

Alexandre Yasuda Miguelote

Colapso Gravitacional
de Fluido Perfeito
em Espaços-Tempos
Circularmente Simétricos
com Auto-Similaridade Cinemática

Tese apresentada como requisito parcial
para obtenção do título de Doutor em Física



INSTITUTO DE FÍSICA
Universidade Federal Fluminense

Orientadora: Dra. Nazira Abache Tomimura

Co-orientador: Dr. Anzhong Wang

Niterói, RJ

2007

M634 Miguelote, Alexandre Yasuda.
Colapso gravitacional de fluido perfeito em espaços-tempos circularmente simétricos com auto-similaridade cinemática / Alexandre Yasuda Miguelote ; orientadora Nazira Abache Tomimura. – Niterói, 2007.
109 p.

Tese (doutorado) – Universidade Federal Fluminense,
Instituto de Física, 2007.
Orientadora Nazira Abache Tomimura.
Bibliografia: p.94-100

1.GRAVITAÇÃO. 2.RELATIVIDADE GERAL. 3.COLAPSO GRAVITACIONAL.
4.SIMETRIA CIRCULAR. 5.AUTO-SIMILARIDADE. 6.FENÔMENOS CRÍTICOS.
I.Tomimura, Nazira Abache (Orien.). II.Universidade Federal Fluminense. Instituto de Física, Instituição responsável.

CDD 530

“Phantasie ist wichtiger als Wissen.”

(“A imaginação é mais importante do que o conhecimento.”)

Albert Einstein

*“If I have seen further than others,
it was by standing upon the shoulders of giants.”*

*(“Se eu vi mais longe do que outros,
foi pelo apoio em ombros de gigantes.”)*

Isaac Newton

Dedicatória

À minha família

Agradecimentos

- À Dra. Nazira Abache Tomimura, pela sua orientação e sua paciência com algumas das minhas dificuldades;
- Ao Dr. Anzhong Wang, pela sua co-orientação;
- Aos meus pais: Sergio e Shigueri;
- Aos meus irmãos: Guilherme, Fernando e Eduardo;
- À minha avó Ondina;
- À Rebecca Estevam Zambon, que tem sido o pilar principal da construção da minha vida;
- Ao Carlos Frederico e ao Jaime Rocha, pelas suas sugestões que contribuíram para a melhoria desta tese;
- À Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Física;
- Ao Prof. Luiz Roberto do Colégio Pedro II, que através das suas brilhantes aulas me despertou para o estudo da Física;
- Aos meus professores da Graduação e da Pós-Graduação;
- Aos colegas: Adílio, Alberto, Alexandre Rivas, André Queiroz, André Schwarz, Andreia, Antônio, Arnaud, Artur, Carlos Alberto, Carmen, César, Cíntia, Cláudia, Eduardo, Eliel, Érica, Germano, Karen, Klauko, Luciana

Loureiro, Luciana Rios, Luiz Alberto, Marcelo, Márcia, Marco Aurélio, Marina, Otávio, Paulo Sérgio, Paulo Cesar Jr., Paulo César Travassos, Ricardo Barguine, Ronai, Scheila, Wanderclakson e Wellington;

- Ao Rodrigo de Mello Alves, por ter feito algumas das ilustrações;
- Às bibliotecárias: Ana, Kátia e Rita;
- Aos secretários da Pós-Graduação: Luana e João;
- A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a execução deste trabalho;
- Ao CNPq, pela bolsa concedida.

Resumo

Fluido perfeito com auto-similaridade cinemática é estudado em espaços-tempos $2 + 1$ dimensionais com simetria circular e várias soluções exatas das equações de campo de Einstein são dadas. Estas incluem todas as soluções de poeira e fluido perfeito rígido com auto-similaridade do primeiro tipo (homotética) e todas as soluções de fluido perfeito com uma equação de estado linear e auto-similaridade do tipo de ordem zero e do segundo tipo. Viu-se que algumas destas soluções representam colapso gravitacional e o estado final do colapso pode ser ou um buraco negro ou uma singularidade nula. Mostrou-se também que uma solução pode ter dois tipos diferentes de auto-similaridade cinemática. Por fim, perturbações lineares de soluções auto-similares homotéticas são estudadas. Notou-se que, exceto para aquelas com $n = 1$ e $n = 3$, nenhuma delas é estável e todas possuem mais de um modo instável. Portanto, nenhuma destas soluções pode ser crítica, já que, por definição uma solução crítica possui um e somente um modo instável.

Abstract

Perfect fluid with kinematic self-similarity is studied in $2 + 1$ dimensional spacetimes with circular symmetry and various exact solutions to the Einstein field equations are given. These include all the solutions of dust and stiff perfect fluid with self-similarity of the first kind (homothetic) and all the solutions of perfect fluid with a linear equation of state and self-similarity of the zeroth and second kinds. It is found that some of these solutions represent gravitational collapse and the final state of the collapse can be either a black hole or a null singularity. It is also shown that one solution can have two different kinds of kinematic self-similarity. At last, linear perturbations of homothetic self-similar stiff fluid solutions are studied. It is found that, except for those with $n = 1$ and $n = 3$, none of them is stable and all have more than one unstable mode. Hence, none of these solutions can be critical, because, by definition, a critical solution has one and only one unstable mode.

Sumário

Dedicatória	ii
Agradecimentos	iii
Resumo	v
Abstract	vi
1 Introdução	1
1.1 Breve Introdução à Teoria de Relatividade Geral de Einstein	1
1.2 Colapso Gravitacional	5
1.3 Fenômenos Críticos em Colapso Gravitacional	7
1.4 Auto-Similaridade na Teoria da Relatividade Geral	16
1.5 Plano Geral do Trabalho	23
2 Colapso Gravitacional em Espaços-Tempos (2 + 1)-Dimensionais	25
2.1 Gravitação em 2 + 1 Dimensões	25
2.1.1 Motivações	26
2.1.2 Teoria da Relatividade Geral em Espaços-Tempos (2 + 1)- Dimensionais	27
2.2 Espaços-Tempos Circularmente Simétricos	28
2.2.1 Horizontes Aparentes e Buracos Negros Circularmente Si- métricos	29
2.3 Auto-Similaridade Cinemática em Espaços-Tempos Circularmen- te Simétricos	34

3	Soluções das Equações de Campo de Einstein com Auto-Similaridade Cinemática	36
3.1	Soluções das Equações de Campo de Einstein com Auto-Similaridade do Tipo de Ordem Zero	37
3.1.1	Caso $y \neq -1$	39
3.1.2	Caso $y = -1$	42
3.2	Soluções das Equações de Campo de Einstein com Auto-Similaridade do Primeiro Tipo	42
3.2.1	Fluido Rígido ($K = 1$)	45
3.2.2	Poeira ($K = 0$)	54
3.2.3	Fluido Perfeito com $K \neq 0, 1$	54
3.3	Soluções das Equações de Campo de Einstein com Auto-Similaridade do Segundo Tipo	57
3.3.1	Caso $y \neq -1$, $K = 0$	60
3.3.2	Caso $y = \text{const.} (\neq -1)$	62
3.3.3	Caso $y = -1$, $K = 1$	64
4	Análise da Estabilidade das Soluções de Colapso Gravitacional	66
4.1	Soluções de Fluido Rígido em Espaços-Tempos com Auto-Similaridade do Primeiro Tipo	66
4.2	Perturbações Lineares	67
5	Conclusões Gerais e Perspectivas	79
A	Notações e Convenções	83
B	Espaços-Tempos Circularmente Simétricos com Auto-Similaridade Cinemática	85
B.1	Espaços-Tempos com Auto-Similaridade do Tipo de Ordem Zero .	86
B.2	Espaços-Tempos com Auto-Similaridade do Primeiro e do Segundo Tipos	88

C Equações de Campo de Einstein Linearmente Perturbadas	91
---	----

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo, os principais tópicos utilizados ao longo deste trabalho são expostos. Iniciamos com uma breve introdução à Teoria da Relatividade Geral. Em seguida, Colapso Gravitacional, Fenômenos Críticos em Colapso Gravitacional e Auto-Similaridade na Teoria da Relatividade Geral são apresentados e discutidos. Por fim, um Plano Geral do Trabalho é apresentado.

1.1 Breve Introdução à Teoria de Relatividade Geral de Einstein

A Teoria da Relatividade Geral de Einstein (TRG) é uma teoria clássica de espaço-tempo e gravitação. Em comparação com outras teorias, ela é a que melhor se apóia pelas físicas experimental, observacional e analítica.

Nas últimas sete décadas, a complexidade e a natureza não-linear das equações de campo de Einstein constantemente têm nos impedido de termos um amplo entendimento do seu conteúdo e da sua riqueza. No entanto, a escolha de simetrias e fluidos particulares já nos permitem a compreensão de alguns aspectos da estrutura interna da TRG, bem como a explicação de alguns fenômenos astrofísicos e cosmológicos.

As implicações da TRG só podem ser completamente exploradas pelo estudo das soluções das equações de campo de Einstein. Este estudo normalmente é feito de duas formas diferentes. Uma é encontrar soluções aproximadas, baseadas geralmente em uma aproximação linear, o que implica a perda das características não-lineares do campo e, até certo ponto, da confiabilidade dos resultados. A outra forma é encontrar soluções exatas. Esta última pode resolver o problema que ocorre na anterior, porém novamente por causa da complexidade das equações de campo, as soluções exatas possuem freqüentemente uma grande quantidade de simetrias que não estariam presentes no mundo real, e não devem ter nenhum análogo nas soluções realísticas.

Historicamente, a TRG é considerada como sendo uma extensão da Teoria da Relatividade Restrita (TRR), apresentada por Einstein em 1905. Três grupos de questões desempenham um papel importante e conduzem o estudo da TRG. São eles:

1. A fim de descrever a natureza e as leis da TRG, devemos ser capazes de usar um sistema de coordenadas arbitrário e, de acordo com o princípio da covariância geral, as leis da natureza não devem depender da escolha do sistema de coordenadas. Esta condição, a princípio puramente matemática, adquire um significado físico especial por meio da substituição de um sistema de coordenadas arbitrário por um observador que se move arbitrariamente [1]. As leis da natureza devem ser independentes do estado do observador, assim como as mesmas são para todos os sistemas inerciais na TRR. Pertence também a este grupo a questão particularmente levantada por Ernst Mach: se uma aceleração absoluta (incluindo uma rotação absoluta) pode ser definida significativamente ou se toda rotação mensurável implica uma rotação relativa às estrelas fixas (Princípio de Mach).
2. A teoria newtoniana da Gravitação é inconsistente com o princípio da TRR. Na teoria newtoniana, os efeitos gravitacionais se propagam com uma velo-

cidade infinitamente grande. Deve ser encontrada uma melhor formulação das equações de campo da Gravitação, tal que também seja incluída a influência da gravidade em outros processos físicos e que haja concordância com os experimentos.

3. Na Astrofísica e na Cosmologia, grandes massas estão envolvidas e as forças gravitacionais exercem um domínio sobre as nucleares. Então, a teoria da Gravitação deve reger o comportamento dinâmico da evolução de todo o Universo e, ao mesmo tempo, ser válida para a evolução estelar.

A TRG teve início em 1915, quando da formulação das suas equações fundamentais. Em seguida foi publicada uma série de artigos sobre os fundamentos desta teoria e a possibilidade de sua confirmação experimental. Após ter sido, por um longo tempo, considerada especulativa e sem aplicabilidade real por especialistas, a TRG teve seu sucesso reconhecido (avanço do periélio de Mercúrio, deflexão da luz pelo Sol, explicação do desvio para o vermelho cosmológico). No decorrer dos últimos trinta anos, através do desenvolvimento de novos métodos para obtenção de soluções, da interpretação física, das descobertas astrofísicas (pulsares, radiação cósmica de fundo) e do aperfeiçoamento na demonstração de efeitos relativísticos, a TRG tem se tornado uma ciência física apurada e real, com várias questões experimentais a ela associadas e conseqüências observáveis.

A TRG é a teoria do campo gravitacional. Atualmente, são necessários métodos matemáticos cada vez mais complicados para que possam ser resolvidas questões físicas a ela colocadas, sendo sua linguagem matemática a geometria diferencial.

Considerando as questões levantadas na descrição dos fenômenos físicos independentes do referencial adotado, a inconsistência da teoria newtoniana com o princípio da TRR e o fato de que a relatividade descreve todo o Universo e a evolução estelar, Einstein percebeu que deveria haver uma relação direta entre a geometria do espaço-tempo e a distribuição de matéria-energia e procurou

construir uma formulação tensorial covariante para esta idéia. Deste modo, a presença de matéria-energia distorce a estrutura do espaço-tempo e, reciprocamente, a estrutura do espaço-tempo informa a trajetória que um dado corpo deve realizar. Esta relação é o já referido sistema de equações de campo de Einstein, cuja expressão matemática tensorial é dada por

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \tag{1.1}$$

em que $G_{\mu\nu}$ é o tensor de Einstein (geometria do espaço-tempo), $T_{\mu\nu}$, o tensor de energia-momento da fonte geradora do campo gravitacional (distribuição de matéria-energia) e κ , a constante de acoplamento gravitacional de Einstein, cuja definição é dada por

$$\kappa \equiv \frac{8\pi G}{c^4}, \tag{1.2}$$

em que G é a constante newtoniana da Gravitação. Um termo cosmológico ainda poderia ser inserido nas equações de campo de Einstein, de forma que estas poderiam ser reescritas como

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}, \tag{1.3}$$

em que Λ é a constante cosmológica e $g_{\mu\nu}$, o tensor métrico. Nesta tese, por razões da escolha do estudo de soluções auto-similares, estudaremos apenas o caso convencional, em que $\Lambda = 0$. Além disto, por simplicidade, adotaremos um sistema de unidades tal que $\kappa = c = 1$. Desta forma, as equações de campo de Einstein poderão ser reescritas simplesmente como

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}. \tag{1.4}$$

As definições dos tensores de Riemann, de Ricci, de Einstein, entre outros necessários ao entendimento da TRG são introduzidas no apêndice A.

1.2 Colapso Gravitacional

O processo de colapso gravitacional, em um sistema isolado, tem sido um dos mais relevantes objetos de estudo da TRG na atualidade [2, 3]. Como estado final, o colapso geralmente apresenta quatro possíveis configurações: formação de um objeto auto-sustentável, como, por exemplo, uma estrela [4]; formação de um buraco negro; formação de uma singularidade nua ou explosão com ejeção de matéria para o exterior.

Michell [5] e Laplace [6], de forma independente, no final do século XVIII e no início do século seguinte, respectivamente, utilizando um tratamento newtoniano, foram os pioneiros no estudo de colapso gravitacional. Nestes dois trabalhos já se pensava na possibilidade da existência de um objeto tão denso de forma que a atração gravitacional fosse intensa o suficiente a ponto de impedir que a própria luz deste objeto pudesse escapar. À luz da TRG, os primeiros trabalhos sobre colapso gravitacional foram publicados apenas em 1939 por Oppenheimer e Volkoff [7] e Oppenheimer e Snyder [8]. Nestes trabalhos foi mostrado que no caso de uma estrela constituída de matéria neutra, tal que toda a fonte de energia nuclear tenha sido consumida, as equações de campo de Einstein não possuem solução estática se a sua massa for maior do que $0,7M_{\odot}$, em que M_{\odot} é a massa solar, vindo a colapsar para massas com valores maiores do que esse limite.

O processo de evolução estelar, para o caso de estrelas do mesmo tipo do Sol, é basicamente caracterizado pela queima de seu combustível nuclear, na qual hidrogênio é convertido em hélio. Esta é a fase mais longa de suas vidas. A pressão de radiação emitida equilibra a das camadas da estrela de forma que esta se mantenha estática. Devido à auto-gravitação, quando todo o hidrogênio é convertido em hélio, este equilíbrio é interrompido e as camadas das estrelas caem sobre si mesmas, até que a compressão do núcleo seja suficiente para aquecê-las, dando origem a uma nova fase de reações termonucleares, agora convertendo hélio em carbono. Posteriormente carbono é convertido em oxigênio e, assim

por diante, formando elementos cada vez mais pesados, podendo chegar ao ferro. O processo de contração e equilíbrio pode ser interrompido em qualquer uma dessas etapas, dependendo da massa da estrela, originando um sistema estável, sem emissão de radiação. A duração do processo e o objeto resultante no final da evolução dependem principalmente de fatores como a massa, o momento angular e o campo magnético da estrela.

Estrelas sem rotação, com massa da ordem de $1,0$ a $1,5M_{\odot}$, após colapso e ejeção de matéria, muito provavelmente evoluem a anãs-brancas e aquelas com massa da ordem de $1,3$ a $2,7M_{\odot}$, a estrelas de nêutrons [2]. No caso de estrelas muito massivas, este processo não pode ser interrompido, ocorrendo um estado de colapso gravitacional perpétuo, uma vez que seu combustível nuclear já foi todo exaurido e nenhuma configuração de equilíbrio foi atingida. Estas estrelas continuam contraindo o seu raio, conseqüentemente aumentam cada vez mais a sua densidade, até que seja formada uma estrutura final denominada singularidade. Neste caso, a evolução de geodésicas no espaço-tempo será incompleta, impossibilitando a existência de extensão para além daquela região e, pelo menos, um dos escalares de curvatura divergir. Como configurações finais, podemos ter a formação de um buraco negro ou de uma singularidade nua.

Buracos negros são formados quando a singularidade é coberta por, pelo menos, uma hipersuperfície de aprisionamento, que, em geral, é formada durante o processo de colapso gravitacional de um objeto compacto constituído de matéria fisicamente razoável, isto é, que obedece às condições de energia fraca, forte e dominante [9]. De acordo com os teoremas de Hawking e Penrose [10–12], se esta hipersuperfície de aprisionamento, que, neste caso, será um horizonte aparente (hipersuperfície delimitadora, da qual nem mesmo a luz é capaz de escapar) for formada, haverá também a formação de uma singularidade, porém a formação de uma singularidade não necessariamente exige a formação de tal horizonte, possibilitando assim, a formação das chamadas singularidades nuas. Embora singularidades nuas sejam previstas pela TRG, a existência destas é proibida por

conjecturas como a da censura cósmica [13] e a de anel [14]. A conjectura da censura cósmica tem como objetivo evitar problemas como a previsibilidade de eventos futuros à formação desta singularidade. Esta conjectura possui duas versões. De acordo com a versão fraca, nenhuma singularidade do espaço-tempo pode ter conexão causal com um observador em regiões assintóticas deste espaço-tempo, isto é, observadores distantes não poderiam receber qualquer sinal emitido pela singularidade. Na versão forte, nenhum observador, que esteja distante ou não, poderia ser influenciado causalmente pela singularidade, significando que nem mesmo observadores que estejam dentro do horizonte aparente poderiam vê-la. Contrários a esta conjectura, existem muitos exemplos [2, 3], ainda que não esteja claro o quão genéricos eles são. A validade desta conjectura é ainda uma questão aberta. A conjectura de anel diz respeito às condições para formação de um horizonte. Ela afirma que um horizonte (provavelmente) se forma quando, e somente quando, temos uma certa massa M compactada dentro de uma região cuja circunferência, em toda direção, é dada por um perímetro $C < 4\pi M$. O único contra-exemplo apontado até agora restringe-se a espaços-tempos com cinco dimensões [15, 16].

No caso em que há explosão com ejeção de matéria para o exterior, o objeto colapsante dispersa-se completamente, levando à formação de espaço-tempo plano.

1.3 Fenômenos Críticos em Colapso Gravitacional

Como já dissemos, na TRG a evolução de um sistema, tal como uma estrela ou uma distribuição compacta de algum tipo de matéria (dada pelo seu tensor de energia-momento) ou, ainda, um campo puramente gravitacional, tipicamente atinge um estado (final) estacionário em que este colapsa (formação de buraco negro ou singularidade nua), dispersa-se ou, possivelmente, forma uma estrela. Daqui para a frente, nesta tese, o estado em que há formação de uma estrela

(solução regular envolvida por espaço-tempo vazio) não será mais distinguido daquele em que há dispersão. Dependendo dos valores de dados iniciais regulares, buracos negros podem ou não ser formados. Desta forma, o espaço de fase (espaço de dados iniciais) de todas as soluções, para a TRG, naturalmente divide-se em duas regiões (bases de atração): a que forma buraco negro na evolução e a em que ocorre dispersão de matéria do objeto colapsante, tal que esta é ejetada para o exterior, deixando para trás um espaço-tempo plano. À superfície de contorno que separa estas duas regiões é dado o nome de superfície crítica. Uma compreensão qualitativa da evolução temporal de dados iniciais na vizinhança de qualquer fronteira no espaço de fase pode ser dada pela teoria de sistemas dinâmicos. No espaço de fase em que estamos trabalhando, a TRG é considerada como sendo um sistema dinâmico de dimensão infinita. A invariância de escala na fronteira em que os dados iniciais levam à formação de buraco negro ou à dispersão desempenha um importante papel na dinâmica do sistema, acarretando em uma lei de potência para a massa de tal buraco negro. Neste sentido, uma solução crítica (solução próxima ao limiar de formação de buraco negro) é um atrator intermediário de codimensão um. Atrator é o ponto para o qual convergem as trajetórias do espaço de fase após decorrido um tempo suficientemente longo. Tais soluções podem ser invariantes sob uma transformação de escala (auto-similares) [17] ou independentes do tempo (estáticas). Fatores como universalidade das soluções críticas, invariância de escala do atrator intermediário e comportamento em lei de potência sugerem o nome de Fenômenos Críticos em Colapso Gravitacional. Tais fenômenos, decorrentes da não-linearidade das equações de campo de Einstein nas proximidades do limiar de formação de um buraco negro [18, 19], são matematicamente análogos às transições de fase estudadas em Mecânica Estatística e Teoria Quântica de Campos [17, 20, 21]. Um exemplo seria a magnetização espontânea de um material ferromagnético como função da temperatura.

A primeira vez que estes fenômenos foram observados em colapso gravitacional foi quando Christodoulou, que estava realizando um estudo analítico a respeito

do colapso gravitacional de um campo escalar sem massa esfericamente simétrico [22–24], propôs a Choptuik, que estava estudando o mesmo problema, porém de forma numérica, a seguinte questão: ao considerarmos uma família de dados iniciais, com um parâmetro, p , genérico e suave, sendo o espaço de fase dividido em duas regiões, tal que buracos negros são formados para valores grandes deste parâmetro ($p > p^*$) e há dispersão para valores pequenos ($p < p^*$), em que p^* é uma hipersuperfície suave que divide estas duas regiões, porém dentro daquela onde há formação de buracos negros, a massa resultante do processo será finita ou infinitesimal? Através de um estudo numérico, Choptuik chegou à conclusão de que a massa será infinitesimal [18, 19]. Neste processo, ele encontrou três fenômenos inesperados. O primeiro foi o fato de que a massa, M , do buraco negro formado é dada por uma função de escala no limite em que $p \rightarrow p^*$, mas com $p > p^*$, tal que

$$M = C(p) (p - p^*)^\gamma, \quad (1.5)$$

em que $C(p)$ é uma constante, tal que $C(p^*) \neq 0$. Em contraste com $C(p)$, que depende dos dados iniciais, foi mostrado numericamente que $\gamma \simeq 0,374$ para todas as famílias de dados iniciais estudadas.

O segundo fenômeno foi o fato de a solução obtida apresentar uma forma periódica em termos de escala. Seja $\phi(t, r)$ o campo escalar acima citado e o espaço-tempo esfericamente simétrico dado por

$$ds^2 = \alpha(t, r)^2 dt^2 - a(t, r)^2 dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (1.6)$$

em que $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ e as variáveis t e r são o tempo e o raio, respectivamente. A solução crítica $A^*(t, r) = \{\alpha^*, a^*, \phi^*\}$ apresenta uma forma periódica em termos de escala, tal que

$$A^*(t, r) = A^*(e^{n\Delta}t, e^{n\Delta}r), \quad (1.7)$$

para todo n inteiro e $\Delta \simeq 3.44$. O período de escala Δ é o segundo número adimensional que surge na solução.

O terceiro fenômeno inesperado foi a universalidade. Para um tempo finito em uma região finita do espaço, o espaço-tempo gerado por todos os dados próximos ao valor crítico aproxima-se da mesma solução. Esta fase universal se encerra quando a evolução se decide entre formação de buraco negro e dispersão. A solução crítica universal é alcançada por quaisquer dados iniciais que estão suficientemente próximos ao limiar de formação de buracos negros, em ambos os lados e de uma família uniparamétrica. Choptuik encontrou que todos os espaços-tempos próximos ao crítico, para todas as famílias de dados iniciais, parecem ser o mesmo numa região intermediária, isto é, aproximam-se de um espaço-tempo universal (solução crítica). O ponto de acumulação t^* da solução crítica depende da família.

Para um melhor entendimento da universalidade das soluções críticas, podemos reescrever a Eq.(1.7), substituindo as coordenadas t e r por variáveis auxiliares de modo que uma delas seja o logaritmo da escala da métrica, como por exemplo

$$x = -\frac{r}{t}, \quad \tau = -\ln\left(-\frac{t-t^*}{L}\right), \quad t < t^*. \quad (1.8)$$

Desta forma, τ foi definido de tal modo que cresce quando t cresce e se aproxima de t^* , por valores menos que este. É útil pensar em r , t e L como possuindo dimensão de comprimento e em x e τ como adimensionais. Em qualquer solução próxima à crítica existe uma região do espaço-tempo na qual os campos α , a e ϕ são bem aproximados pelos seus valores como

$$A(x, \tau) \simeq A^*(x, \tau), \quad (1.9)$$

em que os campos $A = \{\alpha, a, \phi\}$ da solução crítica possuem a periodicidade

$$A^*(x, \tau + \Delta) \simeq A^*(x, \tau). \quad (1.10)$$

As constantes dimensionais t^* e L dependem das famílias de soluções particulares uniparamétricas, porém os campos críticos adimensionais A^* e o período adimensional Δ são universais.

Soluções supercríticas ($p > p^*$) e subcríticas ($p < p^*$) de uma mesma família (mesmos t^* e L) são praticamente indistinguíveis desde que sejam formadas por uma escala bem pequena na qual uma forma horizonte aparente, enquanto a outra inicia-se dispersando. Se houver formação de um buraco negro, sua massa será relacionada a sua escala e teremos uma faixa Δ de τ na qual uma solução próxima à crítica se aproxima da solução universal

$$\tau\Delta \simeq \gamma \ln |p - p^*| + \text{const.} \quad (1.11)$$

Como a solução crítica é periódica em τ com período Δ , para um número N de escala de repetições, temos

$$N \simeq \frac{\gamma}{\Delta} \ln |p - p^*| + \text{const.}, \quad (1.12)$$

que é válida tanto para soluções supercríticas quanto para subcríticas.

Os resultados de Choptuik criaram uma grande excitação e foram confirmados através de estudos independentes, tanto numéricos [25–28] quanto semi-analíticos [29, 30], além de terem sido estendidos a outros campos de matéria acoplados [4, 17]. Fenômenos similares foram observados em outros tipos de matéria acopladas à gravitação, tais como fluido nulo [31], fluidos perfeitos [32–35], campos escalares sem massa [18, 19], campos escalares massivos [19, 36], conformalmente acoplados [18], modelo sigma 2-d [27], modelo escalar sem massa eletrodinâmico [28], campo de Yang-Mills [37], modelo de Skyrme [38], e ainda no colapso de pacotes de ondas gravitacionais axi-simétricas no vácuo (as quais podem formar buracos negros mesmo na ausência de matéria) [39]. Embora a existência de fenômenos críticos pareça ser genérica, através destes trabalhos, foi visto que o período de escala Δ e o expoente crítico γ dependem, não somente do tipo de matéria considerada, mas também, do tipo de colapso e da natureza da auto-similaridade apresentada pela solução crítica.

Como já citado anteriormente, existe ainda um outro tipo de comportamento crítico no limiar de formação de buracos negros, em que a evolução caminha

para uma solução crítica universal, porém estática, em vez de invariante sob uma transformação de escala. Em conseqüência, a massa de buracos negros próximos ao limiar adquire um valor universal finito, ao invés de apresentar uma função de escala em lei de potência. Deste modo, analogamente aos fenômenos ocorridos nas transições de fase de primeira e segunda ordem em Mecânica Estatística, o colapso crítico é classificado em dois tipos quanto à característica da massa de formação de buraco negro. Aqueles em que há uma massa finita no limiar de formação de buracos negros, cuja solução crítica apresenta um intervalo de massa, ou seja, a massa da solução crítica é não-nula, são chamados do Tipo I; já aqueles em que a massa obedece a uma função de escala em lei de potência, cuja solução crítica apresenta massa nula e toma a forma dada pela Eq.(1.5), são chamados do Tipo II. No colapso do Tipo II, as soluções críticas até agora encontradas apresentam ou auto-similaridade discreta [30] ou auto-similaridade homotética¹ [40–44], dependendo dos campos de matéria, conforme definiremos na seção 1.4. No colapso do Tipo I, as soluções críticas não apresentam nenhum destes dois tipos de auto-similaridade. Para certos campos de matéria, estes dois tipos de colapso podem coexistir. Para o colapso do Tipo II, o expoente correspondente é universal somente em relação a certos campos de matéria. Normalmente, diferentes campos de matéria possuem diferentes soluções críticas e diferentes expoentes.

A universalidade do expoente γ está intimamente relacionada ao fato de que as perturbações da solução crítica possuem um e somente um modo instável. Esta propriedade é considerada como sendo o principal critério para uma solução ser crítica ou não [4, 17, 45]. De fato, o modo instável, dito, k_1 (expoente de Lyapunov), da solução crítica está relacionado ao expoente γ via a relação

$$\gamma = \frac{1}{|k_1|}, \quad (1.13)$$

que pode ser obtida através de uma análise dimensional [29, 31, 32, 46].

¹Na literatura, auto-similaridade homotética também é chamada de auto-similaridade contínua. Entretanto, a fim de a distinguirmos de auto-similaridade de outros tipos, nesta tese nos referiremos a ela como auto-similaridade homotética ou auto-similaridade do primeiro tipo.

A fim de entendermos melhor esta propriedade, recorreremos ao espaço de fase anteriormente citado. Uma trajetória do espaço de fase que se inicia em uma superfície crítica, por definição, jamais a abandona. Uma superfície crítica é um sistema dinâmico por si só, com uma dimensão inferior. Caso esta superfície possua um ponto fixo de atração, este será um ponto crítico. O fato de a solução crítica ser um atrator de codimensão um é visível em suas perturbações lineares: esta possui um número infinito de modos de perturbação decadentes tangenciais à superfície crítica e um único modo crescente não tangencial à esta superfície. Para o caso em que há auto-similaridade homotética, qualquer trajetória que se inicia próximo à superfície crítica, mas não necessariamente ao ponto crítico, move-se quase paralelamente a esta superfície na direção do mesmo. À medida que o ponto crítico vai se aproximando, o movimento paralelo à superfície torna-se mais lento e o ponto de fase leva algum tempo movendo-se lentamente nas proximidades do ponto crítico. Finalmente ele move-se para longe do ponto crítico em direção ao modo crescente e atinge um ponto fixo de atração. Este ponto é uma solução que é independente do parâmetro de tempo t . Quando o ponto de fase se aproxima do ponto fixo de dispersão ou do ponto fixo de buraco negro, parece realizar uma trajetória que parte do próprio ponto crítico. Todas as soluções próximas à crítica estão passando por um desses dois funis. Todos os detalhes dos dados iniciais são esquecidos, exceto a distância do limiar de formação de buraco negro. Quanto mais próximo do ponto crítico estiver o ponto de fase inicial, mais a curva da solução aproximar-se-á do ponto crítico e mais tempo permanecerá próximo a ele. A representação do espaço de fase na presença de um ponto crítico fixo está esboçada na Fig. 1.1. No caso de haver auto-similaridade discreta, em vez de um ponto fixo de atração, há um ciclo limite de atração, tal que a solução crítica, diferentemente do caso anterior, é agora periódica no parâmetro de tempo t . A representação do espaço de fase na presença de um ciclo limite está esboçada na Fig. 1.2.

Devido à complexidade matemática das equações de campo de Einstein, frequen-

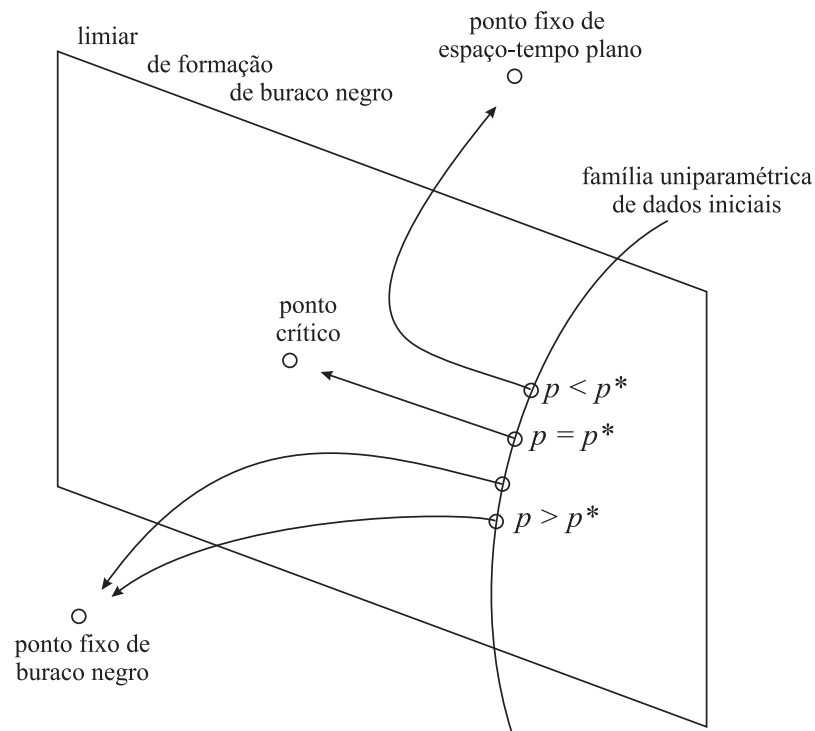


Figura 1.1: Representação do espaço de fase para o limiar de formação de buraco negro na presença de um ponto crítico (auto-similaridade homotética). As linhas com setas são evoluções temporais, correspondendo aos espaços-tempos indicados. A linha sem seta representa uma família de um parâmetro de dados iniciais que cruzam o limiar de formação de buraco negro em $p = p^*$.

temente impomos algumas simetrias ao sistema a fim de simplificarmos o problema. Por exemplo, no caso de soluções esféricamente simétricas, ao impormos a auto-similaridade homotética, as equações de campo de Einstein serão reduzidas de equações diferenciais parciais para ordinárias. Uma vez que as soluções particulares sejam conhecidas, podemos estudar suas perturbações lineares e encontrar o espectro dos auto-modos correspondentes.

Colapso crítico tem sido bastante estudado numericamente até o momento. O estudo analítico, mesmo aplicando as simetrias citadas acima, continua sendo muito complicado. Com a intenção de facilitar o estudo do colapso crítico, muitos autores têm proposto trabalhos em espaços-tempos de menor dimensão. Recen-

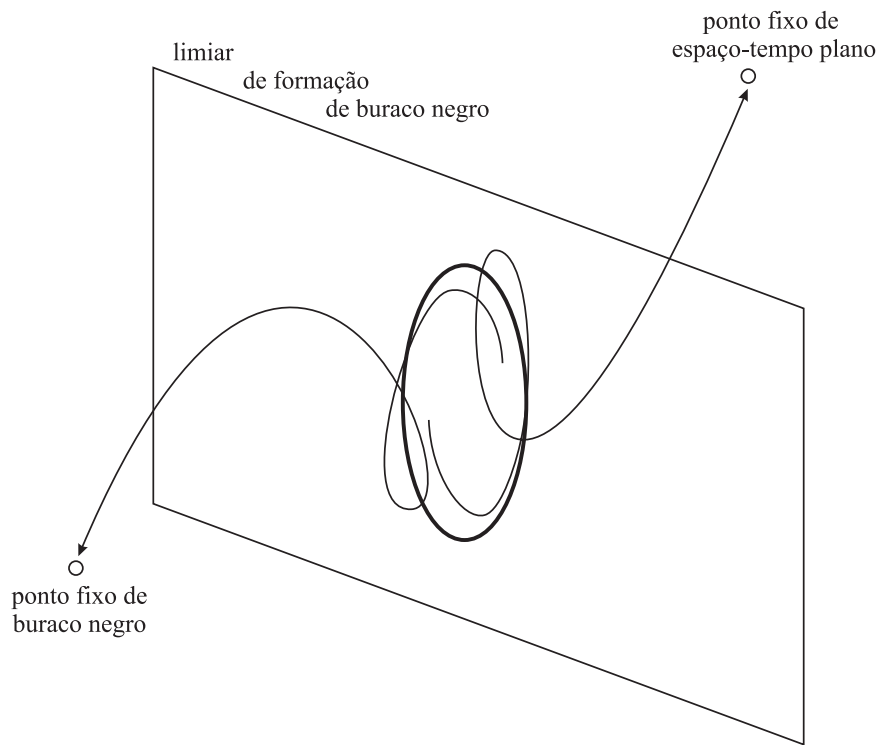


Figura 1.2: Representação do espaço de fase na presença de um ciclo limite (auto-similaridade discreta). O plano representa a superfície crítica. O círculo é o ciclo limite representando a solução crítica. São mostradas também duas trajetórias na superfície crítica sendo, portanto, atraídas ao ciclo limite, além de outras duas fora desta superfície sendo repelidas pela mesma.

temente, estudos numéricos realizados por Pretorius e Choptuik [47], indicaram a presença de fenômenos críticos no colapso gravitacional de um campo escalar sem massa em um espaço-tempo de fundo de anti-de Sitter em $2 + 1$ dimensões. Nesse trabalho, a massa do buraco negro formado segue a função de escala dada pela Eq.(1.5) com $\gamma = 1,20 \pm 0,02$. O mesmo resultado foi obtido por Husain e Olivier [48], porém o expoente obtido foi $\gamma \simeq 0,81$. Ainda não está claro se esta diferença é atribuída a erros numéricos ou a alguma física desconhecida até o presente momento. Posteriormente a estes trabalhos numéricos, estudos analíticos continuaram indicando a presença de tais fenômenos [49–53]. Em particular, em [53] uma das soluções auto-similares de Garfinkle encontrada em [49] foi identificada como sendo crítica, a qual é idêntica à numérica encontrada em [47]. Mais

recentemente, Wang encontrou uma outra solução crítica analítica, porém agora em $3 + 1$ dimensões [54].

1.4 Auto-Similaridade na Teoria da Relatividade Geral

Geometricamente, auto-similaridade se refere à situação na qual a distribuição espacial das características do movimento permanece similar a si mesma em todo o tempo. No tratamento newtoniano da hidrodinâmica, uma solução $Z(t, r)$ é auto-similar se for da forma

$$Z(t, r) = Z\left[\frac{r}{f(t)}\right], \quad (1.14)$$

em que t e r são as variáveis independentes temporal e espacial, respectivamente, e $f(t)$ é uma função de escala. Em conseqüência, qualquer parâmetro constante adimensional das condições iniciais ou de contorno anula-se ou diverge [55].

A simplificação das equações de campo de Einstein foi o motivo principal da utilização de modelos que possuem soluções auto-similares, reduzindo o número de variáveis independentes, e, conseqüentemente, a complexidade das equações, como já havia sido mencionado na seção anterior. Além desta, uma motivação física vem do fato de que as soluções auto-similares descrevem o comportamento “assintótico intermediário” das soluções quando estão na região em que não mais dependem de condições iniciais e/ou de contorno, ou até mesmo longe do estado de equilíbrio do sistema [55].

Em outras áreas da Física, auto-similaridade ocorre em processos em meios contínuos, como turbulência de Navier-Stokes, em Magnetoidrodinâmica, entre outros [56, 57].

O estudo de soluções auto-similares tem exercido um papel importante para a análise de muitos fenômenos físicos, incluindo os estudos de explosões nucleares (fortes) [58–60] e de uma onda térmica [61–63].

Em Cosmologia, verificou-se também a presença de auto-similaridade, caracterizada pela existência de uma relação entre a rápida expansão (e o rápido colapso) com a invariância por mudança de escala. A expansão do universo partindo do Big Bang e o colapso de uma estrela para uma singularidade devem ambos exibir auto-similaridade de alguma forma, independentemente das condições iniciais. Na realidade, a possibilidade de que as flutuações evoluam naturalmente, através das equações de campo de Einstein, para uma solução auto-similar no regime não-linear a partir de condições iniciais mais complicadas, tem sido estudada por vários autores [42, 64].

Ainda em Cosmologia, auto-similaridade também está presente em vários estudos sobre distribuição fractal de galáxias [65, 66].

Um sistema, para ser considerado auto-similar, deve ser invariante sob uma transformação apropriada de escala de variáveis independentes. Tais transformações formam um grupo de Lie. O gerador infinitesimal (gerador auto-similar) é definido pela transformação infinitesimal do grupo de Lie e determina os invariantes da ação do grupo, que representam os invariantes das equações diferenciais que são simplificadas quando as soluções são da forma dos invariantes.

A condição básica para um campo vetorial ξ ser um gerador auto-similar é que existam constantes c_A de forma que, para um dado campo físico independente A ,

$$\mathcal{L}_\xi A = c_A A, \quad (1.15)$$

em que \mathcal{L}_ξ denota a diferenciação de Lie ao longo do campo vetorial ξ e o campo A pode ser escalar (densidade de energia, pressão), vetorial (quadri-velocidade de um fluido) ou tensorial (potencial métrico).

No contexto da TRG, Cahill e Taub [40] foram os primeiros a aplicarem o conceito de auto-similaridade. Nesse trabalho foram estudadas soluções esfericamente simétricas com auto-similaridade homotética, mais tarde classificadas como sendo do primeiro tipo, dentro de um contexto cosmológico, no qual é admitida uma distribuição esfericamente simétrica de um fluido perfeito, cujo tensor

de energia-momento é dado por

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p) w_\mu w_\nu - p g_{\mu\nu}, \quad (1.16)$$

em que w_μ denota a velocidade do fluido, ρ e p são, respectivamente, suas densidade de energia e pressão. Este tipo de auto-similaridade impõe que as soluções sejam compostas de tal forma que as variáveis dependentes sejam essencialmente funções de uma única variável independente construída como uma combinação de variáveis independentes. No caso, as soluções e as variáveis t e r são invariantes sob as transformações de coordenadas $t' = at$ e $r' = ar$, nas quais a é uma constante. Foi mostrado que a existência de auto-similaridade homotética pode ser formulada invariantemente em termos de um vetor de Killing homotético, ξ^μ , que satisfaz a equação de Killing conforme,

$$\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 2g_{\mu\nu}, \quad (1.17)$$

da qual segue que

$$\mathcal{L}_\xi R^\sigma{}_{\mu\nu\lambda} = 0, \quad (1.18)$$

donde

$$\mathcal{L}_\xi R_{\mu\nu} = 0, \quad (1.19)$$

implicando

$$\mathcal{L}_\xi G_{\mu\nu} = 0, \quad (1.20)$$

nas quais \mathcal{L}_ξ denota a diferenciação de Lie ao longo do campo vetorial ξ^μ . No caso de a fonte gravitacional ser um fluido perfeito com auto-similaridade homotética, as quantidades físicas se transformam como

$$\mathcal{L}_\xi w^\mu = -w^\mu, \quad \mathcal{L}_\xi \rho = -2\rho, \quad \mathcal{L}_\xi p = -2p, \quad (1.21)$$

da qual obtemos

$$\mathcal{L}_\xi T_{\mu\nu} = 0, \quad (1.22)$$

que é consistente com as Eqs.(1.4) e (1.20). Embora neste caso os termos geométricos e as quantidades físicas permaneçam auto-similares, indicando auto-similaridade geométrica, Eq.(1.20), e auto-similaridade física, Eq.(1.22), respectivamente, o mesmo não necessariamente ocorre em casos de fluidos imperfeitos [42]. Neste caso, mesmo que o tensor de Einstein satisfaça a Eq.(1.20), os tensores de Ricci, de Riemann e métrico não necessariamente devem satisfazer as Eqs.(1.19), (1.18) e (1.17), respectivamente.

A existência de soluções auto-similares do primeiro tipo está relacionada às leis de conservação e à invariância do problema com relação ao grupo das transformações similares das quantidades com dimensões independentes, apresentando uma certa regularidade no processo limite na passagem do regime original, não auto-similar, para o regime auto-similar (processo que é assumido implicitamente). Entretanto, em geral, tal passagem a este limite pode não ser regular, visto que as expressões para as variáveis auto-similares não são exclusivamente determinadas a partir de uma análise dimensional do problema. Estas soluções são chamadas de auto-similares do segundo tipo. Uma característica destas soluções é conter constantes dimensionais que não são determinadas pelas leis de conservação [55].

A auto-similaridade cinemática surgiu como uma generalização da homotética. De acordo com a definição formulada por Carter e Henriksen [41], temos

$$\mathcal{L}_\xi w^\mu = -\alpha w^\mu, \quad (1.23)$$

$$\mathcal{L}_\xi h_{\mu\nu} = 2\delta h_{\mu\nu}, \quad (1.24)$$

nas quais \mathcal{L}_ξ denota a diferenciação de Lie ao longo do campo vetorial ξ^μ , α e δ são fatores de proporcionalidade constantes adimensionais que governam as taxas de dilatação da escala de comprimento espacial e amplificação da escala temporal, respectivamente, e $h_{\mu\nu}$ é o tensor de projeção, definido por

$$h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - w_\mu w_\nu, \quad (1.25)$$

que representa a projeção da métrica no tri-espaco ortogonal a w^μ . A razão independente de escala $\frac{\alpha}{\delta}$ é denominada índice de similaridade. Podemos notar

que vários casos de auto-similaridade estão incluídos nas definições dadas pelas Eqs.(1.23) e (1.24), dependendo dos valores relativos das constantes α e δ , sendo classificados como:

(i) $\alpha = \delta = 0$: Neste caso, as Eqs.(1.23) e (1.24) são equivalentes a $\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0$ (equações de Killing). Então, ξ^μ é simplesmente um vetor de Killing.

(ii) $\alpha = \delta, \alpha, \delta \neq 0$: Neste caso, depois de uma renormalização do vetor ξ^μ , as Eqs.(1.23) e (1.24) são equivalentes a $\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 2g_{\mu\nu}$. Então, ξ^μ é simplesmente um vetor homotético.

(iii) $\delta = 0, \alpha \neq 0$: Neste caso, as Eqs.(1.23) e (1.24) tornam-se

$$\mathcal{L}_\xi w^\mu = -w^\mu, \quad (1.26)$$

$$\mathcal{L}_\xi h_{\mu\nu} = 0, \quad (1.27)$$

e a transformação é a de uma rotação rígida generalizada. As Eqs.(1.26) e (1.27) compõem a definição para o vetor ξ^μ ser auto-similar do tipo infinito.

(iv) $\alpha \neq \delta, \alpha \neq 0, 1, \delta \neq 0$: Neste caso, depois de uma renormalização do vetor ξ^μ , as Eqs.(1.23) e (1.24) podem ser simplificadas a

$$\mathcal{L}_\xi w^\mu = -\alpha w^\mu, \quad (1.28)$$

$$\mathcal{L}_\xi h_{\mu\nu} = 2h_{\mu\nu}. \quad (1.29)$$

As Eqs.(1.28) e (1.29) compõem a definição para o vetor ξ^μ ser auto-similar próprio. O caso em que $\alpha = 0$ refere-se ao de auto-similaridade do tipo de ordem zero, $\alpha = 1$, ao de auto-similaridade do primeiro tipo (ou auto-similaridade homotética) e $\alpha \neq 0, 1$, ao de auto-similaridade do segundo tipo.

Já tendo em mente o fato de que estudaremos espaços-tempos com $2 + 1$ dimensões, mostraremos que o conceito de auto-similaridade cinemática introduzido por Carter e Henriksen [41] em espaços tempos quadri-dimensionais pode ser facilmente generalizado a espaços-tempos D -dimensionais, em que D é um número inteiro maior ou igual a 3. A métrica, neste caso, é dada por

$$ds^2 = \lambda^2 [\gamma_{ab}(x^c) dx^a dx^b - s^2(x^c) H_{ij}(x^k) dx^i dx^j], \quad (1.30)$$

na qual λ é uma constante com dimensão de comprimento, tal que todas as coordenadas x^μ e os coeficientes métricos γ_{ab} e H_{ij} são adimensionais. Neste caso, os índices latinos a, b, c, \dots, g , variam de 0 a 1, i, j, k, \dots , de 2 a $D - 1$ e os índices gregos μ, ν, \dots , de 0 a $D - 1$. Utilizando o fato de que esta métrica é invariante sob as transformações de coordenadas

$$x^a = x^a(x'^c), \quad x^i = x^i(x'^j), \quad (1.31)$$

podemos escolhê-las de forma que tenhamos

$$w_\mu = (g_{00})^{1/2} \delta^0_\mu, \quad g_{01} = 0, \quad (1.32)$$

implicando que o sistema de coordenadas seja comóvel com o fluido perfeito estudado neste caso. Portanto, a métrica dada pela Eq.(1.30) pode ser reescrita na forma,

$$ds^2 = \lambda^2 [e^{2\Phi(t,r)} dt^2 - e^{2\Psi(t,r)} dr^2 - r^2 S^2(t,r) H_{ij}(x^k) dx^i dx^j]. \quad (1.33)$$

Aplicando a esta métrica a definição de auto-similaridade cinemática, dada pelas Eqs.(1.28) e (1.29), temos que todas as quantidades físicas são funções de uma única variável auto-similar independente, z , a qual definiremos mais à frente de acordo com o tipo de auto-similaridade. Assim, como no caso esfericamente simétrico, mostrado por Carter e Henriksen [41], para o espaço-tempo D -dimensional dado pela Eq.(1.33), também pode ser mostrado que existem coordenadas comóveis nas quais o gerador auto-similar é dado por

$$\xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\alpha t + \beta) \frac{\partial}{\partial t} + r \frac{\partial}{\partial r}, \quad (1.34)$$

tal que as funções Φ , Ψ e S da métrica dada pela Eq.(1.33) são funções apenas da variável auto-similar z , ou seja

$$\Phi(t, r) = \Phi(z), \quad \Psi(t, r) = \Psi(z), \quad S(t, r) = S(z). \quad (1.35)$$

No caso de simetria esférica, a métrica seria dada por

$$ds^2 = \lambda^2 (e^{2\Phi} dt^2 - e^{2\Psi} dr^2 - r^2 S^2 d\Omega^2), \quad (1.36)$$

em que $d\Omega^2 \equiv d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$. O coeficiente métrico usual $R(t, r)$, denominado raio geométrico, é dado por $R = rS$. Esta métrica possui a mesma forma daquela apresentada em [40] e as equações diferenciais de campo reduzem-se a um sistema de equações diferenciais ordinárias.

No caso de auto-similaridade do tipo de ordem zero, $\alpha = 0$, β pode ser reescalado à unidade e a variável auto-similar é dada por

$$z = re^{-t}. \quad (1.37)$$

Cabe aqui destacar que o sinal negativo introduzido na Eq.(1.37), bem como nas Eqs.(1.38) e (1.39), deve-se ao fato de estarmos adotando, neste trabalho, para a variável temporal, o intervalo $-\infty < t \leq 0$, ao contrário do que é comumente convencionado. A motivação para essa escolha reside no nosso interesse no estudo de colapso gravitacional, que é um processo no qual há um tempo final finito (instante de formação de singularidade). Um exemplo do caso de auto-similaridade do tipo de ordem zero é a solução de Henriksen *et al.* [67], no qual uma constante dimensional é introduzida através da constante cosmológica [41].

No caso de auto-similaridade do primeiro tipo, auto-similaridade homotética, $\alpha = 1$, β pode ser redefinido como zero e a variável auto-similar toma a forma

$$z = \frac{r}{-t}. \quad (1.38)$$

No caso mais geral, correspondente à auto-similaridade do segundo tipo, $\alpha \neq 0, 1$, β redefinido como zero e a variável auto-similar é expressa por

$$z = r(-t)^{-\frac{1}{\alpha}}. \quad (1.39)$$

De agora em diante utilizaremos a variável auto-similar x , tal que $x \equiv \ln z$. Um importante exemplo de auto-similaridade do segundo tipo é fornecido por uma classe de modelos de fluidos perfeitos com pressão nula, isto é, modelos de poeira nos quais w^μ é geodésico, ou seja, $\Phi_{,x} = 0$, na Eq.(1.36), estudados primeiramente por Lynden-Bell e Lemos [68] e posteriormente descritos mais detalhadamente por Henriksen [69] e Carter e Henriksen [41].

Resumidamente, os três tipos de auto-similaridade cinemática podem então ser apresentados como

$$\begin{aligned} \text{Tipo de ordem zero: } & x = \ln r - t, & \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} &= \frac{\partial}{\partial t} + r \frac{\partial}{\partial r}; \\ \text{Primeiro tipo: } & x = \ln \left(\frac{r}{-t} \right), & \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} &= t \frac{\partial}{\partial t} + r \frac{\partial}{\partial r}; \\ \text{Segundo tipo: } & x = \ln \left[\frac{r}{(-t)^{\frac{1}{\alpha}}} \right], & \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} &= \alpha t \frac{\partial}{\partial t} + r \frac{\partial}{\partial r}, \quad (\alpha \neq 0, 1). \end{aligned}$$

Embora o caso de auto-similaridade homotética possa ser considerado como sendo um caso particular da auto-similaridade do segundo tipo com $\alpha = 1$, a física nos dois casos é diferente, pois os reescalamentos relativos de espaço e tempo não são os mesmos, diferentemente daqueles anteriormente citados, estudados em [40]. Claramente, quando as coordenadas t e r são reescaladas para $t' = at$ e $r' = ar$, nas quais a é uma constante, a variável auto-similar x permanece inalterada apenas no caso homotético. No caso do tipo de ordem zero há uma dilatação espacial sem qualquer amplificação temporal.

1.5 Plano Geral do Trabalho

O presente trabalho se constitui na investigação da ocorrência de fenômenos críticos no processo de colapso gravitacional de fluido perfeito em espaços-tempos $(2 + 1)$ -dimensionais circularmente simétricos com auto-similaridade cinemática do tipo de ordem zero, primeiro e segundo tipos. Este trabalho se desenvolve da seguinte forma: após o primeiro capítulo, onde expomos os principais tópicos utilizados no decorrer deste trabalho, como Fenômenos Críticos em Colapso Gravitacional e Auto-Similaridade na TGR, apresentamos um estudo de gravitação em $2+1$ dimensões, definimos formalmente horizontes aparentes e buracos negros. Na seqüência, estudamos as equações de campo de Einstein com auto-similaridade cinemática para o caso de fluido perfeito. No capítulo seguinte, analisamos a

estabilidade de soluções representantes de colapso gravitacional encontradas no capítulo anterior, através de perturbações lineares, a fim de encontrarmos possíveis soluções críticas. No último capítulo, apresentamos nossas conclusões gerais e perspectivas para trabalhos futuros. Esta tese se encerra com três apêndices. No primeiro, apresentamos os tensores de Riemann, de Ricci, de Einstein, entre outros necessários para o entendimento da TRG. No segundo, encontramos as expressões dos componentes do tensor de Einstein com auto-similaridade cinemática. Finalmente, no terceiro, encontramos as equações de campo de Einstein linearmente perturbadas.

Capítulo 2

Colapso Gravitacional em Espaços-Tempos (2 + 1)-Dimensionais

Iniciamos este capítulo com uma apresentação do estudo de gravitação em espaços-tempos com duas dimensões espaciais e uma temporal. Em seguida, espaços-tempos circularmente simétricos são estudados. Uma definição formal de horizonte aparente e as condições necessárias para a existência de um buraco negro são apresentadas. No final, são feitas aplicações de auto-similaridade cinemática a espaços-tempos circularmente simétricos.

2.1 Gravitação em 2 + 1 Dimensões

Nesta seção descreveremos as motivações que levaram a serem realizados estudos de modelos de gravitação em espaços-tempos (2 + 1)-dimensionais, faremos um breve histórico, além de expormos suas peculiaridades e conseqüências ao colapso gravitacional.

2.1.1 Motivações

Estudos de fenômenos similares em dimensões inferiores são comuns de serem realizados quando os cálculos em modelos quadri-dimensionais são difíceis de serem executados. Modelos físicos em dimensões inferiores são importantes principalmente porque ajudam a originar novas idéias e estimular novos *insights* a seus correlatos em dimensões superiores. O primeiro trabalho envolvendo um modelo de gravitação em $2 + 1$ dimensões data de 1963, quando Staruszkiewicz descreveu o comportamento de soluções estáticas com fontes puntiformes [70]. Artigos ocasionais apareceram ao longo dos vinte anos seguintes [71–73]. Porém, o recente aumento de interesse por estes modelos se deu a partir de trabalhos publicados nos meados da década de 80, devendo ser creditado a dois grupos: Deser, Jackiw e 't Hooft [74–76], que examinaram tanto a dinâmica clássica quanto a quântica de tais fontes, e Witten [77–79], que redescobriu e explorou a representação de gravitação em $2 + 1$ dimensões como uma teoria de Chern-Simons. Desde então, iniciou-se a publicação de uma série de artigos envolvendo *toy models* em espaços-tempos $(2 + 1)$ -dimensionais, principalmente em TRG, Teoria Quântica de Campos, Física de Partículas e Teoria de Cordas.

Fora as razões já citadas, como a praticidade na resolução das equações de modelos físicos em dimensões inferiores, uma outra motivação vem da ocorrência de fenômenos críticos em colapso gravitacional, como já mencionado na seção 1.3, em que no caso de espaços-tempos $(2 + 1)$ -dimensionais, foi mostrado recentemente que o problema do colapso gravitacional de um campo escalar é significativamente mais simples, possibilitando um estudo analítico de todo o processo de colapso, incluindo a verificação da presença ou não de tais fenômenos.

2.1.2 Teoria da Relatividade Geral em Espaços-Tempos (2 + 1)-Dimensionais

A TRG em espaços-tempos tri-dimensionais exhibe algumas características incomuns, que podem ser deduzidas das propriedades das equações de campo de Einstein e do tensor de curvatura. A forma geral destas equações para espaços-tempos com um número qualquer de dimensões é a mesma dada pela Eq.(1.4). No entanto, enquanto que para quatro dimensões os tensores de Einstein e de Ricci possuem dez componentes independentes e o de Riemann, vinte, para três dimensões estes tensores possuem o mesmo número de componentes independentes: seis. Logo, podemos expressar o tensor de Riemann em termos do tensor de Einstein (ou de Ricci), para espaços-tempos tri-dimensionais, como

$$R_{\mu\nu\sigma\lambda} = g_{\mu\sigma}G_{\nu\lambda} + g_{\nu\lambda}G_{\mu\sigma} - g_{\mu\lambda}G_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}G_{\mu\lambda} + G(g_{\mu\lambda}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\lambda}), \quad (2.1)$$

em que $G \equiv G^\mu{}_\mu$. A substituição da Eq.(1.3) na Eq.(2.1) mostra que a curvatura do espaço-tempo é completamente determinada pela distribuição de matéria, $T_{\mu\nu}$. Em particular, regiões livres de fontes de campo gravitacional, ou seja, em que $T_{\mu\nu} = 0$, apresentam curvatura nula, isto é, o espaço-tempo é localmente plano. Isto significa que não há propagação de campo gravitacional no vácuo, não havendo geração de ondas gravitacionais e interação entre massas [80]. Devido a este fato, como não se sente a atração gravitacional da estrela, a luz emitida da superfície desta sempre escapa até o infinito. Desta forma, buracos negros somente podem ser formados se houver a presença de uma constante cosmológica não-nula (negativa, de acordo com Bañados, Teiteboim e Zanelli [81], tal que o espaço-tempo é assintoticamente de anti-de Sitter) ou se todo o espaço-tempo for preenchido por campos de matéria, como no caso de fluidos perfeitos com auto-similaridade cinemática, estudado nesta tese.

2.2 Espaços-Tempos Circularmente Simétricos

Conforme a Eq.(1.33), a métrica geral de espaços-tempos $(2 + 1)$ -dimensionais com simetria circular pode ser expressa na forma,

$$ds^2 = \lambda^2 [e^{2\Phi(t,r)} dt^2 - e^{2\Psi(t,r)} dr^2 - r^2 S^2(t, r) d\theta^2], \quad (2.2)$$

em que as hipersuperfícies $\theta = 0, 2\pi$ são identificadas e $\xi_{(\theta)} = \partial_\theta$ é o vetor de Killing correspondente. Os componentes não-nulos da conexão métrica e do tensor de Einstein são apresentados no apêndice B.

A fim de que tenhamos simetria circular, algumas propriedades físicas e geométricas devem ser impostas [82–89]. Em geral, estas não são triviais. De fato, somente quando o eixo de simetria é livre de singularidades de espaço-tempo, sabemos como impor estas condições. Como nesta tese o interesse maior é o colapso gravitacional, assumiremos que o eixo é regular no início do colapso e a singularidade, formada posteriormente no eixo, é devida ao colapso do fluido. Da mesma forma que em [90], impomos as seguintes condições:

- (i) Deve existir um eixo de simetria, que pode ser expresso como

$$X \equiv \left| \xi^\mu_{(\theta)} \xi^\nu_{(\theta)} g_{\mu\nu} \right| \rightarrow 0, \quad (2.3)$$

quando $r \rightarrow 0^+$, com a coordenada radial escolhida de tal maneira que o eixo esteja localizado em $r = 0$.

- (ii) O espaço-tempo nas proximidades do eixo de simetria é localmente plano, propriedade que é descrita por [91]

$$\frac{X_{,\mu} X_{,\nu} g^{\mu\nu}}{4X} \rightarrow -1, \quad (2.4)$$

quando $r \rightarrow 0^+$. Note que soluções que não satisfazem a esta condição são algumas vezes aceitas. Por exemplo, quando o lado esquerdo da Eq.(2.4) se aproxima de uma constante finita, a singularidade em $r = 0$ pode ser relacionada a uma partícula puntiforme em $2 + 1$ dimensões [92]. Contudo, uma vez que

aqui estamos interessados principalmente em colapso gravitacional, nesta tese assumiremos que esta condição deve ser aplicada apenas ao início do colapso.

(iii) Ausência de curvas do tipo-tempo fechadas. Em espaços-tempos com simetria circular, curvas do tipo-tempo fechadas podem ser facilmente introduzidas. Como a física das curvas do tipo-tempo fechadas ainda não está clara [93], esta possibilidade não será considerada neste trabalho. Simplesmente, a fim de que seja assegurada a ausência deste tipo de curvas, vamos assumir que

$$\xi^\mu_{(\theta)} \xi^\nu_{(\theta)} g_{\mu\nu} < 0 \quad (2.5)$$

é válida em todo espaço-tempo.

De agora em diante, referiremo-nos às condições dadas pelas Eqs.(2.3)-(2.5) simplesmente como condições de regularidade.

2.2.1 Horizontes Aparentes e Buracos Negros Circularmente Simétricos

A fim de apresentarmos uma definição rigorosa de horizontes aparentes e buracos negros em espaços-tempos com simetria circular, introduziremos duas novas coordenadas \bar{u} e \bar{v} através das seguintes relações

$$d\bar{u} = f(t, r) [e^{\Phi(t,r)} dt - e^{\Psi(t,r)} dr], \quad d\bar{v} = g(t, r) [e^{\Phi(t,r)} dt + e^{\Psi(t,r)} dr], \quad (2.6)$$

nas quais $f(t, r)$ e $g(t, r)$ satisfazem as condições de integrabilidade para \bar{u} e \bar{v} ,

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t \partial r} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r \partial t}, \quad \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t \partial r} = \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial r \partial t}. \quad (2.7)$$

Sem que haja perda de generalidade, assumiremos que estas funções são estritamente positivas,

$$f > 0, \quad g > 0. \quad (2.8)$$

Então, é fácil mostrar que, em termos de \bar{u} e \bar{v} , a métrica dada pela Eq.(2.2) toma a forma

$$ds^2 = \lambda^2 [2e^{2\sigma(\bar{u}, \bar{v})} d\bar{u}d\bar{v} - R^2(\bar{u}, \bar{v}) d\theta^2], \quad (2.9)$$

em que

$$\sigma(\bar{u}, \bar{v}) = -\frac{1}{2} \ln(2fg), \quad R(\bar{u}, \bar{v}) = rS. \quad (2.10)$$

Devemos notar que o tensor métrico, cuja métrica correspondente é dada pela Eq.(2.9), é invariante sob as transformações

$$u = u(\bar{u}), \quad v = v(\bar{v}). \quad (2.11)$$

Usando esta liberdade de calibre, assumiremos que esta métrica não possui singularidades de coordenadas em u , v e θ . Isto, em particular, implica que σ é finito exceto em alguns pontos em algumas superfícies onde o espaço-tempo é singular.

Seguindo [94, 95], primeiro introduziremos os vetores nulos v^μ e u^μ por

$$v^\mu = \delta^\mu_v, \quad u^\mu = \delta^\mu_u, \quad (2.12)$$

e as formas diferenciais normais l_μ e n_μ por

$$l_\lambda \equiv \frac{\partial u}{\partial x^\lambda} = \delta^u_\lambda, \quad n_\lambda \equiv \frac{\partial v}{\partial x^\lambda} = \delta^v_\lambda. \quad (2.13)$$

Logo, temos que

$$l^\mu \equiv g^{\mu\nu} l_\nu = \lambda^{-2} e^{-2\sigma} v^\mu, \quad n^\mu \equiv g^{\mu\nu} n_\nu = \lambda^{-2} e^{-2\sigma} u^\mu. \quad (2.14)$$

Claramente, o vetor v^μ ou l^μ é tangente às hipersuperfícies $u = \text{const.}$, e o vetor u^μ ou n^μ é tangente às hipersuperfícies $v = \text{const.}$ [cf. Fig. 2.1].

A métrica induzida no anel de coordenadas u e v constantes, em termos das formas diferenciais normais, é dada por

$$h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - \lambda^2 e^{2\sigma} (l_\mu n_\nu + l_\nu n_\mu) = -\lambda^2 R^2 \delta^\theta_\mu \delta^\theta_\nu. \quad (2.15)$$

Logo, as expansões dos raios nulos $u = \text{const.}$ e $v = \text{const.}$ são definidas, respectivamente, por [94, 95]

$$\begin{aligned} \theta_l &\equiv \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} \mathcal{L}_v h_{\alpha\beta} = \frac{R_{,v}}{R}, \\ \theta_n &\equiv \frac{1}{2} h^{\alpha\beta} \mathcal{L}_u h_{\alpha\beta} = \frac{R_{,u}}{R}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

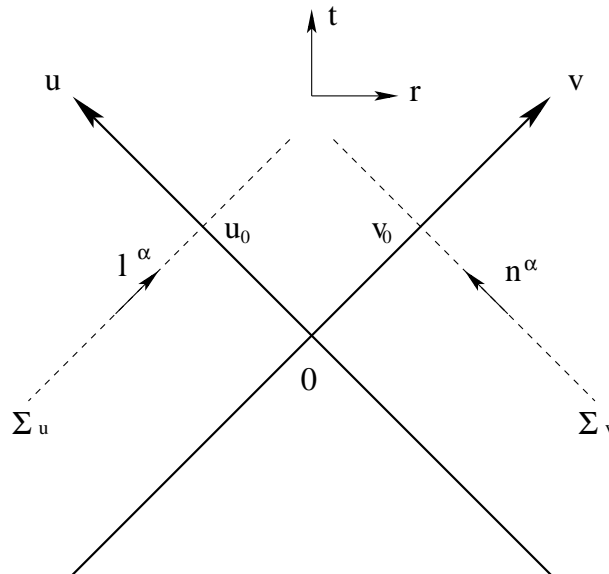


Figura 2.1: Espaço-tempo no plano (u, v) , descrito pela métrica dada pela Eq.(2.9). Σ_u (Σ_v) é a hipersuperfície $u = u_0$ ($v = v_0$), l^μ e v^μ (n^μ e u^μ) são tangentes a esta.

nas quais \mathcal{L}_v (\mathcal{L}_u) denota a derivada de Lie ao longo do vetor v^μ (u^μ). Portanto, θ_l representa a expansão da congruência de raios nulos emitidos radialmente para fora da origem (emergentes), ao passo que, θ_n , a daquela cujos raios nulos são emitidos radialmente para dentro, em direção à origem (imergentes). Das expressões acima, pode ser mostrado que

$$\mathcal{L}_u \theta_l = \mathcal{L}_v \theta_n = \frac{R_{,uv}}{R} - \theta_l \theta_n. \quad (2.17)$$

Definição 1: Um anel, \mathcal{C} , de coordenadas u e v constantes (ou t e r constantes) é definido como sendo aprisionado, marginalmente aprisionado ou não-aprisionado, se $\theta_l \theta_n > 0$, $\theta_l \theta_n = 0$ ou $\theta_l \theta_n < 0$, respectivamente.

Definição 2: Considerando um anel marginalmente aprisionado, como a linha na qual $\theta_l|_{\mathcal{C}} = 0$, um horizonte aparente ¹ (ou horizonte de aprisionamento na

¹Devemos notar que os horizontes aparentes normalmente são definidos nos espaços-tempos que são regulares previsíveis [9], enquanto que os aqui adotados, originalmente devido a Hayward [94, 95], não possuem restrições. Portanto, neste sentido, eles são a generalização dos usuais. Devido a este motivo, Hayward os chamou de horizontes de aprisionamento.

terminologia de Hayward [94, 95]) é definido como sendo uma bi-superfície H foliada por anéis marginalmente aprisionados, nos quais $\theta_n|_H \neq 0$.

Definição 3: Um horizonte aparente é definido como sendo externo, degenerado ou interno, se $\mathcal{L}_u\theta_l|_H < 0$, $\mathcal{L}_u\theta_l|_H = 0$ ou $\mathcal{L}_u\theta_l|_H > 0$, respectivamente.

Definição 4: Um horizonte aparente também é definido como sendo futuro, se $\theta_n|_H < 0$ e, passado, se $\theta_n|_H > 0$.

Um buraco negro, de acordo com a definição dada por Hayward [94, 95], existe, se uma singularidade de espaço-tempo é formada juntamente com um horizonte aparente futuro externo (veja também Ida [96]), embora, de acordo com o próprio Hayward, sua definição possa ser estendida ao caso em que este é futuro degenerado. Esta definição estendida coincide com a dada por Tipler [97]. Tal generalização conserva ainda a idéia de que os raios de luz imergentes devem ser convergentes, isto é, $\theta_n|_H < 0$ e os emergentes devem ser instantaneamente paralelos no horizonte, $\theta_l|_H = 0$, divergentes fora dele, $\theta_l|_{H+\delta H} > 0$ e convergentes dentro dele, $\theta_l|_{H-\delta H} < 0$. Nesta tese definiremos um buraco negro pela existência de um horizonte aparente futuro externo ou degenerado.

É interessante notar que as definições acima podem também ser dadas em termos da norma do vetor de Killing $\xi^\mu_{(\theta)}$ [94, 95],

$$\mathcal{R} \equiv \left| \xi^\alpha_{(\theta)} \xi^\beta_{(\theta)} g_{\alpha\beta} \right|^{1/2}. \quad (2.18)$$

De fato, pode ser mostrado que

$$\begin{aligned} (\nabla_\alpha \mathcal{R}) (\nabla^\alpha \mathcal{R}) &= 2R^2 e^{-2\sigma} \theta_l \theta_n, \\ \square \mathcal{R} &\equiv g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta \mathcal{R} = \frac{2e^{-2\sigma}}{\mathcal{R}} (\mathcal{L}_u \theta_l + 2\theta_l \theta_n). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Desta forma, um anel, \mathcal{C} , de coordenadas u e v constantes é definido como sendo aprisionado, marginalmente aprisionado ou não-aprisionado, se $\nabla_\alpha \mathcal{R}$ for do tipo-tempo, do tipo-nulo ou do tipo-espaço, respectivamente. O horizonte aparente é definido como mais externo, degenerado ou interno, se $\square \mathcal{R}|_H < 0$, $\square \mathcal{R}|_H = 0$ ou

$\square\mathcal{R}|_H > 0$, respectivamente, e futuro (passado), se $\nabla^\alpha\mathcal{R}|_H$ for futuro (passado) causal.

Em outras palavras, da Eq.(2.6), temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial t}{\partial u} &= \frac{1}{2f}e^{-\Phi}, & \frac{\partial t}{\partial v} &= \frac{1}{2g}e^{-\Phi}, \\ \frac{\partial r}{\partial u} &= -\frac{1}{2f}e^{-\Psi}, & \frac{\partial r}{\partial v} &= \frac{1}{2g}e^{-\Psi},\end{aligned}\quad (2.20)$$

da qual, temos que

$$\begin{aligned}\theta_l &= \frac{R_{,v}}{R} = \frac{1}{2gR} (e^{-\Phi}R_{,t} + e^{-\Psi}R_{,r}), \\ \theta_n &= \frac{R_{,u}}{R} = \frac{1}{2fR} (e^{-\Phi}R_{,t} - e^{-\Psi}R_{,r}).\end{aligned}\quad (2.21)$$

Para as soluções com auto-similaridade do tipo de ordem zero, as Eqs. (B.6), (2.21) e (2.19) implicam

$$\begin{aligned}\theta_l &= \frac{1}{2rg} [(1+y)e^{-\Psi} - ye^{x+\tau-\Phi}], \\ \theta_n &= -\frac{1}{2rf} [(1+y)e^{-\Psi} + ye^{x+\tau-\Phi}], \\ \square\mathcal{R} &= \frac{rS}{\lambda}e^{-2\Phi} [y_{,x} + y(\Psi_{,x} - \Phi_{,x} + 2y)] \\ &\quad - \frac{S}{\lambda r}e^{-2\Psi} [y_{,x} + (1+y)(\Phi_{,x} - \Psi_{,x} + 2y + 1)], \quad (\alpha = 0),\end{aligned}\quad (2.22)$$

enquanto que para aquelas do primeiro e segundo tipos, as mesmas tornam-se [cf. Eq.(B.13)],

$$\begin{aligned}\theta_l &= \frac{1}{2\alpha rg} [\alpha(1+y)e^{-\Psi} + ye^{x+(\alpha-1)\tau/\alpha-\Phi}], \\ \theta_n &= -\frac{1}{2\alpha rf} [\alpha(1+y)e^{-\Psi} - ye^{x+(\alpha-1)\tau/\alpha-\Phi}], \\ \square\mathcal{R} &= \frac{rS}{\lambda\alpha^2 t^2}e^{-2\Phi} [y_{,x} + y(\Psi_{,x} - \Phi_{,x} + 2y + \alpha)] \\ &\quad - \frac{S}{\lambda r}e^{-2\Psi} [y_{,x} + (1+y)(\Phi_{,x} - \Psi_{,x} + 2y + 1)], \quad (\alpha \neq 0).\end{aligned}\quad (2.23)$$

2.3 Auto-Similaridade Cinemática em Espaços-Tempos Circularmente Simétricos

Admitindo a hipótese de haver auto-similaridade cinemática em espaços-tempos $(2 + 1)$ -dimensionais com simetria circular, a métrica dada pela Eq.(2.2) pode ser reescrita como

$$ds^2 = \lambda^2 [e^{2\Phi(x)} dt^2 - e^{2\Psi(x)} dr^2 - r^2 S^2(x) d\theta^2]. \quad (2.24)$$

Devemos notar que o tensor métrico, ao qual esta métrica corresponde, é invariante sob as transformações

$$t = A\bar{t}, \quad r = B\bar{r}, \quad g_{\mu\nu} = C^2 \bar{g}_{\mu\nu}, \quad (2.25)$$

para soluções auto-similares do primeiro e segundo tipos e

$$t = \bar{t} + A, \quad r = B\bar{r}, \quad g_{\mu\nu} = C^2 \bar{g}_{\mu\nu}, \quad (2.26)$$

para soluções auto-similares do tipo de ordem zero, nas quais A , B e C são constantes arbitrárias.

As condições de regularidade, Eqs.(2.3)-(2.5), são invariantes sob as transformações acima apresentadas, Eq.(2.25) ou Eq.(2.26). Utilizando estas transformações, de agora em diante, assumiremos que

$$\Phi(t, 0) = 0, \quad (2.27)$$

isto é, a coordenada do tipo-tempo, t , mede o tempo próprio sobre o eixo, sendo uma condição de calibre, a que nos referiremos algumas vezes mais adiante.

Além dessas mesmas condições de regularidade, normalmente também é exigido que o espaço-tempo seja assintoticamente plano na direção radial. Contudo, ao considerarmos soluções com auto-similaridade, esta condição não pode ser satisfeita, ao menos que restrinjamos a validade destas soluções somente até um raio máximo, dito $r = r_0(t)$. Portanto, necessitamos fazer a junção destas soluções com outras na região $r > r_0(t)$, que são assintoticamente planas quando

$r \rightarrow \infty$. Nesta tese, não será considerada esta possibilidade. Aqui simplesmente assumiremos que as soluções auto-similares são válidas em todo o espaço-tempo.

As expressões dos componentes não-nulos do tensor de Einstein para espaços-tempos circularmente simétricos com auto-similaridade cinemática também são apresentadas no apêndice B.

Capítulo 3

Soluções das Equações de Campo de Einstein com Auto-Similaridade Cinemática

Conforme já mencionado anteriormente, as equações de campo de Einstein, dadas pela Eq.(1.4), são o elo entre a geometria (imposta pelo campo gravitacional) e a matéria-energia (ou o fluido) componente do espaço-tempo. Visto que suas soluções nem sempre são fáceis de serem encontradas, uma das saídas para vencermos este obstáculo é aplicarmos algum tipo de simetria, como no caso de auto-similaridade cinemática aqui estudado. Nas seções subsequentes estudaremos soluções com auto-similaridade cinemática dos tipos de ordem zero, primeiro e segundo, respectivamente, sendo algumas representantes de colapso gravitacional [98].

3.1 Soluções das Equações de Campo de Einstein com Auto-Similaridade do Tipo de Ordem Ze- ro

Neste caso, combinando as Eqs.(1.16) e (B.9), as equações de campo de Einstein podem ser expressas na seguinte forma:

$$y_{,x} - (1 + y) (\Psi_{,x} - y) - y\Phi_{,x} = 0, \quad (3.1)$$

$$\Phi_{,xx} + \Phi_{,x} (\Phi_{,x} - \Psi_{,x} - y - 2) = 0, \quad (3.2)$$

$$\Psi_{,xx} - \Psi_{,x} (\Phi_{,x} - \Psi_{,x} + y + 1) + y = 0, \quad (3.3)$$

e

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{y}{\lambda^2 r^2} [r^2 e^{-2\Phi} \Psi_{,x} - e^{-2\Psi} \Phi_{,x}], \\ p &= \frac{1}{\lambda^2 r^2} \{ (1 + y) e^{-2\Psi} \Phi_{,x} - r^2 e^{-2\Phi} [(1 + y) \Psi_{,x} - y] \}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

nas quais

$$y \equiv \frac{S_{,x}}{S}. \quad (3.5)$$

e a variável auto-similar, x , é dada por

$$x = \ln r - t. \quad (3.6)$$

Ao escrevermos as Eqs.(3.2) - (3.4), usamos a Eq.(3.1). Das equações acima, podemos notar que as equações de campo de Einstein são suficientes para determinarmos completamente os coeficientes métricos $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ e $S(x)$. A pressão e a densidade de energia do fluido podem ser correlacionadas através de uma equação de estado. Em geral, tomamos a forma [99],

$$\rho = \rho(T, \Sigma), \quad (3.7)$$

$$p = p(T, \Sigma), \quad (3.8)$$

em que T e Σ são, respectivamente, a temperatura e a entropia do sistema. Entretanto, em alguns casos o sistema depende fracamente da sua temperatura, de tal modo que a equação de estado pode ser escrita aproximadamente como $p = p(\rho)$. De acordo com Maeda *et al* [100], a simetria da auto-similaridade do tipo de ordem zero é inconsistente com a equação politrópica tanto do tipo

$$p = K\rho^\beta, \quad (3.9)$$

quanto

$$p = Kn^\beta, \quad (3.10)$$

$$\rho = m_b n + \frac{p}{\beta - 1}, \quad (3.11)$$

a menos que façamos $\beta = 1$, em que K é uma constante arbitrária, a constante m_b denota a massa bariônica média e $n(t, r)$, a densidade de número bariônico [99]. Portanto, consideraremos a seguir somente o caso $\beta = 1$, ou seja,

$$p = K\rho. \quad (3.12)$$

Então, combinando a Eq.(3.12) com a Eq.(3.4), temos que

$$[1 + (1 + K)y] \Phi_{,x} = 0, \quad (3.13)$$

$$[1 + (1 + K)y] \Psi_{,x} - y = 0. \quad (3.14)$$

As equações acima possuem soluções somente quando $1 + (1 + K)y \neq 0$. Sendo assim, para esta equações, encontramos

$$\Phi = \Phi_0, \quad (3.15)$$

$$\Psi_{,x} = \frac{y}{1 + (1 + K)y}. \quad (3.16)$$

Claramente, para a solução dada pela Eq.(3.15), a Eq.(3.2) é satisfeita identicamente. A fim de resolvermos as Eqs.(3.1), (3.3) e (3.16), consideraremos os casos $y \neq -1$ e $y = -1$ separadamente.

3.1.1 Caso $y \neq -1$

Quando $y \neq -1$, das Eqs.(3.16) e (3.1), temos que

$$\begin{aligned}\Psi_{,xx} &= \frac{y_{,x}}{1 + (1 + K)y} [1 - (1 + K)\Psi_{,x}], \\ \Psi_{,x} &= \frac{y_{,x}}{1 + y} + y.\end{aligned}\tag{3.17}$$

Substituindo a Eq.(3.17) na Eq.(3.3), obtemos

$$Ky_{,x} [y_{,x} + 2y(1 + y)] = 0,\tag{3.18}$$

cujas soluções são:

$$\begin{aligned}(i) \quad &K = 0, \\ (ii) \quad &y_{,x} = 0, \\ (iii) \quad &y_{,x} + 2y(1 + y) = 0.\end{aligned}\tag{3.19}$$

(i) $K = 0$: Neste caso, as Eqs.(3.1) e (3.16) implicam

$$y_{,x} + y^2 = 0,\tag{3.20}$$

que possui a solução

$$S(x) = S_0(x_0 - x).\tag{3.21}$$

Substituindo-a na Eq.(3.16) e depois integrando a equação resultante, temos que $\Psi = \ln(x_0 - x - 1) + \Psi_0$. Deste modo, a solução geral, neste caso, é dada por

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \Phi_0, \\ \Psi(x) &= \ln(x_0 - x - 1) + \Psi_0, \\ S(x) &= S_0(x_0 - x), \quad (K = 0).\end{aligned}\tag{3.22}$$

Pode-se mostrar que as condições de regularidade, Eqs.(2.3)-(2.5), e de calibre, Eq.(2.27), requerem $\Phi_0 = 0$ e $S_0 = e^{\Psi_0}$. Em outras palavras, usando as transformações dadas pela Eq.(2.26), podemos fazer $\Psi_0 = 0$ e $x_0 = 0$, e as soluções

podem ser finalmente escritas na seguinte forma,

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= 0, \\ \Psi(x) &= \ln [(-x) - 1], \\ S(x) &= -x, \quad (K = 0).\end{aligned}\tag{3.23}$$

Note que, ao escrevermos as expressões acima, nos restringimos à região $x \leq -1$, que inclui o eixo $r = 0$ ou $x = -\infty$ [cf. Eq.(B.4)]. Então, a densidade de energia e a pressão correspondentes são dadas, respectivamente, por

$$\rho = \frac{1}{\lambda^2(-x)[(-x) - 1]}, \quad p = 0, \quad (x \leq -1).\tag{3.24}$$

Destas expressões, podemos ver que o espaço-tempo é singular na hipersuperfície $x = -1$ [cf. Fig. 3.1].

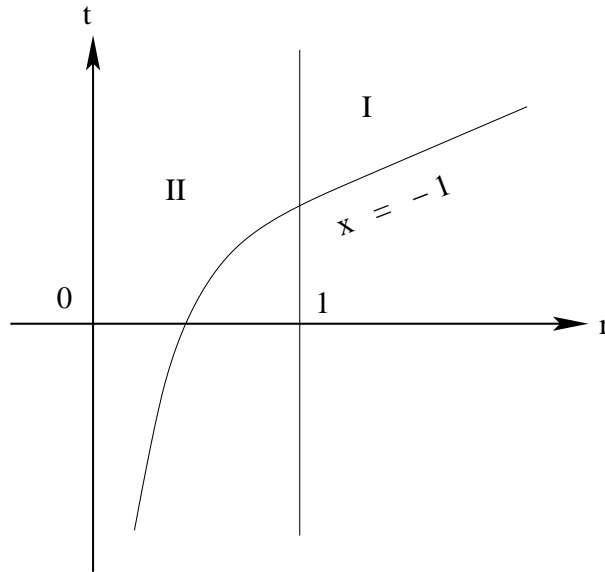


Figura 3.1: Espaço-tempo no plano (t, r) para as soluções dadas pela Eq.(3.23). Na Região I , temos $\theta_l > 0$, $\theta_n > 0$, enquanto que na Região II , temos $\theta_l > 0$, $\theta_n < 0$, nas quais $I \equiv \{x^\mu : x < -1, r > 1\}$ e $II \equiv \{x^\mu : x < -1, r < 1\}$. Os anéis de t e r constantes são aprisionados na Região I ($\theta_l \theta_n > 0$), porém não na Região II ($\theta_l \theta_n < 0$). O espaço-tempo é singular na hipersuperfície $x = -1$, e a natureza da singularidade é do tipo-tempo.

O vetor normal às hipersuperfícies $x = \text{const.}$ é dado por

$$N_\alpha \equiv \frac{\partial(x - x_0)}{\partial x^\alpha} = -\delta_\alpha^t + \frac{1}{r}\delta_\alpha^r. \quad (3.25)$$

Assim, no presente caso, temos

$$N_\alpha N^\alpha = 1 - \frac{1}{r^2(1+x)^2} \rightarrow -\infty, \quad (3.26)$$

quando $x \rightarrow -1$, ou seja, a singularidade do espaço-tempo em $x = -1$ é do tipo-tempo. Da Eq.(2.22), em outras palavras, as expansões dos raios de luz emergentes e imergentes, são respectivamente dadas por

$$\begin{aligned} \theta_l &= \frac{1}{2rg(-x)}(1+r), \\ \theta_n &= -\frac{1}{2rf(-x)}(1-r). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Uma vez que $x \leq -1$, podemos ver que θ_l é sempre positivo nesta região e θ_n muda de sinal quando se atravessa a hipersuperfície $r = 1$. Diante destas propriedades, a interpretação física destas soluções não está clara para nós (se é que há alguma).

(ii) $y_{,x} = 0$: Neste caso, é fácil de se mostrar que a solução geral é dada por

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \Phi_0, \\ \Psi(x) &= ax + \Psi_0, \\ S(x) &= S_0 e^{ax}, \quad K = -1, \end{aligned} \quad (3.28)$$

para a qual temos que

$$\rho = -p = \frac{a^2 e^{-2\Phi_0}}{\lambda^2}. \quad (3.29)$$

Esta é uma solução de de Sitter tri-dimensional. De fato, fazendo

$$\begin{aligned} t &= e^{-\Phi_0} \bar{t} + \frac{\Psi_0}{a}, \quad r = [(1+a)\bar{r}]^{1/(1+a)}, \\ \theta &= \frac{e^{\Psi_0}}{(1+a)S_0} \bar{\theta}, \quad \beta \equiv ae^{-\Phi_0}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

temos que a métrica correspondente pode ser expressa da seguinte forma

$$ds^2 = \lambda^2 \left[d\bar{t}^2 - e^{-2\beta\bar{t}} (d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\bar{\theta}^2) \right]. \quad (3.31)$$

(iii) $y_{,x} + 2y(1 + y) = 0$: Neste caso, das Eqs.(3.1) e (3.16), temos que

$$\Psi_{,x} = -y, \quad (3.32)$$

$$y = -\frac{2}{1 + K}, \quad (3.33)$$

que é inconsistente com a condição $y_{,x} + 2y(1 + y) = 0$. Assim, não existe solução para este caso.

3.1.2 Caso $y = -1$

Quando $y = -1$, das Eqs.(3.3) e (3.16), temos que

$$\Psi_{,x} = 1, \quad K = 1, \quad (3.34)$$

que juntamente com a Eq.(3.15) implica na seguinte solução geral

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \Phi_0, \\ \Psi(x) &= x + \Psi_0, \\ S(x) &= S_0 e^{-x}, \quad K = 1. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Podemos mostrar que a densidade de energia é negativa e dada por

$$\rho = p = -\frac{e^{-2\Phi_0}}{\lambda^2}. \quad (3.36)$$

Desta forma, neste caso a solução é não-física.

3.2 Soluções das Equações de Campo de Einstein com Auto-Similaridade do Primeiro Tipo

Neste caso, substituindo as Eqs.(1.16), (1.32) e (B.15) com $\alpha = 1$ nas equações de campo de Einstein, obtemos

$$y_{,x} - (1 + y)(\Psi_{,x} - y) - y\Phi_{,x} = 0, \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{,xx} + \Phi_{,x}(\Phi_{,x} - \Psi_{,x} - y - 2) \\ - e^{2(x+\Psi-\Phi)} [\Psi_{,xx} - \Psi_{,x}(\Phi_{,x} - \Psi_{,x} + y)] = 0, \end{aligned} \quad (3.38)$$

e

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{ye^{-2\Psi}}{\lambda^2 r^2} [\Psi_{,x} e^{2(x+\Psi-\Phi)} - \Phi_{,x}], \\ p &= -\frac{(y+1)e^{-2\Psi}}{\lambda^2 r^2} [\Psi_{,x} e^{2(x+\Psi-\Phi)} - \Phi_{,x}],\end{aligned}\quad (3.39)$$

nas quais y é dada pela Eq.(3.5) e a variável auto-similar, x , é dada por

$$x = \ln\left(\frac{r}{-t}\right). \quad (3.40)$$

Diferentemente do caso de auto-similaridade do tipo de ordem zero e, como veremos mais adiante na seção 3.3, do segundo tipo também, aqui, claramente, a fim de determinarmos os coeficientes métricos completamente, é necessário impormos uma equação de estado de estado ao fluido perfeito. A seguir, mostraremos que, da mesma forma que para o caso anterior, a única equação de estado que é consistente com a simetria de auto-similaridade homotética é dada novamente pela Eq.(3.12). Para mostrarmos isto, vamos considerar primeiro a Eq.(3.39) na forma

$$\rho = \frac{f(x)}{r^2}, \quad (3.41)$$

$$p = \frac{g(x)}{r^2}. \quad (3.42)$$

Logo, da Eq.(3.41), temos que

$$x = x(r^2\rho), \quad \frac{dx}{d(r^2\rho)} = \frac{1}{f'(x)}, \quad (3.43)$$

em que a linha denota a diferenciação ordinária em relação a x . Inserindo a Eq.(3.43) na Eq.(3.42), temos que

$$p = \frac{g[x(r^2\rho)]}{r^2}, \quad (3.44)$$

a qual mostra que, em geral, p é uma função de r e ρ . Tomando a derivada parcial da equação acima em relação a r , e então fazendo-a igual a zero, temos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial p(r, \rho)}{\partial r} &= -2\frac{g(x)}{r^3} + \frac{1}{r^2} \frac{dg(x)}{dx} \frac{dx}{d(r^2\rho)} \frac{\partial(r^2\rho)}{\partial r} \\ &= \frac{2fg}{r^3 f'} \left(\frac{g'}{g} - \frac{f'}{f} \right) = 0,\end{aligned}\quad (3.45)$$

que implica $g(x) = Kf(x)$. Portanto, a Eq.(3.12) é satisfeita. A seguir, assumiremos $0 \leq K \leq 1$. Este intervalo, além de impedir que a pressão seja negativa, está contido naquele que satisfaz a todas as condições de energia adequadas ao caso em questão [9],

$$\begin{aligned} \text{Fraca: } & \rho \geq 0, \quad \rho + p \geq 0; \\ \text{Forte: } & \rho \geq 0, \quad -\rho \leq p \leq \rho; \\ \text{Dominante: } & \rho \geq 0, \quad \rho + 2p \geq 0; \end{aligned} \tag{3.46}$$

já que delas deduzimos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} & \leq K \leq 1, \\ \rho & \geq 0. \end{aligned} \tag{3.47}$$

A combinação das Eqs.(3.39) e (3.12) imediatamente implica

$$y = -\frac{1}{1+K}. \tag{3.48}$$

Então, as Eqs.(3.37) e (3.48) possuem como soluções,

$$\begin{aligned} \Phi & = K \left(\frac{x}{1+K} + \Psi \right) + \Phi_0, \\ S(x) & = S_0 e^{-x/(1+K)}, \end{aligned} \tag{3.49}$$

enquanto que a Eq.(3.38), torna-se

$$\begin{aligned} & K\Psi_{,xx} + K \left(\Psi_{,x} + \frac{1}{K+1} \right) [(K-1)\Psi_{,x} - 1] \\ & - e^{2\left[\frac{x}{K+1} + (1-K)\Psi - \Phi_0\right]} \left[\Psi_{,xx} + (1-K)\Psi_{,x} \left(\Psi_{,x} + \frac{1}{K+1} \right) \right] = 0, \end{aligned} \tag{3.50}$$

em que Φ_0 e S_0 são constantes de integração.

3.2.1 Fluido Rígido ($K = 1$)

Quando $K = 1$, isto é, fluido rígido, a Eq.(3.50) possui a solução geral,

$$\begin{aligned}\Psi(x) &= q \ln(1 - e^{x-x_0}) - \frac{1}{2}(x - x_0) + \Psi_0, \\ \Phi(x) &= q \ln(1 - e^{x-x_0}) + x_0 + \Psi_0, \\ S(x) &= S_0 e^{-x/2},\end{aligned}\tag{3.51}$$

em que Ψ_0 , x_0 , S_0 e q são constantes de integração, e $x_0 = 2\Phi_0$. Usando as transformações de calibre dadas pela Eq.(2.25), sem que haja perda de generalidade, podemos fazer $\Psi_0 = x_0 = 0$, enquanto que as condições de regularidade, Eqs.(2.3)-(2.5), e de calibre, Eq.(2.27), requerem $S_0 = 2$. Logo, a solução geral é dada por

$$\begin{aligned}ds^2 &= \lambda^2 [(1 - e^x)^{2q} (dt^2 - e^{-x} dr^2) - 4r^2 e^{-x} d\theta^2] \\ &= \lambda^2 \left\{ \frac{[(-t) - r]^{2q}}{(-t)^{2q}} \left[dt^2 - \frac{(-t)}{r} dr^2 \right] - 4r(-t) d\theta^2 \right\},\end{aligned}\tag{3.52}$$

e a densidade de energia correspondente, por

$$\begin{aligned}\rho = p &= \frac{1 - 2q}{4\lambda^2 (-t)^2 (1 - e^x)^{2q}} \\ &= \frac{1 - 2q}{4\lambda^2 (-t)^{2(1-q)} [(-t) - r]^{2q}}.\end{aligned}\tag{3.53}$$

Das equações acima, a fim de que tenhamos $\rho \geq 0$, uma condição que assumiremos no restante deste trabalho, devemos ter $q < \frac{1}{2}$. Em outras palavras, da Eq.(2.23), temos que

$$\begin{aligned}\theta_l &= \frac{e^{x/2}}{4rg(1 - e^x)^q} (1 - e^{x/2}), \\ \theta_n &= -\frac{e^{x/2}}{4rf(1 - e^x)^q} (1 + e^{x/2}), \\ \square\mathcal{R} &= -\frac{e^{x/2}}{2\lambda r} (1 - e^x)^{1-2q}.\end{aligned}\tag{3.54}$$

A Eq.(3.52) mostra que a métrica, em geral, é singular na hipersuperfície $x = 0$, e dependendo dos valores de q , a natureza da singularidade é diferente.

Caso $0 < q < \frac{1}{2}$

Neste caso, da Eq.(3.53), podemos ver que a singularidade em $x = 0$ é de curvatura, enquanto que da Eq.(3.54), temos que $\theta_n < 0$ para qualquer $x \in (-\infty, 0)$, e θ_l é positivo para $x < 0$, e zero sobre a hipersuperfície $x = 0$. Deste modo, agora $x = 0$ é uma superfície marginalmente aprisionada. Em outras palavras, para qualquer hipersuperfície $x = \text{const.}$, digamos C , seu vetor normal é dado por

$$N_\alpha \equiv \frac{\partial(x - C)}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{r} (e^x \delta_\alpha^t + \delta_\alpha^r), \quad (3.55)$$

da qual temos que

$$N_\alpha N_\beta g^{\alpha\beta} = -\frac{e^x}{\lambda^2 r^2} (1 - e^x)^{1-2q}. \quad (3.56)$$

Claramente, sobre a hipersuperfície $x = 0$ o vetor normal, N_α , torna-se nulo. O diagrama de Penrose correspondente é dado pela Fig. 3.2, do qual podemos ver que a singularidade em $x = 0$ é não-nua, porém poderá ser vista por um observador quando este se posicionar exatamente sobre ela.

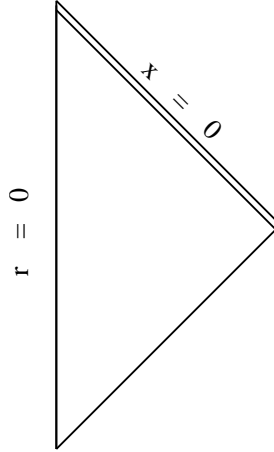


Figura 3.2: Diagrama de Penrose para as soluções dadas pela Eq.(3.52) com $0 < q < 1/2$. O espaço-tempo é singular na linha dupla $x = 0$, que é uma superfície nua e na qual temos $\theta_l(t, r)|_{x=0} = 0$. Também temos $\theta_n(t, r) < 0$ em todo o espaço-tempo, incluindo a hipersuperfície $x = 0$.

Caso $q = 0$

Neste caso, a métrica é livre de singularidades de espaço-tempo e coordenadas na hipersuperfície $x = 0$ e é válida em toda a região $t \leq 0$, $r \geq 0$. Porém, agora o espaço-tempo torna-se singular na hipersuperfície $t = 0$ [cf. Eq.(3.53)]. Da Eq.(3.54), podemos ver que esta singularidade também é não-nua, sempre estando coberta pelo horizonte aparente formado na hipersuperfície $x = 0$. De fato, agora temos

$$\theta_l \theta_n = \begin{cases} < 0, & x < 0, \\ = 0, & x = 0, \\ > 0, & x > 0. \end{cases} \quad (3.57)$$

Desta forma, todos os anéis de t e r constantes são aprisionados na região $x > 0$, porém o mesmo não ocorre em $x < 0$. Uma vez que temos $\theta_n|_{x=0} < 0$ e $\square\mathcal{R}|_{x=0} = 0$, então de acordo com as definições apresentadas na seção 2.2.1, a hipersuperfície $x = 0$ representa um horizonte aparente futuro degenerado e a Região I pode ser considerada como o interior de um buraco negro formado pelo colapso gravitacional do fluido rígido na Região II . O diagrama de Penrose correspondente é dado pela Fig. 3.3.

A fim de realizarmos um estudo mais profundo a respeito destas soluções, vamos introduzir as coordenadas duplamente nulas definidas pela Eq.(2.6), que no presente caso implicam

$$u = - \left[(-t)^{1/2} + r^{1/2} \right], \quad v = - \left[(-t)^{1/2} - r^{1/2} \right]. \quad (3.58)$$

Em termos de u e v , a métrica correspondente toma a forma da Eq.(2.9) com

$$\sigma(u, v) = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{1}{2} (u + v)^2 \right], \quad R(u, v) = \frac{u^2 - v^2}{2}. \quad (3.59)$$

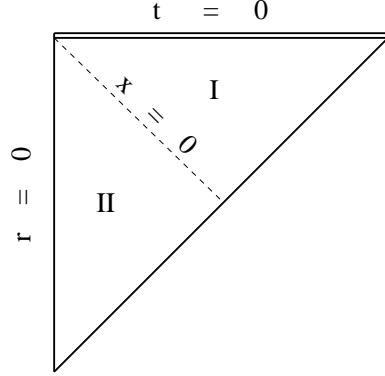


Figura 3.3: Diagrama de Penrose para as soluções dadas pela Eq.(3.52) com $q = 0$. O espaço-tempo é singular na linha dupla $t = 0$. Todos os anéis de t e r constantes são aprisionados na Região I , porém não na Região II , nas quais $I = \{x^\alpha : x > 0, t < 0, r \geq 0\}$ e $II = \{x^\alpha : x < 0, t < 0, r \geq 0\}$. A hipersuperfície $x = 0$ é uma superfície nula e representa um horizonte aparente degenerado futuro.

Das expressões acima, temos que

$$\theta_l = -\frac{v}{R} = \begin{cases} > 0, & \text{Região } I, \\ = 0, & x = 0, \\ < 0, & \text{Região } II, \end{cases}$$

$$\mathcal{L}_u \theta_l = \mathcal{L}_v \theta_n = \frac{uv}{R} = \begin{cases} > 0, & \text{Região } I, \\ = 0, & x = 0, \\ < 0, & \text{Região } II, \end{cases} \quad (3.60)$$

e $\theta_n = \frac{u}{R} < 0$ nas Regiões I e II , visto que em ambas sempre temos $u < 0$.

Caso $q < 0$

Neste caso, o espaço-tempo é livre de singularidade de curvatura sobre a hipersuperfície $x = 0$, embora tenhamos uma singularidade de coordenadas. Logo, a fim de termos um espaço-tempo maximal geodesicamente, é necessário que o estendamos além desta superfície. Introduzindo duas coordenadas nulas, u e v ,

através da relações

$$\begin{aligned} t &= -\frac{1}{2} [(-u)^n + (-v)^n]^2, \\ r &= \frac{1}{2} [(-u)^n - (-v)^n]^2, \end{aligned} \quad (3.61)$$

nas quais

$$n \equiv \frac{1}{2q+1}, \quad (3.62)$$

temos que a métrica (3.52) torna-se

$$ds^2 = \lambda^2 [2e^{2\sigma(u,v)} dudv - R^2(u,v) d\theta^2], \quad (3.63)$$

com

$$\begin{aligned} \sigma(u,v) &= (1-2q) \ln [(-u)^n + (-v)^n] + \sigma_0, \\ R(u,v) &= (-u)^{2n} - (-v)^{2n}, \end{aligned} \quad (3.64)$$

e $\sigma_0 \equiv \frac{1}{2} \ln(2n^2 4^{2q})$. A velocidade e a densidade de energia correspondentes do fluido rígido são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} w_\mu &= \frac{\lambda e^\sigma}{\sqrt{2}} \left(w \delta^u_\mu + \frac{1}{w} \delta^v_\mu \right), \quad w \equiv \left(\frac{u}{v} \right)^{(n-1)/2}, \\ \rho &= \frac{\rho_0 (uv)^{n-1}}{[(-u)^n + (-v)^n]^{6-2/n}}, \quad \rho_0 = \frac{2n(2n-1)}{\lambda^2} e^{-2\sigma_0}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Da Eq.(3.61), podemos ver que a região $t \leq 0$, $r \geq 0$, $x \leq 0$ no plano (t, r) foi mapeada para região $u \leq 0$, $v \leq 0$ e $v \geq u$ no plano (u, v) , a que nos referiremos como Região *II*, como mostrado na Fig. 3.4. A hipersuperfície nula $x = 0$, como pode ser visto da Eq.(3.56), é mapeada para $v = 0$. A Região *I*, na qual $u \leq 0$, $v \geq 0$, $|u| \geq v$, representa uma região estendida. Nesta região estendida, a métrica é real somente para $n \neq \frac{2m+1}{2j}$, em que j e m são números inteiros. Quando $n = \frac{2m+1}{2j}$, uma possível extensão pode ser dada através da substituição de $-v$ por $|v|$. Contudo, esta extensão é não-analítica. De fato, não existe extensão analítica neste caso. O único caso em que a extensão é analítica

é aquele em que n é um número inteiro não-negativo. Quando a extensão é não-analítica, ela também não é única. Assim, a fim de termos uma única extensão, a seguir assumiremos que n é um número inteiro tal que $n \geq 1$ [cf. Eq.(3.62)]. Em outras palavras, das Eqs.(2.16) e (2.17), temos que

$$\begin{aligned}\theta_l &= \frac{2n}{R} (-v)^{2n-1}, & \theta_n &= -\frac{2n}{R} (-u)^{2n-1}, \\ \mathcal{L}_u \theta_l &= \mathcal{L}_v \theta_n &= \frac{4n^2}{R^2} (uv)^{2n-1}.\end{aligned}\tag{3.66}$$

Das expressões acima, podemos ver que θ_n é sempre negativo em ambas as Regiões I e II , enquanto que θ_l é positivo na Região II , zero na hipersuperfície $v = 0$, e negativo na região estendida, I . Próximo à superfície $v = 0$, o único componente não-nulo do tensor de energia-momento é dado por

$$T_{uu} = \frac{\lambda^2 \rho_0 e^{2\sigma_0}}{(-u)^2},\tag{3.67}$$

o qual representa o fluxo de energia da Região II para a Região I ao longo da hipersuperfície $u = \text{const.}$. A fim de estudarmos mais profundamente estas soluções, vamos considerar os dois casos, $n = 2m + 1$ e $n = 2m$, separadamente, nos quais $m = 1, 2, 3, \dots$

Quando n for um número inteiro ímpar, isto é, $n = 2m + 1$, da Eq.(3.65), podemos ver que o espaço-tempo é singular na hipersuperfície $u = -v$ na região estendida, I , na qual temos $R(u, v) = 0$. Em outras palavras, todos os anéis de t e r constantes são aprisionados nesta região, como podemos ver da Eq.(3.66), uma vez que temos agora $\theta_l \theta_n > 0$. Deste modo, a Região I pode ser considerada como o interior de um buraco negro formado pelo colapso gravitacional do fluido na Região II . O diagrama de Penrose correspondente é dado pela Fig. 3.4. Deve ser notado que, no presente caso, o horizonte aparente em $v = 0$ também é futuro degenerado, visto que agora temos $\mathcal{L}_u \theta_l|_{v=0} = 0$.

Quando n for um número inteiro par, digamos, $n = 2m$, da Eq.(3.65) podemos ver que não há formação de singularidade de curvatura de espaço-tempo no eixo $R = 0$ na região estendida I , embora todos os anéis de t e r constantes também

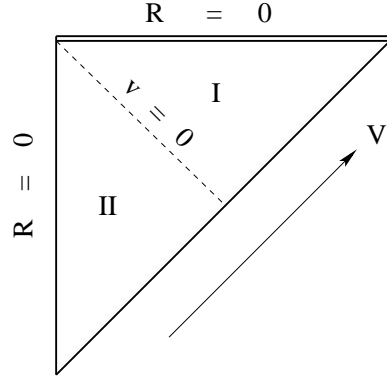


Figura 3.4: Diagrama de Penrose para as soluções dadas pelas Eqs.(3.63) e (3.64) com n sendo um número inteiro. Os anéis de t e r constantes são superfícies de aprisionamento fechadas na Região I , porém não na Região II . A linha pontilhada $v = 0$, representa um horizonte aparente. Quando n for um número inteiro ímpar, o espaço-tempo será singular na linha dupla horizontal $R = 0$ e quando for um número inteiro par, o espaço-tempo terá uma singularidade do tipo-defeito-angular.

sejam aprisionados nesta região, visto que ainda temos $\theta_l|_{v>0} < 0$ e $\theta_l\theta_n|_{v>0} > 0$. Contudo, a condição de planeza local dada pela Eq.(2.4) não é satisfeita aqui. De fato, pode ser mostrado que agora temos

$$\frac{X_{,\alpha}X_{,\beta}g^{\alpha\beta}}{4X} \rightarrow +1, \quad (3.68)$$

quando $v \rightarrow -u$. Desta forma, diferentemente do que ocorre no eixo $R = 0$ na Região II , onde a condição de planeza local é satisfeita, agora o espaço-tempo sobre este mesmo eixo na Região I possui um defeito angular. O diagrama de Penrose correspondente também é dado pela Fig. 3.4, porém agora a linha dupla horizontal $R = 0$, ao invés de representar uma singularidade de curvatura, representa uma singularidade do tipo-defeito-angular [92].

Além disso, na região estendida, I , onde $uv < 0$, a função ρ torna-se negativa, e a tri-velocidade w_μ , imaginária, como pode ser visto da Eq.(3.65). Uma investigação mais minuciosa mostra que o tensor de energia-momento nesta região estendida realmente toma a forma

$$T_{\mu\nu} = \bar{\rho}(2r_\mu r_\nu + g_{\mu\nu}), \quad (3.69)$$

em que

$$\begin{aligned} r_\mu &= \frac{\lambda e^\sigma}{\sqrt{2}} \left(r_0 \delta_\mu^u - \frac{1}{r_0} \delta_\mu^v \right), \quad r_0 \equiv \left| \frac{u}{v} \right|^{(2m-1)/2}, \\ \bar{\rho} &= \frac{\rho_0 |uv|^{2m-1}}{(u^{2m} + v^{2m})^{(6m-1)/m}}, \quad (n = 2m), \end{aligned} \quad (3.70)$$

do qual temos que

$$g^{\mu\nu} r_\mu r_\nu = -1. \quad (3.71)$$

Assim, a fonte não é mais um fluido perfeito na região estendida. De fato, ao introduzirmos os vetores unitários,

$$w_\mu = \frac{\lambda e^\sigma}{\sqrt{2}} \left(r_0 \delta_\mu^u + \frac{1}{r_0} \delta_\mu^v \right), \quad \theta_\mu = \lambda R \delta_\mu^\theta, \quad (3.72)$$

nas quais $w_\nu w^\nu = 1$ e $\theta_\nu \theta^\nu = -1$, temos que a Eq.(3.69), pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= \rho w_\mu w_\nu - p_r r_\mu r_\nu - p_\theta \theta_\mu \theta_\nu, \\ \rho &= -p_r = p_\theta = \frac{\rho_0 |uv|^{2m-1}}{(u^{2m} + v^{2m})^{(6m-1)/m}}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Assim, a fonte na Região I torna-se agora um fluido anisotrópico com densidade de energia, ρ e duas pressões principais, p_r e p_θ , nas direções r_μ e θ_μ , respectivamente. Note que embora a pressão na direção r_μ seja negativa, o fluido anisotrópico satisfaz a todas as três condições de energia [9]. Com essa estranha característica, não está claro que tal solução estendida na Região I seja fisicamente aceitável, não podendo representar colapso gravitacional de um fluido rígido. Além disso, se analisarmos o fluido do ponto de vista microscópico, podemos rejeitar a mudança que ocorre na equação de estado quando se atravessa a hipersuperfície $v = 0$ [101]. Este problema ainda está sob investigação.

Antes de apresentarmos o estudo de outros casos, gostaríamos de chamar atenção de que um fluido rígido é energeticamente equivalente a um campo escalar sem massa quando a velocidade do fluido for irrotacional, isto é, $w_{[\alpha} \nabla_\beta w_{\gamma]} = 0$ e o campo escalar sem massa, do tipo-tempo, $\phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} g^{\alpha\beta} > 0$ [45, 102, 103]. De fato, introduzindo o campo escalar através da relação

$$\phi_{,\mu} = \sqrt{2\rho} w_\mu, \quad (3.74)$$

tal que a relação inversa entre o fluido e o campo escalar é dada por

$$w_\mu \equiv \frac{\phi_{,\mu}}{\sqrt{\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha}}}, \quad \rho = p = \frac{1}{2}\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha}, \quad (\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha} > 0), \quad (3.75)$$

podemos escrever o tensor de energia-momento como

$$T_{\mu\nu}^\phi = \phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha} = \rho(2w_\mu w_\nu - g_{\mu\nu}). \quad (3.76)$$

Quando o campo escalar sem massa for do tipo-espaço, o tensor de energia-momento correspondente é energeticamente equivalente a um fluido anisotrópico,

$$T_{\mu\nu}^\phi = \phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha} = \rho h_{\mu\nu} - p_r r_\mu r_\nu, \quad (\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha} < 0), \quad (3.77)$$

em que

$$r_\mu \equiv \frac{\phi_{,\mu}}{\sqrt{-\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha}}}, \quad h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + r_\mu r_\nu, \quad \rho = -p_r = -\frac{1}{2}\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha} > 0. \quad (3.78)$$

Já no caso de o campo escalar sem massa ser do tipo-nulo, o tensor de energia-momento correspondente é energeticamente equivalente a uma poeira nula,

$$T_{\mu\nu}^\phi = \phi_{,\mu}\phi_{,\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha} = \rho l_\mu l_\nu, \quad (\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha} = 0), \quad (3.79)$$

em que

$$l_\mu \equiv \frac{\phi_{,\mu}}{\sqrt{\rho}}, \quad l_\lambda l^\lambda = 0. \quad (3.80)$$

Claramente, as condições anteriormente citadas são satisfeitas na Região *II*. Comparando as soluções dadas pela Eq.(3.64) com as dos campos escalares sem massa correspondentes encontrados em [53], vimos que estas são realmente as mesmas na Região *II*. Contudo, como mostrado no caso quadri-dimensional [45], o espaço-tempo através do horizonte $v = 0$ pode ser completamente diferente. A análise feita acima indica que isto também pode ser válido no caso $(2 + 1)$ -dimensional.

3.2.2 Poeira ($K = 0$)

Quando $K = 0$, a pressão do fluido perfeito é nula, ou seja, temos poeira. Logo, pode ser mostrado que, neste caso, a solução geral é dada por

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \Phi_0, \\ \Psi(x) &= \ln(1 - e^{x-x_0}) - x + \Psi_0, \\ S(x) &= S_0 e^{-x}.\end{aligned}\tag{3.81}$$

Sem que haja perda de generalidade, no presente caso podemos fazer $S_0 = 1$ e $x_0 = 0 = \Psi_0$. Portanto, temos que

$$ds^2 = \lambda^2 \left[e^{2\Phi_0} dt^2 - \left(1 + \frac{t}{r}\right)^2 dr^2 - t^2 d\theta^2 \right],\tag{3.82}$$

e

$$\rho = \frac{e^{-2\Phi_0}}{\lambda^2 t^2 (1 - e^x)}, \quad p = 0.\tag{3.83}$$

Das expressões acima, vemos que o espaço-tempo é singular nas hipersuperfícies $x = 0$ e $t = 0$. Para uma hipersuperfície $x = C$, o vetor normal é dado pela Eq.(3.55), e para a solução da Eq.(3.81), temos que

$$N_\alpha N^\alpha = \frac{e^{2x}}{\lambda^2 r^2} \left[e^{-2\phi_0} - \frac{1}{(1 - e^x)^2} \right] \rightarrow -\infty,\tag{3.84}$$

quando $x \rightarrow 0^-$. Desta forma, a hipersuperfície $x = 0$ é do tipo-tempo. Além disso, agora temos que $\mathcal{R}(t, r) = \lambda r S(x) = \lambda(-t)$, significando que $\nabla_a \mathcal{R}$ também é do tipo-tempo, e todo o espaço-tempo é aprisionado. Também, neste caso, a condição dada pela Eq.(2.3) não é satisfeita, isto é, não existe eixo de simetria. O diagrama de Penrose correspondente é dado pela Fig. 3.5, da qual podemos ver que esta solução também não representa colapso gravitacional.

3.2.3 Fluido Perfeito com $K \neq 0, 1$

Quando $K \neq 0, 1$, introduzindo a função $Z(x)$ por

$$Z(x) = \exp \left\{ 2 \left[\frac{x}{1+K} + (1-K)\Psi - \Phi_0 \right] \right\},\tag{3.85}$$

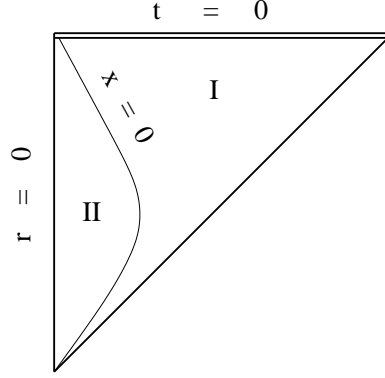


Figura 3.5: Diagrama de Penrose para as soluções dadas pela Eq.(3.82). O espaço-tempo é singular nas hipersuperfícies $t = 0$ e $x = 0$, sendo que esta última divide o espaço-tempo em duas regiões, I e II , causalmente desconexas. A singularidade em $x = 0$ é do tipo-tempo, enquanto que aquela em $t = 0$ é do tipo-espaço. Todos os anéis de t e r constantes são aprisionados em ambas as regiões, I e II .

temos que a Eq.(3.50) pode ser reescrita na forma,

$$2Z(K - Z)Z_{,xx} + (Z - 3K)Z_{,x}^2 + 2Z^2Z_{,x} + \frac{4K}{(K + 1)^2}Z^2(K^2 - Z) = 0. \quad (3.86)$$

Uma solução particular para esta equação é dada por

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \Phi_0, \\ \Psi(x) &= -\frac{x}{K + 1} + \frac{\Phi_0}{1 - K}, \\ S(x) &= S_0 e^{-\frac{x}{K+1}}. \end{aligned} \quad (3.87)$$

A fim de que as condições de regularidade, Eqs.(2.3)-(2.5), e de calibre, Eq.(2.27), sejam satisfeitas, devemos ter

$$\Phi_0 = 0, \quad S_0 = \frac{1 + K}{K}, \quad K > 0. \quad (3.88)$$

Portanto, a métrica correspondente apresenta a forma

$$ds^2 = \lambda^2 \left\{ dt^2 - \left[\frac{(-t)}{r} \right]^{2/(1+K)} \left[dr^2 + \left(\frac{1 + K}{K} \right)^2 r^2 d\theta^2 \right] \right\}, \quad (3.89)$$

e a pressão e a densidade do fluido são dadas por

$$p = K\rho = \frac{K}{\lambda^2 (1+K)^2 (-t)^2}. \quad (3.90)$$

Das expressões acima, podemos ver que o espaço-tempo é sempre singular em $t = 0$. Contudo, a singularidade é não-nua. De fato, da Eq.(2.23), temos que

$$\begin{aligned} \theta_l &= \frac{e^{x/(1+K)}}{2(1+K)rg} [K - e^{Kx/(1+K)}], \\ \theta_n &= -\frac{e^{x/(1+K)}}{2(1+K)rf} [K + e^{Kx/(1+K)}], \\ \square\mathcal{R} &= \frac{(2-K)e^{(1+2K)x/(1+K)}}{\lambda K(1+K)r} \left[1 - \frac{K^2}{2-K} e^{-2Kx/(1+K)} \right], \end{aligned} \quad (3.91)$$

da qual podemos ver que a expansão da congruência de raios nulos imergentes, θ_n , é sempre negativa e

$$\theta_l(t, r) = \begin{cases} > 0, & x < x_0, \\ = 0, & x = x_0, \\ < 0, & x > x_0, \end{cases} \quad (3.92)$$

em que x_0 é dada por

$$x_0 \equiv \frac{1+K}{K} \ln K. \quad (3.93)$$

Deste modo, a singularidade em $t = 0$ está sempre coberta por um horizonte aparente localizado na hipersuperfície $x = x_0$. Na região onde $t < 0$ e $x > x_0$, os anéis de t e r constantes são aprisionados, visto que temos agora $\theta_l\theta_n > 0$. Em outras palavras, da Eq.(3.91), podemos ver que $\theta_n|_{x=x_0} < 0$ e $\square\mathcal{R}|_{x=x_0} > 0$. Então, de acordo com a definição dada na seção 2.2.1, podemos ver que a hipersuperfície $x = x_0$ representa um horizonte aparente interior futuro. Além do mais, o vetor normal N_α à hipersuperfície $x = x_0$ possui a mesma forma daquele dado pela Eq.(3.55), porém agora com

$$N_\alpha N_\beta g^{\alpha\beta} = -\frac{e^{2x_0/(1+K)}}{\lambda^2 r^2} (1 - K^2) < 0, \quad (3.94)$$

tal que $0 < K < 1$. Neste caso, o horizonte aparente é sempre do tipo-tempo. O diagrama de Penrose correspondente é dado pela Fig. 3.6.

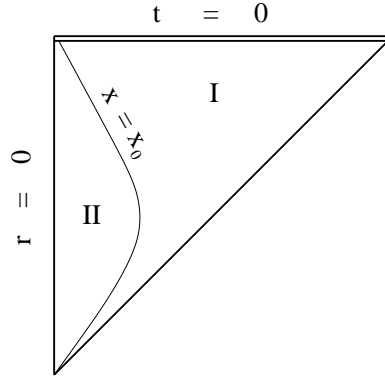


Figura 3.6: Digrama de Penrose para as soluções dadas pela Eq.(3.89) para $0 < K < 1$. O horizonte aparente $x = x_0$ é sempre do tipo-tempo. Na Região *II*, em que $x < x_0$, temos $\theta_l > 0$ e $\theta_l \theta_n < 0$, porém na Região *I*, em que $x > x_0$, todos os anéis de t e r constantes são aprisionados, visto que agora temos $\theta_l < 0$ e $\theta_l \theta_n > 0$. O espaço-tempo é singular na linha dupla $t = 0$.

Também é interessante notar que neste caso as soluções são espaços-tempos tri-dimensionais de FRW temporalmente reversos. De fato, ao introduzirmos duas novas coordenadas, \bar{r} e \bar{t} , através das relações,

$$\bar{r} = \frac{1+K}{K} r^{K/(1+K)}, \quad (3.95)$$

$$\bar{t} = -\frac{1+K}{K} (-t)^{K/(1+K)}, \quad (3.96)$$

a métrica (3.89), pode ser reescrita na forma,

$$ds^2 = \lambda^2 \left(\frac{K}{1+K} \right)^{2/K} (-\bar{t})^{2/K} (d\bar{t}^2 - d\bar{r}^2 - \bar{r}^2 d\theta^2). \quad (3.97)$$

3.3 Soluções das Equações de Campo de Einstein com Auto-Similaridade do Segundo Tipo

Quando $\alpha \neq 1$, o termo proporcional a r^{-2} possui uma dependência de potência em r diferente daquele, a t^{-2} , quando escritos em função de r e x , uma vez

que $t = -r^\alpha e^{-\alpha x}$. Logo, as equações de campo de Einstein tornam-se

$$y_{,x} - (1 + y) (\Psi_{,x} - y) - y\Phi_{,x} = 0, \quad (3.98)$$

$$\Phi_{,xx} + \Phi_{,x} (\Phi_{,x} - \Psi_{,x} - y - 2) = 0, \quad (3.99)$$

$$\Psi_{,xx} - \Psi_{,x} (\Phi_{,x} - \Psi_{,x} + y + 1 - \alpha) + (1 - \alpha) y = 0, \quad (3.100)$$

e

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{y}{\lambda^2} \left[\frac{1}{(\alpha t)^2} e^{-2\Phi} \Psi_{,x} - \frac{1}{r^2} e^{-2\Psi} \Phi_{,x} \right], \\ p &= \frac{1}{\lambda^2} \left\{ \frac{1 + y}{r^2} e^{-2\Psi} \Phi_{,x} - \frac{1}{(\alpha t)^2} e^{-2\Phi} [(1 + y) \Psi_{,x} - (1 - \alpha) y] \right\}, \end{aligned} \quad (3.101)$$

nas quais y é dada pela Eq.(3.5) e a variável auto-similar, x , é dada por

$$x = \ln \left[\frac{r}{(-t)^{\frac{1}{\alpha}}} \right]. \quad (3.102)$$

Ao escrevermos as Eqs.(3.99)-(3.101), usamos a Eq.(3.98). Da mesma forma que para as soluções com auto-similaridade do tipo de ordem zero, as equações de campo de Einstein são suficientes para determinarmos completamente os coeficientes métricos. A auto-similaridade do segundo tipo também é inconsistente com a equação de estado dada pela Eq.(3.9), a menos que façamos $\beta = 1$. Novamente, a seguir, consideraremos somente o caso em que $\beta = 1$, mais uma vez implicando na Eq.(3.12). Combinando a Eq.(3.12) com a Eq.(3.101), temos que

$$[1 + (1 + K) y] \Phi_{,x} = 0, \quad (3.103)$$

$$[1 + (1 + K) y] \Psi_{,x} - (1 - \alpha) y = 0. \quad (3.104)$$

Uma vez que $\alpha \neq 1$, devemos ter $\Phi_{,x} = 0$. Portanto, um fluido perfeito com equação de estado dada pela Eq.(3.12) e auto-similaridade do segundo tipo, deve mover-se ao longo de uma geodésica do tipo-tempo radial. A fim de resolvermos as Eqs.(3.98)-(3.100) e (3.104), consideraremos os casos $y \neq -1$ e $y = -1$ separadamente.

Caso A) $y \neq -1$: Neste caso, da Eq.(3.98), temos que

$$\Psi_{,x} = \frac{y_{,x}}{1+y} + y, \quad (3.105)$$

enquanto que da Eq.(3.104), obtemos

$$\Psi_{,xx} = \frac{y_{,x}}{1+(1+K)y} [(1-\alpha) - (1+K)\Psi_{,x}]. \quad (3.106)$$

Inserindo as expressões acima na Eq.(3.100), temos que esta possui três soluções diferentes como segue,

$$\begin{aligned} (a) \quad & K = 0, \\ (b) \quad & y_{,x} = 0, \\ (c) \quad & y_{,x} - (\alpha - 2)y(1+y) = 0. \end{aligned} \quad (3.107)$$

Quando $K = 0$, pode ser mostrado que as Eqs.(3.98)-(3.100), (3.103) e (3.104) possuem a solução geral,

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \Phi_0, \\ \Psi(x) &= \ln |1 + (\alpha - 1)e^{\alpha(x_0 - x)}| + \Psi_0, \\ S(x) &= S_0 |1 - e^{\alpha(x_0 - x)}|, \quad (K = 0). \end{aligned} \quad (3.108)$$

Quando $y_{,x} = 0$, temos que a solução geral é dada por

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \Phi_0, \\ \Psi(x) &= ax + \Psi_0, \\ S(x) &= S_0 e^{ax}, \quad a \equiv -\frac{\alpha}{1+K}. \end{aligned} \quad (3.109)$$

Quando $y_{,x} - (\alpha - 2)y(1+y) = 0$, pode ser mostrado que a solução correspondente é dada pela Eq.(3.109) com $\alpha = 2$, sendo assim, este caso, uma solução da Eq.(3.109).

Caso B) $y = -1$: Neste caso, da Eq.(3.104), temos que

$$\Psi_{,x} = \frac{1-\alpha}{K}. \quad (3.110)$$

Inserindo-a na Eq.(3.100), temos que o sistema possui somente duas soluções, que são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} (i) \quad & K = 1, \\ (ii) \quad & \alpha = 1 + K. \end{aligned} \tag{3.111}$$

Quando $K = 1$, a solução geral é dada por

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \Phi_0, \\ \Psi(x) &= (1 - \alpha)x + \Psi_0, \\ S(x) &= S_0 e^{-x}, \quad (K = 1), \end{aligned} \tag{3.112}$$

e quando $\alpha = 1 + K$, obtemos

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \Phi_0, \\ \Psi(x) &= -x + \Psi_0, \\ S(x) &= S_0 e^{-x}, \quad \alpha = 1 + K, \end{aligned} \tag{3.113}$$

que é um caso particular das soluções fornecidas pela Eq.(3.109). Desta forma, a maioria das soluções gerais com auto-similaridade do segundo tipo ($\alpha \neq 0, 1$) e a equação de estado dada pela Eq.(3.12) consiste em três classes de soluções, dadas, respectivamente, pelas Eqs.(3.108), (3.109) e (3.112). A seguir, consideraremos separadamente.

3.3.1 Caso $y \neq -1$, $K = 0$

Neste caso, as soluções são dadas pela Eq.(3.108). Aplicando as condições de regularidade, Eqs.(2.3)-(2.5), e de calibre, Eq.(2.27), a estas soluções, temos que $\Phi_0 = 0$, $S_0 = e^{\Psi_0}$ e $\alpha < 1$. Logo, usando as transformações dadas pela Eq.(2.25), podemos assumir $\Psi_0 = 0$. Assim, a métrica correspondente finalmente toma a forma,

$$ds^2 = \lambda^2 \left\{ dt^2 - [1 - (1 - \alpha)e^{\alpha(x_0 - x)}]^2 dr^2 - r^2 [1 - e^{\alpha(x_0 - x)}]^2 d\theta^2 \right\}, \quad (\alpha < 1), \tag{3.114}$$

e a densidade de energia e a pressão do fluido são dadas, respectivamente, por

$$\rho = \frac{\alpha^2 (1 - \alpha) e^{2\alpha(x_0-x)}}{\lambda^2 (\alpha t)^2 |1 - e^{\alpha(x_0-x)}| |1 - (1 - \alpha) e^{\alpha(x_0-x)}|},$$

$$p = 0, \quad (\alpha < 1). \quad (3.115)$$

Das expressões acima, podemos ver que o espaço-tempo é singular nas hipersuperfícies,

$$\begin{aligned} (i) \quad & t = 0, \\ (ii) \quad & x = x_0, \\ (iii) \quad & x = x_1, \end{aligned} \quad (3.116)$$

nas quais

$$x_1 \equiv x_0 - \frac{1}{\alpha} \ln \left(\frac{1}{1 - \alpha} \right) < x_0. \quad (3.117)$$

Em outras palavras, da Eq.(2.23), temos que

$$\begin{aligned} \theta_l &= \frac{1}{2rg |1 - e^{\alpha(x_0-x)}|} \left[1 - \left(\frac{r}{r_A} \right)^{1-\alpha} \right], \\ \theta_n &= -\frac{1}{2rf |1 - e^{\alpha(x_0-x)}|} \left[1 + \left(\frac{r}{r_A} \right)^{1-\alpha} \right], \quad (0 < \alpha < 1), \end{aligned} \quad (3.118)$$

para $0 < \alpha < 1$, e

$$\begin{aligned} \theta_l &= \frac{1}{2rg |1 - e^{\alpha(x_0-x)}|} \left[1 + \left(\frac{r}{r_A} \right)^{1-\alpha} \right], \\ \theta_n &= -\frac{1}{2rf |1 - e^{\alpha(x_0-x)}|} \left[1 - \left(\frac{r}{r_A} \right)^{1-\alpha} \right], \quad (\alpha < 0), \end{aligned} \quad (3.119)$$

para $\alpha < 0$, em que $r_A \equiv e^{-\alpha x_0/(1-\alpha)}$.

Da Eq.(3.118) podemos ver que, neste caso, $0 < \alpha < 1$, θ_n é sempre negativo para qualquer $r \in [0, \infty)$, porém θ_l é negativo quando $r > r_A$, zero quando $r = r_A$ e positivo quando $r < r_A$ [cf. Fig. 3.7]. Isto é, o espaço-tempo é fechado longe do eixo no início ($t = -\infty$). Este caso não será estudado aqui, uma vez que estamos

interessados apenas naqueles em que os espaços-tempos não são fechados no início do processo de colapso.

Quando $\alpha < 0$, da Eq.(3.119) podemos ver que θ_l agora é sempre positivo, porém θ_n muda de sinal em $r = r_A$. Em particular, isto mostra que geodésicas nulas radiais imergentes vêm a se expandirem na região $r > r_A$. Deste modo, com esta curiosa propriedade, fica muito difícil consideramos as soluções correspondentes como representantes de colapso gravitacional.

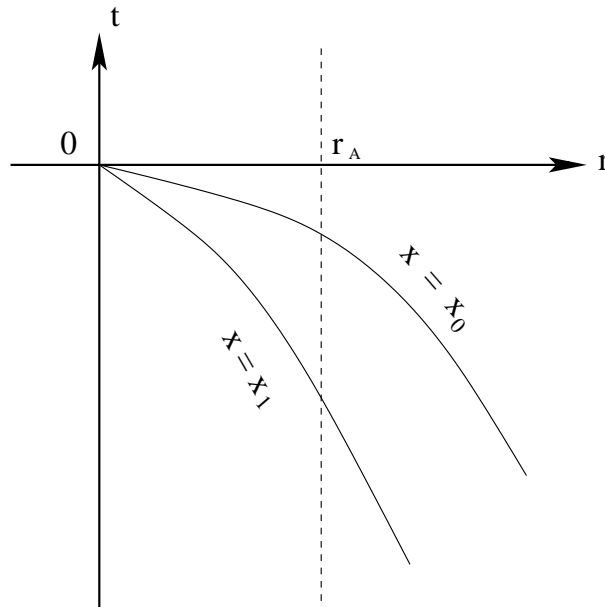


Figura 3.7: Espaço-tempo no plano (t, r) para as soluções dadas pela métrica (3.114). Este é singular nas hipersuperfícies $t = 0$, $x = x_0$ e $x = x_1$, nas quais $x_0 > x_1$.

3.3.2 Caso $y = \text{const.} (\neq -1)$

Neste caso, as soluções são dadas pela Eq.(3.109). Pode ser mostrado que as condições de regularidade, Eqs.(2.3)-(2.5), e de calibre, Eq.(2.27), requerem $\Phi_0 = 0$, $S_0 = \frac{e^{\Psi_0}}{1+\alpha}$ e $\alpha < 1 + K$. Em outras palavras, usando as transformações

dadas pela Eq.(2.25), podemos assumir $\Psi_0 = 0$. Logo, temos que

$$ds^2 = \lambda^2 \left\{ dt^2 - \left[\frac{r}{(-t)^{1/\alpha}} \right]^{2a} \left[dr^2 + \left(\frac{r}{1+a} \right)^2 d\theta^2 \right] \right\}, \quad (\alpha < 1 + K), \quad (3.120)$$

e as quantidades físicas correspondentes são dadas por

$$\begin{aligned} p &= K\rho = \frac{K}{\lambda^2 (1+K)^2 (-t)^2}, \\ \theta_l &= \frac{e^{-ax}}{2(1+K)rg} \left[(1+K)(1+a) - \frac{r^{1+a}}{(-t)^{K/(1+K)}} \right], \\ \theta_n &= -\frac{e^{-ax}}{2(1+K)rf} \left[(1+K)(1+a) + \frac{r^{1+a}}{(-t)^{K/(1+K)}} \right]. \end{aligned} \quad (3.121)$$

Das equações acima, notamos que o espaço-tempo é singular sobre a hipersuperfície $t = 0$ e a singularidade é não-nua. De fato, esta é coberta por um horizonte aparente localizado sobre a hipersuperfície

$$r_{HA}(t) = \left[(1+K)(1+a)(-t)^{K/(1+K)} \right]^{1/(1+a)}. \quad (3.122)$$

O vetor normal à hipersuperfície $r - r_{HA}(t) = 0$ é dado por

$$N_\alpha \equiv \frac{\partial [r - r_{HA}(t)]}{\partial x^\alpha}. \quad (3.123)$$

Logo, temos que

$$N_\alpha N^\alpha = -\lambda^{-2} (1+K-\alpha)^{2\alpha/(1+K-\alpha)} (-t)^{-2(1-\alpha)/(1+K-\alpha)} (1-K^2), \quad (3.124)$$

através da qual claramente vemos que o horizonte aparente é do tipo-tempo para $0 < K < 1$ e, do tipo-nulo para $K = 1$.

Podemos mostrar que quando $0 < K < 1$, ao introduzirmos duas novas variáveis \bar{t} e \bar{r} através das relações,

$$\bar{t} = -\frac{1+K}{K} (-t)^{K/(1+K)}, \quad \bar{r} = \frac{1}{1+a} r^{1+a}, \quad (3.125)$$

a métrica dada pela Eq.(3.120) toma exatamente a forma da Eq.(3.97).

Quando $K = 1$, ao introduzirmos uma nova coordenada \bar{r} , tal que

$$\bar{r} = \left[\frac{1}{2(1+a)} r^{1+a} \right]^2, \quad (3.126)$$

as soluções, neste caso, são reduzidas àquela dada pela Eq.(3.59).

Este é um resultado muito surpreendente, pois mostra explicitamente que a classificação de auto-similaridades cinemáticas não é única, tal que uma solução pode possuir dois campos vetoriais, ditos, $\xi^\mu_{(1)}$ e $\xi^\mu_{(2)}$, em que $\xi^\mu_{(1)}$ descreve a auto-similaridade de um tipo e $\xi^\mu_{(2)}$, de outro. Esta ambigüidade possui uma profunda implicação nos estudos de fenômenos críticos em colapso gravitacional.

3.3.3 Caso $y = -1$, $K = 1$

Neste caso, as soluções são dadas pela Eq.(3.112). As transformações dadas pela Eq.(2.25) e a condição de calibre, Eq.(2.27), nos permitem a fazer $\Phi_0 = \Psi_0 = 0$, $S_0 = 1$. Logo, a métrica toma a forma

$$ds^2 = \lambda^2 \left\{ dt^2 - \left[\frac{r}{(-t)^{1/\alpha}} \right]^{2(1-\alpha)} dr^2 - (-t)^{2/\alpha} d\theta^2 \right\}, \quad (3.127)$$

e a pressão e a densidade de energia correspondentes do fluido são dadas por

$$\rho = p = \frac{\alpha - 1}{\lambda^2 (\alpha t)^2}. \quad (3.128)$$

Deste modo, para que a densidade de energia seja positiva, devemos assumir que $\alpha > 1$. Introduzindo duas novas coordenadas \bar{t} e \bar{r} por

$$\bar{t} = -(-t)^{1/\alpha}, \quad \bar{r} = \frac{1}{\alpha(2-\alpha)} r^{2-\alpha}, \quad (3.129)$$

a métrica (3.127) toma a forma,

$$ds^2 = \lambda^2 \alpha^2 (-\bar{t})^{2(\alpha-1)} \left[d\bar{t}^2 - d\bar{r}^2 - (-\bar{t})^{2(2-\alpha)} d\theta^2 \right], \quad (3.130)$$

da qual temos que $\mathcal{R} = \lambda(-\bar{t})$, isto é, $\nabla_a \mathcal{R}$ é sempre do tipo-tempo e todo o espaço-tempo é aprisionado. O diagrama de Penrose para este caso é dado pela Fig. 3.8.

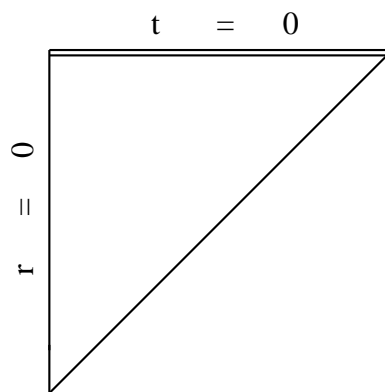


Figura 3.8: Diagrama de Penrose para as soluções dadas pela Eq.(3.127). O espaço-tempo é singular na superfície $t = 0$ e todos os anéis de t e r constantes são aprisionados.

Capítulo 4

Análise da Estabilidade das Soluções de Colapso Gravitacional

A fim de encontrarmos possíveis soluções críticas de colapso gravitacional, devemos analisar a estabilidade de tais soluções, através de perturbações. Como já dito na seção 1.3, uma solução crítica deve apresentar apenas um modo instável.

As soluções aqui perturbadas foram apenas aquelas de um fluido rígido com auto-similaridade homotética [104], uma vez que todas as outras, ou já são conhecidas, como as cosmológicas de FRW e de de Sitter, ou não representam colapso gravitacional.

4.1 Soluções de Fluido Rígido em Espaços-Tempos com Auto-Similaridade do Primeiro Tipo

As soluções auto-similares de um fluido rígido são dadas pelas Eqs.(3.63) e (3.64) e sua densidade de energia pela Eq.(3.65). Fazendo

$$\theta = \sqrt{2}\bar{\theta}, \quad \lambda = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad (4.1)$$

as soluções e a densidade de energia referidas podem ser reescritas, respectivamente, como

$$ds^2 = \frac{[(-u)^n + (-v)^n]^{4c^2}}{2^{4c^2-1} (1-c^2)^2} dudv - [(-u)^{2n} - (-v)^{2n}]^2 d\bar{\theta}^2, \quad (4.2)$$

$$\rho = \frac{\rho_0 (uv)^{n-1}}{[(-u)^n + (-v)^n]^{2(3n-1)/n}}, \quad (4.3)$$

em que $\rho_0 \equiv 2^{4c^2} c^2$ e $n \equiv \frac{1}{2(1-c^2)}$ é o mesmo parâmetro livre dado, em termos de q , pela Eq.(3.62). Permanecem válidas as mesmas considerações feitas no caso $q < 0$ da subseção 3.2.1. Como visto na referida subseção, exceto no caso em que n é um número inteiro ímpar, não existem extensões analíticas fisicamente razoáveis para as soluções de fluido rígido da Eq.(4.3). Este fato é crucial quando consideramos as condições de contorno em $v = 0$, horizonte auto-similar, nas perturbações lineares a serem estudadas na próxima seção.

Antes de encerrarmos esta seção, devemos notar que este HAS difere daquele do caso $(3+1)$ -dimensional correspondente [45], em que a formação do horizonte aparente ocorre em um momento posterior à do HAS. Por esta razão, as condições de contorno para as perturbações lineares são diferentes nestes dois casos, de forma a afetar o espectro das perturbações.

4.2 Perturbações Lineares

Primeiramente devemos notar que quando consideramos perturbações das soluções auto-similares da Eq.(4.2), trabalhamos somente na Região *II*, onde a equivalência dada pelas Eqs.(3.75) e (3.76) entre fluido rígido e campo escalar sem massa é sempre válida, pelo fato de nesta região, como mostrado em [53], o campo escalar sem massa ser sempre do tipo-tempo. A fim de podermos utilizar o máximo possível, sem que haja perda de generalidade, os resultados obtidos em [53], evitando repetição e também por razões de simplicidade, trabalhamos somente com um campo escalar sem massa nesta seção. As perturbações cor-

respondentes para o fluido rígido podem ser facilmente obtidas através da correspondência dada pelas Eqs.(3.75) e (3.76). Tendo isso em mente, inicialmente introduzimos as coordenadas \bar{u} e \bar{v} através das relações

$$\bar{u} = -(-u)^{2n}, \quad \bar{v} = -(-v)^{2n}. \quad (4.4)$$

Logo, temos que a métrica na Região *II* para as soluções de fundo da Eq.(4.2), em termos de \bar{u} e \bar{v} , toma a forma

$$ds^2 = 2e^{2\sigma} d\bar{u}d\bar{v} - r^2 d\bar{\theta}^2, \quad (4.5)$$

em que

$$\sigma(\bar{u}, \bar{v}) = 2c^2 \ln \left[\frac{1}{2} (z^{1/4} + z^{-1/4}) \right],$$

$$r(\bar{u}, \bar{v}) = (-\bar{u}) s(\bar{u}, \bar{v}), \quad s(\bar{u}, \bar{v}) = 1 - z, \quad z \equiv \frac{\bar{v}}{\bar{u}} \geq 0, \quad (4.6)$$

$$\phi(\bar{u}, \bar{v}) = c \ln(-\bar{u}) + \varphi(z), \quad \varphi(z) = 2c \ln(1 + z^{1/2}). \quad (4.7)$$

Tomando as soluções auto-similares acima como sendo o fundo, vamos estudar agora suas perturbações lineares na forma

$$F(\tau, z) = F_0(z) + \epsilon F_1(z) e^{k\tau}, \quad (4.8)$$

em que $F \equiv \{\sigma, s, \varphi\}$, ϵ é uma constante real muito pequena e

$$\tau \equiv -\ln \left(\frac{-\bar{u}}{\bar{u}_0} \right), \quad (4.9)$$

com \bar{u}_0 sendo uma constante com dimensão de comprimento. Sem que haja perda de generalidade, daqui por diante lhe atribuímos o valor 1. Quantidades com o subscrito “1” representam perturbações, enquanto que aquelas com “0”, as soluções auto-similares dadas pelas Eqs.(4.6) e (4.7). Modos com $\text{Re}(k) > 0$ crescem quando $\tau \rightarrow \infty$, sendo referidos como instáveis, enquanto que aqueles com $\text{Re}(k) < 0$ decaem, sendo referidos como estáveis.

No caso de campo escalar, as equações de campo de Einstein reduzem-se a

$$R_{\mu\nu} = \phi_{,\mu}\phi_{,\nu}, \quad (4.10)$$

em que $R_{\mu\nu}$ é o tensor de Riemann.

O campo escalar sem massa satisfaz à equação de Klein-Gordon,

$$\phi_{;\mu}{}^{\mu} = 0. \quad (4.11)$$

Porém, esta equação não é independente das equações de campo de Einstein, podendo ser obtida através da equação da conservação local de energia-momento,

$$T_{\mu\nu}{}^{;\nu} = 0. \quad (4.12)$$

Para primeira ordem em ϵ , de acordo com o apêndice C, já substituindo as soluções de fundo, dadas pelas Eqs.(4.6) e (4.7), as equações de campo de Einstein podem ser escritas como

$$\begin{aligned} & z^2 s_{1,zz} + z \left[2k - c^2 \frac{(z^{1/2} - 1)}{z^{1/2} + 1} \right] s_{1,z} \\ & - \left\{ c^2 \frac{z(z^{1/2} - 1)}{(1-z)(z^{1/2} + 1)} + k \left[c^2 \frac{(z^{1/2} - 1)}{z^{1/2} + 1} + 1 - k \right] \right\} s_1 \\ & + 2(z\sigma_{1,z} + k\sigma_1) = 2c \frac{(1-z)}{z^{1/2} + 1} (z\varphi_{1,z} + k\varphi_1), \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} & z s_{1,zz} + 2z(1-z)\sigma_{1,zz} + k s_{1,z} + 2(1+k)(1-z)\sigma_{1,z} \\ & = c(z^{1/2} - 1) \left[(z^{1/2} - 1)\varphi_{1,z} + \frac{k}{z^{1/2}}\varphi_1 \right], \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} & z s_{1,zz} - c^2 \frac{(z^{1/2} - 1)}{z^{1/2} + 1} s_{1,z} - c^2 \frac{(z^{1/2} - 1)}{(1-z)(z^{1/2} + 1)} s_1 + 2z\sigma_{1,z} \\ & = 2c \frac{z^{1/2}(z-1)}{z^{1/2} + 1} \varphi_{1,z}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$z s_{1,zz} + k s_{1,z} = 0. \quad (4.16)$$

Fazendo o mesmo para a equação de Klein-Gordon, temos

$$\begin{aligned} & 2z(1-z)\varphi_{1,zz} + [1 + 2k - (3 + 2k)z]\varphi_{1,z} - k\varphi_1 \\ & + c \frac{(z^{1/2} - 1)}{z^{1/2} + 1} s_{1,z} + c \frac{[(k-1)z^{1/2} + k]}{z^{1/2}(z^{1/2} + 1)^2} s_1 = 0. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Antes de procedermos à análise completa das perturbações, encontramos os modos de calibre correspondentes. Sob as seguintes transformações de coordenadas

$$\bar{u} \rightarrow \bar{u} + \epsilon \xi_1(\bar{u}), \quad \bar{v} \rightarrow \bar{v} + \epsilon \xi_2(\bar{v}), \quad (4.18)$$

são geradas perturbações da forma

$$\begin{aligned} \delta\sigma(\bar{u}, \bar{v}) &\equiv \epsilon \sigma_1(z) e^{k\tau} = \frac{\epsilon}{2 \left[1 + \left(\frac{\bar{v}}{\bar{u}}\right)^{1/2}\right]} \left\{ \chi \left[1 - \left(\frac{\bar{v}}{\bar{u}}\right)^{1/2}\right] \left[\frac{\xi_1(\bar{u})}{\bar{u}} - \frac{\xi_2(\bar{v})}{\bar{v}}\right] \right. \\ &\quad \left. + \left[1 + \left(\frac{\bar{v}}{\bar{u}}\right)^{1/2}\right] \left[\xi_1(\bar{u})_{,\bar{u}} + \xi_2(\bar{v})_{,\bar{v}}\right] \right\}, \\ \delta r(\bar{u}, \bar{v}) &\equiv \epsilon(-\bar{u}) s_1(z) e^{k\tau} = \epsilon [\xi_2(\bar{v}) - \xi_1(\bar{u})], \\ \delta\phi(\bar{u}, \bar{v}) &\equiv \epsilon \varphi_1(z) e^{k\tau} = \epsilon c \frac{1}{1 + \left(\frac{\bar{v}}{\bar{u}}\right)^{1/2}} \left[\left(\frac{\bar{v}}{\bar{u}}\right)^{1/2} \frac{\xi_2(\bar{v})}{\bar{v}} + \frac{\xi_1(\bar{u})}{\bar{u}} \right], \end{aligned} \quad (4.19)$$

nas quais $\xi_1(\bar{u})$ e $\xi_2(\bar{v})$ são funções arbitrárias e $\chi \equiv c^2$. Para que as perturbações possuam a forma da Eq.(4.8), devemos escolher

$$\xi_1(\bar{u}) = -s_1^0 (-\bar{u})^{1-k}, \quad \xi_2(\bar{v}) = \beta (-\bar{v})^{1-k}. \quad (4.20)$$

nas quais β e s_1^0 são constantes arbitrárias. Então, as soluções das equações de perturbação devidas às transformações de calibre, Eq.(4.18), são dadas por

$$\begin{aligned} s_1(z) &= \beta z^{1-k} + s_1^0, \\ \sigma_1(z) &= \frac{1}{2(1+z^{1/2})} \left[\chi (1-z^{1/2}) (s_1^0 + \beta z^{-k}) \right. \\ &\quad \left. + (1-k)(1+z^{1/2}) (s_1^0 - \beta z^{-k}) \right], \\ \varphi_1(z) &= -\frac{c\beta}{1+z^{1/2}} (z^{1/2-k} - \beta^{-1} s_1^0). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Da Eq.(4.16), temos

$$s_1(z) = \begin{cases} \beta \ln z + s_1^0, & k = 1, \\ \beta z^{1-k} + s_1^0, & k \neq 1. \end{cases} \quad (4.22)$$

Antes de resolvermos o restante das equações diferenciais, Eqs.(4.13)–(4.15) e (4.17), consideraremos as condições de contorno.

O tratamento aqui utilizado é idêntico ao dado na seção 4.3 de [53]. Como podemos ver na Fig. 3.4, a Região *II* do espaço-tempo possui dois contornos: a origem do sistema de coordenadas em $z = 1$ e o horizonte auto-similar em $z = 0$. Assim como foi feito em [53], escolhemos $z = 1$ e $z = 0$ como as superfícies sobre as quais as condições de contorno serão impostas, porém, com uma diferença em $z = 0$, já que, como mostrado anteriormente, a extensão das soluções de fundo através desta superfície será analítica somente quando n for um número inteiro ímpar. Desta forma, exceto no caso em que n é um número inteiro ímpar, não há razão para exigirmos que as perturbações também as sejam através da superfície $z = 0$. Portanto, a fim de impormos propriamente as condições de contorno, assim como fizemos na subseção 3.2.1, temos que distinguir os casos $n = 2m + 1$ e $n \neq 2m + 1$, com $m = 0, 1, 2, \dots$

Quando $n = 2m + 1$, as soluções de fundo são analíticas através da hipersuperfície $z = 0$.

É natural assumirmos que $z = 1$, centro das soluções de fundo, continuará sendo a origem do sistema de coordenadas mesmo após o espaço-tempo ser perturbado, isto é, $s_1(z = 1) = 0$. Além disso, pelo fato de as soluções de fundo serem livres de singularidades na origem na Região *II*, o espaço-tempo perturbado também deverá permanecer regular. Pode ser mostrado que este será o caso somente se $\sigma_1(z)$ e a quantidade $[(1 - z)\varphi_{1,z} - 2k\varphi_1]$ permanecerem finitas. Resumindo, na origem das coordenadas, devemos ter

$$\begin{aligned} s_1(z)|_{z=1} &= 0, \\ \sigma_1(z)|_{z=1} &\sim \text{finito}, \\ \left\{ (1 - z) \frac{d\varphi_1(z)}{dz} - 2k\varphi_1(z) \right\} \Big|_{z=1} &\sim \text{finito}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

O outro contorno em $z = 0$ (ou $\bar{v} = 0$), representa o horizonte auto-similar. Como nenhuma matéria passa da Região *I* para a Região *II*, deveríamos poder dizer que

$$\phi_{,\bar{v}} = 0 \quad (4.24)$$

quando $\bar{v} \rightarrow 0^-$. Contudo, pode ser mostrado que nem mesmo as soluções de fundo satisfazem a esta condição. De fato, quando $\bar{v} \rightarrow 0$, temos

$$\frac{\partial \phi_0(\bar{u}, \bar{v})}{\partial \bar{v}} = \frac{c}{(-\bar{u}\bar{v})^{1/2} \alpha(1+z^{1/2})} \rightarrow \infty. \quad (4.25)$$

Porém, utilizando uma escolha adequada de coordenadas \tilde{v} , esta condição se satisfaz, isto é, $\phi_{0,\tilde{v}} \rightarrow 0$, quando $\tilde{v} \rightarrow 0$, ela é equivalente a $z^\chi \varphi_1(z)_{,z} \rightarrow 0$.

Para as condições de contorno sobre os outros campos em $z = 0$, devemos lembrar o fato de que a extensão das soluções de fundo da Região *I* para a Região *II* é analítica. A fim de que haja consistência entre os espaços-tempos perturbado e não-perturbado, assumiremos que as perturbações também são analíticas através de $z = 0$. Logo, as condições de contorno através de $z = 0$ são dadas por

$$\begin{aligned} s_1(z), \sigma_1(z) \text{ e } \varphi_1(z) \text{ são analíticas em } \bar{v} \\ z^\chi \frac{d\varphi_1(z)}{dz} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Particularmente, pode ser mostrado que, para qualquer dado m , estas soluções de fundo possuem N modos instáveis, tal que N é dado por

$$N = n - 3 = 2(m - 1). \quad (4.27)$$

Assim, as soluções com $n = 1, 3$ (ou $m = 0, 1$) são estáveis, enquanto que as com $n \geq 5$ (ou $m \geq 2$) não são estáveis. Desta forma, todas elas possuem mais de um modo instável. Portanto, nenhuma destas soluções é crítica.

Quando $n \neq 2m + 1$, as soluções de fundo não são analíticas através da hipersuperfície $z = 0$ e, como já dito anteriormente, não há razão para exigirmos que as perturbações também sejam analíticas. Em vez disso, requeremos que s_1 , σ_1 e φ_1 sejam finitos nesta hipersuperfície. Além do que, estipulamos que nenhuma matéria emerge do horizonte auto-similar. Conseqüentemente, temos as seguintes condições:

$$\begin{aligned} s_1(0), \sigma_1(0) \text{ e } \varphi_1(0) \text{ são todas finitas,} \\ \lim_{z \rightarrow 0} z^\chi \frac{d\varphi_1(z)}{dz} = 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

As condições de contorno no eixo de simetria $r = 0$ (ou $z = 1$) são as mesmas que as dadas na Eq.(4.23).

Uma vez que as condições de contorno foram determinadas, podemos estudar os dois casos $k = 1$ e $k \neq 1$ separadamente.

(a) $k = 1$: Neste caso, da Eq.(4.22), temos

$$s_1(z) = \beta \ln z. \quad (4.29)$$

em que, ao escrevermos a expressão acima, escolhemos $s_1^0 = 0$ tal que a condição de contorno $s_1(z = 1) = 0$ é satisfeita. Inserindo a Eq.(4.29) nas Eqs.(4.13)–(4.15) e (4.17), temos que somente duas das quatro equações são independentes

$$\begin{aligned} \sigma_1(z) = c(1 - z^{1/2}) & \left[z^{1/2}(1 + z^{1/2}) \frac{d\varphi_1(z)}{dz} + \varphi_1 \right] \\ & - \frac{\beta}{2z(1 + z^{1/2})^2} \left[(1 - \chi)(1 + z^2) + 2(1 + \chi)z \right. \\ & \left. + 2z^{1/2}(1 + z) \right], \end{aligned} \quad (4.30)$$

$$z(1 - z) \frac{d^2\varphi_1}{dz^2} + [\gamma - (a + b + 1)z] \frac{d\varphi_1}{dz} - ab\varphi_1 = f(z), \quad (4.31)$$

nas quais

$$\begin{aligned} a = 1, \quad b = \frac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{3}{2}, \\ f(z) \equiv \frac{c\beta}{2z(1 + z^{1/2})^2} \left[(1 - z) - z^{1/2} \ln z \right]. \end{aligned} \quad (4.32)$$

A Eq.(4.31) é uma equação hipergeométrica inhomogênea [105] e a solução geral correspondente é dada por

$$\varphi_1(z) = \varphi_1^h(z) + \varphi_1^s(z), \quad (4.33)$$

em que $\varphi_1^s(z)$ é uma solução particular da Eq.(4.31) e $\varphi_1^h(z)$ é a solução geral associada à equação homogênea,

$$z(1 - z) \frac{d^2\varphi_1}{dz^2} + [\gamma - (a + b + 1)z] \frac{d\varphi_1}{dz} - ab\varphi_1 = 0. \quad (4.34)$$

A solução geral $\varphi_1^h(z)$ pode ser escrita como uma combinação linear das duas soluções independentes φ_1^1 e φ_1^2

$$\varphi_1^h(z) = c_1 \varphi_1^1(z) + c_2 \varphi_1^2(z), \quad (4.35)$$

em que c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, φ_1^1 e φ_1^2 são dadas por

$$\begin{aligned} \varphi_1^1 &= 2F\left(1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z\right) = \frac{1}{z^{1/2}} \ln\left(\frac{1+z^{1/2}}{1-z^{1/2}}\right), \\ \varphi_1^2 &= z^{-1/2} F\left(\frac{1}{2}, 0; \frac{1}{2}; z\right) = z^{-1/2}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

com $F(a, b; \gamma; z)$ denotando a função hipergeométrica. Uma solução particular da Eq.(4.31) pode ser encontrada e é dada por

$$\varphi_1^s(z) = \frac{c\beta}{1+z^{1/2}} \left[\ln z - 2 \left(\frac{1+z^{1/2}}{z^{1/2}} \right) \ln\left(\frac{1+z^{1/2}}{2}\right) \right]. \quad (4.37)$$

Das Eqs.(4.32)–(4.37), podemos mostrar que quando $z \rightarrow 1$, temos

$$\varphi_1(z) \approx \frac{1}{z^{1/2}} \left[c_1 \ln\left(\frac{1+z^{1/2}}{1-z^{1/2}}\right) + c_2 \right]. \quad (4.38)$$

Como um resultado, as condições de contorno para φ_1 na Eq.(4.23) são válidas somente se $c_1 = 0$ enquanto que a condição para $\sigma_1(z)$ em $z = 1$ não impõe nenhuma restrição adicional.

Em $z = 0$, as condições de contorno sobre $s_1(z)$ e $\sigma_1(z)$, Eqs.(4.29) e (4.37), requerem $c_2 = \beta = 0$. Portanto, no caso em que $k = 1$, as condições de contorno dadas pelas Eqs.(4.23) e (4.26) eliminam todas as perturbações.

(b) $k \neq 1$: Neste caso, temos

$$s_1(z) = c_0 (z^{1-k} - 1), \quad (4.39)$$

em que $c_0 \equiv \beta$. Note que agora a constante k pode ser complexa, bem como c_0 . Substituindo a Eq.(4.39) nas Eqs.(4.13)–(4.15) e (4.17), novamente temos

somente duas equações são independentes, que podem ser escritas como

$$k \sigma_1(z) = \frac{\chi}{c} (1 - z^{1/2}) \left[z^{1/2} (1 + y^{1/2}) \frac{d\varphi_1(z)}{dz} + k\varphi_1 \right] - \frac{c_0(1-k)}{2(1+z^{1/2})} [(k+\chi)(1+z^{1/2-k}) + (k-\chi)(z^{1/2} + z^{-k})], \quad (4.40)$$

$$z(1-z) \frac{d^2\varphi_1}{dz^2} + [\gamma - (a+b+1)z] \frac{d\varphi_1}{dz} - ab\varphi_1 = f(z), \quad (4.41)$$

porém agora com

$$a = k, \quad b = \frac{1}{2}, \quad \gamma = k + \frac{1}{2},$$

$$f(z) \equiv \frac{c\beta}{2z^{k+1/2}(1+z^{1/2})^2} [(1-k)(1-z^k)z^{1/2} - kz(1-z^{k-1})]. \quad (4.42)$$

Similarmente ao caso anterior, a solução geral da Eq.(4.41) pode ser escrita da mesma forma que as dadas pelas Eqs.(4.33)-(4.35), mas com φ_1^1 e φ_1^2 agora dadas por

$$\varphi_1^1 = F\left(\frac{1}{2}, k; k + \frac{1}{2}; z\right),$$

$$\varphi_1^2 = F\left(\frac{1}{2}, k; 1; 1 - z\right). \quad (4.43)$$

Além disso, pode ser mostrado que uma solução particular da Eq.(4.41) é dada por

$$\varphi_1^s(z) = -c\beta \frac{1 + z^{1/2-k}}{1 + z^{1/2}}. \quad (4.44)$$

Deste modo, a solução geral para $\varphi_1(z)$ no presente caso é dada por

$$\varphi_1(z) = c_1 F\left(\frac{1}{2}, k; k + \frac{1}{2}; z\right) + c_2 F\left(\frac{1}{2}, k; 1; 1 - z\right) - c\beta \frac{1 + z^{1/2-k}}{1 + z^{1/2}}. \quad (4.45)$$

Das Eqs.(4.39), (4.40) e (4.45) podemos ver que quando $c_1 = c_2 = 0$, as perturbações reduzem-se àquelas dadas pela Eq.(4.21), as quais são puramente modos de calibre. Assim, para excluirmos os modos de calibre do espectro das perturbações, na seqüência, restringir-nos-emos às soluções para as quais temos

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 \neq 0. \quad (4.46)$$

Considerando as condições de contorno na origem, $z = 1$, temos as seguintes relações de limite quando $z \rightarrow 1$

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{2}, k; k + \frac{1}{2}; z\right) &\rightarrow -\frac{1}{2}(2k-1)A(k)\ln(1-z) + A_1(z; k), \\ F\left(\frac{3}{2}, k+1; k + \frac{3}{2}; z\right) &\rightarrow \frac{1}{2}(4k^2-1)A(k)\left[\frac{2}{k(1-z)} + \ln(1-z)\right] \\ &\quad + A_2(z; k) \end{aligned} \quad (4.47)$$

nas quais $A(k) \equiv \frac{\Gamma(k-\frac{1}{2})}{\Gamma(k)\Gamma(\frac{1}{2})}$; $A_1(z; k)$ e $A_2(z; k)$ são partes finitas das funções hipergeométricas no limite quando $z \rightarrow 1$. Logo, das Eqs.(4.45)–(4.47) e da relação

$$\frac{d}{dz}F(a, b; \gamma; z) = \frac{ab}{\gamma}F(a+1, b+1; \gamma+1; z), \quad (4.48)$$

as condições de contorno dadas pela Eq.(4.23) em $z = 1$ serão satisfeitas, contanto que

$$c_1 = 0. \quad (4.49)$$

Para as condições de contorno em $z = 0$, como as dadas pela Eq.(4.26), primeiramente devemos lembrar da imposição de analiticidade no espaço-tempo estendido, dado pelo sistema de coordenadas com barra. Seguindo o mesmo procedimento, observamos que $z = \bar{v}/\bar{u} = (v/u)^{2n}$ e

$$s_1(z) = c_0 \left[\left(\frac{v}{u}\right)^{2n(1-k)} - 1 \right]. \quad (4.50)$$

Assim, para que $s_1(z)$ analítica através do contorno $z = 0$ ($\bar{v} = 0$), devemos ter

$$k = \frac{\omega}{2n} < 1, \quad (4.51)$$

em que ω é um número positivo inteiro.¹ Devido às propriedades das funções hipergeométricas, é conveniente considerarmos os subcasos $k = l + \frac{1}{2}$ e $k \neq l + \frac{1}{2}$ separadamente, nos quais l é um número inteiro não-negativo.

¹Em princípio, ω também poderia ser um número negativo inteiro, mas como aqui estamos interessados em modos instáveis com $k > 0$, restringimo-nos a $\omega > 0$.

(b.1) $k = l + \frac{1}{2}$: Neste caso, quando $z \rightarrow 0$, temos que

$$F\left(\frac{1}{2}, k; 1; 1 - z\right) \rightarrow \frac{(l-1)! z^{-l}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + l\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \sum_{p=0}^{l-1} \frac{(a-l)_p (b-l)_p}{(1-l)_p p!} z^p - \frac{(-1)^l}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - l\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \ln z. \quad (4.52)$$

Inserindo a expressão acima na Eq.(4.45) e considerando a Eq.(4.49), vemos que a condição em que $\varphi_1(z)$ deve ser analítica através da hipersuperfície $z = 0$ será satisfeita somente para $\text{Re}(k) < \frac{1}{2}$ e $c_2 = 0$. Pelo fato de que as condições de contorno quando $z = 0$ nos levam a fazer $c_1 = c_2 = 0$, vemos que as perturbações correspondentes são puramente modos de calibre. Desta forma, descartaremos o caso em que $k = l + \frac{1}{2}$.

(b.2) $k \neq l + \frac{1}{2}$: Neste caso, pode ser mostrado que no limite em que $z \rightarrow 0$

$$F\left(\frac{3}{2}, k+1; 2; 1 - z\right) \rightarrow k^{-1} A(k) [(2k-1) z^{-1/2-k} - (1-k) z^{1/2-k}] + A_3(z; k) \quad (4.53)$$

na qual $A_3(z; k)$ é uma parte finita da função hipergeométrica no limite em que $z \rightarrow 0$. Inserindo-a na solução geral para $\varphi_1(z)$, Eq.(4.45), juntamente com o fato de que $c_1 = 0$, temos que

$$\begin{aligned} \varphi_1(z) &\rightarrow -[c_2 A(k) - c_0 c] z^{1/2-k}, \quad (4.54) \\ \frac{d\varphi_1(z)}{dz} &\rightarrow \frac{1}{2} \{cc_0 [z^{-1/2} + 2(1-k) z^{-k}] + c_2 (2k-1) A(k) z^{-1/2-k} \\ &\quad + [cc_0 (10k-7) - c_2 (1-k) A(k)] z^{1/2-k}\} + A_4(z; k) \quad (4.55) \end{aligned}$$

quando $z \rightarrow 0$, em que $A_4(z; k)$ é a parte finita. Agora, podemos ver que a condição de contorno $z^\chi \varphi_1(z)_{,z} \rightarrow 0$ em $z = 0$ será satisfeita somente se

$$\text{Re}(k) < \chi - \frac{1}{2} \text{ e } \chi > \frac{1}{2}, \quad (4.56)$$

já que aqui exigimos que $c_2 \neq 0$. Caso contrário, as perturbações seriam de novo puramente modos de calibre.

Ainda resta considerar o efeito da analiticidade para $\sigma_1(z)$ em $z = 0$. Da Eq.(4.53) e do comportamento assintótico de

$$F\left(\frac{1}{2}, k; 1; 1 - z\right) \rightarrow A(k) z^{1/2-k} + A_5(k), \quad (4.57)$$

quando $z \rightarrow 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \sigma_1(z) \rightarrow & \frac{\chi}{c} [A(k) c_2 - c c_0] z^{1/2-k} \\ & + \frac{1}{2} [A(k) \chi (2k - 1) c_2 - (1 - \chi - k) c_0] z^{-k} + \sigma_1^0 \end{aligned} \quad (4.58)$$

quando $z \rightarrow 0$. Portanto, para que $\sigma_1(z)$ seja analítica através da hipersuperfície $z = 0$, devemos assumir

$$\text{Re}(k) < \frac{1}{2} \text{ e } c_2 = \frac{1 - \chi - k}{\chi (2k - 1) A(k)} c_0. \quad (4.59)$$

Claramente, para qualquer dado c (ou $\chi \equiv c^2$), existe um número infinito de modos com $\text{Re}(k) > 0$ que satisfazem às condições dadas pelas Eqs.(4.46), (4.56) e (4.59). Portanto, todas estas soluções são instáveis com respeito às perturbações lineares. Visto que cada uma delas possui um número infinito de modos instáveis, as soluções deste caso também não podem ser consideradas como críticas.

Em suma, após serem linearmente perturbadas, vimos que as soluções auto-similares do fluido rígido dado pela Eq.(4.2) ou são estáveis ($n = 1, 3$) ou possuem mais de um modo instável (demais valores de n inteiro positivo). Portanto, de acordo com a definição de solução crítica, nenhuma delas apresenta esta característica.

Capítulo 5

Conclusões Gerais e Perspectivas

Nesta tese, primeiramente, apresentamos um breve resumo da TRG, seguido de uma noção de como ocorre o processo de colapso gravitacional. Ainda no capítulo introdutório, apresentamos e discutimos fenômenos críticos em colapso gravitacional e auto-similaridade na TRG.

Iniciamos o capítulo 2 com um estudo de gravitação em $2 + 1$ dimensões para depois nos restringirmos a espaços-tempos com simetria circular, quando definimos horizontes aparentes em termos das expansões de geodésicas nulas ortogonais aos horizontes e classificamo-los em externo, degenerado, interno, futuro e passado. Buracos negros foram definidos pela existência de horizontes aparentes futuros externos ou degenerados.

No capítulo 3, estudamos soluções das equações de campo de Einstein com auto-similaridade cinemática para um fluido perfeito. No caso de auto-similaridade do tipo de ordem zero, foi mostrado que a única solução fisicamente aceitável com equação de estado $p = K\rho$, em que K é uma constante, é a solução de de Sitter tridimensional. No caso de soluções com auto-similaridade do primeiro tipo (auto-similaridade homotética), notou-se que a única equação de estado que possui a forma $p = p(\rho)$ e é consistente com este tipo de auto-similaridade é a mesma aplicada anteriormente ao caso do tipo de ordem zero, implicando uma equação mestre dada pela Eq.(3.50). Vimos que algumas soluções para fluido

rígido ($K = 1$) representam formação de singularidades do tipo-luz (ou nulas), enquanto que outras, buracos negros. No caso de poeira ($K = 0$), nenhuma das soluções representa colapso gravitacional. Para $K \neq 0, 1$, somente soluções particulares foram encontradas e foi mostrado que elas são de FRW em $2 + 1$ dimensões. Ao caso de auto-similaridade do segundo tipo, também aplicamos a mesma equação de estado utilizada nos outros casos. Foi mostrado que o fluido se move ao longo de uma geodésica radial do tipo-tempo. Neste caso, todas as soluções, ou reduzem-se às mesmas soluções de FRW encontradas no caso de auto-similaridade homotética ou não representam colapso gravitacional.

A ambigüidade da classificação da auto-similaridade cinemática encontrada na seção 3.3 é um resultado muito surpreendente pelo fato de mostrar que um espaço-tempo pode possuir dois campos vetoriais, denotados por $\xi^\mu_{(1)}$ e $\xi^\mu_{(2)}$, em que $\xi^\mu_{(1)}$ descreve a auto-similaridade do primeiro tipo, enquanto $\xi^\mu_{(2)}$, a do segundo tipo. Esta ambigüidade possui profundas implicações nos estudos de fenômenos críticos em colapso gravitacional. A fim de esclarecermos isto, vamos primeiro lembrar da classificação de auto-similaridades feita em hidrodinâmica [20, 21]. Para sermos mais específicos, vamos considerar as equações de difusão e de Barenblatt. Para a primeira, a solução crítica possui auto-similaridade do primeiro tipo, enquanto que para a última, a auto-similaridade apresentada é a do segundo tipo. Esta classificação é única. De fato, é exatamente por causa desta diferença que as propriedades destes problemas próximas aos seus pontos críticos são bastante diferentes. Em outras palavras, diferentes tipos de auto-similaridade possuem diferentes fenômenos críticos. Isto é verdade não somente a estes dois problemas específicos, mas também no caso geral. Se aplicarmos as mesmas idéias ao estudo de fenômenos críticos em colapso gravitacional, veremos que elas podem não funcionar do mesmo modo, já que na TRG, como acabamos de dizer, uma mesma solução pode possuir mais de um tipo de auto-similaridade.

É importante dizer que os resultados obtidos nesta tese não contradizem o mostrado recentemente por Ida [96], no qual uma teoria gravitacional em $2 + 1$

dimensões que satisfaz a condição de energia dominante proíbe a existência de buraco negros, pois aqui todos os buracos negros possuem horizontes aparentes degenerados. Ida definiu buracos negros pela existência de horizontes aparentes externos somente.

No capítulo 4, perturbamos as soluções auto-similares do primeiro tipo para o caso de um fluido rígido, representantes de colapso gravitacional. Como visto, todas as outras soluções encontradas nesta tese são de FRW, de de Sitter ou não representam colapso gravitacional. Para tal, a fim de simplificarmos o nosso trabalho, utilizamos o fato de que um fluido rígido equivale energeticamente a um campo escalar sem massa do tipo-tempo, estudado em [53]. As soluções são normalmente definidas somente na Região *II* e a Região *I* é uma extensão. Entretanto, esta extensão não é analítica para todas as soluções auto-similares. Particularmente, para as soluções com $n \neq m$, em que $m = 1, 2, \dots$, ela não pode ser analítica. Quando $n = 2m$, a extensão é analítica, porém o fluido rígido possui densidade de energia negativa e sua velocidade torna-se do tipo-tempo na extensão, o que é fisicamente inaceitável. Assim, uma extensão fisicamente aceitável para $n = 2m$ não seria analítica. Esta propriedade implica diferenças consideráveis quando consideramos condições de contorno no horizonte auto-similar para perturbações. Em particular, visto que as soluções de fundo não são analíticas através desta superfície, não há nenhuma razão para as perturbações também o serem. Além das perturbações não serem analíticas através do horizonte auto-similar, mostramos que as soluções de fundo não são estáveis e possuem um número infinito de modos instáveis para $n \neq 2m + 1$.

Quando $n = 2m + 1$, ao contrário do caso anterior, a extensão das soluções de fundo é analítica através do horizonte auto-similar. Neste caso, devemos requerer que suas perturbações lineares também sejam analíticas. Ao perturbarmos, vimos que para qualquer dado m , a solução auto-similar possui N modos instáveis, em que $N = n - 3 = 2(m - 1)$. Desta forma, soluções auto-similares com $m = 0, 1$ são estáveis, enquanto que as com $m \geq 2$ não são estáveis, e todas possuem mais

de um modo instável.

Resumindo, podemos dizer que todas as soluções auto-similares do fluido rígido dado pela Eq.(4.2) não são estáveis ao efetuarmos perturbações lineares, possuindo mais de um modo instável, exceto aquelas com $n = 1, 3$, que são estáveis. Visto que uma solução crítica, por definição, possui um e somente um modo instável, concluímos que nenhuma destas soluções auto-similares pode ser crítica, resultado que contrasta com seu correspondente em $3+1$ dimensões, onde a solução crítica possui auto-similaridade homotética [45, 106, 107].

Como conclusão geral, os resultados obtidos nesta tese mostram também claramente que, se fenômenos críticos ocorrem nas soluções de colapso gravitacional de fluido perfeito circularmente simétrico aqui encontradas, a solução crítica ou deve possuir auto-similaridade discreta ou não deve possuir auto-similaridade. No primeiro caso, o colapso é do Tipo II, enquanto que no outro, é do Tipo I. Certamente, também é possível que não exista colapso crítico para o caso de fluido perfeito. De qualquer forma, seria bastante interessante investigarmos estes problemas, a fim de encontrarmos uma resposta definitiva a estas questões.

Além da investigação proposta acima, como perspectivas para trabalhos futuros podemos ainda incluir rotação e fenômenos quânticos.

Apêndice A

Notações e Convenções

Métrica:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (\text{A.1})$$

Conexão métrica:

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\delta} (g_{\mu\delta,\nu} + g_{\nu\delta,\mu} - g_{\mu\nu,\delta}). \quad (\text{A.2})$$

Diferenciação covariante:

$$A^{\mu\dots}_{\nu\dots;\lambda} = A^{\mu\dots}_{\nu\dots,\lambda} + \Gamma^\mu_{\sigma\lambda} A^{\sigma\dots}_{\nu\dots} + \dots - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} A^{\mu\dots}_{\sigma\dots} - \dots \quad (\text{A.3})$$

Diferenciação de Lie:

$$\mathcal{L}_\xi A^{\mu\dots}_{\nu\dots} = \xi^\lambda A^{\mu\dots}_{\nu\dots,\lambda} - A^{\lambda\dots}_{\nu\dots} \xi^\mu_{,\lambda} - \dots + A^{\mu\dots}_{\lambda\dots} \xi^\lambda_{,\nu} + \dots \quad (\text{A.4})$$

Tensor de Riemann ou de curvatura:

$$R^\sigma_{\mu\nu\lambda} \equiv \Gamma^\sigma_{\mu\lambda,\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\nu,\lambda} + \Gamma^\sigma_{\delta\nu} \Gamma^\delta_{\mu\lambda} - \Gamma^\sigma_{\delta\lambda} \Gamma^\delta_{\mu\nu}, \quad (\text{A.5})$$

$$R_{\sigma\mu\nu\lambda} = -R_{\mu\sigma\nu\lambda} = -R_{\sigma\mu\lambda\nu}, \quad (\text{A.6})$$

$$R_{\sigma\mu\nu\lambda} = R_{\nu\lambda\sigma\mu}, \quad (\text{A.7})$$

$$R_{\sigma\mu\nu\lambda} + R_{\sigma\lambda\mu\nu} + R_{\sigma\nu\lambda\mu} = 0. \quad (\text{A.8})$$

Identidades de Bianchi

$$R^{\sigma}{}_{\mu\nu\lambda;\rho} + R^{\sigma}{}_{\mu\rho\nu;\lambda} + R^{\sigma}{}_{\mu\lambda\rho;\nu} = 0. \quad (\text{A.9})$$

Tensor de Ricci:

$$R_{\mu\lambda} \equiv g^{\sigma\nu} R_{\sigma\mu\nu\lambda} = R^{\delta}{}_{\mu\delta\lambda}. \quad (\text{A.10})$$

Escalar de Ricci:

$$R \equiv g^{\sigma\lambda} R_{\sigma\lambda} = R^{\lambda}{}_{\lambda}. \quad (\text{A.11})$$

Tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (\text{A.12})$$

Equações de campo de Einstein:

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (\text{A.13})$$

Conservação local do tensor de energia-momento:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0. \quad (\text{A.14})$$

Apêndice B

Espaços-Tempos Circularmente Simétricos com Auto-Similaridade Cinemática

A métrica geral de espaços-tempos $(2 + 1)$ -dimensionais com simetria circular pode ser expressa na forma,

$$ds^2 = \lambda^2 [e^{2\Phi(t,r)} dt^2 - e^{2\Psi(t,r)} dr^2 - r^2 S^2(t,r) d\theta^2], \quad (\text{B.1})$$

Então, é fácil de mostrarmos que as coordenadas $\{x^\mu\} = \{t, r, \theta\}$, a conexão métrica, $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$, o tensor de Riemann, $R^\sigma_{\mu\nu\lambda}$, de Ricci, $R_{\mu\nu}$, e de Einstein, $G_{\mu\nu}$, são todos adimensionais, enquanto que o escalar de Ricci, R^λ_{λ} , possui dimensão de λ^{-2} e o de Kretschmann, $R^{\sigma\mu\nu\lambda}R_{\sigma\mu\nu\lambda}$, λ^{-4} .

Para a métrica dada pela Eq.(B.1), os componentes não-nulos da conexão métrica são dados por

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{00} &= \Phi_{,t}, & \Gamma^0_{01} &= \Phi_{,r}, & \Gamma^0_{11} &= e^{2(\Psi-\Phi)}\Psi_{,t}, & \Gamma^0_{22} &= r^2 e^{-2\Phi} S S_{,t}, \\ \Gamma^1_{00} &= e^{2(\Phi-\Psi)}\Phi_{,r}, & \Gamma^1_{01} &= \Psi_{,t}, & \Gamma^1_{11} &= \Psi_{,r}, & \Gamma^1_{22} &= -r e^{-2\Psi} S (S + r S_{,r}), \\ \Gamma^2_{02} &= \frac{S_{,t}}{S}, & \Gamma^2_{12} &= \frac{S + r S_{,r}}{r S}, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

B.1 Espaços-Tempos com Auto-Similaridade do Tipo de Ordem Zero 86

e o tensor de Einstein possui os seguintes componentes não-nulos

$$\begin{aligned}
 G_{tt} &= \frac{e^{-2\Psi}}{rS} \{ r e^{2\Psi} S_{,t} \Psi_{,t} - e^{2\Phi} [r S_{,rr} + 2S_{,r} - (S + r S_{,r}) \Psi_{,r}] \}, \\
 G_{tr} &= - \frac{1}{rS} [r S_{,tr} - S_{,t} (r \Phi_{,r} - 1) - (r S_{,r} + S) \Psi_{,t}], \\
 G_{rr} &= \frac{e^{-2\Phi}}{rS} [e^{2\Phi} (r S_{,r} + S) \Phi_{,r} - r e^{2\Psi} (S_{,tt} - \Phi_{,t} S_{,t})], \\
 G_{\theta\theta} &= - r^2 S^2 \{ e^{-2\Phi} [\Psi_{,tt} + (\Psi_{,t} - \Phi_{,t}) \Psi_{,t}] \\
 &\quad - e^{-2\Psi} [\Phi_{,rr} + (\Phi_{,r} - \Psi_{,r}) \Phi_{,r}] \}. \tag{B.3}
 \end{aligned}$$

B.1 Espaços-Tempos com Auto-Similaridade do Tipo de Ordem Zero

A fim de estudarmos soluções com auto-similaridade do tipo de ordem zero, introduziremos primeiramente as variáveis auto-similares, x e τ através das relações,

$$x = \ln r - t, \quad \tau = t, \tag{B.4}$$

ou inversamente

$$t = \tau, \quad r = e^{x+\tau}. \tag{B.5}$$

Logo, para uma dada função $f(t, r)$, temos que

$$\begin{aligned}
 f_{,t} &= f_{,\tau} - f_{,x}, & f_{,r} &= \frac{1}{r} f_{,x}, \\
 f_{,tr} &= -\frac{1}{r} (f_{,xx} - f_{,\tau x}), & f_{,rr} &= \frac{1}{r^2} (f_{,xx} - f_{,x}), \\
 f_{,tt} &= f_{,\tau\tau} - 2f_{,\tau x} + f_{,xx}. \tag{B.6}
 \end{aligned}$$

B.1 Espaços-Tempos com Auto-Similaridade do Tipo de Ordem Zero 87

Substituindo estas equações na Eq.(B.3), temos que os componentes não-nulos do tensor de Einstein para este caso são dados por

$$\begin{aligned}
G_{tt} &= -\frac{e^{-2\Psi}}{r^2 S} \left\{ e^{2\Phi} [S_{,xx} + S_{,x} - \Psi_{,x} (S_{,x} + S)] \right. \\
&\quad \left. - r^2 e^{2\Psi} (S_{,\tau} - S_{,x}) (\Psi_{,\tau} - \Psi_{,x}) \right\}, \\
G_{tr} &= \frac{1}{r S} [S_{,xx} - S_{,\tau x} + (S_{,x} + S) (\Psi_{,\tau} - \Psi_{,x}) + (S_{,\tau} - S_{,x}) (\Phi_{,x} - 1)], \\
G_{rr} &= \frac{e^{-2\Phi}}{r^2 S} \left\{ e^{2\Phi} \Phi_{,x} (S_{,x} + S) - r^2 e^{2\Psi} [S_{,\tau\tau} - 2S_{,\tau x} + S_{,xx} \right. \\
&\quad \left. + (S_{,\tau} - S_{,x}) (\Phi_{,x} - \Phi_{,\tau})] \right\}, \\
G_{\theta\theta} &= S^2 e^{-2(\Phi+\Psi)} \left\{ e^{2\Phi} [\Phi_{,xx} + \Phi_{,x} (\Phi_{,x} - \Psi_{,x} - 1)] \right. \\
&\quad \left. - r^2 e^{2\Psi} [\Psi_{,xx} + \Psi_{,\tau\tau} - 2\Psi_{,\tau x} \right. \\
&\quad \left. - (\Psi_{,\tau} - \Psi_{,x}) (\Phi_{,\tau} - \Psi_{,\tau} - \Phi_{,x} + \Psi_{,x})] \right\}. \tag{B.7}
\end{aligned}$$

Para as soluções auto-similares, os coeficientes métricos, Φ , Ψ e S , são funções somente de x , tais que

$$\Phi(\tau, x) = \Phi(x), \quad \Psi(\tau, x) = \Psi(x), \quad S(\tau, x) = S(x). \tag{B.8}$$

Logo, as derivadas destas funções em relação à variável τ anulam-se e a Eq.(B.7), para o caso de espaços-tempos circularmente simétricos com auto-similaridade cinemática do tipo de ordem zero, é reduzida a

$$\begin{aligned}
G_{tt} &= -\frac{e^{-2\Psi}}{r^2} \left\{ e^{2\Phi} [y_{,x} + (y+1)(y - \Psi_{,x})] - r^2 e^{2\Psi} \Psi_{,x} y \right\}, \\
G_{tr} &= \frac{1}{r} [y_{,x} + (y+1)(y - \Psi_{,x}) - y\Phi_{,x}], \\
G_{rr} &= \frac{e^{-2\Phi}}{r^2} \left\{ e^{2\Phi} \Phi_{,x} (y+1) - r^2 e^{2\Psi} [y_{,x} + y(y - \Phi_{,x})] \right\}, \\
G_{\theta\theta} &= S^2 e^{-2(\Phi+\Psi)} \left\{ e^{2\Phi} [\Phi_{,xx} + \Phi_{,x} (\Phi_{,x} - \Psi_{,x} - 1)] \right. \\
&\quad \left. - r^2 e^{2\Psi} [\Psi_{,xx} - \Psi_{,x} (\Phi_{,x} - \Psi_{,x})] \right\}, \tag{B.9}
\end{aligned}$$

em que

$$y \equiv \frac{S_{,x}}{S}. \tag{B.10}$$

B.2 Espaços-Tempos com Auto-Similaridade do Primeiro e do Segundo Tipos

A fim de estudarmos estes tipos de soluções auto-similares, introduziremos primeiramente as variáveis auto-similares, x e τ , tais que

$$x = \ln \left[\frac{r}{(-t)^{\frac{1}{\alpha}}} \right], \quad \tau = -\ln(-t), \quad (\text{B.11})$$

ou inversamente,

$$r = e^{(\alpha x - \tau)/\alpha}, \quad t = -e^{-\tau}, \quad (\text{B.12})$$

em que α é uma constante adimensional. Quando $\alpha = 1$, os espaços-tempos correspondentes são ditos como possuindo auto-similaridade do primeiro tipo ou homotética. Quando $\alpha \neq 0, 1$, são ditos como possuindo auto-similaridade do segundo tipo.

Para qualquer dada função $f(t, r)$, agora temos que

$$\begin{aligned} f_{,t} &= -\frac{1}{\alpha t} (\alpha f_{,\tau} + f_{,x}), & f_{,r} &= \frac{1}{r} f_{,x}, \\ f_{,tr} &= -\frac{1}{\alpha tr} (\alpha f_{,\tau x} + f_{,xx}), & f_{,rr} &= \frac{1}{r^2} (f_{,xx} - f_{,x}), \\ f_{,tt} &= \frac{1}{\alpha^2 t^2} (\alpha^2 f_{,\tau\tau} + 2\alpha f_{,\tau x} + f_{,xx} + \alpha^2 f_{,\tau} + \alpha f_{,x}). \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Substituindo estas equações na Eq.(B.3), temos que os componentes não-nulos

do tensor de Einstein para este caso são dados por

$$\begin{aligned}
 G_{tt} &= -\frac{1}{\alpha^2 r^2 S e^{2\Psi}} \left\{ \alpha^2 e^{2\Phi} [S_{,xx} + S_{,x} - \Psi_{,x} (S_{,x} + S)] \right. \\
 &\quad - \frac{r^2}{t^2} \Psi_{,x} S_{,x} e^{2\Psi} \\
 &\quad \left. - \frac{\alpha r^2}{t^2} e^{2\Psi} (\alpha \Psi_{,\tau} S_{,\tau} + \Psi_{,x} S_{,\tau} + \Psi_{,\tau} S_{,x}) \right\}, \\
 G_{tr} &= \frac{1}{\alpha t r S} \left\{ S_{,xx} - \Psi_{,x} (S_{,x} + S) - S_{,x} (\Phi_{,x} - 1) \right. \\
 &\quad \left. + \alpha [S_{,\tau x} - \Psi_{,\tau} (S_{,x} + S) - S_{,\tau} (\Phi_{,x} - 1)] \right\}, \\
 G_{rr} &= \frac{1}{\alpha^2 r^2 S e^{2\Phi}} \left\{ \alpha^2 e^{2\Phi} [\Phi_{,x} (S_{,x} + S)] \right. \\
 &\quad - \frac{r^2}{t^2} e^{2\Psi} (S_{,xx} - S_{,x} \Phi_{,x}) \\
 &\quad - \frac{\alpha r^2}{t^2} e^{2\Psi} \{ \alpha S_{,\tau\tau} + 2S_{,\tau x} - S_{,x} (\Phi_{,\tau} - 1) \\
 &\quad \left. - S_{,\tau} [\alpha (\Phi_{,\tau} - 1) + \Phi_{,x}] \} \right\}, \\
 G_{\theta\theta} &= \frac{S^2}{\alpha^2} \left\{ \alpha^2 e^{-2\Psi} [\Phi_{,xx} + \Phi_{,x} (\Phi_{,x} - \Psi_{,x} - 1)] \right. \\
 &\quad - \frac{r^2}{t^2} e^{-2\Phi} [\Psi_{,xx} - \Psi_{,x} (\Phi_{,x} - \Psi_{,x} - \alpha)] \\
 &\quad - \frac{\alpha r^2}{t^2} e^{-2\Phi} \{ \alpha \Psi_{,\tau\tau} + 2\Psi_{,\tau x} - \Psi_{,\tau} [\alpha (\Phi_{,\tau} - \Psi_{,\tau} - 1) + \Phi_{,x} - \Psi_{,x}] \\
 &\quad \left. - \Psi_{,x} (\Phi_{,\tau} - \Psi_{,\tau}) \} \right\}. \tag{B.14}
 \end{aligned}$$

Assim como no caso das soluções com auto-similaridade do tipo de ordem zero, para as soluções com auto-similaridade do primeiro e do segundo tipos, os coeficientes métricos também são funções somente de x , porém agora com x sendo dada pela Eq.(B.11) com $\alpha \neq 0$. Logo, a Eq.(B.14), para o caso de espaços-tempos circularmente simétricos com auto-similaridade cinemática do segundo

tipo, é reduzida a

$$\begin{aligned}
 G_{tt} &= \frac{1}{\alpha^2 t^2} \Psi_{,xy} - \frac{1}{r^2} e^{2(\Phi-\Psi)} [y_{,x} + (y+1)(y-\Psi_{,x})], \\
 G_{tr} &= \frac{1}{\alpha tr} [y_{,x} + (y+1)(y-\Psi_{,x}) - y\Phi_{,x}], \\
 G_{rr} &= -\frac{1}{\alpha^2 t^2} e^{2(\Psi-\Phi)} [y_{,x} + y(y-\Phi_{,x} + \alpha)] + \frac{1}{r^2} \Phi_{,x}(y+1), \\
 G_{\theta\theta} &= S^2 \left\{ e^{-2\Psi} [\Phi_{,xx} + \Phi_{,x}(\Phi_{,x} - \Psi_{,x} - 1)] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{r^2}{\alpha^2 t^2} e^{-2\Phi} [\Psi_{,xx} - \Psi_{,x}(\Phi_{,x} - \Psi_{,x} - \alpha)] \right\}, \tag{B.15}
 \end{aligned}$$

em que y é dada pela Eq.(B.10).

Apêndice C

Equações de Campo de Einstein Linearmente Perturbadas

Os componentes não-nulos do tensor de Ricci referente à métrica dada pela Eq.(4.5) são dados por

$$\begin{aligned} R_{\bar{u}\bar{u}} &= -\frac{1}{\bar{u}s} [\bar{u}s_{,\bar{u}\bar{u}} + 2s_{,\bar{u}} - 2\sigma_{,\bar{u}}(s + \bar{u}s_{,\bar{u}})], \\ R_{\bar{u}\bar{v}} &= -\frac{1}{\bar{u}s} (\bar{u}s_{,\bar{u}\bar{v}} + s_{,\bar{v}} + 2\bar{u}s\sigma_{,\bar{u}\bar{v}}), \\ R_{\bar{v}\bar{v}} &= -\frac{1}{s} (s_{,\bar{v}\bar{v}} - 2\sigma_{,\bar{v}}s_{,\bar{v}}), \\ R_{\bar{\theta}\bar{\theta}} &= 2e^{-2\sigma}\bar{u}s(s_{,\bar{v}} + \bar{u}s_{,\bar{u}\bar{v}}), \end{aligned} \tag{C.1}$$

Ao introduzirmos as variáveis auto-similares z e τ , através das relações

$$z = \frac{\bar{v}}{\bar{u}}, \quad \tau = -\ln(-\bar{u}), \tag{C.2}$$

para qualquer dada função $f(\bar{u}, \bar{v})$, agora temos que

$$\begin{aligned} f_{,\bar{u}} &= -\frac{1}{\bar{u}}(f_{,\tau} + zf_{,z}), \quad f_{,\bar{v}} = \frac{1}{\bar{u}}f_{,z}, \\ f_{,\bar{u}\bar{v}} &= -\frac{1}{\bar{u}^2}(zf_{,zz} + f_{,\tau z} + f_{,z}), \quad f_{,\bar{v}\bar{v}} = \frac{1}{\bar{u}^2}f_{,zz}, \\ f_{,\bar{u}\bar{u}} &= \frac{1}{\bar{u}^2}(f_{,\tau\tau} + 2zf_{,\tau z} + z^2f_{,zz} + f_{,\tau} + 2zf_{,z}). \end{aligned} \tag{C.3}$$

Substituindo estas equações na Eq.(C.1), temos que os componentes não-nulos do tensor de Ricci para este caso são dados por

$$\begin{aligned}
R_{\bar{u}\bar{u}} &= -\frac{e^{2\tau}}{s} \left[s_{,\tau\tau} + 2zs_{,\tau z} + z^2 s_{,zz} - s_{,\tau} - 2(\sigma_{,\tau} + z\sigma_{,z})(s_{,\tau} + zs_{,z} - s) \right], \\
R_{\bar{u}\bar{v}} &= \frac{e^{2\tau}}{s} \left[2s(z\sigma_{,zz} + \sigma_{,\tau z} + \sigma_{,z}) + zs_{,zz} + s_{,\tau z} \right], \\
R_{\bar{v}\bar{v}} &= -\frac{e^{2\tau}}{s} (s_{,zz} - 2\sigma_{,z} s_{,z}), \\
R_{\bar{\theta}\bar{\theta}} &= -2e^{-2\sigma} s (zs_{,zz} + s_{,\tau z}), \tag{C.4}
\end{aligned}$$

Considerando as perturbações lineares dadas pela Eq.(4.8), os componentes não-nulos do tensor de Ricci podem ser reescritos como

$$\begin{aligned}
R_{\bar{u}\bar{u}} &= -\frac{e^{2\tau}}{s_0} \left[z^2 s_{0,zz} - 2z\sigma_{0,z} (zs_{0,z} - s_0) \right] \\
&\quad - \epsilon \frac{e^{(2+k)\tau}}{s_0} \left\{ z^2 s_{1,zz} + 2z(k - z\sigma_{0,z}) s_{1,z} \right. \\
&\quad \quad \left. - [z^2 s_0^{-1} (s_{0,zz} - 2\sigma_{0,z} s_{0,z}) + k(2z\sigma_{0,z} + 1 - k)] s_1 \right. \\
&\quad \quad \left. - 2(zs_{0,z} - s_0)(z\sigma_{1,z} + k\sigma_1) \right\}, \\
R_{\bar{u}\bar{v}} &= \frac{e^{2\tau}}{s_0} [zs_{0,zz} + 2s_0(z\sigma_{0,zz} + \sigma_{0,z})] \\
&\quad + \epsilon \frac{e^{(2+k)\tau}}{s_0} [zs_{1,zz} + 2zs_0\sigma_{1,zz} + ks_{1,z} + 2(1+k)s_0\sigma_{1,z} - zs_0^{-1}s_{0,zz}s_1], \\
R_{\bar{v}\bar{v}} &= -\frac{e^{2\tau}}{s_0} (s_{0,zz} - 2\sigma_{0,z} s_{0,z}) \\
&\quad - \epsilon \frac{e^{(2+k)\tau}}{s_0} [s_{1,zz} - 2\sigma_{0,z} s_{1,z} - s_0^{-1} (s_{0,zz} - 2\sigma_{0,z} s_{0,z}) s_1 - 2s_{0,z} \sigma_{1,z}], \\
R_{\bar{\theta}\bar{\theta}} &= -2zs_0 s_{0,zz} e^{-2\sigma_0} \\
&\quad - \epsilon 2e^{k\tau - 2\sigma_0} s_0 [zs_{1,zz} + ks_{1,z} + zs_{0,zz} (s_0^{-1} s_1 - 2\sigma_1)]. \tag{C.5}
\end{aligned}$$

Utilizando a Eq.(4.8), o campo escalar sem massa pode ser escrito na forma

$$\phi(\tau, z) = c \ln(-\bar{u}) + \varphi_0(z) + \epsilon \varphi_1(z) e^{k\tau}, \tag{C.6}$$

donde suas derivadas em relação a \bar{u} e \bar{v} , são escritas, respectivamente, como

$$\begin{aligned}\phi_{,\bar{u}} &= e^\tau [z\varphi_{0,z} - c + \epsilon(k\varphi_1 + \varphi_{1,z})e^{k\tau}], \\ \phi_{,\bar{v}} &= -e^\tau (\varphi_{0,z} + \epsilon\varphi_{1,z}e^{k\tau}).\end{aligned}\tag{C.7}$$

Deste modo, as equações de campo de Einstein, Eq.(4.10), para perturbação de primeira ordem são dadas por

$$\begin{aligned}z^2s_{1,zz} + 2z(k - z\sigma_{0,z})s_{1,z} \\ - [z^2s_0^{-1}(s_{0,zz} - 2\sigma_{0,z}s_{0,z}) + k(2z\sigma_{0,z} + 1 - k)]s_1 \\ - 2(zs_{0,z} - s_0)(z\sigma_{1,z} + k\sigma_1) = -2s_0(z\varphi_{0,z} - c)(z\varphi_{1,z} + k\varphi_1),\end{aligned}\tag{C.8}$$

$$\begin{aligned}zs_{1,zz} + 2zs_0\sigma_{1,zz} + ks_{1,z} + 2(1+k)s_0\sigma_{1,z} - zs_0^{-1}s_{0,zz}s_1 \\ = -s_0[(2z\varphi_{0,z} - c)\varphi_{1,z} + k\varphi_{0,z}\varphi_1],\end{aligned}\tag{C.9}$$

$$s_{1,zz} - 2\sigma_{0,z}s_{1,z} - s_0^{-1}(s_{0,zz} - 2\sigma_{0,z}s_{0,z})s_1 - 2s_{0,z}\sigma_{1,z} = -2s_0\varphi_{0,z}\varphi_{1,z},\tag{C.10}$$

$$zs_{1,zz} + ks_{1,z} + zs_{0,zz}(s_0^{-1}s_1 - 2\sigma_1) = 0.\tag{C.11}$$

A equação de Klein-Gordon, Eq.(4.11), que, como já dissemos, não é independente das equações de campo de Einstein, para perturbação de primeira ordem é dada por

$$\begin{aligned}2zs_0\varphi_{1,zz} + [2zs_{0,z} + (1+2k)s_0]\varphi_{1,z} + ks_{0,z}\varphi_1 \\ + (2z\varphi_{0,z} - c)s_{1,z} + [2z\varphi_{0,zz} + (1+k)\varphi_{0,z}]s_1 = 0.\end{aligned}\tag{C.12}$$

Referências Bibliográficas

- [1] T. P. Singh, “*Gravitational Collapse and Cosmic Censorship*”, gr-qc/9606016 (1996).
- [2] P. S. Joshi, *Global Aspects in Gravitation and Cosmology* (Clarendon Press, Oxford, 1993).
- [3] P. S. Joshi, “*Gravitational Collapse: The Story so far*”, gr-qc/0006101 (2000).
- [4] A. Wang, Braz. J. Phys. **31**, 188 (2001).
- [5] J. Michell, Philosophical Transactions of the Royal Society of London **74**, 35 (1784).
- [6] P. S. de Laplace, *The System of the World* (W. Flint, London, 1809).
- [7] J. R. Oppenheimer e G. Volkoff, Phys. Rev. **55**, 374 (1939).
- [8] J. R. Oppenheimer e R. Snyder, Phys. Rev. **56**, 455 (1939).
- [9] S. W. Hawking e G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Spacetime* (Cambridge University Press, Cambridge, 1973).
- [10] R. Penrose, Phys. Rev. Lett. **14**, 57 (1965).
- [11] S. W. Hawking, Proc. Roy. Soc. Lond. **A 300**, 187 (1967).
- [12] S. W. Hawking e R. Penrose, Proc. Roy. Soc. Lond. **A 314**, 529 (1970).

- [13] R. Penrose, Riv. Nuovo Cimento, (Special Number) **1**, 252 (1969).
- [14] K. P. Thorne, em *Magic Without Magic: John Archibald Wheeler*, editado por J. Klauder (Friedmann, San Francisco, 1972), p.231.
- [15] D. Ida e K. I. Nakao, Phys. Rev. **D66**, 064026 (2002).
- [16] K. I. Nakao, K. Nakamura e T. Mishima, Phys. Lett. **B564**, 143 (2003).
- [17] C. Gundlach, Phys. Rep. **376**, 339 (2003).
- [18] M. W. Choptuik, Phys. Rev. Lett. **70**, 9 (1993).
- [19] M. W. Choptuik, “*Critical Behavior in Massless Scalar Field Collapse*”, em *Approaches to Numerical Relativity, Proceedings of the International Workshop on Numerical Relativity*, Southampton, Dezembro, 1991, editado por Ray d’Inverno; “*Critical Behavior in Scalar Field Collapse*”, em *Deterministic Chaos in General Relativity*, editado por D. Hobill et al. (Plenum Press, New York, 1994), pp. 155-175.
- [20] G. I. Barenblatt, *Similarity, Self-Similarity, and Intermediate Asymptotics* (Consultants Bureau, New York, 1979).
- [21] N. Goldenfeld, *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group* (Addison Wesley Publishing Company, New York, 1992).
- [22] D. Christodoulou, Commun. Math. Phys. **105**, 337 (1986).
- [23] D. Christodoulou, Commun. Math. Phys. **109**, 587 (1986).
- [24] D. Christodoulou, Commun. Math. Phys. **109**, 613 (1987).
- [25] C. Gundlach, J. Pullin e R. Price, Phys. Rev. **D49**, 890 (1994)
- [26] D. Garfinkle, Phys. Rev. **D51**, 5558 (1995).
- [27] R. S. Hamadé e J. M. Stewart, Class. Quantum Grav. **13**, 497 (1996).

- [28] S. Hod e T. Piran, Phys. Rev. **D55**, R440 (1997).
- [29] C. Gundlach, Phys. Rev. Lett. **75**, 3214 (1995).
- [30] C. Gundlach, Phys. Rev. **D55**, 695 (1997).
- [31] C. R. Evans e J. S. Coleman, Phys. Rev. Lett. **72**, 1782 (1994).
- [32] T. Koike, T. Hara e S. Adachi, Phys. Rev. Lett. **74**, 5170 (1995).
- [33] T. Hara, T. Koike e S. Adachi, “*Renormalization group and critical behaviour in gravitational collapse*”, gr-qc/9607010 (1996).
- [34] T. Koike, T. Hara e S. Adachi, Phys. Rev. Lett. **D59**, 104008 (1999).
- [35] D. Maison, Phys. Lett. B **366**, 82 (1996).
- [36] P. R. Brady, C. M. Chambers, S. M. C. V. Gonçalves, Phys. Rev. **D56**, 6057 (1997).
- [37] M. W. Choptuik, T. Chmaj e P. Bizón, Phys. Rev. Lett. **77**, 424 (1996).
- [38] P. Bizón e T. Chmaj, Phys. Rev. **D58**, 041501 (1998).
- [39] A. M. Abrahams e R. Evans, Phys. Lett. **70**, 2980 (1993).
- [40] A. H. Cahill e M. E. Taub, Commun. Math. Phys. **21**, 1 (1971).
- [41] B. Carter e R. N. Henriksen, Ann. Physique Suppl. **14**, 47 (1989).
- [42] A. A. Coley, Class. Quantum Grav. **14**, 87 (1997).
- [43] P. M. Benoit e A. A. Coley, Class. Quantum Grav. **15**, 2397 (1998).
- [44] C. F. C. Brandt, L. -M. Lin, J. F. V. da Rocha e A. Wang, Int. J. Mod. Phys. **D11**, 155 (2002).
- [45] P. R. Brady, M. W. Choptuik, C. Gundlach e D. W. Neilsen, Class. Quantum Grav. **19**, 6359 (2002).

- [46] E. W. Hirschmann e D. M. Eardley, Phys. Rev. **D52**, 5850 (1995).
- [47] F. Pretorius e M. W. Choptuik, Phys. Rev. **D62**, 124012 (2000).
- [48] V. Husain e M. Olivier, Class. Quantum Grav. **18**, L1 (2001).
- [49] D. Garfinkle, Phys. Rev. **D63**, 044007 (2001).
- [50] D. Garfinkle e C. Gundlach, Phys. Rev. **D66**, 044015 (2002).
- [51] G. Clément e A. Fabbri, Class. Quantum Grav. **18**, 3665 (2001)
- [52] G. Clément e A. Fabbri, Nucl. Phys. **B630**, 269 (2002).
- [53] E. W. Hirschmann, A. Wang e Y. Wu, Class. Quantum Grav. **21**, 1791 (2004).
- [54] A. Wang, Phys. Rev. **D68**, 064006 (2003).
- [55] G. I. Barenblatt e Ya B. Zel'dovich, Ann. Rev. Fluid Mech. **4**, 285 (1972).
- [56] A. Hasegawa, Adv. Phys. **34**, 42 (1985).
- [57] K. H. Tsui e A. Serbeto, Astrophys. J. **658**, 794 (2007).
- [58] L. I. Sedov, Prikl. Mat. Mekh. **10(2)**, 241 (1946).
- [59] L. I. Sedov, *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics* (New York, Academic, 1967).
- [60] G. I. Taylor, Proc. Roy. Soc. London **A201**, 175 (1950).
- [61] Ya. B. Zel'dovich e A. S. Kompaneets, Izd. Akad. Nauk SSSR, 61 (1950).
- [62] G. I. Barenblatt, Prikl. Mat. Mekh. **16**, 67 (1952).
- [63] Ya. B. Zel'dovich e Yu. P. Raizer, *Physics of Shock Waves and High Temperature Phenomena* (New York, Academic, 1963).

- [64] B. J. Carr e A. A. Coley, *Class. Quantum Grav.* **16**, R31 (1999).
- [65] L. Pietronero, *Physica* **144A**, 257 (1987).
- [66] M. B. Ribeiro e A. Y. Miguelote, *Braz. J. Phys.* **28**, 132 (1998).
- [67] R. N. Henriksen, A. G. Emslie e P. S. Wesson, *Phys. Rev. D* **27**, 1219 (1983).
- [68] D. Lynden-Bell e J. P. S. Lemos, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **233**, 197 (1988).
- [69] R. N. Henriksen, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **240**, 917 (1989).
- [70] A. Staruszkiewicz, *Acta Phys. Polon.* **24**, 734 (1963).
- [71] H. Leutwyler, *Nuovo Cimento* **42A**, 159 (1966).
- [72] P. Collas, *Am. J. Phys.* **45**, 833 (1977).
- [73] G. Clément, *Nucl. Phys.* **B114**, 437 (1976).
- [74] S. Deser, R. Jackiw e G. 't Hooft, *Ann. Phys.* **152**, 220 (1984).
- [75] S. Deser e R. Jackiw, *Commun. Math. Phys.* **118**, 495 (1988).
- [76] G. 't Hooft, *Commun. Math. Phys.* **117**, 685 (1988).
- [77] E. Witten, *Nucl. Phys.* **B311**, 46 (1988).
- [78] E. Witten, *Nucl. Phys.* **B323**, 113 (1989).
- [79] E. Witten, *Commun. Math. Phys.* **137**, 29 (1991).
- [80] S. Giddings, J. Abbot e K. Kuchar, *Gen. Rel. Grav.* **16**, 751 (1984).
- [81] M. Bañados, C. Teitelboim e J. Zanelli, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1849 (1992).
- [82] M. Mars e J. M. M. Senovilla, *Class. Quantum Grav.* **10**, 1633 (1993).

- [83] P. R. C. T. Pereira, N. O. Santos, e A. Wang, *Class. Quantum Grav.* **13**, 1641 (1996).
- [84] M. A. H. MacCallum e N. O. Santos, *Class. Quantum Grav.* **15**, 1627 (1998).
- [85] M. A. H. MacCallum, *Gen. Relativ. Grav.* **30**, 131 (1998).
- [86] J. Carot, J. M. M. Senovilla e R. Vera, *Class. Quantum Grav.* **16**, 3025 (1999).
- [87] A. Barnes, *Class. Quantum Grav.* **17**, 2605 (2000).
- [88] L. Herrera, N. O. Santos, A. F. F. Teixeira e A. Wang, *Class. Quantum Grav.* **18**, 3847 (2001).
- [89] A. Y. Miguelote, M. F. A. da Silva, A. Wang e N. O. Santos, *Class. Quantum Grav.* **18**, 4569 (2001).
- [90] M. F. A. da Silva, L. Herrera, N.O. Santos e A. Wang, *Class. Quantum Grav.* **19**, 3809 (2002).
- [91] D. Kramer, H. Stephani, E. Herlt e M. MacCallum, *Exact Solutions of Einstein's Field Equations* (Cambridge University Press, Cambridge, 1980).
- [92] A. Vilenkin e E. P. S. Shellard, *Cosmic Strings and Other Topological Defects* (Cambridge University Press, Cambridge, 1994).
- [93] S. W. Hawking, *Phys. Rev.* **D46**, 603 (1992).
- [94] S. A. Hayward, *Phys. Rev.* **D49**, 6467 (1994).
- [95] S. A. Hayward, *Class. Quantum Grav.* **17**, 1749 (2000).
- [96] D. Ida, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3758 (2000).
- [97] F. J. Tipler, *Nature* **270**, 500 (1977).

- [98] A. Y. Miguelote, N. A. Tomimura e A. Wang, *Gen. Relativ. Grav.* **36**, 1883 (2004).
- [99] S. L. Shapiro e S. A. Teukolsky, *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars* (Wiley, 1983).
- [100] H. Maeda, T. Harada, H. Iguchi e N. Okuyama, *Phys. Rev.* **D66**, 027501 (2002).
- [101] A. Feinstein, M. A. H. MacCallum e J. M. M. Senovilla, *Class. Quantum Grav.* **6**, L217 (1989).
- [102] R. R. Tabensky e A. H. Taub, *Commun. Math. Phys.* **29**, 61 (1973).
- [103] M. S. Madsen, *Class. Quantum Grav.* **5**, 627 (1988).
- [104] A. Y. Miguelote, N. A. Tomimura e A. Wang, *Prog. Theor. Phys.* **114**, 895 (2005).
- [105] A. Erdélyi, *Higher Transcendental Functions*, Vol. 1 (McGraw-Hill Book Company, Inc., 1953) pp. 56-119.
- [106] D. W. Neilsen e M. W. Choptuik, *Class. Quantum Grav.* **17**, 733 (2000).
- [107] D. W. Neilsen e M. W. Choptuik, *Class. Quantum Grav.* **17**, 761 (2000).