



MAYANNE RODRIGUES MAIA

Estudo do Efeito Talbot com Feixe Gaussiano

Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da Capes

Nitéroi, 2017



Universidade Federal Fluminense

Instituto de Física

Mayanne Rodrigues Maia

Estudo do Efeito Talbot com Feixe Gaussiano

Orientador: Prof. Dr. Antonio Zelaquett Khoury

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de
Física para
obtenção do título de Mestre em Física

Niterói, 2017

M217 Maia, Mayanne Rodrigues.
Estudo do efeito Talbot com feixe gaussiano / Mayanne
Rodrigues Maia ; orientador: Antonio Zelaquett Khoury. --
Niterói, 2017.
58 p. : il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Fluminense,
Instituto de Física, Niterói, 2017.
Bibliografia: p. 57-58.

1.EFEITO TALBOT. 2.FEIXE GAUSSIANO. 3.ÓPTICA. I.Khoury,
Antonio Zelaquett, orientador. II.Universidade Federal
Fluminense. Instituto de Física, Instituição responsável.
III.Título.

CDD 535



INSTITUTO DE FÍSICA

Universidade Federal Fluminense

CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

RUA GAL MILTON TAVARES DE SOUZA, SN

24210-346 – NITERÓI - RIO DE JANEIRO

TEL: (21)2629-5878 - FAX: 2629-5887

E-MAIL: cpg@ if.uff.br

Ata dos trabalhos finais da Comissão Examinadora da dissertação de mestrado apresentada por **Mayanne Rodrigues Maia**. No oitavo dia do mês de março de dois mil e dezessete, às quinze horas, reuniram-se no Instituto de Física da Universidade Federal Fluminense os membros da Comissão Examinadora constituída pelos professores doutores Antonio Zelaquett Khoury (IF/UFF), Kaled Dechoum (IF/UFF) e Stephen Patrick Walborn (IF/UFRJ), sob a presidência do primeiro, para prova pública de apresentação de dissertação de mestrado intitulada “**Estudo do Efeito Talbot com Feixe Gaussiano**”, tendo em vista as exigências do Regulamento Específico do curso de Física relacionadas com a conclusão do Mestrado em Física pela Universidade Federal Fluminense. A dissertação foi elaborada sob a orientação do professor Antonio Zelaquett Khoury. Após a exposição do trabalho, a aluna respondeu às questões formuladas pelos integrantes da Comissão Examinadora, que apresentou parecer no sentido de aprová-la. Para constar, foi lavrada a presente ata, que vai assinada pelos membros da Comissão Examinadora e pela mestranda.

Niterói, oito de março de dois mil e dezessete.

Dr. Antonio Zelaquett Khoury

Dr. Kaled Dechoum

Dr. Stephen Patrick Walborn

Mayanne Rodrigues Maia

Handwritten signatures of the examiners and the student, each on a horizontal line. From top to bottom: Antonio Zelaquett Khoury, Kaled Dechoum, Stephen Patrick Walborn, and Mayanne Rodrigues Maia.

DEDICATÓRIA

Dedico esta dissertação aos meus pais Mary Anne e Roberto, pelo constante incentivo e apoio em todos os momentos.

Sem eles este trabalho não aconteceria. A eles, meu muito, muito obrigada.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Antônio Zelaquett Khoury, pelo incentivo, confiança e ótima orientação, que só fez com que eu me interessasse mais e mais pelo tema deste trabalho. Sem dúvida a sua postura didática é outro ensinamento que tiro dessa "fase mestrado".

Agradeço ao grupo de Óptica Quântica da UFF, pelos seminários e pelo ambiente harmônico de aprendizagem que instala no IF.

Agradeço ao Prof. Dr. Daniel Tasca, pela importante contribuição na realização experimental deste trabalho.

Agradeço aos meus pais, pelo apoio incondicional.

Agradeço à Laiz Valim, pela amizade cheia de conversas e companheirismo, que tornaram o mestrado um período repleto de reflexões frutíferas que levarei para a vida.

Agradeço ao querido André <3, por ter acompanhado de perto toda a trajetória desse trabalho, dividindo comigo todos os pensamentos e sentimentos durante esse dias, sempre com carinho e atenção.

RESUMO

Basicamente, o efeito Talbot ocorre quando uma grade periódica é iluminada por uma fonte de luz coerente e imagens dessa grade surgem a distâncias também periódicas, chamadas de distâncias de Talbot. Utilizando a teoria escalar da difração, apresentada nesse trabalho, é simples obter a equação dessas distâncias para o caso da onda plana.

O objetivo é analisar o que ocorre nesse fenômeno quando substituímos a onda plana pela onda gaussiana. Para isso também abordamos a teoria da óptica paraxial, além de introduzir a óptica de Fourier e falar a respeito dos moduladores espaciais de luz, instrumento utilizado na parte experimental do trabalho.

Discutimos em detalhes o cálculo para obter a distância de Talbot corrigida, ou seja, para o caso do perfil gaussiano. Analisamos a equação encontrada, verificando que ela recai na distância de Talbot da onda plana na aproximação adequada. Em seguida, encontramos situações teóricas em que essa correção é realmente significativa.

Baseados nessa possibilidade de encontrar configurações em que apenas a distância de Talbot corrigida é correta, fomos ao laboratório realizar o experimento necessário. Porém, verificamos experimentalmente que nas condições em que a correção gaussiana é relevante, a reprodução da imagem da grade não é nítida, uma vez que nessas condições poucas fendas da grade são efetivamente iluminadas pelo feixe gaussiano. À medida em que o feixe é expandido (ou a periodicidade da grade reduzida), mais fendas são iluminadas e o efeito torna-se mais visível, mas as distâncias de reprodução da imagem da grade (Talbot) recaem nos valores previstos pela aproximação de onda plana. Os resultados apresentados neste trabalho permitem uma melhor compreensão das condições ópticas para a ocorrência do efeito Talbot e abrem o caminho para a investigação do efeito com a utilização de outros tipos de feixes, como os portadores de momento angular orbital.

Palavras-chave: Efeito Talbot, Feixe Gaussiano, Óptica, Condição de Talbot.

ABSTRACT

Basically, the Talbot effect occurs when a periodic grid is illuminated by a coherent light source and images of this grid emerge at periodic distances, called Talbot distances. Using the scalar diffraction theory presented in this dissertation, it is simple to obtain the equation of these distances for the case of the plane wave.

The objective is to analyze what happens in this phenomenon when we replace the plane wave by the Gaussian wave. In order to do this, we also approach the theory of paraxial optics, besides introducing Fourier optics and talking about light space modulators (SLM), an instrument used in the experimental part of the work.

We discuss in detail the calculation to obtain the corrected Talbot distance, that is, in the case of the Gaussian profile. We analyze the equation found, verifying that it become exactly the Talbot distance of the plane wave in the appropriate approximation. Next, we find theoretical situations in which this correction is really significant.

Based on this possibility of finding settings in which only the corrected Talbot distance is right, we went to the laboratory to perform the necessary experiment. However, we verify experimentally that in the conditions in which the Gaussian correction is relevant, the image reproduction of the grid is not clear, since in these conditions few slits in the grid are effectively illuminated by the Gaussian beam. As the beam is expanded (or the frequency of the reduced grid), more slits are illuminated and the effect becomes more visible, but the reproduction distances of the grid (Talbot) fall within the values predicted by the plane wave approximation. The results presented in this work allow a better understanding of the optical conditions for the occurrence of the Talbot effect and open the way for the investigation of the effect with the use of other types of beams, such as the carriers of orbital angular momentum.

Keywords: Talbot Effect, Gaussian Beam, Optics, Talbot Condition.

CONTEÚDO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Revisão Histórica	2
1.2	Teoria da Difração Escalar	3
1.2.1	Difração de Fresnel	8
1.2.2	Difração de Fraunhofer	9
1.3	Efeito Talbot	9
2	ÓPTICA PARAXIAL	13
2.1	Equação de Helmholtz	13
2.1.1	Equação de Helmholtz Paraxial	14
2.2	Modo Fundamental – Feixe Gaussiano	16
2.2.1	Propriedades do Feixe Gaussiano	18
2.3	Modos gaussianos de ordens superiores	20
2.3.1	Modos Hermite – Gaussianos (HG)	21
2.3.2	Modos Laguerre – Gaussianos (LG)	22
2.3.3	Decomposição e relação entre os modos paraxiais	23
3	ÓPTICA DE FOURIER E MODULADORES ESPACIAIS	25
3.1	Introdução à Transformada de Fourier	27
3.1.1	Difração com Transformada de Fourier	28
3.2	Grades de difração e suas Funções de Transmitância	29
3.3	Modulador Espacial de Luz (SLM)	31
4	ESTUDO DO EFEITO TALBOT COM FEIXE GAUSSIANO	33
4.1	Difração de campo próximo para o feixe gaussiano	33
4.2	A condição de Talbot	37
4.3	Análise teórica	38
4.4	Realização Experimental	40
4.4.1	Arranjo experimental	41
4.4.2	Resultado experimental e discussão	43

4.5	Simulação computacional	44
5	CONCLUSÃO GERAL E PERSPECTIVAS	51
	CÓDIGO MATLAB	53
	Referência Bibliográfica	55

1

INTRODUÇÃO

O efeito Talbot é um fenômeno de difração que ocorre na região de campo próximo quando uma grade periódica é iluminada, resultando em auto-imagens da própria grade em distâncias regulares.

Essa dissertação busca compreender quais são os efeitos decorrentes de levar em conta uma onda gaussiana – com suas principais características, nomeadamente a curvatura da frente de onda e a variação do diâmetro da seção transversal – no âmbito do efeito Talbot.

Visando disponibilizar a base teórica necessária para o entendimento desse trabalho discutiremos nesse capítulo introdutório tanto a teoria da difração escalar quanto o próprio efeito Talbot. A teoria da difração escalar permite que compreendamos como acontece a difração em uma grade periódica, item necessário a esse fenômeno óptico, que até aqui é apresentado apenas com o uso da onda plana.

No capítulo 2 apresentamos alguns dos fundamentos da óptica paraxial, que serve de base para a introdução da onda gaussiana, que tratamos de descrever nessa parte do trabalho. No capítulo seguinte, Cap. 3, passamos a tratar de outro elemento importante na construção desta dissertação: Os moduladores espaciais de luz (SLM), que fazem o papel da grade de difração. Além disso, a óptica de Fourier, ferramenta muito útil nesse contexto, também é introduzida.

Já no capítulo 4 unimos o estudo dos capítulos anteriores de modo a finalmente tratar do que ocorre ao efeito Talbot quando a onda plana dá lugar à onda gaussiana. Aqui apresentamos os cálculos, as simulações computacionais e o experimento que foram utilizados para concluir qual é o resultado dessa troca de perfis ondulatórios.

1.1 REVISÃO HISTÓRICA

Em dezembro de 1836 foi publicado um trabalho intitulado *Facts Relating to Optical Science. No. IV* na *Philosophical Magazine*, no qual o autor, Henry Fox Talbot, descreve diversos fenômenos óticos. Entre estes, H. F. Talbot cita o que observou após incidir um raio luminoso sobre uma grade periódica de linhas verticais, e sobre isso publicou o seguinte trecho:

O que aparece é muito curioso, é uma alternância de números de linhas ou bandas da cor vermelha e verde, tendo todas elas uma direção paralela às linhas da grade.

Assim, por ser o primeiro a documentar os primórdios desse fenômeno ele passou a ser conhecido como Efeito Talbot, em sua homenagem [1].

Uma explicação parcial para este fenômeno ainda esperou meio século e foi baseada na consequência natural da interferência dos feixes difratados pela grade. Essa explicação e o primeiro cálculo da distância de Talbot – distância em que uma imagem da grade é reproduzida com o maior contraste – foram feitos por Lord Rayleigh em 1881 [2].

Já em meados dos anos 50 Cowley e Moodie vieram com esforços no sentido de compreender mais detalhadamente esta manifestação da difração. Eles investigaram imagens da grade que se formavam com múltiplos períodos em relação à da grade original e em distâncias fracionais da distancia de Talbot [3]. Mais tarde, o conjunto dessas imagens quando vistas no plano perpendicular ao da grade ficou conhecido como tapete de Talbot e recebeu muita atenção em trabalhos subsequentes.

A partir de 1960 os trabalhos experimentais com o efeito Talbot já incluíam o uso de lasers – fonte de luz coerente acessível –, motivando ainda mais publicações dentro do tema [4]. Entretanto, ainda que a frente de onda dessa fonte seja muito bem modelada por uma gaussiana, muitos são os trabalhos que ainda hoje optam por utilizar uma aproximação de onda plana quando investigam algo relacionado a esse efeito, o que de fato sempre pode ser feito com os arranjos experimentais apropriados.

K. Patorski escreveu um artigo de revisão que inclui um breve tratamento desse fenômeno quando é utilizado um feixe luminoso com uma frente de onda gaussiana [5]. E nesse artigo de revisão, que trata dos avanços sobre a compreensão do efeito Talbot até 1990, ele chega em uma condição para encontrar as imagens de Talbot, sem analisar a validade do resultado ou especificar exatamente qual é essa distância de Talbot corrigida.

O estudo do efeito Talbot está profundamente enraizado na óptica clássica, mas o potencial de aplicação deste fenômeno tem se mostrado bastante extenso ao longo dos anos, com trabalhos bem variados, inclusive no universo da física quântica. Na óptica tem sido aplicado ao processamento de imagem, produção de filtros frequência-espacial, metrologia óptica, etc., além de aplicações em outras áreas, como na acústica, na microscopia eletrônica e no condensado de Bose-Einstein, apenas para citar algumas [4].

1.2 TEORIA DA DIFRAÇÃO ESCALAR

A difração é um fenômeno próprio de perturbações ondulatórias, ela ocorre sempre que uma onda incide sobre algum obstáculo cuja as dimensões são comparáveis ao seu comprimento de onda [7]. Mas antes da difração ser notada e estudada já tinha sido desenvolvida uma física capaz de explicar outros efeitos ondulatórios, como a refração, reflexão e penumbra, por exemplo. Entretanto, essa física que ficou conhecida como óptica geométrica, que até hoje é utilizada e bem sucedida numa compreensão básica de diversos efeitos cotidianos que a luz é capaz de produzir, não foi útil no contexto da difração, já que ela tem como princípio básico assumir que a luz se propaga em linha reta [7, 9].

O cientista italiano Grimaldi, em 1665, foi quem cunhou o termo difração (do latim *diffringere*, 'quebrar em pedaços'), já que esse fenômeno só é possível se imaginarmos a luz quebrando-se em diferentes direções para "contornar" a presença dos obstáculos.

Um dos primeiros passos na direção de construir a teoria da difração escalar que conhecemos hoje, foi dado em 1678 por Christian Huygens, propondo que os pontos de uma frente de onda funcionam como novas fontes pontuais, como está esquematizado na Fig. 1. Ao longo dos séculos esse princípio – incapaz de levar em conta detalhes da difração – foi aperfeiçoado.

Em 1816, Fresnel acrescentou o princípio de interferência de Young ao princípio de Huygens, o que levou à uma melhor compreensão inicial do comportamento ondulatório [7]. Mas o que de fato já poderíamos chamar de formulação matemática rigorosa da difração só apareceu pelas mãos de Gustav Kirchhoff, em 1882. Ele fundamentou tanto as suposições de Fresnel, como o princípio de Huygens. Mais tarde, a formulação de Kirchhoff foi melhorada por Sommerfeld, que acrescentou condições de contorno

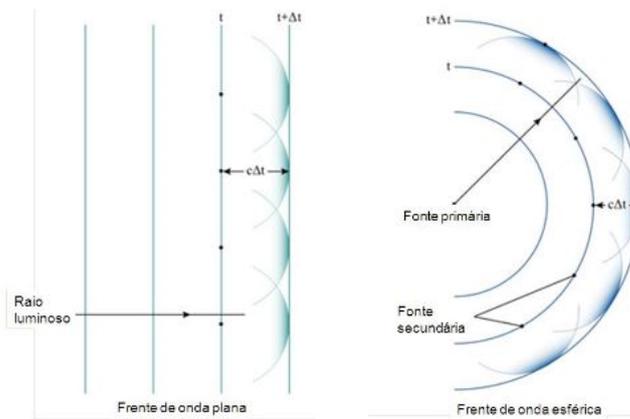


Figura 1: Princípio de Huygens representado para dois tipos de frentes de ondas, nomeadas na figura. Esse princípio diz que todo ponto ao ser atingido por uma frente de onda torna-se uma fonte tal que a nova frente de onda é obtida através da tangência das diversas frentes de onda formadas [6].

mais apropriadas [8, 9]. Essa formulação resultou na chamada integral de difração de Rayleigh-Sommerfeld.

Para chegar até esta integral partimos da segunda identidade de Green, dada por

$$\iiint_V (U \nabla^2 G - G \nabla^2 U) dv = \iint_{S'} \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds, \quad (1)$$

onde $\frac{\partial}{\partial n}$ significa derivar parcialmente na direção normal para fora em cada ponto de S' , que é a superfície fechada de volume total V' , esquematizada na Fig. 2.

Estamos em busca da função U – perfil transverso da onda difratada e propagada até ponto P_0 –, enquanto a função G – conhecida como função de Green – deve ser escolhida de tal forma que simplifique a resolução do problema. U e G devem ser funções contínuas e integráveis que obedeçam a equação de Helmholtz, ou seja,

$$(\nabla^2 + k^2)U = 0; \quad (\nabla^2 + k^2)G = 0, \quad (2)$$

sendo $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ o número de onda e λ o comprimento de onda. Com isso vemos que o integrando do lado esquerdo da Eq. 1 é nulo. Portanto, passamos basicamente para uma integral dada por:

$$\iint_{S'} \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds = 0. \quad (3)$$

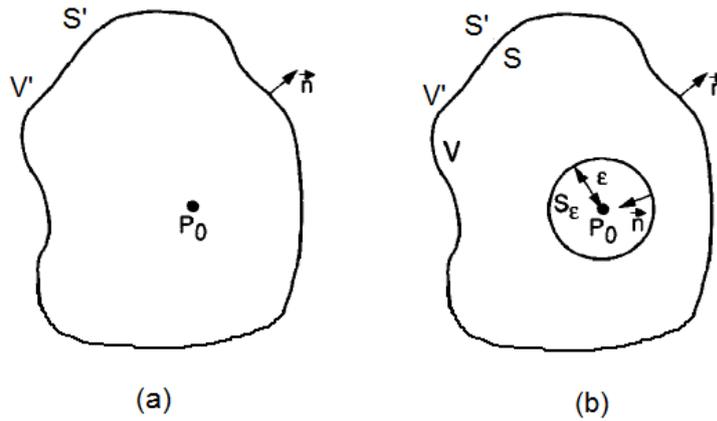


Figura 2: (a) Exemplo de superfície de integração S' ; (b) Mesma superfície de integração, mas com o possível ponto de descontinuidade P_0 delimitado pela superfície S_ϵ [8].

Para evitar qualquer descontinuidade no ponto de observação P_0 , excluimos a região em torno dela, como ilustrado na Fig. 2 (b). Assim a região total S' passa a ser dividida em duas, uma em torno de P_0 , dada por S_ϵ , e outra, livre de descontinuidade, dada por $S = S' - S_\epsilon$. Portanto, a Eq. 3 é reescrita como

$$\iint_S \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds = - \iint_{S_\epsilon} \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds. \quad (4)$$

Ainda podemos reescrever a equação acima do seguinte modo:

$$\iint_{S_1+S_2} \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds = - \iint_{S_\epsilon} \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds, \quad (5)$$

em que dividimos novamente a superfície, de tal modo que $S = S_1 + S_2$, com S_1 sendo a superfície que contém a abertura Σ , como mostra a Fig. 3.

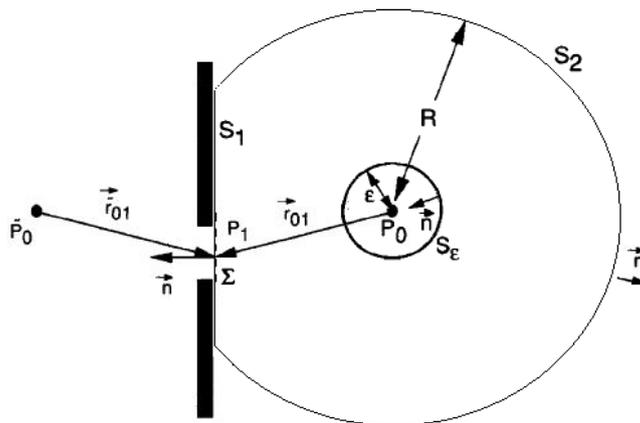


Figura 3: Representação da superfície de integração juntamente com um exemplo de abertura difratante Σ . Nessa imagem, aparecem os vetores: \vec{n} , normal e para fora de S ; \vec{r}_{01} , ponto de observação até a abertura; \vec{r}'_{01} , ponto simétrico ao de observação até a abertura [8].

Fazendo ϵ arbitrariamente pequeno, podemos escrever [8]:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \iint_{S_\epsilon} \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds = 4\pi U(P_0). \quad (6)$$

Portanto,

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1+S_2} \left(G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds, \quad (7)$$

que é conhecida como o *teorema integral de Kirchhoff* [10].

A contribuição da integral calculada sobre S_1 é nula quando seu raio R tende ao infinito, esta é a chamada *condição de radiação de Sommerfeld* [10]. Com isto, o campo $U(P_0)$ dependerá apenas da superfície S_1

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \left(G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds. \quad (8)$$

Agora é preciso escolher uma função de Green apropriada, uma opção baseada nas condições de contorno de Rayleigh-Sommerfeld, e esquematizada na Fig. 3, é a seguinte [8]:

$$G(P_0) = \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} - \frac{e^{ik\tilde{r}_{01}}}{\tilde{r}_{01}}, \quad (9)$$

com derivada, exceto nos pontos P_{01} e \tilde{P}_{01} , dada por

$$\frac{\partial G(P)}{\partial n} = -\cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) \left(-ik + \frac{1}{r_{01}}\right) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}} + \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) \left(-ik + \frac{1}{\tilde{r}_{01}}\right) \frac{e^{ik\tilde{r}_{01}}}{\tilde{r}_{01}}. \quad (10)$$

Para qualquer P_1 sobre S_1 , ou melhor, sobre a abertura Σ , $\vec{r}_{01} = \vec{r}_{01}$ e $\cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) = -\cos(\vec{n}, \vec{r}_{01})$. Com isso, levando em conta a geometria da Fig. 3, quando $r_{01} \gg \lambda$, podemos escrever [8]:

$$U(P_0) = \frac{-1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left(U \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds, \quad \text{com} \quad \frac{\partial G(P_1)}{\partial n} = 2ik \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}}. \quad (11)$$

Notando que $\cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) = \frac{-z}{r_{01}}$, chegamos finalmente em

$$U(P_0) = \frac{z}{i\lambda} \iint_{\Sigma} U(\xi, \eta) \frac{e^{ikr_{01}}}{r_{01}^2} d\xi d\eta, \quad (12)$$

que a forma mais explícita do princípio de Huygens-Fresnel, expresso na *integral da difração de Rayleigh-Sommerfeld* [8]. Assumindo a representação $(\xi, \eta, z = 0)$ para as coordenadas no plano da abertura (Fig. 4), $r_{01} = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}$.

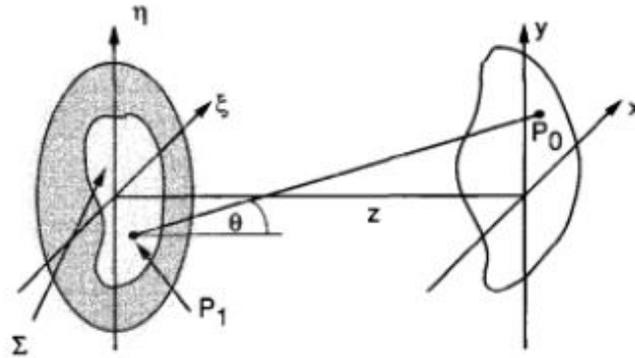


Figura 4: Representação da geometria do sistema em estudo [8].

No tratamento detalhado da difração devemos fazer distinção entre dois casos gerais, esquematizados na Fig. 5. Estes são conhecidos como difração de Fraunhofer e difração de Fresnel. A difração de Fraunhofer ocorre quando a onda incidente e a onda difratada são consideradas praticamente planas. Este será o caso quando a distância entre o objeto difratante estiver suficientemente distante tanto da fonte quanto do ponto de

observação. No entanto, quando a fonte ou o anteparo estiverem perto o bastante do objeto difratante a curvatura da frente de onda não poderá ser deconsiderada e a formulação completa da difração de Fresnel deverá ser usada [10].

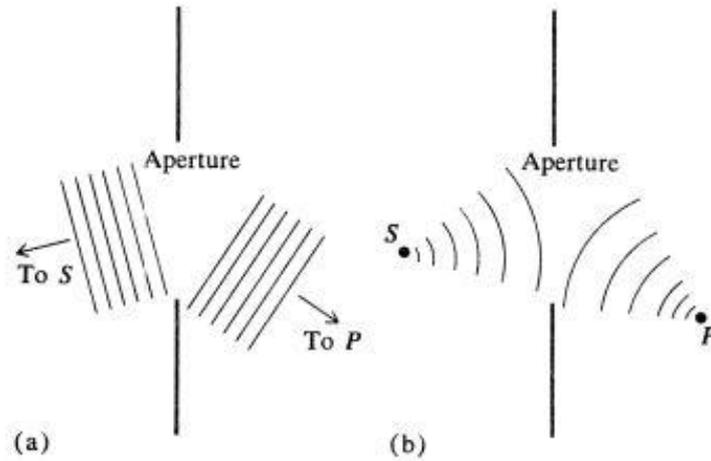


Figura 5: Difração por uma abertura, no caso de Fraunhofer (a) e no caso de Fresnel (b) [10].

1.2.1 Difração de Fresnel

Agora vamos simplificar a Eq. 12 fazendo uma aproximação para r_{01} , utilizando a aproximação binomial. Primeiro reescremos r_{01} como $r_{01} = z\sqrt{1 + \rho^2/z^2}$, com $\rho^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$. Para $1 \gg \rho^2/z^2$, fazendo a expansão até o termo linear chegamos em

$$r_{01} \approx z \left(1 + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{x - \xi}{z} \right)^2 + \left(\frac{y - \eta}{z} \right)^2 \right] \right). \quad (13)$$

Para o termo r_{01}^2 no denominador da Eq. 12 podemos também desprezar os termos quadráticos, mas o mesmo não pode ser feito no termo r_{01} que aparece no expoente,

uma vez que mudanças na fase são mais sensíveis, e ao fazer isso acabaríamos por acrescentar erros significativos [8]. Com essas considerações temos a seguinte expressão

$$U(P_0) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \iint_{\Sigma} U(\xi, \eta, d_+) \exp \left\{ i \frac{k}{2z} \left[(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \right] \right\} d\xi d\eta. \quad (14)$$

A equação acima, Eq. 14, é conhecida por *integral da difração de Fresnel*, válida quando a condição $1 \gg \rho^2/z^2$, utilizada para obtê-la, é satisfeita. Esta é precisamente a expressão utilizada nesse trabalho.

1.2.2 Difração de Fraunhofer

Ainda é possível fazer mais uma aproximação, a partir da Eq. 14, que quando válida simplifica muito o problema [8]. Essa aproximação considera que estamos distantes o suficiente para que

$$z \gg k \frac{(\xi^2 + \eta^2)_{max}}{2} \quad \Rightarrow \quad e^{i \frac{k}{2z} (\xi^2 + \eta^2)} \rightarrow 1. \quad (15)$$

Assim, temos a *integral da difração de Fraunhofer*, válida na região do campo distante:

$$U(P_0) = \frac{e^{ikz} e^{ik(x^2+y^2)/2z}}{i\lambda z} \iint_{\Sigma} U(\xi, \eta) \exp \left[-i \frac{2\pi}{\lambda z} (x\xi + y\eta) \right] d\xi d\eta. \quad (16)$$

1.3 EFEITO TALBOT

O efeito Talbot, também conhecido como efeito de auto-imagem por interferência, permite que apreciemos um fenômeno muito bonito de difração da luz quando estamos no campo próximo. Nesse efeito aparecem padrões que de imediato nos remete aos fractais, como podemos ver na Fig. 6, e que são chamados de tapetes de Talbot.

Esses tapetes representam uma visualização do que ocorre no plano de propagação de uma onda logo após passar por um objeto periódico difratante. Por esse ponto de vista notamos o aspecto peculiar desse efeito, que é a formação da imagem nítida do próprio objeto difratante. Essa imagem é chamada de imagem de Talbot e ocorre a uma distância específica – conhecida como distância de Talbot s_j , dada ela Eq. 21 – que depende apenas do período da grade e do comprimento de onda da luz incidente [4].

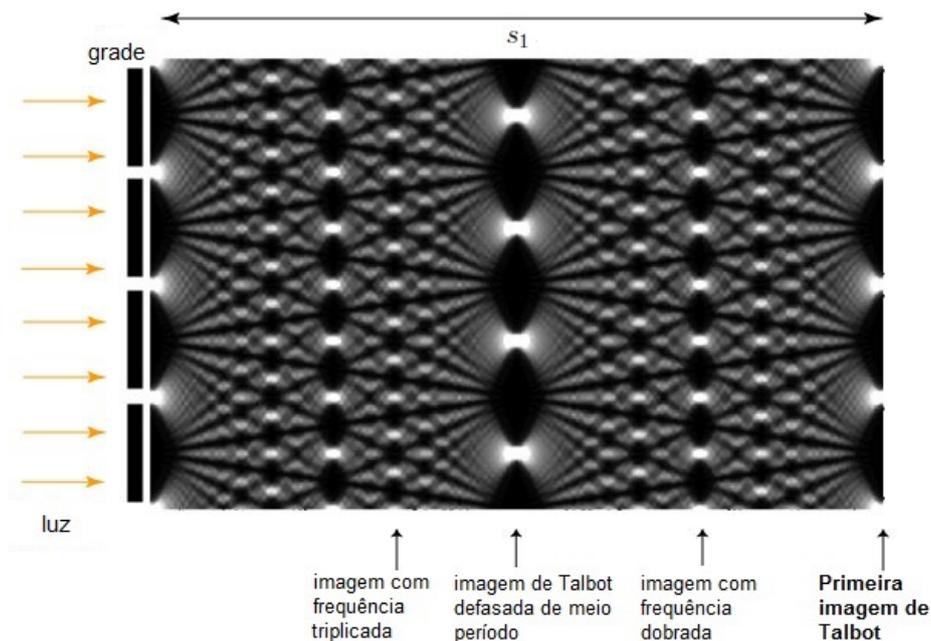


Figura 6: Representação do perfil de intensidade no plano de propagação gerada pela interferência do feixe difratado na grade [11].

As Figuras 6 e 7 mostram apenas o que ocorre até uma distância de Talbot, mas todo o padrão de interferência volta a se repetir logo após passarmos pela primeira distância de Talbot, portanto nos múltiplos inteiros da distância de Talbot a imagem do objeto difratante é novamente recuperada.

Esse fenômeno, que historicamente surgiu na área da óptica clássica [4, 5], aparece quando incidimos um feixe de luz coerente – fases dos pontos da frente de onda tem uma relação constante entre si – numa rede ou grade de difração e investigamos o resultado dentro dos limites de campo próximo de Fresnel. A grade em questão deve ser necessariamente periódica, significando que ela possui um padrão modulador de fase que se repete por toda sua extensão.

Comumente a modulação de fase que a grade implementa é feita através de fendas. Esse seria o caso em que a transmitância – representação matemática da grade – é basicamente dada por uma função binária, passagem *versus* bloqueio da luz, resultando num padrão similar ao que aparece na Fig. 6.

Esse é um exemplo de grade simples, útil e muito implementada quando o assunto é efeito Talbot, mas é importante citar que existem outros modos de manipular a fase das

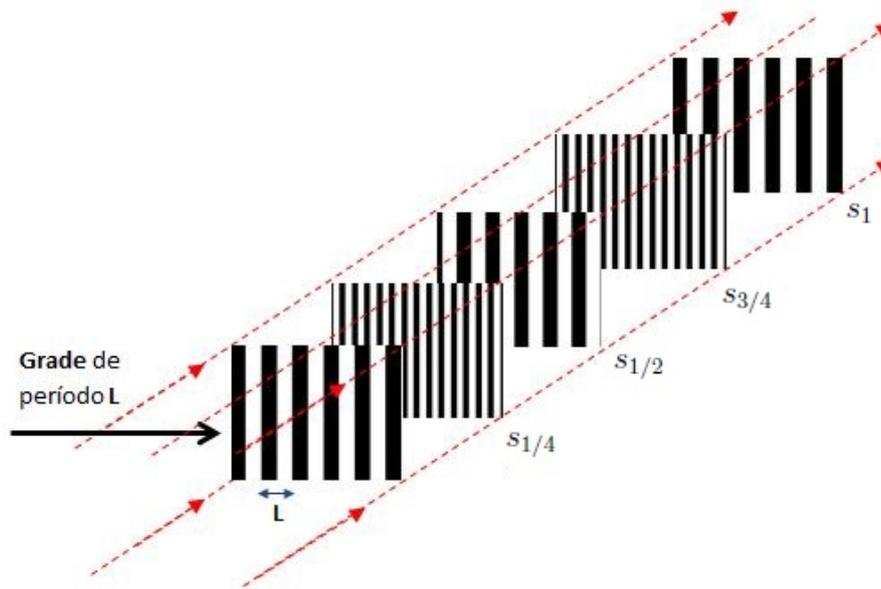


Figura 7: Representação de uma grade binária e as imagens que se formam nas distâncias dadas na figura e dadas em relação à distância de Talbot.

ondas usando redes de difração. Mais detalhes sobre os possíveis tipos de grades são tratados no Cap. 3 deste trabalho.

O caso em que o tapete de Talbot se estende indefinidamente a partir da grade acontece quando idealizamos uma onda plana incidindo sobre uma grade de dimensões infinitas. Nessa configuração certamente que todo o espaço passa a estar dentro do regime de campo próximo. No laboratório é possível simular o uso de uma onda plana. Para isso, o spot do laser é aumentado até que apenas uma parte central dele atravesse a grade, que é obviamente finita, com dimensões razoavelmente pequenas. Então, apesar da curvatura da frente de onda do feixe laser, nessa configuração temos aproximadamente uma onda plana.

Agora vamos derivar a distância de Talbot para uma onda plana e uma grade unidimensional periódica genérica.

A onda plana unitária que se propaga no sentido positivo do eixo z é dada por

$$U(x, y, z) = e^{-ikz}, \quad (17)$$

e a função de transmitância (grade) genérica é dada por

$$t_A(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2in\pi x/L}. \quad (18)$$

Supondo que a grade esteja em $z = 0$ temos que a onda imediatamente após passar pela grade é $U(\xi, \eta, z = 0) = U(x, y, z = 0) \times t_A(\xi)$. Substituindo $U(\xi, \eta, z = 0)$ na Eq. 14, chegamos na seguinte expressão

$$U(x, y, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-\frac{i\pi\lambda n^2 z}{L^2}} e^{2in\pi x/L}. \quad (19)$$

Analisando este resultado notamos que temos exatamente a expressão da grade quando fazemos

$$\frac{\lambda s_1}{L^2} = 2 \quad \Rightarrow \quad s_1 = \frac{2L^2}{\lambda}, \quad (20)$$

para $z = s_1$. O resultado é que nessa posição de z teremos a imagem nítida da própria grade, do mesmo modo que nas posições que sejam múltiplos inteiros desse valor. Assim, de um modo geral, a distância de Talbot é dada por

$$s_j = \frac{2jL^2}{\lambda}, \quad j \in \mathbb{N}. \quad (21)$$

Além das imagens da grade também temos diversas variações dela, que resultam no padrão completo do tapete de Talbot. Como está representado nas Figuras 6 e 7, para valores fracionários de j podemos ter imagens deslocadas de meio período ou cuja frequência é dobrada, por exemplo. Nesse trabalho não focaremos nesse conjunto todo de imagens, conhecido como família de Talbot [3].

2 | ÓPTICA PARAXIAL

2.1 EQUAÇÃO DE HELMHOLTZ

Por muitos anos os cientistas se dividiam entre aqueles que acreditavam que a luz era um corpúsculo e entre aqueles que acreditavam que a luz era uma onda. Esse tema de aparente paradoxo remonta ao séc. XVII, com Christiaan Huygens baseando suas explicações na crença de que a luz era uma onda e Isaac Newton propondo que o correto era pensar na luz como uma partícula [9]. Apenas no final do século XIX é que a teoria ondulatória foi de fato aceita, devido aos trabalhos de James Clerk Maxwell. Em sua teoria a luz é uma onda eletromagnética e sua dinâmica obedece muito bem certas equações, conhecidas como as equações de Maxwell.

Na ausência de cargas ou correntes, e em meio homogêneo, as equações de Maxwell são dadas por essas quatro equações diferenciais acopladas [9]:

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad (22)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (23)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0; \quad (24)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \quad (25)$$

É possível desacoplar essas equações e chegar nas chamadas equação da onda elétrica

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (26)$$

e equação da onda magnética

$$\nabla^2 \vec{H} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (27)$$

onde $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ é o laplaciano e $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ é a velocidade da luz no vácuo. μ_0 e ϵ_0 são a permeabilidade magnética e a permissividade elétrica no vácuo, respectivamente.

Assim, desde que estejamos em um meio linear, isotrópico, homogêneo e não dispersivo, teremos essas duas equações vetoriais indicando que todas as componentes de \vec{E} e \vec{H} se comportam identicamente. Isso nos permite condensar todo o comportamento delas em uma única equação de onda escalar simples [8], também dada por

$$\nabla^2 A(x, y, z; t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A(x, y, z; t)}{\partial t^2} = 0. \quad (28)$$

A é uma função escalar complexa que pode ser escrita como $A(x, y, z; t) = u(x, y, z)e^{-i\omega t}$, ela representa qualquer uma das componentes da onda, que nesse caso é monocromática. Assim, a Eq. 28 é dada por

$$(\nabla^2 + k^2)u(x, y, z) = 0, \quad (29)$$

sendo $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ o número de onda.

Esta é uma equação independente do tempo envolvendo apenas o perfil transversal, ou amplitude complexa, em uma distância z . Portanto, $u(x, y, z)$ é uma função adequada para descrever a perturbação, se previamente conhecemos a dependência temporal. A Eq. 29 é a famosa *equação de Helmholtz* [8].

As soluções mais simples da equação de Helmholtz são as ondas planas e as ondas esféricas [10], representadas na Fig. 8 (a), e dadas por $u = A_0 e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ e $u = \frac{A_0}{r} e^{-ikr}$, respectivamente. Aqui A_0 é uma constante e r é a distância até a origem.

Nesse trabalho essas soluções não são aquelas que de fato nos interessam, o que buscamos é o perfil de onda que melhor modela um laser, ou seja, a onda gaussiana, que também está representada na Fig. 8, e que veremos em mais detalhes na sec. 2.2.

2.1.1 Equação de Helmholtz Paraxial

Uma ferramenta muito útil em várias aplicações teóricas da Física é a luz espacialmente confinada em torno da sua direção de propagação. A realização desse ideal de luz sem divergência não existe, mas um feixe com pouca divergência, ou seja, bastante colimado é previsto pela equação de Helmholtz e produzido pelos lasers.

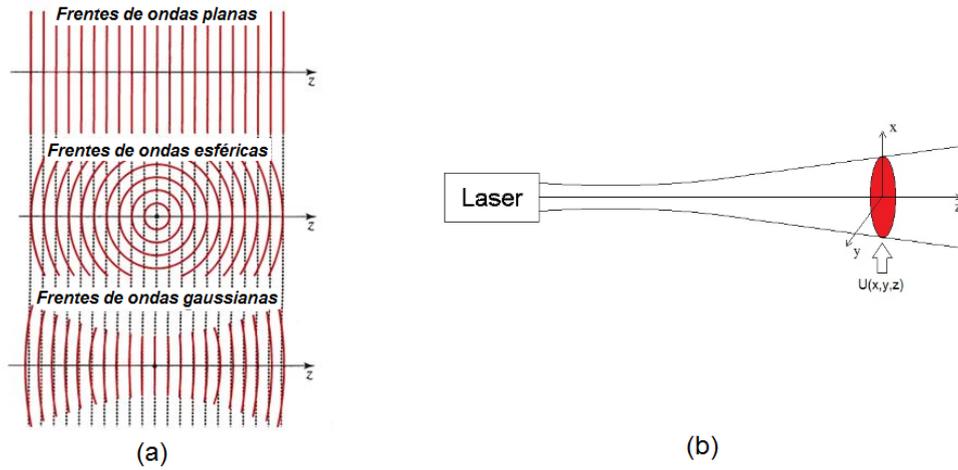


Figura 8: (a) Representação de diferentes formas de frente de onda [12]. (b) Esquema simples de um feixe laser enquanto se propaga na direção z . $U(x, y, z)$ é o perfil transversal do feixe.

Quando estamos interessados em um feixe luminoso que evolui dessa forma dizemos que estamos no regime paraxial. Para obtermos o perfil transversal desse tipo de feixe partimos da Eq. 29, considerando que a sua solução é dada pela amplitude complexa

$$u(\vec{r}) = U(\vec{r})e^{-ikz}. \quad (30)$$

O primeiro termo $U(\vec{r})$ representa o envelope transversal da onda, que viaja na direção z , explicitada no fator exponencial e^{-ikz} . Substituindo na Eq. 29 temos a equação de Helmholtz reescrita da seguinte forma

$$\nabla^2 U(\vec{r}) + 2ik \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial z} = 0. \quad (31)$$

A *aproximação paraxial* é feita assumindo que a modulação de u varia lentamente com z , o que é descrito matematicamente do seguinte modo

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \ll \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \text{ e } 2k \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (32)$$

Finalmente, quando levamos em conta essa aproximação, a Eq. 31 fica dada por

$$\nabla_{\vec{r}}^2 U(\vec{r}) + 2ik \frac{\partial U(\vec{r})}{\partial z} = 0, \quad (33)$$

onde ∇_T^2 é o Laplaciano transversal, ou seja, $\nabla_T^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Essa é a chamada *equação de Helmholtz paraxial*, ou simplesmente equação paraxial, cuja solução nos permite descrever muito bem o comportamento de um laser.

2.2 MODO FUNDAMENTAL – FEIXE GAUSSIANO

Devido ao fato das dimensões das cavidades ressonantes que produzem os lasers serem finitas geralmente é produzido um feixe gaussiano, ou seja, sua distribuição de intensidade nos planos normais à propagação é gaussiano (Fig. 9). Para chegarmos na equação que melhor a descreve partiremos da equação paraxial (Eq. 33), cujas soluções são chamadas de ondas paraxiais [12].

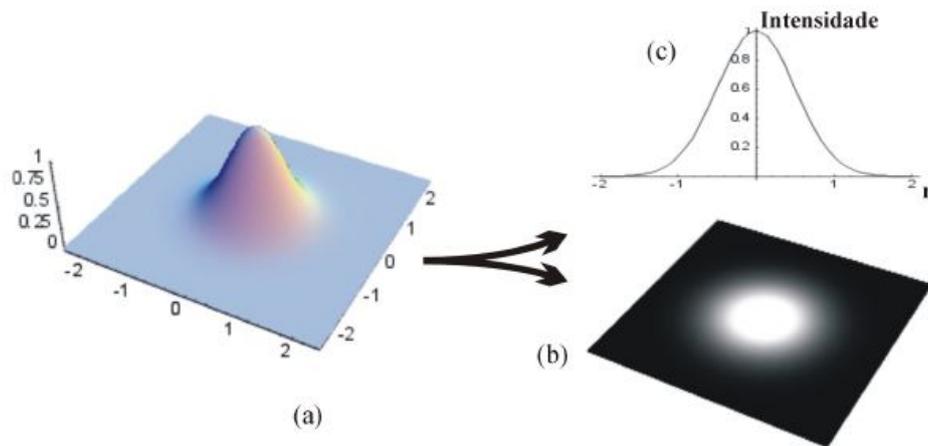


Figura 9: Representação do perfil de intensidade da onda gaussiana. (a) Superfície de intensidade; (b) Distribuição de intensidade; (c) Curva de intensidade em função da distância r ao centro do feixe [15].

As ondas paraxiais possuem um envelope complexo $U(\vec{r})$, que deve variar lentamente como função da posição. Uma solução simples para a equação paraxial é a onda paraboloidal [12], dada por

$$U(\vec{r}) = \frac{A_0}{z} e^{-ik\frac{x^2+y^2}{2z}}. \quad (34)$$

Esta é uma aproximação da onda esférica, ou seja, se utilizarmos a aproximação de Fresnel para ondas esféricas – fazer x e y muito menores que z – chegamos na onda paraboloidal sem propriamente passar pela equação paraxial.

Outra solução é a onda gaussiana, que é obtida a partir da onda paraboloidal por uma transformação simples, na qual substituímos z por $q(z) = z - \zeta$, resultando em

$$U(\vec{r}) = \frac{A_0}{q(z)} e^{-ik \frac{x^2+y^2}{2q(z)}}, \quad (35)$$

sendo ζ uma constante isso corresponde apenas a uma recentralização em $z = \zeta$.

Quando escolhermos ζ como uma constante complexa ainda temos uma possível solução, mas agora muito mais interessante [12]. Podemos escolher $\zeta = -iz_R$, onde z_R é real e dada convenientemente pela chamada distância de Rayleigh. Além disso, fazendo

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} + i \frac{\lambda}{\pi w^2(z)}, \quad q(z) = z - iz_R, \quad (36)$$

i. e., separando a parte real e a parte imaginária dessa fração, a Eq. 35 pode ser finalmente reescrita do modo familiar para uma onda gaussiana, cuja amplitude complexa é dada por

$$u(\vec{r}) = \frac{A_0}{iz_R} \frac{w_0}{w(z)} e^{\frac{-\rho^2}{w^2(z)}} e^{ikz} e^{\frac{-ik\rho^2}{2R(z)}} e^{i\zeta(z)}, \quad (37)$$

com

$$w(z) = \sqrt{w_0^2 \left(1 + \frac{z^2}{z_R^2}\right)}; \quad (38)$$

$$R(z) = z \left(1 + \frac{z_R^2}{z^2}\right); \quad (39)$$

$$\zeta(z) = \arctg(z/z_R); \quad (40)$$

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}. \quad (41)$$

O menor raio da secção transversal do feixe é chamado de cintura w_0 e é definido em $z = 0$. O A_0 é apenas uma constante e $\zeta(z)$ é a fase de Gouy. Falaremos em mais detalhes dos termos $R(z)$ – raio de curvatura da frente de onda – e $w(z)$ – raio da secção transversal do feixe em z – na sequência. Todos esses termos descrevem o modo como

a propagação ao longo do eixo paraxial afeta a dispersão do feixe. Esse fenômeno de dispersão apresenta um papel muito importante na compreensão efetiva da onda gaussiana, ou modo fundamental TEM_{00} , como também é conhecida [8, 12].

2.2.1 Propriedades do Feixe Gaussiano

O nome deste feixe vem do fato de que em qualquer valor de z a **intensidade** é justamente uma função gaussiana, facilmente visualizada quando lembramos que a intensidade óptica é $I(\vec{r}) = |u(\vec{r})|^2$, isto é,

$$I(x, y, z) = |A_0|^2 \left[\frac{w_0}{w(z)} \right]^2 e^{-\frac{2(x^2+y^2)}{w(z)^2}}. \quad (42)$$

O modo como a intensidade é distribuída no plano transversal é representado na Fig. ??, bem como a maneira pela qual a largura $w(z)$ afeta.

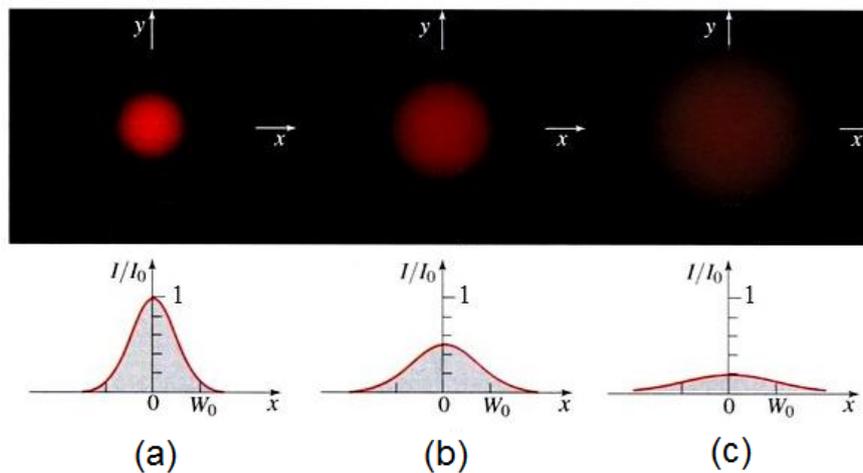


Figura 10: Variação da intensidade $I(z)$ e da largura $w(z)$: (a) $z = 0$; (b) $z = z_R$; (c) $z = 2z_R$ [12].

Vamos começar analisando a **largura do feixe** $w(z)$ dada pela Eq. 38, cujo diâmetro $2w(z)$ também é chamado de tamanho do *spot*. Seu valor mínimo é conhecido por cintura w_0 , e depende do comprimento de onda λ , pois relaciona-se com z_R de acordo com a Eq. 41.

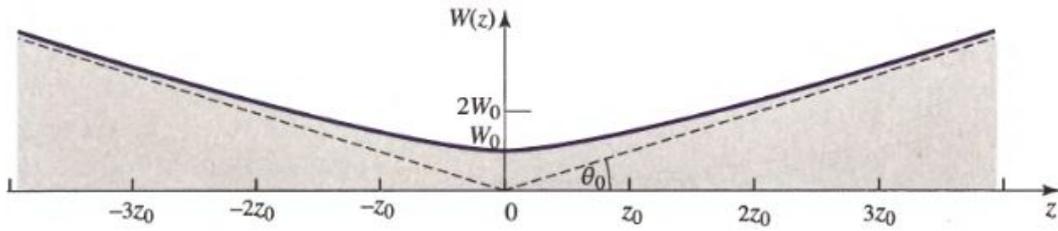


Figura 11: Gráfico da largura $w(z)$ em função de z [12].

Na representação da evolução desse parâmetro, Fig. 10 e 11, vemos que a largura atinge o seu valor mínimo na cintura e depois expande-se, acontecendo o mesmo com a distribuição de energia do feixe. A intensidade cai pela metade em $z = z_R$, enquanto $w(z = z_R) = \sqrt{2}w_0$.

Voltando à Eq. 38, vemos que a fase do feixe gaussiano é dada por

$$\varphi(\vec{r}) = kz - \frac{k(x^2 + y^2)}{2R(z)} - \zeta(z), \tag{43}$$

onde o primeiro termo da equação acima, kz , é a fase de uma onda plana.

O segundo termo da fase é responsável pela forma da frente de onda. Nesse termo aparece a função $R(z)$, cuja evolução vemos nas Figs. 12 e 14. Quando $z = 0$ ou $z \rightarrow \infty$ a **curvatura da frente de onda**, $R(z)$, é infinita, sendo que o seu valor mínimo ocorre para $z = \pm z_R$ e vale $R_{min} = 2z_R$. É importante lembrar que $R(z)$ infinito significa que a frente de onda é plana.

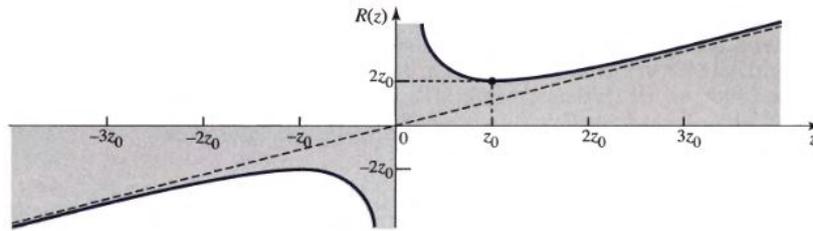


Figura 12: Gráfico da largura $R(z)$ em função de z [12].

A variação do terceiro termo da fase, chamada de **fase de Gouy** $\zeta(z)$, é mostrada na Fig. 13. Esse termo representa o desvio de fase em relação quer a uma onda plana, quer a uma onda cujo raio de curvatura variável é $R(z)$. Assim, a defasagem $\zeta(z)$, dada pela

Eq. 40, permite verificar que com o aumento da distância percorrida, a frente de onda tende à da onda plana, como também é visto na abordagem de $R(z)$.

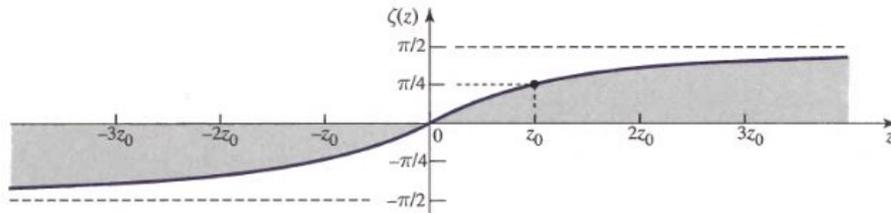


Figura 13: Gráfico da largura $\zeta(z)$ em função de z [12].

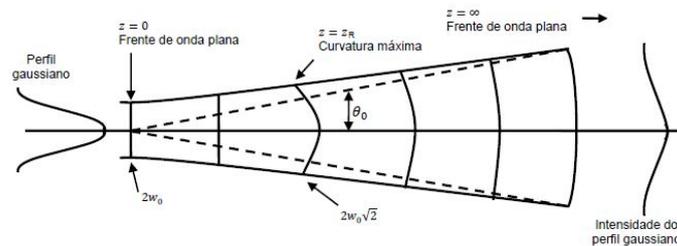


Figura 14: Propagação de uma onda gaussiana, com divergência espacial representada segundo seus principais parâmetros: $w(z)$, $R(z)$ e z_R [16].

Agora é preciso pontuar que a equação paraxial, Eq. 33, por ser uma equação diferencial, naturalmente possui uma família infinita de soluções. Até agora focamos apenas na onda gaussiana (Eq. 37), de extrema importância, mas que é apenas a solução de menor ordem desta família [10]. Na seção seguinte veremos quais são as outras soluções da equação paraxial.

2.3 MODOS GAUSSIANOS DE ORDENS SUPERIORES

Para obter a família infinita das soluções da equação de Helmholtz paraxial, basicamente o que devemos fazer é, primeiro, escolher o tipo de coordenada – retangular (x, y, z) ou cilíndrica (ρ, φ, z) – que estamos interessados e, segundo, supor uma forma

de solução mais geral do que a proposta para obter a onda gaussiana, ou modo fundamental.

Veremos que a onda gaussiana é o modo fundamental independente do sistema de coordenadas escolhido. Esses modos superiores ainda apresentarão uma frente de onda paraboloidal, como um feixe gaussiano, mas diferentemente deste a distribuição da intensidade não será mais gaussiana, e sim obedecerá outros tipos de funções bem conhecidas. Aqui a questão é que a modulação do envelope complexo da onda acontecerá de um modo diferente. Além disso, a fase também poderá ser afetada.

2.3.1 Modos Hermite – Gaussianos (HG)

Nesta secção iremos estudar os feixes de ordem superior de HG, que satisfaz a equação paraxial de Helmholtz, sendo por isso válidas as aproximações consideradas quando analisamos o feixe gaussiano. Nesse caso, vamos supor uma solução mais geral do que a dada pela Eq. 35, que é

$$U(x, y, z) = \mathcal{X} \left(\sqrt{2} \frac{x}{w(z)} \right) \mathcal{Y} \left(\sqrt{2} \frac{y}{w(z)} \right) \exp [i\mathcal{Z}(z)] \frac{A_0}{q(z)} e^{-ik \frac{x^2+y^2}{2q(z)}}. \quad (44)$$

Note o acréscimo dos três primeiros termos, com todos sendo necessariamente funções reais. Substituindo essa equação na Eq 33, o resultado é que essas três funções reais estão relacionadas aos **polinômios de Hermite** do seguinte modo,

$$\mathcal{X}(u) = \mathbb{H}_l(u); \quad \mathcal{Y}(v) = \mathbb{H}_m(v); \quad \mathcal{Z}(z) = (l + m + 1)\zeta(z), \quad (45)$$

onde $l = 0, 1, 2, \dots$ e $m = 0, 1, 2, \dots$

Finalmente, o resultado final no envelope complexo desse feixe é

$$U_{l,m}(x, y, z) = A_{l,m} \left[\frac{w_0}{w(z)} \right] \mathbb{G}_l \left[\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right] \mathbb{G}_m \left[\frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right] e^{-ikz} e^{-ik \frac{x^2+y^2}{2R(z)}} e^{i(l+m+1)\zeta(z)}, \quad (46)$$

onde

$$\mathbb{G}_l(u) = \mathbb{H}_l(u) e^{\left(\frac{-u^2}{2}\right)}, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (47)$$

A forma dessa função, que justifica o nome dado ao feixe, está representada na Fig. 15 (a). $w(z)$, $R(z)$ e $\zeta(z)$ são dados pelas Eqs. (38), (39) e (40) respectivamente, e a ordem do modo é dada por $l + m$.

A intensidade dos modos HG é dada por

$$I_{l,m}(x, y, z) = |A_{l,m}|^2 \left[\frac{w_0}{w(z)} \right]^2 \mathbb{G}_l^2 \left[\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right] \mathbb{G}_m^2 \left[\frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right], \quad (48)$$

que está representada na Fig. 15 (b) para algumas ordens baixas.

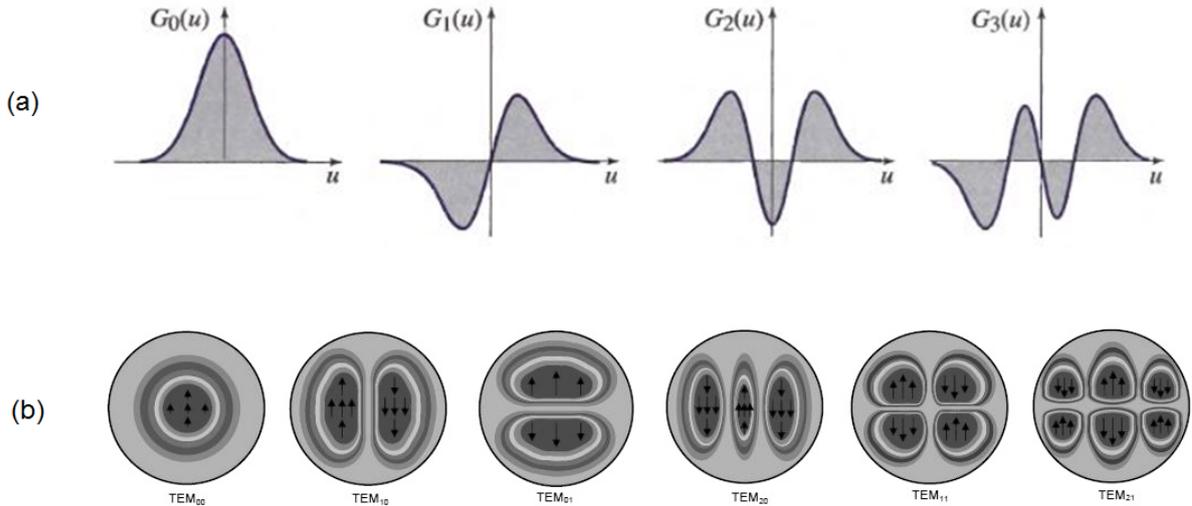


Figura 15: (a) Algumas funções hermite-gaussianas [12]. (b) Distribuição de intensidade de alguns feixes HG no plano transversal. A ordem \$(l,m)\$ é indicada em cada caso. As setas indicam a fase. Para a ordem mais baixa recuperamos o perfil gaussiano.

2.3.2 Modos Laguerre – Gaussianos (LG)

Os modos HG formam um conjunto de soluções completo para a equação paraxial. Entretanto, é possível obter um conjunto alternativo de soluções, igualmente completo, chamado de modos laguerre-gaussianos. Esses feixes são obtidos quando resolvemos a equação paraxial em coordenadas cilíndricas, ou seja,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + 2ik \frac{\partial U}{\partial z} = 0. \quad (49)$$

Similarmente ao modo como foi feito para chegar nos modos HG, a amplitude complexa do feixe LG é obtida,

$$U_{p,l}(x, y, z) = A_{p,l} \left[\frac{w_0}{w(z)} \right] \mathbb{L}_l^p \left[\frac{2\rho^2}{w^2(z)} \right] e^{-\frac{\rho^2}{w^2(z)}} e^{-ikz} e^{-ik\frac{\rho^2}{2R(z)}} e^{-ip\phi} e^{i(p+2l+1)\zeta(z)}, \quad (50)$$

onde novamente $w(z)$, $R(z)$ e $\zeta(z)$ são dados pelas Eqs. (38), (39) e (40) respectivamente. O perfil gaussiano novamente é obtido quando fazemos $p = 0$ e $l = 0$, como era de se esperar.

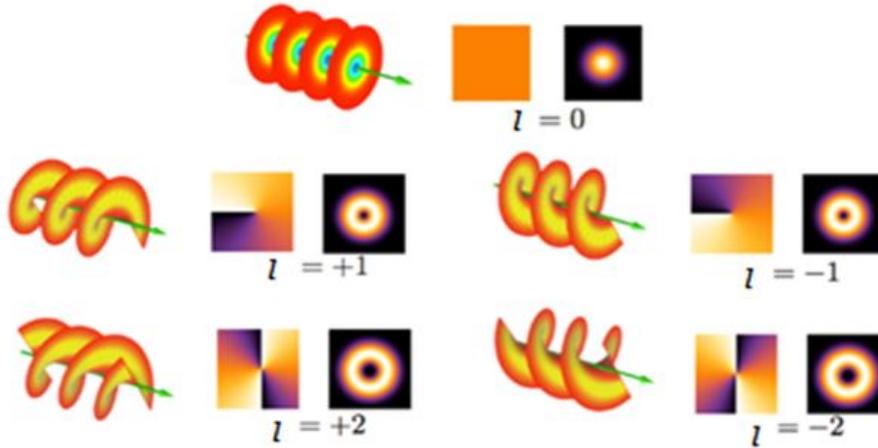


Figura 16: Representação da distribuição de intensidade e da frente de onda para diferentes valores de l . Note como o sinal da carga topológica afeta o sentido da hélice [17].

$\mathbb{L}_n^p(\cdot)$ é a **função polinomial generalizada de Laguerre**. A ordem desse modo é dada por $2p + |l|$. $|p| \geq 0$ é o índice radial e indica o número de anéis no plano transversal. l é o índice azimutal, ou carga topológica, responsável pela forma helicoidal da frente de onda, ilustrada na Fig. 16, quando $l \neq 0$.

2.3.3 Decomposição e relação entre os modos paraxiais

Qualquer feixe paraxial em um meio homogêneo pode ser expandido tanto em modos HG quanto em modos LG, uma vez que ambos formam conjuntos completos de soluções da Eqs. 33 e 49, respectivamente. Além do mais, como estamos simplesmente lidando com dois sistemas de coordenadas, é possível estabelecer uma transformação linear

de um conjunto de soluções para o outro, para isso é utilizada a relação entre os polinômios de Hermite e Laguerre, o que nos leva a seguinte transformação:

$$U_{pl}^{LG}(x, y, z) = \sum_{k=0}^N i^k b(p, l, k) U_{N-k, k}^{HG}(x, y, z), \tag{51}$$

com $N = 2p + |l|$ e coeficientes

$$b(p, l, k) = \sqrt{\frac{(N - k)!}{2^k p! l!}} \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dt^k} [(1 - t)^p (1 + t)^l] \Big|_{t=0}. \tag{52}$$

A decomposição de HG em LG, e vice-versa, ocorre dentro da mesma ordem, como ilustrado na figura abaixo.

(p l)

$$\begin{aligned}
 0 +2 \quad \bigcirc &= \frac{1}{2} \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} + \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} - \frac{1}{2} \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} \\
 1 +1 \quad \odot &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} \\
 0 -2 \quad \bigcirc &= \frac{1}{2} \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} - \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} - \frac{1}{2} \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{matrix}
 \end{aligned}$$

Figura 17: Exemplo de decomposição de modos LG em modos HG.

3

ÓPTICA DE FOURIER E MODULADORES ESPACIAIS

A transformada de Fourier é uma técnica matemática muito utilizada no estudo da propagação de feixes luminosos. Inclusive, quando o estudo da óptica é feito com o auxílio da ferramenta matemática de Fourier temos a chamada **ótica de Fourier**. A ótica de Fourier permite estudar facilmente a evolução linear desses feixes, já que ela atua realizando a decomposição de uma onda eletromagnética genérica em funções simples, sendo nesse caso identificadas como ondas planas de diferentes direções e amplitudes [12], como ilustrado na Fig. 18.

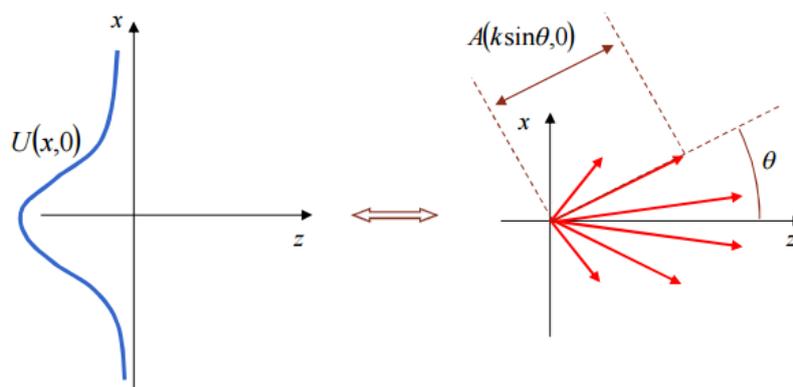


Figura 18: Representação de uma função no espaço real x passando para o espaço recíproco k_x , após a transformada de Fourier $\mathcal{F}\{U(x)\} = A(k_x) = \int_{-\infty}^{\infty} U(x) e^{-2\pi i k_x x} dx$.

Objetos capazes de manipular as ondas luminosas utilizando o fenômeno da difração são chamados de elementos ópticos difrativos. Eles fazem a modulação espacial de uma frente de onda luminosa, e portanto também são conhecidos como **moduladores espaciais**. Então, basicamente, uma grade de difração, que é um modulador periódico, é qualquer arranjo que impõe em uma onda incidente uma variação periódica de amplitude ou fase, ou ambos [9].

Qualquer modulador ou grade de difração pode ser representado matematicamente pela chamada **função de transmitância**. Na verdade, no caso de não ter difração por transmissão e sim por reflexão diz-se função de reflectância [9], mas nesse trabalho vamos utilizar apenas o termo função de transmitância em ambos os casos.

Em qualquer padrão de modulador a função de transmitância pode ser representada em forma de uma série de Fourier. No caso das grades periódicas, que é pré-requisito para o efeito Talbot, a série de Fourier é ainda mais interessante de ser usada, já que uma função periódica pode ser mais facilmente bem representada por uma soma de funções harmônicas. Um ilustração dessa decomposição, no caso de um função genérica e sem periodicidade, está na Fig. 19 (a).

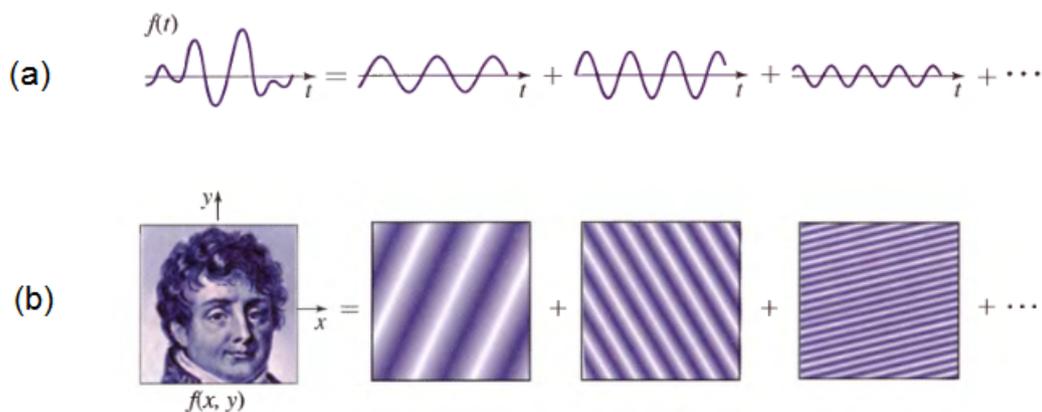


Figura 19: Uma função arbitrária pode ser analisada como uma soma de funções harmônicas de frequências e amplitudes complexas. Essa função pode ser, por exemplo, do tipo (a): $f(t)$; ou (b): $f(x, y)$, desenhada aqui esquematicamente como grades [12].

Técnicas de processamento de imagem têm por base o uso da transformada de Fourier. Uma ilustração disso está na Fig. 19 (b). Ao invés de um gravura o mesmo poderia ser feito para uma grade de difração de qualquer padrão, por exemplo. Na verdade, as aplicações da formulação de Fourier são diversas.

3.1 INTRODUÇÃO À TRANSFORMADA DE FOURIER

A transformada de Fourier é uma operação que leva uma função de um espaço para o seu espaço recíproco, sendo o inverso feito através da chamada transformada de Fourier inversa. A descrição de Fourier da propagação da luz comumente tem o interesse de passar uma função de onda do espaço real (x, y) para o recíproco (k_x, k_y) , que é o espaço das frequências espaciais.

A transformada de Fourier de uma função $g(x, y)$, com duas variáveis independentes x e y , representada por $\mathcal{F}\{g\}$, pode ser definida por [13]:

$$\mathcal{F}\{g\} = \iint_{-\infty}^{\infty} g(x, y) e^{-2\pi i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y, \quad (53)$$

enquanto a inversa de uma função $G(k_x, k_y)$, representada por $\mathcal{F}^{-1}\{G\}$, é definida por

$$\mathcal{F}^{-1}\{G\} = \iint_{-\infty}^{\infty} G(k_x, k_y) e^{2\pi i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y. \quad (54)$$

Acima temos a definição bidimensional da transformada de Fourier, que pode ser vista como uma espécie de série de Fourier no espaço contínuo. Nesse trabalho também é útil a série de Fourier, na sua forma discreta, que para uma função $f(x)$ é definida por [13]:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) \right], \quad (55)$$

com

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) dx. \quad (56)$$

Aqui é assumido que essa série converge para $f(x)$, e que essa função é periódica de período T . A série de Fourier ainda pode ser representada na forma complexa. Nesse caso, a função $f(x)$ é definida por

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left\{2\pi i n \frac{x}{T}\right\}, \quad (57)$$

com

$$c_n = \frac{1}{L} \int_T f(x) \exp\left\{-2\pi i n \frac{x}{T}\right\} dx, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (58)$$

A relação entre os coeficientes de Fourier nessas duas representações é a seguinte [13]:

$$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n) & (n > 0) \\ \frac{1}{2}(a_n + ib_n) & (n < 0) \\ \frac{a_0}{2} & (n = 0) \end{cases} . \quad (59)$$

3.1.1 Difração com Transformada de Fourier

Voltando a tratar da equação da difração de Fresnel, Eq. 14, agora iremos vê-la dentro da óptica de Fourier. Antes de mais nada, a Eq. 14 é reescrita do seguinte modo:

$$U(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta, z) h(x - \xi, y - \eta, z) d\xi d\eta \quad (60)$$

com

$$h(x, y, z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} \exp \left\{ \frac{ik}{2z}(x^2 + y^2) \right\} . \quad (61)$$

Essa expressão, quando escrita dessa forma, é conhecida como integral de convolução [13]. Nesse caso, temos então uma convolução entre as funções $U(\xi, \eta, z)$ e $h(x, y, z)$, que também é representada como:

$$U(x, y, z) = U(\xi, \eta, z) * h(x, y, z). \quad (62)$$

O teorema da convolução garante que a transformada de Fourier da convolução de duas funções é igual ao produto das transformadas de Fourier de cada uma dessas funções, ou seja,

$$\mathcal{F}\{U(\xi, \eta, z) * h(x, y, z)\} = \mathcal{F}\{U(\xi, \eta, z)\} \cdot \mathcal{F}\{h(x, y, z)\}, \quad (63)$$

desde que as duas funções em questão sejam absolutamente integráveis [13]. Portanto,

$$U(x, y, z) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{U(\xi, \eta, z)\} \cdot \mathcal{F}\{h(x, y, z)\}\}, \quad (64)$$

com

$$\mathcal{F}\{h(x, y, z)\} = H(k_x, k_y, z) = e^{ikz} e^{-i\lambda z \pi(k_x^2 + k_y^2)}. \quad (65)$$

$H(k_x, k_y, z)$ é chamada de função transferência, e $U(\xi, \eta, z)$ é a expressão do campo imediatamente após atravessar o objeto difratante.

Essa formulação da Eq. 64 com transformada de Fourier é totalmente equivalente à integral da Eq. 14, mas sua utilização pode tornar o cálculo numérico mais prático. Nas simulações feitas para esse trabalho, no programa **MATLAB**, utilizamos essa formulação.

3.2 GRADES DE DIFRAÇÃO E SUAS FUNÇÕES DE TRANSMITÂNCIA

Uma grade ou rede de difração pode ser obtida através de uma espécie de relevo na superfície de um material (transparente ou reflexivo) ou por uma variação no índice de refração ao longo do objeto sobre o qual incidimos um feixe. Ambos os modos causam uma modulação de fase e/ou amplitude na frente de onda do feixe. Alguns exemplos de moduladores na forma de grades e a forma da função de transmitância respectiva estão mostrados na Fig. 20.

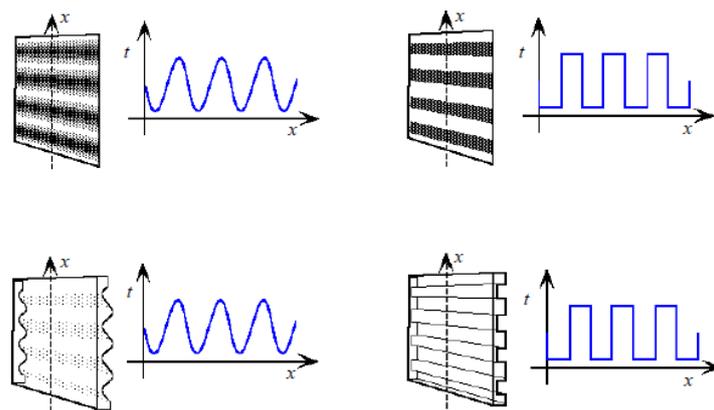


Figura 20: Esquematização de alguns exemplos de grades de difração ao lado de suas representações matemáticas na forma de funções $t(x)$ [18].

A função de transmitância de um objeto é definida pela relação entre a onda incidente $U_0(\xi, \eta, z = 0_-)$ e a onda de saída $U(\xi, \eta, z = 0_+)$ do seguinte modo [9]:

$$t_A(x) \equiv \frac{U(\xi, \eta, z = 0_+)}{U_0(\xi, \eta, z = 0_-)}. \quad (66)$$

Dessa relação é óbvio que se a tela é iluminada por uma incidência normal de uma onda plana unitária, a distribuição do campo na abertura é simplesmente igual à $t_A(x)$.

Em geral $t_A(x)$ é uma função complexa, desde que a amplitude e a fase da luz possam ser alteradas pelo objeto que essa função representa. Para o caso da modulação ser periódica unidimensional de fase e/ou amplitude, a função de transmitância tem a seguinte forma geral, quando escrita na forma de série de Fourier complexa (Eq. 57):

$$t_A(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp \left\{ 2\pi i n \frac{x}{L} \right\}. \quad (67)$$

com

$$c_n = \frac{1}{L} \int_L t_A(x) \exp \left\{ -2\pi i n \frac{x}{L} \right\} dx, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (68)$$

Nessa expressão L é a periodicidade da grade. É importante que $|t_A(x)| \leq 1$, de maneira que o objeto difratante não aumente a intensidade da onda incidente, o que não faria sentido.

Se, como é frequentemente o caso, a grade ou transmite totalmente ou bloqueia totalmente a onda incidente, $t_A(x)$ se torna identicamente 1 para x na abertura e 0 em todo o resto, ou seja,

$$t_A(x) = \begin{cases} 1, & (0 \leq x \leq \tau/2) \\ 0, & (\tau/2 \leq x \leq L - \tau/2) \\ 1, & (L - \tau/2 \leq x \leq L) \end{cases}, \quad (69)$$

cujo padrão aqui especificado no período L se repete ao longo do eixo x , como ilustra o plot, feito com $L = 1$ e $\tau = 0.5$, na Fig. 21. Este é um exemplo unidimensional do tipo de função que atua dessa forma. Utilizando as Eqs. 55 e 57 podemos reescrever a Eq. 69 como

$$t_A(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp \left\{ 2\pi i n \frac{x}{L} \right\}, \quad c_n = \begin{cases} \frac{\tau}{L}, & (n = 0) \\ \sin \left(\frac{n\pi\tau}{L} \right) \frac{1}{n\pi}, & (n \neq 0) \end{cases}, \quad (70)$$

ou ainda, como

$$t_A(x) = \frac{\tau}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin\left(\frac{\pi n\tau}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right). \quad (71)$$

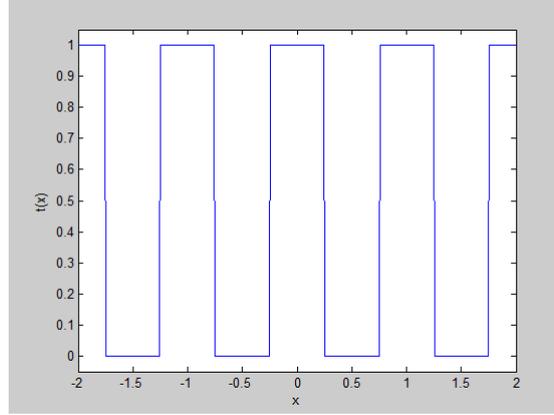


Figura 21: Plot da função dada pela Eq. 69, utilizando o MATLAB, para $L = 1$ e $\tau = 0.5$, que é a largura da fenda na grade. Quando $t(x) = 1$ a onda atravessa a grade.

3.3 MODULADOR ESPACIAL DE LUZ (SLM)

Dentre os possíveis moduladores espaciais existe o SLM (do inglês *Spatial Light Modulator*), que é formado por um conjunto de microcélulas de cristal líquido. Ele é atrativo por ser um elemento ótico dinâmico e pelas aplicações envolvendo processamento de imagem e de dados óticos. A limitação deste tipo de elemento ótico difrativo está na sua resolução, relacionada ao tamanho das células do cristal líquido.

Utilizando uma interface computacional aplica-se voltagens em cada célula independentemente, que influencia as propriedades de polarização do material que compõe o SLM, de modo a obter uma reflectância $\mathcal{R}(x, y)$, que por sua vez nos permite obter um padrão específico de difração [12].

Nesse trabalho utilizamos um modulador de fase SDE1024 Low Cost Spatial Light Modulator, Fig. 22, baseado nesse tipo de manipulação do material. Ele é um equipamento de baixo custo, com resolução de 1024×768 pixels, capaz de gerar as grades periódicas do tipo binária que temos interesse [19].

Existem outros tipos de SLMs, baseados em modificações de outras características do material, como índice de refração, por exemplo.



Figura 22: SLM de baixo custo da *Cambridge Correlator*, utilizado na parte experimental desse trabalho. Ele opera com comprimentos de onda de 430nm até 650nm, e possui uma área útil de 4.3-7mm [19].

4

ESTUDO DO EFEITO TALBOT COM FEIXE GAUSSIANO

Parte do primeiro capítulo, sec. 1.5, foi dedicada à explicação do que se trata o efeito Talbot. Como já foi dito brevemente, o efeito Talbot normalmente aparece na literatura e nos trabalhos acadêmicos acompanhado da distância de Talbot calculada para o caso simples da onda plana (Eq. 21). Fazer isso é compreensível e válido, afinal essa equação é simples e é razoavelmente fácil simular uma onda plana no laboratório – através do aumento do diâmetro de um feixe laser, que a princípio tem um perfil gaussiano.

Entretanto, esse trabalho busca questionar o que aconteceria se não fosse feita essa aproximação de onda plana. A motivação para isso surgiu dentro de um artigo de revisão intitulado "*The Talbot effect: recent advances in classical optics, nonlinear optics, and quantum optics*"[4]. Nesse trabalho surge a questão sobre uma grade periódica ser iluminada por uma onda gaussiana. Entretanto, o artigo de revisão não apresenta uma distância de Talbot corrigida, e sim uma condição para obtê-la, sem nenhuma análise sobre a sua validade. Ao buscar o trabalho original – feito por Patorski (1989) [5] –, que calcula essa condição de Talbot, vimos novamente que não aparecia nenhuma investigação desse resultado, apenas uma breve discussão.

Então, como parecia que a condição vista nestes trabalhos poderia resultar em correções significativas na distância de Talbot, decidimos investigar qual é realmente o efeito Talbot advindo de uma onda gaussiana difratada por uma grade periódica. Para tal, todo o cálculo para chegar até a condição de Talbot foi refeito, com uma posterior análise teórica e também experimental.

4.1 DIFRAÇÃO DE CAMPO PRÓXIMO PARA O FEIXE GAUSSIANO

O feixe gaussiano é dado pela Eq. 37, juntamente com as funções das Eqs. (38-41). De modo a tornar o resultado mais geral, mudamos a origem de z , que normalmente

fica sobre a posição da cintura w_0 , utilizando um parâmetro d – distância entre a cintura do feixe e o plano da grade – livre, indicado na Fig. 23. Então, para fazer $z = 0$ em cima da grade vamos passar $U(x, y, z) \rightarrow U(x, y, z + d)$. Assim, o campo imediatamente antes de passar pela grade é dado por

$$U(\xi, \eta, d_-) = A_0 \frac{w_0}{w_d} e^{\frac{-\rho^2}{w_d^2}} e^{-ikd} e^{\frac{-ik\rho^2}{2R_d^2}} e^{i\xi\zeta_d}, \quad (72)$$

sendo (ξ, η) coordenadas definidas no plano da grade, d_- utilizado para indicar que a onda ainda não foi transmitida pela grade e $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$. Reescrevemos as constantes da expressão acima como $A \equiv A_0 \frac{w_0}{w_d} e^{-ikd} e^{i\xi\zeta_d}$, de modo que tenhamos

$$U(\xi, \eta, d_-) = A e^{\frac{-\rho^2}{w_d^2}} e^{\frac{-ik\rho^2}{2R_d^2}}, \quad (73)$$

com

$$\begin{aligned} w_d &= \sqrt{w_0^2 \left(1 + \frac{d^2}{z_R^2}\right)}; \\ R_d &= d \left(1 + \frac{z_R^2}{d^2}\right); \\ \zeta_d &= \arctg(d/z_R). \end{aligned} \quad (74)$$

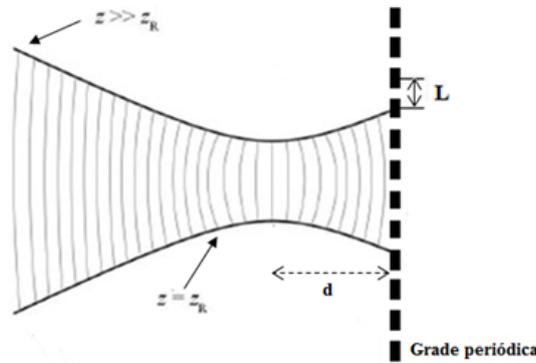


Figura 23: Representação esquemática da distância entre a posição da cintura do feixe gaussiano e o plano da grade de difração periódica.

Notando a relação $R_d = z_R^2 w_d^2 / d w_0^2$, a onda é reescrita como

$$U(\xi, \eta, d_-) = A e^{-J(\xi^2 + \eta^2)}, \quad J \equiv \left(1 + \frac{i k d w_0^2}{2 z_R^2} \right) \frac{1}{w_d^2}. \quad (75)$$

Sabemos que a forma geral de uma grade periódica é dada pela série de Fourier da Eq. 67. Então, segundo a Eq. 66, que define a função de transmitância, a onda imediatamente após passar pela grade é

$$U(\xi, \eta, d_+) = A e^{-J(\xi^2 + \eta^2)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n \xi / L}. \quad (76)$$

Na sec. 3.1.1 foi visto que a integral da difração de campo próximo, Eq. 14, é totalmente equivalente à Eq. 64, que utiliza transformada de Fourier. Logo, para obter a expressão da onda, após passar pela grade e ser propagada no espaço livre por uma distância z , optamos por utilizar a seguinte expressão:

$$\mathcal{F}\{U(x, y, z)\} = \mathcal{F}\{U(\xi, \eta, d_+)\} \times \mathcal{F}\{h(x, y, z)\}, \quad (77)$$

ou melhor,

$$U(x, y, z) = \mathcal{F}^{-1} [\mathcal{F}\{U(\xi, \eta, d_+)\} \times \mathcal{F}\{h(x, y, z)\}]. \quad (78)$$

Primeiro, faremos a transformada de Fourier $\mathcal{F}\{h(x, y, z)\}$, sendo $h(x, y, z)$ comumente conhecida como propagador de Fresnel [20] e dada pela Eq. 61. Então, devemos resolver a seguinte integral dupla:

$$\mathcal{F}\{h(x, y, z)\} = \iint_{-\infty}^{\infty} h(x, y, z) e^{-2\pi i(k_x x + k_y y)} dx dy. \quad (79)$$

Apenas substituindo $h(x, y, z)$ na equação acima e reorganizando a posição dos termos temos

$$\mathcal{F}\{h\} = \frac{e^{i k z}}{i \lambda z} \left(e^{-i \lambda z \pi k_x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i \pi}{z \lambda} (x - z \lambda k_x)^2} dx \right) \left(e^{-i \lambda z \pi k_y^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i \pi}{z \lambda} (y - z \lambda k_y)^2} dy \right), \quad (80)$$

com as duas integrais, que são totalmente similares, resolvidas usando [14]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-p^2 x^2 \pm q x} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{p} e^{q^2 / 4 p^2} \quad (\text{Re}(p^2) > 0), \quad (81)$$

de modo que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i\pi}{z\lambda}(j-z\lambda k_j)^2} dj = \sqrt{\lambda z} e^{i\pi/4}, \quad j = x, y. \quad (82)$$

Portanto,

$$\mathcal{F}\{h(x, y, z)\} = H(k_x, k_y, z) = e^{ikz} e^{-i\lambda z \pi(k_x^2 + k_y^2)}. \quad (83)$$

Agora partimos para a transformada de Fourier $\mathcal{F}\{U(\xi, \eta, d_+)\}$. Substituindo a Eq. 76 na Eq. 53 e simplesmente reescrevendo de modo conveniente temos:

$$\mathcal{F}\{U_{d_+}\} = A \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-J\xi^2} e^{2\pi i \left(\frac{n}{L} - k_x\right) \xi} d\xi \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-J\eta^2} e^{-2\pi i k_y \eta} d\eta \right). \quad (84)$$

Para resolver as integrais que aparecem na expressão acima usamos novamente a Eq. 81, de modo que

$$\mathcal{F}\{U_{d_+}\} = A \frac{\pi}{J} e^{-\frac{\pi^2(k_x^2 + k_y^2)}{J}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-\frac{\pi^2 n^2}{JL^2}} e^{\frac{2\pi^2 n k_x}{JL}}. \quad (85)$$

Finalmente, para obter $U(x, y, z)$ já difratado e propagado, vamos fazer a transformada de Fourier inversa (Eq. 54) do produto da Eq. (83) por (85), i. e.,

$$U(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} (\mathcal{F}\{U(x, y, d_+)\}) \cdot H(k_x, k_y, z) e^{2\pi i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y, \quad (86)$$

que pode ser reescrita como

$$U(x, y, z) = A \frac{\pi}{J} e^{ikz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-\frac{\pi^2 n^2}{JL^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi^2}{J} + i\lambda z \pi\right) k_x^2} e^{2\pi \left(-\frac{\pi n}{JL} + ix\right) k_x} dk_x \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{\pi^2}{J} + i\lambda z \pi\right) k_y^2} e^{2\pi i y k_y} dk_y. \quad (87)$$

Utilizando a Eq. 81 chegamos na seguinte expressão:

$$U(x, y, z) = \left(\frac{w_0^2 - i\lambda d}{\lambda(z_R + i(z-d))} \right) e^{\frac{-\pi(x^2 + y^2)}{\lambda(z_R + i(z-d))}} \\ \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[c_n e^{\frac{2\pi x n}{L} \left(\frac{z z_R}{z_R^2 + (z-d)^2} \right)} e^{\frac{-\pi \lambda z_R z^2 n^2}{(z_R^2 + (z-d)^2) L^2}} \right] e^{-i\pi \lambda z \left(\frac{z_R^2 - d(z-d)}{z_R^2 + (z-d)^2} \right) \frac{n^2}{L^2}} e^{2\pi i x \frac{n}{L} \left(\frac{z_R^2 - d(z-d)}{z_R^2 + (z-d)^2} \right)}. \quad (88)$$

Essa é a forma final e completa da onda gaussiana difratada e propagada, da qual resulta a condição de Talbot. Mas antes de encontrar e analisar essa condição vamos falar sobre alguns termos dessa expressão.

Na primeira linha da Eq. (88) temos os termos que aparecem antes do somatório, eles não participam da formação do padrão de difração. O papel deles é descrever a propagação de um feixe gaussiano no espaço livre [5], com a parte real da exponencial modulando a intensidade enquanto a parte imaginária se relaciona com a curvatura da frente de onda do feixe.

Na segunda linha desta equação todos os termos dependem da variável n , porém algumas exponenciais são reais e outras imaginárias. As exponenciais reais que estão junto com c_n dentro do colchetes formam novos coeficientes de Fourier. Segundo Patorski (1989) [5], essas exponenciais reais apenas descrevem mudanças de amplitude nas direções impostas pelas ordens de difração da grade, e assim não importam para a análise das imagens de Talbot. E pelas simulações apresentadas na sec. 4.5, que levam em conta essas exponenciais, vimos que esses termos realmente não parecem ser significativos quando queremos avaliar o padrão a ser formado.

4.2 A CONDIÇÃO DE TALBOT

O dois últimos termos da Eq. 88 é que indicam o que devemos buscar se queremos recuperar a série de Fourier que dá origem à função de transmitância da grade de difração. Na última exponencial notamos que haverá uma espécie de reescalonamento no eixo x , ou seja,

$$x \longrightarrow x \left(\frac{z_R^2 - d(z - d)}{z_R^2 + (z - d)^2} \right), \quad (89)$$

que podemos considerar como uma amplificação lateral.

A condição de Talbot é retirada do penúltimo termo da Eq. 88. Fazendo $d = 0$ apenas por simplicidade, e seguindo de modo análogo de como fizemos para o efeito Talbot ocorrer para a onda plana, aqui queremos que essa exponencial se torne igual a 1. Para conseguirmos isso é preciso ter $z = s'_j$ de tal modo que

$$\frac{\lambda s'_j w_0^2}{L^2 w_z^2} = 2j, \quad (j \in \mathbb{N}), \quad (90)$$

o que resulta na condição de Talbot [4]:

$$s'_j = \frac{2jL^2}{\lambda} \left(\frac{w_z}{w_0} \right)^2, \quad (91)$$

com $w_z = w_0 \sqrt{z_R^2 - s_j'^2} / z_R$. Assim, para valores inteiros de j esperamos recuperar exatamente a imagem da grade. Mas como vimos nas Figs. 6 e 7, é bom lembrar que valores de j fracionários também formam imagens da grade, porém elas aparecem defasadas de meio período ou com a frequência dobrada, por exemplo.

4.3 ANÁLISE TEÓRICA

Na Eq. (91) notamos que s'_j está em ambos os lados da igualdade. Reescrevendo essa equação de modo a deixar essa distância explícita temos

$$s_j'^2 - \frac{\lambda z_R^2}{2jL^2} s_j' + z_R^2 = 0, \quad (92)$$

que é apenas uma equação de segundo grau. Portanto, o valor de s'_j é

$$s'_j = \frac{\lambda z_R^2}{4jL^2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{16j^2 L^4}{\lambda^2 z_R^2}} \right). \quad (93)$$

Para escolher qual sinal torna a equação acima fisicamente válida, concordando com o resultado conhecido da Eq. (21), supomos o caso limite $z_R \rightarrow \infty$, ou seja, quando a curvatura é infinita e temos praticamente uma onda plana. Nesse caso,

$$\frac{16j^2 L^4}{\lambda^2 z_R^2} \ll 1, \quad (94)$$

de modo que seja válido fazer uma aproximação em primeira ordem da expansão de Taylor, resultando em

$$\left(1 - \frac{16j^2 L^4}{\lambda^2 z_R^2} \right)^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{16j^2 L^4}{\lambda^2 z_R^2} \right). \quad (95)$$

Substituindo essa aproximação na Eq. 93 com o sinal negativo, chegamos em

$$s'_j = \frac{\lambda z_R^2}{4jL^2} \left(1 - \left[1 - \frac{1}{2} \frac{16j^2 L^4}{\lambda^2 z_R^2} \right] \right) = \frac{2jL^2}{\lambda} \approx s_j, \quad (96)$$

que é exatamente a distância de Talbot obtida para uma onda plana, Eq. (21).

Esse resultado indica que o sinal negativo é aquele que deve ser escolhido para a equação da distância de Talbot corrigida, portanto a expressão final fica sendo

$$s'_j = \frac{\lambda z_R^2}{4jL^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{16j^2L^4}{\lambda^2 z_R^2}} \right), \quad (97)$$

que também pode ser escrita como

$$s'_j = \frac{z_R^2 - z_R \sqrt{z_R^2 - 4s_j^2}}{2s_j}. \quad (98)$$

Nessa equação tudo está em função da distância de Rayleigh, z_R , e da distância de Talbot da onda plana s_j . Assim, uma equação que antes dependia apenas do comprimento de onda λ e da periodicidade da grade L agora também leva em conta o valor da cintura w_0 .

É interessante notar que esse resultado nos permite ainda avaliar quando é possível formar as imagens de Talbot, uma vez que obviamente o termo dentro da raiz não pode tomar valores negativos. Nesse trabalho, ao impor isso temos a seguinte desigualdade:

$$L_j \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{j}} w_0, \quad (j \in \mathbb{N}), \quad (99)$$

na qual j indica o máximo de imagens de Talbot que teoricamente podem ser formadas. Assim, se fizermos $j = 1$, por exemplo, teremos um limite superior para a periodicidade da grade. Então, exatamente nesse limite para L podemos obter, em teoria, apenas uma imagem da grade. Isso quer dizer que para podermos registrar uma distância de Talbot a periodicidade da grade deve ser, no máximo,

$$L_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} w_0 \approx 0.89w_0. \quad (100)$$

Para imagens de Talbot de ordem superior, teremos um limite superior para L cada vez menor.

Mais interessante do que obter a relação entre L e w_0 foi calcular o que aconteceria caso utilizássemos o caso limite entre esses dois parâmetros. Como foi dito, quando supomos $L = \sqrt{\pi}w_0/2$ temos, em teoria, apenas uma imagem de Talbot e, segundo a Eq. 98, a seguinte distância de Talbot corrigida é

$$s'_1 = 2s_1, \quad (101)$$

que certamente é uma correção muito expressiva, nos motivando a verificá-la. Mas antes disso, modificando a periodicidade L , a partir do seu valor máximo, montamos a tabela da Fig. 24 para ter uma noção da comparação entre s'_j e s_j .

	$L = L_{max}$		$L = L_{max}/\sqrt{2}$		$L = L_{max}/\sqrt{3}$		$L = L_{max}/\sqrt{4}$		$L = L_{max}/\sqrt{5}$		$L = L_{max}/5$	
$j \setminus z$	$s_j (m)$	$s'_j (m)$	$s_j (m)$	$s'_j (m)$	$s_j (m)$	$s'_j (m)$	$s_j (m)$	$s'_j (m)$	$s_j (m)$	$s'_j (m)$	$s_j (m)$	$s'_j (m)$
1/2	1,12	1,21	0,56	0,57	0,38	0,38	0,28	0,28	0,23	0,23	0,05	0,05
1	2,25	4,50	1,12	1,20	0,75	0,78	0,56	0,57	0,45	0,45	0,09	0,09
3/2			1,68	2,03	1,13	1,21	0,84	0,88	0,68	0,69	0,14	0,14
2			2,25	4,50	1,50	1,72	1,12	1,21	0,90	0,94	0,18	0,18
5/2					1,88	2,41	1,41	1,58	1,12	1,21	0,23	0,23
3					2,25	4,50	1,69	2,03	1,35	1,50	0,27	0,27
7/2							1,97	2,65	1,58	1,84	0,32	0,32
4							2,25	4,50	1,80	2,25	0,36	0,36
9/2									2,03	2,82	0,41	0,41
5									2,25	4,50	0,45	0,45
										

Figura 24: Para calcular essas distâncias s'_j (Eq. 98) e s_j (Eq. 21) foram utilizados valores de w_0 e λ facilmente obtidos em laboratório, mais precisamente $w_0 = 0.95mm$ e $\lambda = 630nm$, resultando em $L_{max} \approx 0.84mm$. A primeira coluna dessa tabela corresponde às posições das imagens de Talbot, com o valor 1 sendo a posição da primeira imagem de Talbot, por exemplo. Nesse caso $z_R = 4.50m$.

A partir da tabela da Fig. 24 e dos gráficos da Fig. 25 notamos que apenas em distâncias limites é que a diferença entre s'_j e s_j poderia ser de fato significativa. Como podemos ver pelos valores da tabela, se diminuirmos razoavelmente L em relação a L_{max} , a diferença entre os cálculos se torna ainda menos relevante para as primeiras imagens de Talbot. Até esse ponto isso parece sugerir que devemos tentar nos aproximar ao máximo de L_{max} para que tenhamos uma configuração em que o mais correto seja usar a equação para s'_j , dada pela Eq. (98), ao invés da distância de Talbot para onda plana s_j .

4.4 REALIZAÇÃO EXPERIMENTAL

Agora, motivados por diferenças entre s_j e s'_j (Fig 24) na ordem dos centímetros, supomos que teríamos condições de visualizar a formação da imagem de Talbot em s'_j ,

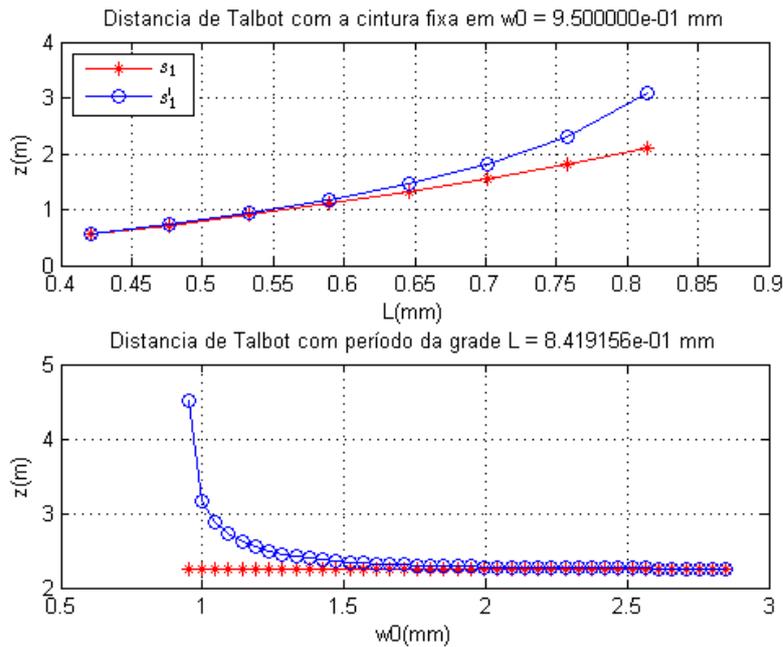


Figura 25: Gráficos, plotados no MATLAB, para valores de distância de Talbot da onda plana, em vermelho, e da onda gaussiana, em azul. No primeiro gráfico mantivemos $w_0 = 0.95\text{mm}$ e mudamos L . No segundo gráfico variamos a cintura do feixe gaussiano e mantivemos $L = 0.84\text{mm}$. Em ambos temos $\lambda = 630\text{nm}$.

ao invés de em s_j . Com esse intuito arranjamos experimentalmente o laser e a grade do modo como se segue.

4.4.1 Arranjo experimental

A configuração utilizada em nosso experimento está descrita na Fig. 26, e a mesa do experimento que foi montada no LOQ-IF/UFF está na Fig. 27 (a). Utilizamos um laser operando em $\lambda = 630\text{nm}$ e com $w_0 = 0.95\text{mm}$ iluminando um modulador espacial de luz (SDE1024 *Low Cost Spatial Light Modulator* (SLM)) controlado por uma interface computacional que nos permite variar o padrão periódico do SLM. Para obter a imagem da grade foram utilizadas duas lentes biconvexas $L1$ e $L2$, ambas com foco de 15mm , dispostas de modo a simplesmente refocalizar a imagem da grade em um ponto que definimos como sendo $z = 0$.

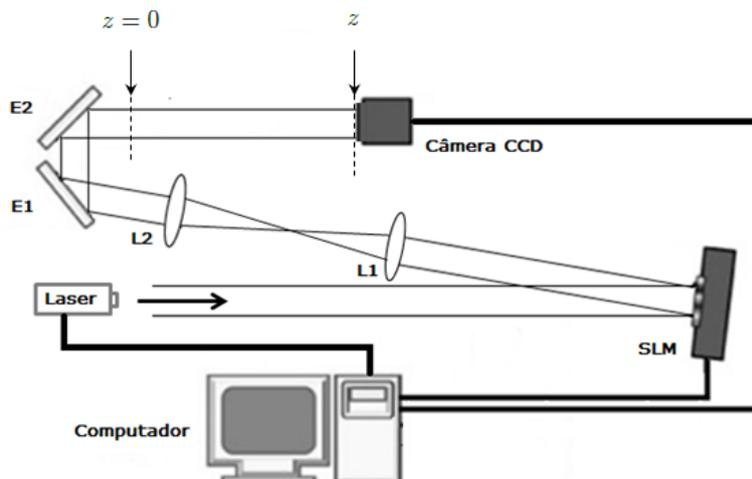
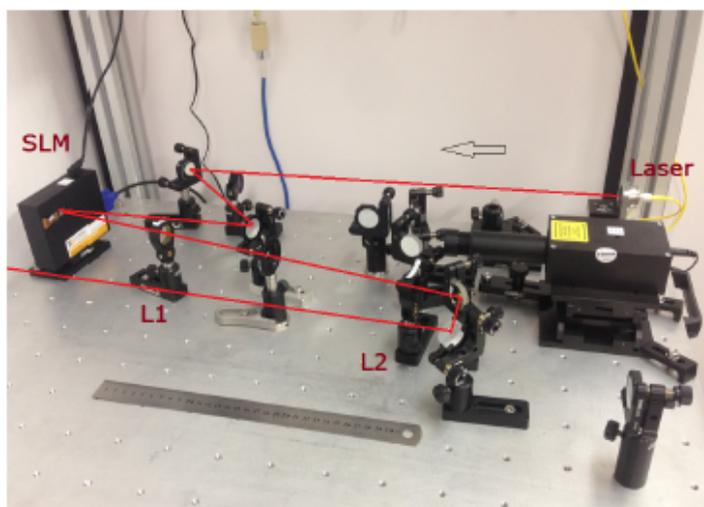
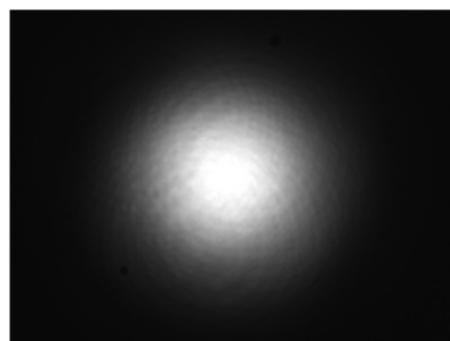


Figura 26: Arranjo experimental.



(a) Mesa do experimento.



(b) Distribuição da intensidade do laser.

Figura 27: Mesa experimental com o laser e o SLM dispostos segundo o esquema da Fig. 26. A câmera CCD não está nessa foto, mas é ao longo da régua que ela se movimenta (a). Imagem do *spot* do laser captada pela câmera CCD, utilizada para obtermos o valor de w_0 . (b)

Optamos por manter a cintura w_0 fixa no próprio valor do laser, Fig. 27 (b), enquanto íamos aumentando a periodicidade da grade, a partir de um valor de L menor que L_{max} . Na sequência, fomos afastando a câmera CCD até voltarmos a enxergar o padrão mais nítido possível da grade, fazendo o registro da distância z em que isso ocorria. Os valores dessas distâncias para diferentes periodicidades estão dados na Fig. 28, e algumas das imagens captadas pela câmera CCD estão na Fig. 30.

4.4.2 Resultado experimental e discussão

Alguns dos padrões de difração encontrados experimentalmente estão na Fig. 30, aos pares, e correspondem ao perfil da grade e à respectiva imagem formada à meia distância de Talbot, que optamos por denotar como s_j^{exp} , com $j = 1/2$ nesse caso. Logo, utilizamos a primeira imagem da grade quando defasada de meio período, e a razão disso foi o fato de conseguirmos obter uma quantidade maior de registros de imagens e distâncias (Fig. 28) justamente para esse caso.

Vemos que a tabela da Fig. 28 não está totalmente preenchida. O motivo disso foi a dificuldade em conseguir visualizar imagens razoavelmente nítidas da grade a partir de distâncias ainda pequenas, o que apenas piorava quando íamos aumentando L . A primeira linha com os valores de distância está totalmente preenchida justamente porque corresponde à menor periodicidade que utilizamos.

Assim, pelos valores encontrados na Fig. 28, fica evidente que não fomos capazes de chegar até próximo de L_{max} , e nem utilizar de fato a primeira imagem de Talbot, como inicialmente planejávamos. Posteriormente ainda fizemos o mesmo com um feixe de cintura $w_0 = 0.5mm$, mas os resultados foram similares, assim como previam as simulações computacionais.

O motivo de inicialmente supormos que diminuir a cintura do feixe poderia ajudar é porque assim a distância de Rayleigh z_R (Eq. 41) iria diminuir também, e daí as distâncias para as quais a diferença entre s_j e s'_j seriam significativas também se tornariam menores. Entretanto quanto menor w_0 mais rápido o feixe diverge, o que acaba mantendo a dificuldade crescente em visualizar imagens de Talbot em distâncias que poderiam resultar numa evidente correção na distância de Talbot.

Na Fig. 29 estão plotados três conjuntos de pontos, que são: Distância de Talbot da onda plana s_j (Eq. 21), distância de Talbot da onda gaussiana s'_j (Eq. 97) e distância

$L(mm)$	$S_{1/2}^{exp}(cm)$	$S_1^{exp}(cm)$	$S_{3/2}^{exp}(cm)$	$S_2^{exp}(cm)$	$S_{5/2}^{exp}(cm)$	$S_3^{exp}(cm)$
0,108	2,2	4,0	5,7	7,5	9,0	10,8
0,144	3,5	6,7	10,0	12,8	13,0	16,5
0,180	5,5	10,2	15,2	20,3		
0,216	7,8	14,3	21,3			
0,252	10,2					
0,288	13,2					
0,324	16,5					
0,360	20,3					
0,396	24,4					
0,432	28,2					
0,468	32,5					
0,504	37,5					
0,540	48,0					
0,576	51,0					
0,612	60,5					
0,648	69,5					

Figura 28: Tabela com os valores experimentais de L e as respectivas distâncias em que reencontramos imagens nítidas da grade. Lembrando que para os parâmetros utilizados temos $L_{max} \approx 0.840mm$.

de Talbot obtida experimentalmente s_j^{exp} (Fig. 28) versus L , todos relativos ao valor da distância para quando se forma a imagem da grade defasada de meio período.

É notável que os pontos da Fig. 29 estão muito próximos entre si. Com isso vemos que a Eq. 97 para s'_j de fato funciona, porém nas situações em que conseguimos registrá-las seu valor não apresenta resultados significativamente diferentes de s_j , pelo menos não ao ponto de sugerirmos que em certas configurações o mais correto seja usar uma equação da distância de Talbot supostamente mais geral. Note que nessa figura a linha tracejada vertical se refere ao valor de L_{max} , e que não conseguimos chegar próximo a ela, uma vez que ainda antes já não conseguíamos identificar a formação de um padrão da grade.

4.5 SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL

A fim de visualizar a evolução do feixe gaussiano difratado pela grade periódica, utilizamos o programa MATLAB para plotar a intensidade $I(x, y, z)$ da solução analítica,

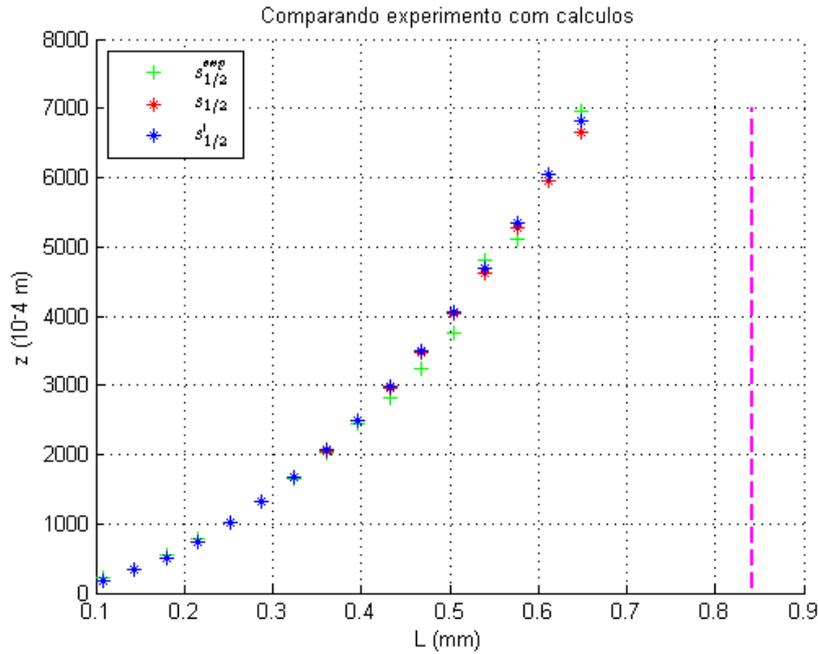


Figura 29: Gráfico, plotado com MATLAB, de pontos que relacionam valores de meia distância de Talbot com o valor de L , comparando o resultado entre os valores calculados de s_j e s'_j , e os obtidos experimentalmente s_j^{exp} . Note ainda a linha tracejada na vertical, indicando o valor de L_{max} .

dada pela Eq. 88, usando que $I = |U(x, y, z)|^2$. Também simulamos o que ocorria na mesma situação fazendo todos os cálculos numéricos, a partir da Eq. 78.

Na Fig. 32 (a) temos o plot da intensidade do campo da Eq. 88 na forma de um tapete de Talbot, ou seja, visto no plano xz . E assim como no experimento, os valores dos parâmetros utilizados foram $w_0 = 0.95mm$ e $\lambda = 630nm$. A solução numérica, utilizando esses mesmos parâmetros, encontra-se na Fig. 32 (b). Em ambos os casos $L = L_{max}/5 \approx 0.168mm$.

Dada a correspondência entre as soluções analítica e numérica (Fig. 32), plotamos a solução analítica visando compreender o que ocorre para que a partir de certa relação entre L e w_0 já não conseguimos distinguir imagens de Talbot.

Algo interessante de notar é que o número de coeficientes de Fourier apenas altera a definição da grade, mas o padrão de difração em si não é afetado, como é ilustrado na Fig. 31.

Analisando os tapetes de Talbot para valores diferentes de L , vistos na Fig. 33, vemos que o nosso problema experimental parece ser uma questão de dispersão da luz. Na Fig. 33 (a) parece que há alguma chance de podermos visualizar fracamente a primeira imagem de Talbot – segunda linha vermelha e verde –, mas pela tabela da Fig. 28 vemos que, na verdade, não conseguimos distinguir a imagem.

Essas simulações sugerem que quando s_j e s'_j apresentam alguma diferença, o feixe já está suficientemente disperso e não é possível enxergar qualquer padrão da grade.

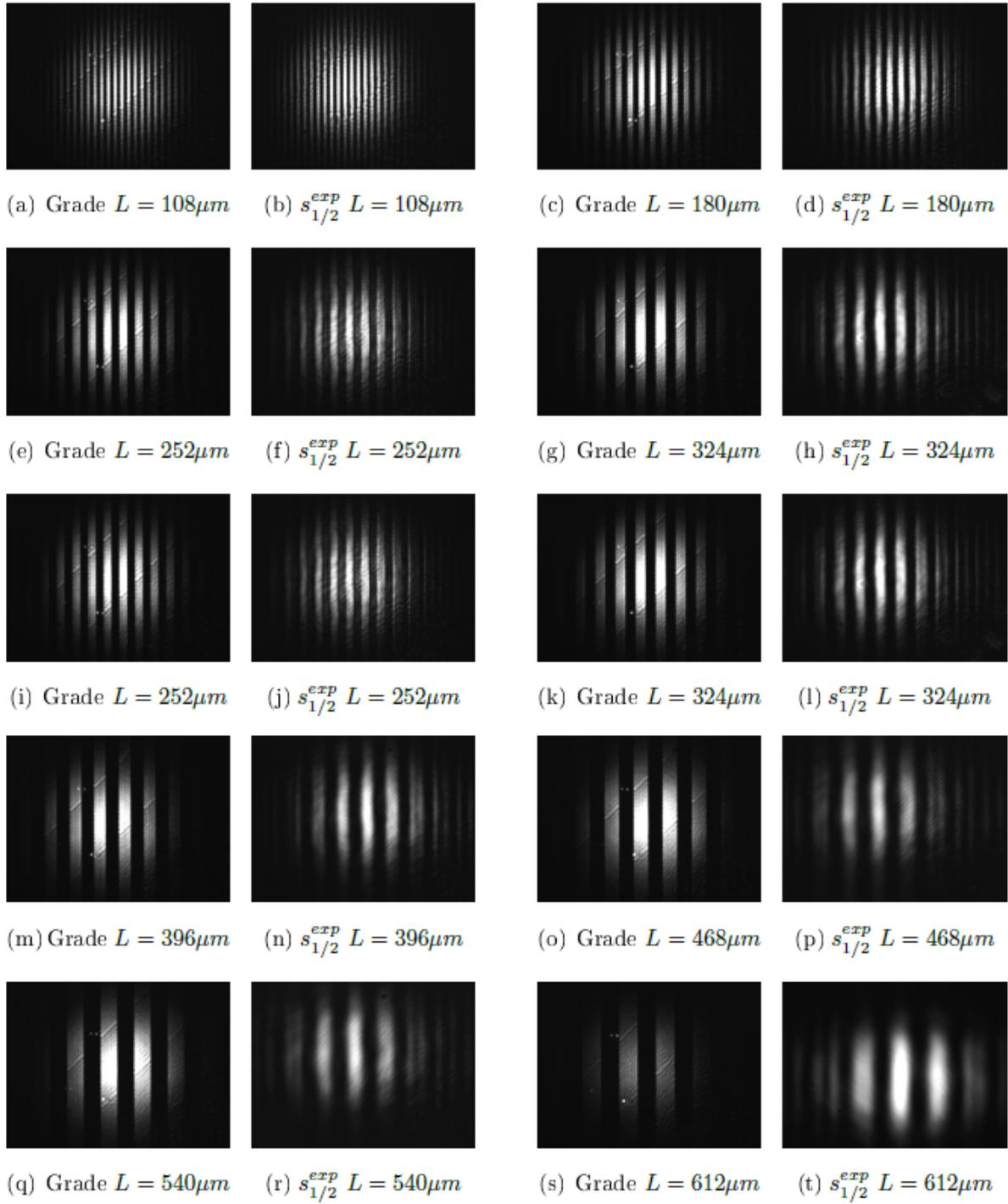


Figura 30: Imagens das grades e dos respectivos padrões com imagens das grades defasadas de meio período, com indicações da respectiva periodicidade L . Em todos os casos a largura da fenda corresponde à $L/2$. As distâncias em que elas foram capturadas pela câmera (CCD) estão indicadas na tabela da Fig. 28.

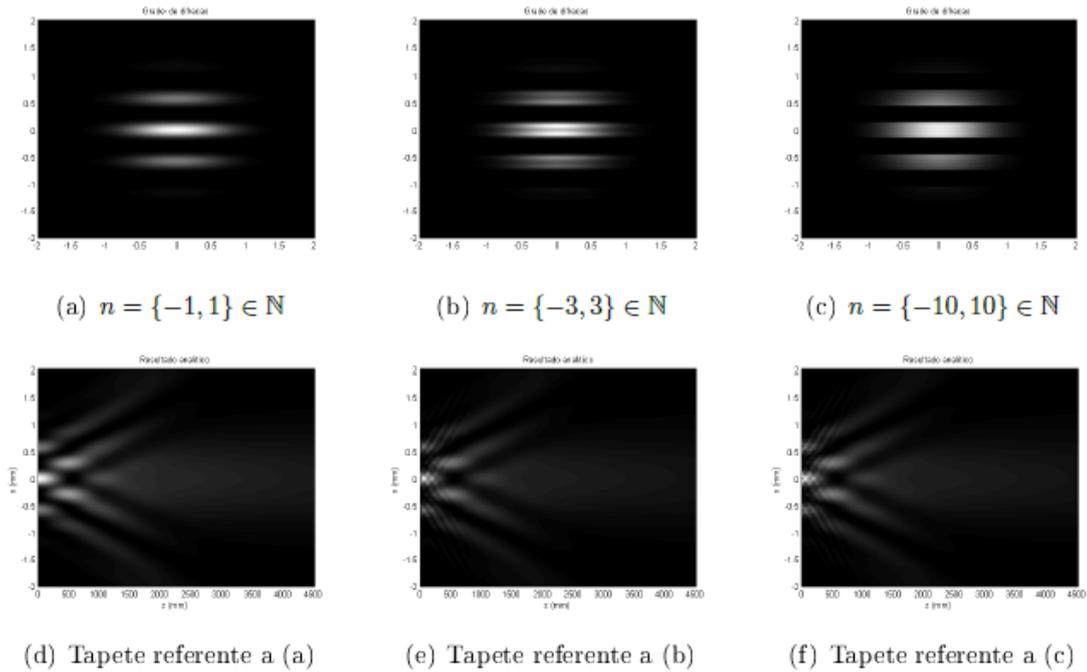
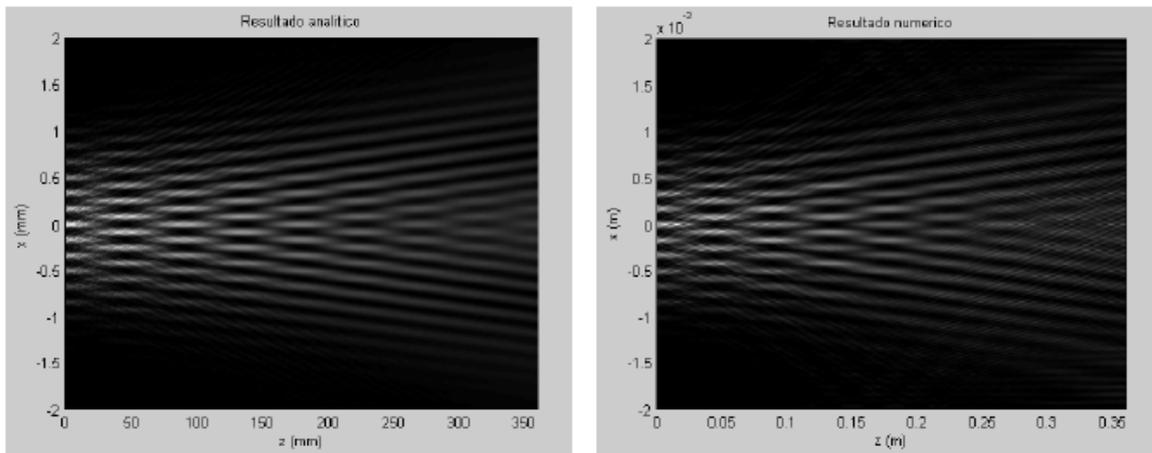


Figura 31: Padrão da própria grade e do tapete de Talbot para quando modificamos a quantidade de coeficientes de Fourier utilizados na função de transmissão (Eq. 70). Com 3 coef. de Fourier em (a) e (d), 7 coef. de Fourier em (b) e (e) e 21 coeficientes de Fourier em (c) e (f). Para todos o cálculo da periodicidade da grade é de $L = L_{max}/\sqrt{2} \approx 0.594mm$.



(a) Plot da intensidade da onda dada pela Eq. 4.17, no plano xz .

(b) Intensidade da onda gaussiana difratada, obtida por cálculo numérico feito a partir da Eq. 4.7, no plano xz .

Figura 32: Tapetes de Talbot, do resultado analítico (a) e numérico (b). Em ambos os casos utilizamos $w_0 = 0.95\text{mm}$, $\lambda = 630\text{nm}$ e 21 coeficientes de Fourier – $n = \{-10, 10\} \in \mathbb{N}$ – para a função de transmissão, dada pela Eq. 70. Além disso, a periodicidade da grade utilizada foi de $L = L_{max}/5 \approx 0.168\text{mm}$.

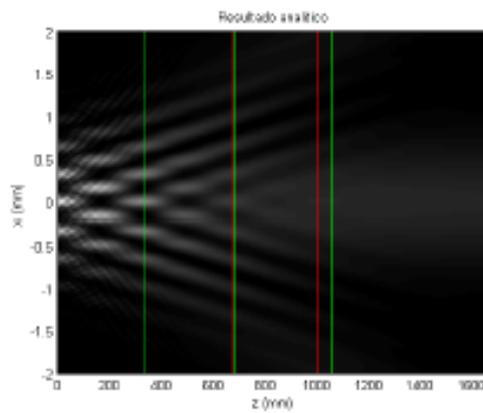
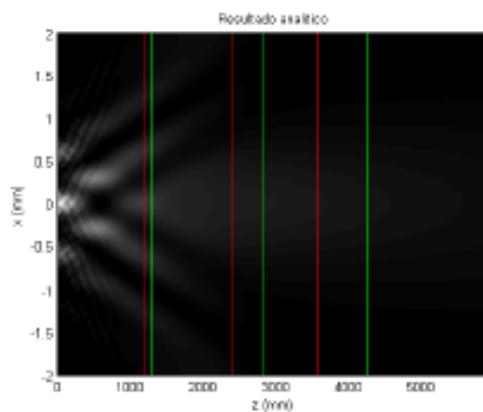
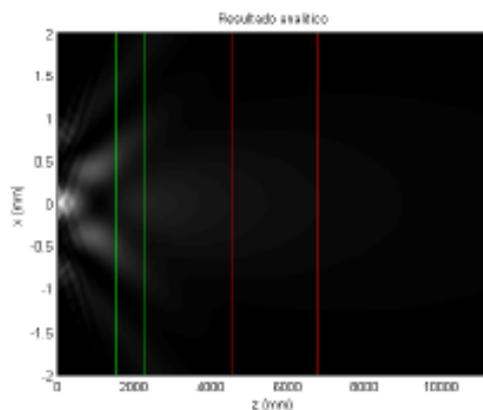
(a) $L = 0.324mm$ (b) $L = 0.612mm$ (c) $L = L_{max} \approx 0.840mm$

Figura 33: Perfis de Tapetes de Talbot para diferentes valores de L , com valores nas respectivas figuras. Nessas imagens as linhas verticais correspondem às posições s_j , em verde, e s'_j , em vermelho, com $j = 1/2, 1, 3/2$. Note que para um valor de periodicidade razoavelmente pequeno (a) as duas primeiras linhas verde e vermelha estão totalmente sobrepostas, por isso não vemos a vermelha.

5

CONCLUSÃO GERAL E PERSPECTIVAS

No Cap. 4 chegamos numa equação explícita para a distância de Talbot quando utilizamos a onda gaussiana (Eq. 98), que chamamos de distância de Talbot corrigida, s'_j . O nosso primeiro passo, para validar o uso dessa equação, foi o de verificar o efeito quando considerássemos o caso limite em que a distância de Rayleigh tende ao infinito $z_R \rightarrow \infty$, que é quando a onda gaussiana se torna praticamente uma onda plana. Ao fazer isso recaímos na equação da distância de Talbot sem correção, s_j (Eq. 21). Até aqui esse parecia ser um indício de que tínhamos encontrado uma equação mais geral para o efeito Talbot.

Em seguida, analisamos a raiz quadrada que aparece na equação de s'_j . Avaliando em qual situação essa raiz ainda tornava a equação válida chegamos em uma relação entre a periodicidade L e a cintura w_0 que permite a ocorrência do efeito Talbot. Vimos que dependendo de quantas imagens de Talbot – auto-imagens da grade de difração – quiséssemos teríamos um limite superior diferente para a periodicidade (Eq. 99).

A situação limite, para ocorrer ao menos uma imagem de Talbot, encontrada foi de $L_{max} \approx 0.89w_0$. Para ter mais imagens de Talbot, e conseguir montar um tapete de Talbot mais longo, é necessário um L cada vez menor, fazendo com que o feixe laser seja difratado por cada vez mais fendas. De fato, faz sentido um limite para L , afinal se w_0 for pequeno o suficiente para atravessar completamente uma das fendas da grade então não há como existir qualquer efeito difrativo.

Para encontrar que correção de fato aconteceria, plotamos dois gráficos para a primeira posição de Talbot, variando um em função de L e outro em função de w_0 , ambos estão na Fig. 25. Esses gráficos nos deram uma pista de que a diferença entre s_j e s'_j só poderia ser mensurável se estivessemos em casos limites. Ou seja, o valor de L teria que se aproximar do valor máximo L_{max} , ou w_0 teria que ser pequeno o suficiente para diminuir L_{max} , fazendo-o voltar a se aproximar de L , fixo nesse caso. Então, em teoria, encontramos uma correção, e a questão experimental seria conseguir observar padrões de difração nessa configuração.

Tanto os valores experimentais que conseguimos obter (Fig. 29) quanto as simulações computacionais (Fig. 33) mostraram que antes de chegarmos na configuração de interesse o feixe já se torna demasiado disperso, a ponto de não conseguirmos identificar qualquer imagem. Infelizmente, esse resultado nos faz concluir que a equação que inicialmente supomos ser a distância de Talbot corrigida funciona apenas nas mesmas situações que a distância de Talbot sem correção, levando praticamente ao mesmo resultado.

Portanto, ao utilizar um feixe laser, que é modelado por uma onda gaussiana, mesmo que não seja feita uma aproximação experimental para onda plana de modo proposital, o efeito Talbot naturalmente só se tornará visível quando a relação entre L e w_0 for tal que tenhamos praticamente uma onda plana, e assim $s'_j \approx s_j$.

Como perspectiva temos interesse em utilizar outros tipos de feixes e grades. Em relação aos feixes estamos nos referindo aos modos paraxiais de ordem superior, que podem inclusive possuir carga topológica, caso dos modos laguerre-gaussianos. Nesse trabalho utilizamos apenas grades unidimensionais periódicas, mas poderia ser interessante utilizar grades bidimensionais, inclusive placas zonais de fresnel que possui um tipo de periodicidade que pode levar a resultados curiosos. E, além do efeito Talbot, existem outras formas de produção de auto-imagens que pretendemos investigar dentro de variações de feixes e grades.

CÓDIGO MATLAB

Código MATLAB utilizado para fazer o cálculo numérico do campo gaussiano difratado por uma grade unidimensional periódica. Esse programa fez o plot da Fig. 32 (b).

```
1 clear all; clc;
2
3 %.....PARAMETROS DA GAUSSIANA.....
4
5 Ld=0.63*10^-6;      %Comprimento de onda em [m]
6 ko=(2*pi)/Ld;      %Numero de onda
7 w0=0.95e-3;        %Cintura [m]
8 zR=pi*(w0^2)/Ld;    %Distancia de Raleigh [m]
9
10 %.....
11
12 % Grade:
13 J=4e-3;             % Dimensao da grade quadrada em [m]
14 L = sqrt(pi)*w0/(2*5); % Periodo da grade
15 Nx = 50;
16 x = linspace(-2,2,Nx); dx = (2-(-2))/Nx;
17 Ny = 60;
18 y = linspace(-2,2,Ny); dy = (2-(-2))/Ny;
19
20 %..... DISTANCIA DE TALBOT .....
21
22 z0 = 2*(L^2)/Ld;    %Primeira distancia de Talbot (SEM correcao)
23 z_talbot = (zR^2)*(1-sqrt(1-4*((z0/zR)^2)))/(2*z0); % (COM correcao)
24 Nz = 60;
25 z = linspace(0,4*z0,Nz); dz = (4*z0)/Nz;
26
27 G = zeros(Nx,Ny,Nz);
28 t = zeros(Nx,Ny,Nz);
29
30 som = 0; l=L/2;
31 Num = -1:1;
```

```

32
33 for n = 1:length(y)
34     Ky(n)=(2*pi*(n-1))/(Ny*dy) - ((2*pi*(Ny))/(Ny*dy))/2; %Eixo frequencias
35     for m = 1:length(x)
36         Kx(m)=(2*pi*(m-1))/(Nx*dx) - ((2*pi*(Nx))/(Nx*dx))/2;
37
38         for p = 1:length(z)
39             %Funcao transferencia no espao livre:
40             H(m,n,p)=exp(-1i*ko*(z(p)))*exp((1i/(2*ko))*(z(p))*(Kx(m)^2+Ky(n)^2)); %
41                 Aproximacao (Pg.78 Engineering Optics)
42
43             %Gaussiana:
44             G(m,n,p)= exp(-(x(m)^2+y(n)^2)/w0^2);
45
46             for j = 1:length(Num)
47                 nn = Num(j);
48                 cn = function_cn(l,L,nn);
49                 som = som + cn*exp(2*pi*1i*nn*y(n)/L);
50             end
51             t(m,n,p) = som;
52             som = 0;
53         end
54     end
55 end
56 %Transformada de Fourier da onda imediatamente apos de passar pela grade:
57 U_d = G.*t;
58 Azero=fft2(U_d); Azero=fftshift(Azero);
59
60 %Multiplicando pela funcao transferencia
61 A=Azero.*H;
62
63 %Tomando a transformada de fourier inversa
64 U=ifft2(A);
65
66 Grade = abs(t).^2; % Ou seja, intensidade em z=0
67 Intensidade_z = abs(U).^2; % MATRIZ (N+1)x(N+1)x(N+1)
68 I=Intensidade_z(Nx/2+1, :, 1); %Para plotar o tapete; para y = 0 fiz N/2 + 1
69
70 for u = 2:Nz
71     b=Intensidade_z(Nx/2+1, :, u);

```

```
72     I = [I;b];
73 end
74
75 figure(1)
76 % Tapete de Talbot:
77 pcolor(z.*100,y.*100,I'); colormap([gray]), shading INTERP;
78 title('Tapete Numerico');
79 xlabel('z (mm)')
80 ylabel('x (mm)')
```


BIBLIOGRAFIA

- [1] H. F. TALBOT. **Facts relating to optical science. No. IV.** *Phil. Mag.* 9, 401-407, 1836.
- [2] LORD RAYLEIGH. **XXV. On copying diffraction-gratings, and on some phenomena connected therewith.** *Phil. Mag.* 11, 196-205, 1881.
- [3] J.M. COWLEY AND A.F. MOODIE. **Fourier Images: I — The point source.** *Proc. Phys. Soc.* 70, 486-496, 1957.
- [4] WEN, JIANMING, YONG ZHANG, AND MIN XIAO. **The Talbot effect: recent advances in classical optics, nonlinear optics, and quantum optics.** *Advances in Optics and Photonics* 5.1, 83-130, 2013.
- [5] K. PATORSKI. **The self-imaging phenomenon and its applications.** *Progress in Optics*, E. Wolf, ed. (North-Holland, 1989), Vol. 27, 1-108.
- [6] [\[link\]](#).
- [7] HECHT AND EUGENE. *Optics*, 2nd Ed, Addison Wesley, 1987.
- [8] J. W. GOODMAN. *Introduction to Fourier optics*. 3rd ed. Englewood, Colo.: Roberts Company Publishers, 2005.
- [9] M. BORN AND E. WOLF. *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*. Pergamon Press, sixth edition, 1985.
- [10] G. R. FOWLES. *Introduction to Modern Optics*. Dover Publications, INC., New York, second edition, 1975.
- [11] [\[link\]](#).
- [12] B. E. A. SALEH AND M. C. TEICH. *Fundamentals of Photonics*. New York: Wiley-Interscience, 1991.
- [13] E. BUTKOV. *Física Matemática*. Guanabara Dois: Rio de Janeiro, 1978.

- [14] GRADSHTEYN AND RYZHIK. *Table of Integrals, Series and Products*. Daniel Zwillinger and Victor Moll (eds.), eighth edition, 2014.
- [15] C.E.R. SOUZA. **Fases geométricas na produção de vórtices ópticos**. [*dissertação de mestrado na área da física*]. Rio de Janeiro: Universidade Federal Fluminense (UFF), 2006.
- [16] [[link](#)].
- [17] [[link](#)].
- [18] [[link](#)].
- [19] [[link](#)]. Site oficial: *Cambridge Correlators*.
- [20] M.D. GRAEF. *Introduction to Conventional Transmission Electron Microscopy* Cambridge University Press, first edition, p.163, 2003.