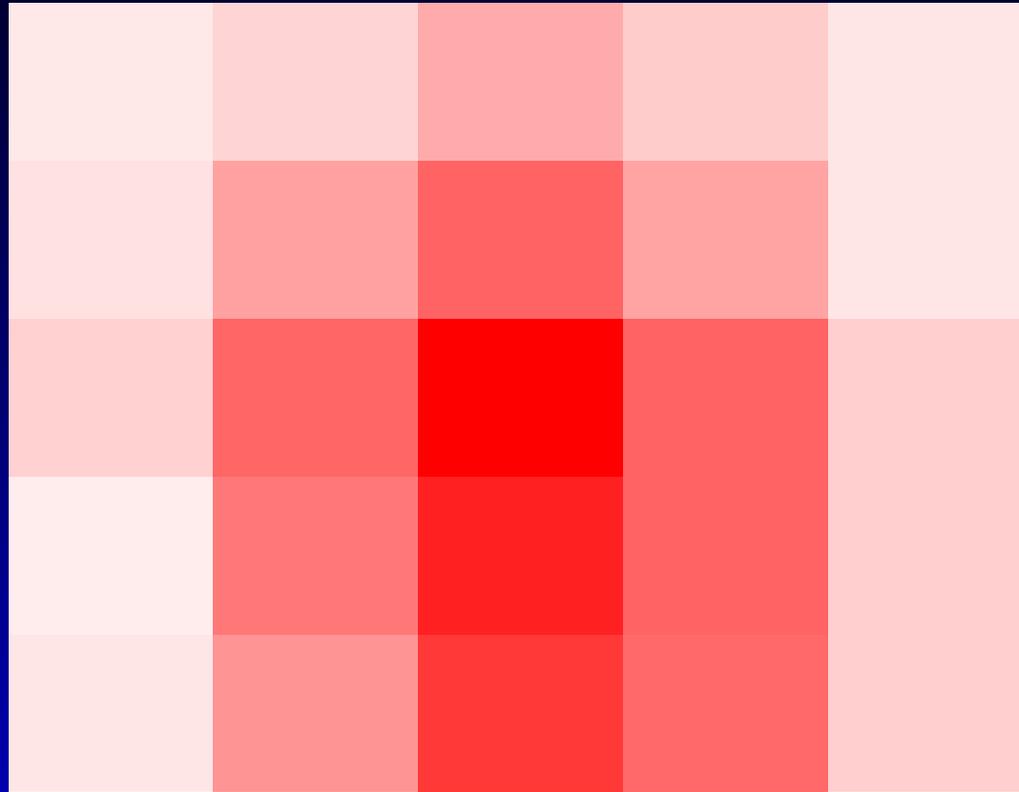
Exemplo: dados calculados



Exemplo: dados exatos



Exemplo: dados calculados



Referências

- *K.K. Shung, M.B Smith, B. Tsui: “Principles of Medical Imaging”, Academic Press, 1992.*
- *G.T. Herman: “Image Reconstruction form Projections”, Academic Press, 1980.*
- *R. Cipolatti, Ivo F. Lopez: “Determination of Coefficients for a dissipative wave equations via boundary measurements”, J. Mathematical Analysis and Appli., 2005.*
- *R. Cipolatti, C.M. Motta, N. Roberty: “Stability estimates for an inverse problem for the linear Boltzmann equation”, Rev. Compl. de Matem., 2006.*