



**INSTITUTO DE FÍSICA**  
Universidade Federal Fluminense

# Geração de Ondas e Produção de Pares Devido às Interações Neutrino/Laser-Plasma

Luciana Antunes Rios

*Tese apresentada como requisito parcial para  
obtenção do título de Doutor em Física.*

**Orientador:**

**Prof. Dr. Antonio Serbeto**

Niterói - R.J.

2006

*Aos meus amigos(as) e minha família, e em especial aos meus pais,  
por todo amor, carinho e compreensão.*

---

## Agradecimentos

### Agradeço

- Ao Dr. Antonio Serbeto, pela orientação e por toda a atenção dispensada durante estes seis anos;
- A minha família, em especial aos meus pais João e Neuda e minha irmã Aline, por todo apoio e compreensão, sem os quais não teria chegado até aqui;
- Aos professores do Instituto de Física pelo apoio, em especial aos Professores Thadeu Penna, Maria Teresa Thomaz, Jurgen Stilck, Roberto Bechara e King Hay Tsui;
- Aos meus amigos da pós-graduação, Karen (e José), Eliel, Marcelo (e Keity), Cláudia, Luís Fernando, André, Cinthya, Aquino, Bernardo, Wellington, Scheilla, Luciano, José Augusto, Adriano, Márcia, Antônio, Luís Alberto, Carlos Eduardo Gralha, Carla, Rodrigo, Carlos Eduardo Cadu, Fernanda, Mariana, Odilon, Edésio e todos os outros, pelas conversas científicas, existenciais e as que não eram uma coisa nem outra; pelos almoços, rodízios e sessões de cinema, ou simplesmente pela amizade e companheirismo ao longo destes anos;
- Aos funcionários da biblioteca e das secretarias por toda atenção e ajuda, em especial a Ana, Lúcia, Irani, João, Luana e Iurié;
- Aos meus amigos e ex-companheiros do Observatório Nacional e do Observatório do Valongo, em especial a Flávia Pedroza, Flávia Requeijo, Marcelo (e Elaine), Sandro, Paulo, Luciana Pompéia, Jorge BA, Ricardo, Bia, Annelisie, César (e Élcia), Thaís, Cláudia, Jorge Márcio, André, Alessandro,

Simone, Jaime, Verônica, Wagner, Eugênio e Dario, por tantos anos de amizade e momentos felizes, e pelo apoio nos vários momentos difíceis;

- Aos meus demais amigos, cientistas ou não, em especial a Vânia Camargo, por tantos anos de amizade e confiança;
- A todas as outras pessoas que, de uma maneira ou de outra, me ajudaram a chegar até aqui;
- A CAPES pelo suporte financeiro durante o mestrado e o doutorado.

## Resumo

Nas últimas décadas o interesse em mecanismos de aceleração de partículas utilizando plasmas têm aumentado, motivado em grande parte pela possibilidade de construção de aceleradores de partículas mais potentes. Estes mecanismos utilizam ondas de plasma geradas durante a interação de feixes de partículas e lasers com o meio para acelerar partículas. É uma vez que plasma é o estado mais comum da matéria no universo, muitos cientistas acreditam que estes mecanismos de aceleração e seus processos associados possam ter papel fundamental em astrofísica e geofísica espacial, e então ajudar a solucionar muitas questões não resolvidas.

Assim como os elétrons e fótons, os neutrinos também podem gerar efeitos coletivos no plasma. O acoplamento neutrino-plasma é possível devido à carga efetiva adquirida pelo neutrino durante sua propagação pelo meio. No entanto, devido à natureza do neutrino, apenas intensos fluxos destas partículas têm efeito significativo sobre o plasma. Por essa razão, as interações neutrino-plasma são importantes em ambientes astrofísicos onde grandes concentrações de neutrinos são liberadas, como é o caso das supernovas, por exemplo.

Neste trabalho vamos utilizar um modelo clássico de fluidos para investigar as interações neutrino-plasma. Vamos estudar a excitação de ondas de plasma e a aceleração de partículas, além de outros aspectos como a produção de pares e a carga efetiva do neutrino em um plasma magnetizado. Analisaremos também a produção de pares devido às interações laser-plasma, e discutiremos a importância dos nossos resultados no estudo de vários problemas em astrofísica.

## Abstract

In the last decades, the interest in particle acceleration mechanisms using plasmas has increased, caused mainly by the promises of an accelerator at the highest energies. These plasma-based mechanisms use plasma waves produced during laser/particle-plasma interactions to accelerate particles. And since plasma is the ordinary state of matter in the universe, many scientists believe that these acceleration mechanisms and their associated processes can have a fundamental role in astrophysics and space physics, and can help to answer many unresolved questions.

Like electrons and photons, neutrinos can also generate collective effects in plasmas. The neutrino-plasma coupling is possible due to the effective charge that neutrinos acquire during their propagation through the medium. However, due to the nature of the weak force, only intense fluxes of neutrinos have a significant effect on a plasma. Therefore, the neutrino-plasma interactions are important in astrophysical environments where huge fluxes of neutrinos are released, like in supernovae, for example.

In the present work, a classical fluid description is used to investigate neutrino-plasma interactions. We study the generation of plasma waves and particle acceleration, besides other aspects like pair production and the neutrino effective charge in a magnetized plasma. We also analyze pair production due to laser-plasma interactions, and verify that our results can be important in the study of many problems in astrophysics.

# Sumário

<b>Índice</b>	<b>vii</b>
<b>1 Introdução.</b>	<b>1</b>
<b>2 As Interações Neutrino-Plasma (Parte I)</b>	<b>8</b>
2.1 Introdução . . . . .	8
2.2 Dinâmica dos Neutrinos, Carga Efetiva e Força Ponderomotiva . .	11
2.2.1 Dinâmica dos Neutrinos em um Plasma Denso . . . . .	11
2.2.2 Carga Efetiva do Neutrino . . . . .	15
2.2.3 Força Ponderomotiva . . . . .	16
2.3 Teoria Cinética e Equações de Fluido . . . . .	18
2.3.1 Teoria Cinética . . . . .	18
2.3.2 Descrição de Fluidos . . . . .	19
2.4 Plasma de Elétrons e Íons . . . . .	22
2.4.1 Instabilidade de Feixe . . . . .	22
2.4.2 Ondas de Plasma e Aceleração de Elétrons . . . . .	28
2.4.3 Produção de Pares . . . . .	36
<b>3 As Interações Neutrino-Plasma (Parte II)</b>	<b>39</b>
3.1 Plasma Magnetizado de Elétrons e Pósitrons . . . . .	40

---

3.1.1	Carga Efetiva . . . . .	40
3.1.2	Ondas de Plasma e Aceleração de Pares . . . . .	51
<b>4</b>	<b>Produção de Pares Devido às Interações Laser-Plasma</b>	<b>63</b>
4.1	Introdução . . . . .	63
4.2	Geração de Ondas . . . . .	65
4.3	Aceleração de Partículas e Produção de Pares . . . . .	69
<b>5</b>	<b>Conclusões e Perspectivas</b>	<b>78</b>
<b>A</b>	<b>Derivação das Equações de Fluido.</b>	<b>82</b>



# Capítulo 1

## Introdução.

Processos de aceleração de partículas carregadas são um importante assunto em muitas áreas da física, como em astrofísica, geofísica espacial, e física experimental e aplicada. Muitos fenômenos astrofísicos e espaciais envolvem processos de aceleração de partículas, como os raios cósmicos e as auroras. Na física experimental (de aceleradores), aceleradores de partículas podem usar diferentes mecanismos de aceleração. Nas últimas décadas estas máquinas possibilitaram grandes avanços na física de partículas, nuclear, da matéria condensada, e na física de materiais, assim como em outras ciências e áreas técnicas. Entretanto, novas descobertas requerem aceleradores com potências ainda maiores que as dos atuais, mas parece que o limite do que é tecnológica e economicamente viável foi atingido.

Justo em tempo, resultados recentes [1, 2, 3, 4] têm aumentado o interesse nos aceleradores de plasma [5]. Já se passaram 26 anos desde que Tajima e Dawson [6] propuseram o uso de feixes de laser para excitar ondas de plasma a serem utilizadas na aceleração de elétrons. Desde então houve um enorme progresso, tanto teórico quanto experimental, em parte devido aos avanços tecnológicos,

particularmente no que se refere aos lasers. Esta nova tecnologia tornará possível a construção de aceleradores muito mais potentes, e também de pequenos dispositivos para aplicações de baixa energia, incluindo medicina nuclear, biologia estrutural e processamento de lixo nuclear. E uma vez que plasma é o estado mais comum da matéria no universo, muitos cientistas acreditam que alguns destes mecanismos de aceleração em plasma e seus processos associados desempenham um papel importante em cenários astrofísicos, e então seu estudo pode ajudar a solucionar questões em aberto como o problema de injeção [7] e a aceleração dos raios cósmicos ultra-energéticos (UHECRs) [8].

Aceleradores baseados em plasma são de grande interesse devido a sua capacidade de sustentar gradientes de aceleração extremamente altos. Enquanto nos aceleradores lineares convencionais estes gradientes são limitados, em parte devido ao *breakdown* que ocorre nas paredes da estrutura, plasmas podem suportar ondas de plasma eletrônico com velocidades de fase  $v_\phi$  próximas à velocidade da luz no vácuo. No regime linear, o campo elétrico de uma onda de plasma tem a forma  $E = E_0 \sin(x - v_\phi t)$  e sua amplitude  $E_0$  pode alcançar o campo de quebra de onda não-relativístico,

$$E_{wb}[V/cm] = 0.96(n_0)^{1/2},$$

onde  $n_0$  é a densidade eletrônica em  $\text{cm}^{-3}$ . Entretanto, é possível que a amplitude máxima de uma onda não-linear exceda este valor. Podemos mostrar que a amplitude máxima de uma onda de plasma é dada por [5]

$$E_{WB}[V/cm] = 1.36 [(\gamma_\phi - 1) n_0]^{1/2},$$

onde  $\gamma_\phi = (1 - v_\phi^2/c^2)^{-1/2}$  é o fator de Lorentz. O limite acima é chamado de campo de quebra de onda relativístico e foi derivado pela primeira vez por

Akhiezer e Polovin [9].

Entre os vários esquemas de aceleração baseados em plasma investigados, existem dois que parecem os mais promissores: os aceleradores *plasma wakefield* e *laser wakefield*. Os aceleradores baseados em plasma nos quais a onda de plasma é gerada por um ou mais feixes de elétrons são chamados de aceleradores *plasma wakefield*. A origem física da onda de plasma neste caso está na força associada ao feixe de elétrons. Quando um feixe eletrônico se propaga em um plasma uniforme, sua densidade gera uma separação de carga no meio devido à repulsão entre os elétrons do feixe e do plasma. Esta separação de carga dá origem a um campo eletrostático cuja "relaxação" cria o *wakefield*. A idéia de utilizar ondas de plasma geradas por feixes de elétrons para acelerar partículas foi proposta pela primeira vez por Fainberg em 1956 [10], e mais recentemente o mecanismo básico de aceleração no regime linear foi proposto e analisado por Chen *et al.* em 1985 [11]. Além dos elétrons, outras partículas podem gerar ondas durante sua interação com um plasma. Pósitrons [1], prótons [12, 13] e também neutrinos [14, 15] podem produzir intensos *wakefields* devido às interações não-lineares com o meio, e então partículas "capturadas" pelas ondas podem ser aceleradas a altas energias.

No mecanismo *laser wakefield* um pulso de laser de curta duração gera a onda de plasma responsável pela aceleração de partículas. Neste caso o *wakefield* é excitado devido à força ponderomotiva do pulso, a qual está associada à pressão de radiação do laser. Este mecanismo foi proposto primeiramente por Tajima e Dawson em 1979 [6], mas tal conceito tornou-se viável apenas quando a tecnologia para a geração de lasers ultra-intensos foi desenvolvida. O recente progresso experimental na aceleração por laser [2, 3, 4] e seus processos associados têm mostrado que intensos pulsos eletromagnéticos podem prontamente acelerar

partículas carregadas a altas energias.

Em ambos os mecanismos de aceleração apenas um pequeno número de elétrons é "capturado" pelo *wakefield*. Estas partículas podem então atingir energias muito altas, sendo "liberadas" quando a quebra da onda ocorre. Como mencionamos anteriormente, ondas infinitamente grandes não ocorrem; conforme a amplitude da onda cresce, as hipóteses da teoria linear são violadas, e a onda torna-se instável e quebra. Neste limite, os elétrons que oscilam com a onda não podem ser acelerados pelo *wakefield*, uma vez que estão fora de fase com o mesmo. Apenas partículas que não fazem parte da onda podem ser "capturadas" e então aceleradas, já que estão se movendo com a fase correta e com velocidade próxima a  $v_\phi$  [16]. A introdução de um campo magnético externo perpendicular à direção de propagação da onda pode evitar o problema da desintonia de fase e dá origem ao mecanismo de aceleração conhecido como *surfatron* [17]. Aqui a interação onda-partícula é mantida por mais tempo, proporcionando um maior ganho de energia para as partículas. Durante o processo de aceleração, as ondas perdem energia através do amortecimento de Landau. No caso das colisões entre as partículas do plasma serem significativas, as ondas também são atenuadas devido ao amortecimento colisional. Em relação ao mecanismo de quebra de onda, ele tem sido analisado em uma e até em duas dimensões [18]; para ondas em duas e três dimensões espera-se que esse processo apresente propriedades mais complicadas [19].

Como no caso do mecanismo *bétatron* [20], utilizado para acelerar partículas em laboratório e também atuante na magnetosfera da Terra, alguns autores acreditam que os mecanismos descritos acima também possam ser importantes em ambientes astrofísicos. McClements *et al.* [7] propuseram o mecanismo *surfatron* excitado por íons como uma possível solução para o chamado "problema

de injeção" [21]. Dieckmann *et al.* [12] investigaram a possibilidade de partículas aceleradas pelas ondas geradas por feixes de prótons serem as responsáveis pela emissão síncrotron de vários objetos astrofísicos. No que se refere aos UHECRs, Chen *et al.* [8] sugerem o mecanismo *plasma wakefield* como responsável pela aceleração de raios cósmicos na atmosfera dos  $\gamma$  ray bursts (GRBs). Acredita-se também que o estudo das interações laser-plasma pode ser útil na compreensão de fenômenos ocorrendo na magnetosfera de pulsares, onde é comum a interação entre a intensa radiação eletromagnética e o plasma [6]. Os resultados experimentais recentes relacionados aos processos *plasma wakefield* e *laser wakefield* também fazem com que os cientistas acreditem que a física básica aqui envolvida pode ajudar na análise dos mecanismos presentes em fenômenos de astrofísica de altas energias [22].

Uma vez acelerados, os elétrons podem produzir pares elétron-pósitron no potencial Coulombiano de um núcleo através de fótons virtuais (processo Bhabha tridente [23]). Neste processo os elétrons com energia cinética maior ou igual ao limiar  $3m_0c^2$  podem produzir pares  $e^-e^+$  ao serem espalhados no potencial de Coulomb de um núcleo pesado [24]

$$e + A \rightarrow e' + A' + e^-e^+,$$

onde  $A$  representa um núcleo pesado e  $A'$  seu estado final, com mesma energia mas momento diferente. Este mecanismo difere do processo Bethe-Heitler, que ocorre em dois estágios [23, 25],

$$e + A_1 \rightarrow e' + A'_1 + \gamma, \quad \gamma + A_2 \rightarrow A'_2 + e^-e^+.$$

O processo tridente é um importante mecanismo de perda de energia em magnetosferas de pulsares [26] e seu estudo pode nos ajudar a entender a ausência de

rádio-pulsares com alta magnetização [27]. A possibilidade de pares serem produzidos em laboratório através deste mecanismo tem sido analisada, e os resultados obtidos podem ser importantes em física nuclear e também para a compreensão de outros fenômenos em astrofísica, como as explosões de raios  $\gamma$  [28]. Estudos sobre a produção de pares devido a elétrons acelerados diretamente por lasers [29, 30] e pelos *wakefields* [24, 31, 32] têm sido realizados .

Além do processo tridente, outros mecanismos de produção de pares podem atuar, como o de Schwinger [33]. Neste processo pares são produzidos espontaneamente em um campo elétrico constante se a sua intensidade no vácuo exceder o valor crítico  $E_{QED} = 1.3 \times 10^{16}$  V/cm. Uma possibilidade é a produção de pares por meio de intensos pulsos de laser, já que na região focal de um laser com intensidade próxima a  $10^{29}$  W/cm<sup>2</sup> (correspondendo ao campo crítico  $E_{QED}$ ) pares  $e^-e^+$  podem simplesmente "aparecer" no vácuo [34]. Alguns autores já demonstraram teoricamente que a produção experimental de pares via mecanismo de Schwinger é possível [35, 36]. No entanto, a seção de choque deste processo para frequências ópticas (ou menores) é muito pequena para qualquer intensidade de laser, tornando seu efeito insignificante [37].

Neste trabalho utilizamos um modelo clássico de fluidos para investigar as interações neutrino-plasma. Vamos analisar a geração de ondas de plasma, a aceleração de partículas, e a produção de pares nos *wakefields* gerados pelos neutrinos. No Capítulo 2 vamos fazer um breve histórico do assunto, além de derivar o modelo de fluidos utilizado e analisar o caso de um plasma de elétrons e íons. Investigaremos os estágios linear e não-linear da interação, e a produção de pares via processo tridente será determinada. Os efeitos do campo magnético sobre a carga efetiva do neutrino e a geração de ondas para o caso do plasma de elétrons e pósitrons serão analisados no Capítulo 3. Vamos sempre assumir que não ocor-

rem oscilações de neutrinos, e que estas partículas não são criadas ou aniquiladas durante a interação. No Capítulo 4 vamos analisar a produção de pares devido às interações laser-plasma, assunto que começamos a estudar recentemente. Vamos analisar a geração de ondas de plasma e determinar a concentração de pares na presença de um campo magnético externo. Várias situações em astrofísica onde nossos resultados podem ser importantes serão discutidas. O Capítulo 5 é dedicado às conclusões e perspectivas.

# Capítulo 2

## As Interações Neutrino-Plasma (Parte I)

### 2.1 Introdução

Processos envolvendo neutrinos são importantes em uma grande variedade de problemas astrofísicos. Alguns exemplos são o déficit de neutrinos solares [38, 39], as supernovas do Tipo II [40], e as explosões de raios  $\gamma$  (GRBs), onde os neutrinos parecem estar associados à componente de alta energia observada em alguns GRBs [41].

No caso específico das supernovas do Tipo II, acredita-se que os neutrinos liberados durante o colapso do núcleo da estrela sejam os responsáveis pela reativação da onda de choque [40, 42, 43]. Este tipo de supernova resulta do colapso gravitacional de estrelas jovens e de grande massa ( $M > 8M_{\odot}$ ), onde a maior parte da energia gravitacional liberada pela explosão ( $\sim 10^{53}$  ergs) é armazenada nos neutrinos produzidos devido à conversão de prótons em neutrons no interior da estrela. Enquanto o núcleo colapsa, uma onda de choque criada no seu interior



se propaga e "empurra" as camadas mais externas da estrela. Mas devido à forte atração gravitacional e à perda de energia na dissociação de núcleos que compõem o material estelar, o choque pode estacionar. Acredita-se então que os neutrinos provenientes do núcleo da estrela possam reativar a onda de choque: o fluxo de neutrinos deposita uma pequena quantidade de energia (menos de 1%, [40]) e momento no plasma estelar localizado antes do choque estacionado, e esse plasma é então aquecido e se expande, reativando assim a onda de choque. Mas uma questão ainda precisa ser esclarecida: como os neutrinos transferem energia/momento para o plasma ?

Bethe e Wilson [42] consideraram a transferência de energia/momento para o plasma através da absorção e do espalhamento dos neutrinos pelas partículas do plasma. No entanto, a seção de choque  $\sigma_\nu$  para a colisão neutrino-férmion é muito pequena para que ocorra uma transferência significativa de energia dos neutrinos para o plasma ( $\sigma_\nu \propto G_F^2$ , onde  $G_F \approx 9 \times 10^{-38}$  eV cm<sup>3</sup> é a constante de Fermi) [44, 45]. Como sabemos, os neutrinos interagem com a matéria através da força fraca de Fermi. Devido à intensidade extremamente pequena desta força, a propagação dos neutrinos através de um meio material é geralmente descrita como um processo linear e não-auto-consistente realizado por uma única partícula. Entretanto, eventos astrofísicos violentos como as explosões de supernovas (SNs) e os GRBs envolvem a liberação de fluxos de neutrinos extremamente intensos. Sob condições tão extremas, espera-se que processos não-lineares envolvendo neutrinos também ocorram. No Modelo Padrão, as interações fraca e eletromagnética são unificadas, o que claramente indica uma fenomenologia equivalente para neutrinos e elétrons. Esta analogia tem sido explorada, mas somente no trabalho de Bingham *et al.* [14] foi proposta, e analisada, a possibilidade de intensos fluxos de neutrinos gerarem efeitos coletivos não-lineares no plasma.

Sabe-se que os neutrinos adquirem uma carga efetiva [46] ao interagirem com o plasma; é esta carga induzida que permite o acoplamento não-linear entre os neutrinos e as oscilações de plasma. Baseado nesta idéia, Bingham [14] propôs um novo mecanismo de interação onde os neutrinos se acoplam às oscilações de plasma de forma semelhante ao acoplamento laser-plasma que produz efeitos como os espalhamentos Raman e Brillouin. As ondas excitadas pelo fluxo de neutrinos seriam então amortecidas pelo mecanismo de Landau, transferindo assim sua energia para o plasma. Neste caso os neutrinos são descritos por uma equação do tipo da de Klein-Gordon e a taxa de crescimento obtida para a instabilidade é proporcional a  $G_F$ , mesmo valor obtido quando a natureza fermiônica do neutrino é considerada [47].

Hardy e Melrose [48] apresentaram uma versão cinética da instabilidade gerada pelos neutrinos, onde a teoria eletrofraca foi considerada. Os resultados obtidos indicam que a instabilidade é muito fraca para ser relevante em qualquer plasma terrestre ou espacial, e que mesmo o regime reativo considerado por Bingham [14] não seria eficiente no caso das SNs. No entanto, Silva *et al.* [49] mostraram que a análise de Hardy e Melrose contém algumas interpretações incorretas, as quais resultaram na conclusão da irrelevância da força ponderomotiva dos neutrinos durante as explosões de SNs do Tipo II. Uma descrição correta do espectro de neutrinos produzido durante a explosão [50] mostra que a força ponderomotiva destas partículas pode ter um impacto significativo sobre a dinâmica do plasma.

Silva *et al.* [51] apresentaram um modelo auto-consistente para as interações coletivas neutrino-plasma baseado na teoria cinética relativística; aqui as ondas de plasma são excitadas devido a uma instabilidade de feixe (hidrodinâmica). A taxa de crescimento obtida é proporcional a  $G_F^{2/3}$ , maior que a determinada por

## 2.2 Dinâmica dos Neutrinos, Carga Efetiva e Força Ponderomotiva 11

Bingham *et al.* [14]. Se colisões elétron-íon forem incluídas, esta taxa tem um valor um pouco menor,  $\propto G_F$ . Neste modelo a energia é transferida das ondas para o plasma através dos amortecimentos colisional e de Landau. Recentemente Bingham *et al.* [52] confirmaram que a taxa de crescimento para o regime hidrodinâmico (reativo) da instabilidade gerada pelos neutrinos é proporcional a  $G_F^{2/3}$ , enquanto para o regime cinético uma taxa proporcional a  $G_F^2$  é obtida.

Outros aspectos das interações neutrino-plasma também podem ser explorados, como a aceleração de elétrons [53] e a excitação paramétrica de pares de neutrinos [54] pelas ondas geradas durante a interação. Estas interações também podem levar à formação de ondas de choque e sólitons [55]. Neste capítulo vamos derivar uma descrição clássica de fluidos a ser utilizada no estudo dos regimes linear e não-linear das interações neutrino-plasma. Além disso, analisaremos a interação entre os neutrinos e um plasma não-magnetizado de elétrons e íons. Discutiremos aspectos como a geração de ondas de plasma e a produção de pares, assim como as possíveis aplicações em astrofísica.

## 2.2 Dinâmica dos Neutrinos, Carga Efetiva e Força Ponderomotiva

### 2.2.1 Dinâmica dos Neutrinos em um Plasma Denso

Como mencionamos anteriormente, a interação dos neutrinos com a matéria é geralmente descrita como um processo não-auto-consistente [56]. Tal descrição não é válida para intensos fluxos de neutrinos, particularmente porque não leva em conta a reação do meio. No entanto, como os neutrinos interagem com a matéria através da força fraca, apenas pequenas correções na dinâmica de uma

## 2.2 Dinâmica dos Neutrinos, Carga Efetiva e Força Ponderomotiva 12

única partícula são necessárias [57]. A interação fraca pode ser descrita em termos de um potencial efetivo [58, 59] adquirido pelos neutrinos enquanto se propagam pelo meio, o que também pode ser interpretado como um índice de refração para os neutrinos [45]. Este potencial efetivo também leva à carga eletromagnética induzida do neutrino [46].

Em um trabalho pioneiro, Wolfenstein [58] mostrou que os neutrinos adquirem um potencial efetivo  $V_{ef}$  dependente das propriedades do meio e do "sabor" dos neutrinos em questão (eletrônico, muônico ou tauônico). Conseqüentemente, vários novos processos têm sido identificados, dos quais o mais notável é o efeito MSW, que prevê uma significativa conversão de sabor enquanto os neutrinos se propagam através de um meio [59]. Aqui vamos focalizar a dinâmica de um único neutrino, desprezando o efeito MSW. A Hamiltoniana que descreve a propagação de um neutrino é dada pela expressão [59]

$$H = H_0 + H_{int} = \sqrt{\mathbf{p}_\nu^2 c^2 + m_\nu^2 c^4} + V_{ef}, \quad (2.1)$$

onde  $p_\nu$  é o momento do neutrino,  $c$  é a velocidade da luz e  $m_\nu$  é a massa do neutrino, que pode ser não nula de acordo com resultados recentes [60].

Vamos considerar apenas neutrinos eletrônicos em interação com um plasma frio, não-magnetizado e não-colisional de íons e elétrons. Apenas os elétrons contribuem para a interação fraca de Fermi, e então a dinâmica dos íons pode ser desprezada. Baseados na Lagrangeana de interação fornecida por Wolfenstein [58] e utilizando a aproximação semi-clássica (onde os neutrinos são tratados como partículas relativísticas com massa, mas sem spin), Silva *et al.* [61, 62] derivaram a seguinte expressão para o potencial efetivo:

## 2.2 Dinâmica dos Neutrinos, Carga Efetiva e Força Ponderomotiva 13

$$V_{ef} = L_{int} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \left( n_e - \frac{\mathbf{J}_e \cdot \mathbf{v}_\nu}{c^2} \right) (C_V + 1), \quad (2.2)$$

onde  $\mathbf{J}_e$  é a densidade de corrente eletrônica,  $n_e$  é a densidade eletrônica, e  $\mathbf{v}_\nu$  é a velocidade dos neutrinos. Além disso,  $C_V = 1/2 + 2\sin^2\theta_W$ , onde  $\theta_W$  é o ângulo de Weinberg. A equação 2.2 pode ser generalizada para os diferentes tipos de neutrinos e de partículas do plasma. Em relação à aproximação semi-clássica, ela é válida somente quando o comprimento de onda de De Broglie do neutrino  $\lambda_\nu = 2\pi\hbar/p_\nu$  ( $p_\nu$ : momento do neutrino) é muito menor que a escala típica de comprimento dos processos físicos em questão,  $\lambda \approx \lambda_p = 2\pi c/\omega_p$ , onde  $\omega_p$  é a frequência de plasma eletrônica,  $\omega_p = (4\pi e^2 n_e/m_0)^{1/2}$  ( $m_0$  é a massa de repouso do elétron e  $e$  é a unidade de carga elétrica). Fazendo  $C_V \simeq 1$  (ou  $\sin^2\theta_W \simeq 0.23$  - melhor determinação experimental), a equação 2.2 torna-se

$$V_{ef} = -\frac{G_F}{\sqrt{2}} \left( n_e - \frac{\mathbf{J}_e \cdot \mathbf{v}_\nu}{c^2} \right). \quad (2.3)$$

Este resultado concorda com o obtido por Bethe [59], onde foi mostrado que no caso de um plasma estacionário ( $\mathbf{J}_e = n_e \mathbf{v}_e = 0$ ) o efeito dos elétrons sobre um neutrino pode ser reduzido a um potencial efetivo repulsivo  $V_{ef} = \sqrt{2}G_F n_e$ .

A partir da Lagrangeana total para o neutrino  $L = L_0 + L_{int}$ , onde  $L_0$  é a Lagrangeana quase-clássica para o neutrino livre e  $L_{int}$  é dada por 2.3, podemos obter o momento canônico do neutrino  $\mathbf{P}_\nu$ :

$$\mathbf{P}_\nu = \frac{\partial L_\nu}{\partial \mathbf{v}_\nu} = \frac{\partial L_{0\nu}}{\partial \mathbf{v}_\nu} + \frac{\partial L_{int\nu}}{\partial \mathbf{v}_\nu} = \mathbf{p}_\nu + \frac{\sqrt{2}G_F}{c^2} \mathbf{J}_e. \quad (2.4)$$

A Hamiltoniana 2.1 para um único neutrino interagindo com o plasma torna-se então [61]:

## 2.2 Dinâmica dos Neutrinos, Carga Efetiva e Força Ponderomotiva 14

---

$$H = \left[ \left( \mathbf{P}_\nu c - \sqrt{2} \frac{G_F}{c} \mathbf{J}_e \right)^2 + m_\nu^2 c^4 \right]^{1/2} + V_{ef}(\mathbf{r}, t). \quad (2.5)$$

Com a ajuda da equação de Lagrange [63], Silva *et al.* [61] também determinaram a força exercida pelo plasma sobre o neutrino:

$$\mathbf{F}_\nu = \frac{d\mathbf{p}_\nu}{dt} = -\sqrt{2}G_F \left\{ \nabla n_e + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}_e}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v}_\nu \times \nabla \times \mathbf{J}_e \right\}, \quad (2.6)$$

onde  $d/dt = \partial/\partial t + (\mathbf{v}_\nu \cdot \nabla)$ . A semelhança com a estrutura formal da força de Lorentz permite a definição do potencial escalar  $\phi_W$ , do potencial vetor  $\mathbf{A}_W$ , e da carga do neutrino  $e_{W\nu}$  associados à interação fraca,

$$\phi_W = n_e, \quad \mathbf{A}_W = \frac{\mathbf{J}_e}{c}, \quad e_{W\nu} = \sqrt{2}G_F, \quad (2.7)$$

e então 2.6 pode ser reescrita na forma

$$\mathbf{F}_\nu = e_{W\nu} \left\{ \mathbf{E}_e + \frac{\mathbf{v}_\nu}{c} \times \mathbf{B}_e \right\} \quad (2.8)$$

onde as definições

$$\mathbf{E}_e = -\nabla \phi_W - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}_W}{\partial t}, \quad \mathbf{B}_e = \nabla \times \mathbf{A}_W, \quad (2.9)$$

foram utilizadas, e com o *gauge de Lorentz* correspondendo à equação da continuidade do fluido de elétrons,

$$\nabla \cdot \mathbf{A}_W + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi_W}{\partial t} = 0 \equiv \nabla \cdot \mathbf{J}_e + \frac{\partial n_e}{\partial t} = 0.$$

## 2.2 Dinâmica dos Neutrinos, Carga Efetiva e Força Ponderomotiva 15

É clara a analogia entre a dinâmica do elétron na presença de um campo eletromagnético e a do neutrino na presença de um campo de força fraca. Esta analogia indica a possibilidade do neutrino gerar processos coletivos não-lineares em um plasma, do mesmo modo que os elétrons.

### 2.2.2 Carga Efetiva do Neutrino

Enquanto descreviam as propriedades "eletromagnéticas" dos neutrinos em um meio, vários autores introduziram o conceito da carga elétrica efetiva do neutrino. A definição de carga efetiva (ou induzida, ou equivalente) surgiu de maneira independente em cálculos fenomenológicos em física de plasma [61, 64, 65, 66, 67] e na teoria de campos a temperaturas finitas [46, 68].

Sabemos que o neutrino não possui uma carga elétrica no vácuo, apenas a "carga"  $e/2 \sin \theta_W$  associada à força fraca, onde  $\theta_W$  é o ângulo de Weinberg. No entanto, podemos mostrar que em um meio dispersivo o neutrino (com massa arbitrária) adquire uma carga induzida real devido à polarização do meio. O neutrino está sempre sujeito à força fraca gerada permanentemente por perturbações das correntes neutras associadas aos bósons  $Z$ , cujo acoplamento com o neutrino é descrito pela constante  $e/2 \sin \theta_W$ . Como as interações de corrente neutra (troca de bósons  $Z^0$ ) ocorrem entre todos os leptons, neutrinos de qualquer tipo podem influenciar um grande número de partículas carregadas, deslocando elétrons em relação a íons pesados<sup>1</sup> e dando origem à polarização do meio<sup>2</sup>. A carga elétrica induzida é nada mais que a densidade eletrônica não-homogênea

---

<sup>1</sup>Os íons são geralmente considerados fixos, garantindo a neutralidade do meio como um todo.

<sup>2</sup>Este tipo de polarização de um meio dispersivo por um neutrino em movimento é típica não só para plasmas, mas também para qualquer meio que contenha cargas livres (metais, semicondutores, etc.)

## 2.2 Dinâmica dos Neutrinos, Carga Efetiva e Força Ponderomotiva 16

que surge ao redor do neutrino, e é determinada pela constante de acoplamento  $G_F(1 + 4\sin^2\theta_W)/\sqrt{2}$  e pelo raio de Debye do plasma. Enquanto se move juntamente com o neutrino, esta carga efetiva pode induzir radiação eletromagnética e outros processos radiativos [46].

A carga induzida do neutrino em um plasma pode ser determinada de várias maneiras [61, 66]. No caso da física de partículas e da teoria de campos, a interação entre o neutrino e o meio pode ser descrita através do *vertex* do neutrino. Como foi dito anteriormente, não é possível definir uma carga pontual para o neutrino, apenas uma densidade de carga. Além disso, não é esperado que a trajetória de um neutrino seja alterada pela presença de um campo magnético uniforme, embora alguns autores discutam a possibilidade dessa interação [69].

### 2.2.3 Força Ponderomotiva

Até agora discutimos apenas as propriedades dinâmicas dos neutrinos. Apesar da interação ser fraca, vimos que os neutrinos são afetados pela presença do plasma. Do mesmo modo, espera-se que o plasma seja afetado pela distribuição de neutrinos. Uma analogia com as ondas eletromagnéticas pode ser estabelecida: uma distribuição localizada de fótons exerce uma força ponderomotiva sobre o meio, correspondendo ao gradiente da pressão de radiação; portanto, uma força similar deve surgir quando uma distribuição localizada de neutrinos estiver presente [45]. Na verdade, a força ponderomotiva exercida em um meio por um campo não-uniforme (de neutrinos ou fótons) pode também ser vista como um efeito médio causado pelo gradiente de pressão que surge devido a não-homogeneidades na distribuição espacial de partículas ou quase-partículas. Silva *et al.* [70] apresentaram uma abordagem que permite generalizar o conceito de força ponderomotiva para outras condições físicas ou outras quase-partículas além dos fótons.



## 2.2 Dinâmica dos Neutrinos, Carga Efetiva e Força Ponderomotiva 17

Uma vez que o plasma pode suportar modos coletivos, espera-se um acúmulo de neutrinos nas regiões de baixa densidade de elétrons, o que leva a um gradiente de pressão no fluido de neutrinos. Este gradiente causa o aumento da força que os neutrinos exercem sobre o plasma, e conseqüentemente uma intensa modulação na densidade eletrônica, formando assim um *loop*. Esta descrição é equivalente à instabilidade de dois feixes (*two stream instability*) gerada por um feixe de elétrons em um plasma, ou às instabilidades Raman produzidas por fótons durante as interações laser-plasma. Independente dos tipos de interações envolvidas, todos estes processos coletivos podem ser classificados como instabilidades de feixe [71].

Utilizando a mesma descrição quase-clássica da seção 2.2.1, Silva *et al.* [61] derivaram a seguinte expressão para a força ponderomotiva dos neutrinos sobre um elétron:

$$\mathbf{F}_e = \frac{d\mathbf{p}_e}{dt} = -\sqrt{2}G_F \left\{ \nabla n_\nu + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}_\nu}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v}_e \times \nabla \times \mathbf{J}_\nu \right\}, \quad (2.10)$$

onde  $\mathbf{p}_e$  e  $\mathbf{v}_e$  são o momento e a velocidade do elétron, respectivamente, e  $\mathbf{J}_\nu = n_\nu \mathbf{v}_\nu$  é a densidade de corrente para os neutrinos ( $n_\nu$ : densidade de neutrinos). Como era esperado, esta equação tem a mesma forma estrutural da equação 2.6, mas devemos lembrar que a força total sobre o elétron deve incluir a interação eletromagnética. Podemos notar que intensos gradientes da densidade de neutrinos, ou grandes variações temporais de  $\mathbf{J}_\nu$ , resultarão em uma grande força ponderomotiva sobre os elétrons. Para parâmetros típicos de supernovas, Bingham *et al.* [45] determinaram a razão entre a força ponderomotiva  $|F_p|$  e a força colisional neutrino-elétron  $|F_{col}|$ :  $|F_p|/|F_{col}| \approx 10^{10}$ , isto é, os efeitos coletivos são muito mais significativos que os colisionais (obviamente a força colisional é muito pequena, mesmo para plasmas de SNs, uma vez que é proporcional a  $\sigma_\nu \propto G_F^2$ ).

## 2.3 Teoria Cinética e Equações de Fluido

### 2.3.1 Teoria Cinética

Como vimos anteriormente, para intensos fluxos de neutrinos uma abordagem auto-consistente (que contenha a reação do meio) torna-se necessária. Além disso a interação neutrino-plasma é um problema de muitos corpos, e então sua descrição deve ser baseada em uma teoria cinética para os neutrinos e o plasma. Vamos assumir que mecanismos não-colisionais dominam a dinâmica do plasma (isto é, a frequência típica dos processos coletivos em questão é muito maior que a máxima frequência de colisão entre íons e elétrons,  $\nu_{ei}$ ). Utilizando as equações 2.6 e 2.10 juntamente com a força de Lorentz, Silva *et al.* derivaram equações cinéticas relativísticas não-colisionais para neutrinos eletrônicos em interação com um plasma não-magnetizado de íons e elétrons (íons em repouso) [61]:

$$\frac{\partial f_\nu}{\partial t} + \mathbf{v}_\nu \cdot \nabla f_\nu - \sqrt{2}G_F \left\{ \nabla n_e + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}_e}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v}_\nu \times (\nabla \times \mathbf{J}_e) \right\} \cdot \frac{\partial f_\nu}{\partial \mathbf{p}_\nu} = 0 \quad (2.11)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_e}{\partial t} + \mathbf{v}_e \cdot \nabla f_e - \left\{ \sqrt{2}G_F \left[ \nabla n_\nu + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}_\nu}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v}_e \times (\nabla \times \mathbf{J}_\nu) \right] + \right. \\ \left. + e \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}_e}{c} \times \mathbf{B} \right) \right\} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{p}_e} = 0, \quad (2.12) \end{aligned}$$

onde  $f_{\nu(e)}$  é a função distribuição quase-clássica para os neutrinos(elétrons). Aqui  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  representam os campos elétrico e magnético externos e aqueles gerados pelo plasma. Interações fracas neutrino-neutrino e elétron-elétron foram desprezadas, mas poderiam facilmente ser incluídas nas equações acima (acredita-se que as contribuições do espalhamento neutrino-neutrino tenham pequena influência so-

bre a evolução do sabor do neutrino [72]). Posteriormente pósitrons também foram considerados no modelo [62].

Nosso objetivo é estudar a geração de ondas de plasma, além de analisar aspectos como a aceleração de partículas e a produção de pares. Não investigaremos efeitos cinéticos como o amortecimento de Landau, e portanto a teoria clássica de fluidos pode ser utilizada como base do nosso estudo. Como sabemos, as equações de fluido podem ser derivadas a partir das equações da teoria cinética. Tal derivação pode ser facilmente encontrada na literatura para o caso de elétrons interagindo com um plasma [71, 73, 74]; a derivação para o caso dos neutrinos é apresentada no Apêndice A.

### 2.3.2 Descrição de Fluidos

Com o objetivo de apresentar nosso modelo da forma mais geral possível, vamos descrevê-lo utilizando os resultados apresentados por Brizard *et al.* [75]. Aqui as equações de fluido para a interação neutrino-plasma foram derivadas a partir de um princípio variacional no qual os efeitos de temperatura foram mantidos. Os neutrinos e as partículas do plasma foram tratados como fluidos clássicos ideais, com os efeitos quânticos sendo ignorados.

No estudo das interações coletivas neutrino-plasma, os neutrinos podem ser descritos em termos dos campos spinores de Dirac [76], dos campos escalares de Klein-Gordon [45], de fluidos clássicos não-relativísticos [77], ou de quase-partículas relativísticas [61]. Em todas estas representações, o acoplamento entre os neutrinos e o plasma é descrito em termos da carga efetiva, representada aqui pela expressão [78]

$$G_{\sigma\nu} = \sqrt{2}G_F[\delta_{\sigma e}\delta_{\nu e} + (I_\sigma - 2Q_\sigma\sin^2\theta_W)], \quad (2.13)$$

onde o índice  $\sigma$  indica as partículas que compõem o plasma ( $i$  para os íons e  $e$  para os elétrons, por exemplo), enquanto  $\nu$  especifica o tipo de neutrino ( $\nu_e$  para os neutrinos eletrônicos);  $I_\sigma$  é o spin isotópico fraco da partícula de espécie  $\sigma$  ( $-1/2$  para os elétrons e  $1/2$  para os prótons),  $\theta_W$  é o ângulo de Weinberg ( $\sin^2\theta_W \approx 0.23$ ) e  $Q_\sigma = q_\sigma/e$  é a carga elétrica normalizada da partícula. Devemos observar que o primeiro termo em 2.13 se deve às correntes carregadas (troca de bósons  $W^\pm$ ), e portanto existe apenas para elétrons e neutrinos eletrônicos; os outros termos são derivados das correntes neutras (troca de bósons  $Z^0$ ) e por isso são válidos para todas as espécies de partículas.

As equações que descrevem a dinâmica de um fluido isotrópico de neutrinos podem então ser escritas na forma

$$\frac{\partial n_\nu}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_\nu = 0 \quad (2.14)$$

e

$$\frac{\partial \mathbf{p}_\nu}{\partial t} + (\mathbf{v}_\nu \cdot \nabla) \mathbf{p}_\nu = -\frac{\nabla P_\nu}{n_\nu} + \sum_\sigma G_{\sigma\nu} \left( \mathbf{E}_\sigma + \frac{\mathbf{v}_\nu}{c} \times \mathbf{B}_\sigma \right), \quad (2.15)$$

onde 2.14 é a equação da continuidade e 2.15 é a equação de conservação do momento linear.  $P_\nu$  é a pressão cinética do "gás" de neutrinos, e o último termo do lado direito da expressão 2.15 representa a força fraca exercida pelo plasma sobre um único neutrino, onde as seguintes definições foram utilizadas:

$$\mathbf{E}_\sigma = -\nabla n_\sigma - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}_\sigma}{\partial t}, \quad \mathbf{B}_\sigma = \frac{1}{c} \nabla \times \mathbf{J}_\sigma. \quad (2.16)$$

$E_\sigma$  e  $B_\sigma$  são os campos "elétrico" e "magnético" associados à interação fraca, e  $\mathbf{J}_\nu = n_\nu \mathbf{v}_\nu$  e  $\mathbf{J}_\sigma = n_\sigma \mathbf{v}_\sigma$  são as densidades de corrente para os neutrinos e para

as partículas da espécie  $\sigma$ , respectivamente. Aqui o momento linear do neutrino é definido como  $\mathbf{p}_\nu = (\mathbf{v}_\nu/c^2)E_\nu$ , onde  $E_\nu$  é a energia total do neutrino (esta definição é válida para neutrinos com ou sem massa;  $v_\nu$  é a velocidade do neutrino em um meio material, a qual pode ser obtida a partir da relação de dispersão do neutrino no meio).

Do mesmo modo, as equações que descrevem a dinâmica do plasma isotrópico são

$$\frac{\partial n_\sigma}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_\sigma = 0 \quad (2.17)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{p}_\sigma}{\partial t} + (\mathbf{v}_\sigma \cdot \nabla) \mathbf{p}_\sigma = & -\frac{\nabla P_\sigma}{n_\sigma} + q_\sigma \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}_\sigma}{c} \times \mathbf{B} \right) + \\ & + \sum_\nu G_{\sigma\nu} \left( \mathbf{E}_\nu + \frac{\mathbf{v}_\sigma}{c} \times \mathbf{B}_\nu \right), \end{aligned} \quad (2.18)$$

onde

$$\mathbf{E}_\nu = -\nabla n_\nu - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}_\nu}{\partial t}, \quad \mathbf{B}_\nu = \frac{1}{c} \nabla \times \mathbf{J}_\nu, \quad (2.19)$$

e  $P_\sigma$  e  $\mathbf{p}_\sigma = \gamma_\sigma m_\sigma \mathbf{v}_\sigma$  são a pressão cinética e o momento relativístico das partículas de espécie  $\sigma$ , respectivamente, com  $\gamma_\sigma = 1/\sqrt{1 - v_\sigma^2/c^2}$ . O lado direito da equação 2.18 é a força total sobre as partículas do plasma, incluindo a força de Lorentz e a força ponderomotiva devido a todos os tipos de neutrino (último termo). Esta expressão, assim como a da força fraca em 2.15, concorda com aquela obtida através do formalismo Lagrangeano (seção 2.2, [61]). Estas equações, juntamente com as de Maxwell (que descrevem a evolução auto-consistente dos campos elétrico e magnético), formam o conjunto de equações utilizado na análise das interações coletivas neutrino-plasma.

## 2.4 Plasma de Elétrons e Íons

### 2.4.1 Instabilidade de Feixe

Neste capítulo vamos considerar um gás frio de neutrinos eletrônicos ( $\nabla P_\nu = 0$ ) interagindo com um plasma frio ( $\nabla P_\sigma = 0$ ), não-magnetizado e não-colisional de íons(=prótons) e elétrons, onde os íons estão em repouso. Além disso, estudaremos apenas a geração de modos eletrostáticos, isto é,  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ . Assim, enquanto as equações 2.14 e 2.17 mantêm a sua forma, as equações 2.15 e 2.18 se reduzem a

$$\frac{\partial \mathbf{p}_\nu}{\partial t} + (\mathbf{v}_\nu \cdot \nabla) \mathbf{p}_\nu = \sqrt{2} G_F \left\{ -\nabla n_e - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}_e}{\partial t} \frac{1}{c^2} \mathbf{v}_\nu \times (\nabla \times \mathbf{J}_e) \right\}, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_e}{\partial t} + (\mathbf{v}_e \cdot \nabla) \mathbf{p}_e = \sqrt{2} G_F \left\{ -\nabla n_\nu - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}_\nu}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \mathbf{v}_e \times (\nabla \times \mathbf{J}_\nu) \right\} - e \mathbf{E}. \quad (2.21)$$

Podemos notar que no lado direito da equação 2.20 não há termo algum relacionado aos prótons, o que era esperado uma vez que os neutrinos não interagem com estas partículas ( $G_{i\nu_e} \approx 0$ ). Por essa razão, e também devido a grande inércia dos íons em relação a dos elétrons, não há problema em desprezarmos a dinâmica dos íons. Assim, apenas a densidade eletrônica é perturbada, e essa quebra na quase-neutralidade do plasma é a responsável pela geração do campo eletrostático  $\mathbf{E}$  associado às ondas de plasma. As equações acima devem então ser complementadas pela equação de Poisson,  $\nabla \cdot \mathbf{E} = -4\pi e \delta n_e$ , onde  $\delta n_e$  é a perturbação na densidade eletrônica ( $n_0 = n_{e0} = n_i$  é a densidade do plasma no equilíbrio).

Analisaremos primeiramente o estágio linear da interação [79], e então podemos considerar os elétrons não-relativísticos,  $\mathbf{p}_e = m_0 \mathbf{v}_e$  ( $\gamma_e \approx 1$ ). Vamos

supor também um feixe monoenergético de neutrinos com velocidade inicial  $\mathbf{v}_{\nu 0}$ , e que o plasma está inicialmente em repouso. Além disso, vamos assumir que a velocidade de fase da onda excitada não coincide com a velocidade do feixe de neutrinos (assim podemos desprezar os efeitos cinéticos). Com a ajuda da equação  $dE_\nu/dt = \mathbf{v}_\nu \cdot \mathbf{F}_\nu$  para a variação da energia dos neutrinos, e linearizando as expressões 2.14, 2.17, 2.20 e 2.21 ( $f = f_0 + \delta f, \delta f \ll f_0$ ) obtemos [79]

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}_{\nu 0} \cdot \nabla) \right\}^2 \delta n_\nu = \frac{n_{\nu 0} c^2}{E_{\nu 0}} \nabla^2 \delta V - \frac{n_{\nu 0}}{E_{\nu 0}} (\mathbf{v}_{\nu 0} \cdot \nabla)^2 \delta V \quad (2.22)$$

e

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_p^2 \right\} \delta n_e = -\frac{\sqrt{2} G_F n_0}{m_0 c^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \right\} \delta n_\nu, \quad (2.23)$$

onde

$$\delta V \approx \sqrt{2} G_F \left\{ \delta n_e + \frac{e n_0}{m_0 c^2} \Phi \right\} \quad (2.24)$$

é a perturbação na energia potencial da interação neutrino-plasma e  $\Phi$  é o potencial eletrostático devido à separação de carga,  $\nabla^2 \Phi = 4\pi e \delta n_e$ . Portanto, a força do plasma sobre um único neutrino pode ser escrita na forma  $\mathbf{F}_\nu = -\nabla \delta V$ . O termo  $E_{\nu 0}$  na equação 2.22 é a energia inicial dos neutrinos. As equações 2.22-2.24 descrevem de um ponto de vista clássico o comportamento do feixe de neutrinos em interação com o plasma. O último termo do lado direito da equação 2.22 se deve à perturbação na energia do neutrino,  $d\delta E_\nu/dt = \mathbf{v}_{\nu 0} \cdot \delta \mathbf{F}_\nu = -(\mathbf{v}_{\nu 0} \cdot \nabla) \delta V$ , o que caracteriza uma interação inelástica; para uma interação elástica tal termo deve ser nulo. Percebemos também que no caso  $v_{\nu 0} \approx c$ , com a direção de propagação da onda quase paralela à direção inicial do feixe de neutrinos, o lado

direito da equação 2.22 é nulo. Portanto a perturbação na densidade do feixe de neutrinos é nula, e não ocorre a excitação de ondas de plasma.

Utilizando as transformadas de Fourier das equações 2.22-2.24 obtemos a seguinte relação de dispersão (válida para interações elásticas e inelásticas):

$$(\omega^2 - \omega_p^2) (\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{\nu 0})^2 = \Delta (k^2 c^2 - \omega_p^2) (k^2 c^2 - \omega^2) \Lambda, \quad (2.25)$$

onde  $\Delta = 2G_F^2 n_0 n_{\nu 0} / m_0 c^2 E_{\nu 0}$ ,  $\Lambda = 1 - (v_{\nu 0}^2 / c^2) \cos^2 \theta$  (caso inelástico;  $\Lambda = 1$  para o caso elástico), e  $\theta$  é o ângulo entre  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{v}_{\nu 0}$ . O coeficiente  $\Lambda$  deve-se à variação da energia total do neutrino durante a interação e está relacionado com sua dispersão angular. No caso de uma interação elástica, o momento do neutrino varia somente devido à variação da sua velocidade no meio (uma vez que sua energia permanece constante). A relação de dispersão 2.25 é a mesma obtida nas referências [61] e [51], e é similar à encontrada para outras instabilidades de feixe [71, 73, 74].

Para obter os modos instáveis consideramos  $\omega = \omega_p + \delta\omega$ , e assumimos que o modo com a maior taxa de crescimento ocorre para  $\omega_p \approx \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{\nu 0} = kv_{\nu 0} \cos \theta$  ("condição de ressonância"). Além disso,  $(k^2 c^2 - \omega^2) \approx (k^2 c^2 - \omega_p^2)$ , e quando  $\delta\omega / \omega_p \ll 1$  ("aproximação de feixe fraco") obtemos as seguintes taxas de crescimento:

$$\gamma_{in} \approx \frac{\sqrt{3}}{2^{4/3}} \omega_p \left\{ \frac{\Delta}{\cos^4 \theta} \right\}^{1/3} \Lambda \sim G_F^{2/3} \quad (2.26)$$

e

$$\gamma_{el} \approx \frac{\sqrt{3}}{2^{4/3}} \omega_p \left\{ \frac{\Delta}{\cos^4 \theta} \right\}^{1/3} \Lambda^{2/3} = \Lambda^{-1/3} \gamma_{in} \quad (2.27)$$

para os casos inelástico e elástico, respectivamente ( $\gamma = \text{Im}(\delta\omega)$ ). A expressão 2.26 é a mesma obtida por outros autores [51, 57, 61]. Esta taxa de crescimento



proporcional a  $G_F^{2/3}$  é maior que as obtidas para o caso do espalhamento dos neutrinos pelo plasma ( $\propto G_F^2$ , [42]) e para o regime cinético da instabilidade ( $\propto G_F^2$ , [80, 81]).

Podemos analisar as taxas de crescimento acima para parâmetros típicos de SNs do Tipo II, por exemplo,  $E_{\nu 0} = 15 \text{ MeV}$ ,  $n_0 = 10^{29} \text{ cm}^{-3}$  e  $n_{\nu 0} = 10^{35} \text{ cm}^{-3}$  (a  $300 \text{ km}$  do centro da estrela) [51, 79]. A grandes distâncias da neutrinoesfera<sup>3</sup> os neutrinos viajam basicamente na direção radial, com uma pequena velocidade angular de dispersão. Considerando então um espalhamento direto ( $\theta = 0$ ) e assumindo  $v_{\nu 0} \approx c$ , os termos do lado direito da equação 2.22 se anulam e não há excitação de ondas de plasma ( $\delta n_\nu = 0$ ). No entanto, para pequenos ângulos de espalhamento ( $\theta \approx 0$ ) podemos obter grandes taxas de crescimento para a interação elástica (Figura 2.1). Com o processo elástico dominando a interação, a energia (momento) do feixe de neutrinos é transferida para a onda de plasma através de uma instabilidade hidrodinâmica (reativa). Conforme  $\theta$  cresce (Figura 2.2), a perturbação na energia do neutrino começa a diminuir e no limite  $\theta \rightarrow \pi/2$ ,  $d\delta E_\nu/dt = -(v_{\nu 0} \cdot \nabla)\delta V \rightarrow 0$ . A interação torna-se então elástica, como esperado, com o feixe de neutrinos transferindo seu momento linear para a onda através da variação da sua velocidade no meio. Uma rápida análise da expressão 2.26 poderia nos levar a concluir que a taxa de crescimento máxima ocorreria para  $\theta \rightarrow \pi/2$ . Porém, neste caso  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{\nu 0} \rightarrow 0$  e não há mais ressonância entre o feixe e as oscilações de plasma para sustentar a onda excitada, o que impõe um limite ao ângulo de espalhamento. Quando a instabilidade hidrodinâmica satura, efeitos cinéticos podem se tornar importantes, também limitando o ângulo de

---

<sup>3</sup>Esfera que delimita a região de alta densidade onde os neutrinos ficam retidos e onde uma distribuição térmica dos mesmos é esperada; uma vez fora dela, os neutrinos podem viajar livremente. O raio da neutrinoesfera é de aproximadamente  $3 \text{ km}$  a partir do centro da estrela.

espalhamento. O amortecimento de Landau, por exemplo, tem um papel significativo apenas quando  $\omega/k \simeq v_t$ , permitindo que a instabilidade cresça somente para ângulos  $\theta \leq \varphi = \arccos(v_t/c)$ , onde  $v_t = \sqrt{k_B T_e/m_0}$  é a velocidade térmica dos elétrons [51]. Portanto, no caso das SNs, os neutrinos atravessam regiões de altas temperaturas sem transferir uma quantidade significativa de energia para as ondas de plasma, uma vez que o amortecimento de Landau limita o espalhamento a pequenos ângulos. Somente quando os neutrinos atingem regiões com temperaturas eletrônicas suficientemente baixas (nas camadas mais externas da estrela) a instabilidade começa a crescer.

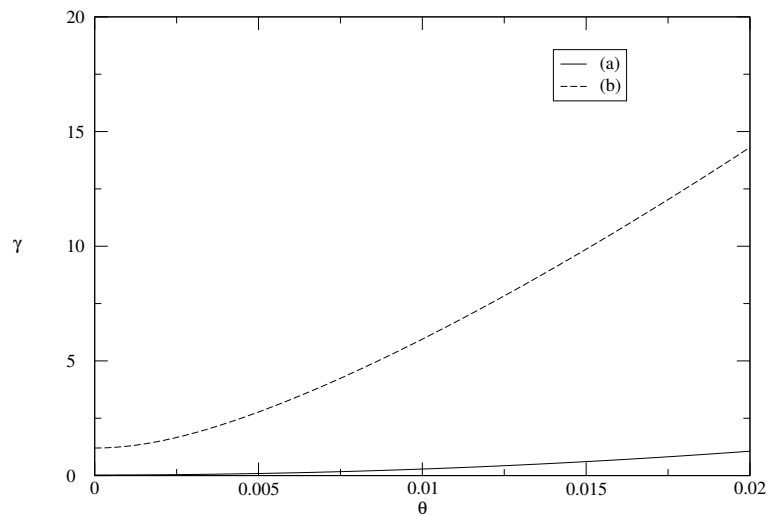


Figura 2.1: Taxa de crescimento  $\gamma$  ( $ns^{-1}$ ) para pequenos ângulos de espalhamento  $\theta$  - (a) Caso inelástico, (b) Caso elástico.

Efeitos como o espalhamento angular do feixe de neutrinos e colisões reduzem a taxa de crescimento, e estudos sobre a influência de campos magnéticos também têm sido realizados [82]. Silva *et al.* [51] incluíram colisões elétron-íon em sua análise e obtiveram uma taxa proporcional a  $G_F$ , isto é, mesmo levando-se

em conta as colisões os processos coletivos ainda seriam mais intensos que os realizados por uma única partícula. Para o caso específico da reativação da onda de choque em SNs, os resultados obtidos parecem não ser aplicáveis. Um modo instável crescendo com uma taxa  $\propto G_F^{2/3}$  ganha energia muito rapidamente, o que significa que em pouco tempo os neutrinos transferem a maior parte da sua energia para o plasma. Este resultado não está de acordo com os resultados observacionais, que indicam que a energia "visível" de uma supernova (a SN 1987A, por exemplo) é apenas uma pequena fração da energia dos neutrinos ( $\sim 1\%$ ) [40]. Entretanto, mostramos através de uma descrição clássica de fluidos que um intenso feixe de neutrinos é capaz de gerar instabilidades coletivas com grandes taxas de crescimento, mesmo no caso de um plasma colisional; tais instabilidades podem desempenhar papéis importantes em plasmas astrofísicos.

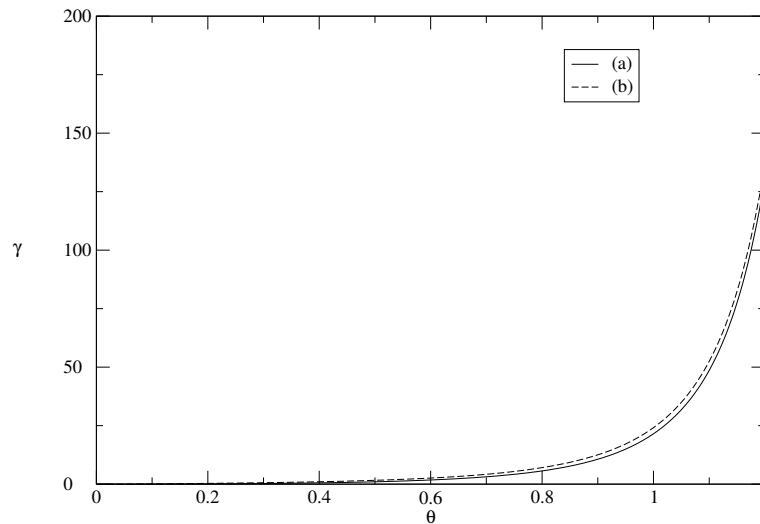


Figura 2.2: Taxa de crescimento  $\gamma$  ( $ps^{-1}$ ) para grandes ângulos de espalhamento  $\theta$  - (a) Caso inelástico, (b) Caso elástico.

### 2.4.2 Ondas de Plasma e Aceleração de Elétrons

Vamos agora analisar o regime não-linear da interação entre os neutrinos e o plasma relativístico [15]. As equações 2.14-2.19 governam novamente a interação, e para simplificar o modelo vamos considerar o feixe de neutrinos eletrônicos viajando na direção  $x$  com velocidade  $v_\nu \approx c$ . Desta vez vamos considerar o efeito da temperatura do fluido neutrinos, assumindo que ele se comporta como um gás ideal,  $P_\nu = k_B n_\nu T_\nu \sim n_\nu E_\nu$ . Sabemos que durante a interação dos neutrinos com um meio material, sua energia e densidade não variam significativamente. (Como vimos anteriormente, acredita-se que em SNs do Tipo II apenas 1% da energia dos neutrinos seja transferida para o material que envolve a estrela). Portanto, podemos assumir que durante a interação o fluxo de neutrinos transfere apenas uma pequena parte da sua energia para o plasma, mantendo sua densidade ( $n_\nu$ ) aproximadamente constante. Reescrevendo em uma dimensão as equações para o fluido de neutrinos, teremos

$$\frac{\partial n_\nu}{\partial t} + c \frac{\partial n_\nu}{\partial x} \approx 0 \quad (2.28)$$

que nos diz que  $n_\nu$  é uma constante, e então a equação 2.15 torna-se

$$\frac{\partial E_\nu}{\partial t} + c \frac{\partial E_\nu}{\partial x} \approx -c \frac{\partial E_\nu}{\partial x} - \sqrt{2} G_{FC} \left\{ \frac{\partial n_e}{\partial x} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial J_e}{\partial t} \right\}, \quad (2.29)$$

onde a aproximação  $\partial P_\nu / \partial x \approx n_\nu \partial E_\nu / \partial x$  foi usada. As equações para o plasma (2.17 e 2.18) podem então ser reescritas como

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial J_e}{\partial x} = 0 \quad (2.30)$$

e

$$\frac{\partial p_e}{\partial t} + v_e \frac{\partial p_e}{\partial x} = -eE - \sqrt{2}G_F \left\{ \frac{\partial n_\nu}{\partial x} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial J_\nu}{\partial t} \right\} = -eE, \quad (2.31)$$

uma vez que  $n_\nu$  e  $J_\nu \approx n_\nu c$  são constantes. As equações 2.28-2.31 formam um conjunto de equações não-lineares básicas. Este conjunto é complementado pela lei de Ampère (para modos eletrostáticos)

$$J_e = \frac{1}{4\pi e} \frac{\partial E}{\partial t} \quad (2.32)$$

através da qual podemos eliminar a densidade de corrente eletrônica  $J_e$  na equação 2.29, que se transforma em

$$\frac{\partial E_\nu}{\partial t} + 2c \frac{\partial E_\nu}{\partial x} = -\sqrt{2}G_{FC} \left\{ \frac{\partial n_e}{\partial x} + \frac{1}{4\pi e c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \right\}. \quad (2.33)$$

Supondo que todas as quantidades dinâmicas envolvidas comportam-se como ondas planas, podemos escrevê-las como funções da variável independente  $\xi = (x - v_\phi t)$ , onde  $v_\phi$  é a velocidade de fase da onda. Podemos então fazer as seguintes transformações

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow \frac{d}{d\xi}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rightarrow \frac{d^2}{d\xi^2}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -v_\phi \frac{d}{d\xi}, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \rightarrow v_\phi^2 \frac{d^2}{d\xi^2} \quad (2.34)$$

o que significa que estamos procurando por ondas estacionárias em um referencial que se desloca com velocidade  $v_\phi$ . Assim, a equação 2.33 torna-se

$$\frac{dE}{d\xi} = \frac{4\pi e}{\beta_\phi^2} \left\{ (n_0 - n_e) + \frac{2 - \beta_\phi}{\sqrt{2}G_F} (E_{\nu 0} - E_\nu(\xi)) \right\}, \quad (2.35)$$

onde  $\beta_\phi = v_\phi/c$ ,  $n_0$  é a densidade eletrônica no equilíbrio, e  $E_{\nu 0}$  é a energia inicial do neutrino. Utilizando a definição  $E = -\partial\Phi/\partial x = -d\Phi/d\xi$ , onde  $\Phi$  é o potencial elétrico associado ao *wakefield*, teremos

$$\frac{d^2\Psi}{d\xi^2} = -\frac{\omega_p^2}{v_\phi^2} \left\{ 1 - \frac{n_e}{n_0} + \sigma_0 \frac{\Delta E_\nu}{E_{\nu 0}} \right\}. \quad (2.36)$$

Na expressão acima,  $\Psi = e\Phi/m_0c^2$  é o potencial normalizado,  $\sigma_0 = E_{\nu 0}(2 - \beta_\phi)/\sqrt{2}G_F n_0$ , e  $\Delta E_\nu = (E_{\nu 0} - E_\nu)$  é a parcela da energia dos neutrinos transferida para o plasma. Como já vimos, esta quantidade é muito pequena ( $\sim 1\%$  de  $E_{\nu 0}$  ou menos no caso das SNs) e então  $\Delta E_\nu/E_{\nu 0} \ll 1$ . Por essa razão podemos considerar o fluxo de neutrinos como uma "perturbação" externa constante atuando sobre o plasma. Note que se  $v_\phi = c$  e  $\Delta E_\nu = 0$ , a expressão 2.36 se reduz à equação de Poisson para as oscilações de plasma eletrônico,

$$\frac{d^2\Psi}{d\xi^2} = -\frac{\omega_p^2}{c^2} \left\{ 1 - \frac{n_e}{n_0} \right\}. \quad (2.37)$$

Utilizando a transformação de variáveis 2.34 nas equações 2.30 e 2.31, teremos

$$\frac{n_e}{n_0} = \frac{(v_{e0} - v_\phi)}{(v_e - v_\phi)} \quad (2.38)$$

e

$$(v_e - v_\phi) \frac{dp_e}{d\xi} = m_0 c^2 \frac{d\Psi}{d\xi} \quad (2.39)$$

onde  $v_{e0}$  e  $J_{e0}$  são a velocidade e a densidade de corrente do plasma no equilíbrio, respectivamente. Utilizando a definição  $v_e = cP_e/\sqrt{P_e^2 + 1}$ , onde  $P_e = p_e/(m_0c)$

é o momento normalizado do plasma, podemos reescrever as equações 2.38 e 2.39 na forma

$$\frac{n_e}{n_0} = \frac{\Gamma \sqrt{1 + P_e^2}}{P_e - \beta_\phi \sqrt{1 + P_e^2}} \quad (2.40)$$

e

$$\frac{dP_e}{d\xi} = \frac{\sqrt{1 + P_e^2}}{P_e - \beta_\phi \sqrt{1 + P_e^2}} \frac{d\Psi}{d\xi}, \quad (2.41)$$

onde  $\Gamma = (P_{e0} - \beta_\phi \sqrt{1 + P_{e0}^2}) / \sqrt{1 + P_{e0}^2}$  é uma constante que depende do valor inicial do momento do elétron,  $P_{e0} = P_e(\xi = 0)$ . Utilizando a expressão para a densidade 2.40 e introduzindo a nova variável normalizada  $\chi = \omega_p \xi / v_\phi$ , podemos reescrever as equações 2.36 e 2.41:

$$\frac{d^2\Psi}{d\chi^2} = -1 + \frac{\Gamma \sqrt{1 + P_e^2}}{P_e - \beta_\phi \sqrt{1 + P_e^2}} - \sigma_0 \frac{\Delta E_\nu}{E_{\nu 0}}, \quad (2.42)$$

$$\frac{dP_e}{d\chi} = \frac{\sqrt{1 + P_e^2}}{P_e - \beta_\phi \sqrt{1 + P_e^2}} \frac{d\Psi}{d\chi}. \quad (2.43)$$

Note que o conjunto de equações acopladas acima não depende da densidade de neutrinos  $n_\nu$ , mas depende do sinal do momento linear do plasma, isto é, o plasma pode estar se movendo na direção  $\chi$  positivo ou negativo. As equações acima fornecem a seguinte equação de conservação de energia

$$\frac{E^2}{2} + \left(1 + \sigma_0 \frac{\Delta E_\nu}{E_{\nu 0}}\right) \Psi - \Gamma(P_e - P_{e0}) = 0, \quad (2.44)$$

onde agora  $E = -d\Psi/d\chi$  é o campo elétrico normalizado. As equações 2.42 e 2.43 representam uma onda de plasma não-linear e relativística excitada pela transferência de energia dos neutrinos durante a interação com o plasma. O regime linear não-relativístico ocorre quando  $P_e$ ,  $\Psi$  e  $\sigma_0\Delta E_\nu/E_{\nu 0}$  são muito pequenos ( $\ll 1$ ). Neste limite, a equação 2.42 torna-se

$$\frac{d^2\Psi}{d\chi^2} + \Psi = -\sigma_0\frac{\Delta E_\nu}{E_{\nu 0}}, \quad (2.45)$$

para  $\beta_\phi \sim 1$ . A equação acima representa uma oscilação linear forçada. Podemos resolvê-la com a ajuda da equação de conservação de energia 2.44. Para as condições iniciais  $\Psi(\chi = 0) = 0$  e  $P_{e0} = 0$  obtemos a solução  $\Psi(x, t) = -\sigma_0(\Delta E_\nu/E_{\nu 0}) \{1 - \cos(k_p x - \omega_p t)\}$ , onde  $k_p = \omega_p/v_\phi$ . Esta solução tem amplitude claramente dependente da energia transferida pelo feixe de neutrinos. Portanto, a dinâmica do plasma é governada pela quantidade de energia depositada pelos neutrinos.

Resolvemos numericamente o sistema de equações acopladas 2.42-2.43 para diferentes valores do termo  $\Delta E_\nu/E_{\nu 0}$  ( $10^{-15}$ ,  $10^{-14}$  e  $10^{-13}$ , respectivamente) e para os seguintes parâmetros de supernovas:  $E_{\nu 0} = 10\text{MeV}$  e  $n_0 = 10^{30}\text{cm}^{-3}$  (a  $300\text{Km}$  do centro da etrela). Além disso,  $\beta_\phi \sim 1$  ( $\gamma_\phi \approx 70$ ) e o plasma foi considerado inicialmente em repouso,  $P_{e0} = 0$ . Em um regime totalmente relativístico e não-linear, a amplitude do potencial  $\Psi$  pode ser muito maior do que no regime linear. No caso das SNs, o sistema alcança rapidamente o estágio não-linear, e então a solução linear não é mais válida. Como podemos observar na Figura 2.3, para  $\Delta E_\nu/E_{\nu 0} = 10^{-15}$  o regime ainda é linear. Conforme  $\Delta E_\nu/E_{\nu 0}$  cresce, o potencial mantém seu valor máximo  $\Psi \approx 1$ , apenas reduzindo seu período espacial de oscilação [15], o que ocorre devido ao crescimento balanceado do campo elétrico (Figura 2.3) e do momento linear do plasma (Figura 2.4). Com



o aumento de  $\Delta E_\nu/E_{\nu 0}$ , o campo elétrico da onda gerada cresce e atinge o valor real  $E \approx 2.9 \times 10^{15}$  V/cm (para  $\Delta E_\nu/E_{\nu 0} = 10^{-13}$ ), bem próximo do campo de quebra de onda relativístico  $E_{WB} \approx 1.36 [(\gamma_\phi - 1) n_0]^{1/2} \approx 1.13 \times 10^{16}$  V/cm [5]. A não-linearidade do intenso *wakefield* causa a "inclinação" da onda e a formação de máximos localizados na densidade eletrônica (Figura 2.5), os *spikes* [9]. Esta é uma característica do regime de quebra de onda, onde os elétrons são acelerados a velocidades próximas de  $v_\phi$  ( $\gamma_e \rightarrow \gamma_\phi, \gamma_e = \sqrt{1 + P_e^2}$ ) [83]. Uma vez que a velocidade dos elétrons  $v_e$  pode variar de  $-v_\phi$  a  $v_\phi$ , a densidade eletrônica varia do valor mínimo  $n_0/2$  a infinito (integrável) de acordo com a equação 2.38 (para  $v_{e0} = 0$ ). No nosso caso a velocidade eletrônica mínima é  $v_e = 0$ , já que os elétrons não atingem velocidades negativas, e então a densidade eletrônica mínima é  $n_e = n_0$ , como podemos ver na Figura 2.5.

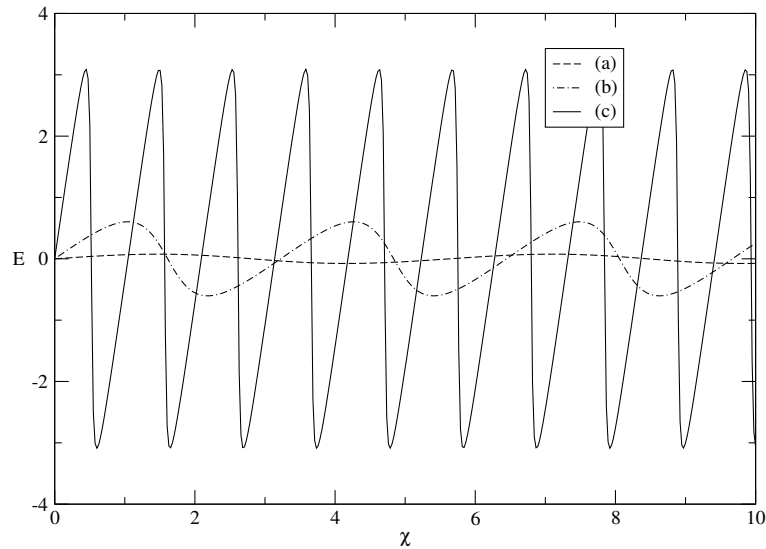


Figura 2.3: Campo elétrico normalizado  $E$  versus distância normalizada  $\chi$  para (a)  $\Delta E_\nu/E_{\nu 0} = 10^{-15}$ , (b)  $\Delta E_\nu/E_{\nu 0} = 10^{-14}$  e (c)  $\Delta E_\nu/E_{\nu 0} = 10^{-13}$ .

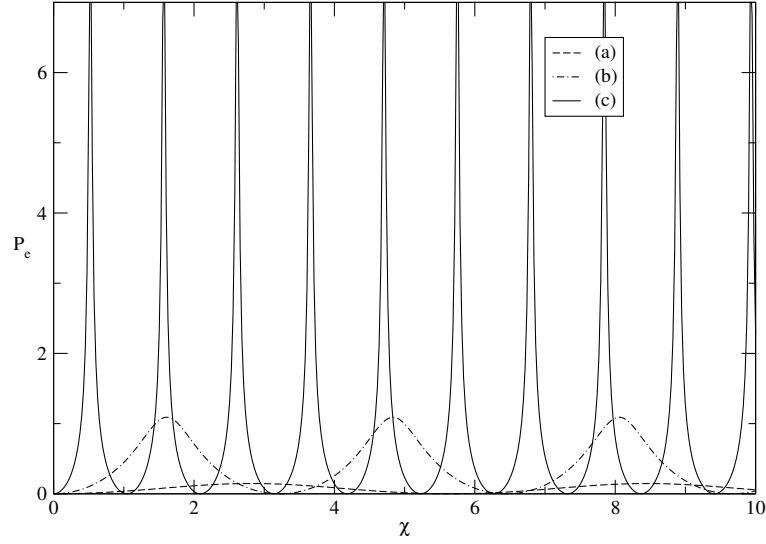


Figura 2.4: Momento normalizado do plasma  $P_e$  versus distância normalizada  $\chi$  para (a)  $\Delta E_\nu/E_{\nu 0} = 10^{-15}$ , (b)  $\Delta E_\nu/E_{\nu 0} = 10^{-14}$  e (c)  $\Delta E_\nu/E_{\nu 0} = 10^{-13}$ .

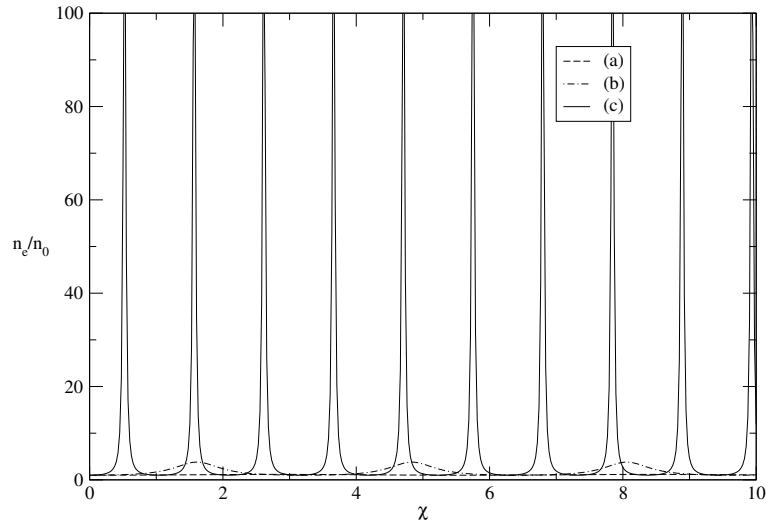


Figura 2.5: Densidade normalizada  $n_e/n_0$  versus distância normalizada  $\chi$  para (a)  $\Delta E_\nu/E_{\nu 0} = 10^{-15}$ , (b)  $\Delta E_\nu/E_{\nu 0} = 10^{-14}$  e (c)  $\Delta E_\nu/E_{\nu 0} = 10^{-13}$ .

Os resultados aqui obtidos são diferentes daqueles encontrados por Shukla *et al.* [53]. Em sua derivação o efeito dos elétrons sobre o gás de neutrinos foi reduzido ao potencial efetivo  $V_{ef} = \sqrt{2}G_F n_e$ , não levando em conta a influência do movimento do plasma. Por este motivo é obtida uma onda de plasma tradicional excitada pela força ponderomotiva dos neutrinos, que é independente de  $J_e$ . Em nosso trabalho é exatamente a variação temporal deste termo na equação 2.29, juntamente com o gradiente da densidade eletrônica, que dá origem a onda de plasma de grande amplitude. Esta amplitude depende da densidade eletrônica do plasma, do inverso da constante de Fermi ( $G_F^{-1}$ ) e da quantidade de energia depositada pelos neutrinos no plasma. No trabalho de Shukla, tanto no caso relativístico como no não-relativístico seria necessária uma densidade  $n_0$  muito maior do que  $10^{30} \text{ cm}^{-3}$  (típica para a região da neutrinosfera) para gerar uma onda de amplitude significativa. Isto ocorre porque neste modelo é obtida uma onda de plasma cuja amplitude é diretamente proporcional a  $G_F$ , um número extremamente pequeno (ao contrário do nosso modelo, onde a amplitude obtida é proporcional a  $G_F^{-1}$ ). Resultados numéricos preliminares mostram que podemos obter amplitudes ainda maiores para a onda gerada se o plasma estiver inicialmente em movimento. Esta sensível dependência da amplitude da onda com o movimento inicial do plasma merece um estudo mais detalhado, o que deixamos para um trabalho futuro. Em ambas as situações (plasma em repouso e em movimento em  $\chi = 0$ ), partículas carregadas interagindo com a onda podem ser "capturadas" e aceleradas a altas energias. Este resultado pode ser importante no estudo dos processos de aceleração de partículas carregadas em ambientes astrofísicos, como os remanescentes de supernovas e as explosões de raios  $\gamma$  [8].

### 2.4.3 Produção de Pares

Acredita-se que os neutrinos possam ser uma das fontes naturais de plasmas de elétrons e pósitrons. Processos dominantes de produção de neutrinos e de pares elétron-pósitron induzidos por neutrinos podem ser os responsáveis pela geração de jatos ultra-relativísticos de plasmas  $e^-e^+$ , os quais produzem as explosões de raios  $\gamma$  segundo o Modelo *Fireball* [84]. Além disso, o efeito da produção de pares induzida por neutrinos pode ser importante na dinâmica de explosão das SNs do Tipo II [85, 86, 87].

Neste trabalho, vamos estudar somente a produção de pares via processo tridente. Assumindo que cada elétron acelerado pela onda de plasma e espalhado pelos íons produz um par (isto é, alcança o limiar de produção de pares  $3m_0c^2$ ), podemos estimar a concentração de pares  $e^-e^+$  produzida através do processo Bhabha tridente a partir da fração de elétrons espalhados [31],

$$\frac{dn_p}{dt} = \sigma_T n_i n_e v_e, \quad (2.46)$$

onde  $n_i$  é a densidade de íons,  $n_p$  é a concentração de pares, e  $\sigma_T$  é a seção de choque para o processo tridente [23]. De acordo com a referência [29],  $\sigma_T$  tem a seguinte forma:

$$\sigma_T \cong 9.6 \times 10^{-4} (Zr_0/137)^2 (\gamma_e - 3)^{3.6}, \quad (2.47)$$

onde  $r_0 = 2.8 \times 10^{-13}$  cm é o raio clássico do elétron,  $Z$  é a carga do íon, e  $\gamma_e$  é o fator de Lorentz para os elétrons acelerados no *wakefield*. A equação 2.47 é uma boa aproximação para  $\gamma_e \leq 10$ , mas para valores maiores de  $\gamma_e$  devemos utilizar a expressão [23]

$$\sigma_T = (28/27\pi) (Zr_0/137)^2 (\ln \gamma_e)^3. \quad (2.48)$$

A fim de determinarmos  $n_p$ , a equação 2.46 deve ser reescrita em função da variável  $\chi$ :

$$\frac{dn_p}{d\chi} = \frac{v_\phi}{\omega_p} \left(1 - \frac{1}{\gamma_e^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{\gamma_\phi^2}\right)^{-1/2} n_0 n_e \sigma_T, \quad (2.49)$$

onde utilizamos a definição de  $\gamma_e$  e  $n_e$  é dada pela expressão 2.40, uma vez que os íons estão em repouso.

A equação 2.49 foi resolvida juntamente com as equações 2.42 e 2.43 para os mesmos parâmetros da seção anterior e para  $\sigma_T$  dada pela expressão 2.47, uma vez que para os parâmetros em questão  $\gamma_e < 10$ . Para  $\Delta E_\nu/E_{\nu 0} = 10^{-15}$  (Figura 2.6) já obtemos uma grande concentração de pares. Com o aumento da energia depositada pelos neutrinos, podemos obter concentrações ainda maiores (Figura 2.7) [31]. De acordo com a referência [24], os "saltos" na concentração de pares  $e^-e^+$  são explicados por um rápido crescimento da energia ( $\gamma_e$ , Figura 2.4) e da densidade eletrônica (Figura 2.5) nos pontos onde o campo elétrico é mais íngreme (Figura 2.3) e o potencial  $\Psi$  é mínimo. Nestes pontos a probabilidade dos elétrons alcançarem o limiar de produção de pares e serem espalhados pelos íons do plasma é maior. De acordo com nossos resultados a produção de pares via processo tridente é relevante para parâmetros astrofísicos, e portanto este mecanismo pode desempenhar um papel significativo em várias situações. Os resultados obtidos são válidos em quaisquer cenários astrofísicos [88] e podem ser importantes na investigação da origem dos raios  $\gamma$  de altas energias [89] e da produção de pares em supernovas e hipernovas.

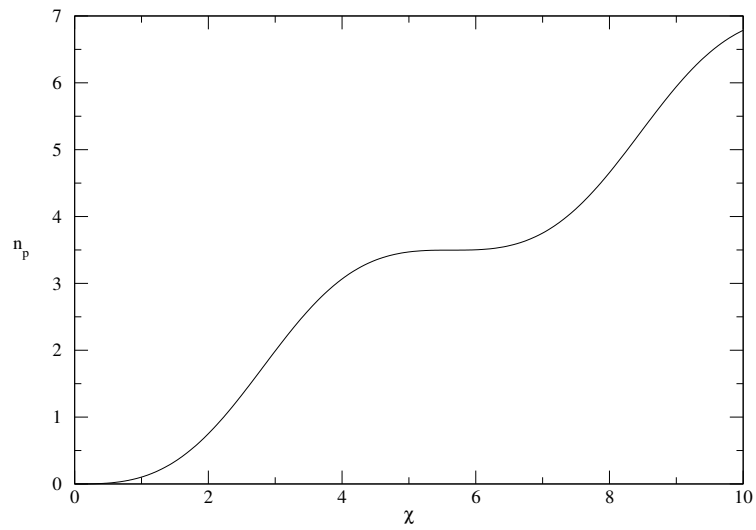


Figura 2.6: Concentração de pares  $n_p$  (em unidades de  $10^{18} \text{ cm}^{-3}$ ) versus distância normalizada  $\chi$  para  $\Delta E_\nu/E_{\nu 0} = 10^{-15}$ .

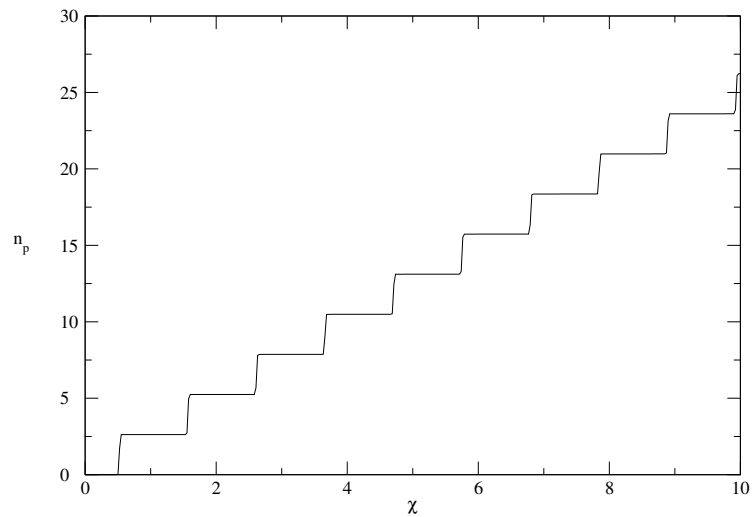


Figura 2.7: Concentração de pares  $n_p$  (em unidades de  $10^{21} \text{ cm}^{-3}$ ) versus distância normalizada  $\chi$  para  $\Delta E_\nu/E_{\nu 0} = 10^{-13}$ .

# Capítulo 3

## As Interações Neutrino-Plasma

### (Parte II)

Continuamos o estudo das interações neutrino-plasma, agora analisando o caso de um plasma magnetizado de elétrons e pósitrons. Plasmas  $e^-e^+$  estão presentes em vários cenários astrofísicos, como nos núcleos ativos de galáxias (AGNs), magnetosferas de pulsares e nos GRBs (*Fireball Model* [90]), e têm sido objeto de muitos estudos em astrofísica [90, 91, 92, 93]. Sabemos que este tipo de plasma tem uma natureza peculiar quando comparado ao plasma de elétrons e íons, uma vez que elétrons e pósitrons têm a mesma massa e apresentam uma simetria devido as suas cargas elétricas iguais e de sinais opostos. Estas propriedades únicas são responsáveis por vários fenômenos ondulatórios lineares e não-lineares diferentes daqueles que ocorrem em plasmas elétron-íon. Esta diferença se deve à razão  $m_{electron}/m_{ion}$ , a qual dá origem as diferentes escalas temporais associadas às dinâmicas dos elétrons e dos íons. Neste capítulo analisaremos os estágios linear e não-linear da interação neutrino-plasma, investigando o efeito do campo magnético na carga efetiva do neutrino [67] e na excitação de ondas de plasma

[94]. Mais uma vez discutiremos as possíveis aplicações em astrofísica.

## 3.1 Plasma Magnetizado de Elétrons e Póstrons

### 3.1.1 Carga Efetiva

Como vimos no capítulo anterior, as equações 2.14-2.19 podem ser generalizadas para o caso de neutrinos eletrônicos interagindo com um plasma de elétrons e póstrons. Utilizando este modelo, Serbeto *et al.* [95] investigaram a geração de ondas não-lineares durante a interação. Em nossa análise incluiremos o efeito dos antineutrinos e de um campo magnético externo  $\mathbf{B}_0$ . Mais uma vez vamos analisar apenas a geração de modos eletrostáticos. No entanto, como um plasma magnetizado suporta diferentes modos de propagação, uma descrição completa das propriedades eletromagnéticas dos neutrinos (antineutrinos) requer a análise da interação destas partículas com todos os modos magnetizados do plasma. Primeiramente vamos investigar o regime linear, apresentando o cálculo da carga elétrica induzida dos neutrinos e antineutrinos do tipo eletrônico. Devemos lembrar que a abordagem aqui utilizada [66] é válida apenas quando o comprimento de onda de De Broglie dos neutrinos (antineutrinos)  $\lambda_\nu$  é muito menor que a escala típica de comprimento da perturbação na densidade de plasma  $\lambda_p = 2\pi c/\omega_p$ , onde  $\omega_p = (4\pi n_0 e^2/m_0)^{1/2}$  é a frequência para um plasma de elétrons (póstrons),  $m_0$  é a massa de repouso dos elétrons e póstrons, e  $n_0$  é a densidade do plasma no equilíbrio ( $n_{e0} = n_{\bar{e}0} = n_0$ ). Nosso objetivo não é apenas comparar nossos resultados com aqueles obtidos através da teoria quântica de campos, mas também discutir a importância da anisotropia do plasma  $e^-e^+$  devido ao campo magnético externo atuando sobre o fluxo de neutrinos (antineutrinos). Reescrevendo então as equações 2.14-2.19 para o caso de um feixe frio de neutrinos e antineutrinos



eletrônicos em interação com um plasma magnetizado e não-colisional de elétrons e pósitrons teremos

$$\frac{\partial n_\nu}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_\nu = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_\nu}{\partial t} + (\mathbf{v}_\nu \cdot \nabla) \mathbf{p}_\nu = \sum_\alpha G_{\alpha\nu} \left( \mathbf{E}_\alpha + \frac{\mathbf{v}_\nu}{c} \times \mathbf{B}_\alpha \right), \quad (3.2)$$

onde  $\alpha = e, \bar{e}$  representa os elétrons e pósitrons, respectivamente,  $\mathbf{E}_\alpha = -\nabla n_\alpha - c^{-2} \partial \mathbf{J}_\alpha / \partial t$ , e  $\mathbf{B}_\alpha = c^{-1} \nabla \times \mathbf{J}_\alpha$ . O termo  $\partial \mathbf{J}_\alpha / \partial t$  é tratado na forma covariante, como descrito na referência [75]. Além disso,  $G_{e\nu} = -G_{\bar{e}\nu} = -G_{e\bar{\nu}} = G_{\bar{e}\bar{\nu}} \simeq \sqrt{2} G_F$ . Aqui já podemos perceber que o efeito dos neutrinos sobre os elétrons é contrário ao efeito sobre os pósitrons: enquanto os primeiros são repelidos pelos neutrinos, os outros são atraídos. Para o plasma,

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_\alpha = 0 \quad (3.3)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{p}_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{p}_\alpha = & -\frac{\nabla P_\alpha}{n_\alpha} + q_\alpha \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}_\alpha}{c} \times \mathbf{B}_0 \right) + \\ & + \sum_\nu G_{\alpha\nu} \left( \mathbf{E}_\nu + \frac{\mathbf{v}_\alpha}{c} \times \mathbf{B}_\nu \right), \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde  $\mathbf{E}_\nu = -\nabla n_\nu - c^{-2} \partial \mathbf{J}_\nu / \partial t$ ,  $\mathbf{B}_\nu = c^{-1} \nabla \times \mathbf{J}_\nu$ ; esses termos são importantes na geração de campos magnéticos induzidos por neutrinos [75]. O campo elétrico é determinado pela equação de Poisson,  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \sum_\alpha q_\alpha n_\alpha$ . Podemos notar na equação 3.4 que o termo relacionado à temperatura do plasma

foi mantido. Quando as temperaturas em questão são relativísticas, as pressões de radiação, dos elétrons e dos pósitrons são iguais, e seus comportamentos são governados pela lei de Stefan-Boltzmann para a radiação de corpo negro,  $P_\alpha = k_B n_\alpha T_\alpha \approx P_\gamma = \sigma^{-1/3} n_\alpha^{4/3}$ , onde  $T_\alpha$  é a temperatura do plasma,  $\sigma = \pi^2/45 \hbar^3 c^3$  é a constante de Stefan-Boltzmann, e  $\hbar$  é a constante de Planck dividida por  $2\pi$ . Vamos também assumir que o campo magnético em questão é menor que o limite crítico de Landau-Schwinger,  $B_0/B_{QED} \equiv \hbar\omega_c/m_0c^2 \ll 1$ , onde  $\omega_c = eB_0/m_0c$  é a frequência ciclotron para elétrons e pósitrons e  $B_{QED} \sim 4 \times 10^{13}$  Gauss é o campo crítico de Landau-Schwinger. Tal hipótese garante que o campo magnético não é intenso o suficiente para alterar a forma do potencial de interação e introduzir anisotropias espaciais no comportamento coletivo do plasma [96]. Além disso, alguns autores acreditam que campos magnéticos muito intensos podem criar movimentos alinhados dos neutrinos (antineutrinos) e das partículas do plasma [69].

Como vamos analisar o estágio linear da interação, podemos considerar o plasma não-relativístico. Para reescrever as equações acima utilizando a análise perturbativa padrão, onde todas as quantidades dinâmicas são escritas na forma  $f = f_0 + \delta f$  ( $\delta f \ll f_0$ ), precisamos definir um novo conjunto de variáveis linearizadas:  $n_e + n_{\bar{e}} = 2n_0 + \delta\rho_e$ ,  $n_e - n_{\bar{e}} = \delta n_e - \delta n_{\bar{e}} = \delta Q_e$ ,  $n_\nu + n_{\bar{\nu}} = 2n_{\nu 0} + \delta\rho_\nu$ ,  $n_\nu - n_{\bar{\nu}} = \delta n_\nu - \delta n_{\bar{\nu}} = \delta Q_\nu$ ,  $\mathbf{J}_e + \mathbf{J}_{\bar{e}} = \delta\mathbf{J}_e$ ,  $\mathbf{J}_e - \mathbf{J}_{\bar{e}} = \delta\mathbf{H}_e$ ,  $\mathbf{J}_\nu + \mathbf{J}_{\bar{\nu}} = 2\mathbf{J}_{\nu 0} + \delta\mathbf{J}_\nu$ , e  $\mathbf{J}_\nu - \mathbf{J}_{\bar{\nu}} = n_{\nu 0}(\delta\mathbf{v}_\nu - \delta\mathbf{v}_{\bar{\nu}}) + \mathbf{v}_{\nu 0}\delta Q_\nu = \delta\mathbf{H}_\nu + \mathbf{v}_{\nu 0}\delta Q_\nu$ . As equações básicas linearizadas podem então ser reescritas na forma

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -4\pi e \delta Q_e, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial \delta \rho_e}{\partial t} + \nabla \cdot \delta \mathbf{J}_e = 0, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \delta Q_e}{\partial t} + \nabla \cdot \delta \mathbf{H}_e = 0, \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \delta \mathbf{J}_e}{\partial t} + c_s^2 \nabla \delta \rho_e - \boldsymbol{\Omega} \times \delta \mathbf{H}_e = 0, \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \delta \mathbf{H}_e}{\partial t} + c_s^2 \nabla \delta Q_e + 2 \frac{en_0}{m_0} \mathbf{E} - \boldsymbol{\Omega} \times \delta \mathbf{J}_e = \alpha_e \left( c^2 \nabla \delta Q_\nu + \frac{\partial \delta \mathbf{H}_\nu}{\partial t} + \mathbf{v}_{\nu 0} \frac{\partial \delta Q_\nu}{\partial t} \right), \quad (3.9)$$

para o plasma de elétrons e pósitrons, com  $\alpha_e = 2\sqrt{2}G_F n_0/m_0 c^2$ ,  $\boldsymbol{\Omega} = \omega_c \hat{\mathbf{z}}$ , e  $c_s^2 = (8/3)(n_0/\sigma)^{1/3}/m_0$  (velocidade do som), e

$$\frac{\partial \delta \rho_\nu}{\partial t} + (\mathbf{v}_{\nu 0} \cdot \nabla) \delta \rho_\nu + \nabla \cdot \delta \mathbf{J}_\nu = 0, \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \delta Q_\nu}{\partial t} + (\mathbf{v}_{\nu 0} \cdot \nabla) \delta Q_\nu + \nabla \cdot \delta \mathbf{H}_\nu = 0, \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial \delta \mathbf{J}_\nu}{\partial t} + (\mathbf{v}_{\nu 0} \cdot \nabla) \delta \mathbf{J}_\nu = 0, \quad (3.12)$$

para o gás de neutrinos e antineutrinos.

Para resolvermos as equações acima de maneira auto-consistente, precisamos de uma equação de evolução para a quantidade  $\delta \mathbf{H}_\nu$ . Esta equação dinâmica é

obtida através da linearização da equação 3.2 para neutrinos e antineutrinos, com  $\mathbf{p}_{\nu(\bar{\nu})} = (\mathbf{v}_{\nu(\bar{\nu})}/c^2)E_{\nu(\bar{\nu})}$ . Subtraindo os resultados, teremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta \mathbf{H}_\nu}{\partial t} + (\mathbf{v}_{\nu 0} \cdot \nabla) \delta \mathbf{H}_\nu + \frac{n_{\nu 0} \mathbf{v}_{\nu 0}}{E_{\nu 0}} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_{\nu 0} \cdot \nabla \right) (\delta E_\nu - \delta E_{\bar{\nu}}) = \\ = \frac{n_{\nu 0} c^2}{E_{\nu 0}} (\delta \mathbf{F}_\nu - \delta \mathbf{F}_{\bar{\nu} 0}) \end{aligned} \quad (3.13)$$

onde  $E_{\nu 0}$  é a energia inicial do neutrino (antineutrino), e  $\delta E_\nu$  ( $\delta E_{\bar{\nu}}$ ) e  $\delta \mathbf{F}_\nu$  ( $\delta \mathbf{F}_{\bar{\nu} 0}$ ) são as perturbações na energia e na força dos neutrinos (antineutrinos), respectivamente, relacionadas pela expressão

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_{\nu 0} \cdot \nabla \right) (\delta E_\nu - \delta E_{\bar{\nu}}) = \mathbf{v}_{\nu 0} \cdot (\delta \mathbf{F}_\nu - \delta \mathbf{F}_{\bar{\nu} 0}), \quad (3.14)$$

como no Capítulo 2. Da definição da força atuando sobre os neutrinos e antineutrinos, temos

$$\delta \mathbf{F}_\nu - \delta \mathbf{F}_{\bar{\nu} 0} = -\nabla \delta V - \frac{2\sqrt{2}G_F}{c^2} \boldsymbol{\Omega} \times \delta \mathbf{J}_e. \quad (3.15)$$

Na expressão acima  $\delta V$  é a perturbação na energia potencial da interação neutrino-plasma,

$$\delta V = 2\sqrt{2}G_F \left[ 2\frac{en_0}{m_0 c^2} \Phi + \left( 1 - \frac{c_s^2}{c^2} \right) \delta Q_e \right] \quad (3.16)$$

onde  $\Phi$  é o potencial associado ao campo elétrico produzido pela separação de carga, definido pela equação 3.5. Substituindo as equações 3.15 e 3.14 na equação 3.13 obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta \mathbf{H}_\nu}{\partial t} + (\mathbf{v}_{\nu 0} \cdot \nabla) \delta \mathbf{H}_\nu &= \frac{n_{\nu 0}}{E_{\nu 0}} [\mathbf{v}_{\nu 0} (\mathbf{v}_{\nu 0} \cdot \nabla) - c^2 \nabla] \delta V + \\ &+ \alpha_\nu \left\{ \frac{\mathbf{v}_{\nu 0}}{c^2} [\mathbf{v}_{\nu 0} \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \delta \mathbf{J}_e)] - (\boldsymbol{\Omega} \times \delta \mathbf{J}_e) \right\}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Aqui  $\mathbf{v}_{\nu 0}$  é a velocidade inicial do neutrino (antineutrino),  $\alpha_\nu = 2\sqrt{2}G_F n_{\nu 0}/E_{\nu 0}$  é a constante de acoplamento, juntamente com  $\alpha_e$ , e  $n_{\nu 0}$  é a densidade do fluido de neutrinos (antineutrinos) no equilíbrio.

Aplicando o operador divergência na equação 3.9 e com a ajuda das equações 3.7 e 3.11 obtemos a seguinte equação de onda para o plasma  $e^-e^+$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \delta Q_e - c_s^2 \nabla^2 \delta Q_e + 2\omega_p^2 \delta Q_e - \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \times \delta \mathbf{J}_e = \alpha_e \left( c^2 \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \delta Q_\nu. \quad (3.18)$$

Do mesmo modo, utilizando as equações 3.11 e 3.13, temos para o gás de neutrinos e antineutrinos

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_{\nu 0} \cdot \nabla \right)^2 \delta Q_\nu &= \frac{n_{\nu 0}}{E_{\nu 0}} [c^2 \nabla^2 - (\mathbf{v}_{\nu 0} \cdot \nabla)^2] \delta V - \\ &- \alpha_\nu \left[ \frac{(\mathbf{v}_{\nu 0} \cdot \nabla)}{c^2} (\mathbf{v}_{\nu 0} \cdot \boldsymbol{\Omega} \times \delta \mathbf{J}_e) + \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \times \delta \mathbf{J}_e \right]. \end{aligned} \quad (3.19)$$

As equações 3.18 e 3.19 descrevem, do ponto de vista clássico, o comportamento do feixe de neutrinos e antineutrinos em interação com um plasma de elétrons e pósitrons. O segundo termo do lado direito da equação 3.19 deve-se à perturbação na energia dos neutrinos-antineutrinos, característica das interações inelásticas, enquanto os dois últimos termos representam a anisotropia devido à presença do campo magnético externo.

Em geral, podemos considerar as flutuações espectrais da população de pares neutrino-antineutrino  $\delta \tilde{Q}_\nu(\omega, \mathbf{k})$  de tal modo que

$$\delta Q_\nu = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int \frac{d\omega}{2\pi} \delta \tilde{Q}_\nu(\omega, \mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t). \quad (3.20)$$

A perturbação na densidade de pares elétron-póstron  $\delta \tilde{Q}_e(\omega, \mathbf{k})$ , associada com cada componente espectral das flutuações na densidade de pares neutrino-antineutrino, pode ser obtida através da transformada de Fourier da equação 3.18,

$$(\omega^2 - c_s^2 k^2 - 2\omega_p^2) \delta \tilde{Q}_e = -i\boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{k} \times \delta \mathbf{J}_e) + \alpha_e (\omega^2 - c^2 k^2) \delta \tilde{Q}_\nu. \quad (3.21)$$

Usando as transformadas de Fourier das equações 3.7 e 3.8, a equação 3.21 pode ser reescrita como

$$(\omega^2 - \omega_{uh}^2) \delta \tilde{Q}_e + \frac{\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}}{\omega} (\boldsymbol{\Omega} \cdot \delta \mathbf{H}_e) = \alpha_e (\omega^2 - c^2 k^2) \delta \tilde{Q}_\nu, \quad (3.22)$$

onde  $\omega_{uh}^2 = 2\omega_p^2 + c_s^2 k^2 + \omega_c^2$  é o quadrado da frequência híbrida superior do plasma  $e^-e^+$ , e  $\delta \mathbf{H}_e$  é a perturbação na corrente de plasma espectral. Multiplicando a equação 3.9 por  $\boldsymbol{\Omega}$  e usando a transformada de Fourier, temos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} \cdot \delta \mathbf{H}_e &= c_s^2 \frac{\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{k}}{\omega} \delta \tilde{Q}_e - 2i \frac{en_0}{m_0} \frac{\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{E}}{\omega} - \\ &- \alpha_e \left[ \boldsymbol{\Omega} \cdot \delta \mathbf{H}_\nu - \boldsymbol{\Omega} \cdot \left( \frac{c^2 \mathbf{k}}{\omega} - \mathbf{v}_{\nu 0} \right) \delta \tilde{Q}_\nu \right], \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde  $\delta \mathbf{H}_\nu$  é a componente espectral da densidade de corrente do par neutrino-antineutrino, a qual pode ser obtida através da equação 3.13,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} \cdot \delta \mathbf{H}_\nu &= \frac{n_{\nu 0}}{E_{\nu 0}} \frac{c^2 (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}) - (\mathbf{v}_{\nu 0} \cdot \boldsymbol{\Omega})(\mathbf{v}_{\nu 0} \cdot \mathbf{k})}{\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_{\nu 0}} \delta V + \\ &+ \alpha_\nu \frac{\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{v}_{\nu 0}}{c^2} (\mathbf{v}_{\nu 0} \cdot \boldsymbol{\Omega} \times \delta \vec{J}_e). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Vamos definir  $\theta$  e  $\zeta$  como os ângulos de propagação do feixe de neutrinos e da onda de plasma, respectivamente, em relação a  $z$  (direção do campo magnético externo). Substituindo as equações 3.16, 3.20 e 3.21 em 3.19, e manipulando expressões, obtemos a seguinte relação entre as flutuações nas densidades de pares elétron-pósitron e pares neutrino-antineutrino

$$\delta\tilde{Q}_e \approx \alpha_e \left( \frac{c^2k^2 - \omega^2 + \frac{e^2k^2}{\omega^2}\omega_c^2 \cos^2 \zeta + \frac{kv_{\nu 0}}{\omega}\omega_c^2 \cos \theta \cos \zeta}{\omega^2 - \omega_{uh}^2 + \frac{2\Omega_p^2\omega_c^2}{\omega^2}} \right) \delta\tilde{Q}_\nu, \quad (3.25)$$

onde  $\Omega_p^2 = 2\omega_p^2 + c_s^2k^2$  e os termos  $O(G_F^2)$  foram desprezados. Associada a esta flutuação na densidade de pares elétron-pósitron existe uma flutuação na carga elétrica  $-e\delta\tilde{Q}_e = -e(\delta\tilde{n}_e - \delta\tilde{n}_{\bar{e}})$ , a qual aparece na equação de Poisson como a fonte da perturbação no potencial do plasma. Podemos verificar através da equação 3.25 que esta carga elétrica é proporcional à flutuação na densidade de pares neutrino-antineutrino, o que significa que a constante de proporcionalidade pode ser interpretada como a carga efetiva (ou equivalente ou induzida) do par neutrino-antineutrino. Podemos então estabelecer a seguinte identidade

$$-e\delta\tilde{Q}_e = e_{eff}(\delta\tilde{n}_\nu - \delta\tilde{n}_{\bar{\nu}}) = e_{eff}\delta\tilde{Q}_\nu. \quad (3.26)$$

Esta nova quantidade depende da frequência e do número de onda da flutuação na densidade de neutrinos, e também do campo magnético externo. Ela deve ser interpretada como uma carga espectral efetiva do par neutrino-antineutrino, e seu valor é determinado por

$$e_{eff} = \pm e\alpha_e \frac{\omega^2(c^2k^2 - \omega^2) - c^2k^2\omega_c^2 \cos^2 \zeta + kv_{\nu 0}\omega\omega_c^2 \cos \zeta \cos \theta}{\omega^4\epsilon(\omega, k)}, \quad (3.27)$$

onde o sinal  $-(+)$  está relacionado à carga efetiva  $e_\nu(e_{\bar{\nu}})$  dos neutrinos(antineutrinos) do tipo eletrônico. A constante dielétrica longitudinal do plasma é definida por

$$\epsilon(\omega, k) = 1 - \frac{\omega_{uh}^2}{\omega^2} + 2 \frac{\Omega_p^2 \omega_c^2}{\omega^4} \cos^2 \zeta, \quad (3.28)$$

Devemos notar que para  $\epsilon(\omega, k) = 0$  obtemos o espectro de uma onda longitudinal em um plasma  $e^-e^+$  magnetoativo, onde  $\Omega_p^2 = 2\omega_p^2 + c_s^2 k^2$  é a relação de dispersão na ausência de campo magnético externo. No limite dos pequenos comprimentos de onda  $k^2 c^2 \gg \omega^2$ , onde apenas modos eletrostáticos de baixa frequência são considerados, a expressão para a carga efetiva do neutrino (antineutrino)  $e_{eff}$  concorda com as obtidas por outros autores [46, 65, 66] para neutrinos do tipo eletrônico se propagando em um plasma não-magnetizado. A expressão 3.28 também pode ser reduzida a outros resultados já obtidos, se os limites apropriados forem considerados. Vamos primeiramente assumir o limite quase-estático  $\omega \rightarrow 0$ . A equação 3.27 então se reduz a

$$e_{eff} = \pm \frac{\sqrt{2} G_F}{4\pi e} \frac{k^2}{(1 + k^2 \lambda_{De}^2)} \quad (3.29)$$

para a carga efetiva do neutrino (+) e do antineutrino (-), respectivamente, as quais são independentes do campo magnético externo. Na expressão acima  $\lambda_{De}^2 = c_s^2 / 2\omega_p^2$  é o comprimento de Debye para o plasma  $e^-e^+$ . No limite dos pequenos comprimentos de onda  $k^2 \lambda_{De}^2 \gg 1$  o resultado obtido para a carga efetiva do neutrino está de acordo com aquele derivado por Mendonça *et al.* [66] utilizando uma descrição clássica de fluidos para o plasma. A expressão 3.29 também coincide com aquela obtida por Nieves & Pal para neutrinos sem massa e com helicidade negativa interagindo com um meio não-magnetizado [68]. Estes autores derivaram seus resultados através da teoria quântica de campos



utilizando o conceito de *vertex* eletromagnético efetivo. Entretanto, neste caso o limite  $\omega \rightarrow 0$  foi identificado com os grandes comprimentos de onda ( $k \rightarrow 0$ ), uma vez que as flutuações do plasma foram associadas com um campo de radiação eletromagnética. Aqui estamos analisando flutuações eletrostáticas onde o limite  $\omega \rightarrow 0$  não pode ser automaticamente associado com  $k \rightarrow 0$ , como por exemplo no caso das flutuações espaciais quase-estáticas de carga. Portanto, uma comparação direta entre nossos resultados e os obtidos na referência [68] não é possível.

Se agora assumirmos o limite de altas frequências, onde  $\omega^2 \gg \Omega_p^2$  e  $\omega_c^2$ , e também considerarmos  $\omega^2 \approx k^2 c^2$  (grandes números de onda), obtemos então da equação 3.27

$$e_{eff} = \pm \frac{2\sqrt{2}G_F n_0 e}{m_0 c^2} \frac{\omega_c^2}{k^2 c^2} \left(1 - \frac{\cos \theta}{\cos \zeta}\right) \cos^2 \zeta, \quad (3.30)$$

para as cargas efetivas do neutrino (+) e do antineutrino (−) em um plasma magnetizado, onde assumimos  $v_{\nu 0} \approx c$ . Podemos notar que este resultado depende fortemente das direções de propagação da onda de plasma e do feixe de neutrinos(antineutrinos). Se os neutrinos e/ou antineutrinos se propagam na mesma direção que as ondas de plasma ( $\theta = \zeta$ ), a carga efetiva é nula. O mesmo ocorre para as ondas de plasma que se propagam na direção perpendicular ao campo magnético ( $\zeta = \pi/2$ ). Isto significa que, e ambas as situações, a influência do meio sobre os neutrinos é desprezível e eles se comportam como se viajassem no vácuo. Por outro lado, se os neutrinos (antineutrinos) se propagam perpendicularmente ao campo magnético ( $\theta = \pi/2$ ), temos da equação 3.30

$$e_{eff} = \pm \left(\frac{2\sqrt{2}G_F n_0 e}{m_0 c^2}\right) \frac{\omega_c^2}{k^2 c^2} \cos^2 \zeta, \quad (3.31)$$

o que significa que, neste caso, a carga efetiva depende apenas da direção de propagação da onda de plasma. Portanto, no limite de altas frequências, os neutrinos e antineutrinos podem adquirir uma carga efetiva não nula quando se propagam na direção  $\theta = \pi/2$ , dependendo da direção de propagação da onda de plasma. Este resultado difere daquele obtido por Bhattacharya *et al.* através da teoria quântica de campos para temperaturas finitas [96]. Mais uma vez a diferença ocorre pelo fato dos autores terem assumido que as ondas de plasma estão associadas ao campo de fótons no limite  $\omega \rightarrow 0$  e  $k \rightarrow 0$ , ao contrário das ondas híbridas superiores longitudinais consideradas aqui. Devido à anisotropia presente em um plasma magnetizado, as propriedades de dispersão das ondas híbridas superiores longitudinais são significativamente diferentes daquelas determinadas para as ondas eletromagnéticas transversais.

A densidade de carga  $\rho_\nu(\mathbf{r})$  em um determinado ponto do espaço pode ser obtida através da integração em  $\mathbf{k}$  do fator de forma para a densidade de carga do neutrino [46]. Neste caso o limite de integração superior deve ser  $\mathbf{k}_{De} = 2\pi/\lambda_{De}$ , uma vez que o plasma suporta apenas modos eletrostáticos com números de onda menores que  $\mathbf{k}_{De}$ . A carga elétrica efetiva total do neutrino  $q_\nu = \int \rho_\nu(\mathbf{r})d\mathbf{r}$  deve ser nula, já que a carga elétrica total do plasma deve ser conservada.

Em geral, podemos verificar a partir da equação 3.27 se os neutrinos e anti-neutrinos adquirem carga efetiva positiva ou negativa de acordo com sua direção de propagação e também das ondas de plasma. Como já mencionamos, a presença do campo magnético "quebra" a isotropia do plasma e introduz uma direção preferencial. Para neutrinos se propagando ao longo da direção do campo ( $\theta = 0$ ), por exemplo, a carga efetiva torna-se negativa para  $0 < \zeta < \pi/2$  e positiva para  $\pi/2 < \zeta < \pi$ . O efeito global será então a criação de correntes elétricas, as quais podem ser responsáveis pela geração de intensos campos magnéticos na superfície

de estrelas de neutrons e no núcleo de supernovas.

A discussão aqui apresentada mostra que o método utilizado é simples e capaz de recuperar alguns dos principais resultados obtidos através da teoria quântica de campos para o caso de plasmas não-magnetizados. Para neutrinos e antineutrinos interagindo com um plasma  $e^-e^+$  magnetoativo observamos que o valor da carga efetiva depende fortemente da direção de propagação da onda de plasma, o que ocorre devido à anisotropia criada pela presença do campo magnético externo. Também notamos que a direção de propagação do feixe de neutrinos (antineutrinos) é importante para a determinação do valor e do sinal da carga induzida. A carga efetiva indica que os neutrinos e antineutrinos podem facilmente se acoplar às oscilações eletrostáticas do plasma magnetizado, e eventualmente perder energia devido a processos não-lineares.

### 3.1.2 Ondas de Plasma e Aceleração de Pares

Vamos agora estudar o regime não-linear da interação, analisando o efeito de um feixe de neutrinos se propagando através de um plasma magnetizado e não-colisional de elétrons e pósitrons. Mais uma vez vamos utilizar as equações 3.1-3.4 para descrever a dinâmica do gás de neutrinos e do plasma  $e^-e^+$ . Vamos considerar o campo magnético externo na direção  $z$ ,  $\mathbf{B} = B_0\hat{\mathbf{z}}$ , e analisar apenas a geração de modos longitudinais. O momento do neutrino é dado por  $\mathbf{p}_\nu = (\mathbf{v}_\nu/c^2)E_\nu$ , onde  $E_\nu$  é a energia total do neutrino.

Para simplificar nosso modelo, vamos considerar um feixe frio de neutrinos eletrônicos se propagando ao longo da direção  $x$  com velocidade  $v_\nu$  próxima a  $c$ , e interagindo com um plasma elétron-pósitron frio e magnetizado. Portanto, o efeito dos antineutrinos não é contabilizado. Já sabemos que a energia local e a densidade dos neutrinos não são significativamente alteradas durante sua

interação com o plasma. Portanto, podemos assumir que o fluxo de neutrinos transfere apenas uma pequena parte da sua energia  $E_\nu$  para o plasma e mantém sua densidade  $n_\nu$  aproximadamente constante. Assim, as equações para o fluido de neutrinos podem ser reescritas como

$$\frac{\partial E_\nu}{\partial t} + c \frac{\partial E_\nu}{\partial x} \approx -\sqrt{2}G_{FC} \left( \frac{\partial}{\partial x}(n_{\bar{e}} - n_e) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t}(J_{\bar{e}} - J_e) \right) \quad (3.32)$$

e

$$\frac{\partial n_\nu}{\partial t} + c \frac{\partial n_\nu}{\partial x} \approx 0. \quad (3.33)$$

Vamos considerar também que as ondas longitudinais de plasma propagam-se na direção perpendicular ao campo magnético externo, com um campo elétrico associado  $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{x}}$  e número de onda  $\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{x}}$ . Então as equações para o fluido de elétrons e pósitrons são

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial J_e}{\partial x} = 0, \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial p_{ex}}{\partial t} + \frac{cp_{ex}}{\sqrt{1+p_e^2}} \frac{\partial p_{ex}}{\partial x} = -\frac{eE}{m_0c} - \frac{\omega_c p_{ey}}{\sqrt{1+p_e^2}} - \sqrt{2}G_F \left( \frac{\partial n_\nu}{\partial x} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial J_\nu}{\partial t} \right), \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial p_{ey}}{\partial t} + \frac{cp_{ey}}{\sqrt{1+p_e^2}} \frac{\partial p_{ey}}{\partial x} = +\frac{\omega_c p_{ex}}{\sqrt{1+p_e^2}}, \quad (3.36)$$

para os elétrons e

$$\frac{\partial n_{\bar{e}}}{\partial t} + \frac{\partial J_{\bar{e}}}{\partial x} = 0, \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial p_{\bar{e}x}}{\partial t} + \frac{cp_{\bar{e}x}}{\sqrt{1+p_{\bar{e}}^2}} \frac{\partial p_{\bar{e}x}}{\partial x} = \frac{eE}{m_0c} + \frac{\omega_c p_{\bar{e}x}}{\sqrt{1+p_{\bar{e}}^2}} + \sqrt{2}G_F \left( \frac{\partial n_\nu}{\partial x} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial J_\nu}{\partial t} \right), \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial p_{\bar{e}y}}{\partial t} + \frac{cp_{\bar{e}y}}{\sqrt{1+p_{\bar{e}}^2}} \frac{\partial p_{\bar{e}y}}{\partial x} = -\frac{\omega_c p_{\bar{e}x}}{\sqrt{1+p_{\bar{e}}^2}}, \quad (3.39)$$

para os pósitrons, com  $p_{ex}$ ,  $p_{\bar{e}x}$ ,  $p_{ey}$ , e  $p_{\bar{e}y}$  sendo as componentes  $x$  e  $y$  dos momentos dos elétrons e pósitrons, respectivamente. As expressões 3.32-3.39 formam o conjunto de equações acopladas utilizado no estudo da geração de ondas de plasma de grande amplitude. Este conjunto deve ser complementado pela equação

$$\mathbf{J}_{\bar{e}} - \mathbf{J}_e = \frac{1}{4\pi e} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (3.40)$$

uma vez que estamos analisando a geração de modos longitudinais.

É conveniente introduzirmos uma nova variável independente  $\xi = (x - v_\phi t)$ , onde  $v_\phi$  é a velocidade de fase da onda de plasma. Isto significa que todas as quantidades dinâmicas envolvidas se comportam como ondas estacionárias em um referencial que se desloca com velocidade  $v_\phi$ . Com o auxílio da expressão 3.40, a equação 3.32 pode ser reescrita como

$$\frac{dE}{d\xi} = 4\pi e \frac{c^2}{v_\phi^2} \left( (n_{\bar{e}} - n_e) + \frac{1 - \beta_\phi}{\sqrt{2}G_F} (E_{\nu 0} - E_\nu(\xi)) \right), \quad (3.41)$$

onde  $E_{\nu 0}$  é a energia inicial do neutrino. Utilizando a definição  $E = -d\Phi/d\xi$ , onde  $\Phi$  é o potencial elétrico associado ao *wakefield*, obtemos da equação acima

$$\frac{d^2\Psi}{d\xi^2} = -\frac{\omega_p^2}{v_\phi^2} \left( \frac{n_{\bar{e}}}{n_0} - \frac{n_e}{n_0} + S_\nu \right), \quad (3.42)$$

onde  $\Psi = e\Phi/m_0c^2$  e  $\beta_\phi = v_\phi/c$  são o potencial normalizado e a velocidade de fase normalizada, respectivamente. Além disso,  $S_\nu = (E_{\nu 0}(1-\beta_\phi)/\sqrt{2}G_F n_0)\Delta E_\nu/E_{\nu 0}$ , onde  $\Delta E_\nu/E_{\nu 0} = \Delta\omega_\nu/\omega_\nu$  representa a quantidade de energia transferida pelos neutrinos para o plasma. Aqui,  $\Delta\omega_\nu$  é a largura espectral do espectro do neutrino. Vamos assumir que  $\Delta E_\nu/E_{\nu 0} = \Delta\omega_\nu/\omega_\nu \ll 1$ , o que está de acordo com os dados observacionais que indicam que a energia "visível" de uma supernova é apenas uma pequena parte da energia total dos neutrinos [40]. Portanto, podemos considerar a influência dos neutrinos como uma ação externa constante sobre o plasma. Podemos notar que a equação 3.42 é a equação de Poisson escrita em função da variável  $\chi$ , onde a densidade de carga total inclui a densidade de carga efetiva dos neutrinos, representada pelo termo  $S_\nu$ . Transformando as equações 3.34-3.39 e substituindo as densidades de elétrons e pósitrons na equação 3.42 obtemos

$$\frac{d^2\Psi}{d\chi^2} = \frac{\Gamma_e\sqrt{1+P_e^2}}{P_{ex} - \beta_\phi\sqrt{1+P_e^2}} - \frac{\Gamma_{\bar{e}}\sqrt{1+P_{\bar{e}}^2}}{P_{\bar{e}x} - \beta_\phi\sqrt{1+P_{\bar{e}}^2}} - S_\nu, \quad (3.43)$$

$$\frac{dP_{ex}}{d\chi} = \frac{\sqrt{1+P_e^2}}{P_{ex} - \beta_\phi\sqrt{1+P_e^2}} \left( \frac{d\Psi}{d\chi} - \beta_\phi\Omega_c \frac{P_{ey}}{\sqrt{1+P_e^2}} \right), \quad (3.44)$$

$$\frac{dP_{ey}}{d\chi} = \beta_\phi\Omega_c \frac{P_{ex}}{(P_{ex} - \beta_\phi\sqrt{1+P_e^2})}, \quad (3.45)$$

$$\frac{dP_{\bar{e}x}}{d\chi} = \frac{\sqrt{1+P_{\bar{e}}^2}}{P_{\bar{e}x} - \beta_\phi\sqrt{1+P_{\bar{e}}^2}} \left( -\frac{d\Psi}{d\chi} + \beta_\phi\Omega_c \frac{P_{\bar{e}y}}{\sqrt{1+P_{\bar{e}}^2}} \right), \quad (3.46)$$

e

$$\frac{dP_{\bar{e}y}}{d\chi} = -\beta_\phi\Omega_c \frac{P_{\bar{e}x}}{(P_{\bar{e}x} - \beta_\phi\sqrt{1+P_{\bar{e}}^2})}, \quad (3.47)$$

onde  $P_{e,\bar{e}} = p_{e,\bar{e}}/m_0c$ ,  $\chi = \omega_p/v_\phi(x - v_\phi t)$ , e  $\Omega_c = \omega_c/\omega_p$  são o momento normalizado do elétron (pósitron), a distância normalizada (fase), e a frequência cíclotron normalizada dos elétrons (pósitrons), respectivamente. Aqui,  $\Gamma_{e,\bar{e}} = (P_{e,\bar{e}0} - \beta_\phi \sqrt{1 + P_{e,\bar{e}0}^2})/\sqrt{1 + P_{e,\bar{e}0}^2}$  é constante, e depende do valor inicial do momento dos pósitrons e elétrons. Podemos notar que as equações acopladas 3.43-3.47 dependem do sinal do momento linear do plasma, isto é, o plasma pode estar se movendo na direção  $\chi$  positivo ou negativo. Estas equações descrevem a geração de ondas híbridas superiores relativísticas e não-lineares devido à interação do feixe de neutrinos com o plasma magnetizado.

O regime linear e não-relativístico ocorre quando  $P_{e,\bar{e}} \ll 1$ ,  $\Psi \ll 1$  e  $S_\nu \ll 1$ . Neste caso, as equações 3.43-3.47 fornecem

$$\frac{d^2\Psi}{d\chi^2} = P_{ex} - P_{\bar{e}x} - S_\nu, \quad (3.48)$$

$$\frac{dP_{ey}}{d\chi} = -\Omega_c P_{ex}, \quad (3.49)$$

$$\frac{dP_{\bar{e}y}}{d\chi} = \Omega_c P_{\bar{e}x}, \quad (3.50)$$

$$\frac{d^2P_{ex}}{d\chi^2} + \Omega_{uh}^2 P_{ex} = P_{\bar{e}x} + S_\nu, \quad (3.51)$$

$$\frac{d^2P_{\bar{e}x}}{d\chi^2} + \Omega_{uh}^2 P_{\bar{e}x} = P_{ex} - S_\nu, \quad (3.52)$$

para  $\beta_\phi \sim 1$ , e onde  $\Omega_{uh}^2 = 1 + \Omega_c^2$ . As equações 3.48-3.49 foram utilizadas na derivação das expressões 3.51 e 3.52 para a componente  $x$  do momento do plasma. Estas equações lineares mostram que a dinâmica do plasma é "forçada" diretamente pela presença dos neutrinos, os quais podem gerar intensas ondas eletrostáticas com frequência de oscilação  $\omega$  propagando-se na direção perpendicular à do campo magnético. Resolvendo as equações 3.51 e 3.52 e introduzindo os resultados na equação 3.48, obtemos o seguinte campo elétrico normalizado associado com o *wakefield* híbrido superior

$$E(x, t) = \frac{2\omega_p^3}{\Omega_{uh}^3} S_\nu \left[ \frac{\Omega_c^2}{2} (k_p x - \omega_p t) + \sin(kx - \omega t) \right], \quad (3.53)$$

onde  $k_p = \omega_p/v_\phi$ . Aqui o termo  $S_\nu$  é considerado constante, de acordo com nossa hipótese inicial, e as condições iniciais  $P_{e\bar{e}} = 0$ ,  $\Psi = 0$ , e  $E = 0$  para  $\chi = 0$  foram impostas. Podemos perceber que este campo tem grande amplitude, claramente dependente da energia depositada pelos neutrinos e independente da densidade do feixe, isto é, a dinâmica do plasma é governada pela quantidade de energia transferida do feixe de neutrinos para o plasma.

Resolvemos numericamente as equações 3.43-3.47 para  $S_\nu = 3 \times 10^{-2}$ ,  $\Omega_c = 0.1$  e  $\gamma_\phi \approx 315$ . Para parâmetros típicos de SNs ( $n_0 = 10^{30} \text{ cm}^{-3}$  e  $E_{\nu 0} = 10 \text{ MeV}$ ) estes valores equivalem a  $\Delta E_\nu/E_{\nu 0} \approx 10^{-10}$ . A Figura 3.1 mostra o campo elétrico normalizado da onda híbrida superior gerada. Podemos perceber que o regime aqui ainda é linear e corresponde à solução analítica dada pela equação 3.53, com o valor máximo do campo elétrico próximo ao valor da frequência ciclotron normalizada,  $\Omega_c$ . Isso ocorre porque o momento das partículas do plasma na direção  $y$  é muito maior que o momento na direção  $x$  devido ao pequeno valor do termo  $S_\nu$  (equações 3.49-3.52). Na Figura 3.2 observamos que durante o estágio linear da interação as dinâmicas de elétrons e pósitrons são simétricas, como



esperado. Para interações longas esta simetria é quebrada devido à presença do fluxo de neutrinos.

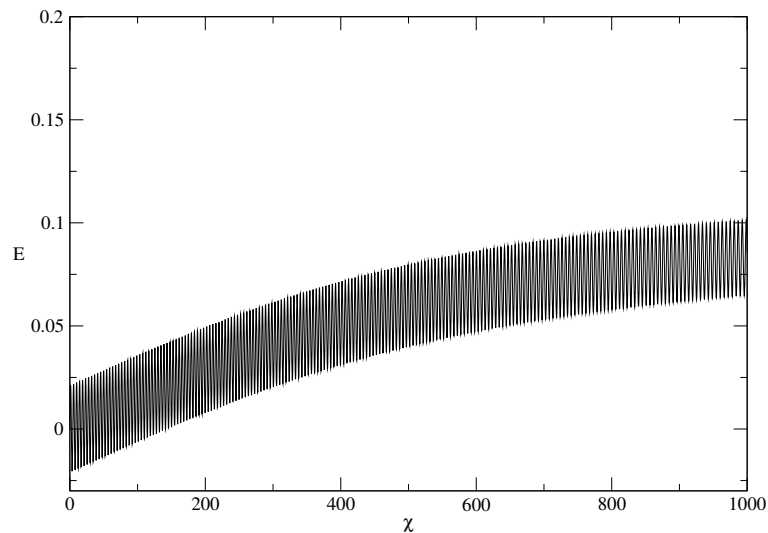


Figura 3.1: Campo elétrico normalizado  $E$  versus distância normalizada (fase)  $\chi$  para  $\Omega_c = 0.1$  e  $S_\nu = 0.03$ .

A Figura 3.3 mostra o campo elétrico normalizado do *wakefield* para  $\Omega_c = 0.1$  como na Figura 3.1, mas agora com uma maior quantidade de energia depositada pelos neutrinos,  $S_\nu = 10$  ( $\Delta E_\nu/E_{\nu 0} \approx 10^{-8}$ ). Com o crescimento de  $S_\nu$  observamos que a saturação do campo elétrico ocorre em um nível bem mais alto do que aquele mostrado na Figura 3.1, com a componente  $x$  do momento do plasma tornando-se então muito maior que a componente  $y$ . Podemos também notar que o campo elétrico apresenta uma intensidade ainda maior no início da interação, decaindo logo em seguida devido à transferência de energia do campo para as partículas do plasma. O campo então alcança seu valor de saturação, o qual é mantido durante o restante da interação. Portanto, as partículas do plasma estão sujeitas a uma força elétrica constante na direção de propagação da onda. A

presença do campo magnético causa a aceleração das partículas através da frente de onda, o que as mantém "aprisionadas" por mais tempo, evitando assim o problema da desintonia de fase [5] e permitindo uma aceleração transversal ilimitada [17] (Figura 3.4). Também podemos observar que, neste caso, a assimetria entre a dinâmica dos elétrons e a dos pósitrons é muito intensa. Isto ocorre devido ao alto valor negativo da carga efetiva do neutrino, como vimos na seção anterior. Este processo leva à separação de carga, que por sua vez cria o *wakefield*.

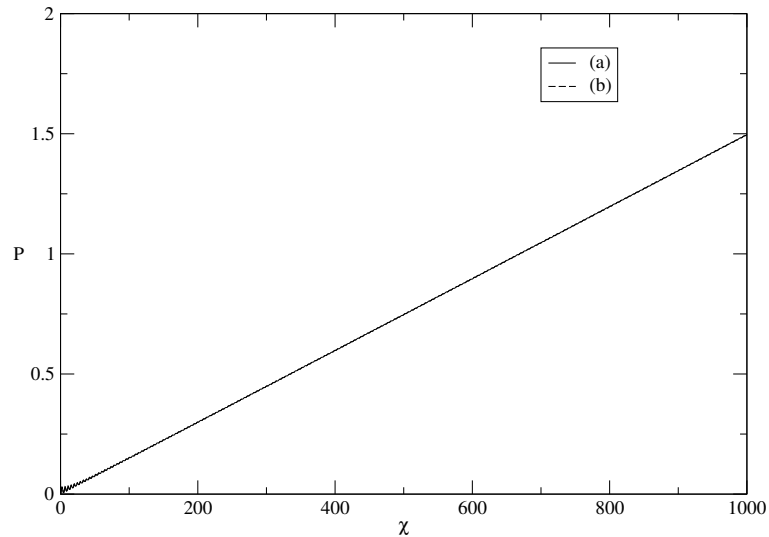


Figura 3.2: Momento normalizado do plasma  $P$  versus distância normalizada (fase)  $\chi$  para  $\Omega_c = 0.1$  e  $S_\nu = 0.03$  (a) Elétrons, (b) Póstrons.

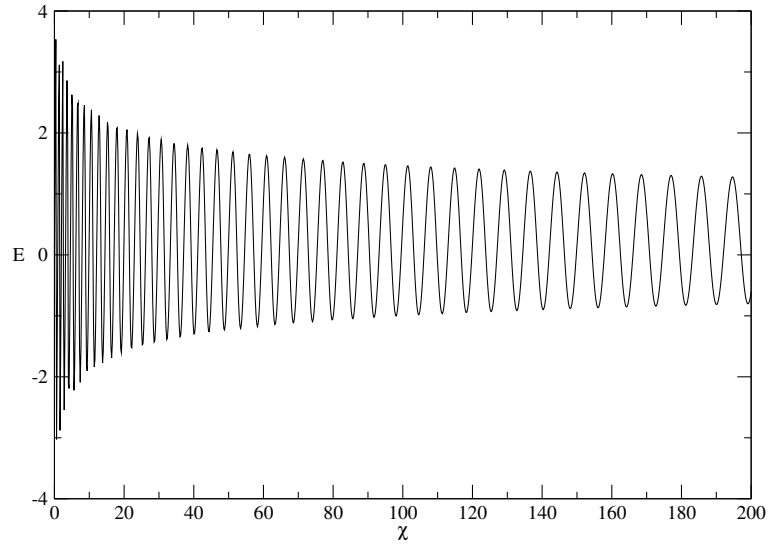


Figura 3.3: Campo elétrico normalizado  $E$  versus distância normalizada (fase)  $\chi$  para  $\Omega_c = 0.1$  e  $S_\nu = 10$ .

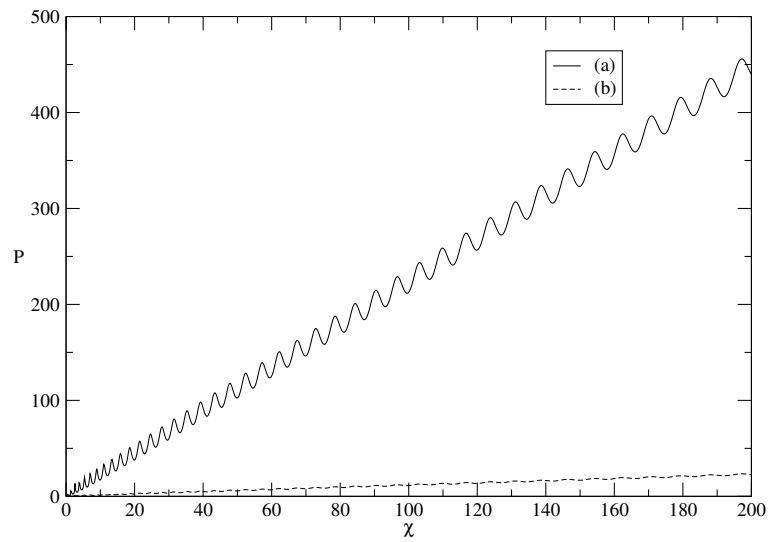


Figura 3.4: Momento normalizado do plasma  $P$  versus distância normalizada (fase)  $\chi$  para  $\Omega_c = 0.1$  e  $S_\nu = 10$  (a) Elétrons, (b) Pósitrons.

Até agora assumimos que a frequência cíclotron  $\omega_c$  é menor que a frequência de plasma  $\omega_p$ , o que pode ocorrer em muitas situações em astrofísica. Uma vez que as nossas equações básicas estão normalizadas, também podemos considerar alguns cenários nos quais  $\omega_c \gg \omega_p$ , por exemplo, uma estrela de neutrons cujo plasma  $e^-e^+$  que envolve o núcleo tem uma densidade média  $n_0 = 10^{30} \text{ cm}^{-3}$ . Esta densidade corresponde a uma frequência de plasma  $\omega_p \approx 5.64 \times 10^{19} \text{ s}^{-1}$ , a qual pode ser menor que a frequência cíclotron em algumas regiões da estrela magnetizada (como os magnetars, por exemplo). Considerando este cenário podemos assumir  $\Omega_c = 5$ , por exemplo. A Figura 3.5 mostra o campo elétrico normalizado associado com a onda híbrida superior para  $S_\nu = 10$ . Podemos perceber que neste caso o campo elétrico alcança rapidamente um alto valor de saturação ( $E \approx 12$ ), o qual corresponde a  $E \approx 1.15 \times 10^{16} \text{ V/cm}$ . Este campo é da ordem do limite de Schwinger para a produção de pares no vácuo,  $E_{QED} = 1.3 \times 10^{16} \text{ V/cm}$  [33]. Observamos que o regime aqui é altamente não-linear, e mais uma vez as partículas do plasma podem ser aceleradas a energias muito altas, como pode ser visto na Figura 3.6. Obviamente, aqui a simetria entre a dinâmica dos elétrons e a dos pósitrons é completamente destruída devido ao intenso fluxo de neutrinos. Isto significa que a seção de choque para a interação elétron-plasmon é agora muito maior do que para a interação pósitron-plasmon.

A geração das ondas híbridas superiores de grande amplitude em um plasma  $e^-e^+$  magnetizado é então possível devido à quebra de simetria entre a dinâmica dos pósitrons e a dos elétrons. Essa quebra é causada pela intensa força ponderomotiva do feixe de neutrinos. Ela também pode ser atribuída a carga efetiva negativa que os neutrinos adquirem enquanto se propagam através do plasma. A carga induzida negativa "empurra" os elétrons de tal modo que o momento eletrônico cresce, enquanto os pósitrons são "atraídos" pelos neutrinos "carregados".

Esta separação de carga gera, por sua vez, os *wakefields* de amplitude finita. Como no caso do plasma de elétrons e íons, nossos resultados dependem da energia depositada pelos neutrinos no plasma e são válidos para quaisquer cenários astrofísicos. Eles podem ser aplicados no estudo da aceleração de pares em jatos de plasma responsáveis pela produção das explosões de raios  $\gamma$  [90], por exemplo. A presença do campo magnético externo mostra que é possível a excitação de intensos *wakefields* híbridos superiores os quais podem acelerar o plasma a energias ultra-relativísticas pelo mecanismo *surfatron* [17].

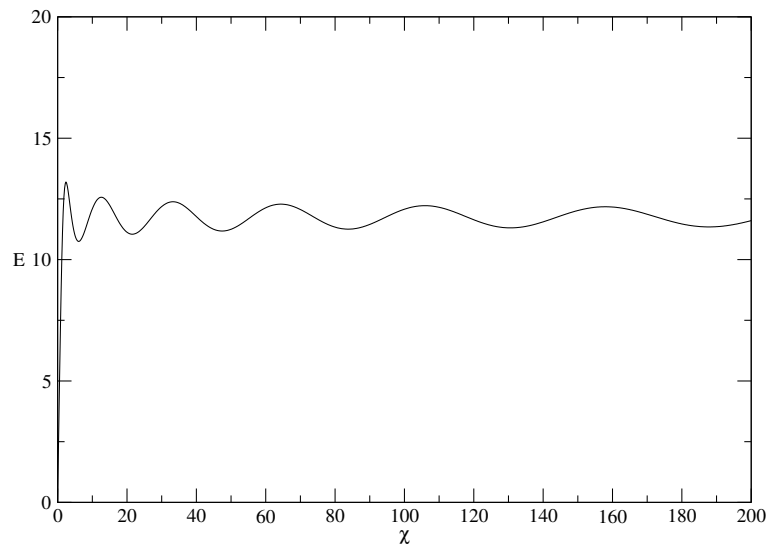


Figura 3.5: Campo elétrico normalizado  $E$  versus distância normalizada (fase)  $\chi$  para  $\Omega_c = 5$  e  $S_\nu = 10$ .

Através de simulações numéricas observamos que os efeitos da temperatura do plasma e do gás de neutrinos são desprezíveis, pois não afetam significativamente a dinâmica do plasma e a amplitude da onda gerada. A intensidade do campo elétrico da onda depende da quantidade de energia depositada pelos neutrinos, mas pequenos valores de  $\Delta E_\nu/E_{\nu 0}$  já são suficientes para gerar *wakefields*. Uma

vez que a intensidade do campo gerado pode atingir o limite de Schwinger, a análise da produção de pares em plasmas magnetizados através deste mecanismo será objeto de futuras investigações.

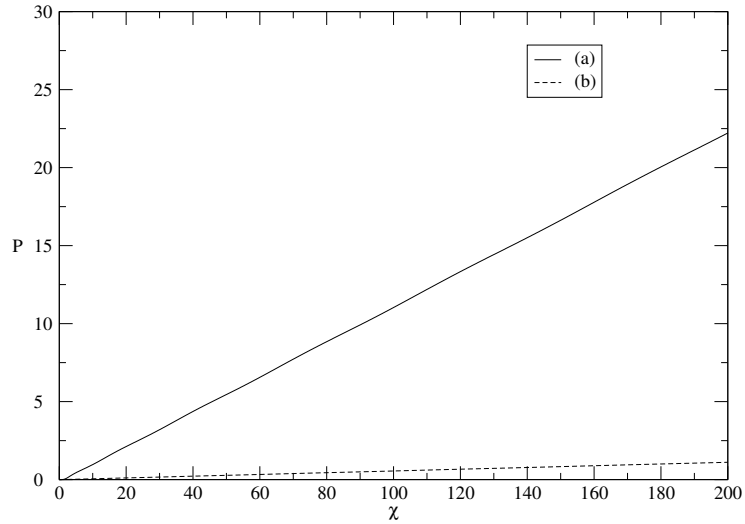


Figura 3.6: Momento normalizado do plasma  $P$  (em unidades de  $10^3$ ) versus distância normalizada (fase)  $\chi$  para  $\Omega_c = 5$  e  $S_\nu = 10$  (a) Elétrons, (b) Póstrons.

# Capítulo 4

## Produção de Pares Devido às Interações Laser-Plasma

### 4.1 Introdução

A interação de lasers com plasmas pode dar origem a uma grande variedade de fenômenos. Os últimos avanços tecnológicos deram origem a uma geração de lasers de alta intensidade, com  $I$  alcançando  $10^{20}$  W/cm<sup>2</sup> para comprimentos de onda  $\lambda \sim 1054$  nm (e com a promessa de intensidades ainda maiores,  $I = 10^{24}$  W/cm<sup>2</sup>). Neste caso o movimento dos elétrons no campo de radiação é essencialmente relativístico e a física da interação é muito diferente daquela para intensidades moderadas. Pulsos de laser com intensidades muito elevadas também podem gerar espontaneamente intensos campos magnéticos [97], os quais devem ser considerados em uma descrição realística das interações laser-plasma e fenômenos não-lineares associados. Além de sua importância em áreas tecnológicas, as interações entre ondas eletromagnéticas e plasmas também podem desempenhar papel importante em astrofísica, como mencionamos anteriormente.

Um estudo sistemático das interações não-lineares entre intensas ondas eletromagnéticas e plasmas  $e^-e^+$  relativísticos foi realizado por Shukla *et al.* [98] (e referências), com atenção especial ao plasma de pulsares visando compreender a emissão rádio desses objetos.

Na interação laser-plasma os elétrons podem ser acelerados pelo *wakefield* produzido durante a interação, ou diretamente pelo pulso de laser. Um pequeno número de elétrons no *wakefield* pode atingir energias muito altas, sendo "liberados" quando a quebra da onda ocorre. Os elétrons acelerados pelo laser também podem atingir altas energias, e são "extraídos" do pulso quando o mesmo atinge um alvo sólido. A eficiência relativa destes dois processos irá depender das condições sob as quais a interação ocorre [99].

Uma vez acelerados, os elétrons podem produzir pares via processo tridente ao atingirem o limiar de energia  $3m_0c^2$ . Discussões sobre a produção de pares devido a elétrons relativísticos acelerados por lasers intensos já foram apresentadas [29, 30]. Outros autores também já discutiram o mecanismo de produção de pares devido ao espalhamento de elétrons energéticos produzidos em intensos *wakefields* gerados por pulsos de laser de curta duração [24]. Recentemente, Berezhiani *et al.* [100] realizaram simulações para analisar a dinâmica de pulsos de laser em plasmas muito densos e mostraram que uma intensa produção de pares devido aos elétrons acelerados no plasma ocorre através do processo tridente.

Neste capítulo vamos analisar a produção de pares via processo tridente devido aos elétrons acelerados durante a interação laser-plasma [32]. Vamos considerar a interação entre um intenso pulso de laser e um plasma magnetizado, frio e não-colisional de elétrons e íons. Sabemos que a presença campo magnético externo possibilita o surgimento de vários modos de propagação no plasma, de acordo com a direção do campo [73]. Os elétrons podem ser acelerados pelo laser ou



no intenso *wakefield* gerado durante a interação não-linear. Eles então produzem pares ao serem espalhados pelo potencial de Coulomb dos íons em repouso. Mais uma vez vamos utilizar uma descrição clássica de fluidos (juntamente com as equações de Maxwell) para analisar a interação não-linear no limite de quebra de onda e determinar a concentração de pares. Diferentes intensidades de laser, larguras de pulso e direções do campo magnético externo serão consideradas em nossa análise.

## 4.2 Geração de Ondas

Consideramos um plasma frio, não-colisional e relativístico de elétrons e íons interagindo com uma onda eletromagnética circularmente polarizada. Vamos analisar a interação não-linear entre o pulso de laser e o plasma na presença de um campo magnético externo e uniforme. As equações básicas que descrevem o processo são

$$\frac{\partial n_\sigma}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_\sigma = 0, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{p}_\sigma}{\partial t} + (\mathbf{v}_\sigma \cdot \nabla) \mathbf{p}_\sigma = q_\sigma \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}_\sigma}{c} \times \mathbf{B} \right), \quad (4.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -4\pi e (n_e - n_i), \quad (4.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (4.4)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \sum_{\sigma} \frac{4\pi}{c} q_{\sigma} \mathbf{J}_{\sigma} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (4.5)$$

e

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (4.6)$$

Como podemos perceber, mais uma vez a dinâmica do plasma é descrita pelas equações 2.14-2.19 (Capítulo 2), mas agora sem os termos relativos aos neutrinos. Aqui,  $\mathbf{p}_{\sigma} = \gamma_{\sigma} m_{\sigma} \mathbf{v}_{\sigma}$  e  $\gamma_{\sigma} = 1/\sqrt{1 - v_{\sigma}^2/c^2}$  são o momento e o fator de Lorentz relativístico para as partículas de espécie  $\sigma$  (elétrons e íons), respectivamente, e  $\mathbf{J}_{\sigma} = n_{\sigma} \mathbf{v}_{\sigma}$ . Como vamos analisar apenas a geração de ondas longitudinais (electrostáticas), o vetor  $\mathbf{B}$  inclui o campo magnético da onda e o campo externo  $\mathbf{B}_0$ . Além disso, vamos estudar a geração dos *wakefields* em escalas de tempo comparáveis ou menores que o período do plasma, e então colisões elétron-íon podem ser desprezadas (consideramos  $\omega_p \gg \nu$ , onde  $\nu_{ei}$  é a frequência de colisão). Nas escalas de tempo do pulso de laser e do movimento eletrônico os íons não são muito afetados e por isso sua dinâmica pode ser desconsiderada.

Estamos interessados em investigar a propagação não-linear do pulso de laser. Assumimos então que o plasma é transparente ao laser, isto é,  $\omega \gg \omega_p$ , onde  $\omega$  é a frequência do laser. Isto significa que podemos considerar que o pulso não tem sua forma modificada durante a propagação, que ocorre a uma velocidade constante próxima da velocidade da luz no plasma. Então o potencial vetor do laser  $A = |\mathbf{A}|$  pode ser escrito como uma função da variável  $\xi = z - v_g t$ , onde  $v_g$  é a velocidade de grupo do laser no plasma (consideramos que o laser está viajando da esquerda para a direita).

Os potenciais escalar e vetor  $\phi$  e  $\mathbf{A}$  são definidos pelas seguintes equações:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi, \quad (4.7)$$

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} + \mathbf{B}_0, \quad (4.8)$$

com o *gauge de Lorentz*

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0. \quad (4.9)$$

Vamos considerar por um instante o caso em que  $B_0 = 0$ . No estágio linear e não-relativístico da interação, a força ponderomotiva do pulso de laser cria uma separação de carga local que dá origem a um campo eletrostático. Em geral, este campo permanece após a propagação do laser e sua "relaxação" induz oscilações eletrostáticas com velocidade de fase próxima à velocidade do pulso ( $v_\phi \approx v_g$ ) e frequência próxima a  $\omega_p$  [6]. O número de onda do plasmon gerado é dado por  $k_p = \omega_p/v_\phi = 2\pi/\lambda_p$ , enquanto  $\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2$  é a relação de dispersão para a interação. Além disso, espera-se que a eficiência na geração dos *wakefields* seja maior quando a largura do pulso de laser  $d$  for aproximadamente igual à metade de  $\lambda_p$ , o comprimento de onda das oscilações eletrostáticas [6, 99]. Por outro lado, se  $d$  for muito menor que este valor, a dinâmica dos elétrons pode ser completamente dominada pela força ponderomotiva do laser, e então os elétrons são "aprisionados" pelo pulso. No entanto, oscilações de plasma ainda podem ser excitadas, mas suas amplitudes serão muito menores que no caso  $d = \lambda_p/2$ .

Conforme a intensidade do laser aumenta, a largura de pulso "ótima" torna-se menor, e um campo eletrostático muito mais intenso é criado pela separação de carga. De fato, as oscilações eletrostáticas podem ter amplitudes maiores que a

do laser e então tornam-se altamente não-lineares. Para lasers muito intensos, os elétrons do plasma podem atingir velocidades relativísticas. Neste caso ocorre a diminuição local de  $\omega_p$ , causada pelo aumento da massa do elétron ( $\omega_p = (4\pi e^2 n_e / m_e)^{1/2}$ , com  $m_e = \gamma_e m_0 = m_0 / (1 - v_e^2/c^2)^{1/2}$ ). Em plasmas super densos, este e outros efeitos não-lineares possibilitam a propagação do laser em regiões onde ela não ocorreria inicialmente, uma vez que  $\omega_p$  diminuiu em relação a  $\omega$ .

Voltando ao caso com campo magnético externo, para uma onda circularmente polarizada o potencial vetor normalizado  $\mathbf{a} = e\mathbf{A}/m_0c^2$  pode ser escrito na forma

$$\mathbf{a} = a (\hat{\mathbf{x}} \cos \chi + \hat{\mathbf{y}} \sin \chi), \quad (4.10)$$

onde  $\chi = k_p(z - v_g t)$ , com  $v_g \approx v_\phi$ . Para um pulso Gaussiano,  $a^2$  é dado por

$$a^2 = a_0^2 \exp\left(-\chi^2/k_p^2 L^2\right), \quad (4.11)$$

com  $L = d/2$ . Em números,  $a_0 = 0.85 \times 10^{-9} \lambda \sqrt{I}$ , onde  $I$  é a intensidade do laser em W/cm<sup>2</sup> e  $\lambda$  é o comprimento de onda em microns [101]. Normalizando todas as quantidades físicas, as escrevendo como funções da variável  $\chi$  (ondas planas), e considerando que as ondas de plasma longitudinais se propagam na direção  $z$ , obtemos das equações 4.1-4.11 o conjunto de equações finais

$$\begin{aligned} \left[ (\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{P}_e) - \beta_\phi \sqrt{1 + P_e^2} \right] \frac{d\mathbf{P}_e}{d\chi} = \sqrt{1 + P_e^2} \left( \frac{d\Psi}{d\chi} \hat{\mathbf{z}} - \beta_\phi \frac{d\mathbf{a}}{d\chi} \right) + \\ + (\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{P}_e) \times \frac{d\mathbf{a}}{d\chi} + \frac{\beta_\phi}{\omega_p} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{P}_e \end{aligned} \quad (4.12)$$

e

$$\frac{d^2\Psi}{d\chi^2} = \beta_\phi^2 \left[ \frac{\Gamma_e \sqrt{1 + P_e^2}}{(\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{P}_e) - \beta_\phi \sqrt{1 + P_e^2}} - 1 \right], \quad (4.13)$$

onde  $\Gamma = [(\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{P}_{e0}) - \beta_\phi \sqrt{1 + P_{e0}^2}] / \sqrt{1 + P_{e0}^2}$  é uma constante que depende do valor inicial de  $\mathbf{P}_e$ , o momento eletrônico normalizado ( $\mathbf{P}_e = \mathbf{p}_e/m_0c$ ). Aqui  $\Psi = e\phi/m_0c^2$  é o potencial escalar normalizado,  $\beta_\phi = v_\phi/c$ , e  $\Omega = e\mathbf{B}_0/m_0c$  é o vetor associado com a frequência ciclotron,  $\omega_c = eB_0/m_0c$ .

As equações 4.12 e 4.13 formam um conjunto de equações não-lineares utilizado na análise da geração de ondas de plasma para diferentes intensidades do laser ( $a_0$ ), larguras do pulso ( $d$ ) e direções do campo magnético externo ( $\Omega$ ). A equação 4.13 é a equação de Poisson generalizada, e portanto a densidade eletrônica normalizada é dada por

$$\frac{n_e}{n_0} = \frac{\Gamma \sqrt{1 + P_e^2}}{(\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{P}_e) - \beta_\phi \sqrt{1 + P_e^2}}. \quad (4.14)$$

### 4.3 Aceleração de Partículas e Produção de Pares

Como no Capítulo 2, vamos assumir que cada elétron acelerado pela onda gerada e espalhado pelos íons produz um par através do processo tridente. A concentração de pares  $n_p$  produzida pode então ser determinada por

$$\frac{dn_p}{dt} = \sigma_T n_i n_e v_e, \quad (4.15)$$

onde  $n_i$  é a densidade de íons,  $v_e$  é a velocidade eletrônica, e  $\sigma_T$  é a seção de choque para o processo tridente [23]. Uma vez que assumimos que cada elétron espalhado produz um par, estamos considerando que estas partículas são aceleradas a energias relativísticas (altos valores de  $\gamma_e$ ) e então alcançam o limiar de produção de pares  $3m_0c^2$ . Para grandes valores do fator de Lorentz ( $\gamma_e > 10$ ) a seção de choque pode ser escrita como [24, 100, 23]

$$\sigma_T = (28/27\pi) (Zr_0/137)^2 (\ln \gamma_e)^3. \quad (4.16)$$

onde  $r_0 = 2.8 \times 10^{-13}$  cm é o raio clássico do elétron e  $Z$  é a carga do íon ( $Z = 1$  para os prótons). Devemos notar que a expressão acima para a seção de choque foi determinada na ausência de campo magnético externo; no entanto, ela permanece válida para um plasma magnetizado desde que  $\hbar\omega_c \ll 2m_0c^2$ .

Para determinarmos as concentrações de pares, a equação 4.15 deve ser reescrita na forma

$$\frac{dn_p}{d\chi} = \frac{v_\phi}{\omega_p} \left(1 - \frac{1}{\gamma_e^2}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{1}{\gamma_\phi^2}\right)^{-1/2} n_0 n_e \sigma_T, \quad (4.17)$$

onde utilizamos a definição de  $\gamma_e$ . Aqui,  $\gamma_\phi = 1/\sqrt{1 - \beta_\phi^2}$ ,  $n_e$  é dada pela equação 4.14 e  $n_i = n_0$ , já que os íons estão em repouso.

As equações 4.12, 4.13 e 4.17 foram resolvidas numericamente e os resultados analisados para diferentes intensidades de laser ( $a_0$ ), larguras de pulso ( $d$ ) e direções do campo magnético externo ( $\Omega$ ). Em todos os casos consideramos  $\gamma_\phi \gg 1$ ,  $\Psi = d\Psi/d\chi = 0$  no infinito, e que o plasma está inicialmente em repouso.

Como mencionamos anteriormente, para pequenos valores de  $a_0$  (regime não-relativístico) a maior eficiência na geração do *wakefield* ocorre para a largura de pulso  $d \approx \lambda_p/2$ . Neste caso de baixa intensidade do laser, ondas lineares típicas na forma de oscilações senoidais são induzidas pela força ponderomotiva do pulso. Com o crescimento de  $a_0$ , o campo gerado pela separação de carga e o potencial associado também aumentam. No entanto, para otimizar o processo é necessário diminuir a largura do pulso, uma vez que a intensidade da força ponderomotiva afeta o campo eletrostático.

Com o aumento do campo elétrico da onda excitada o limite de quebra de onda relativístico pode ser alcançado. Este fenômeno ocorre para ondas de grande amplitude, quando o movimento oscilatório torna-se altamente não-linear e a energia da onda é transferida diretamente para as partículas [4]. Como já vimos, a intensa não-linearidade causa máximos localizados na densidade eletrônica chamados de *spikes* [9], o que é uma característica do regime de quebra de onda. Neste caso os elétrons são acelerados a velocidades próximas de  $v_\phi$  e  $\gamma_e \rightarrow \gamma_\phi$  [83]. De acordo com a equação 4.1, a densidade eletrônica é dada por  $n_e = n_0 v_\phi / (v_\phi - v_e)$  for  $v_{e0} = 0$ . Uma vez que a velocidade eletrônica  $v_e$  pode variar de  $-v_\phi$  a  $v_\phi$ , a densidade eletrônica varia do valor mínimo  $n_0/2$  a infinito (integrável) [99].

Para  $B_0 = 0$ , nossos resultados estão de acordo com aqueles encontrados por Yu *et al.* [99] e por Krasovitskii *et al.* [102]. Neste caso o momento eletrônico perpendicular é conservado,  $\mathbf{P}_{e\perp} = \mathbf{P}_{ex} + \mathbf{P}_{ey} = \mathbf{a}$ , e os elétrons do plasma podem adquirir velocidades relativísticas conforme a intensidade do laser aumenta. Para  $n_0 = 10^{-4} \text{ cm}^{-3}$ ,  $a_0 = 2$ , e  $d = 0.35\lambda_p$  (maior eficiência na geração do *wakefield*) e  $d = 0.05\lambda_p$  os resultados concordam com aqueles determinados na referência [99]. O caso  $d = 0.05\lambda_p$  corresponde à aceleração dos elétrons diretamente pelo laser, e o momento eletrônico e a densidade tornam-se aproximadamente sincronizados com o pulso (no entanto, oscilações eletrostáticas de baixa amplitude ainda são geradas). Encontramos resultado semelhante para  $d = 5\lambda_p$ : em ambos os casos os elétrons são "aprisionados" e "transportados" pelo pulso como em um sóliton, sendo acelerados então na direção perpendicular a  $z$ . Para todos estes parâmetros a produção de pares é insignificante.

Com o crescimento da intensidade do laser, o *wakefield* gerado cresce e alcança o limite  $E_{WB}$ , mas a concentração de pares permanece extremamente pequena. A Figura 4.1 mostra o potencial normalizado  $\Psi$  para  $a_0 = 30$  (o que corresponde

a uma intensidade  $10^{21}$  W/cm<sup>2</sup> para  $\lambda = 1\mu\text{m}$ ),  $n_0 = 10^{10}$  cm<sup>-3</sup>, e três diferentes valores de  $d$ ,  $0.01\lambda_p$ ,  $0.03\lambda_p$  e  $8\lambda_p$ . Podemos perceber que a maior eficiência na geração da onda ocorre para  $d = 0.03\lambda_p$ . Neste caso e também para  $d = 0.01\lambda_p$  os elétrons são acelerados pelo *wakefield* na direção  $z$ , mas para  $d = 8\lambda_p$  os elétrons são "aprisionados" e acelerados pelo pulso. Aumentando a densidade de plasma  $n_0$  observamos que este parâmetro tem pequeno impacto sobre o potencial da onda excitada, mas tem um importante efeito na concentração de pares (Figure 4.2). Os valores obtidos para  $n_p$  concordam com aqueles encontrados na referência [24]; os "saltos" observados na Figura 4.2 são explicados pelo rápido aumento na energia e densidade eletrônicas nos pontos onde o campo elétrico é mais íngreme e o potencial é mínimo. Observamos que para  $d = 8\lambda_p$  o número de pares produzidos satura: neste caso os elétrons são acelerados pela força ponderomotiva do laser e produzem pares ao serem espalhados pelos íons. Para  $d = 0.03\lambda_p$  a concentração de pares atinge seu valor máximo, mas ele pode ser ainda maior se o plasma estiver inicialmente em movimento.

Quando o campo magnético externo  $\mathbf{B}_0$  é paralelo à direção de propagação,  $\mathbf{\Omega} = \omega_c \hat{\mathbf{z}}$ , nenhuma das componentes do momento é conservada. Neste caso observamos que para pequenas larguras do pulso de laser ( $d \lesssim 0.03\lambda_p$ ) a amplitude do potencial normalizado, assim como a concentração de pares, cresce conforme o módulo de  $\mathbf{B}_0$  aumenta até um valor crítico. Este valor limite diminui com a intensidade  $a_0$  do laser. Para grandes valores de  $d$  o comportamento observado é completamente diferente: campos magnéticos muito intensos inibem a aceleração de partículas pelo *wakefield* e pelo pulso, e conseqüentemente  $n_p$  diminui para maiores valores do parâmetro  $\omega_c/\omega_p$ . As Figuras 4.3 e 4.4 mostram  $\Psi$  e  $n_p$  para os mesmos parâmetros da Figura 4.2 e  $\omega_c/\omega_p = 10$ .



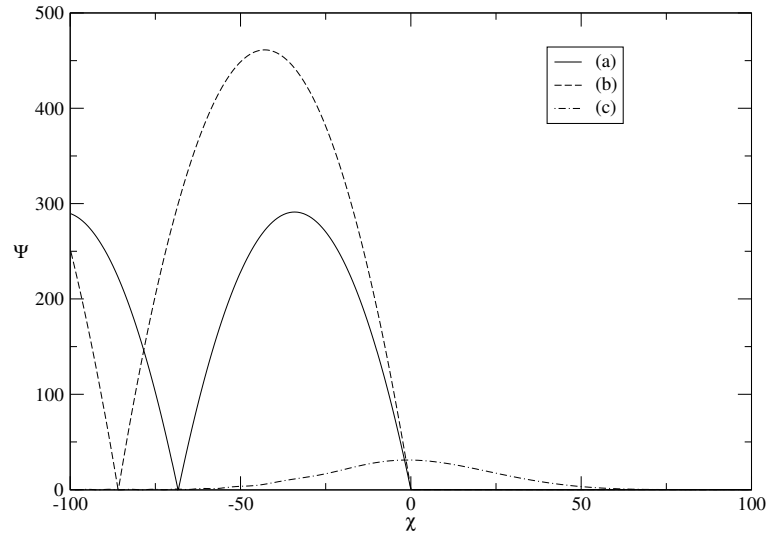


Figura 4.1: Potencial normalizado  $\Psi$  para  $B_0 = 0$  e  $n_0 = 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ ,  $a_0 = 30$  e (a)  $d = 0.01\lambda_p$ , (b)  $0.03\lambda_p$  e (c)  $8\lambda_p$ .

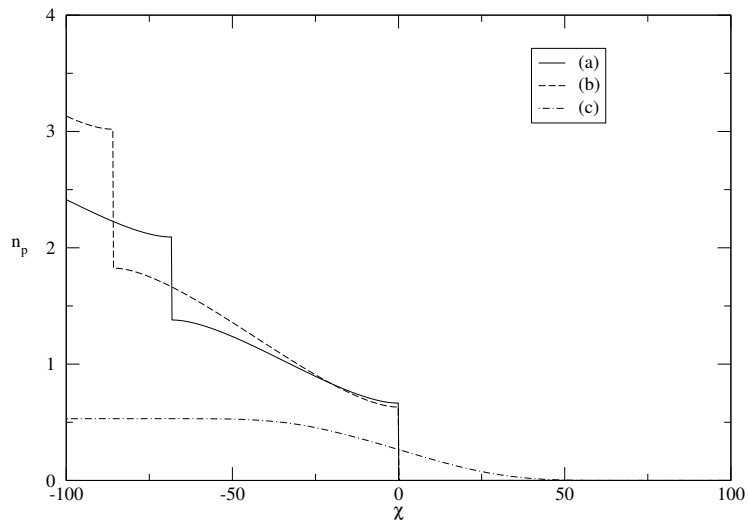


Figura 4.2: Concentração de pares  $n_p$  (em unidades de  $10^9 \text{ cm}^{-3}$ ) para  $B_0 = 0$  e  $n_0 = 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ ,  $a_0 = 30$  e (a)  $d = 0.01\lambda_p$ , (b)  $0.03\lambda_p$  e (c)  $8\lambda_p$ .

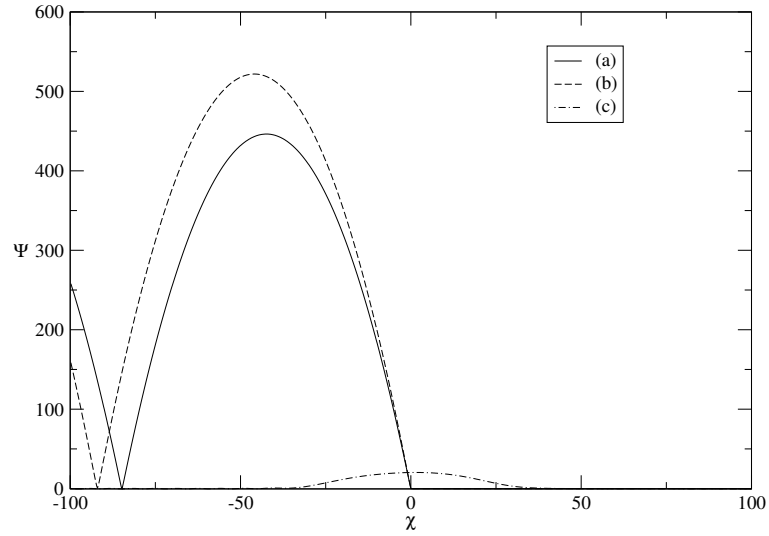


Figura 4.3: Potencial normalizado  $\Psi$  para  $\mathbf{B} = B_0\hat{\mathbf{z}}$  e  $\omega_c/\omega_p = 10$ ,  $n_0 = 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ ,  $a_0 = 30$  e (a)  $d = 0.01\lambda_p$ , (b)  $0.03\lambda_p$  e (c)  $8\lambda_p$ .

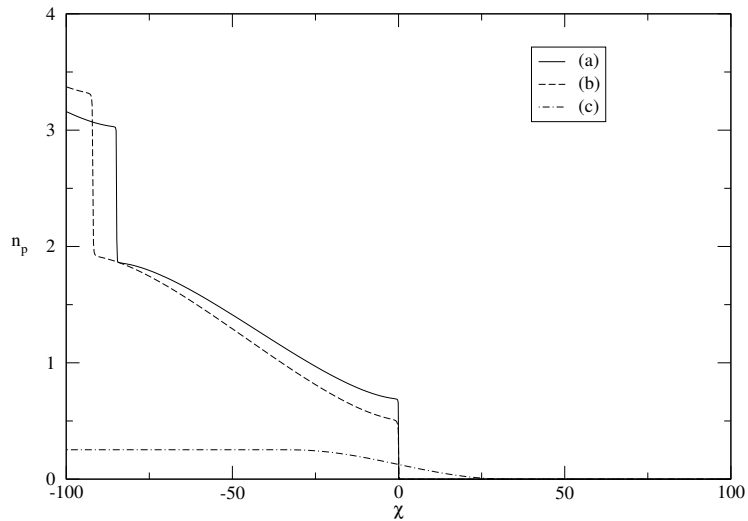


Figura 4.4: Concentração de pares  $n_p$  (em unidades de  $10^9 \text{ cm}^{-3}$ ) para  $\mathbf{B} = B_0\hat{\mathbf{z}}$  e  $\omega_c/\omega_p = 10$ ,  $n_0 = 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ ,  $a_0 = 30$  e (a)  $d = 0.01\lambda_p$ , (b)  $0.03\lambda_p$  e (c)  $8\lambda_p$ .

Para  $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{x}}$  ( $\Omega = \omega_c \hat{\mathbf{x}}$ ) a componente do momento eletrônico paralela ao campo magnético é conservada,  $\mathbf{P}_{ex} = \mathbf{a}_x$ , o que já era esperado uma vez que o movimento nessa direção não é afetado pelo campo magnético externo. Observamos que para quaisquer valores de  $a_0$ ,  $d$  e  $n_0$  o *wakefield* cresce até um valor limite, e então diminui conforme a intensidade do campo magnético aumenta. Para larguras do pulso próximas da largura "ótima" este ponto crítico ocorre muito próximo da ressonância, quando  $\omega_c = \omega_p$ ; para outros valores de  $d$  o ponto crítico ocorre para valores maiores do parâmetro  $\omega_c/\omega_p$ . Na Figura 4.5 podemos observar o crescimento do *wakefield* para grandes valores de  $d$  (curva (c)). Neste caso a onda gerada é mais eficiente em acelerar partículas do que o pulso de laser, e então os "saltos" na concentração de pares aparecem novamente (Figure 4.6).

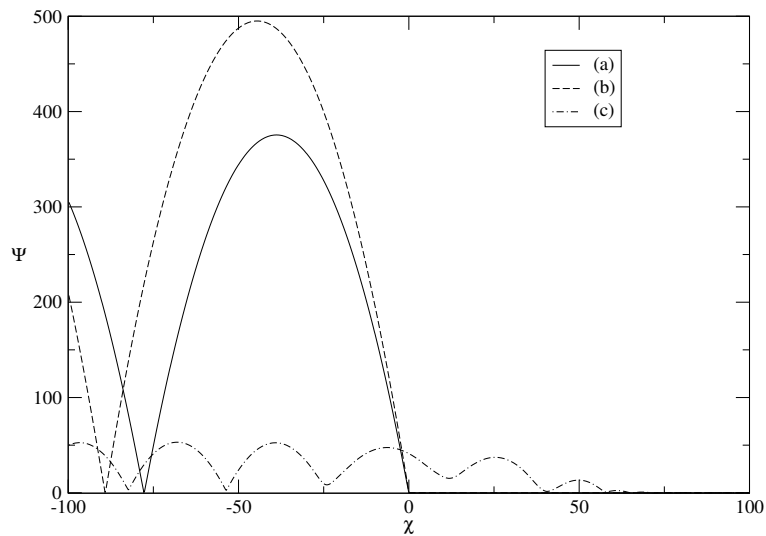


Figura 4.5: Potencial normalizado  $\Psi$  para  $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{x}}$  e  $\omega_c/\omega_p = 1$ ,  $n_0 = 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ ,  $a_0 = 30$  e (a)  $d = 0.01\lambda_p$ , (b)  $0.03\lambda_p$  e (c)  $8\lambda_p$ .

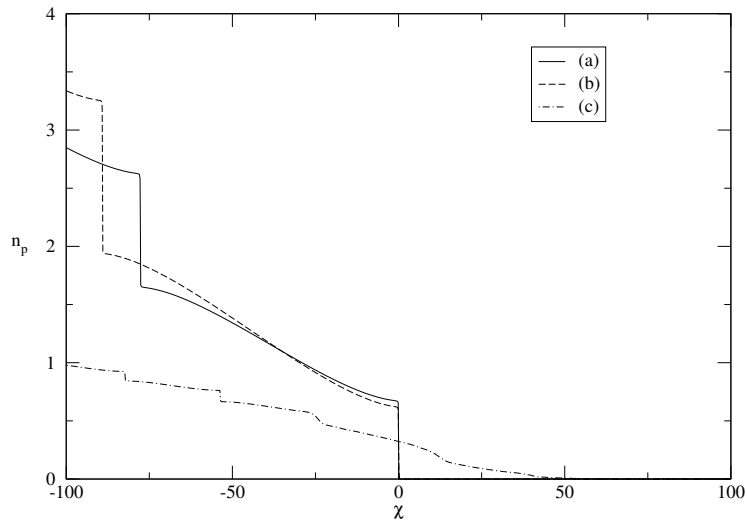


Figura 4.6: Concentração de pares  $n_p$  (em unidades de  $10^9 \text{ cm}^{-3}$ ) para  $\mathbf{B} = B_0 \hat{\mathbf{x}}$  e  $\omega_c/\omega_p = 1$ ,  $n_0 = 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ ,  $a_0 = 30$  e (a)  $d = 0.01\lambda_p$ , (b)  $0.03\lambda_p$  e (c)  $8\lambda_p$ .

Portanto, a presença de um campo magnético externo paralelo à direção de propagação inibe a formação de ondas longitudinais para pulsos largos, e consequentemente a produção de pares decresce. A situação é diferente para pulsos de curta duração, onde o *wakefield* é amplificado pelo campo magnético até um valor crítico de  $B_0$ . Quando o campo externo é perpendicular, há um considerável aumento na amplitude da onda excitada para  $\omega_c \approx \omega_p$  (para larguras próximas do valor "ótimo"), mas conforme o campo magnético aumenta, tanto  $\Psi$  quanto  $n_p$  começam a diminuir. A evolução do pulso de laser durante a interação é algo a ser considerado em futuros trabalhos.

Devemos enfatizar que um esquema eficiente de produção de pares em laboratório depende do desenvolvimento de aceleradores *laser wakefield*, os quais podem fornecer o ambiente apropriado para uma produção de pares controlada. Além disso, nossos resultados também podem ser úteis na análise de processos

relacionados aos pares elétron-pósitron em cenários astrofísicos, como os pulsares e magnetares, onde encontramos intensa radiação eletromagnética e campos magnéticos extremamente altos.

# Capítulo 5

## Conclusões e Perspectivas

Utilizamos um modelo clássico de fluidos para investigar as interações neutrino-plasma e laser-plasma. Vários aspectos destas interações foram analisados, e possíveis aplicações dos nossos resultados em astrofísica foram discutidas.

Vários eventos no universo (supernovas, explosões de raios  $\gamma$ ) são acompanhados pela liberação de grandes fluxos de neutrinos, com intensidades em excesso de  $10^{28}$  W/cm<sup>2</sup>. Como no caso dos elétrons, espera-se que neutrinos viajando através de um plasma também possam gerar uma instabilidade, a qual poderia desempenhar um importante papel em diferentes cenários astrofísicos. No entanto, sob condições tão extremas, a interação fraca entre o plasma e os neutrinos modifica a evolução do meio, o que por sua vez afeta o transporte dos neutrinos. Uma descrição auto-consistente das interações coletivas neutrino-plasma é fornecida por Silva *et al.* [51, 61, 62], que desenvolveu uma teoria cinética relativística e não-colisional para os neutrinos acoplados a um meio. Desta teoria derivamos uma descrição clássica de dois fluidos para as interações neutrino-plasma, a qual pode ser generalizada para diferentes tipos de neutrinos e partículas do plasma. No caso de um plasma não-magnetizado e não-colisional de elétrons e íons, ob-

servamos que a taxa de crescimento da instabilidade é grande o suficiente para excitar ondas de plasma. Também estudamos o regime não-linear desta interação para os casos de uma plasma não-magnetizado de elétrons e íons e um plasma magnetizado de elétrons e pósitrons. Em ambas as situações observamos que ondas de grande amplitude são geradas de modo que partículas carregadas aprisionadas neste intenso gradiente de potencial podem ser aceleradas a energias extremamente altas. A presença de um campo magnético transversal aumenta a amplitude das ondas geradas e também ajuda a solucionar o problema da desintonia de fase, o qual pode limitar o ganho de energia das partículas na onda de plasma. No caso do plasma de elétrons e pósitrons, a simetria na dinâmica destas partículas é quebrada devido ao intenso fluxo de neutrinos e sua carga efetiva associada. Analisamos a carga efetiva adquirida pelos neutrinos durante sua interação com um plasma magnetizado e verificamos que nossos resultados podem ser reduzidos aos obtidos por outros autores no caso de plasmas não-magnetizados.

Apesar do principal propósito de muitos experimentos ser a investigação da aplicabilidade do mecanismo *laser wakefield* em um futuro acelerador, algumas observações decorrentes podem ser extremamente úteis na compreensão dos processos de aceleração e de propagação de ondas eletromagnéticas em plasmas astrofísicos. Analisamos a interação laser-plasma na presença de um campo magnético externo para uma variedade de larguras de pulso, e nossos resultados estão de acordo com aqueles encontrados por outros autores [99, 102]. Estudamos duas configurações: com o campo magnético paralelo e perpendicular à direção de propagação do laser e observamos que em alguns casos a presença do campo aumenta a amplitude do *wakefield* gerado.

Outro tópico interessante também analisado foi a produção de pares elétron-pósitron devido aos elétrons acelerados. Uma vez que os elétrons são acelerados

pela onda de plasma e alcançam o limite de energia  $3m_0c^2$ , eles podem produzir pares elétron-pósitron ao serem espalhados pelo potencial de Coulomb de um núcleo. Este é o chamado processo tridente, o qual é um importante mecanismo de perda de energia em magnetosferas de pulsares. Investigamos a produção de pares devido aos elétrons acelerados em *wakefields* produzidos através das interações neutrino-plasma e laser-plasma. Em ambos os casos a concentração de pares produzida é enorme, mas no segundo a presença de um campo magnético externo pode inibir a produção de pares em algumas situações. Estes resultados podem ser importantes em estudos sobre explosões de raios  $\gamma$  (GRBs) e magnetosferas de pulsares, e também para a produção de pares em laboratório.

Existem ainda muitos outros tópicos relacionados às interações neutrino-plasma e laser-plasma que necessitam de maior investigação. Estamos interessados principalmente naqueles relacionados à astrofísica, em particular à aceleração de partículas.

O estudo das interações neutrino-plasma é importante para uma maior compreensão da dinâmica dos GRBs e das supernovas do Tipo II, por exemplo. No caso das SNs II, resultados indicam que as instabilidades geradas por neutrinos podem ser importantes no restabelecimento da onda de choque, o que é necessário para que a explosão da supernova tenha sucesso. Mas o papel dos *wakefields* produzidos por neutrinos como um mecanismo de aceleração de partículas em ambientes astrofísicos é um assunto que ainda precisa ser melhor investigado. Pretendemos analisar a eficiência destas ondas de plasmas na aceleração de partículas em cenários como os GRBs e as SNs II, o que nos levará ao estudo de problemas como o amortecimento de Landau, a desintonia de fase e o espectro de energia das partículas aceleradas. A análise da influência do plasma sobre a distribuição de neutrinos é outro assunto de interesse.



O mesmo tipo de análise pode ser feita no caso das ondas de plasma geradas durante a interação de ondas eletromagnéticas com plasmas astrofísicos. Um caso de interesse particular é se as magnetosferas de pulsares podem ser uma fonte de partículas com altas energias através deste mecanismo. Fenômenos de astrofísica de altas energias como os UHECRs e os componentes de alta energia dos GRBs invariavelmente envolvem algum processo de aceleração de partículas a altas energias. No laboratório temos estudado a interação laser-plasma na presença de um campo magnético externo e consideramos um pulso de laser que não varia com o tempo. Seria interessante analisar a evolução do pulso na presença do campo magnético.

Uma vez que os *wakefields* mencionados são eficientes em acelerar partículas, eles também serão eficientes em produzir pares através do processo tridente. Uma melhor análise da produção de pares em alguns ambientes astrofísicos seria interessante, como no caso dos GRBs e das magnetosferas de pulsares, onde o processo tridente é um importante mecanismo de perda de energia e pode ajudar a compreender a ausência de rádio pulsares com alta magnetização. A produção de pares devido ao mecanismo de Schwinger também será considerada em futuros trabalhos.

# Apêndice A

## Derivação das Equações de Fluido.

Sabemos que as variáveis macroscópicas de interesse físico para um plasma, como a densidade  $n_\sigma$  e a temperatura  $T_\sigma$ , podem ser determinadas se conhecermos a função distribuição para o sistema em questão. Para o caso de um sistema em equilíbrio térmico, podemos derivar vários destes parâmetros utilizando a função distribuição de Maxwell-Boltzmann. Para sistemas fora do equilíbrio podemos determinar a função distribuição resolvendo a equação de Boltzmann, tarefa que geralmente não é simples. No entanto, em alguns casos não é necessário resolver a equação de Boltzmann, uma vez que podemos derivar diretamente desta equação as equações diferenciais que governam as variações temporais e espaciais do sistema. As soluções destas equações de transporte macroscópico, sob certas condições, nos fornecem diretamente as variáveis macroscópicas do sistema.

A interação de um intenso fluxo de neutrinos com um plasma é um problema de muitos corpos; isto significa que a teoria cinética é a ferramenta ideal para descrever a dinâmica de neutrinos e elétrons durante a interação. No entanto, nosso propósito neste trabalho é estudar a geração de ondas de plasma, e efeitos cinéticos como o amortecimento de Landau não serão considerados. Portanto, a

teoria clássica de fluidos pode ser utilizada como base do nosso estudo. Como vimos nos capítulos anteriores, as colisões entre as partículas do plasma serão desprezadas, assim como as interações fracas neutrino-neutrino e elétron-elétron.

As equações de transporte (equações de fluido) estão relacionadas aos momentos da equação de Boltzmann. Os três primeiros momentos nos fornecem a equação de conservação da massa, a equação de conservação do momento e a equação de conservação da energia. No entanto, cada vez que obtemos um novo momento (de ordem maior), uma nova variável macroscópica aparece. É necessário, portanto, truncar o sistema de equações de transporte em algum ponto, introduzindo alguma hipótese simplificadora. Aqui os efeitos devido às colisões e ao movimento térmico das partículas foram desprezados. Desta maneira o modelo é reduzido a apenas duas equações, as de conservação de massa e de momento.

Utilizando as equações obtidas no Capítulo 2 juntamente com a força de Lorentz (que atua sobre os elétrons), podemos obter, a partir da equação de Boltzmann

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_c \quad (\text{A.1})$$

as equações cinéticas relativísticas não-colisionais  $((\partial f / \partial t)_c = 0$  : termo de colisão) para os neutrinos e o plasma de elétrons e íons (íons em repouso)

$$\frac{\partial f_\nu}{\partial t} + \mathbf{v}_\nu \cdot \nabla f_\nu - \sqrt{2} G_F \left\{ \nabla n_e + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}_e}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v}_\nu \times (\nabla \times \mathbf{J}_e) \right\} \cdot \frac{\partial f_\nu}{\partial \mathbf{p}_\nu} = 0 \quad (\text{A.2})$$

e

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \mathbf{v}_e \cdot \nabla f_e - \left\{ \sqrt{2}G_F \left[ \nabla n_\nu + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}_\nu}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \mathbf{v}_e \times (\nabla \times \mathbf{J}_\nu) \right] + e \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}_e}{c} \times \mathbf{B} \right) \right\} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{p}_e} = 0, \quad (\text{A.3})$$

onde  $f_{\nu(e)}$  é a função distribuição para os neutrinos(elétrons).

Como mencionamos anteriormente, as equações de fluido são simplesmente momentos da equação de Boltzmann. O momento de ordem zero é obtido pela simples integração em  $\mathbf{p}$  das equações A.2 e A.3:

$$\int \frac{\partial f_\nu}{\partial t} d\mathbf{p}_\nu + \int \mathbf{v}_\nu \cdot \nabla f_\nu d\mathbf{p}_\nu + \sqrt{2}G_F \int \left( \mathbf{E}_e + \frac{\mathbf{v}_\nu}{c} \times \mathbf{B}_e \right) \cdot \frac{\partial f_\nu}{\partial \mathbf{p}_\nu} d\mathbf{p}_\nu = 0 \quad (\text{A.4})$$

e

$$\int \frac{\partial f_e}{\partial t} d\mathbf{p}_e + \int \mathbf{v}_e \cdot \nabla f_e d\mathbf{p}_e + \int \left\{ \sqrt{2}G_F \left( \mathbf{E}_\nu - \frac{\mathbf{v}_e}{c} \times \mathbf{B}_\nu \right) - e \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}_e}{c} \times \mathbf{B} \right) \right\} \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{p}_e} d\mathbf{p}_e = 0 \quad (\text{A.5})$$

onde utilizamos as definições 2.7, 2.9 e

$$\mathbf{E}_\nu = -\nabla n_\nu - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}_\nu}{\partial t}, \quad \mathbf{B}_\nu = \frac{1}{c} \nabla \times \mathbf{J}_\nu. \quad (\text{A.6})$$

Como  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = n(\mathbf{r}, t) \hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ , onde  $\hat{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  é a função distribuição normalizada, as primeiras integrais em A.4 e A.5 se transformam em  $\partial n_\nu / \partial t$  e  $\partial n_e / \partial t$ , respectivamente. No caso das segundas integrais,  $\mathbf{v}_{\nu(e)}$  é uma variável independente ( $\nabla \cdot \mathbf{v}_{\nu(e)} = 0$ ), e então

$$\begin{aligned} \int \mathbf{v}_{\nu(e)} \cdot \nabla f_{\nu(e)} d\mathbf{p}_{\nu(e)} &= \int \nabla \cdot (f_{\nu(e)} \mathbf{v}_{\nu(e)}) d\mathbf{p}_{\nu(e)} = \\ &= \nabla \cdot (n_{\nu(e)} \bar{\mathbf{v}}_{\nu(e)}) = \nabla \cdot (n_{\nu(e)} \mathbf{u}_{\nu(e)}) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

onde a velocidade média  $\mathbf{u}_{\nu(e)} = \bar{\mathbf{v}}_{\nu(e)}$  é a velocidade do fluido de neutrinos (elétrons), por definição ( $\mathbf{v}$  é a velocidade de uma única partícula). A integral de  $\mathbf{E}_e$  em A.4, assim como as integrais de  $\mathbf{E}_\nu$  e  $\mathbf{E}$  em A.5, pode ser reescrita com a ajuda do teorema da divergência (lembrando que  $\mathbf{E}_e = \mathbf{E}_e(\mathbf{r}, t)$ ):

$$\int \mathbf{E}_e \cdot \frac{\partial f_\nu}{\partial \mathbf{p}_\nu} d\mathbf{p}_\nu = \int \nabla_{\mathbf{p}} \cdot (f_\nu \mathbf{E}_e) d\mathbf{p}_\nu = \int_{S_\infty} f_\nu \mathbf{E}_e \cdot d\mathbf{S} = 0. \quad (\text{A.8})$$

O resultado acima foi obtido considerando que na superfície  $S_\infty$  ( $\mathbf{p}_\nu \rightarrow \infty$ ),  $f_\nu \rightarrow 0$  (o mesmo ocorre para as integrais em  $\mathbf{p}_e$ ). Já a integral de  $\mathbf{B}_e$  na equação A.4, assim como as integrais de  $\mathbf{B}_\nu$  e  $\mathbf{B}$  na expressão A.5, pode ser dividida em duas:

$$\begin{aligned} & \int (\mathbf{v}_\nu \times \mathbf{B}_e) \cdot \frac{\partial f_\nu}{\partial \mathbf{p}_\nu} d\mathbf{p}_\nu = \\ &= \int \nabla_{\mathbf{p}} \cdot [f_\nu (\mathbf{v}_\nu \times \mathbf{B}_e)] d\mathbf{p}_\nu - \int f_\nu \nabla_{\mathbf{p}} \cdot (\mathbf{v}_\nu \times \mathbf{B}_e) d\mathbf{p}_\nu = \\ &= \int_{S_\infty} f_\nu (\mathbf{v}_\nu \times \mathbf{B}_e) \cdot d\mathbf{S} - \int f_\nu \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_\nu} \cdot (\mathbf{v}_\nu \times \mathbf{B}_e) d\mathbf{p}_\nu = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

onde a primeira integral se anula pelas mesmas razões que a equação A.8, e a segunda porque  $(\mathbf{v}_\nu \times \mathbf{B}_e)$  é perpendicular a  $\partial/\partial \mathbf{p}_\nu$ . Portanto, as equações A.4 e A.5 tornam-se

$$\frac{\partial n_\nu}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\nu \mathbf{u}_\nu) = 0 \quad (\text{A.10})$$

e

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \nabla \cdot (n_e \mathbf{u}_e) = 0, \quad (\text{A.11})$$

as chamadas equações de continuidade para o fluido de neutrinos e de elétrons. O momento de primeira ordem é obtido multiplicando-se as equações A.2 e A.3 por  $\mathbf{p}_\nu$  e  $\mathbf{p}_e$ , respectivamente, e integrando sobre  $\mathbf{p}$ :

$$\begin{aligned} & \int \mathbf{p}_\nu \frac{\partial f_\nu}{\partial t} d\mathbf{p}_\nu + \int \mathbf{p}_\nu (\mathbf{v}_\nu \cdot \nabla) f_\nu d\mathbf{p}_\nu + \\ & + \sqrt{2}G_F \int \left[ \mathbf{p}_\nu \left( \mathbf{E}_e + \frac{\mathbf{v}_\nu}{c} \times \mathbf{B}_e \right) \right] \cdot \frac{\partial f_\nu}{\partial \mathbf{p}_\nu} d\mathbf{p}_\nu = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{aligned} & \int \mathbf{p}_e \frac{\partial f_e}{\partial t} d\mathbf{p}_e + \int \mathbf{p}_e (\mathbf{v}_e \cdot \nabla) f_e d\mathbf{p}_e - \\ & - e \int \left[ \mathbf{p}_e \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}_e}{c} \times \mathbf{B} \right) \right] \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{p}_e} d\mathbf{p}_e + \\ & + \sqrt{2}G_F \int \left[ \mathbf{p}_e \left( \mathbf{E}_\nu + \frac{\mathbf{v}_e}{c} \times \mathbf{B}_\nu \right) \right] \cdot \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{p}_e} d\mathbf{p}_e = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Os primeiros termos nas expressões A.12 e A.13 se transformam simplesmente em  $\partial(n_\nu \mathbf{q}_\nu)/\partial t$  e  $\partial(n_e \mathbf{q}_e)/\partial t$ , onde  $\mathbf{q}_{\nu(e)}$  é o momento médio dos neutrinos (elétrons), isto é, o momento do fluido de neutrinos (elétrons). A segunda integral na equação A.12 (assim como a segunda integral em A.13) pode ser reescrita com a ajuda da identidade  $\nabla \cdot (\mathbf{a}\mathbf{b}) = (\nabla \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}$ :

$$\begin{aligned} & \int \mathbf{p}_\nu (\mathbf{v}_\nu \cdot \nabla) f_\nu d\mathbf{p}_\nu = \int (\mathbf{v}_\nu \cdot \nabla) (f_\nu \mathbf{p}_\nu) d\mathbf{p}_\nu = \\ & = \int \nabla \cdot (f_\nu \mathbf{v}_\nu \mathbf{p}_\nu) d\mathbf{p}_\nu - \int (\nabla \cdot \mathbf{v}_\nu) f_\nu \mathbf{p}_\nu d\mathbf{p}_\nu = \nabla \cdot (n_\nu \overline{\mathbf{v}_\nu \mathbf{p}_\nu}) \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Agora podemos separar  $\mathbf{p}_\nu$  em dois componentes, o momento médio dos neutrinos,  $\mathbf{q}_\nu$ , e o momento térmico  $\mathbf{j}_\nu$  de cada neutrino (o mesmo pode ser feito para o momento  $\mathbf{p}_e$  de cada elétron):

$$\mathbf{p}_\nu = \mathbf{q}_\nu + \mathbf{j}_\nu. \quad (\text{A.15})$$

Do mesmo modo, podemos separar  $\mathbf{v}_\nu$  em  $\mathbf{u}_\nu$ , a velocidade do fluido, e  $\mathbf{w}_\nu$ , a velocidade térmica de cada neutrino:

$$\mathbf{v}_\nu = \mathbf{u}_\nu + \mathbf{w}_\nu. \quad (\text{A.16})$$

Como  $\mathbf{q}_\nu$  e  $\mathbf{u}_\nu$  já são médias, teremos

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (n_\nu \overline{\mathbf{v}_\nu \mathbf{p}_\nu}) &= \nabla \cdot \left[ n_\nu (\overline{\mathbf{u}_\nu \mathbf{q}_\nu + \mathbf{u}_\nu \mathbf{j}_\nu + \mathbf{w}_\nu \mathbf{q}_\nu + \mathbf{w}_\nu \mathbf{j}_\nu}) \right] = \\ &= \nabla \cdot \left[ n_\nu (\mathbf{u}_\nu \mathbf{q}_\nu + \mathbf{u}_\nu \overline{\mathbf{j}_\nu} + \overline{\mathbf{w}_\nu} \mathbf{q}_\nu + \overline{\mathbf{w}_\nu \mathbf{j}_\nu}) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

A média da velocidade térmica é zero ( $\overline{\mathbf{w}_\nu} = 0$ ), assim como a média do momento térmico ( $\overline{\mathbf{j}_\nu} = 0$ ), e então

$$\nabla \cdot (n_\nu \overline{\mathbf{v}_\nu \mathbf{p}_\nu}) = \nabla \cdot (n_\nu \mathbf{u}_\nu \mathbf{q}_\nu) + \nabla \cdot (n_\nu \overline{\mathbf{w}_\nu \mathbf{j}_\nu}). \quad (\text{A.18})$$

Escrevendo  $\nabla \cdot (n_\nu \mathbf{u}_\nu \mathbf{q}_\nu) = \mathbf{q}_\nu \nabla \cdot (n_\nu \mathbf{u}_\nu) + n_\nu (\mathbf{u}_\nu \cdot \nabla) \mathbf{q}_\nu$ , teremos como solução para o segundo termo da equação A.12

$$\int \mathbf{p}_\nu (\mathbf{v}_\nu \cdot \nabla) f_\nu d\mathbf{v}_\nu = \mathbf{q}_\nu \nabla \cdot (n_\nu \mathbf{u}_\nu) + n_\nu (\mathbf{u}_\nu \cdot \nabla) \mathbf{q}_\nu + \nabla \cdot \mathbf{P}_\nu \quad (\text{A.19})$$

onde  $\mathbf{P}_\nu \equiv n_\nu \overline{\mathbf{w}_\nu \mathbf{j}_\nu}$  é o tensor stress.

A integral envolvendo  $\mathbf{E}_e$  e  $\mathbf{B}_e$  na expressão A.12 pode ser reescrita da seguinte maneira (o mesmo sendo válido para as integrais envolvendo  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}_\nu$  e  $\mathbf{B}_\nu$  na equação A.13):

$$\begin{aligned}
 & \int \left[ \mathbf{p}_\nu \left( \mathbf{E}_e + \frac{\mathbf{v}_\nu}{c} \times \mathbf{B}_e \right) \right] \cdot \frac{\partial f_\nu}{\partial \mathbf{p}_\nu} d\mathbf{p}_\nu = \\
 & = \int \nabla_{\mathbf{p}} \cdot \left[ f_\nu \mathbf{p}_\nu \left( \mathbf{E}_e + \frac{\mathbf{v}_\nu}{c} \times \mathbf{B}_e \right) \right] d\mathbf{p}_\nu - \\
 & \quad - \int f_\nu \mathbf{p}_\nu \nabla_{\mathbf{p}} \cdot \left( \mathbf{E}_e + \frac{\mathbf{v}_\nu}{c} \times \mathbf{B}_e \right) d\mathbf{p}_\nu - \\
 & \quad - \int f_\nu \left( \mathbf{E}_e + \frac{\mathbf{v}_\nu}{c} \times \mathbf{B}_e \right) \cdot \nabla_{\mathbf{p}} \mathbf{p}_\nu d\mathbf{p}_\nu. \tag{A.20}
 \end{aligned}$$

As duas primeiras integrais na expressão acima são nulas por razões já descritas anteriormente. No caso da terceira integral,  $\nabla_{\mathbf{p}} \mathbf{p}_\nu = \mathbf{l}$ , o tensor identidade. Portanto,

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{2}G_F \int \left[ \mathbf{p}_\nu \left( \mathbf{E}_e + \frac{\mathbf{v}_\nu}{c} \times \mathbf{B}_e \right) \right] \cdot \frac{\partial f_\nu}{\partial \mathbf{p}_\nu} d\mathbf{p}_\nu = \\
 & = -\sqrt{2}G_F \int f_\nu \left( \mathbf{E}_e + \frac{\mathbf{v}_\nu}{c} \times \mathbf{B}_e \right) d\mathbf{p}_\nu = -\sqrt{2}G_F \int f_\nu \mathbf{E}_e d\mathbf{p}_\nu - \\
 & \quad - \sqrt{2}G_F \int f_\nu \left( \frac{\mathbf{v}_\nu}{c} \times \mathbf{B}_e \right) d\mathbf{p}_\nu = -\sqrt{2}G_F n_\nu \left( \mathbf{E}_e + \frac{\mathbf{u}_\nu}{c} \times \mathbf{B}_e \right). \tag{A.21}
 \end{aligned}$$

Substituindo os resultados obtidos nas expressões A.12 e A.13, e com a ajuda das equações A.10 e A.11, encontramos as equações de movimento do fluido

$$n_\nu \left\{ \frac{\partial \mathbf{q}_\nu}{\partial t} + (\mathbf{u}_\nu \cdot \nabla) \mathbf{q}_\nu \right\} = \sqrt{2}G_F n_\nu \left( \mathbf{E}_e + \frac{\mathbf{u}_\nu}{c} \times \mathbf{B}_e \right) - \nabla \cdot \mathbf{P}_\nu, \tag{A.22}$$

$$\begin{aligned}
 n_e \left\{ \frac{\partial \mathbf{q}_e}{\partial t} + (\mathbf{u}_e \cdot \nabla) \mathbf{q}_e \right\} & = \sqrt{2}G_F n_e \left( \mathbf{E}_\nu + \frac{\mathbf{u}_e}{c} \times \mathbf{B}_\nu \right) - \\
 & \quad - e n_e \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}_e}{c} \times \mathbf{B} \right) - \nabla \cdot \mathbf{P}_e. \tag{A.23}
 \end{aligned}$$

Para o caso de um fluido isotrópico de neutrinos (viscosidade é desprezada), a equação A.22 se reduz a



$$\frac{\partial \mathbf{q}_\nu}{\partial t} + (\mathbf{u}_\nu \cdot \nabla) \mathbf{q}_\nu = \sqrt{2}G_F \left( \mathbf{E}_e + \frac{\mathbf{u}_\nu}{c} \times \mathbf{B}_e \right) - \frac{\nabla P_\nu}{n_\nu}, \quad (\text{A.24})$$

onde  $P_\nu$  é a pressão escalar. Já a equação A.23 para um fluido isotrópico de elétrons se transforma em

$$\frac{\partial \mathbf{q}_e}{\partial t} + (\mathbf{u}_e \cdot \nabla) \mathbf{q}_e = \sqrt{2}G_F \left( \mathbf{E}_\nu + \frac{\mathbf{u}_e}{c} \times \mathbf{B}_\nu \right) - e \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}_e}{c} \times \mathbf{B} \right) - \frac{\nabla P_e}{n_e}, (\text{A.25})$$

onde  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  representam a soma dos campos externos e aqueles gerados pelo plasma. Chamando de  $\mathbf{v}_{\nu(e)}$  e  $\mathbf{p}_{\nu(e)}$  a velocidade e o momento do fluido de neutrinos (elétrons), respectivamente, podemos reescrever as equações acima na forma

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{p}_\nu}{\partial t} + (\mathbf{v}_\nu \cdot \nabla) \mathbf{p}_\nu = \\ & = \sqrt{2}G_F \left\{ -\nabla n_e - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}_e}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \mathbf{v}_\nu \times (\nabla \times \mathbf{J}_e) \right\} - \frac{\nabla P_\nu}{n_\nu} \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{p}_e}{\partial t} + (\mathbf{v}_e \cdot \nabla) \mathbf{p}_e = & \sqrt{2}G_F \left\{ -\nabla n_\nu - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}_\nu}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \mathbf{v}_e \times (\nabla \times \mathbf{J}_\nu) \right\} - \\ & - e \left( \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}_e}{c} \times \mathbf{B} \right) - \frac{\nabla P_e}{n_e}. \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

As equações acima, juntamente com as equações de continuidade e as de Maxwell, descrevem completamente a interação de um gás de neutrinos com um plasma eletrônico, de acordo com um modelo de dois fluidos.

# Referências Bibliográficas

- [1] *Stanford's Plasma Wakefield Accelerator Experiment (SLAC):*  
<http://www.slac.stanford.edu/grp/arb/e164/index.html> .
- [2] *L'OASIS Group at the University of California, Berkeley:*  
<http://loasis.lbl.gov/> .
- [3] C. G. R. Geddes. *et al. Nature* **431**, 538 (2004).
- [4] S. P. D. Mangles. *et al. Nature* **431**, 535 (2004).
- [5] E. Esarey, P. Sprangle, J. Krall e A. Ting. *IEEE Transactions on Plasma Science* **24**, 252 (1996).
- [6] T. Tajima e J. M. Dawson. *Physical Review Letters* **43**, 267 (1979).
- [7] K. G. McClements, M. E. Dieckmann, A. Ynnerman, S. C. Chapman e R. O. Dendy. *Physical Review Letters* **87**, 255002 (2001).
- [8] P. Chen, T. Tajima e Y. Takahashi. *arXiv:astro-ph/0205287, Physical Review Letters* **89**, 161101 (2002).
- [9] A. I. Akhiezer e R. V. Polovin. *Journal of Experimental and Theoretical Physics* **30**, 915 (1956).

- [10] Y. B. Fainberg, V. A. Balakirev, I. N. Onishehendo, G. L. Sidelnikov e G. V. Sotnikov. *Plasma Physics Reports* **20**, 606 (1994).
- [11] P. Chen, J. M. Dawson, R. W. Huff e T. Katsouleas. *Physical Review Letters* **54**, 693 (1985).
- [12] M. E. Dieckmann, B. Eliasson e P. K. Shukla. *Physical Review E* **70**, 036401 (2004).
- [13] M. E. Dieckmann, B. Eliasson e P. K. Shukla. *Astrophysical Journal* **617**, 1361 (2004).
- [14] R. Bingham, J. M. Dawson, J. J. Su e H. A. Bethe. *Physics Letters A* **193**, 279 (1994).
- [15] A. Serbeto, L. A. Rios e P. K. Shukla. *Physics of Plasmas* **9**, 4406 (2002).
- [16] D. Umstadter, J. K. Kim e E. Dodd. *Physical Review Letters* **76**, 2073 (1996).
- [17] T. Katsouleas e J. M. Dawson. *Physical Review Letters* **51**, 392 (1983).
- [18] S. V. Bulanov, F. Pegoraro, A. M. Pukhov e A. S. Sakharov. *Physical Review Letters* **78**, 4205 (1997).
- [19] J. M. Dawson. *Physical Review* **113**, 383 (1959).
- [20] D. W. Kerst. *Physical Review* **58**, 841 (1940).
- [21] A. Levinson. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **278**, 1018 (1996).
- [22] P. Chen. *arXiv:astro-ph/0303350* (2003).

- [23] W. Heitler. *The Quantum Theory of Radiation*. Clarendon, Oxford (1954).
- [24] V. I. Berezhiani, D. D. Tskhakaya e P. Shukla. *Physical Review A* **46**, 6608 (1992).
- [25] M. Marklund e P. K. Shukla. *arXiv:hep-ph/0602123*, *Reviews of Modern Physics* **78**, 591 (2006).
- [26] A. Venkatesan, M. C. Miller e A. V. Olinto. *The Astrophysical Journal* **484**, 323 (1997).
- [27] M. G. Baring e A. K. Harding. *arXiv:astro-ph/9809115*, *The Astrophysical Journal* **507**, L55 (1998).
- [28] B. Richter. *et al. Frontiers in High Energy Density Physics: The X-Games of Contemporary Science*. The National Academies Press, Washington (2003).
- [29] J. W. Shearer, J. Garrison, J. Wong e J. E. Swain. *Physical Review A* **8**, 1582 (1973).
- [30] F. V. Bunkin e A. E. Kazakov. *Doklady Akad Nauk USSR* **193**, 1247 (1970).
- [31] L. A. Rios, A. Serbeto, J. T. Mendonça, P. K. Shukla e R. Bingham. *Physics Letters B* **606**, 79 (2005).
- [32] L. A. Rios, A. Serbeto, J. T. Mendonça, P. K. Shukla e R. Bingham. *A ser publicado no Journal of Experimental and Theoretical Physics* (2006).
- [33] J. Schwinger. *Physical Review* **82**, 664 (1951).
- [34] Y. Kluger, J. M. Eisenberg, B. Svetitsky, F. Cooper e E. Mottola. *Physical Review Letters* **67**, 2427 (1991).

- [35] H. Nitta, M. K. Khokonov, Y. Nagata e S. Onuki. *Physical Review Letters* **93**, 180407 (2004).
- [36] N. B. Narozhny, S. S. Bulanov, V. D. Mur e V. S. Popov. *Physics Letters A* **330**, 1 (2004).
- [37] M. Mittleman. *Physical Review A* **35**, 4624 (1987).
- [38] Q. R. Ahmad. *et al. Physical Review Letters* **87**, 071301 (2001).
- [39] Q. R. Ahmad. *et al. Physical Review Letters* **89**, 011301 (2002).
- [40] H. A. Bethe. *Reviews of Modern Physics* **62**, 801 (1990).
- [41] J. Alvarez-Muñiz, F. Halzen e D. Hooper. *arXiv:astro-ph/0310417*, *The Astrophysical Journal* **604**, L85 (2004).
- [42] H. A. Bethe e J. R. Wilson. *The Astrophysical Journal* **295**, 14 (1985).
- [43] R. Tomàs, M. Kachelriess, G. Raffelt, A. Dighe, H. T. Janka e L. Scheck. *arXiv:astro-ph/0407132*, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, **9**, 15 (2004).
- [44] T. Chiueh. *The Astrophysical Journal* **413**, L35 (1993).
- [45] R. Bingham, H. A. Bethe, J. M. Dawson, P. K. Shukla e J. J. Su. *Physics Letters A* **220**, 107 (1996).
- [46] V. N. Oraevsky e V. B. Semikoz. *Physica A* **142**, 135 (1987).
- [47] A. Serbeto e J. A. Souza. *Physics Letters A* **258**, 141 (1999).
- [48] S. J. Hardy e D. B. Melrose. *The Astrophysical Journal* **480**, 705 (1997).

- [49] L. O. Silva, R. Bingham, J. M. Dawson, P. K. Shukla, N. L. Tsintsadze e J. T. Mendonça. *Physical Review D* **60**, 068701–1 (1999).
- [50] J. R. Wilson. *Numerical Astrophysics*. Jones and Bartlett, Boston (1985).
- [51] L. O. Silva, R. Bingham, J. M. Dawson, J. T. Mendonça e P. K. Shukla. *Physical Review Letters* **83**, 2703 (1999).
- [52] R. Bingham, L. O. Silva, J. T. Mendonça, P. K. Shukla, W. B. Mori e A. Serbeto. *Plasma Physics and Controlled Fusion* **46**, 327 (2004).
- [53] P. K. Shukla, L. Stenflo, R. Bingham, H. A. Bethe, J. M. Dawson e J. T. Mendonça. *Physics of Plasmas* **5**, 1 (1998).
- [54] J. T. Mendonça, A. Serbeto, R. Bingham e P. K. Shukla. *Journal of Plasma Physics* **71**, 119 (2005).
- [55] A. Serbeto. *Physics of Plasmas* **6**, 2943 (1999).
- [56] T. K. Kuo e J. Pantaleone. *Review of Modern Physics* **61**, 937 (1989).
- [57] P. K. Shukla, L. O. Silva, H. Bethe, R. Bingham, J. M. Dawson, L. Stenflo, J. T. Mendonça e S. Dalhed. *Plasma Physics and Controlled Fusion* **41**, A699 (1999).
- [58] L. Wolfenstein. *Physical Review D* **17**, 2369 (1978).
- [59] H. A. Bethe. *Physical Review Letters* **56**, 1305 (1986).
- [60] Y. Fukuda. *et al. Physical Review Letters* **81**, 1562 (1998).
- [61] L. O. Silva, R. Bingham, J. M. Dawson, J. T. Mendonça e P. K. Shukla. *Physics of Plasmas* **7**, 2166 (2000).

- [62] L. O. Silva, R. Bingham, J. M. Dawson, J. T. Mendonça e P. K. Shukla. *The Astrophysical Journal Supplement Series* **127**, 481 (2000).
- [63] L. Landau e E. Lifshitz. *The Classical Theory of Fields*. Butterworth Heinemann, Oxford (1973).
- [64] J. T. Mendonça, L. O. Silva, R. Bingham, N. L. Tsintsadze, P. K. Shukla e J. M. Dawson. *Physics Letters A* **239**, 373 (1998).
- [65] N. L. Tsintsadze, J. T. Mendonça e P. K. Shukla. *Physics Letters A* **249**, 110 (1998).
- [66] J. T. Mendonça, A. Serbeto, P. K. Shukla e L. O. Silva. *Physics Letters B* **548**, 63 (2002).
- [67] A. Serbeto, L. A. Rios, J. T. Mendonça e P. K. Shukla. *Physics of Plasmas* **11**, 1352 (2004).
- [68] J. F. Nieves e P. B. Pal. *Physical Review D* **49**, 1398 (1994).
- [69] V. N. Oraevsky e V. B. Semikoz. *Astroparticle Physics* **18**, 261 (2002).
- [70] L. O. Silva, R. Bingham, J. M. Dawson e W. B. Mori. *Physical Review E* **59**, 2273 (1999).
- [71] D. R. Nicholson. *Introduction to Plasma Theory*. John Wiley & Sons, USA (1983).
- [72] Y. Qian e G. M. Fuller. *Physical Review D* **51**, 1479 (1995).
- [73] F. F. Chen. *Introduction to Plasma Physics*. Plenum Press, New York (1974).

- [74] J. A. Bittencourt. *Fundamentals of Plasma Physics*. São José dos Campos, Brasil (2003).
- [75] A. J. Brizard, H. Murayama e J. S. Wurtele. *Physical Review E* **61**, 4410 (2000).
- [76] S. Weinberg. *The Quantum Theory of Fields*. Cambridge University Press, Cambridge (1996).
- [77] T. Tajima e K. Shibata. *Plasma Astrophysics*. Addison-Wesley, Reading, MA (1997).
- [78] P. B. Pal e T. N. Pham. *Physical Review D* **40**, 259 (1989).
- [79] A. Serbeto. *Physics Letters A* **296**, 217 (2002).
- [80] S. J. Hardy e D. B. Melrose. *The Astrophysical Journal* **480**, 705 (1997).
- [81] L. Bento. *arXiv:hep-ph/9908206*, *Physical Review D* **61**, 013004-1 (2000).
- [82] P. K. Shukla, R. Bingham, H. A. Bethe, J. M. Dawson e L. Stenflo. *Physica Scripta* **55**, 96 (1996).
- [83] S. V. Bulanov. *Reviews of Plasma Physics, Vol. 22*. Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York (2001).
- [84] A. A. Gvozdev e I. S. Ognev. *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters* **74**, 298 (2001).
- [85] V. S. Berezinsky e O. F. Prilutsky. *Astronomy & Astrophysics* **175**, 309 (1987).
- [86] J. Cooperstein, L. J. van den Horn e E. Baron. *The Astrophysical Journal Letters* **321**, L129 (1987).



- [87] H. T. Janka. *Astronomy & Astrophysics* **244**, 378 (1991).
- [88] R. A. Treumann, A. Kull e H. Böhringer. *New Journal of Physics* **2**, 11 (2000).
- [89] F. A. Aharonian. *et al. Nature* **432**, 75 (2004).
- [90] P. Mészáros. *Science* **291**, 79 (2001).
- [91] J. A. Hirschman e J. Arons. *The Astrophysical Journal* **560**, 871 (2001).
- [92] I. J. Weis e D. B. Melrose. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* **329**, 115 (2002).
- [93] E. Haug. *Astronomy & Astrophysics* **416**, 437 (2004).
- [94] A. Serbeto, L. A. Rios, J. T. Mendonça, P. K. Shukla e R. Bingham. *Journal of Experimental and Theoretical Physics* **99**, 466 (2004).
- [95] A. Serbeto, J. T. Mendonça, P. K. Shukla e L. O. Silva. *Physics Letters A* **305**, 190 (2002).
- [96] K. Bhattacharya, A. K. Ganguly e S. Konar. *Physical Review D* **65**, 013007–1 (2001).
- [97] U. Wagner. *et al. Physical Review E* **70**, 026401 (2004).
- [98] P. K. Shukla, N. N. Rao, M. Y. Yu e N. L. Tsintsadze. *Physics Reports* **138**, 1 (1986).
- [99] M. Y. Yu, W. Yu, Z. Y. Chen, J. Zhang, Y. Yin, L. H. Cao, P. X. Lu e Z. Z. Xu. *Physics of Plasmas* **10**, 2468 (2003).

- 
- [100] V. I. Berezhiani, D. P. Garuchava, S. V. Mikeladze, K. I. Sigua, N. L. Tsintsadze, S. M. Mahajan, Y. Kishimoto e K. Nishikawa. *Physics of Plasmas* **12**, 062308 (2005).
- [101] D. Umstadter. *Physics of Plasmas* **8**, 1774 (2001).
- [102] V. B. Krasovitskii, V. G. Dorofeenko, V. I. Sotnikov e B. S. Bauer. *Physics of Plasmas* **11**, 724 (2004).