

Estrelas Politrópicas Carregadas e Anisotrópicas

RODRIGO PIKANÇO NEGREIROS

Orientador:

MANUEL MALHEIRO

UFF

Niterói
2005

Estrelas Politrópicas Carregadas e Anisotrópicas

RODRIGO PICANÇO NEGREIROS †

Orientador:

MANUEL MALHEIRO

*Dissertação apresentada ao Instituto de Física
da Universidade Federal Fluminense como parte
dos requisitos para obtenção do título de mestre
em Física.*

Niterói

2005

†Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq.

Esta tese é dedicada a minha família que acima de tudo foi quem me trouxe até aqui.

Rodrigo Picanço Negreiros

Agradecimentos

Agradeço primeiramente ao meu orientador, que durante esses anos sempre me incentivou, me ajudou de todas as maneiras possíveis e abriu todas as portas para mim. Agradeço acima de tudo por ser o excelente professor que é.

Agradeço em especial aos meus amigos, por estarem sempre do meu lado mesmo quando eu não estava do lado deles. Obrigado pela paciência e pelo incentivo.

Agradeço aos colegas do Instituto de Física, aos professores e funcionários por toda a ajuda prestada nesses longos anos.

Agradeço ao CNPq que desde a graduação vem dando suporte a esta pesquisa.

Resumo

Neste trabalho vamos tratar de estrelas politrópicas relativísticas e carregadas. Iremos fazer um estudo detalhado de estrelas politrópicas começando a analisar tanto o caso newtoniano quanto o relativístico. Depois aplicaremos os conhecimentos adquiridos com esse estudo para estrelas politrópicas relativísticas carregadas, com o objetivo de ver os efeitos que uma distribuição de carga produz na estrutura da estrela. Iremos mostrar como a estrutura da estrela se altera devido à presença do campo elétrico. Veremos que a presença do campo elétrico quebra a isotropia da estrela fazendo com que a componente radial do tensor energia-momento seja diferente das angulares. Apresentaremos em seguida um estudo de estrelas anisotrópicas, rededuzindo toda a estrutura deste tipo de estrela e mostraremos que as estrelas carregadas são um tipo particular de estrelas anisotrópicas. Utilizando o formalismo anisotrópico mostraremos que os resultados são diferentes quando comparados com a solução conhecida para estrelas carregadas. Será demonstrado que essa diferença tem origem no fato de a condição de contorno do formalismo anisotrópico não estar correta, dando origem a uma situação física inconsistente.

Abstract

In this work we will study relativistic charged stars. We will make a detailed study of polytropic stars, starting with the analysis of the Newtonian and relativistic cases. Then we will use this knowledge to study charged polytropic stars, where we will see what effects a charge distribution may cause in the structure of the star. We will show how the structure of the star is changed by the electric field. We will also see that the electric field breaks the isotropy of the star making the radial component of the energy-momentum tensor different from the angular ones. Then we will make a study of anisotropic stars, rederive the structure of these types of stars, and show that charged stars are a particular case of anisotropic stars. Using the anisotropic formalism we will see that the results are different in comparison with the known charged star solution. It will be shown that this difference occurs because the boundary condition of the anisotropic formalism is not correct, leading us to an inconsistent physical situation.

Sumário

1	Introdução	5
2	Estrelas Politrópicas	8
2.1	Introdução	8
2.2	Estrelas Politrópicas Newtonianas	9
2.2.1	A Estrutura de uma estrela Newtoniana	9
2.2.2	O método de Lane-Emden	10
2.3	Estrelas Politrópicas Relativísticas	11
2.3.1	Equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff	11
2.3.2	A equação de <i>Lane-Emden</i> para uma estrela relativística	13
3	Estrelas Politrópicas Carregadas	17
3.1	Introdução	17
3.2	Estrutura de uma estrela relativística carregada	18
3.3	Resultados.	21
3.3.1	Diagramas Massa-Raio e Massa-Densidade Central	22
3.3.2	O limite máximo de carga	24
3.3.3	A massa da estrela	26
3.4	A Equação de Lane-Emden para uma estrela relativística carregada	27
4	A anisotropia das estrelas carregadas	32
4.1	Introdução	32
4.2	A estrutura de uma estrela anisotrópica	33
4.3	Estrelas carregadas e anisotropia	35
4.4	As soluções da estrela anisotrópica	36
4.5	A diferença entre o caso anisotrópico e a solução usual	38
5	Conclusão	45
	Bibliografia	48
	Apêndice	50
A	Os Símbolos de Christoffel de 2ª Espécie	50
B	A Equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff	52

C	Sobre as unidades	54
C.1	A Carga elétrica	54
C.2	O Campo Elétrico	55
C.3	A constante f	55

Lista de Figuras

3.1	Massa x densidade central para os cinco valores de f estudados.	23
3.2	Massa-Raio para os cinco valores de f estudados.	24
3.3	Relação Carga-Raio para os diversos valores de f estudados.	25
3.4	Relação Massa-Raio para os diversos valores de f	26
3.5	Gradientes de pressão total, elétrica e gravitacional para $f = 0.0008$	27
3.6	Gradientes de pressão total, elétrica e gravitacional para $f = 0.001$	28
3.7	Diferença entre as massas na superfície e no infinito para $f = 0.0001$	29
3.8	Diferença entre as massas na superfície e no infinito para $f = 0.001$	30
4.1	Massa x Densidade central para o caso anisotrópico.	37
4.2	Massa x Raio para o caso anisotrópico.	38
4.3	Carga x Massa para o caso anisotrópico.	39
4.4	Carga x Raio para o caso anisotrópico.	40
4.5	Comparação entre massas da solução usual para a anisotrópica, para $f = 0.001$	41
4.6	igualdade entre massas da solução usual e da anisotrópica com a nova condição de contorno, para $f = 0.001$	42
4.7	Perfil p e p_r em função de ϵ , para $f = 0.0001$	43
4.8	Perfil p e p_r em função de ϵ , para $f = 0.001$	44

Lista de Tabelas

3.1	Massa, raio, densidade central e valores de carga para as estrelas de massa máxima para vários valores de f	23
4.1	Estrelas com as mesmas densidades centrais das estrelas de massa máxima do capítulo 3.	37

Capítulo 1

Introdução

O objetivo deste trabalho é fazer um estudo detalhado sobre a estrutura de uma estrela politrópica relativística carregada. Vamos também discutir a estrutura de uma estrela anisotrópica, pois, como veremos, uma estrela carregada pode ser considerada uma estrela anisotrópica. Iremos considerar em nossos estudos que as estrelas aqui apresentadas irão obedecer a uma equação de estado politrópica. Essa escolha deve-se à versatilidade apresentada por esse tipo de equação de estado para representar diversos sistemas físicos, como veremos no capítulo 2.

Nosso estudo irá começar com estrelas politrópicas newtonianas e relativísticas onde detalharemos a estrutura desses objetos. Veremos que o caso relativístico introduz uma érie de características novas na estrutura da estrela. Além disso veremos que é possível para uma estrela politrópica, tanto newtoniana quanto relativística, reduzir suas equações estruturais a uma equação diferencial de 2ª ordem dependendo apenas da densidade como função do raio escrita como variáveis adimensionais e do índice politrópico. Esse estudo foi feito originalmente por Lane-Emden [1] para as estrelas newtonianas e depois generalizado para o caso relativístico [2]. Isso mostrar-se-á bastante útil para o estudo desses objetos, uma vez que precisamos apenas definir o índice politrópico para resolver o problema, encontrando assim a solução para toda uma família de estrelas.

Após estudarmos as estrelas politrópicas newtonianas e relativísticas iremos analisar o caso das estrelas relativísticas carregadas. Essas estrelas foram propostas inicialmente por Bekenstein [3] e depois estudadas por vários outros autores [4]-[9]. Nosso objetivo com este estudo é ver que tipo de influência uma distribuição de carga pode ter na estrutura de uma estrela relativística. Em geral é aceito que as estrelas são neutras, ou pelo menos quase neutras [10], contendo uma quantidade de carga muito pequena para afetar a estrutura da estrela. Essa estimativa pode ser feita facilmente, se considerarmos uma estrela esférica de massa M e carga Q . Consideremos uma

partícula de carga e e de massa m a uma distância r do centro da estrela. Supondo que esta carga está ligada à estrela então a energia eletrostática da partícula KeQ/r é balanceada pela energia gravitacional GmM/r . Para um próton encontraríamos uma razão de $\sim 100C$ por massa solar. Esse valor é aceito em geral na literatura, mas essa estimativa é feita para uma estrela newtoniana, e pode ser modificada em sistema de grande densidade onde a Relatividade Geral não pode ser desprezada. Outro problema que encontramos também com estrelas carregadas é que para a carga ter algum efeito na estrutura devemos ter que o quadrado do campo elétrico seja da ordem da pressão nos dando um campo elétrico $E \sim 10^{22}V/m$ para estrelas de nêutrons [11], [12]. Este valor é muito alto e está acima do limite de Schwinger para a criação de pares, que é de $10^{18}V/m$ [3]. Contudo, como estamos lidando com estrelas muito densas, o limite de Schwinger pode ter outro valor dentro de meios densos. Ainda assim, essas estrelas aqui estudadas podem ser consideradas como estados instáveis decaindo em seguida para buracos negros carregados, o que torna seu estudo interessante.

Deduziremos no capítulo 3 toda a estrutura de objetos carregados e veremos que comparada com o caso relativístico neutro, ela é mais complexa. Nosso sistema ganha mais graus de liberdade, a métrica além da massa passa a depender da carga e o campo elétrico depende da métrica. Assim, agora temos quatro equações diferenciais acopladas para resolver. Conseguimos reproduzir os resultados obtidos recentemente, [12] de maneira que verificamos a funcionalidade do programa que foi feito para resolver essas equações. Utilizamos um *Ansatz* que supõe que a distribuição de carga é proporcional à densidade de matéria-energia, de maneira que quanto mais matéria-energia a estrela possuir maior será sua carga. Mostraremos que essa estrela possui um limite máximo de carga que a estrutura consegue manter e após esse limite não haverá mais estrelas [11]. Também será mostrada uma característica bem peculiar desse tipo de configuração, a massa vista por um observador na superfície da estrela será diferente da massa vista por outro observador no infinito. Mostraremos que isso ocorre porque como a estrela tem um campo elétrico que não acaba na superfície, há uma contribuição da energia eletromagnética desde a superfície da estrela até o infinito. Neste capítulo deduziremos uma generalização para a equação de Lane-Emden no caso relativístico carregado. Como veremos, nosso problema tem um número maior de graus de liberdade, logo deveremos utilizar mais hipóteses para obtermos essa equação. Mesmo com mais vínculos que no caso neutro, conseguimos obter a generalização desejada [13].

Depois de analisar as estrelas carregadas iremos estudar as estrelas anisotrópicas. Essas estrelas, estudadas recentemente na literatura [14] têm como característica principal o fato de que a componente radial do tensor energia-momento é diferente das componentes angulares. Rededuziremos as equações de estrutura para um objeto estelar anisotrópico genérico e depois mostraremos que uma estrela carregada é um caso

particular desses objetos. Veremos que a partir das equações obtidas utilizando o formalismo anisotrópico conseguimos obter as equações das estrelas carregadas, apenas por uma troca de variáveis. Resolveremos novamente o problema, sendo que desta vez utilizaremos o formalismo anisotrópico e as condições de contorno propostas na literatura [14]. Os resultados que serão apresentados mostram estrelas bem diferentes do caso carregado usual [15]. Depois de fazer um estudo detalhado mostraremos que isto ocorre porque a condição de contorno proposta na literatura para o caso anisotrópica não parece estar correta. Chegaremos a esta conclusão propondo uma condição de contorno apropriada e conseguindo reproduzir com exatidão o caso carregado usual. Aqui está nossa principal contribuição com este trabalho ao mostrar que a condição de contorno proposta na literatura para definir a superfície de uma estrela anisotrópica tem de ser modificada.

Esta tese será apresentada na seguinte forma. No capítulo 2 faremos um estudo de estrelas politrópicas newtonianas e relativísticas e também da equação de Lane-Emden para os dois casos. No capítulo 3 iremos estudar as estrelas relativísticas carregadas, apresentando sua estrutura e os resultados obtidos na solução da mesma. Em seguida no capítulo 4 apresentaremos a estrutura de uma estrela anisotrópica e mostraremos que uma estrela carregada é um caso particular de estrela anisotrópica. Resolveremos o problema utilizando o formalismo anisotrópico e compararemos com os resultados do capítulo 3. No capítulo 5 apresentamos as conclusões a respeito dessa dissertação.

Capítulo 2

Estrelas Politrópicas

2.1 Introdução

Estrelas politrópicas têm sido bastante estudados na astrofísica [1]. Como veremos neste capítulo, as equações diferenciais de 1ª ordem da estrutura da estrela podem ser reescritas como uma equação diferencial de 2ª ordem dependendo apenas da densidade. Uma estrela é dita politrópica quando ela é descrita por uma equação de estado da seguinte forma:

$$p = K\rho^{1+1/n}, \quad (2.1)$$

onde K e n são constantes. Esta última é conhecida como *índice politrópico*. Não podemos esquecer que de maneira geral a pressão em uma estrela contém contribuições da pressão do gás (p_g) e da pressão de radiação (p_r), assim a pressão também depende da temperatura além da densidade. Essa dependência está oculta dentro da constante K .

A equação de estado politrópica é bastante versátil, a partir dela podemos obter a descrição de vários sistemas físicos de interesse, bastando apenas para isso mudar o valor de n . Apresentamos em seguida alguns exemplos de índices politrópicos:

- $n = 3/2 \rightarrow$ Politropo adiabático, também aplica-se a um gás degenerado não relativístico.
- $n = 3 \rightarrow p_r \gg p_g$ (Modelo Padrão), aplica-se também ao caso degenerado relativístico
- $n = -1 \rightarrow$ Politropo de pressão constante.
- $n = 0 \rightarrow$ Politropo de densidade constante.

- $n \rightarrow \infty \rightarrow$ Politropo de temperatura constante.

2.2 Estrelas Politrópicas Newtonianas

Nesta seção iremos discutir o tratamento de estrelas politrópicas newtonianas. Primeiro vamos definir as equações estruturais de uma estrela, para depois introduzir um método que facilitará bastante o estudo destes objetos estelares. Esse método foi introduzido inicialmente por *Lane-Emden*, tendo sido depois generalizado para o caso relativístico, que iremos discutir na próxima seção.

2.2.1 A Estrutura de uma estrela Newtoniana

Considerando a estrela constituída por um fluido isotrópico, podemos escrever a equação de continuidade da massa como

$$\begin{aligned} dm(r) &= 4\pi r^2 \rho(r) dr, \\ \frac{dm(r)}{dr} &= 4\pi r^2 \rho(r). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Das Leis de Newton aplicadas à hidrostática podemos encontrar que o gradiente de pressão em um elemento do fluido é igual à densidade de força no mesmo

$$\nabla p = -\rho \nabla \phi, \quad (2.3)$$

onde ϕ é o potencial gravitacional. Dessa maneira, devido à simetria esférica,

$$\frac{dp(r)}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}. \quad (2.4)$$

Esta última equação é a equação de equilíbrio hidrostático para uma estrela Newtoniana. Podemos juntar essas duas equações em uma, isolando $m(r)$ em (2.4) e substituímos em (2.2), obtendo

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho(r)} \frac{dp}{dr} \right) = -4\pi G r^2 \rho(r). \quad (2.5)$$

Esta é a equação que deve ser resolvida para uma dada distribuição de massa e para as condições de contorno que são:

$$\rho(0) = \rho_c, \quad \rho(R) = 0$$

onde ρ_c é a densidade no centro da estrela e R o raio da estrela.

2.2.2 O método de Lane-Emden

Aqui introduziremos o método utilizado originalmente por *Lane-Emden* para estrelas politrópicas newtonianas [1]. Tal método permite encontrar uma equação diferencial de 2ª ordem que depende apenas da densidade $\rho(r)$ e de sua derivada. Isto é possível para uma estrela politrópica, pois a pressão é uma função apenas da densidade e, portanto, a derivada radial da pressão na Eq.(2.5) pode ser escrita como uma derivada da densidade. Deste modo esta equação pode ser escrita em função apenas de $\rho(r)$ e suas derivadas. Escrevendo o raio e a densidade em função de variáveis adimensionais, e após alguma manipulação algébrica, conseguimos chegar a uma equação diferencial de 2ª ordem, conhecida como *equação de Lane-Emden*. Esta equação é bastante geral, e sua solução depende apenas do índice politrópico, o que é bem útil, pois assim encontramos a solução para toda uma família de estrelas de mesmo índice politrópico.

A partir da equação de estado politrópica (2.1) podemos encontrar, derivando em r ,

$$\frac{dp}{dr} = \frac{(n+1)}{n} K \rho^{1/n} \frac{d\rho}{dr}, \quad (2.6)$$

substituindo em (2.5), encontramos:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \rho^{(1/n)-1} \frac{d\rho}{dr} \right) = -\frac{n}{n+1} \frac{4\pi G r^2 \rho(r)}{K}. \quad (2.7)$$

Aqui, introduziremos duas variáveis adimensionais x e y para substituir r e ρ :

$$r = ax, \quad (2.8)$$

$$\rho = by^n. \quad (2.9)$$

Como queremos que as variáveis x e y sejam adimensionais, as constantes a e b tem de ter dimensão de comprimento e densidade, respectivamente. Convenientemente definimos b da seguinte maneira:

$$\rho = \rho_c y^n, \quad (2.10)$$

onde ρ_c é a densidade central. Utilizando as mudanças de variáveis definidas acima em (2.7), obtemos

$$\frac{1}{x^2} \frac{d}{dx} \left(x^2 \frac{dy}{dx} \right) = -\frac{4\pi G}{K} \frac{\rho_c^{\frac{n-1}{n}}}{n+1} a^2 y^n. \quad (2.11)$$

Neste momento definimos a constante a como

$$a^2 = \frac{(n+1)K}{4\pi G \rho_c^{\frac{n-1}{n}}}, \quad (2.12)$$

o que permite reescrever a Eq.(2.11) como

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + y^n = 0. \quad (2.13)$$

Esta é a *equação de Lane-Emden* para um índice politrópico n . Podemos ver que esta equação não depende de nenhuma hipótese a não ser o índice politrópico da equação de estado. Assim, podemos encontrar uma solução $y(r)$ para toda uma família de estrelas de mesmo índice politrópico, ou seja o perfil da densidade em função do raio da estrela. Para isso é necessário particularizar a constante K e a densidade central.

Devemos agora definir quais são as condições de contorno que devem ser impostas à equação de Lane-Emden. Levando em conta as mudanças de variáveis que fizemos, quando $r \rightarrow 0$ temos que $x \rightarrow 0$ e $y \rightarrow 1$ pois $\rho(0) = \rho_c$. Para $r = R$ temos que $x(R) = R/a$ e $y = 0$ já que $\rho(R) = 0$. Devemos exigir também que $\frac{dy}{dx} \rightarrow 0$ para $z \rightarrow 0$ a fim de evitar uma singularidade no centro.

2.3 Estrelas Politrópicas Relativísticas

Até o presente momento nosso estudo se limitou ao caso newtoniano, no qual as estrelas têm densidade baixa o suficiente para que possamos desprezar os efeitos da Relatividade Geral. Essa aproximação é boa o suficiente para a maioria das estrelas na seqüência principal, mas se quisermos estender nosso tratamento para objetos de grandes densidades como as estrelas de nêutrons, devemos levar em conta a Teoria da Relatividade Geral. Nesta seção veremos como o estudo de estrelas politrópicas feito anteriormente se mostra no caso relativístico. Assim como no caso newtoniano, poderemos também chegar a uma equação equivalente à de Lane-Emden para o caso relativístico [2], e como na última seção, nos limitaremos a um estudo analítico do problema.

2.3.1 Equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff

Neste estudo iremos considerar um fluido perfeito e esfericamente simétrico, o que nos leva a escolher, a métrica estática e esféricamente simétrica mais geral possível para o tratamento do problema, dada por

$$ds^2 = e^{\nu(r)} c^2 dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (2.14)$$

O tensor momento-energia de um fluido perfeito é dado por

$$T_{\nu}^{\mu} = (p + \rho c^2)v^{\mu}v_{\nu} + p\delta_{\nu}^{\mu}, \quad (2.15)$$

onde p é a pressão, ρ é a densidade de matéria ou de maneira equivalente $\rho c^2 = \epsilon$ é a densidade de matéria-energia e v a quadri-velocidade.

Para definirmos a estrutura da estrela precisamos da equação de Einstein que nos define o campo gerado pela estrela:

$$\begin{aligned} G_{\nu\mu} &= \kappa T_{\nu\mu}, \\ R_{\nu\mu} - \frac{1}{2}g_{\nu\mu}R &= \kappa T_{\nu\mu}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Estas equações nos levam às equações de campo para nossa estrela que podem ser escritas como

$$e^{-\lambda} \left(-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{d\lambda}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} = -\frac{8\pi G}{c^4} \rho c^2, \quad (2.17)$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r} \frac{d\nu}{dr} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = \frac{8\pi G}{c^4} p. \quad (2.18)$$

Aqui definimos a componente radial da métrica como:

$$e^{-\lambda} = 1 - 2G \frac{m(r)}{c^2 r}. \quad (2.19)$$

Utilizando esta definição nas equações de campo (2.17) e (2.18), chegamos a uma expressão para $m(r)$, dada por

$$\begin{aligned} \frac{dm(r)}{dr} &= 4\pi r^2 \rho, \\ m(r) &= \int_0^r 4\pi r^2 \rho dr, \end{aligned} \quad (2.20)$$

onde podemos interpretar $m(r)$ como sendo a massa contida em uma calota esférica de raio r .

Devemos impor a conservação do tensor momento-energia ($T_{\nu}^{\mu}{}_{;\mu} = 0$). Fazendo isso chegamos à equação

$$\frac{dp}{dr} + \frac{1}{2}(p + \rho c^2) \frac{d\nu}{dr} = 0. \quad (2.21)$$

Esta é a equação de Tolmann-Oppenheimer-Volkoff, que representa o equilíbrio hidrostático no caso relativístico. Utilizando novamente as equações de campo, (2.17)

e (2.18), juntamente com (2.21), podemos eliminar dv/dr chegando a expressão para o gradiente da pressão

$$\frac{dp}{dr} = - \left(\frac{G [m(r) + 4\pi r^3 (\frac{p}{c^2})]}{c^2 r^2 \left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}\right)} \right) (p + \rho c^2), \quad (2.22)$$

Os cálculos detalhados que permitem chegar a esta equação encontram-se nos Apêndices A e B.

Nesta equação relativística de equilíbrio hidrostático se fizermos $c \rightarrow \infty$ chegamos a equação (2.4) para uma estrela Newtoniana. Podemos ver na equação acima novas características introduzidas pela Relatividade Geral. A mais evidente é a influência da própria pressão em sua derivada. Além disso o gradiente da pressão contém agora três fatores relativísticos que medem o desvio do caso newtoniano, transformando a equação de equilíbrio hidrostático em algo muito mais complexo.

Com isso temos toda a estrutura de nosso objeto definida. Vejamos agora como chegar à equação de Lane-Emden para um objeto relativístico.

2.3.2 A equação de *Lane-Emden* para uma estrela relativística

Assim como no caso newtoniano, seria interessante que obtivéssemos uma equação equivalente à (2.13) para uma estrela relativística que também obedecesse a uma equação de estado politrópica. Deste modo poderíamos também calcular toda a estrutura de uma família de estrelas com o mesmo índice politrópico. Isso seria de grande valia para o estudo de objetos relativísticos como anãs brancas e estrelas de nêutrons, que têm uma equação de estado politrópica. Assim teríamos como estudar a estrutura de toda uma família desses objetos com mesmo índice politrópico.

Vamos supor que, assim como no caso newtoniano, nossas estrelas obedecem uma equação de estado politrópica (2.1). Vamos definir uma nova variável u como:

$$u(r) = \frac{c^2}{2Gm(r)}(1 - e^{-\lambda}). \quad (2.23)$$

Utilizando a equação acima em (2.19), podemos escrever o coeficiente radial da métrica como:

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2Gm(r)u}{c^2 r}. \quad (2.24)$$

Fazendo esta mudança de variáveis nas equações de campo (2.17) e (2.18), en-

contramos uma nova equação para a massa da estrela:

$$m(r) \frac{du}{dr} = 4\pi r^2 \rho. \quad (2.25)$$

Assim como no caso newtoniano parametrizamos a densidade em função de um variável adimensional

$$\rho = \rho_c y^n, \quad (2.26)$$

e reescrevemos a equação de estado na forma:

$$p = K \rho_c^{1+(1/n)} y^{n+1} \quad (2.27)$$

Vamos agora definir uma nova constante dada por

$$\sigma = \frac{K \rho_c^{1/n}}{c^2} = \frac{P_c}{\rho_c c^2}. \quad (2.28)$$

Esta nova constante mede o desvio relativístico da estrela. Quanto maior seu valor, mais relativístico nosso objeto é. E se fizermos $c \rightarrow \infty$ temos que $\sigma \rightarrow 0$. Utilizamos essa constante nas Eqs. (2.27) e (2.21) obtemos a seguinte equação diferencial

$$2\sigma(n+1)dy + (1 + \sigma y)d\nu = 0, \quad (2.29)$$

que é facilmente integrada, e cuja solução é

$$e^\nu = e^{\nu_c} \left(\frac{1 + \sigma}{1 + \sigma y} \right)^{2(n+1)}. \quad (2.30)$$

A constante de integração e^{ν_c} pode ser obtida pela condição de continuidade de e^ν . Queremos que a métrica satisfaça a solução exterior de Schwarzschild. Assim, sabemos que para $r \geq R$:

$$e^\nu = e^{-\lambda} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r}. \quad (2.31)$$

Utilizando a solução exterior e que na superfície da estrela ($r = R$) temos que $\rho = 0 \rightarrow y = 0$ obtemos

$$e^{\nu(R)} = e^{\nu_c} (1 + \sigma)^{2(n+1)} = 1 - \frac{2GM}{c^2 R}. \quad (2.32)$$

Este resultado permite-nos reescrever a Eq. (2.30) na forma

$$e^\nu = (1 + \sigma y)^{-2(n+1)} \left(1 - \frac{2GM}{c^2 R} \right). \quad (2.33)$$

Até aqui utilizamos apenas a equação de TOV (2.21) e a equação de estado politrópica (2.1) para encontrarmos uma relação entre o coeficiente da métrica $g_{00} = e^\nu$ e a variável y . Isso não é suficiente para determinarmos a estrutura da estrela e precisamos também de uma relação para o coeficiente $g_{11} = e^\lambda$. Para isso, usando a equação para a nova variável u , podemos reescrever a equação (2.29) da seguinte forma

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{2\sigma(n+1)}{1+\sigma y} \frac{dy}{dr}. \quad (2.34)$$

Utilizando esta expressão, a Eqs. (2.24) e substituindo na equação de campo (2.18), obtemos a seguinte equação diferencial:

$$\frac{\sigma(n+1)}{1+\sigma y} r \frac{dy}{dr} \left(1 - \frac{2GMu}{c^2 r}\right) + \frac{2GMu}{c^2 r} + \frac{GM}{c^2} \sigma y \frac{du}{dr} = 0. \quad (2.35)$$

A relação entre u e y é dada por (2.25) escrita em termos de y na forma

$$m(r) \frac{du}{dr} = 4\pi r^2 \rho_c y^n. \quad (2.36)$$

Assim como fizemos no caso Newtoniano vamos parametrizar as variáveis de maneira a termos equações diferenciais adimensionais. Para isso, vamos definir as variáveis

$$x = Ar, \quad (2.37)$$

$$v(x) = \frac{A^3 M}{4\pi \rho_c} u(r), \quad (2.38)$$

onde, para termos variáveis adimensionais, A tem de ter dimensão de inverso de comprimento. Definimos A convenientemente como:

$$A = \left[\frac{4\pi G \rho_c}{(n+1)K \rho_c^{1/n}} \right]^{1/2}. \quad (2.39)$$

Substituindo essas novas definições nas Eqs. (2.35) e (2.36), encontramos as seguintes equações diferenciais:

$$x^2 \frac{dy}{dx} \frac{1 - 2\sigma(n+1)v/x}{1 + \sigma y} + v + \sigma x y \frac{dv}{dx} = 0, \quad (2.40)$$

$$\frac{dv}{dx} = x^2 y^n. \quad (2.41)$$

Esta é a versão relativística da equação de Lane-Emden. Podemos verificar

a consistência de nossos cálculos fazendo o limite Newtoniano ($\sigma \rightarrow 0$) e vendo que recaímos na equação de Lane-Emden newtoniana estudada na última secção.

As equações acima têm de ser resolvidas para um dado n e σ , e sujeitas às seguintes condições de contorno:

$$y(0) = 1, \tag{2.42}$$

$$v(0) = 0. \tag{2.43}$$

Deste modo, obtivemos equações diferenciais para o tratamento de estrelas esféricamente simétricas e politrópicas, sejam elas de natureza newtoniana ou relativística.

Capítulo 3

Estrelas Politrópicas Carregadas

3.1 Introdução

Neste capítulo estenderemos nosso estudo de estrelas relativísticas para o caso carregado [11], [12]. Nosso objetivo é estudar os efeitos de um campo eletromagnético na estrutura de uma estrela relativística. Sabemos que à luz da relatividade geral todas as formas de energia contribuem como fontes do campo gravitacional. Portanto, a energia associada ao campo eletromagnético também contribui para a gravitação. Além disso, um objeto carregado também está sujeito às interações eletromagnéticas. Dessa maneira há dois fenômenos distintos associados à natureza eletromagnética da estrela: um é o acréscimo da matéria-energia que gera a gravidade e o outro são as interações eletromagnéticas repulsivas.

Estimamos na introdução que para uma estrela Newtoniana temos não mais do que $\sim 100C$ por massa solar. Esse valor é aceito em geral, mas lembremos que essa estimativa é válida para estrelas Newtonianas, no caso de estrelas compactas como as Estrelas de Nêutrons essa estimativa tem de ser feita de maneira mais cuidadosa levando-se em conta os efeitos relativísticos que nessas estrelas não podem ser desprezados. Ainda que a neutralidade ou quas e-neutralidade elétrica seja aceita em geral, continua sendo interessante estudar os efeitos que uma distribuição de carga não nula pode ter na estrutura de uma estrela. Mesmo que essas estrelas não sejam estáveis, elas podem representar um estado intermediário de uma estrela de nêutrons que, por algum motivo ganhou cargas e está decaindo para um buraco negro [12].

No estudo aqui apresentado iremos supor que nossa estrela tem uma distribuição de carga esféricamente simétrica, dando origem a um campo elétrico monopolar. Com isso poderíamos esperar que nossa estrela teria uma nova contribuição repulsiva ajudando a contrabalançar o colapso gravitacional. Veremos que isso realmente ocorre,

mas as alterações da estrutura da estrela devido à introdução desse campo não se limitam a isso, pois não podemos nos esquecer de que estamos tratando um problema relativístico. Veremos que além de introduzir um termo repulsivo no gradiente de pressão, o campo elétrico também gera um enfraquecimento do campo gravitacional [12]

3.2 Estrutura de uma estrela relativística carregada

Nesta secção iremos rededuzir todas as equações que definem a estrutura de um objeto carregado e relativístico. Como continuamos a estudar um objeto com simetria esférica, vamos escolher a métrica esféricamente simétrica

$$ds^2 = e^{\nu(r)}c^2dt^2 - e^{\lambda(r)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \quad (3.1)$$

Temos também que definir as fontes no interior da estrela, representadas pelo tensor energia-momento. Iremos utilizar o tensor energia-momento do fluido perfeito, somado ao do campo eletromagnético [?], [4]

$$T_{\nu}^{\mu} = (p + \rho c^2)u_{\nu}u^{\mu} + p\delta_{\nu\mu} + \frac{1}{4\pi} \left[F^{\mu l}F_{\nu l} + \frac{1}{4\pi}\delta_{\nu}^{\mu}F_{kl}F^{kl} \right], \quad (3.2)$$

onde as variáveis têm seu significado usual. As componentes do tensor de campo eletromagnético $F^{\nu\mu}$ obedecem às equações de Maxwell em sua formulação covariante

$$[(-g)^{1/2}F^{\nu\mu}]_{,\mu} = 4\pi J^{\nu}(-g)^{1/2}, \quad (3.3)$$

onde J^{ν} é a quadri-corrente $J^{\mu} = (J^0, \vec{J})$, e g é o determinante da métrica.

Como estamos considerando o caso estático temos que impor que a única componente não nula de J^{ν} é a componente temporal J^0 . Além disso, para mantermos a simetria esférica desejada devemos supor que essa componente dependerá apenas de r . Impondo isso nas equações de Maxwell obtemos

$$[(-g)^{1/2}F^{0\mu}]_{,\mu} = 4\pi J^0(-g)^{1/2}. \quad (3.4)$$

A última equação pode ser facilmente integrada e obtemos o campo elétrico dado por

$$F^{01}(r) = E(r) = \frac{e^{-(\nu+\lambda)/2} \int_0^r 4\pi j^0 e^{(\nu+\lambda)/2} dr}{r^2}. \quad (3.5)$$

Na equação anterior podemos identificar a carga por:

$$Q(r) = \int_0^r 4\pi\rho_{ch}r^2e^{\lambda/2}dr, \quad (3.6)$$

onde usamos que a densidade de carga pode ser escrita como [18]

$$\rho_{ch} = -u_\mu J^\mu \rightarrow J^0 = e^{-\nu/2}\rho_{ch}. \quad (3.7)$$

Utilizando a expressão encontrada para a componente F^{01} de acordo com a Eq.(3.5) juntamente com a nova variável definida na Eq.(3.6), conseguimos encontrar o seguinte tensor energia-momento:

$$T_\nu^\mu = \begin{pmatrix} -\left(\epsilon + \frac{E^2(r)}{8\pi}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p - \frac{E^2(r)}{8\pi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p + \frac{E^2(r)}{8\pi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p + \frac{E^2(r)}{8\pi} \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

onde $\epsilon = \rho c^2$ que é a densidade de matéria-energia e $\frac{E^2(r)}{8\pi} = \frac{Q^2(r)}{8\pi r^4}$ é a densidade de energia do campo elétrico.

Aqui, já podemos observar uma característica nova introduzida pelo campo eletromagnético na estrutura do objeto. Podemos perceber, olhando para o tensor energia-momento acima, que apesar de termos começado utilizando um fluido perfeito e isotrópico, a presença de um campo elétrico radial quebra a isotropia que tínhamos no caso neutro, embora a simetria esférica ainda seja mantida. Podemos perceber que as componentes angulares são iguais entre si, mas diferentes da componente radial: $T_1^1 \neq T_2^2 = T_3^3$. As propriedades introduzidas por essa anisotropia serão estudadas com mais detalhes no próximo capítulo, onde desenvolveremos todo um formalismo para o tratamento de estrelas anisotrópicas.

Com o tensor energia-momento podemos utilizar a equação de Einstein (2.17) para encontrar as equações de campo:

$$e^{-\lambda} \left(-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{d\lambda}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(p - \frac{Q^2(r)}{8\pi r^4} \right), \quad (3.9)$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r} \frac{d\nu}{dr} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = -\frac{8\pi G}{c^4} \left(\epsilon + \frac{Q^2(r)}{8\pi r^4} \right). \quad (3.10)$$

Impondo a conservação do tensor energia-momento no interior da estrela ($T_\nu^\mu{}_{;\mu} = 0$),

encontramos a seguinte equação:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{d\nu}{dr}(p + \epsilon) + \frac{Q(r)}{4\pi r^4} \frac{dQ(r)}{dr}. \quad (3.11)$$

Nesse momento definimos uma expressão para a componente radial da métrica. No caso neutro fizemos isso de maneira que a métrica interior coincidissem com a solução exterior de Schwarzschild na superfície da estrela. Como estamos considerando o caso carregado, vamos definir a componente da métrica no interior da estrela de maneira que coincida com a solução exterior de Reissner-Nordström [6]:

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2} + \frac{GQ^2(r)}{r^2c^4}, \quad (3.12)$$

onde a derivada da massa em função do raio é dada por

$$\frac{dm(r)}{dr} = \frac{4\pi r^2}{c^2} \epsilon + \frac{Q(r)}{c^2 r} \frac{dQ(r)}{dr}. \quad (3.13)$$

Utilizando essas expressões nas Eqs. (3.9) e (3.10), encontramos a seguinte expressão para $d\nu/dr$:

$$\frac{d\nu}{dr} = \frac{2G \left[m(r) + \frac{4\pi r^3}{c^2} \left(p - \frac{Q^2(r)}{4\pi r^4 c^2} \right) \right]}{c^2 r^2 \left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r} + \frac{GQ^2(r)}{r^2 c^4} \right)}, \quad (3.14)$$

Substituindo a equação anterior na equação de equilíbrio hidrostático encontramos

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{2G \left[m(r) + \frac{4\pi r^3}{c^2} \left(p - \frac{Q^2(r)}{4\pi r^4 c^2} \right) \right]}{c^2 r^2 \left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r} + \frac{GQ^2(r)}{r^2 c^4} \right)} (p + \epsilon) + \frac{Q(r)}{4\pi r^4} \frac{dQ(r)}{dr}. \quad (3.15)$$

Esta é a equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) para o caso carregado. O primeiro termo do lado direito da equação representa a parte gravitacional atrativa e o segundo a parte repulsiva devido à força coulombiana. Como podemos ver pelo denominador do primeiro termo, a carga dentro da estrela modifica a métrica. Além disso, como fizemos referência anteriormente, a densidade de energia elétrica acopla com a gravidade como podemos ver pelo numerador do primeiro termo da equação de TOV.

Temos então toda a estrutura do nosso objeto definida e vamos agora apresentar a solução dessas equações.

3.3 Resultados.

Aqui iremos fazer uma discussão sobre as soluções das equações estruturais desenvolvidas anteriormente e dos procedimentos numéricos utilizados para resolvê-las. Temos quatro variáveis independentes que queremos calcular em função de r : $p(r)$, $m(r)$, $\lambda(r)$ e $Q(r)$. Todas as equações para essas variáveis foram calculadas na última seção e vamos reescrevê-las em suas formas diferenciais:

$$\frac{d\lambda}{dr} = \frac{8\pi G}{c^4} \left(\epsilon + \frac{Q^2(r)}{8\pi r^4} \right) r e^\lambda - \left(\frac{e^{-\lambda} - 1}{r} \right), \quad (3.16)$$

$$\frac{dm(r)}{dr} = \frac{4\pi r^2}{c^2} \epsilon + \frac{Q(r)}{c^2 r} \frac{dQ(r)}{dr}, \quad (3.17)$$

$$\frac{dQ(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho_{ch} e^{\lambda/2}, \quad (3.18)$$

$$\frac{dp}{dr} = - \frac{2G \left[m(r) + \frac{4\pi r^3}{c^2} \left(p - \frac{Q^2(r)}{4\pi r^4 c^2} \right) \right]}{c^2 r^2 \left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r} + \frac{GQ^2(r)}{r^2 c^4} \right)} (p + \epsilon) + \frac{Q(r)}{4\pi r^4} \frac{dQ(r)}{dr}. \quad (3.19)$$

Não precisamos de uma equação para densidade de matéria-energia pois ela está ligada à pressão pela equação de estado politrópica (2.1). As condições de contorno necessárias para resolver as equações acima são

$$p(0) = p_c = K \rho_c^{1+1/n}, \quad (3.20)$$

$$\lambda(0) = 0 \rightarrow e^{\lambda(0)} = 1, \quad (3.21)$$

$$Q(0) = 0, \quad (3.22)$$

$$m(0) = 0, \quad (3.23)$$

$$p(R) = 0. \quad (3.24)$$

Temos quatro equações diferenciais não lineares e acopladas. Para resolvermos este sistema, utilizamos os métodos numéricos usuais para resolver equações diferenciais de primeira ordem. Falta-nos apenas especificar a equação de estado politrópica fixando as constante K e n e também alguma hipótese sobre a distribuição de carga ρ_{ch} .

Para a equação de estado escolhemos um valor $n = 3/2$ e $K = 0.05 fm^{8/3}$. Estes valores se ajustam bastante bem à equação de estado obtida por modelos relativísticos para estrelas hiperônicas [22], [23],[24].

Ainda temos que escolher uma distribuição de carga para a nossa estrela. Re-

solvemos utilizar o seguinte *Ansatz* para a distribuição de carga [12]:

$$\rho_{ch} = f \times \epsilon. \quad (3.25)$$

No apêndice C encontra-se explicado detalhadamente as unidades da constante f e seu significado físico.

Este *Ansatz* significa essencialmente que a quantidade de carga no interior da estrela aumenta proporcionalmente à densidade de energia da estrela. Esta hipótese parece razoável, pois sabemos que uma quantidade maior de carga no interior da estrela vai requerer uma quantidade maior de matéria-energia de maneira que a gravitação consiga segurar essa carga. Assim, temos mais um parâmetro f que nos ajudará a variar a quantidade de carga no interior da estrela (um f pequeno implicará uma quantidade de carga pequena e vice-versa) [11]. Devido a esta hipótese, veremos que a carga $Q(r)$ cresce aproximadamente de maneira linear com a massa $m(r)$. Além disso, na superfície da estrela, onde a densidade de energia é pequena, a densidade de carga também o será, o que favorece a estabilidade da estrela.

3.3.1 Diagramas Massa-Raio e Massa-Densidade Central

Realizamos um estudo para cinco valores do parâmetro f e obtivemos, variando continuamente o valor da densidade central uma família de estrelas, os resultados descritos a seguir.

Na figura (3.1) temos que as estrelas na região de alta densidade e com massa pequena são instáveis, uma vez que $dM/d\rho_c < 0$. Assim, as estrelas estáveis são aquelas encontradas na região de baixa densidade. Podemos notar que no caso em que $f = 0.0001$ o efeito da carga na estrutura é praticamente nulo e a massa da estrela é essencialmente igual ao do caso neutro. Conforme vamos aumentando o parâmetro f , a estrutura começa a sentir os efeitos da carga e as massas das estrelas, para o mesmo valor de densidade central, começam a ficar bem maiores. De fato, podemos ver pela figura (3.1) que as massas aumentam sensivelmente com f , demonstrando uma relação não linear com esse parâmetro.

Podemos ver na figura (3.2) o diagrama massa raio da família de estrelas apresentadas na figura anterior. Como já comentamos, vemos que as estrelas são maiores e de maior massa devido à existência de uma força repulsiva que ajuda a manter o equilíbrio da estrela. Omitimos a curva de carga máxima obtida para $f = 0.0011$ pois, devido ao seu grande valor de massa e raio, ela suprime as outras curvas.

Na figura (3.3) e (3.4) vemos a relação carga-raio e carga-massa respectivamente,

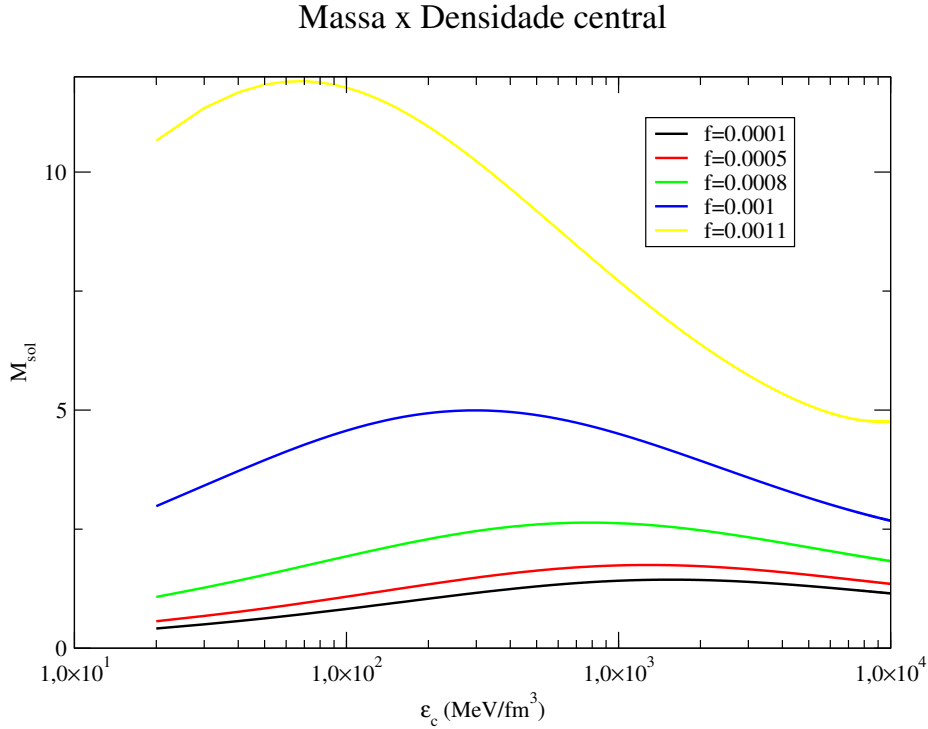


Figura 3.1: Massa x densidade central para os cinco valores de f estudados.

confirmando o que esperávamos, que estrelas com mais carga são maiores e de maior massa.

Ainda que o campo elétrico ajude na sustentação da estrela, temos um limite máximo de carga que a gravitação consegue suportar. Podemos constatar nos nossos cálculos que o limite máximo para o parâmetro f é de 0.0011. A partir desse valor não conseguimos mais uma estrela, o que significa que o gradiente de pressão dp/dr torna-se positivo dentro da estrela, como discutiremos na próxima seção. Isso demonstra-se numericamente quando não conseguimos mais encontrar uma solução convergente, ou seja nossa condição de contorno $p(R) \rightarrow 0$ nunca se satisfaz.

Apresentamos na tabela (3.1) os valores de massa, raio, densidade central e carga para as estrelas de massa máxima obtida para os diversos valores de f .

f	$M[M_{\odot}]$	$R(km)$	$\epsilon_c(MeV/fm^3)$	$Q(\times 10^{20}C)$
0.0001	1.43	11.87	1150.41	0.259
0.0005	1.765	13.55	1202.6	1.517
0.0008	2.728	18.47	652.87	3.434
0.001	5.248	31.47	226.55	7.576
0.0011	12.15	68.7	47.04	18.314

Tabela 3.1: Massa, raio, densidade central e valores de carga para as estrelas de massa máxima para vários valores de f .

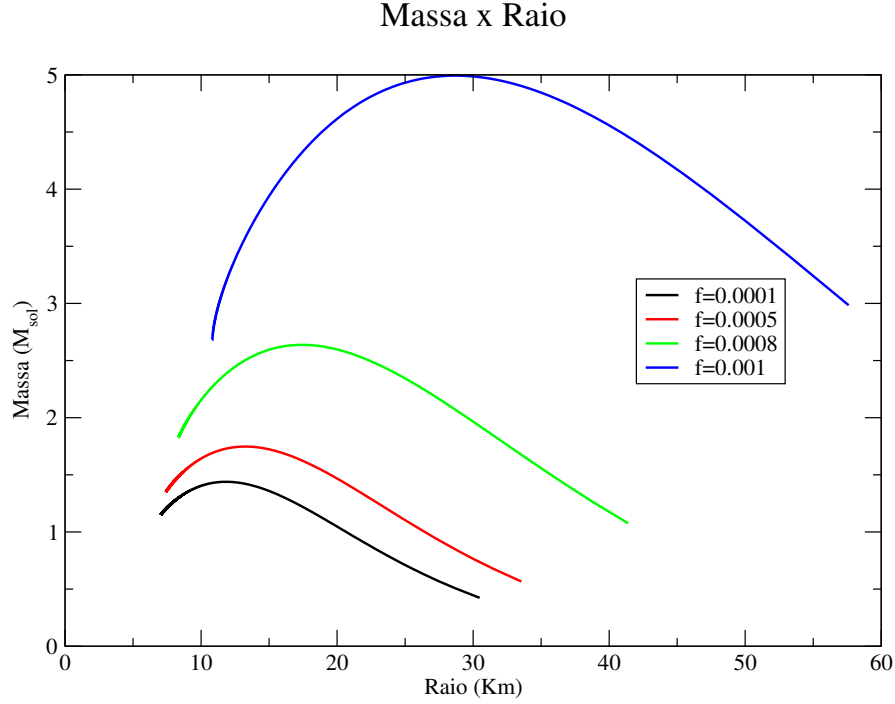


Figura 3.2: Massa-Raio para os cinco valores de f estudados.

3.3.2 O limite máximo de carga

Conforme mencionamos, foi encontrado um limite máximo para a constante f de maneira a ainda termos uma solução que gere uma estrela estável.

Para entendermos o que ocorre a partir de um certo valor de f que acaba impedindo a formação de uma estrela, vamos olhar novamente para a equação TOV de um objeto carregado:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{2G \left[m(r) + \frac{4\pi r^3}{c^2} \left(p - \frac{Q^2(r)}{4\pi r^4 c^2} \right) \right]}{c^2 r^2 \left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r} + \frac{GQ^2(r)}{r^2 c^4} \right)} (p + \epsilon) + \frac{Q(r)}{4\pi r^4} \frac{dQ(r)}{dr}. \quad (3.26)$$

Podemos escrever esta equação da seguinte maneira:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{dp_{grav}}{dr} + \frac{dp_{el}}{dr}, \quad (3.27)$$

onde dp_{grav}/dr e dp_{el}/dr representam o gradiente de pressão gravitacional e o de pressão elétrica, respectivamente. Dessa maneira, vemos que a estrutura da estrela depende do balanço entre esses dois gradientes. E se o gradiente total tornar-se positivo a estabilidade da estrela é destruída. Fizemos os gráficos dessas duas funções e de suas somas, conforme apresentadas nas figuras (3.5) e (3.6).

Fica claro dos gráficos, a medida que permitimos que as estrelas possuam mais

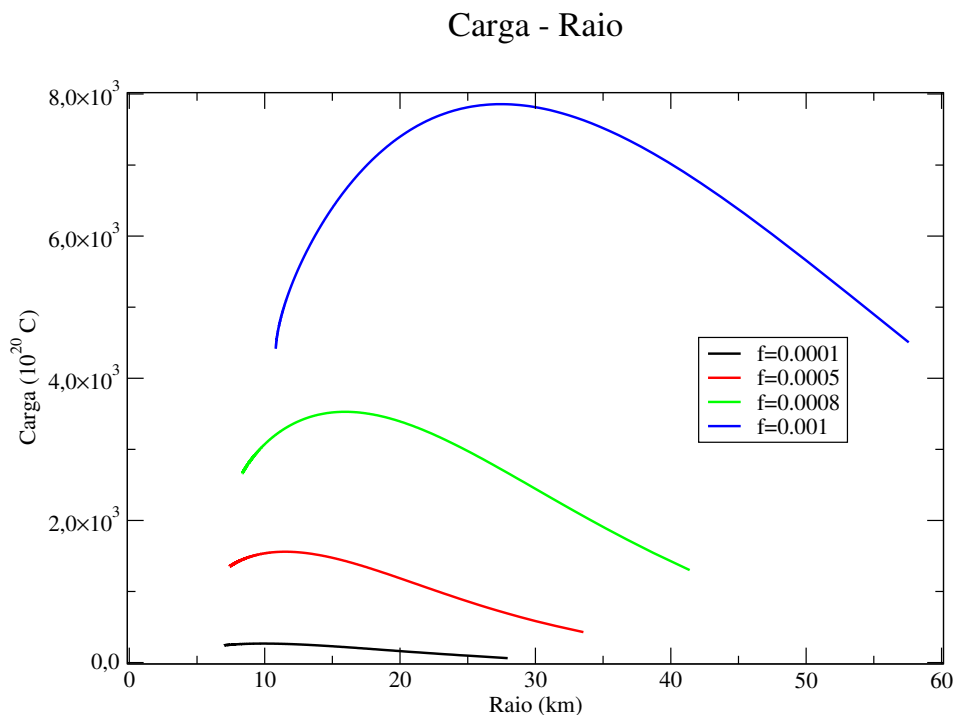
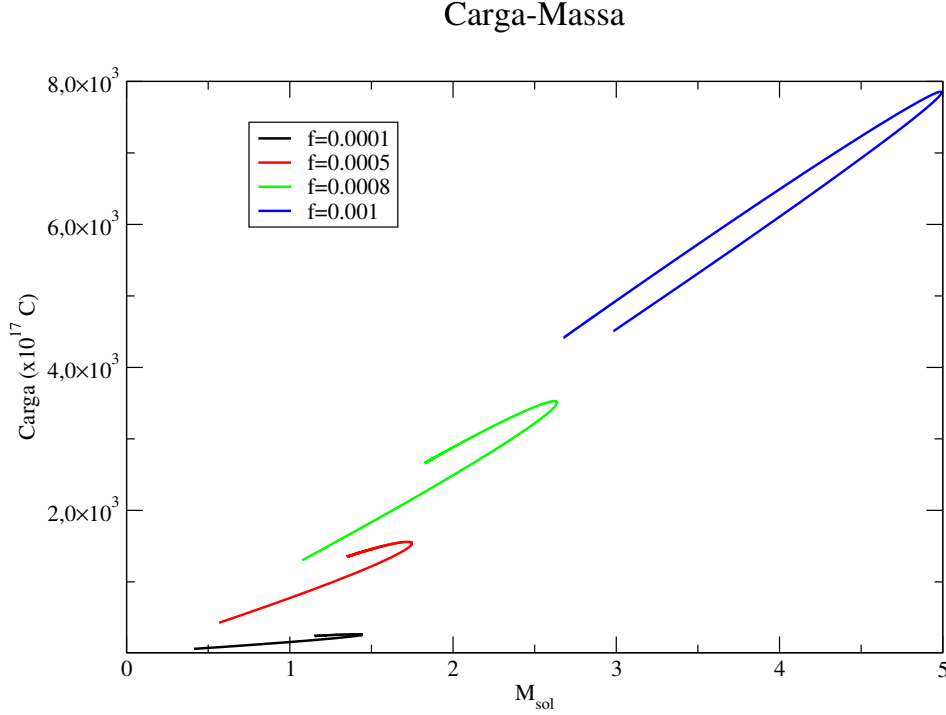


Figura 3.3: Relação Carga-Raio para os diversos valores de f estudados.

cargas o balanço entre as partes gravitacional e elétrica torna-se mais delicado, de maneira que sua soma se torna quase zero, implicando um gradiente total muito pequeno. Com um gradiente total de pressão muito pequeno, a variação da pressão se dá muito lentamente. Como vimos que nossa estrela só termina no momento em que a pressão se anula, isso implica que quanto mais carga a estrela possuir maior ela será. Conforme vamos aumentando a carga, o gradiente total de pressão tende assintoticamente a zero, de maneira que nessa situação limite a pressão se torna quase constante.

Em uma primeira análise podemos pensar que o comportamento descrito anteriormente surge devido a um aumento do gradiente elétrico. Contudo, não podemos deixar de perceber que o fato de termos uma distribuição maior de carga no interior da estrela não apenas aumenta o gradiente coulombiano, mas ajuda a diminuir o fator gravitacional. Este é um fenômeno puramente relativístico em que o campo elétrico ajuda a enfraquecer o campo gravitacional.


 Figura 3.4: Relação Massa-Raio para os diversos valores de f .

3.3.3 A massa da estrela

Nesta seção iremos discutir brevemente a definição de massa de uma estrela. Como vimos anteriormente, a integração da Eq.(3.13 nos fornece a massa da estrela:

$$M = \int_0^R \frac{4\pi r^2}{c^2} \left(\epsilon + \frac{Q^2(r)}{8\pi r^4} \right) dr + \frac{Q^2(R)}{2Rc^2}. \quad (3.28)$$

Podemos interpretar essa equação como sendo a massa da estrela vista por um observador no infinito. É interessante notar que não temos contribuição apenas da matéria-energia usual, mas também da matéria energia acumulada no campo elétrico. Podemos ver essa contribuição dentro da estrela na integração onde se soma à densidade de matéria energia do gás, e também no segundo termo fora da integral. Esse termo representa toda a energia acumulada pelo campo elétrico desde a superfície da estrela até o infinito. Enquanto a distribuição de matéria-energia do gás termina na superfície da estrela, o campo elétrico não está sujeito a essa limitação e contribui fora da estrela.

Podemos então fazer uma mudança de variáveis da seguinte maneira:

$$m'(r) = m(r) - \frac{Q^2(r)}{2rc^2} = \int_0^r \frac{4\pi r^2}{c^2} \left(\epsilon + \frac{Q^2(r)}{8\pi r^4} \right) dr \quad (3.29)$$

$$\frac{dm'}{dr} = \frac{4\pi r^2}{c^2} \left(\epsilon + \frac{Q^2(r)}{8\pi r^4} \right) \quad (3.30)$$

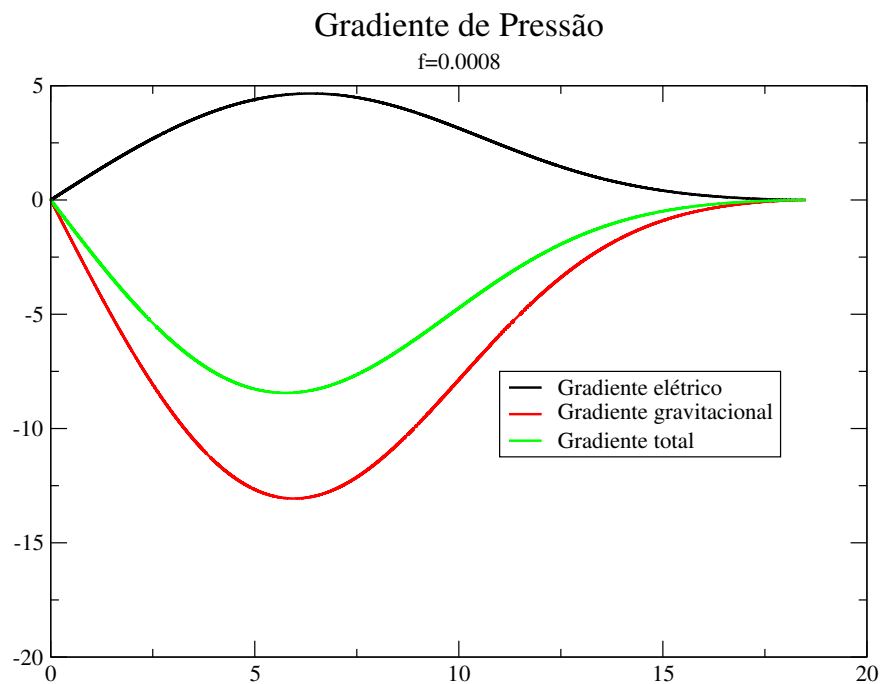


Figura 3.5: Gradientes de pressão total, elétrica e gravitacional para $f = 0.0008$.

Essa nova variável m' representa a massa da estrela vista por um observador em sua superfície [11]. Realizamos nossos cálculos utilizando essas duas definições de massa.

Nas figuras (3.7) e (3.8) apresentamos os diagramas massa-raio da família de estrelas geradas com a massa no infinito e na superfície. Como poderíamos esperar para o caso com menor carga, figura (3.7), não temos nenhuma diferença entre as duas massas. No caso com muita carga, figura (3.8), esta diferença é bem acentuada.

3.4 A Equação de Lane-Emden para uma estrela relativística carregada

Nesta secção iremos apresentar uma dedução do que seria a análoga da equação de Lane-Emden para o caso relativístico com carga. Como já vimos, a estrutura de uma estrela carregada apresenta mais graus de liberdade que no caso neutro (de fato, no caso neutro temos duas equações para resolver, enquanto no carregado temos quatro), o que implicará uma necessidade de fazer mais hipóteses. Ainda assim, representa uma tentativa interessante de generalizar a equação de Lane-Emden para o caso relativístico carregado [13].

Vamos fazer as seguintes mudanças de variáveis no tensor energia-momento

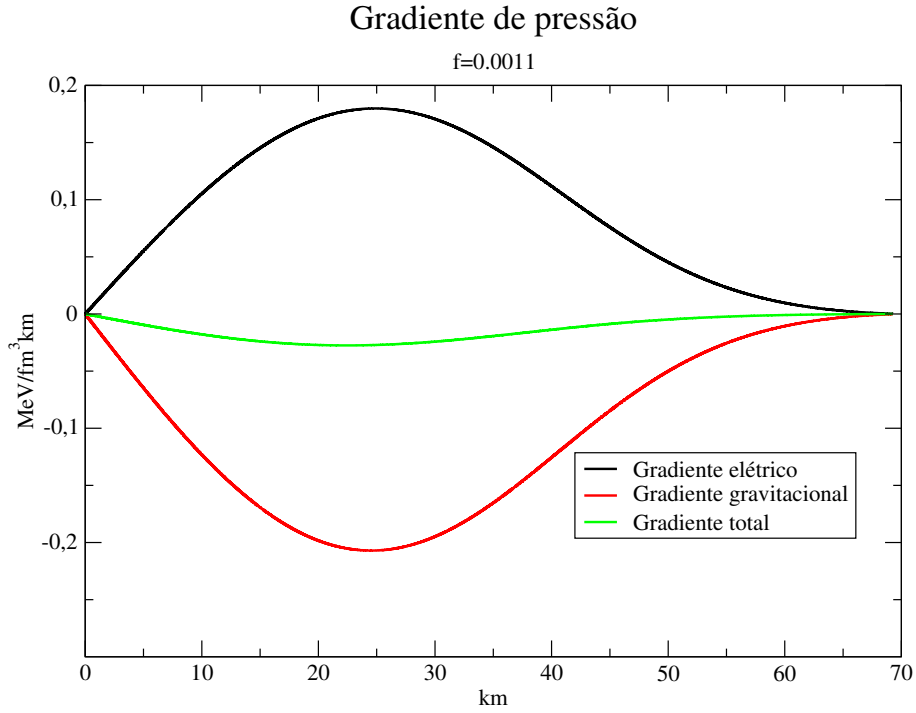


Figura 3.6: Gradientes de pressão total, elétrica e gravitacional para $f = 0.001$.

(3.8):

$$p_r = p - \frac{E^2}{8\pi}, \quad \rho_{ef} = \rho + \frac{E^2}{8\pi}. \quad (3.31)$$

Essa mudança de variáveis não é feita por acaso, pois, como veremos no próximo capítulo é essa mudança que define o tratamento anisotrópico do problema. Entretanto, aqui ainda não estamos considerando a anisotropia e essa mudança foi feita apenas por conveniência. Com isso nosso tensor energia-momento assume a forma

$$T_\nu^\mu = \text{diag}(-\rho_{ef}c^2, p_r, p + \frac{E^2}{8\pi}, p + \frac{E^2}{8\pi}), \quad (3.32)$$

onde não aplicamos a mudança de variáveis nas partes angulares pois isso não nos traria nenhuma vantagem.

Com essas mudanças a Eq.(3.11) assume a forma:

$$\frac{dp_r}{dr} = -\frac{1}{2} \frac{d\nu}{dr} (p_r + \rho_{ef}c^2) + \frac{E^2}{2\pi r}. \quad (3.33)$$

Utilizando nossa definição da métrica (3.12) e nossa expressão de m' (3.29), definimos uma nova variável

$$x = \frac{(1 - e^{-\lambda})rc^2}{2Gm'}, \quad (3.34)$$

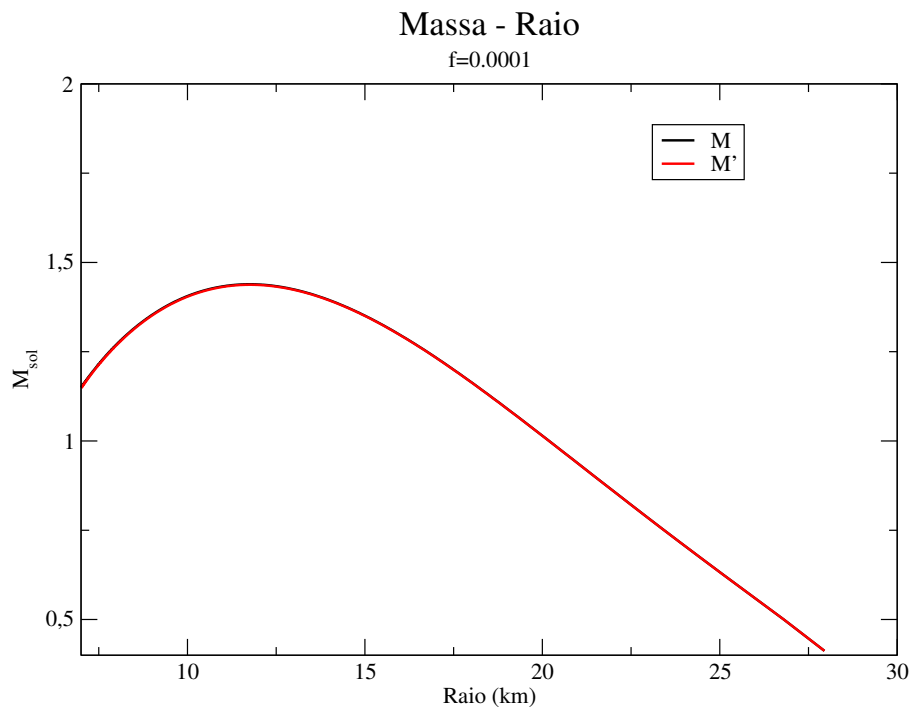


Figura 3.7: Diferença entre as massas na superfície e no infinito para $f = 0.0001$.

Que nos permite reescrever (3.12) como

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2Gm'x}{rc^2}. \quad (3.35)$$

Escrevendo a Eq. (3.9) como função de x obtemos a seguinte relação:

$$m' \frac{dx}{dr} = 4\pi r^2 \rho_{ef}. \quad (3.36)$$

Aqui faremos nossa primeira hipótese nesse tratamento, supondo que toda a pressão efetiva do termo radial obedeça a uma equação de estado politrópica e não apenas a pressão do gás, ou seja,

$$p_r = K_r \rho_{ef}^{1+1/n}. \quad (3.37)$$

Precisamos também de uma hipótese sobre o campo elétrico se quisermos ter mais algum avanço. Faremos isso supondo que o segundo termo da Eq. (3.33) pode ser escrito como o gradiente de uma pressão elétrica

$$\frac{E^2}{2\pi r} = \frac{dp_{el}}{dr}. \quad (3.38)$$

Além disto, suporemos que essa pressão elétrica pode ser descrita por uma equação de

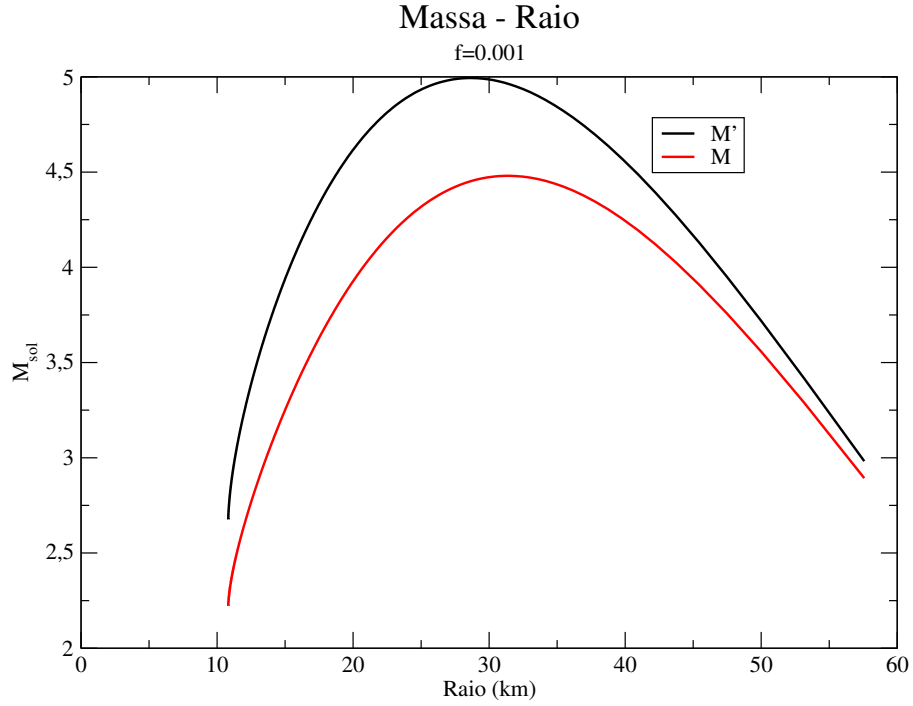


Figura 3.8: Diferença entre as massas na superfície e no infinito para $f = 0.001$.

estado politrópica

$$p_{el} = K_{el} \rho_{el}^{1+1/n}. \quad (3.39)$$

Estamos admitindo assim, que toda a matéria-energia no interior da estrela obedece a uma equação de estado politrópica

Assim como fizemos no capítulo dois vamos escrever as densidades de energia em uma forma paramétrica e impor a mesma dependência

$$\rho_{ef} = \rho_{efc} \theta^n, \quad \rho_{el} = \rho_{elc} \theta^n, \quad (3.40)$$

onde ρ_{efc} e ρ_{elc} são as densidades de energia efetiva e elétrica no centro da estrela, respectivamente. Com isso tanto p_{el} quanto p_r assumem a forma

$$p_r = K_r \rho_{efc}^{1+1/n} \theta^{n+1}, \quad p_{el} = K_{el} \rho_{elc}^{1+1/n} \theta^{n+1}. \quad (3.41)$$

Usando essas equações na Eq. (3.33) obtemos

$$\frac{d\nu}{dr} = -2(n+1) \frac{(\sigma - \sigma_{el}\eta)}{\sigma\theta + 1} \frac{d\theta}{dr}, \quad (3.42)$$

onde

$$\sigma = \frac{K \rho_{efc}^{1/n}}{c^2}, \quad \sigma_{el} = \frac{K \rho_{elc}^{1/n}}{c^2}, \quad \eta = \frac{\rho_{elc}}{\rho_{efc}}. \quad (3.43)$$

Integrando a Eq. (3.42) e usando o fato de que $\nu \rightarrow \nu_c$ quando $\theta \rightarrow 1$ obtemos

$$e^\nu = e^{\nu_c} \left(\frac{\sigma + 1}{\sigma\theta + 1} \right)^{2\left(\frac{n+1}{\sigma}\right)(\sigma - \sigma_{el}\eta)}. \quad (3.44)$$

Usando a Eq. (3.44) no limite onde $r = R$ e sabendo que nesse caso $\theta = 0$, conseguimos ao compararmos com a Eq. (3.12) a seguinte relação

$$e^\nu = (\sigma\theta + 1)^{-2\frac{n+1}{\sigma}(\sigma - \sigma_{el}\eta)} \left(1 - \frac{2Gm'}{rc^2} \right). \quad (3.45)$$

Substituindo esta expressão na Eq. (3.42) e usando a Eq. (3.10) encontramos:

$$\frac{(n+1)(\sigma - \sigma_{el}\eta)}{\sigma\theta + 1} r \frac{d\theta}{dr} \left(1 - \frac{2Gm'x}{rc^2} \right) + \frac{Gm'x}{rc^2} + \frac{G\sigma m'}{c^2} \frac{dx}{dr} \theta = 0. \quad (3.46)$$

Assim como no capítulo dois, realizemos mudanças de variáveis

$$r = \frac{\xi}{A}, \quad v(\xi) = \frac{A^3 M_{ef} x}{4\pi \rho_{ef}}, \quad (3.47)$$

onde A é definido por:

$$A = \left[\frac{4\pi G \rho_{ef} c}{(n+1) K \rho_{ef}^{1/n}} \right]^{1/2} \quad (3.48)$$

Deste modo as Eqs. (3.46) e (3.36) podem ser reescritas na forma

$$\xi^2 \frac{d\theta}{d\xi} \frac{(1 - \frac{\sigma_{el}}{\sigma}\eta) - (n+1)(\sigma - \sigma_{el}\eta)v/\xi}{\sigma\theta + 1} + v + \sigma\theta\xi \frac{dv}{d\xi} = 0; \quad (3.49)$$

$$\frac{dv}{d\xi} = \xi^2 \theta^n. \quad (3.50)$$

Essa é a generalização da equação de Lane-Emden para uma estrela relativística e carregada. Como podemos ver, tivemos de utilizar uma série de hipóteses para obter esta generalização. Pretendemos, no futuro, utilizando as conclusões sobre estrelas anisotrópicas que apresentaremos no próximo capítulo, refinar este estudo de maneira a torná-lo mais realista.

Capítulo 4

A anisotropia das estrelas carregadas

4.1 Introdução

Neste capítulo iremos realizar um estudo mais detalhado da estrutura de uma estrela anisotrópica. Iremos rededuzir de maneira geral as equações que definem a estrutura de uma estrela anisotrópica[15], para depois aplicar ao caso das estrelas carregadas estudadas no capítulo anterior. Como já foi mencionado, um objeto carregado com um campo elétrico radial apresenta uma estrutura anisotrópica. Iremos aqui apresentar o formalismo para o tratamento de qualquer objeto estelar anisotrópico, mas que preserve a simetria esférica[14]. Uma vez que tenhamos esse formalismo bem estruturado, poderemos utilizá-lo para resolver o mesmo problema que resolvemos no capítulo anterior. E assim testá-lo. Veremos que devemos utilizar com muito cuidado esse tratamento de estrelas anisotrópicas, uma vez que obtivemos resultados diferentes. Tal diferença, como iremos mostrar, deve-se basicamente à diferença na superfície da estrela entre a "pressão" radial e a pressão termodinâmica escalar. Quando estamos lidando com uma estrela anisotrópica consideramos como "pressão" radial a componente T_1^1 do tensor momento-energia. Mas, como veremos, essa componente não representa a pressão termodinâmica da estrela, no caso anisotrópico. Iremos mostrar alguns resultados numéricos e compararemos esses resultados com os do capítulo precedente.

4.2 A estrutura de uma estrela anisotrópica

Assim como no caso anterior iremos tratar de um objeto estelar com simetria esférica. Pode parecer contraditório tratar de um objeto anisotrópico e com simetria esférica, mas lembramos que a anisotropia que estamos discutindo aqui nada tem haver com a simetria esférica. Nossos objetos são anisotrópicos pois as componentes angulares de seu tensor energia-momento, sendo iguais entre si, são diferentes da componente radial, contudo todas as componentes continuam sendo função apenas da coordenada r , preservando assim a simetria esférica. Dessa maneira a escolha mais óbvia para a métrica, continua sendo a métrica esféricamente simétrica

$$ds^2 = e^{\nu(r)} c^2 dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (4.1)$$

Vamos considerar então um tensor energia-momento anisotrópico da seguinte forma:

$$T_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} -\epsilon_{ef} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_r(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_t(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_t(r) \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Com o tensor energia-momento já definido, estamos aptos a calcular as equações de campo para nossa estrela, que podem ser escritas como

$$e^{-\lambda} \left(-\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{d\lambda}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} = \frac{8\pi G}{c^4} p_r, \quad (4.3)$$

$$e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r} \frac{d\nu}{dr} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = -\frac{8\pi G}{c^4} \epsilon_{ef}. \quad (4.4)$$

Aqui, em analogia com a solução exterior de Schwarzschild, definimos a componente da métrica

$$e^{-\lambda} = 1 - \frac{2Gm(r)}{rc^2}, \quad (4.5)$$

onde, com o auxílio das equações de campo (4.3) e (4.4), conseguimos encontrar a seguinte equação para a função $m(r)$:

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \frac{\epsilon_{ef}}{c^2}. \quad (4.6)$$

Assim como nos capítulos anteriores, vamos impor a conservação do tensor energia-momento ($T_{\nu}^{\mu}{}_{;\mu} = 0$) e encontrar a equação

$$\frac{dp_r}{dr} = -\frac{1}{2} \frac{d\nu}{dr} (p_r + \epsilon_{ef}) + \frac{2}{r} (p_t - p_r). \quad (4.7)$$

Comparando com o caso isotrópico, vemos o surgimento de um termo de anisotropia que a partir de agora iremos chamar de:

$$\Delta \equiv p_t - p_r. \quad (4.8)$$

Esse termo desempenha um papel fundamental na estrutura do objeto, pois pode favorecer o equilíbrio da estrutura ou a sua destruição, dependendo se ele é positivo ou negativo:

- $\Delta > 0$ age como um gradiente de uma força repulsiva.
- $\Delta < 0$ age como um gradiente de uma força atrativa.
- $\Delta = 0$ caso isotrópico.

Como fizemos anteriormente, obtendo a expressão para dv/dr e substituindo na Eq. (4.7), encontramos a equação de equilíbrio de uma estrela anisotrópica

$$\frac{dp_r}{dr} = -\frac{G}{c^2 r^2} \left[\frac{m(r) + \frac{4\pi r^3}{c^2} p_r}{1 - 2\frac{Gm(r)}{c^2 r}} \right] (p_r + \epsilon_{ef}) + \frac{2}{r} \Delta. \quad (4.9)$$

A equação acima deve ser resolvida para as seguintes condições de contorno:

$$p_r(0) = p_{rc} \quad (4.10)$$

$$\lambda(0) = 0 \rightarrow e^{\lambda(0)} = 1, \quad (4.11)$$

$$Q(0) = 0, \quad (4.12)$$

$$m(0) = 0., \quad (4.13)$$

$$p_r(R) = 0. \quad (4.14)$$

Aqui encontramos uma sutil, mas muito importante diferença do caso isotrópico. Quando estamos resolvendo o problema pelo formalismo anisotrópico, a condição que nos determina o final da estrela é dada por $T_1^1 = p_r(R) = 0$ [14]. Devemos notar que nem sempre a componente radial do tensor energia-momento é equivalente à pressão escalar termodinâmica. De fato, no caso isotrópico ela é idêntica, mas, como veremos a seguir, devido à anisotropia gerada pelo campo elétrico no interior da estrela esta componente não é mais igual à pressão termodinâmica.

4.3 Estrelas carregadas e anisotropia

Como foi mencionado no capítulo anterior, podemos ver que a estrutura de uma estrela dotada de um campo elétrico monopolar é naturalmente anisotrópica. Havíamos visto que o tensor energia-momento desse objeto é dado por:

$$T_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} -\left(\epsilon + \frac{Q^2(r)}{8\pi r^4}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p - \frac{Q^2(r)}{8\pi r^4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p + \frac{Q^2(r)}{8\pi r^4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p + \frac{Q^2(r)}{8\pi r^4} \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Comparando as componentes desse tensor com as do tensor (4.2) podemos facilmente notar a anisotropia. Desta comparação obtemos as componentes do tensor energia-momento anisotrópico:

$$\epsilon_{ef} = \epsilon + \frac{Q^2(r)}{8\pi r^4} \quad (4.16)$$

$$p_r(r) = p - \frac{Q^2(r)}{8\pi r^4} \quad (4.17)$$

$$p_t(r) = p + \frac{Q^2(r)}{8\pi r^4}. \quad (4.18)$$

Aqui notamos o que já havíamos mencionado, a componente radial do tensor energia-momento não é mais apenas a pressão termodinâmica, mas contém uma contribuição associada à pressão do campo elétrico $p_e = E^2/8\pi = Q^2/8\pi r^4$.

Com a identificação feita anteriormente, podemos calcular o termo de anisotropia (Δ), dado agora por:

$$\Delta = p_t - p_r = \frac{Q^2(r)}{4\pi r^4} = \frac{E^2(r)}{8\pi}. \quad (4.19)$$

Agora, estamos preparados para resolver o problema utilizando o formalismo anisotrópico, pois já temos uma expressão para p_r , para Δ e para ϵ_{ef} . Evidentemente, utilizaremos a mesma equação de estado politrópica e o mesmo ansatz para a distribuição de carga, de maneira que possamos comparar os resultados. Vamos escrever explicitamente as equações que devemos resolver:

$$\frac{dp_r}{dr} = -\frac{G}{c^2 r^2} \left[\frac{m(r) + \frac{4\pi r^3}{c^2} p_r}{1 - 2\frac{Gm(r)}{c^2 r}} \right] (p_r + \epsilon_{ef}) + \frac{2}{r} \left(\frac{Q^2(r)}{4\pi r^4} \right), \quad (4.20)$$

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \frac{\epsilon_{ef}}{c^2}, \quad (4.21)$$

$$\frac{d\lambda}{dr} = \frac{8\pi G}{c} \epsilon_{ef} r e^\lambda + \frac{e^\lambda - 1}{r}, \quad (4.22)$$

$$\frac{dQ(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho_{ch} e^{\lambda/2}, \quad (4.23)$$

juntamente com a equação de estado

$$p = k \left(\frac{\epsilon}{c^2} \right)^{5/3}, \quad (4.24)$$

$$p_r(r) = p - \frac{Q^2(r)}{8\pi r^4} \quad (4.25)$$

$$\epsilon_{ef} = \epsilon + \frac{Q^2(r)}{8\pi r^4}. \quad (4.26)$$

Essas equações estão submetidas às condições de contorno explicitadas nas Eqs. (4.10) a (4.13).

4.4 As soluções da estrela anisotrópica

Nesta seção iremos apresentar as soluções para o sistema de equações definido na última seção. Assim como fizemos no capítulo anterior, utilizamos cinco valores para a constante f e variamos continuamente a densidade central de maneira a obtermos uma família de estrelas.

Os resultados apresentados na figura (4.1) mostram estrelas de massa bem menor que as apresentadas no capítulo 3. Podemos ver também da figura (4.2) que essas estrelas são também bem menores. Além disso, no caso em que $f = 0.0001$, que é a situação em que a estrela se comporta quase como se fosse neutra, temos um comportamento distinto dos outros casos. Isso ocorre pois nessa situação a anisotropia praticamente não existe e o resultado recai no caso do capítulo anterior para carga muito pequena.

Poderíamos esperar então, que essas estrelas também possuíssem uma quantidade menor de carga, o que explicaria seu tamanho e massa reduzidos. Uma vez que essas estrelas possuem um campo elétrico menor elas teriam uma força repulsiva menos intensa para a equilibrar a atração gravitacional, não permitindo assim uma quantidade maior de massa.

Os diagramas carga-massa e carga-raio apresentados nas figuras (4.3) e (4.4) mostram o que havíamos previsto. Comparadas com as curvas do capítulo anterior, podemos ver que as estrelas anisotrópicas contêm uma quantidade bem menor de carga,

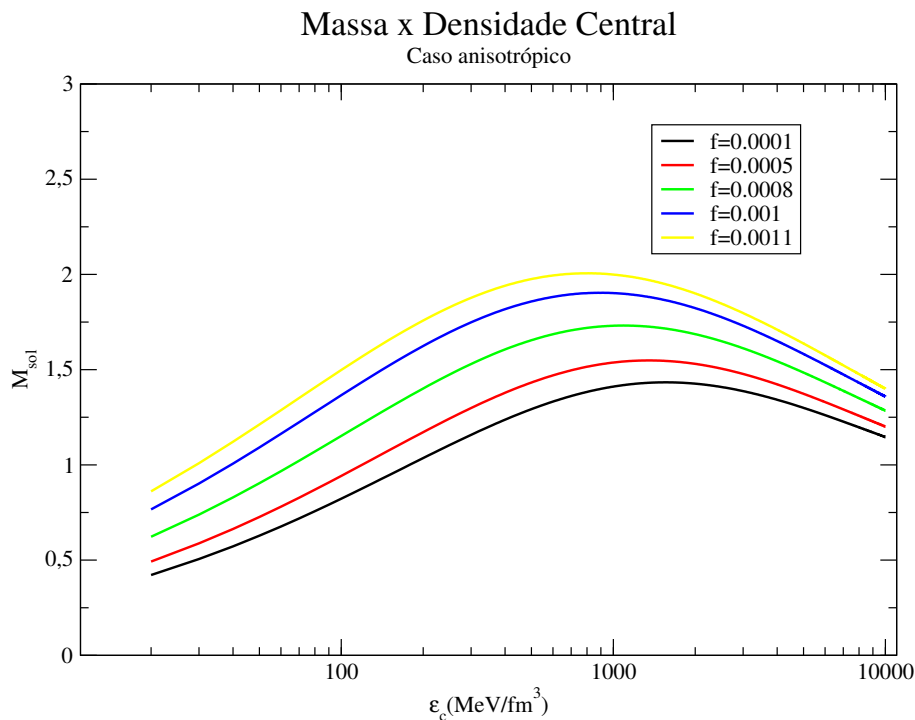


Figura 4.1: Massa x Densidade central para o caso anisotrópico.

o que nos permite entender então sua massa e raios reduzidos. Apresentamos na tabela 4.1 as estrelas anisotrópicas correspondentes às estrelas de massa máxima do cap.3.

f	$M[M_{\odot}]$	$R(km)$	$\epsilon_c(MeV/fm^3)$	$Q(\times 10^{20})C$
0.0001	1.43	11.11	1150.41	0.259
0.0005	1.54	10.07	1202.6	1.34
0.0008	1.69	10.87	652.87	2.19
0.001	1.66	13.75	226.55	2.54
0.0011	1.18	19.50	47.04	1.19

Tabela 4.1: Estrelas com as mesmas densidades centrais das estrelas de massa máxima do capítulo 3.

Falta entendermos então por que quando resolvemos o problema utilizando o formalismo anisotrópico encontramos objetos menores, menos massivos e menos carregados. Faremos isso na próxima seção, onde compararemos estes resultados com os obtidos no capítulo anterior.

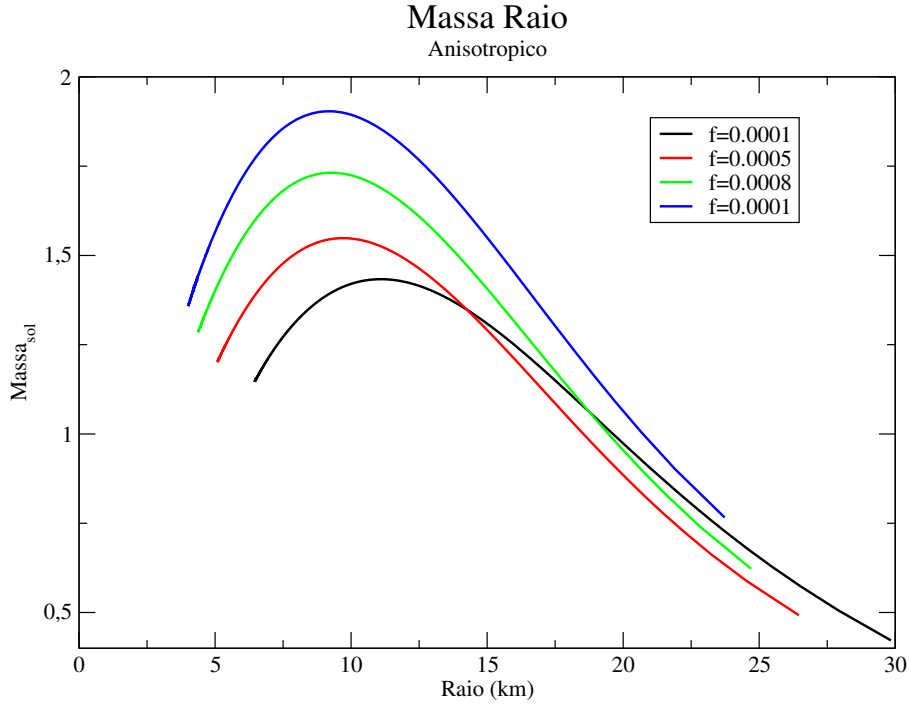


Figura 4.2: Massa x Raio para o caso anisotrópico.

4.5 A diferença entre o caso anisotrópico e a solução usual

Nesta seção iremos apresentar as diferenças entre as soluções encontradas pelo método usual [11] e a solução utilizando o formalismo anisotrópico [14] desenvolvido neste capítulo. Esta é a principal contribuição deste trabalho, onde nos valem de uma solução já bem estabelecida para testarmos o tratamento anisotrópico do problema. Como veremos, as soluções obtidas utilizando este formalismo com a condição de contorno $p_r(R) = 0$ não parecem ser as corretas. Será mostrado que neste caso obtemos estrelas com pressão e densidade não nula na superfície.

Vamos primeiro constatar a equivalência entre a equação de TOV para estrelas carregadas do capítulo anterior e a que acabamos de obter para o caso anisotrópico

$$\frac{dp_r}{dr} = -\frac{G}{c^2 r^2} \left[\frac{m(r) + \frac{4\pi r^3}{c^2} p_r}{1 - 2\frac{Gm(r)}{c^2 r}} \right] (p_r + \epsilon_{ef}) + \frac{2}{r} \left(\frac{Q^2(r)}{4\pi r^4} \right). \quad (4.27)$$

Seria esperado que ao fazer as substituições definidas nas Eq. (4.25) e (4.26) encontraríamos a Eq.(3.15). De fato, se fizermos essa substituição nas Eqs.(4.20) e

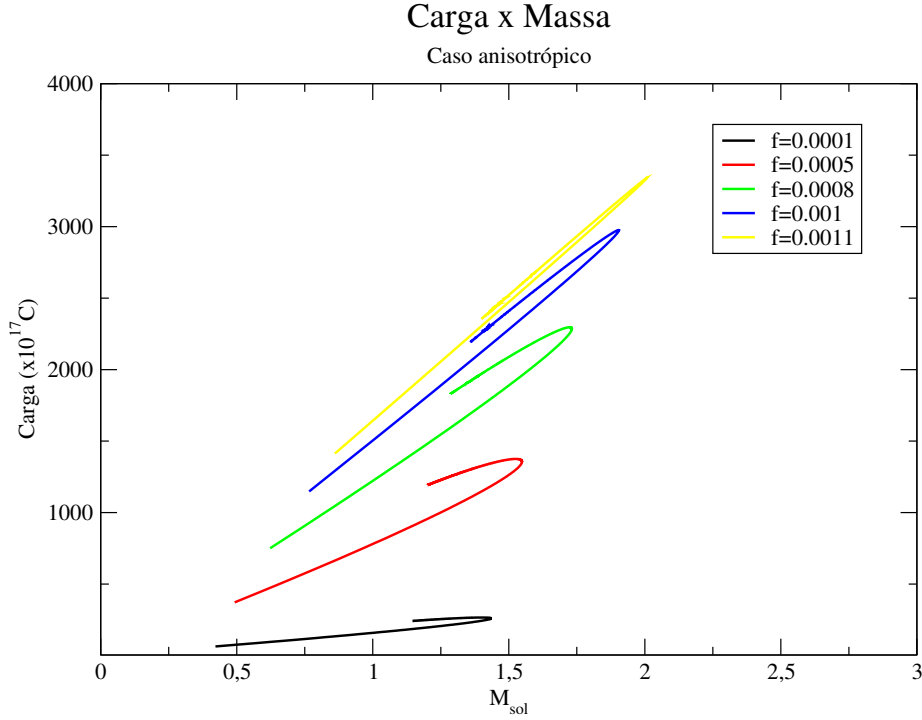


Figura 4.3: Carga x Massa para o caso anisotrópico.

(4.21) conseguimos encontrar

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{G}{c^2 r^2} \left[\frac{m(r) - \frac{Q^2(r)}{c^2 2r} + \frac{4\pi r^3}{c^2} \left(p - \frac{Q^2(r)}{4\pi r^4} \right)}{1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}} \right] (p + \epsilon) + \frac{Q(r)}{4\pi r^4} \frac{dQ(r)}{dr}, \quad (4.28)$$

$$\frac{dm(r)}{dr} = \frac{4\pi r^2}{c^2} \left(\epsilon + \frac{Q^2(r)}{8\pi r^4} \right). \quad (4.29)$$

Podemos ver então, que o formalismo anisotrópico utiliza automaticamente a definição da massa da estrela vista por um observador na superfície (Eq.3.29). Fazendo a substituição para a massa no infinito

$$m(r) \rightarrow m(r) + \frac{Q^2(r)}{2c^2 r}, \quad (4.30)$$

que implica

$$\frac{dm(r)}{dr} = \frac{4\pi r^2}{c^2} \epsilon + \frac{Q(r)}{c^2 r} \frac{dQ(r)}{dr}, \quad (4.31)$$

encontramos exatamente a equação de TOV 3.15 deduzida no caso carregado,

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{2G}{c^2 r^2} \left[\frac{m(r) + \frac{4\pi r^3}{c^2} \left(p - \frac{Q^2(r)}{4\pi r^4 c^2} \right)}{1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r} + \frac{GQ^2(r)}{r^2 c^4}} \right] (p + \epsilon) + \frac{Q(r)}{4\pi r^4} \frac{dQ(r)}{dr}. \quad (4.32)$$

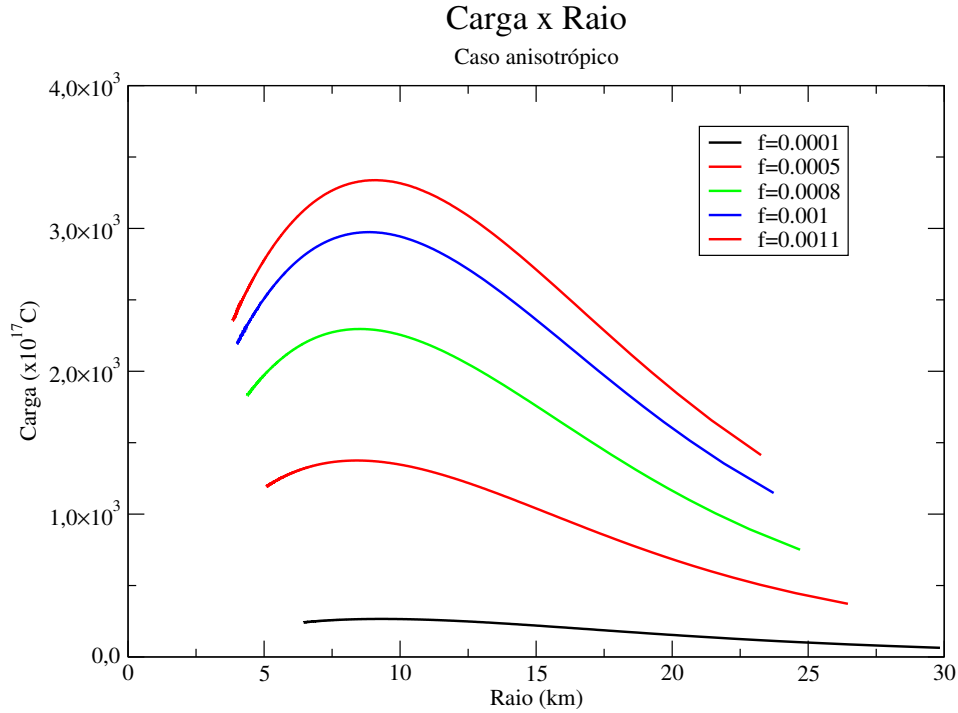


Figura 4.4: Carga x Raio para o caso anisotrópico.

Como vemos então, a diferença entre o caso anisotrópico e o caso usual estudado no capítulo 3 é apenas uma mudança de variável. Dessa maneira, seria correto esperar que uma solução recaísse na outra quando mudássemos a condição de contorno na superfície, $p_r(R) = 0$, para a utilizada usualmente que envolve a pressão escalar

$$p(R) = 0 \rightarrow p_r(R) + \frac{Q^2(R)}{8\pi R^4} = 0. \quad (4.33)$$

Como podemos ver na fig. (4.5), as massas das estrelas geradas pelo método usual são maiores que as geradas pelo método anisotrópico, como já foi constatado anteriormente. Mas se mudarmos a condição de contorno da solução anisotrópica de acordo com 4.33, vemos pela fig. (4.6) que as duas soluções coincidem exatamente. Agora temos a certeza que os dois casos são completamente equivalentes. O que nos leva a concluir que no caso de estrelas anisotrópicas a condição de contorno correta é a de que a pressão escalar se anule e não p_r . Então resta responder por que o caso anisotrópico resolvido com a condição de contorno usada na literatura ($p_r = 0$) gera estrelas com massas e raios tão reduzidos. Para isso vamos analisar o perfil $p \times \epsilon$, ou seja, a variação da pressão em função da densidade de energia dentro da estrela.

Apresentamos nas figs (4.7) e (4.8) os perfis de p das estrelas de massa máxima obtidas pelo método usual e de p_r obtido das estrelas anisotrópicas, em função da densidade de matéria energia, para dois valores de f . Como podemos ver no caso em que temos uma quantidade carga muito pequena $f = 0.0001$ não conseguimos ver

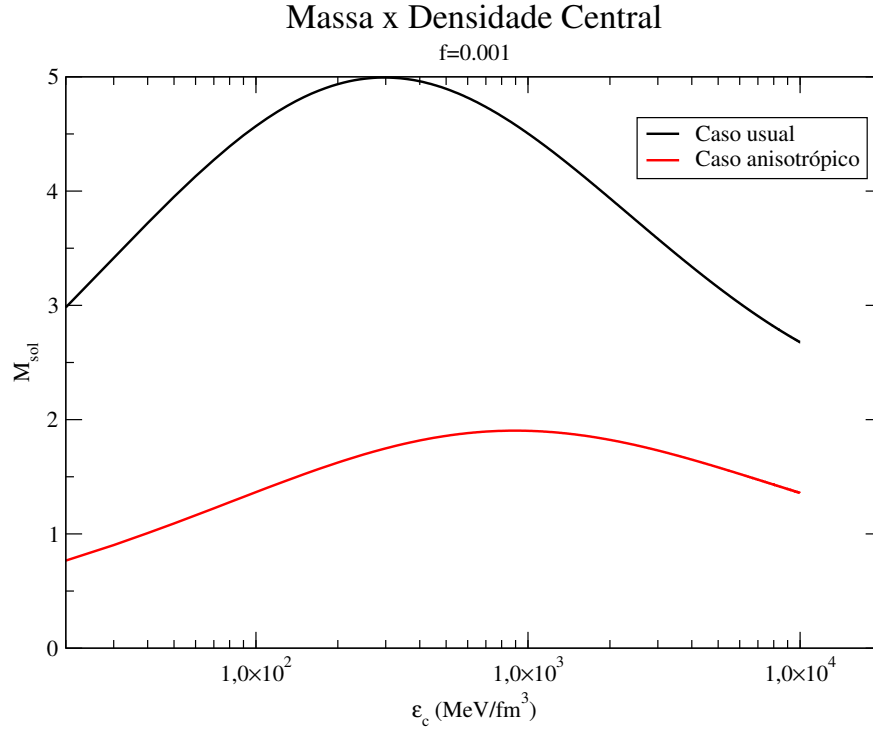


Figura 4.5: Comparação entre massas da solução usual e da anisotrópica, para $f = 0.001$.

nenhuma diferença entre os dois perfis, mais uma vez comprovando que nesse caso a anisotropia desaparece. Mas quando o efeito da carga é relevante ($f = 0.001$) já temos uma diferença bem acentuada entre os dois casos. Podemos ver que p_r se anula bem mais rapidamente que p . O que não é nenhuma surpresa, pois sabemos que p_r é igual à pressão termodinâmica subtraída da pressão associada ao campo elétrico, e essa, por sua vez é sempre positiva. Dessa maneira quando utilizamos a condição de contorno anisotrópica e p_r se anula significa que chegamos ao fim da estrela. Isto é, o seu raio será menor que o da solução usual. Ou seja, todo o intervalo da densidade de energia onde p_r é negativo não é levado em conta na integração da massa no caso anisotrópico, levando-nos a estrelas menos massivas e conseqüentemente com carga menor.

Conseguimos então explicar por que as estrelas anisotrópicas são menos massivas, mas ainda resta concluirmos qual das duas condições de contorno é a mais correta. Se examinarmos a condição de contorno anisotrópica, temos que em $r = R$

$$p_r(R) = 0, \quad (4.34)$$

$$p(R) = \frac{Q^2(R)}{8\pi R^4}, \quad (4.35)$$

$$\rho(R) = \left(\frac{p(R)}{k} \right)^{3/5}. \quad (4.36)$$

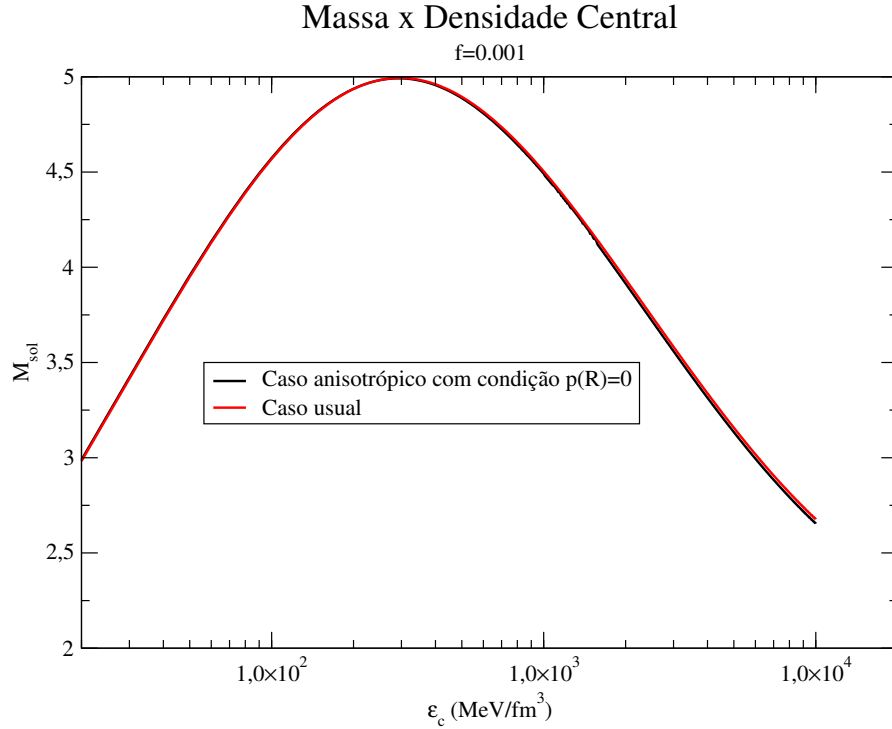


Figura 4.6: igualdade entre massas da solução usual e da anisotrópica com a nova condição de contorno, para $f = 0.001$.

Enquanto que na condição de contorno usual temos que

$$p(R) = 0, \quad (4.37)$$

$$p_r(R) = \frac{Q^2(R)}{8\pi R^4}, \quad (4.38)$$

$$\rho(R) = 0. \quad (4.39)$$

As últimas equações mostram que as estrelas anisotrópicas têm uma pressão proveniente do gás não nula na superfície, assim como a densidade de matéria-energia. O fato de termos a densidade de matéria-energia não nula na superfície não é um grande problema, pois esse tipo de comportamento é previsto em outros objetos como as estrelas de quarks. Mas o fato de termos uma pressão não nula na superfície, implica que a estrela está exercendo uma força para fora da estrela, uma vez que temos uma descontinuidade em $p(R)$ e $p(R + dr)$, indicando que existe uma força não nula. Como impomos que a estrela está em equilíbrio hidrostático, isso implicaria que a estrela está sustentando algo que contrabalançaria essa força externa. Mas o que ela estaria sustentando se a estrela acabou em $r = R$? Como podemos ver essa condição de contorno não é a correta pois nos leva a inconsistência física, pelo menos quando a fonte da anisotropia tem origem em um campo.

Por outro lado, quando utilizamos a condição de contorno da solução usual,

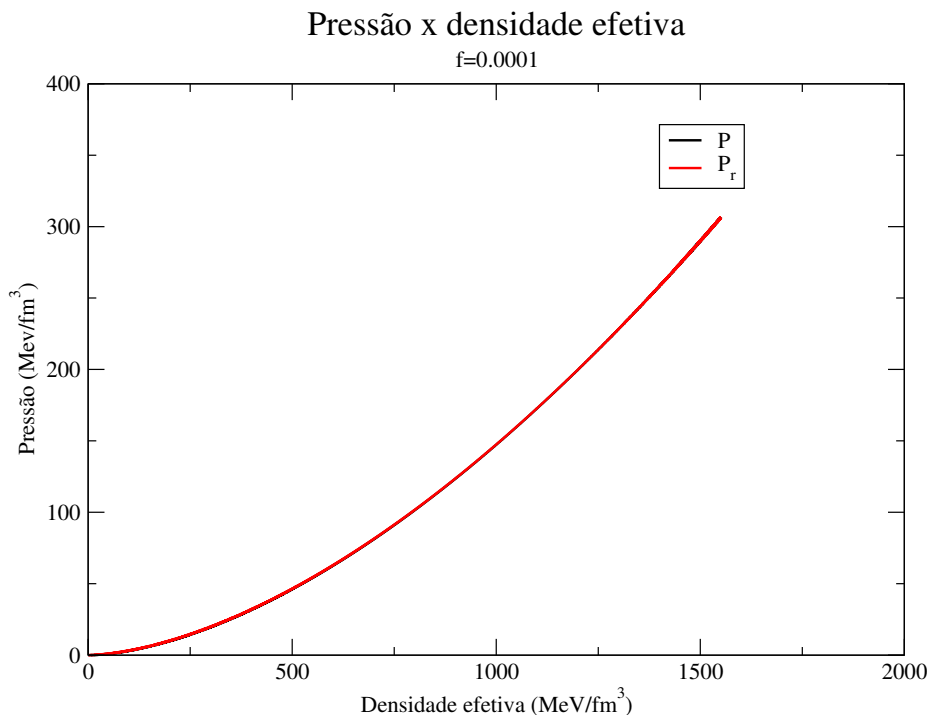


Figura 4.7: Perfil p e p_r em função de ϵ , para $f = 0.0001$.

temos que tanto a pressão quando a densidade de matéria-energia se anulam na superfície, evitando assim qualquer inconsistência como no caso anterior. Deste modo, podemos concluir que a condição de contorno correta no estudo das estrelas anisotrópicas é a de que a pressão do gás se anule na superfície e não a componente radial do tensor energia-momento, que é a condição de contorno usada na literatura [14]. Além disso como já mostramos, as duas soluções são equivalentes com essa condição de contorno.

Ainda assim é importante lembrar que tanto no caso usual quanto no caso anisotrópico, as componentes angulares do tensor energia-momento não se anulam na superfície. Mas isso não é problema, pois embora a pressão associada a essas componentes não seja nula na superfície, sua derivada é sempre nula. Devemos lembrar que como estamos admitindo simetria esférica no nosso problema, em todos os pontos da superfície essas componentes terão o mesmo valor, de modo que sua derivada se anulará.

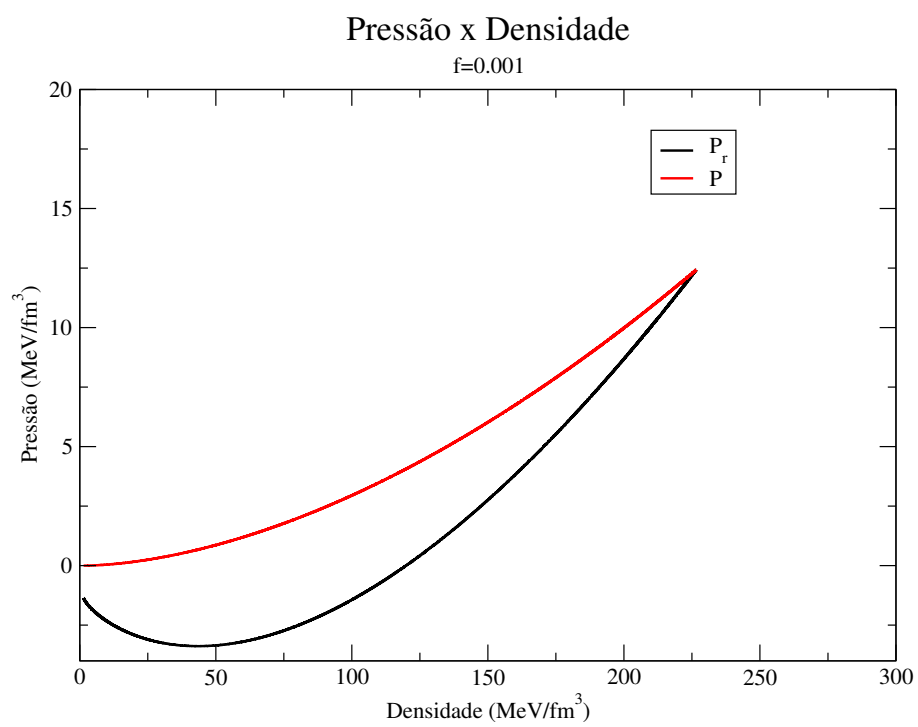


Figura 4.8: Perfil p e p_r em função de ϵ , para $f = 0.001$.

Capítulo 5

Conclusão

Nosso objetivo com esse trabalho foi fazer um estudo detalhado sobre a estrutura de uma estrela relativística politrópica e carregada e da anisotropia decorrente do campo elétrico que surge no interior da estrela. Para isso fizemos um estudo de estrelas politrópicas, tanto newtonianas como relativísticas. Com esse estudo comprovamos a versatilidade da equação de estado politrópica, o que nos motivou a utilizar essa equação de estado para o caso carregado. No segundo capítulo reproduzimos uma técnica bastante útil, que só pode ser utilizada em uma estrela com equação de estado politrópica. Ela nos permitiu simplificar as equações de estrutura da estrela, tanto no caso newtoniano quanto no relativístico.

Depois de ter estudado as estrelas politrópicas de maneira geral, particularizamos nosso estudo para as estrelas politrópicas carregadas. Tivemos que primeiramente fazer um *Ansatz* para a distribuição de carga, supondo que esta era proporcional à densidade de matéria-energia, de maneira que quanto mais carga a estrela possuir mais massa ela terá para poder manter essa carga em sua estrutura. Tendo feito essa suposição e utilizando uma equação de estado politrópica, encontramos então a solução para esse problema. Utilizamos alguns valores para a constante de proporcionalidade f entre a distribuição de carga e a densidade de matéria-energia de maneira a obtermos soluções com mais ou menos carga. Uma vez encontrada as soluções, ficou claro que para pequenos valores de f a estrela se comportava como no caso neutro. Conforme fomos aumentando o valor de f as massas e os raios das estrelas foram aumentando bastante, como era de se esperar. Uma vez que colocamos mais carga no interior da estrela um campo elétrico cada vez maior se estabelece, e junto dele uma força repulsiva que ajuda o gás no interior a equilibrar a contração gravitacional. Ainda assim, encontramos um limite para a quantidade de carga que a estrutura da estrela pode agüentar: vimos que não é possível encontrar soluções para valores de f maiores que 0.0011, o que significa uma carga muito grande $Q \sim 10^{20}C$. Para cargas superiores a esse valor

o campo elétrico é tão grande que o gradiente de pressão associado a ele somado ao gradiente de pressão gravitacional, faz com que o gradiente total de pressão se torne cada vez mais próximo de zero, podendo inclusive tornar-se positivo. Desta maneira, a pressão não tende mais a zero e pode até ser crescente, impedindo a formação de uma estrela estável.

Outro comportamento interessante que foi observado nessas estrelas é que na equação que representa seu equilíbrio hidrostático não surge apenas um termo associado à repulsão elétrica mas também um novo termo no fator associado ao gradiente de pressão gravitacional. Este termo que tem sua origem na pressão associada à densidade de energia elétrica acopla-se diretamente com a gravidade enfraquecendo o gradiente gravitacional.

No nosso estudo, vimos que, para que a carga tenha algum efeito razoável na estrutura da estrela, o quadrado do campo elétrico tem que ser da ordem da pressão, o que significa quantitativamente $E \sim 10^{22}V/m$. Claramente um campo elétrico dessa magnitude está acima do limite de criação de pares de Schwinger ($E \sim 10^{18}V/m$), o que significa que o campo deverá diminuir com a criação dos pares elétron-pósitron. Este é um argumento que parece indicar a dificuldade de campos tão intensos dentro de uma estrela de nêutrons. Mesmo assim devemos considerar que o limite de Schwinger pode ser maior no caso de meios densos. Apesar disso, continua interessante o estudo do campo elétrico no interior de estrelas, pois, como sabemos, a ordem de grandeza da pressão em uma anã branca é bem menor que numa estrela de nêutrons fazendo com que a magnitude do campo elétrico seja menor que o limite de Schwinger. Estudos recentes, também indicam a possibilidade da criação de campos elétricos em estrelas de quarks [24].

Nós obtivemos estrelas de massa e raio bastante elevados, se comparados com as estrelas de nêutrons. Como sabemos, ainda não foi observada nenhuma estrela com tais propriedades. Caso algum dia alguma estrela seja observada com raios e massas acima dos limites estabelecidos para estrelas de nêutrons, algum mecanismo teria de ser proposto para explicar como essas estrelas suportam o excesso de massa, e um campo elétrico poderia ser um bom candidato. Ainda que essas estrelas nunca tenham sido observadas, não temos de descartá-las completamente, pois ainda podemos supor que elas sejam estados transientes de estrelas de nêutrons. Estrelas que por algum motivo ganharam carga, talvez por acreção ou devido ao fato de os elétrons por serem mais leves conseguirem escapar, e que por serem instáveis acabaram colapsando tornando-se um buraco negro carregado.

Depois do estudo da estrutura de uma estrela carregada, analisamos a de uma estrela anisotrópica. A anisotropia aqui é definida por uma diferença entre as compo-

nentes radial e angulares do tensor energia-momento. Todas as equações estruturais foram rededuzidas para uma estrela genérica que apresente estas características. Vimos também que uma estrela carregada como definida no capítulo 3 é um caso de uma estrutura anisotrópica. Dessa maneira encontramos um bom teste para o formalismo anisotrópico. Como já tínhamos encontrado a solução para a estrela carregada, pudemos resolver o problema utilizando o formalismo anisotrópico e testar sua validade. Fizemos isso de maneira completamente análoga à solução usual de maneira a conseguirmos comparar os resultados. Encontramos estrelas menores, menos massivas e com menos carga. Devíamos então ser capazes de explicar essa fenomenologia, que num primeiro momento pode até parecer que gera estrelas mais estáveis. Mostramos então, que a diferença entre o tratamento usual e anisotrópico do problema se resume à uma troca de variáveis. Sendo assim, por que encontramos estrelas tão diferentes? A resposta a essa pergunta surgiu das condições de contorno. As condições de contorno utilizadas no caso anisotrópico implicam que a componente radial do tensor energia-momento se anule na superfície da estrela, enquanto que no caso usual exigimos que a pressão termodinâmica do gás seja zero. Mostramos então que a condição de contorno imposta no caso anisotrópico gera uma situação física insólita, pois ela implica que a pressão do gás na superfície seja não nula. Dessa maneira, como a pressão do gás logo após a estrela terminar é zero, isso geraria uma descontinuidade na pressão gerando uma força não nula e para fora da superfície da estrela.

A conclusão apresentada no último parágrafo mostrou-se correta, quando utilizamos nas equações anisotrópicas as condições de contorno do caso usual e conseguimos reproduzir com perfeição os resultados obtidos previamente. Esta é nossa principal contribuição com este trabalho ao mostrar que as condições de contorno do formalismo anisotrópico devem ser as mesmas de qualquer estrela (pressão nula na superfície).

Referências Bibliográficas

- [1] S. Chandrasekhar *An introduction to the study of stellar structure*, Dover (1967).
- [2] Robert F. Tooper, *Am. Phys. Journ.* **140**, 434 (1964).
- [3] J. D. Bekenstein, *Phys. Rev. D* **4** (1971) 2185.
- [4] F. de Felice, Y. Yu and Z. Fang, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **277** (1995) L17.
- [5] F. de Felice, S. M. Liu and Y. Q. Yu, *Class. Quantum Grav.* **16** (1999) 2669.
- [6] P. Anninos and T. Rothman, *Phys. Rev. D* **65** (2001) 024003.
- [7] A. Papapetrou, *Proc. R. Irish Acad.* **81** (1947) 191.
- [8] W. B. Bonnor and S. B. P. Wickramasuriya, *Mon. Not. R. Astr. Soc.* **170** (1975) 643.
- [9] S. Rosseland, *Mont. Not. Royal Astronomical Society* **84** (1924) 720.
- [10] N. K. Glendenning, *Compact Stars: Nuclear Physics, Particle Physics, and General Relativity*, Springer-Verlag (2000).
- [11] M. Malheiro, R. Picanço, S. Ray, J. P. S. Lemos and V. T. Zanchin ; *Int. J. Mod. Phys.*, **D13** - 1375 - 2004
- [12] S. Ray, A. L. Espíndola, M. Malheiro. J. P. S. Lemos and V. T. Zanchin; *Phys. Rev. D***68** - 084004 - 2003
- [13] R. Picanço, M. Malheiro and S. Ray; *Int. J. Mod. Phys.*, **D13** - 1441 - 2004
- [14] K. Dev, M. Gleiser; *Gen.Rel.Grav.*, **34** , 1793-1818, 2002
- [15] R. Picanço, M. Malheiro - Trabalho apresentado na conferência *Magnetic Fields in the Universe*, Angra dos Reis - RJ (2004)
- [16] A. S. Eddington, *Internal Constitution of the stars*, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1926.

- [17] J. Bally and E. R. Harrison, ApJ **220** (1978) 743.
- [18] J. L. Zhang, W. Y. Chau and T. Y. Deng, Astrophys. and Space Sc. **88** (1982) 81.
- [19] Y. Q. Yu and S. M. Liu, Comm. Teor. Phys. **33** (2000) 571.
- [20] S. D. Majumdar, Phys. Rev. D **72** (1947) 390.
- [21] B. V. Ivanov, Phys. Rev. D. **65** (2002) 104001.
- [22] A. R. Taurines, C. A. Vasconcellos, M. Malheiro and M. Chiapparini, Phys. Rev. C **63** (2001) 065801.
- [23] N. K. Glendenning, F. Weber and S. A. Moszkowski, Phys. Rev. C **45** (1992) 844.
- [24] F. Weber *Pulsar as astrophysical laboratories for nuclear and particle physics*, IOP (1999).

Apêndice A

Os Símbolos de Christoffel de 2^a Espécie

Neste apêndice iremos fazer uma breve discussão sobre os Símbolos de Christoffel de 2^a Espécie. Estes objetos aparecem no cálculo da divergência do tensor Energia-Momento. Este cálculo foi bastante utilizado ao longo desta dissertação e portanto achamos interessante mostrar com mais detalhe os procedimentos utilizados para chegarmos a esses elementos.

Para calcularmos os Símbolos, vamos utilizar a seguinte métrica:

$$ds^2 = e^{\nu(r)}c^2dt^2 - e^{\lambda(r)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \text{sen}^2\theta d\phi^2). \quad (\text{A.1})$$

Os símbolos de Christoffel de 2^a espécie são definidos por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = g^{\sigma\eta}[\mu\nu, \eta]. \quad (\text{A.2})$$

onde $[\mu\nu, \eta]$ é o Símbolo de Christoffel de 1^a Espécie

$$[\mu\nu, \eta] = \left(\frac{\partial g_{\nu\eta}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\eta}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\eta} \right). \quad (\text{A.3})$$

Com essas definições podemos calcular os Símbolos de Christoffel de 2^a espécie, cujo resultado é

$$\Gamma_{10}^0 = \frac{1}{2} \frac{d\nu}{dr}, \quad \Gamma_{22}^1 = -re^{-\lambda}, \quad (\text{A.4})$$

$$\Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2} \frac{d\nu}{dr}, \quad \Gamma_{33}^1 = -r\text{sen}^2(\theta)e^{-\lambda}, \quad (\text{A.5})$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dr}, \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}, \quad (\text{A.6})$$

$$\Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{33}^2 = -\operatorname{sen}\theta\cos\theta, \quad (\text{A.7})$$

$$\Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{23}^3 = \operatorname{ctg}\theta, \quad (\text{A.8})$$

$$\Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{32}^3 = \operatorname{ctg}\theta, \quad (\text{A.9})$$

$$\Gamma_{00}^1 = -\frac{1}{2}\frac{d\nu}{dr}e^{\nu-\lambda}. \quad (\text{A.10})$$

Como veremos no próximo apêndice, os símbolos de Christoffel serão utilizados para o cálculo da equação de Tolam-Oppenheimer-Volkoff.

Apêndice B

A Equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff

Neste apêndice iremos apresentar de maneira detalhada os procedimentos que devem ser feitos para se obter a Equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff. Faremos para o caso neutro pois o cálculo é facilmente generalizado para o caso carregado.

Consideremos então o tensor Energia-Momento como

$$T_{\nu}^{\mu} = (p + \rho c^2)v^{\mu}v_{\nu} + p\delta_{\nu}^{\mu}. \quad (\text{B.1})$$

Devemos impor a conservação do tensor Energia-Momento, isto é, a anulação de sua divergência ($T_{\nu}^{\mu}{}_{;\mu} = 0$). A divergência de um tensor misto é dada por

$$T_{\nu}^{\mu}{}_{;\mu} = \frac{\partial T_{\nu}^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + T_{\nu}^{\kappa}\Gamma_{\mu\kappa}^{\mu} - T_{\eta}^{\mu}\Gamma_{\mu\nu}^{\eta}. \quad (\text{B.2})$$

A equação acima representa um sistema de 4 equações diferenciais. Como nosso tensor tem simetria esférica devemos apenas nos preocupar com a parte radial desse sistema, de modo que ficamos com:

$$T_{1;0}^0 + T_{1;1}^1 + T_{1;2}^2 + T_{1;3}^3 = 0. \quad (\text{B.3})$$

Resolvendo a equação acima e usando os Símbolos de Christoffel de 2ª espécie calculados no apêndice anterior encontramos:

$$\frac{dp}{dr} + \frac{1}{2}(p + \rho c^2)\frac{d\nu}{dr} = 0. \quad (\text{B.4})$$

Para chegar na equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff em sua forma final precisamos encontrar a expressão para $\frac{d\nu}{dr}$. Para fazer isso vamos definir o seguinte elemento da métrica:

$$e^\lambda = 1 - 2G \frac{m(r)}{c^2 r}. \quad (\text{B.5})$$

Derivando a equação acima e usando na Eq.(2.17) podemos encontrar:

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho c^2, \quad (\text{B.6})$$

que é a equação que nos define a massa da estrela.

Agora precisamos somas as duas equações de campo (2.17) e (2.18) para encontrar:

$$e^{-\lambda} \left(\frac{1}{r} \frac{d\nu}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d\lambda}{dr} \right) = \frac{8\pi G}{c} (p + \epsilon). \quad (\text{B.7})$$

Utilizando as Eqs. (B.6) e (B.5) encontramos

$$\frac{d\nu}{dr} = \left(\frac{2G [m(r) + 4\pi r^3 (\frac{p}{c^2})]}{c^2 r^2 \left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r} \right)} \right). \quad (\text{B.8})$$

Substituindo em (B.4) encontramos:

$$\frac{dp}{dr} = - \left(\frac{G [m(r) + 4\pi r^3 (\frac{p}{c^2})]}{c^2 r^2 \left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r} \right)} \right) (p + \rho c^2). \quad (\text{B.9})$$

Onde finalmente encontramos a equação de Tolman-Oppenheimer-Volkoff . Os procedimentos aqui apresentados podem ser facilmente generalizados para outras situações, devendo apenas fazer as substituições apropriadas do Tensor Energia-Momento e da métrica.

Apêndice C

Sobre as unidades

Faremos neste apêndice uma discussão sobre as unidades utilizadas para a carga, o campo elétrico e a constante de proporcionalidade entre a distribuição de carga e a densidade de matéria-energia.

C.1 A Carga elétrica

Podemos ver do tensor Energia-Momento da estrela carregada (3.8) que dimensionalmente

$$\left[\frac{Q^2}{r^4} \right] = [p] = \frac{MeV}{fm^3}, \quad (C.1)$$

temos então:

$$[Q^2] = MeV fm \rightarrow [Q] = (MeV fm)^{1/2}. \quad (C.2)$$

Para convertermos essa unidade para unidades convencionais utilizamos a constante de estrutura-fina:

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}, \quad (C.3)$$

que nos leva ao seguinte fator de conversão:

$$1esu = 2.51 \times 10^{19} (MeV fm)^{1/2}. \quad (C.4)$$

Sabendo que a conversão entre statCoulomb para Coulombs é dada por

$$1C = 2.998 \times 10^9 esu. \quad (C.5)$$

chegamos finalmente à fórmula de conversão:

$$1C = 0.75 \times 10^{19} (MeV fm)^{1/2}. \quad (C.6)$$

C.2 O Campo Elétrico

Sabemos que a unidade do campo elétrico é dada por

$$[E] = \left[\frac{Q}{r^2} \right] = \left(\frac{MeV}{fm^3} \right)^{1/2} \quad (C.7)$$

Utilizando a conversão encontrada acima para a carga e multiplicando por $1/4\pi\epsilon_0$, podemos chegar à

$$\left(\frac{MeV}{fm^3} \right)^{1/2} = 1.2 \times 10^{21} V/m. \quad (C.8)$$

C.3 A constante f

Neste trabalho as unidades utilizadas para a distribuição de carga são

$$\rho_{ch} = \frac{1}{km} \left(\frac{MeV}{fm^3} \right)^{1/2}. \quad (C.9)$$

Estas unidades misturadas (fm e km) aparecem pois quando integramos ρ_{ch} utilizamos a variável r em quilômetros. Dessa maneira, segundo nosso ansatz (3.25) para a distribuição de carga $\rho_{ch} = f \times \epsilon$, onde $[\epsilon] = MeV/fm^3$, nossa constante f deve ter as seguinte unidade

$$[f] = \frac{1}{km} \left(\frac{MeV}{fm^3} \right)^{-1/2}. \quad (C.10)$$

Podemos também escrever esta relação em unidades geométricas

$$\rho_{ch} = \alpha \times \rho, \quad (C.11)$$

onde a carga é escrita em unidades de massa e a densidade de cargas em unidades de

densidade de massa. Com isso nossa constante f pode ser relacionada com α como:

$$\alpha = f \times \frac{0.224536}{\sqrt{G}} = f \times 0.86924 \times 10^3. \quad (\text{C.12})$$

Substituindo os valores de f que utilizamos nesse trabalho encontramos

$$f = 0.0001 \rightarrow \alpha = 0.086924, \quad (\text{C.13})$$

$$f = 0.0005 \rightarrow \alpha = 0.43462, \quad (\text{C.14})$$

$$f = 0.0008 \rightarrow \alpha = 0.69539, \quad (\text{C.15})$$

$$f = 0.0010 \rightarrow \alpha = 0.86924, \quad (\text{C.16})$$

$$f = 0.0011 \rightarrow \alpha = 0.95616. \quad (\text{C.17})$$

Isto quer dizer por exemplo, para o caso mais carregado que 95% da densidade de matéria da estrela é carregada.