



**INSTITUTO DE FÍSICA**  

---

**Universidade Federal Fluminense**

**Leonardo Justino Pereira**

**Vórtices vetoriais, inseparabilidade clássica e  
quântica e soma de Momento Angular Orbital na  
Geração de Segundo Harmônico**

Niterói

2016

**Leonardo Justino Pereira**

**Vórtices vetoriais, inseparabilidade clássica e  
quântica e soma de Momento Angular Orbital na  
Geração de Segundo Harmônico**

Tese apresentada ao curso de Pós-Graduação  
em Física da Universidade Federal Flumi-  
nense, como requisito parcial para a obten-  
ção do Título de Doutor em Física.

Orientador:

Prof. Dr. Kaled Dechoum

Co-orientador:

Prof. Dr. Antonio Zelaquett Khoury

Niterói

2016

P436v Pereira, Leonardo Justino.

Vórtices vetoriais, inseparabilidade clássica e quântica e soma de momento angular orbital na geração de segundo harmônico / Leonardo Justino Pereira ; orientador: Kaled Dechoum ; co-orientador: Antonio Zelaquett Khoury -- Niterói, 2016.

152 p. : il.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal Fluminense, Instituto de Física, Niterói, 2016.

Bibliografia: p. 142-152.

1.ÓPTICA PARAXIAL. 2.EMARANHAMENTO. 3.TEOREMA DE BELL. 4.CONSTANTE DE RECOBRIMENTO. 5.GERAÇÃO DE SEGUNDO HARMÔNICO. I.Dechoum, Kaled, Orientador. II.Khoury, Antonio Zelaquett, co-orientador. III.Universidade Federal Fluminense. Instituto de Física, Instituição responsável. IV.Título.

CDD 535.2

## **Agradecimentos**

Ao apoio financeiro fornecido pela CAPES.

Ao professor Kaled Dechoum, pela paciência, compreensão, companheirismo e pela orientação. Pelo trabalho que desenvolvemos juntos e por me apoiar nos momentos difíceis. Pelo excelente curso, dos que mais gostei de fazer e que despertou de vez meu interesse pela estatística (que até então eu tinha grande repulsa, pelo contato que tive com "Mecânica Estatística"), que foi a disciplina "Processos Estocásticos". Muito obrigado, Kaled!

Ao professor Antonio Zelaquett Khoury, pela sua essencial colaboração nos trabalhos desenvolvidos nessa tese, com ideias e trabalhos muito interessantes e por contribuir para um bom ambiente de trabalho. Por me acolher desde que eu entrei no mestrado aqui no IF-UFF. Pelas aulas do curso que mais me identifiquei, um curso muito prazeroso, inspirador, e com aulas excelentes que se encaixaram muito bem com minha forma de aprender, que foi a disciplina "Ótica Quântica", me atraindo de vez para essa linha de pesquisa. Você foi oficializado como meu co-orientador bem no final do processo, mas eu já vejo você nessa função a muito tempo. Muito obrigado, Zela!

Ao professor Thiago Rodrigues de Oliveira, pela paciência, pela dedicação, pelo grande apoio e pela orientação no mestrado, e metade do doutorado. Pelo trabalho que desenvolvemos juntos. Você me apoiou no momento que mais precisei, e sem isso eu não estaria concluindo esse ciclo hoje. Muito obrigado, Thiago!

A minha mulher, minha companheira, minha amiga, minha esposa e meu amor, Marietta Nunes Nidecker, por todo amor, carinho, companheirismo, dedicação e paciência. Por contribuir com minha felicidade, pelo grande apoio, pelas inúmeras e valiosas reflexões (não exatamente sobre meu tema de pesquisa, mas ainda assim contribuindo para meu crescimento profissional, além do pessoal), por todos os outros momentos de aprendizagem e de lazer. Além de toda essa

contribuição, minha amada ainda participou ativamente da elaboração desta tese, me ajudando na escrita fazendo uma belíssima revisão de texto de todo trabalho. Você é uma grande inspiração para mim. Cada dia ao seu lado eu me sinto muito feliz, muito apaixonado, e vou dormir desejando estar o dia seguinte com você. Muito obrigado, meu amor!

A minha pequena, minha filha por carinho, amor, afeto, companheirismo e comprometimento, Luiza Nidecker Pinheiro. Você não teve como participar ativamente da minha pesquisa, nem da elaboração desta tese, mas seu carinho e apoio, principalmente nessa fase final, foram extremamente valiosos e inspiradores. Além disso, aprendemos muito um com o outro, o que tem refletido positivamente em minha vida pessoal e profissional. Muito obrigado, minha pequena Lu!

Ao meu grande irmão, meu grande mestre, meu grande ídolo, Leandro Justino Pereira Veloso, pelo carinho, companheirismo e dedicação. Me apoiou em todos os momentos (nem tanto quando eu estava fazendo merda, rsrs) participou ativamente da minha formação acadêmica, discutindo Cálculo, Física e Estatística. Tenho muito o que falar de você desde o seu nascimento, o quanto me inspira. Meu pensamento crítico, o desenvolvimento do meu lado humano, a minha postura profissional começaram a se desenvolver com você. Os momentos felizes juntos, as cervejas juntos, as merdas juntos. Muito orgulho de ser seu irmão. Muito obrigado, grande mestre!

A minha mãe, Valéria Justino Pereira, pelo carinho, amor, apoio e compreensão. Sempre do meu lado, sempre me incentivando. No último ano vem corroborando com minha enorme vontade de seguir profissionalmente como um educador, com várias discussões Fundamentos da Educação, Biologia, e por sua enorme garra, força de vontade e habilidade ao cursar "Licenciatura em Ciências Biológicas" depois de tantos anos sem estudar e sendo forçada a acreditar que não era

capaz. O amor que eu tenho dentro de mim veio de você. Muito obrigado, mamãe!

Ao professor Felipe Martins, o professor dos professores. Me deu aula de química e física no ensino médio, momento em que estava bem afastado e desacreditado dos estudos, e me inspirou muito. Enquanto outros professores não suportavam minha presença (reconheço que eu realmente era difícil), me aproximou e me fez enxergar a beleza nessas matérias. Um grande educador que admiro muito. Muito obrigado, Felipe!

Ao meu amigo, Luís Felipe Ignácio Cunha, pelos grandes momentos juntos. Fui seu tutor na graduação e no período seguinte viramos amigos de trabalho. Assistimos a defesa de dissertação um do outro. Ainda pretendo ter muitos outros momentos valiosos juntos. Muito obrigado, Felipe!

Ao meu grande amigo, meu irmão, meu presidente, Charles da Fonseca Lucas, pelos grandes momentos juntos. Pela sua valiosa amizade, pelas excelentes discussões. Pelas inúmeras risadas e momentos felizes, pelas furadas, por seu excelente trabalho. Me inspirou muito, contribuindo para minha inserção na sociedade de forma mais sadia e satisfatória. Você tem uma aura de conhecimento incrível e um grande coração. Muito obrigado, Charllão!

Aos amigos que tenho graças ao IF-UFF, pelas discussões, pelas risadas e pelas cervejas. São muitos, muitos mesmo, e sou muito grato a todos vocês. Muito obrigado a todos!

Ao meu grande amigo, dentro e fora do IF-UFF, Anderson Alves Tomaz, por sua amizade, pelos grandes momentos, pelas inúmeras risadas. Pelas discussões que contribuíram bastante para meu eu pensante, crítico. Por contribuir em me mostrar a importância de um discurso ponderado, com o uso da estatística, com base em fontes, e não em achismo. Pelos stand-ups de rolar de rir, pelas agradáveis e super divertidas cervejas. Você foi um mentor para mim nesse período que juntos. Muito obrigado, Anderson!

Ao meu grande amigo, dentro e fora do IF-UFF, dentro do CEDERJ, Marcos Eduardo Oliveira, pelos grandes momentos, pelas risadas. Por me apoiar e incentivar, principalmente num momento muito difícil, que foi o primeiro período desse ano. Tem sido um grande privilégio sendo seu amigo. Você é um grande ser humano. Muito obrigado, Edu!

Ao meu grande amigo, dentro e fora do IF-UFF, Rafael Silveira, por sua amizade, pelas seções de video-game, peças risadas e pelas cervejas. Muito obrigado, Rafael.

Ao meu grande amigo, dentro e fora do IF-UFF, Thiago Corrêa, pela grande amizade. Por me mostrar um pouco do mundo fora do IF-UFF, por me ajudar a me desfazer de preconceitos, por me fazer uma pessoa mais livre. Pelos corujões de poesia pela, pelas manifestações culturais e artísticas. Pelas cervejas, pelas risadas e pelas merdas. Por tornar minha estada no IF-UFF mais interessante. Por me trazer a "Iluminação racional". "Poésis!"Muito obrigado, Thiago!

Aos amigos que tenho graças ao CEDERJ, pelas discussões, pelas risadas e pelos momentos agradáveis no ambiente de trabalho. São muitos, muitos mesmo, e sou muito grato a todos vocês.

Ao meu grande amigo, que está comigo desde a graduação no IF-UFRJ, atualmente ambos concluindo o doutorado no IF-UFF e atualmente amigos de trabalho no polo Xerém-UFRJ, Lucas Soares Paixão, pelas inúmeras risadas, pelas cervejas, pelas discussões e pelos Matanza's. Você tem sido muito parceiro e o que tenho pra dizer a você é: "Espero que haja sempre uma cerveja em sua mão, e que esteja ao seu lado seu grande amor"(Matanza) (Nem precisava dizer, né? Rsrs). Muito obrigado, vacilão! (A propósito, você não tem nada de vacilão.)

Aos amigos do Barreto (quando digo Barreto não me refiro apenas aos que moram lá, mas também aos que vieram a partir desses) por todos os grandes momentos juntos. Vocês são muito queridos e moram no meu coração. Muito

obrigado a todos!

A minha psicóloga, Luiza, pela sua contribuição tão essencial e valiosa, por seu trabalho extremamente bem feito. Muitas pessoas incríveis ao meu redor contribuíram, mas você foi a principal responsável a me ajudar a sair de dentro de minha caverna. Contribuiu ativamente na formação do meu pensamento como cientista, me fez refletir sobre tudom inclusive sobre minha vida profissional, me ajudando a elaborar minhas crises com relação ao meu doutorado. Eu tenho muita admiração e satisfação pelo seu trabalho. Esta tese não sairia sem você. Muito obrigado, Luiza!

Aos meus familiares: minha irmã, Priscila Justino Pereira Veloso; meu padrasto, Jorge Veloso; minha prima, Thaís Pereira Teixeira; minha tia, Vânia Justino Pereira, meu tio, José Américo Teixeira, minha avó, Venina Justino Pereira; meu avô, Alcides Fontes Pereira. Não contribuíram ativamente para esta tese, nem com minha formação acadêmica e profissional, mas contribuíram para o que sou.

Aos familiares que não citei anteriormente. Muito obrigado a todos!

Ao professores que não citei anteriormente, aos técnicos administrativos, aos funcionários da limpeza, e a todos que contribuem para que o IF-UFF funcione. Sou muito grato a vocês. Muito obrigado a todos!



# Sumário

<b>Agradecimentos</b>	<b>i</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>ix</b>
<b>Resumo</b>	<b>xiii</b>
<b>Abstract</b>	<b>xiv</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Ótica Paraxial e Não-Linear</b>	<b>7</b>
2.1 Aproximação Paraxial . . . . .	11
2.2 Ótica não-linear . . . . .	18
2.3 Equações dinâmicas multimodo na Geração de Segundo Harmônico	20
2.3.1 Representação de intensidade e fase e relações de Manley- Rowe multimodo . . . . .	24
<b>3 Desigualdade de Bell e Emaranhamento</b>	<b>29</b>
3.1 Desigualdade de Bell . . . . .	31
3.2 Noções de emaranhamento . . . . .	35
<b>4 Inseparabilidade Clássica e Quântica</b>	<b>38</b>
4.1 Vórtices de polarização como modo spin-órbita inseparável . . . .	39

4.2	Modos spin-órbita quantizados . . . . .	41
4.3	Medidas de Bell em estados com acoplamento spin-órbita . . . . .	44
4.4	Intensidades médias e ruídos quânticos . . . . .	49
4.4.1	Estados de Fock emaranhados . . . . .	49
4.4.2	Mistura estatística de estados de Fock . . . . .	50
4.4.3	Estado de Werner . . . . .	51
4.4.4	Estado coerente puro . . . . .	52
4.4.5	Estado coerente misto . . . . .	52
4.4.6	Vácuo comprimido de dois modos . . . . .	54
4.5	Considerações sobre inseparabilidade Clássica e Quântica . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Constantes de recobrimento</b>	<b>58</b>
5.1	Soluções para as Constantes de Recobrimento . . . . .	61
5.2	Avaliando os valores de $P$ . . . . .	64
5.2.1	$l'' \geq 0$ . . . . .	65
5.2.2	$l'' < 0$ . . . . .	66
<b>6</b>	<b>Resolvendo o problema da Geração de Segundo Harmônico</b>	<b>70</b>
6.1	Problema a 2+1 modos . . . . .	71
6.1.1	Solução analítica . . . . .	76
6.2	Problema a $2 + (P + 1)$ modos . . . . .	78
<b>7</b>	<b>Soma de Momento Angular Orbital na Geração de Segundo Harmônico</b>	<b>83</b>
7.1	Conversão de modos . . . . .	86
7.2	Soma de Momento Angular Orbital . . . . .	88
7.2.1	Propagação fora do cristal e fase de Gouy . . . . .	93
7.3	Mistura de MAO Controlada por Polarização . . . . .	99
7.4	Mistura de MAO Controlada por Polarização Generalizada . . . . .	102

7.4.1	$l_{SLM_{ask}} \neq l_{SLM}$ , com $l_{SLM_{ask}} l_{SLM} \geq 0$ . . . . .	105
7.4.2	$l_{SLM_{ask}} \neq l_{SLM}$ com $l_{SLM_{ask}} l_{SLM} < 0$ . . . . .	108
<b>8</b>	<b>Por que as ordens radiais dos feixes do primeiro harmônico permanecem inalteradas ao longo do cristal?</b>	<b>114</b>
8.1	Expansão em série de Taylor . . . . .	115
<b>9</b>	<b>Conclusões e perspectivas</b>	<b>122</b>
<b>Apêndice A</b>	<b>Cálculo das desigualdades tipo Bell</b>	<b>126</b>
A.1	Independência de fase ganha no MZIM para medida de intensidade	126
A.2	Medidas efetivas . . . . .	130
<b>Apêndice B</b>	<b>Uma relação importante envolvendo polinômio de Laguerre associado</b>	<b>133</b>
<b>Apêndice C</b>	<b>Cálculo da constante <math>\gamma_{l_H l_V}</math></b>	<b>136</b>
<b>Apêndice D</b>	<b>Conversões na lâmina tiltada</b>	<b>138</b>
D.1	$p' = p'' = 0$ e $l'l'' \geq 0$ . . . . .	138
D.2	$p' = p'' = 0$ e $l'l'' < 0$ . . . . .	139
<b>Bibliografia</b>		<b>142</b>

# Lista de Figuras

2.1	Retirada de [37]. Representação geométrica de um feixe gaussiano. $w_0$ é o que chamamos de cintura, que é a região onde o feixe é mais estreito, e $z_R$ é a distância de Reileigh, distância em que o diâmetro do feixe passa a ser $\sqrt{2}w_0$ . . . . .	13
2.2	Retirada de [30]. Representação geométrica com distribuição de intensidade a medida que um feixe gaussiano se propaga. . . . .	13
2.3	Retirada de [38]. Perfis de intensidade de ordens 0, 1 e 2 dos modos: a) Hermite-Gauss; e b) de Laguerre-Gauss. . . . .	17
4.1	Retirada de [1]. Vórtices de polarização de primeira ordem(Eq. (4.4)) análogos aos quatro estados de Bell. . . . .	41
4.2	Retirada de [14]. Esquema para a medida de Bell spin-órbita proposta. . . . .	45
4.3	Retirada de [1]. Esquema proposto para produzir um estado coerente misto ajustável. . . . .	53
7.1	Retirada de [27]. Esquema experimental proposto para soma de MAO na GSH. . . . .	84
7.2	Retirada de [27]. Resultados experimentais para Soma de MAO arbitrário. As figuras são os perfis de intensidade do segundo harmônico. . . . .	89

7.3	Imagem do lado esquerdo retirada de [27]. Comparação entre o resultado experimental (lado esquerdo) e a simulação dos resultados teóricos discutidos ao longo desta tese na saída do cristal (lado direito) do perfil de intensidade do segundo harmônico para a soma " $l_{Mask} = 1$ " mais " $l_{SLM} = 0$ ", resultando em " $l = 1$ ". . . . .	91
7.4	Imagem do lado esquerdo retirada de [27]. Comparação entre o resultado experimental (lado esquerdo) e a simulação dos resultados teóricos discutidos ao longo desta tese na saída do cristal (lado direito) do perfil de intensidade do segundo harmônico para a soma " $l_{Mask} = 1$ " mais " $l_{SLM} = 1$ ", resultando em " $l = 2$ ". . . . .	92
7.5	Imagem do lado esquerdo retirada de [27]. Comparação entre o resultado experimental (lado esquerdo) e a simulação dos resultados teóricos discutidos ao longo desta tese na saída do cristal (lado direito) do perfil de intensidade do segundo harmônico para a soma " $l_{Mask} = 1$ " mais " $l_{SLM} = 2$ ", resultando em " $l = 3$ ". . . . .	93
7.6	Imagem do lado esquerdo retirada de [27]. Comparação entre o resultado experimental (lado esquerdo) e a simulação dos resultados teóricos discutidos ao longo desta tese na saída do cristal (lado direito) do perfil de intensidade do segundo harmônico para a soma " $l_{Mask} = 1$ " mais " $l_{SLM} = -2$ ", resultando em " $l = -1$ ". . . . .	94
7.7	Imagem do lado esquerdo retirada de [27]. Comparação entre o resultado experimental (lado esquerdo) e a simulação dos resultados teóricos discutidos ao longo desta tese na saída do cristal (lado direito) do perfil de intensidade do segundo harmônico para a soma " $l_{Mask} = 1$ " mais " $l_{SLM} = -1$ ", resultando em " $l = 0$ ". . . . .	95
7.8	Perfil de intensidade ao longo da propagação, com $Z = \tan(\theta/2)$ , " $l_{Mask} = 1$ " mais " $l_{SLM} = -2$ ", resultando em " $l = -1$ ". . . . .	98

7.9	Perfil de intensidade ao longo da propagação, com $Z = \tan(\theta/2)$ , " $l_{Mask} = 1$ " mais " $l_{SLM} = -1$ ", resultando em " $l = 0$ ". . . . .	99
7.10	Imagem do lado esquerdo retirada de [27]. Comparação entre o resultado experimental (lado esquerdo) e a simulação dos resultados teóricos discutidos ao longo desta tese na saída do cristal (lado direito) do perfil de intensidade do segundo harmônico para a soma " $l_{Mask} = 1$ " mais " $l_{SLM} = -2$ ", resultando em " $l = -1$ ", detectado a uma distância de $z = \sqrt{3}z_R$ . . . . .	100
7.11	Imagem do lado esquerdo retirada de [27]. Comparação entre o resultado experimental (lado esquerdo) e a simulação dos resultados teóricos discutidos ao longo desta tese na saída do cristal (lado direito) do perfil de intensidade do segundo harmônico para a soma " $l_{Mask} = 1$ " mais " $l_{SLM} = -1$ ", resultando em " $l = 0$ ", detectado a uma distância de $z = \sqrt{3}z_R$ . . . . .	101
7.12	Retirada de [27]. Resultados experimentais para Soma de MAO arbitrário obtido utilizando a Mistura de MAO Controlada por Polarização. As figuras são os perfis de intensidade do segundo harmônico. . . . .	102
7.13	Produzida no MATLAB. Intensidades do problema a 7 modos em função do comprimento " $z$ " dentro do cristal para a "HWP-3" orientada a $\alpha = 0^\circ$ - com $g_\omega = 1u.m.$ , $I_0 = 1u.m.$ , $l_{SLMask} = 1$ e $l_{SLM} = 2$ - sendo: a) as 4 intensidades do primeiro harmônico, e b) as 3 intensidades do segundo harmônico. . . . .	106
7.14	Produzida no MATLAB. Intensidades do problema a 7 modos em função do comprimento " $z$ " dentro do cristal para a "HWP-3" orientada a $\alpha = 30^\circ$ - com $g_\omega = 1u.m.$ , $I_0 = 1u.m.$ , $l_{SLMask} = 1$ e $l_{SLM} = 2$ - sendo: a) as 4 intensidades do primeiro harmônico, e b) as 3 intensidades do segundo harmônico. . . . .	107

- 7.15 Produzida no MATLAB. Intensidades do problema a 7 modos em função do comprimento "z" dentro do cristal para a "HWP-3" orientada a  $\alpha = 45^\circ$  - com  $g_\omega = 1u.m.$ ,  $I_0 = 1u.m.$ ,  $l_{SLMask} = 1$  e  $l_{SLM} = 2$  - sendo: a) as 4 intensidades do primeiro harmônico, e b) as 3 intensidades do segundo harmônico. . . . . 109
- 7.16 Produzida no MATLAB. Intensidades do problema a 7 modos em função do comprimento "z" dentro do cristal para a "HWP-3" orientada a  $\alpha = 60^\circ$  - com  $g_\omega = 1u.m.$ ,  $I_0 = 1u.m.$ ,  $l_{SLMask} = 1$  e  $l_{SLM} = 2$  - sendo: a) as 4 intensidades do primeiro harmônico, e b) as 3 intensidades do segundo harmônico. . . . . 110
- 7.17 Produzida no MATLAB. Intensidades do problema a 7 modos em função do comprimento "z" dentro do cristal para a "HWP-3" orientada a  $\alpha = 90^\circ$  - com  $g_\omega = 1u.m.$ ,  $I_0 = 1u.m.$ ,  $l_{SLMask} = 1$  e  $l_{SLM} = 2$  - sendo: a) as 4 intensidades do primeiro harmônico, e b) possui as 3 intensidades do segundo harmônico. . . . . 111
- 7.18 Produzida no MATLAB. Mistura de MAO Controlada por Polarização - intensidades do problema a 7 modos em função do ângulo de orientação " $\alpha$ " da "HWP-3", para um cristal de comprimento  $z_l = 0.1268u.m.$  - com  $g_\omega = 1u.m.$ ,  $I_0 = 1u.m.$ ,  $l_{SLMask} = 1$  e  $l_{SLM} = 2$  - sendo: a) as 4 intensidades do primeiro harmônico, e b) as 3 intensidades do segundo harmônico. . . . . 112
- 7.19 Produzida no MATLAB. Mistura de MAO Controlada por Polarização - intensidades do problema a 8 modos em função do ângulo de orientação " $\alpha$ " da "HWP-3", para um cristal de comprimento  $z_l = 0.1261u.m.$  - com  $g_\omega = 1u.m.$ ,  $I_0 = 1u.m.$ ,  $l_{SLMask} = 1$  e  $l_{SLM} = -2$  - sendo: a) as 4 intensidades do primeiro harmônico, e b) as 3 intensidades do segundo harmônico. . . . . 113

## **Resumo**

Nesta tese, desenvolvo uma abordagem geral para o processo de Geração de Segundo Harmônico, envolvendo modos do campo que apresentam Momento Angular Orbital, incluindo modos inseparáveis que violam uma desigualdade clássica tipo Bell, como são os vórtices vetoriais.

Vários ingredientes inerentes ao processo são analisados com profundidade, como o papel das constantes de recobrimento e a decomposição modal dos campos envolvidos no processo, gerando resultados que, às vezes, fogem da intuição comum. Resultados analíticos e numéricos são apresentados, assim como generalizações multimodos desses processos.

Alguns dos resultados obtidos estão sendo observados no laboratório de óptica quântica do IF-UFF e outras propostas experimentais poderão vir a ser implementadas num futuro próximo.



## **Abstract**

In this thesis, we develop a general approach for the process of Second Harmonic Generation involving modes of the Electromagnetic field that present Angular Orbital Momentum, including inseparable modes that violate a classical Bell type inequality, as are vector vortices.

Several ingredients inherent in the process are analyzed in depth, as the role of overlap integrals, and the modal decomposition of the field involved in the process, generating results that sometimes are beyond common intuition. Analytical and numerical results are presented, as well as the generalizations of the multi-mode processes.

Some of the results are being observed in the quantum optics laboratory in the UFF institute of physics, and others experimental proposals are likely to be implemented in the near future.

# Capítulo 1

## Introdução

A ótica é uma linha de pesquisa que busca entender o espectro eletromagnético na região do visível aos olhos humanos, ou seja, estuda a luz que enxergamos. Só por esse fato já é possível motivar esse campo, pois efeitos óticos nos encantam desde que nosso cérebro registra nossa primeira imagem visual<sup>1</sup>.

Mas não para por aí... A história mostra a observação de vários efeitos óticos que atraíram, e continuam atraindo, a atenção de todas as civilizações, desde os mais simples, como a iluminação de um corpo escuro, a reflexão da luz por uma superfície refletora ou a refração da luz, até os mais sofisticados, como a holografia, o laser, os vórtices óticos, a geração de segundo harmônico, entre outros.

Sendo assim, contribuir com as pesquisas e avanços tecnológicos dessa área, que, aos olhos do autor, é belíssima, é a motivação mais fundamental.

Agora, partindo para algo mais específico, mais condizente com nosso trabalho no estágio que se encontra - que é um cenário de avanço bem acelerado (comparado com épocas passadas) em pesquisa científica e surgimento de novas tecnologias - esta tese pretende melhor caracterizar fenômenos óticos de baixa

---

<sup>1</sup>A generalidade desta frase só cabe para quem enxerga ou, pelo menos, já enxergou em algum momento.

intensidade, em regimes clássicos e quânticos, e em escalas compatíveis com experimentos feitos em mesas óticas.

Portanto, o objeto central de estudo será a luz, sendo as características e propriedades de sua propagação nosso foco, dentro das mais variadas possibilidades. Dentro desse aspecto, interação com interferômetros e meios não-lineares serão estudados.

Esse trabalho traz resultados sobre inseparabilidade clássica e quântica de vórtices óticos de polarização, que já foram publicados e podem ser vistos em [1], e resultados de interação da luz com um meio não-linear, envolvendo, especificamente, soma de Momento Angular Orbital na Geração de Segundo Harmônico. Mas antes de chegar nestes, que são os pontos mais aguardados desta tese, vamos contar um pouco das referências que nos levam até nosso desejado fim.

Muita coisa já foi feita, muita coisa mesmo, pois a física vem sendo aprimorada desde a época da Grécia antiga, ou até antes. Então, pela impossibilidade de contar toda essa trajetória em detalhes e de forma bem precisa, escolhemos como ponto de partida um assunto bem conveniente para esse trabalho, que é o surgimento do laser<sup>2</sup>.

O laser, uma fonte de luz coerente descoberta em 1958 por Schalow e Townes [2] e se consolidando com ajuda dos trabalhos [3, 4, 5], foi uma das mais incríveis descobertas do século XX, servindo não apenas à ótica, mas a muitas outras linhas de pesquisa. Esse aparato possibilitou a realização de outros grandes experimentos, como: testes da Mecânica Quântica, ótica não-linear, pinças óticas, informação quântica. Além de todos esses, o laser foi a base de nossos trabalhos e desta tese.

Em seguida veio o experimento mental de Bell em 1964 [6]<sup>3</sup> - mais conhecido atualmente como desigualdade de Bell - que foi feito com a proposta de clarear

---

<sup>2</sup>Do inglês "Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation" (LASER).

<sup>3</sup>O experimento foi realizado de fato por Aspect em 1982 [8].

a questão levantada por Eistein, Podolsky e Rosen (EPR) em 1935, [7], e todo debate posterior, onde diziam que a mecânica quântica seria uma teoria incompleta, o que costuma ser chamado de paradoxo EPR. Esse resultado obtido por Bell deu origem a toda uma linha de pesquisa, que é a Informação Quântica, onde se estuda o famoso emaranhamento, que é uma espécie de correlação "mais forte" que a correlação clássica e que permitiu grandes avanços, como o teletransporte, criptografia quântica, codificação super densa, entre outros [9]. Esse tema será tratado com mais cuidado no Capítulo 3.

Também temos a Ótica Não-Linear tentando explicar a interação da luz com a matéria, assim surgindo com a Geração de Segundo Harmônico (GSH) - também conhecida como Conversão Paramétrica Ascendente, em 1961 [10]. Depois disso, outros processos paramétricos<sup>4</sup> (processos em que a troca de energia entre campos intermediada pelo meio não-linear pode produzir novos campos que oscilam com frequências distintas das frequências de entrada) foram observados, como soma de frequência, subtração de frequência, geração de pares de feixes emaranhados e o Oscilador Paramétrico Ótico (OPO), efeito Kerr<sup>5</sup>. Todos esses, e outros, processos paramétricos podem ser vistos com mais detalhes em, por exemplo, [11, 12]. Nos concentraremos nos processos que ocorrem em meios com não-linearidades de segunda ordem, mais especificamente, na GSH.

Há também o tema conhecido como inseparabilidade clássica, que é, relativamente, novo, iniciando em 1998 com Spreeuw [13] - tema ainda controverso na comunidade científica, mas que vem mostrando resultados com aplicações interessantes. Consiste em se utilizar de ferramentas da Mecânica Quântica, como o emaranhamento, para aplicar na Mecânica Clássica. Essas pesquisas vêm crescendo cada vez mais, surgindo importantes trabalhos, como [14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26]. Esse estudo é um dos interesses específicos desta

---

<sup>4</sup>Também conhecidos como mistura de ondas.

<sup>5</sup>Efeito com não-linearidade de terceira ordem.

tese.

Todos esses importantíssimos trabalhos foram fundamentais, direta e indiretamente, para o desenvolvimento desta tese, mas tiveram dois destes que foram os grandes motivadores para produzir os resultados aqui apresentados: "Bell-like inequality for the spin-orbit separability of a laser beam" [14] e "Arbitrary orbital angular momentum addition in second harmonic generation" [27]. E por esse motivo é que eles terão um destaque maior a seguir.

Em [14] foi proposto um critério para separabilidade de modos baseado numa desigualdade CHSH para intensidades. Assim foi possível utilizar as ideias e ferramentas da informação quântica para determinar se um modo clássico é separável ou não, trazendo algumas similaridades do emaranhamento.

Já em [27] foi implementado um aparato experimental em que dois feixes lasers, portadores de Momento Angular Orbital (MAO) ( $l_1$  e  $l_2$ ) e com polarizações ajustáveis, eram utilizados em um processo de GSH com a consequente geração de um terceiro feixe, com MAO igual a  $l_1 + l_2$ .

Por fim, após nos situarmos sobre o que vamos buscar entender sobre a luz, expomos brevemente o que será tratado em cada capítulo a seguir.

No segundo capítulo será apresentado, inicialmente, a descrição de feixes lasers paraxiais portadores de Momento Angular Orbital. Em seguida faremos um apanhado sobre a ótica não-linear, que terá como foco principal a Geração de Segundo Harmônico. Aplicando a aproximação paraxial no meio não-linear de interesse chegamos nas equações dinâmicas, que serão as equações que irão ditar a evolução de cada modo dentro desse meio. Por último, mostraremos as relações de conservação entre intensidades, conhecidas como equações de Manley-Rowe multimodo.

O terceiro capítulo é essencialmente um capítulo de revisão de literatura sobre emaranhamento e desigualdade de Bell. Vamos definir essa incrível ferramenta

da Mecânica Quântica, que é o emaranhamento, e descreveremos o que são as desigualdades de Bell e como elas se encaixam nesse cenário.

No quarto capítulo, falaremos dos nossos resultados sobre inseparabilidade clássica e quântica. Começaremos descrevendo um pouco do trabalho [14] e do esquema proposto para obter as medidas. Aproveitando esse esquema, discutiremos nosso trabalho [1], mostrando que a coerência possui grande relevância para classificar modos inseparáveis clássicos e quânticos.

No quinto capítulo, começamos a construir o que será o nosso segundo trabalho (em preparação) sobre soma de Momento Angular Orbital na Geração de Segundo Harmônico. Aqui temos um resultado bem geral, que abre caminho para várias aplicações. Calculamos as constantes de recobrimento (superposição espacial dos perfis transversos dos modos), responsáveis por definir quais modos serão acoplados a dinâmica do problema. Encontramos regras de seleção envolvendo não apenas o MAO, que já são bem conhecidas, como também envolvendo as ordens radiais dos modos.

No sexto capítulo, apresentaremos uma generalização da solução obtida por Bloembergen e colaboradores [28] para a dinâmica dos modos, que é o nosso outro grande resultado que também possibilita muitas aplicações. Nossa resposta considera MAO e ordens radiais não nulas, e ainda envolve vários modos gerado, não apenas um como já conhecido.

No sétimo capítulo desenvolvemos algumas aplicações dos nossos grandes resultados. Conseguimos propor uma explicação alternativa para o "perfil oval" (perfil diferente do esperado) da figura 3 b-) de [27], com base, também, na comparação experimento-simulação. A outra aplicação será a mistura de MAO controlada por polarização, onde conseguimos controlar a GSH através da polarização dos feixes de entrada, onde generalizamos a proposta de [27].

No oitavo capítulo, faremos uma expansão em série de Taylor para justifica-

mos as considerações que serão feitas ao longo da tese, na expectativa de clarear o que queremos dizer com baixa intensidade, e mostramos uma solução mais simples para as equações dinâmicas multimodos.

No nono capítulo, concluimos esta tese, destacando mais uma vez nossos resultados e indicando perspectivas de como seguir daqui por diante.

## Capítulo 2

# Ótica Paraxial e Não-Linear

Este é um capítulo, essencialmente, de revisão da literatura, baseado no arcabouço teórico desenvolvido na referência [29]. Esse assunto também pode ser visitado, inclusive com uma outra abordagem para discutir a aproximação paraxial, em textos como [11, 12, 30, 31, 32, 33]. Mas é preciso apresentar o procedimento que leva na Aproximação Paraxial e suas conjecturas

Um resumo deste capítulo se inicia ao apresentarmos as equações de Maxwell num meio material com uma descrição dos termos envolvidos e dos termos já desconsiderados nessa etapa, até chegar na equação diferencial em que será aplicada a Aproximação Paraxial. Já na Seção 2.1, mostramos o que é a Aproximação Paraxial. Na Seção 2.2 faremos uma breve exposição sobre a Ótica Não-linear, mais voltada para a GSH (Geração de Segundo Harmônico). E por fim, na Seção 2.3, as Equações Dinâmicas, com ajuda da Equação Paraxial, serão expandidas na base de Laguerre-Gauss, para seu uso em capítulos posteriores, e também serão apresentadas as Equações de Manley-Rowe multimodo nessa base, Subseção 2.3.1.

Tomamos como ponto de partida as equações de Maxwell num meio material



[34, 35],

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f, \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.4)$$

onde

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M}, \quad (2.6)$$

sendo  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{J}_f$  e  $\rho_f$ , respectivamente, o campo elétrico, o campo magnético, o deslocamento elétrico, o campo auxiliar, a densidade de polarização, a densidade de magnetização, a densidade de correntes livres e a densidade de cargas livres.

Essas equações são capazes de lidar com uma vasta gama de problemas, e uma solução que dê conta de todos os possíveis casos ainda está muito distante da atual realidade. Então a proposta aqui será resolvê-las no âmbito da Ótica Clássica, Ótica Paraxial, mais especificamente, considerando que os campos elétrico e magnético se propagam em um meio ótico.

Um meio ótico pode ser descrito por:

$$\rho_f = 0, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{J}_f = \mathbf{0}, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{0}, \quad (2.9)$$

ou seja, é um meio isolante sem cargas livres e correntes livres e sem propriedades magnéticas. Mais adiante será especificado com mais detalhes o meio a ser utilizado nesse trabalho.

Substituindo as Eq. (2.7), Eq. (2.8) e Eq. (2.9) nas equações de Maxwell e fazendo algumas manipulações, chega-se em

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0} \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2} - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{P}) \right) \quad (2.10)$$

sendo  $c$  a velocidade da luz no vácuo, dada por

$$c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}. \quad (2.11)$$

Manipulando as Eq. (2.1), Eq. (2.5) e Eq. (2.7) encontra-se

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{P}) = -\epsilon_0 \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) \quad (2.12)$$

que consequentemente leva a Eq. (2.10) em

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial t^2}, \quad (2.13)$$

que é a equação geral do campo elétrico em meio ótico qualquer, que obedece as condições Eq. (2.7), Eq. (2.8) e Eq. (2.9). A densidade de polarização pode ser escrita como

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_L + \mathbf{P}_{NL}, \quad (2.14)$$

onde  $\mathbf{P}_L$  é o termo linear e  $\mathbf{P}_{NL}$  o não-linear. Inicialmente vamos especificar apenas meios lineares, deixando os meios não-lineares a serem trabalhados a partir da seção 6.1, onde focaremos na GSH.

Na busca pela solução da Eq. (2.13), o primeiro passo será uma resposta que

satisfaça a expansão em série de Fourier do campo elétrico

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_m \mathbf{E}_m(\mathbf{r}, t), \quad (2.15)$$

$$\mathbf{E}_m(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\varepsilon}_m(\mathbf{r})e^{-i\omega_m t} + \boldsymbol{\varepsilon}_m^*(\mathbf{r})e^{i\omega_m t}, \quad (2.16)$$

$$\omega_m = m\omega_1, \quad (2.17)$$

sendo  $\boldsymbol{\varepsilon}_m$  os coeficientes da expansão, que carregam toda dependência espacial do modo  $\mathbf{E}_m(\mathbf{r}, t)$ , e  $\omega_m$  é a frequência de oscilação do modo  $m$ .

A densidade de polarização linear irá acoplar a resposta do meio ao receber uma radiação de frequência  $\omega_m$  ( $\chi^{(1)}(\omega_m)$ ) com o campo elétrico oscilando também na frequência  $\omega_m$ <sup>1</sup>. Assim, conseqüentemente, a densidade de polarização linear será

$$\mathbf{P}_L(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \sum_m \chi_m^{(1)} \mathbf{E}_m(\mathbf{r}, t), \quad (2.18)$$

$$\chi_m^{(1)} = \chi^{(1)}(\omega_m). \quad (2.19)$$

Considerando, inicialmente, um meio linear ( $\mathbf{P}_{NL} = 0$ ), e substituindo as Eq. (2.15), Eq. (2.16) e Eq. (2.18) na Eq. (2.13) encontramos, após alguns passos,

$$\sum_m \{ [\nabla^2 \boldsymbol{\varepsilon}_m - \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_m) + k_{vac,m}^2 \eta_m \boldsymbol{\varepsilon}_m] e^{-im\omega_1 t} + [\nabla^2 \boldsymbol{\varepsilon}_m^* - \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_m^*) + k_{vac,m}^2 \eta_m \boldsymbol{\varepsilon}_m^*] e^{im\omega_1 t} \} = 0, \quad (2.20)$$

onde

$$k_{vac,m}^2 = m^2 \left( \frac{\omega_1}{c} \right)^2, \quad (2.21)$$

$$\eta_m = \mathbb{I}_m + \chi_m^{(1)}, \quad (2.22)$$

---

<sup>1</sup>Só analisamos meios que obedecem a esse acoplamento.

que são, respectivamente, o vetor de onda de frequência indexada por  $m$  ( $\omega_m$ ) no vácuo e um tensor que gera os índices de refração ao quadrado<sup>2</sup>.

Aplicando a relação de ortogonalidade da série de Fourier [36] e considerando apenas os processos com frequências não nulas ( $\omega_m \neq 0$ ), finalmente encontramos

$$\nabla^2 \boldsymbol{\varepsilon}_s - \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s) + k_{vac,s}^2 \eta_s \boldsymbol{\varepsilon}_s = 0, \quad (2.23)$$

que servirá como ponto de partida para a seção seguinte, onde descreveremos a aproximação paraxial.

## 2.1 Aproximação Paraxial

Lembrando que os coeficientes  $\boldsymbol{\varepsilon}_s(\mathbf{r})$  carregam a informação da parte espacial da onda, definí-lo como

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s(\vec{r}, z) = \{\mathbf{F}_{\mathbf{T}_s}(\vec{r}, z) + F_{z_s}(\vec{r}, z) \hat{z}\} e^{ik_s z}, \quad (2.24)$$

servirá de Ansatz<sup>3</sup> para a Aproximação Paraxial. O fator  $e^{ik_s z}$  indica que a solução almejada se propaga na direção  $z$ . Dessa maneira,  $\mathbf{F}_{\mathbf{T}_s}$  representa a amplitude transversa a propagação, que é associada a dispersão do feixe, e  $F_{z_s}$  representa a parte longitudinal do feixe, que é ligado à dispersão de energia. Outra consideração feita aqui é que o material possui  $\eta_s$  (Eq. (2.22)) diagonal e com índices de refração iguais nas três direções<sup>4</sup>, ou seja, um meio isotrópico descrito por

$$(\chi_m^{(1)})_{ij} = (\chi_m^{(1)})_{11} \delta_{ij}, \quad (2.25)$$

<sup>2</sup>Também conhecido como permissividade relativa.

<sup>3</sup>Uma solução tentativa baseada no comportamento esperado do sistema a ser resolvido.

<sup>4</sup>Aproximação feita apenas para simplificar a demonstração da Equação Paraxial, não é necessária. Inclusive vamos utilizar índices de refração diferentes para cada polarização nos cálculos posteriores.

que leva em

$$\eta_s = n_s^2 \mathbb{I}. \quad (2.26)$$

Assim, o vetor de onda  $k_s$ , na Eq. (2.24), que é o vetor de onda dentro desse meio material escolhido, será

$$k_s^2 = n_s^2 k_{vac,s}^2. \quad (2.27)$$

Substituindo Eq. (2.26) e Eq. (2.27) em Eq. (2.23) obtemos

$$\nabla^2 \boldsymbol{\varepsilon}_s - \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_s) + k_s^2 \boldsymbol{\varepsilon}_s = 0. \quad (2.28)$$

Aplicando o Ansatz da Eq. (2.24) em Eq. (2.28) obtemos duas equações, uma para a parte transversa e outra para parte longitudinal do campo, que são, respectivamente,

$$\begin{aligned} \nabla_T \left( \nabla_T \cdot \mathbf{F}_{\mathbf{T}s} + \frac{\partial F_{zs}}{\partial z} + \imath k_s F_{zs} \right) - \\ - \nabla_T^2 \mathbf{F}_{\mathbf{T}s} - \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{\mathbf{T}s}}{\partial z^2} - 2\imath k_s \frac{\partial \mathbf{F}_{\mathbf{T}s}}{\partial z} = 0, \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (\nabla_T \cdot \mathbf{F}_{\mathbf{T}s}) + \imath k_s (\nabla_T \cdot \mathbf{F}_{\mathbf{T}s}) - \nabla_T^2 F_{zs} - k_s^2 F_{zs} = 0. \quad (2.30)$$

O próximo passo na busca pela aproximação paraxial será utilizar feixes com distribuição gaussiana nas direções transversas a propagação, como ilustrado nas Fig. 2.1 e Fig. 2.2. Assim este feixe terá largura transversa característica, também conhecida como cintura, descrita por " $w_s$ ", que é associada a sua divergência. O comprimento característico ao longo da direção de propagação, também conhecido como comprimento de Rayleigh, será dado por " $z_R$ ".

De posse desses comprimentos característicos é possível reescalar as dimen-

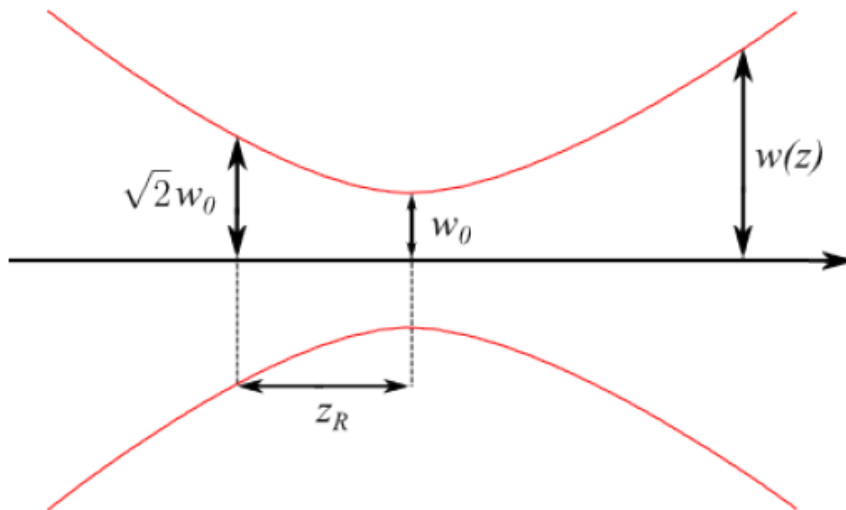


Figura 2.1: Retirada de [37]. Representação geométrica de um feixe gaussiano.  $w_0$  é o que chamamos de cintura, que é a região onde o feixe é mais estreito, e  $z_R$  é a distância de Reileigh, distância em que o diâmetro do feixe passa a ser  $\sqrt{2}w_0$ .

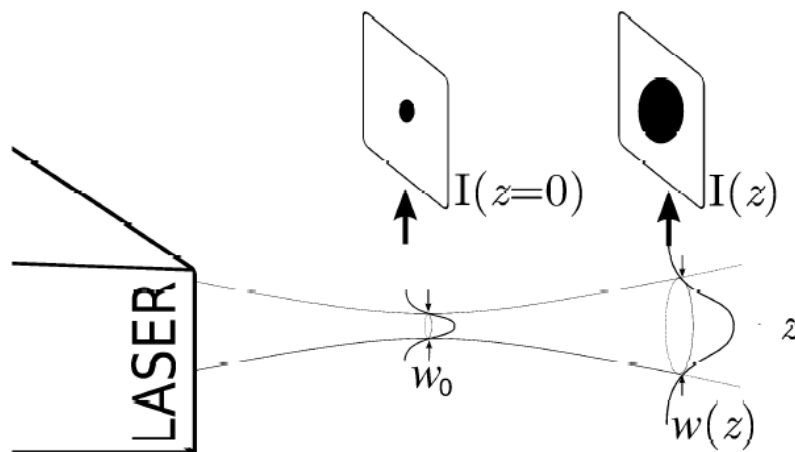


Figura 2.2: Retirada de [30]. Representação geométrica com distribuição de intensidade a medida que um feixe gaussiano se propaga.

sões  $(x, y, z)$  como

$$\begin{aligned}x &= w_s \bar{x}_s, \\y &= w_s \bar{y}_s, \\z &= z_R \bar{z},\end{aligned}\tag{2.31}$$

com a cintura dada por

$$w_s = \sqrt{\frac{2z_R}{k_s}}.\tag{2.32}$$

Considere agora que este feixe diverge muito pouco a medida que se propaga, ou seja,  $w_s \ll z_R$ , que é uma consideração central na aproximação paraxial. Para inserir essa informação no problema, Eq. (2.29) e Eq. (2.30), define-se o parâmetro

$$f_s = \frac{w_s}{z_R} = \frac{2}{k_s w_s}.\tag{2.33}$$

Assim, aplicando estas relações nas Eq. (2.29) e Eq. (2.30), encontramos

$$\begin{aligned}\nabla_{\bar{T}} \left( f_s \nabla_{\bar{T}} \cdot \mathbf{F}_{\bar{T}_s} + f_s^2 \frac{\partial F_{\bar{z}_s}}{\partial \bar{z}} + \imath 2 F_{\bar{z}_s} \right) - \\ - f_s \nabla_{\bar{T}}^2 \mathbf{F}_{\bar{T}_s} - f_s^3 \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{\bar{T}_s}}{\partial \bar{z}^2} - \imath 4 f_s \frac{\partial \mathbf{F}_{\bar{T}_s}}{\partial \bar{z}} = 0,\end{aligned}\tag{2.34}$$

$$f_s^3 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (\nabla_{\bar{T}} \cdot \mathbf{F}_{\bar{T}_s}) + \imath 2 f_s (\nabla_{\bar{T}} \cdot \mathbf{F}_{\bar{T}_s}) - f_s^2 \nabla_{\bar{T}}^2 F_{\bar{z}_s} - 4 F_{\bar{z}_s} = 0.\tag{2.35}$$

Mesmo após todas as manipulações feitas até aqui, o sistema de equações acima não é nada simples de se obter uma solução. Então para dar seguimento faremos uma expansão das componentes do campo elétrico em potências de  $f_s$ ,

isto é,

$$\mathbf{F}_{\bar{\mathbf{T}}_s} = \sum_i \mathbf{F}_{\bar{\mathbf{T}}_s}^{(i)} f_s^i, \quad (2.36)$$

$$F_{\bar{z}_s} = \sum_i F_{\bar{z}_s}^{(i)} f_s^i, \quad (2.37)$$

de modo que este trabalho vai perseguir soluções de ordem zero ( $\mathbf{F}_{\bar{\mathbf{T}}_s}^{(0)}$  e  $F_{\bar{z}_s}^{(0)}$ ) nessa expansão, novamente porque consideramos feixes que divergem muito pouco a medida que se propaga.

Sendo assim, substituindo as Eq. (2.36) e Eq. (2.37) nas Eq. (2.34) e Eq. (2.35) obtemos

$$\sum_i \left\{ \nabla_{\bar{\mathbf{T}}} \left( f_s^{i+1} \nabla_{\bar{\mathbf{T}}} \cdot \mathbf{F}_{\bar{\mathbf{T}}_s}^{(i)} + f_s^{i+2} \frac{\partial F_{\bar{z}_s}^{(i)}}{\partial \bar{z}} + \imath 2 f_s^i F_{\bar{z}_s}^{(i)} \right) - \right. \\ \left. - f_s^{i+1} \nabla_{\bar{\mathbf{T}}}^2 \mathbf{F}_{\bar{\mathbf{T}}_s}^{(i)} - f_s^{i+3} \frac{\partial^2 \mathbf{F}_{\bar{\mathbf{T}}_s}^{(i)}}{\partial \bar{z}^2} - \imath 4 f_s^{i+1} \frac{\partial \mathbf{F}_{\bar{\mathbf{T}}_s}^{(i)}}{\partial \bar{z}} \right\} = 0, \quad (2.38)$$

$$\sum_i \left\{ f_s^{i+3} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left( \nabla_{\bar{\mathbf{T}}} \cdot \mathbf{F}_{\bar{\mathbf{T}}_s}^{(i)} \right) + \imath 2 f_s^{i+1} \left( \nabla_{\bar{\mathbf{T}}} \cdot \mathbf{F}_{\bar{\mathbf{T}}_s}^{(i)} \right) - f_s^{i+2} \nabla_{\bar{\mathbf{T}}}^2 F_{\bar{z}_s}^{(i)} - 4 f_s^i F_{\bar{z}_s}^{(i)} \right\} = 0. \quad (2.39)$$

Portanto, a solução requerida passa pelas etapas:

- primeiro vamos considerar os termos de ordem zero nas equações acima. Para isso substituímos  $f_s = 0$  na Eq. (2.39) (substituir na Eq. (2.38) não traz nenhuma informação adicional), e encontrará

$$F_{\bar{z}_s}^{(0)} = 0 \quad (2.40)$$

- como o passo anterior não fornece informação sobre o termo de ordem zero da parte transversa do campo, vamos considerar o termo de ordem um das equações acima. Para isso basta derivar uma vez as Eq. (2.38) e Eq. (2.39) com relação a  $f_s$



e fazer  $f_s = 0$ . Resolvendo o sistema resultante encontramos

$$F_{\bar{z}_s}^{(1)} = \frac{\iota}{2} \left( \nabla_{\bar{T}} \cdot \mathbf{F}_{\bar{\mathbf{T}}_s}^{(0)} \right), \quad (2.41)$$

$$\nabla_{\bar{T}}^2 \mathbf{F}_{\bar{\mathbf{T}}_s}^{(0)} + \iota 4 \frac{\partial \mathbf{F}_{\bar{\mathbf{T}}_s}^{(0)}}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (2.42)$$

Como já dito antes, buscamos solução de ordem zero no parâmetro  $f_s$ , por essa ser uma boa aproximação para os feixes de interesse - feixes que divergem muito pouco a medida que se propagam ( $w_s \ll z_R$ ) - ou seja, vamos desprezar todos os termos com ordens maiores. Por fim, encontramos a solução:

$$F_{\bar{z}_s}^{(0)} = 0, \quad (2.43)$$

$$\nabla_{\bar{T}}^2 \mathbf{F}_{\bar{\mathbf{T}}_s}^{(0)} + \iota 4 \frac{\partial \mathbf{F}_{\bar{\mathbf{T}}_s}^{(0)}}{\partial \bar{z}} = 0. \quad (2.44)$$

Antes de analisarmos essas duas equações vamos voltar das dimensões escaladas para as dimensões originais<sup>5</sup>, que por fim nos levará a

$$F_{z_s}^{(0)} = 0, \quad (2.45)$$

$$\nabla_T^2 \mathbf{F}_{\mathbf{T}_s}^{(0)} + \iota 2k_s \frac{\partial \mathbf{F}_{\mathbf{T}_s}^{(0)}}{\partial z} = 0. \quad (2.46)$$

A Eq. (2.45) diz que não teremos o termo que gera polarização na direção de propagação, ou seja, o fluxo de energia será todo ao longo da direção de propagação, como mencionado anteriormente.

Então teremos apenas polarizações perpendiculares a direção de propagação. Isso simplifica a descrição do problema, pois podemos escolher como base do sistema de coordenadas  $(\hat{H}, \hat{V}, \hat{z})$ , onde vamos chamar  $\hat{H}$  de polarização horizontal,

---

<sup>5</sup> $(\bar{x}_s, \bar{y}_s, \bar{z}) \rightarrow (x, y, z)$ .

$\hat{V}$  de polarização vertical e  $\hat{z}$  de direção de propagação.

E, finalmente, a Eq. (2.46) é a famosa Equação Paraxial, que figura em várias referências, como [11, 12, 29, 30, 31, 32, 33], e servindo como base para toda a tese desenvolvida a seguir. Ela tem como solução os modos de Hermite-Gauss, se resolvermos o problema em coordenadas cartesianas, ou os modos de Laguerre-Gauss, em coordenadas cilíndricas, sendo estes representados na Fig. 2.3.

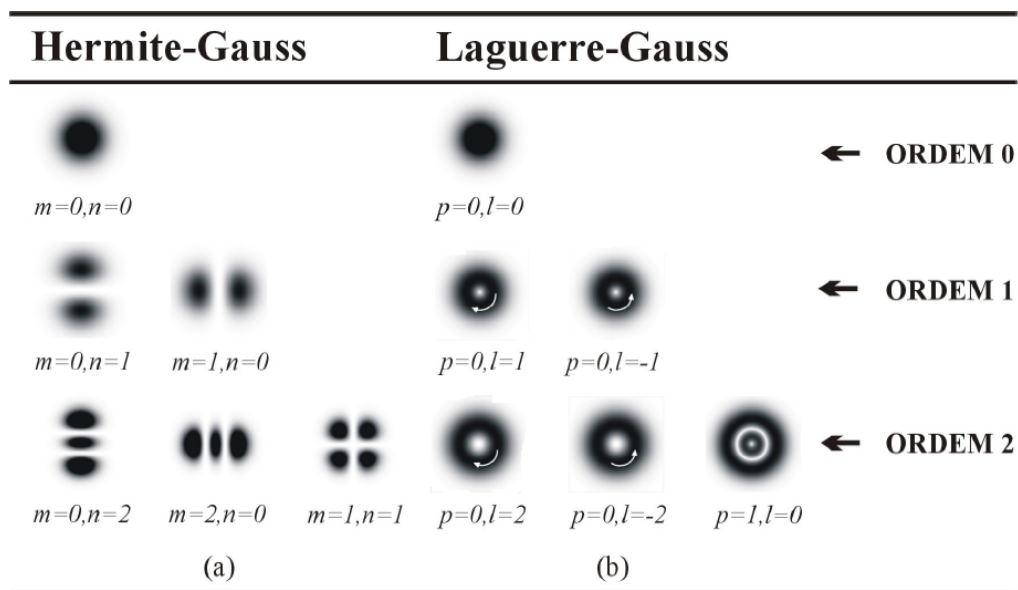


Figura 2.3: Retirada de [38]. Perfis de intensidade de ordens 0, 1 e 2 dos modos: a) Hermite-Gauss; e b) de Laguerre-Gauss.

É interessante mencionar que a Equação Paraxial apresentada aqui foi obtida de maneira um pouco diferente dos trabalhos [30, 31, 32, 33]. Escolhemos essa abordagem porque assim achamos menos complicado de trabalhar problemas em que a relação entre a divergência e a propagação do feixe não seja tão grande assim ( $w_s \approx z_R$ ), podendo considerar efeito de "Walk-off" ou até mesmo feixes mais complicados.

## 2.2 Ótica não-linear

Aqui faremos uma abordagem sintética dos efeitos óticos produzidos em meios com não-linearidade de segunda ordem, dando maior atenção para a GSH, que é a aplicação não-linear de interesse dessa tese.

A densidade de polarização não-linear, de segunda ordem, tem como expressão geral

$$\mathbf{P}_{NL} = \epsilon_0 \chi^{(2)} \mathbf{E}\mathbf{E}. \quad (2.47)$$

Essa equação nos diz que o meio acopla todas as combinações de polarização ( $\hat{H}$  e  $\hat{V}$ ) do campo elétrico total com as polarizações dele mesmo, através do tensor de acoplamento não linear  $\chi^{(2)}$ , assim polarizando a distribuição de cargas ligadas do meio em questão.

Os meios não-lineares de interesse serão cristais birrefringentes com  $\chi^{(2)}$  acoplando apenas três das possíveis frequências que o campo elétrico total pode ter, que são  $\omega_0$ ,  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , de modo que estas obedecem a relação de conservação de energia

$$\omega_2 = \omega_0 + \omega_1. \quad (2.48)$$

Daqui por diante, vamos nos referir ao primeiro harmônico como sendo os campos, definidos nas Eq. (2.15) e Eq. (2.16)<sup>6</sup>, relacionados às frequências  $\omega_0$  e  $\omega_1$ , que são as menores desse processo, e ao segundo harmônico como sendo os campos relacionados às frequências  $\omega_2$ , que é a mais alta.

Podemos entender Eq. (2.48) como a conservação de energia:  $\hbar\omega_2 = \hbar\omega_0 + \hbar\omega_1$ . Ou seja, um processo onde o meio absorve dois fótons do primeiro harmônico e emite um do segundo harmônico, conhecido como conversão paramétrica ascendente (ou Geração de Segundo Harmônico, que é o nosso interesse). Essa conservação de energia também descreve o processo reverso, onde o meio absorve

---

<sup>6</sup>Lembrando:  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \sum_m (\epsilon_m(\mathbf{r})e^{-i\omega_m t} + \epsilon_m^*(\mathbf{r})e^{i\omega_m t})$

um fóton do segundo harmônico e emite dois do primeiro harmônico, conhecido como conversão paramétrica descendente.

O cristal que escolhemos estudar são os chamados tipo-II. Esse cristal tem como finalidade acoplar um campo do primeiro harmônico de polarização  $\hat{H}$ , com outro campo do primeiro harmônico de polarização  $\hat{V}$ , com o campo do segundo harmônico de polarização  $\hat{V}$ , sendo descrito matematicamente pelo sistema<sup>7 8</sup>

$$\begin{aligned} p_V(\omega_2) &= \chi_{VHV}^{(2)}(\omega_2, \omega_0, \omega_1) \varepsilon_H(\omega_0) \varepsilon_V(\omega_1), \\ p_H(\omega_0) &= \chi_{HVV}^{(2)}(\omega_0, \omega_2, \omega_1) \varepsilon_V(\omega_2) \varepsilon_V^*(\omega_1), \\ p_V(\omega_1) &= \chi_{VHV}^{(2)}(\omega_1, \omega_0, \omega_2) \varepsilon_V(\omega_2) \varepsilon_H^*(\omega_0), \end{aligned} \quad (2.49)$$

onde esses acoplamentos possuem iguais pesos, que, para facilitar um pouco a notação, chamaremos apenas de  $\chi$ , isto é,

$$\chi_{VHV}^{(2)}(\omega_2, \omega_0, \omega_1) = \chi_{HVV}^{(2)}(\omega_0, \omega_2, \omega_1) = \chi_{VHV}^{(2)}(\omega_1, \omega_0, \omega_2) = \chi. \quad (2.50)$$

Essa é uma visão geral do que vamos precisar sobre efeitos não-lineares, de segunda ordem. Para inserir essas informações no contexto da Ótica Paraxial, basta substituir o termo não-linear das Eq. (2.49) e Eq. (2.50) na Eq. (2.13) e fazer as manipulações necessárias, utilizando os mesmos mecanismos da Aproximação Paraxial, até enfim encontrar

$$\nabla_{\perp}^2 F_0^H + i2k_0 \frac{\partial F_0^H}{\partial z} = -\frac{\chi \omega^2}{c^2} F_2^V F_1^{V*}, \quad (2.51)$$

$$\nabla_{\perp}^2 F_1^V + i2k_1 \frac{\partial F_1^V}{\partial z} = -\frac{\chi \omega^2}{c^2} F_2^V F_0^{H*}, \quad (2.52)$$

$$\nabla_{\perp}^2 F_2^V + i2k_2 \frac{\partial F_2^V}{\partial z} = -\frac{\chi (2\omega)^2}{c^2} F_0^H F_1^V. \quad (2.53)$$

<sup>7</sup>Trocamos  $\varepsilon_m$  por  $\varepsilon(\omega_m)$  para ficar mais evidente na equação o acoplamento descrito.

<sup>8</sup>Definimos aqui  $\mathbf{P}_{NL} = \sum_m (\mathbf{p}_m e^{-i\omega_m t} + \mathbf{p}_m^* e^{i\omega_m t})$ , onde  $\mathbf{p}_m = \mathbf{p}(\omega_m)$ .

Chamaremos estas de equações dinâmicas, que são equações paraxiais em cristais com não-linearidades de segunda ordem.

## 2.3 Equações dinâmicas multimodo na Geração de Segundo Harmônico

As Equações Dinâmicas descrevem a interação dos três campos no cristal não-linear ( $\chi^{(2)}$ ) tipo-II no processo de GSH. Escolhemos o problema em que os dois feixes do primeiro harmônico possuem a mesma frequência ( $\omega_0 = \omega_1 = \omega$ ), e, conseqüentemente, o segundo harmônico terá frequência  $2\omega$ . Assim, as Equações Dinâmicas (Eq. (2.51), Eq. (2.52) e Eq. (2.53)) se tornarão<sup>9</sup>

$$\nabla_{\perp}^2 F_{\omega}^H + i2k_H \frac{\partial F_{\omega}^H}{\partial z} = -\frac{\chi\omega^2}{c^2} F_{2\omega}^V F_{\omega}^{V*}, \quad (2.54)$$

$$\nabla_{\perp}^2 F_{\omega}^V + i2k_V \frac{\partial F_{\omega}^V}{\partial z} = -\frac{\chi\omega^2}{c^2} F_{2\omega}^V F_{\omega}^{H*}, \quad (2.55)$$

$$\nabla_{\perp}^2 F_{2\omega}^V + i2k_{2\omega} \frac{\partial F_{2\omega}^V}{\partial z} = -\frac{\chi(2\omega)^2}{c^2} F_{\omega}^H F_{\omega}^V. \quad (2.56)$$

Como as Equações Dinâmicas são obtidas a partir da Aproximação Paraxial, vamos expandir as soluções das equações acima na base de Laguerre-Gauss - que

---

<sup>9</sup>Onde, daqui em diante, consideramos  $k_H^{\omega} = k_H$  e  $k_V^{\omega} = k_V$ , ou seja, vamos omitir o índice  $\omega$  quando se tratar dos termos de primeiro harmônico.

é solução da Equação Paraxial<sup>10</sup> em coordenadas cilíndricas - resultando em<sup>11</sup>:

$$F_{\omega}^H(\mathbf{r}, z) = \sum_{p,l} u_{pl}^H(\mathbf{r}, z) A_{pl}^H(z), \quad (2.57)$$

$$F_{\omega}^V(\mathbf{r}, z) = \sum_{p,l} u_{pl}^V(\mathbf{r}, z) A_{pl}^V(z), \quad (2.58)$$

$$F_{2\omega}^V(\mathbf{r}, z) = \sum_{p,l} u_{pl}^{2\omega}(\mathbf{r}, z) B_{pl}(z), \quad (2.59)$$

onde

$$u_{pl}^i(\mathbf{r}, z) = \sqrt{\frac{2p!}{\pi w_i^2(z)(p+|l|)!}} \left( \sqrt{2} \frac{r}{w_i(z)} \right)^{|l|} L_p^{|l|} \left( \frac{2r^2}{w_i^2(z)} \right) \\ \times e^{-\frac{r^2}{w_i^2(z)}} e^{i \left( \frac{r^2}{w_i^2(z)} \frac{z}{z_R} - (2p+|l|+1)tg^{-1} \left( \frac{z}{z_R} \right) + l\theta \right)}, \quad (2.60)$$

são os modos de Laguerre-Gauss, sendo  $L_a^b(x)$  os polinômios de Laguerre associados e  $w_i(z)$  a largura do feixe, definida como

$$w_i(z) = \sqrt{1 + \left( \frac{z}{z_R} \right)^2} w_i, \quad (2.61)$$

sendo

$$w_i = \sqrt{\frac{2z_R}{k_i}}, \quad (2.62)$$

a cintura do feixe.

Assim, substituindo as expansões em modos de Laguerre-Gauss nas equações

---

<sup>10</sup>A Equação Paraxial está definida na Eq. (2.46), mas como os modos de Laguerre-Gauss são solução desta, vamos reescrevê-la apenas trocando  $\mathbf{F}_{\mathbf{T}_s}^{(0)}$  por  $\mathbf{u}_{pl}^{\omega}$ , resultando em:

$$\nabla_{\mathbf{T}}^2 \mathbf{u}_{pl}^{\omega} + i2k_{\omega} \frac{\partial \mathbf{u}_{pl}^{\omega}}{\partial z} = 0.$$

<sup>11</sup>Também vamos omitir o índice  $\omega$  quando se tratar dos termos de primeiro harmônico nos modos de Laguerre-Gauss, isto é,  $u_{pl}^{(\omega,H)} = u_{pl}^H$  e  $u_{pl}^{(\omega,V)} = u_{pl}^V$ .

dinâmicas, e, após algumas manipulações, encontramos:

$$\frac{dA_{pl}^H}{dz}(z) = \imath g_H \sum_{p'l'} \sum_{p''l''} \Lambda_{pp'p''}^{l'l''}(z) B_{p'l'}(z) A_{p''l''}^V(z)^* e^{\imath \Delta k z}, \quad (2.63)$$

$$\frac{dA_{pl}^V}{dz}(z) = \imath g_V \sum_{p'l'} \sum_{p''l''} \Lambda_{pp'p''}^{l'l''l}(z) B_{p'l'}(z) A_{p''l''}^H(z)^* e^{\imath \Delta k z}, \quad (2.64)$$

$$\frac{dB_{pl}}{dz}(z) = \imath g_{2\omega} \sum_{p'l'} \sum_{p''l''} \Lambda_{pp'p''}^{ll'l''*}(z) A_{p'l'}^H(z) A_{p''l''}^V(z) e^{-\imath \Delta k z}, \quad (2.65)$$

onde

$$\Delta k = k_{2\omega} - (k_H + k_V), \quad (2.66)$$

$$g_i = \frac{\chi \omega^2}{2k_i c^2} R_{000}^{000}, \quad (2.67)$$

$$g_{2\omega} = \frac{\chi (2\omega)^2}{2k_i c^2} R_{000}^{000}, \quad (2.68)$$

$$\Lambda_{pp'p''}^{ll'l''} = \frac{R_{pp'p''}^{ll'l''}}{R_{000}^{000}}, \quad (2.69)$$

$$(2.70)$$

são, respectivamente, o descasamento de fase, a constante de acoplamento não-linear (responsável pelo acoplamento não-linear entre diferentes frequências e diferentes polarizações) e as constantes de recobrimento (normalizadas)<sup>12</sup>, sendo

$$R_{pp'p''}^{ll'l''} = \int u_{pl}^{2\omega} u_{p'l'}^H{}^* u_{p''l''}^V{}^* d^2\mathbf{r}. \quad (2.71)$$

Considerando que o comprimento de Rayleigh ( $z_R$ ) é muito maior que a dimensão  $z$  do cristal. Isso nos levará a

$$w_i(z) \approx w_i \quad (2.72)$$

<sup>12</sup>As constantes de recobrimento serão melhor exploradas no Capítulo 5.

$$u_{pl}^i(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{2p!}{\pi w_i^2 (p + |l|)!}} \left( \sqrt{2} \frac{r}{w_i} \right)^{|l|} L_p^{|l|} \left( \frac{2r^2}{w_i^2} \right) e^{-\frac{r^2}{w_i^2}} e^{il\theta}, \quad (2.73)$$

que implica em

$$\Lambda_{pp'p''}^{ll'l''*} = \Lambda_{pp'p''}^{ll'l''}, \quad (2.74)$$

e, conseqüentemente, em

$$g_i^* = g_i. \quad (2.75)$$

Também vamos considerar que há casamento de fase na medida proposta para o cristal de interesse, isto é:

$$\Delta k = 0, \quad (2.76)$$

o que leva a

$$k_{2\omega} = k_H + k_V. \quad (2.77)$$

Agora vamos reescalar as amplitudes do campo elétrico:

$$A_{pl}^j(z) = \sqrt{\frac{2}{n_j c \epsilon_0}} a_{pl}^j(z), \quad (2.78)$$

$$B_{pl}(z) = \sqrt{\frac{2}{n_j c \epsilon_0}} b_{pl}(z), \quad (2.79)$$

pois assim teremos que  $|a_{pl}^j(z)|^2$  e  $|b_{pl}(z)|^2$  serão as intensidades de cada modo.

Por fim, substituindo as relações encontradas em Eq. (2.74), Eq. (2.76), Eq. (2.78) e Eq. (2.79) nas Eq. (2.63), Eq. (2.64) e Eq. (2.65) as equações dinâmicas se tor-



nam

$$\frac{da_{p'l'}^H}{dz} = \imath g \sum_{pl} \sum_{p''l''} \Lambda_{pp'p''}^{l'l''} b_{pl} a_{p''l''}^V{}^*, \quad (2.80)$$

$$\frac{da_{p''l''}^V}{dz} = \imath g \sum_{pl} \sum_{p'l'} \Lambda_{pp'p''}^{l'l''} b_{pl} a_{p'l'}^H{}^*, \quad (2.81)$$

$$\frac{db_{pl}}{dz} = \imath 2g \sum_{p'l'} \sum_{p''l''} \Lambda_{pp'p''}^{l'l''} a_{p'l'}^H a_{p''l''}^V, \quad (2.82)$$

com a nova constante de acoplamento não-linear dada por

$$g = \frac{\chi\omega}{c\sqrt{2n_H n_V n_{2\omega}} c\epsilon_0} R_{000}^{000}. \quad (2.83)$$

### 2.3.1 Representação de intensidade e fase e relações de Manley-Rowe multimodo

A solução das equações dinâmicas (Eq. (2.80), Eq. (2.81) e Eq. (2.82)) não é nada trivial, pois estão envolvidos nesse processo infinitos campos ( $a_{p'l'}^H$ ,  $a_{p''l''}^V$  e  $b_{pl}$ ), que por sua vez possuem infinitas possibilidades de acoplamento ( $\Lambda_{pp'p''}^{l'l''}$ ). A forma que encontramos de obter mais informações sobre este problema, inclusive encontrando algumas soluções analíticas (descritas no Capítulo 6) foi reescrever os campos como uma amplitude complexa (que serão as intensidade deste campo) e uma fase, isto é:

$$a_{pl}^i = \sqrt{I_{pl}^i} e^{\imath\phi_{pl}^i}, \quad (2.84)$$

$$b_{pl} = \sqrt{J_{pl}} e^{\imath\psi_{pl}}. \quad (2.85)$$

Aplicando as equações acima nas Eq. (2.80), Eq. (2.81) e Eq. (2.82), separando-as em parte real e parte imaginária, e após alguns passos de simplificação, chega-

mos às equações dinâmicas na representação de intensidade e fase, que são:

$$\frac{dI_{p'l'}^H}{dz} = 2g \sum_{pl} \sum_{p''l''} \Lambda_{pp'p''}^{ll''} \sqrt{J_{pl} I_{p'l'}^H I_{p''l''}^V} \operatorname{sen} (\phi_{p'l'}^H + \phi_{p''l''}^V - \psi_{pl}), \quad (2.86)$$

$$I_{p'l'}^H \frac{d\phi_{p'l'}^H}{dz} = g \sum_{pl} \sum_{p''l''} \Lambda_{pp'p''}^{ll''} \sqrt{J_{pl} I_{p'l'}^H I_{p''l''}^V} \cos (\phi_{p'l'}^H + \phi_{p''l''}^V - \psi_{pl}), \quad (2.87)$$

$$\frac{dI_{p''l''}^V}{dz} = 2g \sum_{pl} \sum_{p'l'} \Lambda_{pp'p''}^{ll''} \sqrt{J_{pl} I_{p'l'}^H I_{p''l''}^V} \operatorname{sen} (\phi_{p'l'}^H + \phi_{p''l''}^V - \psi_{pl}), \quad (2.88)$$

$$I_{p''l''}^V \frac{d\phi_{p''l''}^V}{dz} = g \sum_{pl} \sum_{p'l'} \Lambda_{pp'p''}^{ll''} \sqrt{J_{pl} I_{p'l'}^H I_{p''l''}^V} \cos (\phi_{p'l'}^H + \phi_{p''l''}^V - \psi_{pl}), \quad (2.89)$$

$$\frac{dJ_{pl}}{dz} = -4g \sum_{p'l'} \sum_{p''l''} \Lambda_{pp'p''}^{ll''} \sqrt{J_{pl} I_{p'l'}^H I_{p''l''}^V} \operatorname{sen} (\phi_{p'l'}^H + \phi_{p''l''}^V - \psi_{pl}), \quad (2.90)$$

$$J_{pl} \frac{d\psi_{pl}}{dz} = 2g \sum_{p'l'} \sum_{p''l''} \Lambda_{pp'p''}^{ll''} \sqrt{J_{pl} I_{p'l'}^H I_{p''l''}^V} \cos (\phi_{p'l'}^H + \phi_{p''l''}^V - \psi_{pl}). \quad (2.91)$$

Agora que chegamos às equações dinâmicas multimodos, podemos extrair destas as relações de Manley-Rowe multimodo. As relações de Manley-Rowe, que também podem ser vistas em [12], são leis de conservação entre intensidades em processos não-lineares, que serão melhor ilustrados, no caso multimodo, a seguir.

A primeira relação de Manley-Rowe começa pela Definição da intensidade total

$$I_T = \sum_{p'l'} I_{p'l'}^H + \sum_{p''l''} I_{p''l''}^V + \sum_{pl} J_{pl}, \quad (2.92)$$

que, ao derivarmos uma vez e substituir as Eq. (2.86), Eq. (2.88) e Eq. (2.90), chegamos em

$$\frac{dI_T}{dz} = 0, \quad (2.93)$$

que por sua vez leva a

$$I_T(z) = I_T(0). \quad (2.94)$$

Ou seja, a intensidade total envolvida no processo, dentro do cristal, se conserva, o que significa que toda queda de intensidade em alguns modos é recombinada em outros modos, indicando que toda intensidade do campo que entra no cristal deve sair.

As outras três relações de Manley-Rowe também surgem analisando as Eq. (2.86), Eq. (2.88) e Eq. (2.90), levando em<sup>13</sup>

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{\sum_{p''l''} I_{p''l''}^V}{\omega_2} \right) = \frac{d}{dz} \left( \frac{\sum_{p'l'} I_{p'l'}^H}{\omega_1} \right), \quad (2.95)$$

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{\sum_{pl} J_{pl}}{\omega_3} \right) = -\frac{d}{dz} \left( \frac{\sum_{p'l'} I_{p'l'}^H}{\omega_1} \right), \quad (2.96)$$

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{\sum_{pl} J_{pl}}{\omega_3} \right) = -\frac{d}{dz} \left( \frac{\sum_{p''l''} I_{p''l''}^V}{\omega_2} \right), \quad (2.97)$$

com  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ . Essas relações nos dizem que, dentro do cristal, a taxa de criação de fótons do primeiro harmônico com polarização  $H$  e frequência  $\omega_1$  é igual a taxa de criação de fótons do primeiro harmônico com polarização  $V$  e frequência  $\omega_2$ ; que a taxa de criação de fótons do primeiro harmônico com polarização  $H$  e frequência  $\omega_1$  é igual a taxa de destruição de fótons do segundo harmônico com frequência  $\omega_3$ ; e que a taxa de criação de fótons do primeiro harmônico com polarização  $V$  e frequência  $\omega_2$  é igual a taxa de destruição de

---

<sup>13</sup>No nosso caso temos que  $\omega_2 = \omega_1 = \omega$  e  $\omega_3 = 2\omega$ , que será aplicado um pouco a diante.

fótons do segundo harmônico com frequência  $\omega_3$ .<sup>14</sup>

Então, juntando as relações de Manley-Rowe temos que a intensidade total se conserva e que a destruição de um fóton do primeiro harmônico com polarização  $H$  com a destruição de um fóton do primeiro harmônico com polarização  $V$  resultam na criação de um fóton do segundo harmônico, e vice-versa.

Como estamos lidando com feixes que possuem  $\omega_2 = \omega_1 = \omega$  e  $\omega_3 = 2\omega$ , as Eq. (2.95), Eq. (2.96) e Eq. (2.97) se tornam

$$\frac{d}{dz} \left( \sum_{p''l''} I_{p''l''}^V \right) = \frac{d}{dz} \left( \sum_{p'l'} I_{p'l'}^H \right), \quad (2.98)$$

$$\frac{d}{dz} \left( \sum_{pl} J_{pl} \right) = -2 \frac{d}{dz} \left( \sum_{p'l'} I_{p'l'}^H \right), \quad (2.99)$$

$$\frac{d}{dz} \left( \sum_{pl} J_{pl} \right) = -2 \frac{d}{dz} \left( \sum_{p''l''} I_{p''l''}^V \right). \quad (2.100)$$

Portanto, resolvendo as Eq. (2.95) e Eq. (2.96) (a Eq. (2.97) é combinação linear das outras duas) encontramos

$$\sum_{p''l''} I_{p''l''}^V(z) - \sum_{p'l'} I_{p'l'}^H(z) = \sum_{p''l''} I_{p''l''}^V(0) - \sum_{p'l'} I_{p'l'}^H(0), \quad (2.101)$$

$$\sum_{pl} J_{pl}(z) + 2 \sum_{p'l'} I_{p'l'}^H(z) = \sum_{pl} J_{pl}(0) + 2 \sum_{p'l'} I_{p'l'}^H(0), \quad (2.102)$$

que por sua vez auxiliarão na solução das Equações Dinâmicas multimodo, que será desenvolvida no Capítulo 6.

Assim finalizamos esse capítulo, onde discutimos em detalhes a Aproximação Paraxial, desenvolvida a partir das equações de Maxwell, falando em seguida, bre-

---

<sup>14</sup>Aqui o problema é todo clássico, mas, surpreendentemente, ele reproduz bem esse caráter quântico.

vemente, sobre processos não-lineares de segunda ordem. Por último chegamos nas Equações Dinâmicas multimodo para os elétricos na Aproximação Paraxial, junto com sua representação em intensidade e fase e com as relações de Manley-Rowe.

A seguir começamos a falar sobre os fundamentos da Mecânica Quântica, onde discutimos brevemente desigualdade de Bell e emaranhamento.

## Capítulo 3

# Desigualdade de Bell e Emaranhamento

Este capítulo tem como objetivo fazer uma breve revisão sobre desigualdade de Bell e emaranhamento, que são conceitos chave para os resultados do Capítulo 4. Para esse fim, usaremos como referência principal a dissertação "Emaranhamento e Desigualdade de Bell no Modelo XXZ" [39].

O termo emaranhamento surge com Schrödinger, em 1935, ao analisar o que conhecemos hoje como "paradoxo EPR" [7], publicado no mesmo ano. Schrödinger dizia que este era uma "ação fantasmagórica a distância" por exibir uma espécie de correlação com um comportamento não local, o que era algo inconcebível. No entanto, o paradoxo EPR não debate apenas a questão da não-localidade, mas também o que eles chamam de realismo, sendo ambos melhor discutidos adiante.

Einstein, Podolsky e Rosen [7] assumiram que as interações na Mecânica Quântica, assim como na Mecânica Clássica, seriam locais e propuseram duas condições que acreditavam que toda teoria completa devesse satisfazer, a conhecer:

- i) cada elemento de realidade deve estar na teoria;

- ii) se, sem perturbar o sistema, é possível prever com certeza o valor de uma grandeza física, então existe um elemento de realidade associado a essa grandeza.

Então, esclarecendo, um elemento de realidade é um objeto que existe independentemente de ser observado. E assim surgem duas hipóteses, conhecidas como realismo e localidade, que ao serem violadas pelo estado escolhido na ocasião os levou a concluir que:

- i) a descrição de realidade dada pela função de onda na Mecânica Quântica não é completa; ou
- ii) os observáveis das partes em questão não podem ter realidades simultâneas<sup>1</sup>.

Hoje, já sabendo da resposta, podemos dizer que lhes faltou questionar sobre o fato da mecânica quântica poder ser não-local, como sugeriu Schrödinger.

Essa questão ficou anos sendo debatida sem chegar a um consenso, até que, em 1964, John S. Bell [6] conseguiu pensar numa forma de solucionar esse problema, desenvolvendo o que conhecemos como "desigualdades de Bell". Seu experimento mental propõe justamente testar as hipóteses de localidade e realismo, comprovando que a Mecânica Clássica é realista e local e mostrando que a Mecânica Quântica pode ter estados não-locais ou não-realistas, que são os estados emaranhados.

---

<sup>1</sup>Conhecido atualmente como Princípio de Incerteza de Heisenberg.

### 3.1 Desigualdade de Bell

Após EPR questionar a completeza da Mecânica Quântica e D. Bohm desenvolver a ideia de uma teoria de variáveis ocultas<sup>2</sup> para completá-la [40, 41], foi a vez de J. S. Bell [6] dar a sua contribuição. Bell criou uma desigualdade que toda teoria local e realista deve obedecer, testada experimentalmente por Aspect e colaboradores [8]. Posteriormente, Clauser, Horne, Shimony e Holt (CHSH) [42] apresentaram sua desigualdade baseada na proposta por Bell, sendo esta utilizada aqui.

As desigualdades de Bell se baseiam em duas hipóteses que são bem intuitivas, pelo menos classicamente, e que estavam sendo amplamente discutidas, que seriam: dado um sistema composto, existem elementos de realidade atribuídos a cada observável (variáveis ocultas) e os subsistemas interagem de forma local. Sendo assim a desigualdade de Bell, descrita na versão CHSH, se apresenta da seguinte maneira:

Uma fonte envia uma partícula para Alice e outra para Bob, estando ambos suficientemente distantes um do outro e da fonte para eliminar qualquer tipo de interação (local). Assim, para testar se esse sistema exibirá localidade, Alice utilizará um aparato capaz de realizar uma operação  $X$  e obter o resultado  $a$ , e Bob usará um aparato com as mesmas propriedades onde realizará a operação  $Y$  com resultado  $b$ , onde vamos supor que todo esse sistema está correlacionado e que essa correlação vem de uma variável oculta que gera estratégias que sustentam essa correlação.

Outra informação importante aqui é que as quantidades  $X$ ,  $Y$ ,  $a$  e  $b$  são dicotômicas, isto é,  $\{0, 1\}$ . Isto pode representar, por exemplo, o problema de uma

---

<sup>2</sup>A ideia por trás das variáveis ocultas é argumentar que a Mecânica Quântica parece não ser completa porque não estamos considerando algumas variáveis que estariam ocultas (daí o nome) nas teorias. Assim, graças a essas variáveis, os elementos de realidades poderiam ser representados de forma determinística nas teorias.



fonte emitindo um par de elétrons de spin-1/2, sendo um enviado para Alice e outro para Bob. Alice escolhe duas orientações  $X$ , que pode ser orientações do imã no experimento de Stern-Gerlach, para realizar a medida  $a$ , que pode ser  $+\hbar/2$  ou  $-\hbar/2$  (que vamos representar simplesmente por 0 ou 1, respectivamente), e Bob faz o mesmo procedimento, escolhendo outras duas orientações  $Y$ , que pode ser o mesmo tipo de aparato de Alice, para realizar a medida  $b$ , também  $+\hbar/2$  ou  $-\hbar/2$ .

Seja  $P(a|X\lambda)$  a probabilidade de Alice obter o resultado  $a$  ao realizar a operação  $X$  dado a estratégia  $\lambda$  e  $P(b|Y\lambda)$  a probabilidade de Bob obter o resultado  $b$  ao realizar a operação  $Y$  dado a mesma estratégia  $\lambda$ . Como eles estão suficientemente distantes um do outro, operações feitas por Alice em sua partícula não devem afetar a partícula de Bob, e vice-versa, gerando probabilidades independentes, que são fatoráveis. Assim, se cada estratégia  $\lambda$  for utilizada com peso<sup>3</sup>  $P(\lambda)$ , ao somar sobre todas as estratégias possíveis teríamos que a probabilidade conjunta de Alice e Bob obterem as medidas  $a$  e  $b$  ao realizarem as operações  $X$  e  $Y$  seria

$$P_L(ab|XY) = \sum_{\lambda} P(\lambda)P(a|X\lambda)P(b|Y\lambda), \quad (3.1)$$

que são probabilidades locais e que obedecem a uma teoria de variável oculta. Ou seja, ao dizermos que operações feitas por Alice não afetam Bob estamos assumindo que esse sistema é local.

Portanto, a desigualdade CHSH será uma combinação das correlações, descritas na Eq. (3.1), limitadas por uma constante a determinar, que será o limite ( $k_L$ ) que toda teoria local e realista (variáveis ocultas) deve obedecer. Ou seja,

$$\left| \sum_{abXY} C_{ab}^{XY} P_L(ab|XY) \right| \leq k_L, \quad (3.2)$$

---

<sup>3</sup> $\sum_{\lambda} P(\lambda) = 1$ .

onde

$$C_{ab}^{XY}(CHSH) = (-1)^{a+b+XY}. \quad (3.3)$$

Substituindo a Eq. (3.3) na Eq. (3.2) encontramos

$$\left| \sum_{abXY} (-1)^{a+b+XY} P_L(ab|XY) \right| \leq k_L(CHSH). \quad (3.4)$$

onde vamos chamar o lado esquerdo de

$$S_{CHSH} = \sum_{abXY} (-1)^{a+b+XY} P_L(ab|XY). \quad (3.5)$$

Desenvolvendo um pouco mais essa última equação, chegamos a

$$S_{CHSH} = \sum_{XY} (-1)^{XY} \{ [P_L(00|XY) + P_L(11|XY)] - [P_L(01|XY) + P_L(10|XY)] \}. \quad (3.6)$$

Definindo a quantidade entre chaves acima como

$$M(XY) = [P_L(00|XY) + P_L(11|XY)] - [P_L(01|XY) + P_L(10|XY)], \quad (3.7)$$

temos que

$$S_{CHSH} = M(00) + M(01) + M(10) - M(11). \quad (3.8)$$

Enfim chegamos na desigualdade CHSH, mas ainda falta encontrar o limite local  $k_L(CHSH)$  e interpretá-la. Para isso vamos voltar na definição de  $M(XY)$  e desenvolver melhor essa quantidade. Substituindo a Eq. (3.1) na Eq. (3.7)

$$\begin{aligned} M(XY) &= \sum_{\lambda} P(\lambda) \{ [P_L(0|X\lambda)P_L(0|Y\lambda) + P_L(1|X\lambda)P_L(1|Y\lambda)] \\ &\quad - [P_L(0|X\lambda)P_L(1|Y\lambda) + P_L(1|X\lambda)P_L(0|Y\lambda)] \}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

que pode ser escrito como

$$M(XY) = \sum_{\lambda} P(\lambda)A(X\lambda)B(Y\lambda), \quad (3.10)$$

com

$$A(X\lambda) = P(0|X\lambda) - P(1|X\lambda), \quad (3.11)$$

$$B(Y\lambda) = P(0|Y\lambda) - P(1|Y\lambda). \quad (3.12)$$

Podemos determinar os valores de  $A(X\lambda)$  e  $B(Y\lambda)$  voltando na definição de variáveis ocultas - variáveis ocultas surgem para completar a teoria quântica, que é uma teoria probabilística, tornando-a uma teoria determinística - Dessa forma, a variável oculta vai deixar predeterminado que uma medida  $X$  de Alice gera o resultado  $a = 0$  com  $P(0|X\lambda) = 1$  ( $P(1|X\lambda) = 0$ ), ou gera  $a = 1$  com  $P(1|X\lambda) = 1$  ( $P(0|X\lambda) = 0$ ), e de forma análoga para Bob. Com isso as quantidades  $A(X\lambda)$  e  $B(Y\lambda)$  devem ser, necessariamente,

$$A(X\lambda) = \pm 1, \quad (3.13)$$

$$B(Y\lambda) = \pm 1. \quad (3.14)$$

Substituindo estas em Eq. (3.8):

$$S_{CHSH} = \sum_{\lambda} P(\lambda)s_{CHSH}(\lambda), \quad (3.15)$$

com

$$s_{CHSH}(\lambda) = A(0\lambda)B(0\lambda) + A(0\lambda)B(1\lambda) + A(1\lambda)B(0\lambda) - A(1\lambda)B(1\lambda), \quad (3.16)$$

que pode ser reescrita como

$$s_{CHSH}(\lambda) = A(0\lambda) [B(0\lambda) + B(1\lambda)] + A(1\lambda) [B(0\lambda) - B(1\lambda)], \quad (3.17)$$

que, por sua vez, tem como solução

$$s_{CHSH}(\lambda) = \pm 2. \quad (3.18)$$

Substituindo esta última na Eq. (3.15) chegamos na resposta final do problema, que é a desigualdade CHSH, dada por

$$-2 \leq S_{CHSH} \leq 2. \quad (3.19)$$

Recapitulando: a desigualdade que encontramos na Eq. (3.19) foi obtida ao considerar que há uma correlação entre as duas partes devido a uma variável oculta no problema (traduzida como realismo), e que essas correlações são locais, isto é, medidas em uma parte não altera a outra. Então toda teoria local e realista envolvendo esses aparatos e essas medidas devem satisfazer essa desigualdade.

## 3.2 Noções de emaranhamento

O termo emaranhamento ganha cada vez mais força, passando a ser utilizado como um recurso para inúmeras aplicações, como citado anteriormente no Capítulo 1. Portanto, vamos a uma breve descrição desse efeito.

A definição matemática para um estado emaranhado é a seguinte: Um estado puro separável de  $N$  partes (ou partículas, ou graus de liberdade) é escrito como

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_N\rangle. \quad (3.20)$$

Um estado puro emaranhado é um estado não-separável, ou seja, não pode ser escrito como na equação acima.

Porém, ao se aprofundar no estudo dessa incrível ferramenta exclusiva da Mecânica Quântica, que é o emaranhamento, descobriu-se que esta é ainda mais complicada do que se apresentou até agora. Ao pesquisar estados mistos viu-se que a relação entre a desigualdade de Bell e emaranhamento para estes estados não é tão próxima assim, confundindo um pouco o que foi entendido sobre emaranhamento até então.

Estados mistos que violam a desigualdade de Bell são emaranhados, assim como nos estados puros, indicando que estes são não-locais ou não-realistas. Porém estados mistos que não violam a desigualdade de Bell não são necessariamente separáveis.

Este último caso dá início a uma busca para entender o que são esses estados mistos emaranhados que não violam a desigualdade de Bell. Assim surge o chamado "emaranhamento ligado"<sup>4</sup> [43], o "emaranhamento oculto" [44] e outras desigualdades para tentar encontrar alguma que se comporte para estados mistos da mesma forma que para estados puros [45].

Portanto, emaranhamento em estados mistos não pode ser definido diretamente de acordo com as desigualdades de Bell. Assim, a definição aceita hoje é dada por R. F. Werner [46], que é a seguinte: um estado misto separável, ou classicamente correlacionado, é aquele que pode ser produzido por Operações Locais e Comunicação Clássica (LOCC<sup>5</sup>)<sup>6</sup>, matematicamente escrito como

$$\rho = \sum_k p_k \rho_A^{(k)} \otimes \rho_B^{(k)} \otimes \dots \otimes \rho_N^{(k)}, \quad (3.21)$$

---

<sup>4</sup>Do inglês Bound Entanglement.

<sup>5</sup>Do inglês Local Operation and Classical Communication

<sup>6</sup>Uma LOCC é uma operação que gera correlação clássica por ser realizada localmente por cada parte enquanto as mesmas se comunicam usando um canal clássico de comunicação.

que é uma combinação convexa dos subsistemas, com  $0 \leq p_k \leq 1$  e  $\sum_k p_k = 1$ . E, semelhante aos estados puros, um estado misto emaranhado é um estado misto não separável.

Por vários anos a comunidade científica buscou eliminar esse "gap" que surgiu entre emaranhamento e violações das desigualdades de Bell até Buscemi [47]<sup>7</sup> dar sua contribuição. Em seu trabalho, intitulado "All Entangled Quantum States Are Nonlocal", Buscemi afirma que todo estado emaranhado viola as desigualdades de Bell - onde ele propõe uma desigualdade a ser violada por todos os estados emaranhados, incluindo os estados mistos emaranhados que não violam a desigualdade CHSH e nenhuma outra conhecida até o momento.

Então, aparentemente, esse "gap" entre emaranhamento e violação da desigualdade de Bell deixa de existir. O que significa dizer que todo estado emaranhado é não-local, não-realista. ou ambos.

Para finalizar, reiteramos que este foi um capítulo de revisão de literatura sobre desigualdade de Bell e emaranhamento, onde discutimos, dentre toda gama de informações e trabalhos sobre o tema, os tópicos de interesse desta tese.

A seguir vamos utilizar os conceitos descritos nesse capítulo para desenvolver um tema relativamente novo chamado inseparabilidade clássica. Vamos discutir que ganhos esta nos traz e como associá-la ao emaranhamento (inseparabilidade quântica).

---

<sup>7</sup>E também o texto [48], onde os cientistas Massar e Pironio discutem seus pontos de vista sobre [47].

## Capítulo 4

# Inseparabilidade Clássica e Quântica

Esse capítulo servirá como base para uma nova gama de experimentos envolvendo ótica não-linear, clássica e quântica, e modos inseparáveis. Aqui mostramos a diferença entre inseparabilidade clássica, conceito que ainda divide opiniões na comunidade científica, e emaranhamento, apresentando uma proposta de como medi-los, baseando-nos em nosso trabalho "Quantum and classical separability of spin-orbit laser modes" [1].

Investigaremos as propriedades do ruído quântico de vórtices de polarização em conexão com uma desigualdade de Clauser-Horne-Shimony-Holt (CHSH) baseada em intensidade para separabilidade dos graus de liberdade spin-órbita. Essa desigualdade foi calculada para diferentes estados quânticos de entrada, com suas correspondentes flutuações.

Veremos também que os papéis desempenhados pela coerência e pela compressão (squeezing) nas flutuações do número de fótons fornecem um quadro sutil para a caracterização do emaranhamento de estado spin-órbita puro. A inseparabilidade estrutural do modo spin-órbita requer coerência na superposição

dos modos, uma questão inerente tanto à descrição clássica, quanto à quântica. Em ambos os casos isso pode ser testemunhado pela violação dessa desigualdade CHSH baseada em intensidade. Entretanto, no domínio quântico, emaranhamento requer além da coerência da superposição de estados, uma redução da flutuação do número de fótons.

O que chamamos de modo spin-órbita é um modo em que consideramos sua polarização (spin) e sua distribuição espacial, gerando Momento Angular Orbital (órbita). Podemos codificar esses graus de liberdade de uma mesma partícula em dois qubits, um qubit na polarização e o outro no MAO [49]. Essa nova forma de codificar qubits em graus de liberdade de uma mesma partícula já possui aplicações bem interessantes em protocolos de informação quântica, como: "polarization-controlled quantum imaging" [50, 51], algoritmos [52], portas lógicas [53, 54, 55, 56, 57], criptografia [58, 59, 60], teletransporte [61, 62, 63, 64] e fases topológicas [65, 66].

Alguns dos cálculos realizados para produção do trabalho [1], que serve como base para o atual capítulo, podem ser vistos no Apêndice A.

## **4.1 Vórtices de polarização como modo spin-órbita inseparável**

Nesta seção, discutimos a noção de emaranhamento de modos e sua sutil distinção do emaranhamento do estado quântico. Ambos invocam o conceito de não-separabilidade de um produto tensorial de um espaço vetorial. No entanto, a estrutura tensorial de um modo do campo eletromagnético não é exclusiva à teoria quântica, ela ocorre também na eletrodinâmica clássica. A polarização do feixe de luz é diretamente relacionada com a natureza vetorial do campo eletromagnético. Ao mesmo tempo, uma estrutura de espaço vetorial pode ser atribuída às funções



esaciais usadas para descrever um feixe paraxial. Portanto, a estrutura completa do modo requer uma combinação desses dois graus de liberdade na forma de um produto tensorial entre os dois espaços vetoriais. Por exemplo, é possível combinar vetores de polarização linear com funções espaciais Hermite-Gauss, que são soluções discretas da equação de onda paraxial em coordenadas retangulares, ilustrados na Fig. 2.3.

As direções de polarização serão rotuladas pelas letras maiúsculas  $H$  e  $V$ , associados com os vetores unitários  $\hat{e}_H = \hat{x}$  e  $\hat{e}_V = \hat{y}$ . Os modos Hermite-Gauss de primeira ordem orientados ao longo das direções horizontal e vertical serão etiquetados com as letras minúsculas  $h$  e  $v$ , respectivamente, associados com as funções espaciais

$$\begin{aligned}\psi_h(x, y, z) &= Nx \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{2w^2(z)} + i\phi(x, y, z) \right], \\ \psi_v(x, y, z) &= Ny \exp \left[ -\frac{x^2 + y^2}{2w^2(z)} + i\phi(x, y, z) \right]\end{aligned}\quad (4.1)$$

onde  $N$  é uma constante de normalização e  $\phi(x, y, z)$  é a distribuição espacial de fase. O modo vetorial de primeira ordem mais geral pode ser escrito como

$$\mathbf{\Psi}(\mathbf{r}) = A_{Hh}\psi_h\hat{e}_H + A_{Hv}\psi_v\hat{e}_H + A_{Vh}\psi_h\hat{e}_V + A_{Vv}\psi_v\hat{e}_V, \quad (4.2)$$

onde  $\sum_{\mu\nu} |A_{\mu\nu}|^2 = 1$ . É possível apropriar-se da definição de concorrência da teoria da informação quântica [67, 68] para caracterizar a separabilidade spin-órbita,

$$C = 2 \|A_{Hh}A_{Vv} - A_{Hv}A_{Vh}\|, \quad (4.3)$$

ao passo que  $C = 0$  identifica um modo produto, ou separável, e  $0 < C \leq 1$  identifica um modo não-fatorável, ou não-separável, sendo  $C = 1$  para modos maximamente não-separáveis.

Uma base de modos spin-órbita de primeira ordem também pode ser construída com modos maximamente não-separáveis, análogos aos estados de Bell na mecânica quântica:

$$\begin{aligned}\Psi_{\pm}(\mathbf{r}) &= \frac{\psi_h \hat{e}_H \pm \psi_v \hat{e}_V}{\sqrt{2}}, \\ \Phi_{\pm}(\mathbf{r}) &= \frac{\psi_h \hat{e}_V \pm \psi_v \hat{e}_H}{\sqrt{2}}.\end{aligned}\quad (4.4)$$

Eles correspondem a polarizações não-uniformes na frente de onda. Dois exemplos simples de modos maximamente não-separáveis são os famosos modos de polarização radial ( $\Psi_+$ ) e azimutal ( $\Phi_-$ ), mostrados na Fig. 4.1.

É possível notar que esses modos de Bell, Eq. (4.4), são todos maximamente não-separáveis - basta aplicar a Eq. (4.3) e verificar que  $C = 1$ .

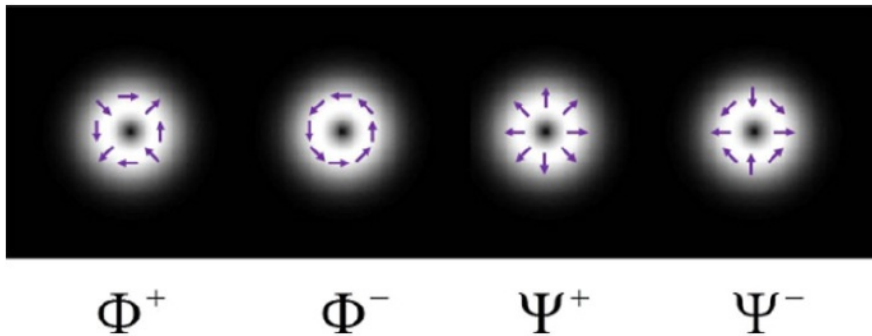


Figura 4.1: Retirada de [1]. Vórtices de polarização de primeira ordem (Eq. (4.4)) análogos aos quatro estados de Bell.

## 4.2 Modos spin-órbita quantizados

Considere o operador de Heisenberg que descreve a componente de frequência positiva do campo eletromagnético associado a um feixe paraxial de primeira ordem propagando-se na direção  $z$ . Na base de modos  $\psi_\nu \hat{e}_\mu$ , com  $\mu = H, V$  e

$\nu = h, v$ , este operador será

$$\mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = e^{i(kz - \omega t)} \sum_{\mu, \nu} a_{\mu\nu} \psi_{\nu}(\mathbf{r}) \hat{e}_{\mu}, \quad (4.5)$$

onde  $a_{\mu\nu}$  é o operador que aniquila um fóton no modo  $\psi_{\nu} \hat{e}_{\mu}$ . Como de costume, é possível definir novos operadores de aniquilação quando uma base de modos diferente é usada para decompor o operador de campo. Para os modos de Bell definidos na seção anterior, Eq. (4.4), obtém-se as seguintes transformações para os operadores de aniquilação:

$$\begin{aligned} a_{\Psi_{\pm}} &= \frac{a_{Hh} \pm a_{Vv}}{\sqrt{2}}, \\ a_{\Phi_{\pm}} &= \frac{a_{Hv} \pm a_{Vh}}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

e as transformações conjugadas correspondentes para os operadores de criação. Assim, o operador de campo elétrico pode ser escrito nesta nova base como:

$$\mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = e^{i(kz - \omega t)} \sum_{\pm} (a_{\Psi_{\pm}} \Psi_{\pm} + a_{\Phi_{\pm}} \Phi_{\pm}). \quad (4.7)$$

Portanto torna-se interessante investigar o comportamento de diferentes tipos de estados que excitam os modos em questão.

Primeiro vamos considerar o estado de Fock de dois modos, definido como  $\{|n\rangle_{\Psi_{\pm}} |m\rangle_{\Phi_{\pm}}\}$ . Além disso, nosso estado de Fock de  $N$  fótons terá todos estes  $N$  fótons no modo  $\Psi_{+}$  e nenhum fóton no estado  $\Psi_{-}$ , de maneira que estaremos sempre lidando com um espaço de Hilbert de dois modos. Dessa forma, o modo em questão será:

$$|N\rangle_{\Psi_{+}} |0\rangle_{\Psi_{-}} = \frac{(a_{\Psi_{+}}^{\dagger})^N}{\sqrt{N!}} |0\rangle_{\Psi_{+}} |0\rangle_{\Psi_{-}}. \quad (4.8)$$

Ao utilizar a transformação conjugada descrita em Eq. (4.6), é possível escre-

ver o operador de criação para  $\Psi_+$  em termos dos operadores de criação para  $Hh$  e  $Vv$ , obtendo:

$$|N\rangle_{\Psi_+}|0\rangle_{\Psi_-} = \sum_{n=0}^N \frac{\sqrt{N!} \left(a_{Hh}^\dagger\right)^n \left(a_{Vv}^\dagger\right)^{N-n}}{2^{N/2} n! (N-n)!} |0\rangle_{Hh} |0\rangle_{Vv}. \quad (4.9)$$

Analogamente, a definição do estado de Fock nos modos  $Hh$  e  $Vv$  é  $\{|n\rangle_{Hh}|m\rangle_{Vv}\}$ , que são os autovetores de  $a_{Hh}^\dagger a_{Hh}$  e  $a_{Vv}^\dagger a_{Vv}$ <sup>1</sup>.

Desenvolvendo a Eq. (4.9), chegamos à transformação entre os dois conjuntos de estados de Fock, dada por:

$$|N\rangle_{\Psi_+}|0\rangle_{\Psi_-} = \sum_{n=0}^N \sqrt{\frac{N!}{2^N n! (N-n)!}} |n\rangle_{Hh} |N-n\rangle_{Vv}. \quad (4.10)$$

Por exemplo, um estado de Fock com apenas um fóton do modo  $\Psi_+$  pode ser escrito como

$$|1\rangle_{\Psi_+}|0\rangle_{\Psi_-} = \frac{|1\rangle_{Hh}|0\rangle_{Vv} + |0\rangle_{Hh}|1\rangle_{Vv}}{\sqrt{2}}. \quad (4.11)$$

É possível notar que o lado esquerdo das Eq. (4.10) e Eq. (4.11) são estados produto, enquanto o lado direito são estados emaranhados. É conhecido que emaranhamento é independente da escolha de uma base local no espaço de Hilbert, no entanto estas transformações não são locais, uma vez que elas envolvem diferentes partições de modos. Portanto a base do modo não deve ser confundida com a base do estado quântico. Por isso preferimos empregar o termo partição de modo, a fim de evitar este tipo de confusão.

Para mostrarmos essa afirmação, considere o operador de deslocamento que,

<sup>1</sup>Note que o estado de vácuo é o mesmo em qualquer partição, isto é,  $|0\rangle_{\Psi_+}|0\rangle_{\Psi_-} = |0\rangle_{Hh}|0\rangle_{Vv}$ .

quando atua no vácuo, produz o estado coerente  $|u\rangle_{\Psi_+}|0\rangle_{\Psi_-}$  dado por:

$$D_{\Psi_+}(u) = \exp\left(ua_{\Psi_+}^\dagger - u^*a_{\Psi_+}\right). \quad (4.12)$$

Uma vez que  $a_{Hh}$  e  $a_{Vv}$  comutam, o operador deslocamento poderá ser fatorado como um produto entre os correspondentes operadores dos modos  $Hh$  e  $Vv$ . Assim, também com o auxílio da Eq. (4.12), obtemos:

$$D_{\Psi_+}(u) = D_{Hh}(u/\sqrt{2})D_{Vv}(u/\sqrt{2}), \quad (4.13)$$

tal que os estados coerentes na decomposição de dois modos estão relacionados por

$$|u\rangle_{\Psi_+}|0\rangle_{\Psi_-} = |u/\sqrt{2}\rangle_{Hh}|u/\sqrt{2}\rangle_{Vv}, \quad (4.14)$$

que em ambos os casos são estados produtos.

Desta discussão foi possível desenvolver algumas intuições sobre o papel desempenhado pelo ruído do número de fótons na interface entre separabilidade de modos e emaranhamento quântico.

As discussões a seguir serão feitas num contexto bem próximo ao apresentado em [14].

### 4.3 Medidas de Bell em estados com acoplamento spin-órbita

Considere o esquema mostrado na Fig. 4.2 para uma medida de Bell spin-órbita, como a realizada em [14].

Um modo de entrada inicialmente preparado em um estado quântico arbitrário  $|\varphi_0\rangle$  entra em um interferômetro Mach-Zehnder com um espelho extra em um dos

braços, também conhecido como interferômetro MZIM [69]. Seu funcionamento é o seguinte: quando os dois braços estão equilibrados, isto é, quando a diferença de fase associada a propagação dos feixes nos dois braços for adequada, o interferômetro separa os modos pares dos ímpares em diferentes portas de saída, ou seja, as componentes  $Hh$  e  $Vv$  sairão pela porta par enquanto as componentes  $Hv$  e  $Vh$  sairão pela porta ímpar<sup>2</sup>.

Os feixes de entrada são descritos pelos operadores de campo elétrico:

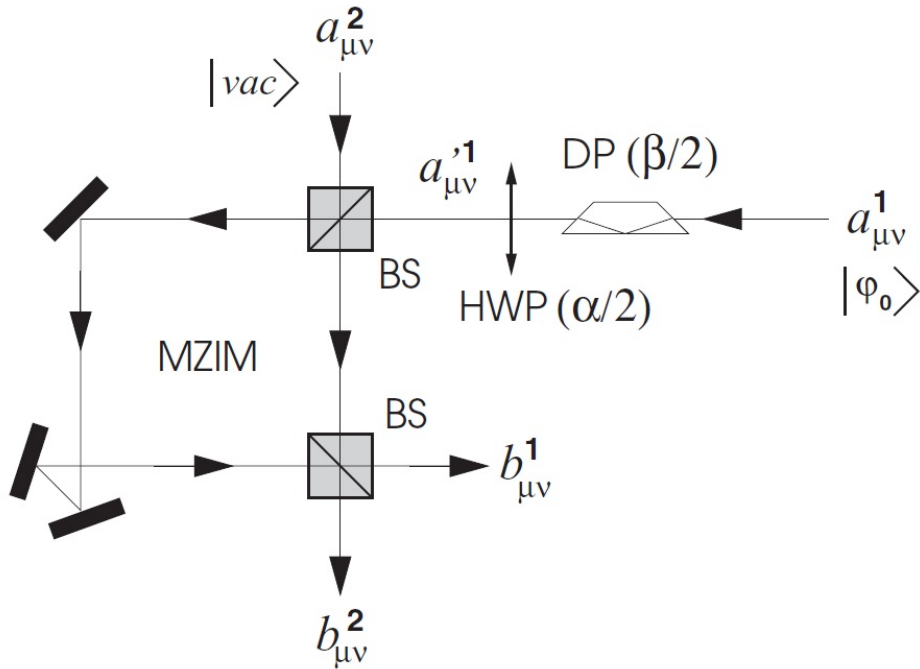


Figura 4.2: Retirada de [14]. Esquema para a medida de Bell spin-órbita proposta.

$$\mathbf{A}_j^{(+)}(\mathbf{r}, t) = e^{i(\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \sum_{\mu, \nu} a_{\mu\nu}^j \psi_\nu(\mathbf{r}) \hat{e}_\mu, \quad (4.15)$$

com  $\mu = \{H, V\}$ , referente a polarização, e  $\nu = \{h, v\}$ , referente ao modo transversal,  $j = \{1, 2\}$ , referente às portas de entrada, e  $a_{\mu\nu}^j$  são os operadores de

<sup>2</sup>No Apêndice A, Seção A.1, mostramos que as medidas de intensidade em cada saída não depende de fases ganhas no MZIM em questão.

aniquilação correspondentes. O campo de entrada que atravessa a porta 1 passará por elementos que produzem transformações unitárias agindo nos graus de liberdade de polarização e de modo transverso. Esses elementos são utilizados para fixar as bases das medidas de Bell. Estes podem ser um prisma de Dove (DP<sup>3</sup>) para o modo transverso e uma lâmina de meia-onda (HWP<sup>4</sup>) para polarização.

Quando a HWP é orientada a um ângulo  $\alpha/2$  e o DP a um ângulo  $\beta/2$ , os operadores de aniquilação passam por uma transformação, dada por:

$$a'_{\mu\nu}{}^1(\alpha, \beta) = \sum_{\epsilon\delta} U_{\mu\nu}^{\epsilon\delta}(\alpha, \beta) a_{\epsilon\delta}^1, \quad (4.16)$$

onde  $U$  é a transformação unitária que descreve a combinação dos dois elementos. A HWP e o DP agem de forma similar, e eles produzem um operador de reflexão ao longo de seus eixos de orientação. Suas ações combinadas podem ser escritas como o produto tensorial  $U(\alpha, \beta) = T(\alpha) \otimes T(\beta)$ , onde

$$T(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ \text{sen}(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}. \quad (4.17)$$

Assim, obtém-se, em notação tensorial:

$$\begin{pmatrix} a'_{Hh}{}^1 \\ a'_{Hv}{}^1 \\ a'_{Vh}{}^1 \\ a'_{Vv}{}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \text{sen}(\alpha) \\ \text{sen}(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \text{sen}(\beta) \\ \text{sen}(\beta) & -\cos(\beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{Hh}^1 \\ a_{Hv}^1 \\ a_{Vh}^1 \\ a_{Vv}^1 \end{pmatrix}. \quad (4.18)$$

---

<sup>3</sup>Sigla do inglês Dove prism.

<sup>4</sup>Sigla do inglês Half-Wave Plate.

A mesma decomposição pode ser aplicada para os campos de saída, isto é,

$$\mathbf{B}_j^{(+)}(\mathbf{r}, t) = e^{i(\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \sum_{\mu, \nu} b_{\mu\nu}^j \psi_\nu(\mathbf{r}) \hat{e}_\mu, \quad (4.19)$$

onde  $b_{\mu\nu}^j$  é o operador de aniquilação correspondente ao modo  $\mu\nu$  na saída  $j$ .

Uma das portas de saída do interferômetro combinará os modos ímpares dos vácuos de entrada com os modos pares das entradas excitadas ( $Hh$  e  $Vv$ ), e a combinação oposta será formada na outra porta de saída. As amplitudes  $b_{\mu\nu}^j$  do modo quantizado são determinadas pelas relações de entrada-saída no interferômetro<sup>5</sup>, isto é,

$$\begin{aligned} b_{Hh}^1 &= a_{Hh}^1, & b_{Hh}^2 &= a_{Hh}^2, & b_{Hv}^1 &= a_{Hv}^2, & b_{Hv}^2 &= a_{Hv}^1, \\ b_{Vh}^1 &= a_{Vh}^2, & b_{Vh}^2 &= a_{Vh}^1, & b_{Vv}^1 &= a_{Vv}^1, & b_{Vv}^2 &= a_{Vv}^2. \end{aligned} \quad (4.20)$$

O operador de intensidade, integrado sobre toda área do detector, é definido como

$$\hat{I}_j = \int \mathbf{B}_j^{(-)} \cdot \mathbf{B}_j^{(+)} d^2\mathbf{r}. \quad (4.21)$$

Das relações de entrada-saída do aparato de medida (elementos óticos mais interferômetro) é possível determinar as intensidades nas portas de saída, que serão;

$$\begin{aligned} \hat{I}_1 &= \hat{I}_{Hh}^1 + \hat{I}_{Vv}^1 + \hat{I}_{Hv}^1 + \hat{I}_{Vh}^1, \\ \hat{I}_2 &= \hat{I}_{Hv}^2 + \hat{I}_{Vh}^2 + \hat{I}_{Hh}^2 + \hat{I}_{Vv}^2, \end{aligned} \quad (4.22)$$

onde  $\hat{I}_{\mu\nu}^j = b_{\mu\nu}^{j\dagger} b_{\mu\nu}^j$ . Note que os modos  $Hv$  e  $Vh$  na porta de saída 1 não estão excitados, assim como os modos  $Hh$  e  $Vv$  na porta de saída 2. Logo, estes não contribuem para as medidas de intensidade, contribuirão apenas para as flutuações

---

<sup>5</sup>Note que pode haver ganho de fase em cada componente ao atravessar o MZIM, mas como essas fases não vão influenciar nas medidas de interesse deste trabalho (ver Apêndice A.1), estas foram desconsideradas já na Eq. (4.20).



em cada porta de saída. Com isso definimos

$$I_{tot} = \hat{I}_1 + \hat{I}_2, \quad (4.23)$$

$$M(\alpha, \beta) = \hat{I}_1 - \hat{I}_2. \quad (4.24)$$

Repare que a intensidade total de saída não depende das configurações de medida  $(\alpha, \beta)$ .

Fazendo uma analogia com o parâmetro usado na desigualdade CHSH [42], definimos:

$$S = \frac{\langle M(\alpha, \beta) + M(\alpha, \beta') - M(\alpha', \beta) + M(\alpha', \beta') \rangle}{\langle I_{tot} \rangle}, \quad (4.25)$$

onde as médias são calculadas para o estado quântico inicial  $|\varphi_0\rangle$ . Para estados de um fóton, as intensidades normalizadas detectadas correspondem à probabilidades de detecção, encontrando, assim, o cenário usual para as medidas de Bell, onde  $2 < S < 2\sqrt{2}$  para estados spin-órbita emaranhados. Como discutido em [14], esta violação pode ser alcançada com um vórtice coerente de polarização, que é um estado produto na decomposição  $Hh$  e  $Vv$ , como mostrado em Eq. (4.14)<sup>6</sup>.

No intuito de evidenciar o comportamento quântico, torna-se necessário monitorar o ruído na diferença de intensidade,  $\Delta M^2(\alpha, \beta) = \langle M^2(\alpha, \beta) \rangle - \langle M(\alpha, \beta) \rangle^2$ , e comparar com o limite das flutuações do estado de vácuo correspondente. Esta figura de mérito será utilizada na próxima seção para estabelecer a comparação entre diferentes estados de entrada.

---

<sup>6</sup>O cálculo dessas quantidades, e de suas flutuações, podem ser realizados a partir das equações do Apêndice A, Seção A.2.

## 4.4 Intensidades médias e ruídos quânticos

Assuma que apenas os modos  $a_{Hh}^1$  e  $a_{Vv}^1$  estão inicialmente ocupados, descritos por um estado quântico  $|\varphi_0\rangle$ , enquanto os outros modos ( $a_{Hv}^1$  e  $a_{Vh}^1$ ) estão em estado de vácuo. Portanto as intensidades médias e as flutuações quânticas correspondentes são calculadas para um estado inicial específico.

A seguir serão discutidos diferentes estados de entrada, suas similaridades e diferenças.

### 4.4.1 Estados de Fock emaranhados

Considere inicialmente o estado emaranhado de um fóton dado pela Eq. (4.11). Neste caso obtém-se:

$$\frac{\langle M(\alpha, \beta) \rangle}{\langle I_{tot} \rangle} = \cos[2(\beta - \alpha)], \quad (4.26)$$

onde  $\langle I_{tot} \rangle = 1$ . Para as configurações  $\alpha = \pi/8$ ,  $\alpha' = 3\pi/8$ ,  $\beta = 0$  e  $\beta' = \pi/4$  o limite  $S = 2\sqrt{2}$  é alcançado, como esperado para um estado spin-órbita maximamente emaranhado. Também foi calculada a flutuação da diferença de intensidade correspondente para qualquer configuração  $(\alpha, \beta)$ ,

$$\frac{\Delta M^2(\alpha, \beta)}{\langle I_{tot} \rangle} = \text{sen}^2[2(\beta - \alpha)]. \quad (4.27)$$

Esses resultados podem ser generalizados para um estado de Fock arbitrário de  $N$  fótons  $|N\rangle_{\Psi_+}|0\rangle_{\Psi_-}$ , dado pela Eq. (4.10), que possui  $\langle I_{tot} \rangle = N$ . Para as configurações da medida de Bell obtém-se 50% de compressão de intensidade<sup>7</sup>. Quando  $\beta - \alpha = m\pi/2$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ), todos os fótons são registrados na mesma porta de saída, e a diferença de intensidade é perfeitamente comprimida.

---

<sup>7</sup>Mais conhecido como squeezing.

Note que a coerência entre modos é ingrediente chave para violação da desigualdade CHSH, uma vez que a soma do lado direito das Eq. (4.10) e Eq. (4.11) evolui uma superposição coerente com fases relativas bem definidas. Quando as fases são aleatórias, estes estados passam a ser mistura estatística de estados de Fock, que não mais violam a desigualdade CHSH, como será visto a seguir.

#### 4.4.2 Mistura estatística de estados de Fock

É interessante desenvolver a desigualdade CHSH spin-órbita para um estado de Fock misto que exibe forte correlação no número de fótons, mas nenhum emaranhamento. Este estado pode ser representado pela matriz densidade

$$\rho_N = \sum_{n=0}^N \frac{N!}{2^N n!(N-n)!} |n\rangle\langle n|_{Hh} \otimes |N-n\rangle\langle N-n|_{Vv} \quad (4.28)$$

com um número total  $N$  de fótons bem definido, aleatoriamente distribuído entre os modos  $Hh$  e  $Vv$ . Para este modo, encontra-se

$$\frac{\langle M(\alpha, \beta) \rangle}{\langle I_{tot} \rangle} = \cos(2\alpha) \cos(2\beta), \quad (4.29)$$

que resulta em  $S = \sqrt{2}$  para as configurações de medida de Bell.

O ruído na diferença de intensidade é

$$\frac{\Delta M^2(\alpha, \beta)}{\langle I_{tot} \rangle} = \text{sen}^2(2\alpha) + \text{sen}^2(2\beta) + \left( \frac{\langle I_{tot} \rangle - 3}{2} \right) \text{sen}^2(2\alpha) \text{sen}^2(2\beta), \quad (4.30)$$

que pode ser perfeitamente comprimido para configurações específicas de  $(\alpha, \beta)$ , mas, em geral, escala com o número de fótons. Por exemplo, se fixarmos  $\alpha = \beta = \pi/4$ , a Eq. (4.30) resulta em  $(N+1)/2$ , enquanto que Eq. (4.27) prevê compressão de ruído perfeito.

### 4.4.3 Estado de Werner

No intuito de capturar o papel desempenhado pelo emaranhamento nas propriedades do ruído quântico do estado de Fock considere um estado parcialmente emaranhado, do tipo

$$\rho_N(p) = p|N\rangle\langle N|_{\Psi_+} \otimes |0\rangle\langle 0|_{\Psi_-} + (1-p)\rho'_N, \quad (4.31)$$

onde  $\rho'_N$  é dado pela Eq. (4.28). Este é análogo ao estado de Werner, frequentemente utilizado na área da Informação Quântica para discutir correlações presentes em estados parcialmente emaranhados [46]. A média da diferença de intensidade para uma configuração  $(\alpha, \beta)$  é

$$\frac{\langle M(\alpha, \beta) \rangle}{\langle I_{tot} \rangle} = p \cos[2(\beta - \alpha)] + (1-p) \cos(2\alpha) \cos(2\beta), \quad (4.32)$$

que resulta em  $S = (1+p)\sqrt{2}$  (contendo um limiar de violação dado por  $p = \sqrt{2} - 1$ ).

O ruído da diferença de intensidade pode ser calculado diretamente como uma combinação das Eq. (4.27) e Eq. (4.30), resultando em:

$$\langle \Delta M^2 \rangle_W = p \langle \Delta M^2 \rangle_{puro} + (1-p) \langle \Delta M^2 \rangle_{misto} + p(1-p) [\langle M \rangle_{puro} + \langle M \rangle_{misto}]^2, \quad (4.33)$$

onde  $\langle \Delta M^2 \rangle_{puro}$  é dado pela Eq. (4.27), que escala com  $\langle I_{tot} \rangle$ , enquanto que  $\langle \Delta M^2 \rangle_{misto}$  é dado pela Eq. (4.30), que escala com  $\langle I_{tot} \rangle^2$ . Note que ambos  $\langle M \rangle_{puro}$  e  $\langle M \rangle_{misto}$  são proporcionais a  $\langle I_{tot} \rangle$ , logo  $\langle \Delta M^2 \rangle_W / \langle I_{tot} \rangle$  escala com  $\langle I_{tot} \rangle$ .

#### 4.4.4 Estado coerente puro

Para um estado coerente  $|u\rangle_{\Psi_+}|0\rangle_{\Psi_-}$ , dado pela Eq. (4.14), obtém-se

$$\frac{\langle M(\alpha, \beta) \rangle}{\langle I_{tot} \rangle} = \cos[2(\beta - \alpha)], \quad (4.34)$$

com  $\langle I_{tot} \rangle = |u|^2$ , resultando também em  $S = 2\sqrt{2}$ , assim como no estado de Fock, embora o estado de entrada aqui (estado coerente puro) seja fatorável. Para distinguir os dois casos, calculou-se o ruído da diferença de intensidade,

$$\frac{\Delta M^2(\alpha, \beta)}{\langle I_{tot} \rangle} = 1, \quad (4.35)$$

de forma que para qualquer configuração  $(\alpha, \beta)$  o ruído esperado é o ruído de vácuo, que é bem distinguível do resultado correspondente para estados de Fock emaranhados.

#### 4.4.5 Estado coerente misto

O papel desempenhado pela coerência na violação da desigualdade CHSH spin-órbita passa a ser o foco agora. Suponha um feixe laser preparado inicialmente em um estado coerente  $|u\rangle_{Hh}|0\rangle_{Vv}$ . Este feixe é, então, separado em duas partes iguais, uma delas é transformada para o modo  $Vv$  e enviada para um divisor de feixe BS<sup>8</sup>, onde é contaminado com um laser independente também preparado no modo  $Vv$ . Finalmente, essa mistura dos modos  $Vv$  é recombinada com o modo  $Hh$  no divisor de feixe polarizador PBS<sup>9</sup>, como esquematizado na Fig. 4.3. Uma vez que os dois lasers possuem fases relativas aleatórias, o estado quântico que descreve essa mistura é escrito como:

<sup>8</sup>Do inglês Beam Splitter.

<sup>9</sup>Do inglês Polarizing Beam Splitter.

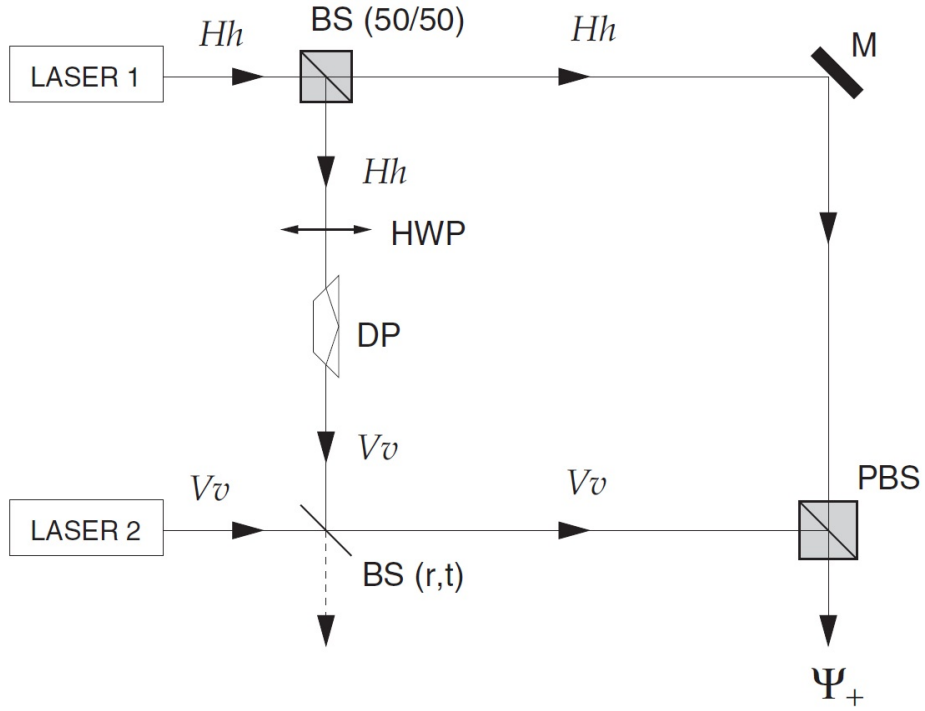


Figura 4.3: Retirada de [1]. Esquema proposto para produzir um estado coerente misto ajustável.

$$\rho_0 = |u\rangle\langle u|_{Hh} \otimes \int \frac{d\theta}{2\pi} |u'(\theta)\rangle\langle u'(\theta)|_{Vv}, \quad (4.36)$$

onde  $u'(\theta) = u(r + te^{i\theta})$  com  $r$  e  $t$  sendo os coeficientes de reflexão e transmissão do acoplador contaminado.

Considerando  $r = \sqrt{R}e^{i\phi}$ , onde  $R$  é a refletância e  $\phi$  é a fase adquirida na reflexão, obtemos:

$$\frac{\langle M(\alpha, \beta) \rangle}{\langle I_{tot} \rangle} = \cos(2\alpha) \cos(2\beta) + \sqrt{R} \cos(\phi) \sin(2\alpha) \sin(2\beta), \quad (4.37)$$

onde  $\langle I_{tot} \rangle = 2|u|^2$ , resultando em  $S = \left(1 + \sqrt{R} \cos(\phi)\right) \sqrt{2}$  para as configurações da medida de Bell. Um limiar de violação é previsto em  $\sqrt{R} \cos(\phi) = \sqrt{2} - 1$ . Para  $R = 1$  e  $\phi = 0$ , recupera-se os resultados do estado coerente puro,

obtido na Eq. (4.34).

Para uma superposição completamente incoerente ( $R = 0$ ), obtém-se:

$$\frac{\langle M(\alpha, \beta) \rangle}{\langle I_{tot} \rangle} = \cos(2\alpha) \cos(2\beta), \quad (4.38)$$

resultando em  $S = \sqrt{2}$  para as configurações da medida de Bell, ou seja, mistura estatística de modos separáveis. Este resultado sugere que coerência é um ingrediente essencial para violação da desigualdade para a média de intensidades.

Enquanto isso, o ruído da diferença de intensidade para uma configuração  $(\alpha, \beta)$  é

$$\frac{\Delta M^2(\alpha, \beta)}{\langle I_{tot} \rangle} = 1 + \frac{\langle I_{tot} \rangle}{2} \sin^2(2\alpha) \sin^2(2\beta), \quad (4.39)$$

que escala com  $\langle I_{tot} \rangle$  e está acima do shot noise para a maioria das configurações.

#### 4.4.6 Vácuo comprimido de dois modos

Também é interessante analisar os resultados obtidos para estados de vácuo comprimido de dois modos, que apresentam emaranhamento de quadratura. Este pode ser construído atuando o operador de compressão de dois modos no estado de vácuo, isto é:

$$|\varphi_{sq}\rangle = \exp\left(\frac{\zeta^* a_{Hh} a_{Vv} - \zeta a_{Hh}^\dagger a_{Vv}^\dagger}{2}\right) |0\rangle_{Hh} |0\rangle_{Vv}, \quad (4.40)$$

onde  $\zeta$  é o parâmetro de compressão e a intensidade total será  $\langle I_{tot} \rangle = 2 \sinh^2(|\zeta|/2)$ .

Neste caso, encontra-se:

$$\frac{\langle M(\alpha, \beta) \rangle}{\langle I_{tot} \rangle} = \cos(2\alpha) \cos(2\beta), \quad (4.41)$$

resultando em  $S = \sqrt{2}$  para a configuração da medida de Bell, o mesmo resultado que o encontrado no estado coerente misto.

O ruído da diferença de intensidade será

$$\frac{\Delta M^2(\alpha, \beta)}{\langle I_{tot} \rangle} = 1(\langle I_{tot} \rangle + 1) \left( \frac{1 + \cos(4\alpha) \cos(4\beta)}{2} \right), \quad (4.42)$$

que também escala com  $\langle I_{tot} \rangle$ . Portanto, apesar de possuir emaranhamento de quadratura, as propriedades quânticas do vácuo comprimido não aparecem neste tipo de medida de Bell spin-órbita.

## 4.5 Considerações sobre inseparabilidade Clássica e Quântica

Ao longo desse capítulo, discutimos as medidas de Bell spin-órbita em vórtices paraxiais de polarização do ponto de vista da Ótica Quântica. Esses vórtices são tratados como modos inseparáveis, e suas descrições quânticas são comparadas em diferentes decomposições de modos.

A separabilidade de modo foi avaliada com uma desigualdade para as médias de intensidades de forma análoga a desigualdade CHSH. Nossa desigualdade foi violada para um estado spin-órbita emaranhado, como esperado, mas foi violada também por um estado coerente fatorável. Esses dois casos limites são investigados experimentalmente em [14, 70, 71]. Assim, surge uma questão natural sobre a interface entre emaranhamento e coerência na violação da desigualdade de Bell.

Comparamos diferentes estados de entrada, a fim de desenvolver alguma intuição, de maneira que nossos resultados indicam que o papel desempenhado pela coerência e pela flutuação do número de fótons podem ser resumidos nos exemplos:



- i) Sem coerência, não observamos nenhuma violação da desigualdade CHSH baseada em intensidade, como ilustrado nos exemplos com os estados misto coerente ou de Fock;
- ii) Com coerência e distribuição poissoniana para o número total de fótons esperamos violação, mas nenhum emaranhamento, como vimos nos exemplos com os estados coerentes puro. Notamos que esses estados são fatoráveis em qualquer decomposição de modos, mas exibem violação máxima;
- iii) Com coerência e pequena flutuação do número de fótons (abaixo do ruído de vácuo), esperamos violação da desigualdade CHSH e emaranhamento, como ilustrado pelo estado de Fock emaranhado.

É importante salientar que em todos os casos a coerência que está sendo considerada como relevante é a caracterizada pela fase relativa intramodo, e não a global.

Também apresentamos exemplos que intercalam entre estados puros e mistos. E na subseção "Vácuo comprimido de dois modos", mostramos que o emaranhamento de quadratura não implica em violação da desigualdade CHSH baseada em intensidade.

Inseparabilidade de modos (inseparabilidade clássica) e emaranhamento podem ser simultaneamente obtidas medindo médias das intensidades e suas correspondentes flutuações. Violação da desigualdade CHSH baseada em intensidade indica a inseparabilidade da estrutura do modo, enquanto que compressão das diferenças de intensidades evidencia emaranhamento. Estados coerentes devem exibir flutuação igual ao ruído de vácuo para quaisquer configurações de medida, enquanto que estados com número de fótons comprimidos devem apresentar 50% de compressão para as configurações usadas na desigualdade. Esses resultados podem ser experimentalmente testados com vórtices de polarização produzidos

por fontes com intensidades comprimidas, como o OPO [72, 73] ou lasers de diodo "pump-noise-suppressed" [74].

Agora, no capítulo seguinte, vamos mudar um pouco o enfoque do problema e começar a analisar, classicamente, a Geração de Segundo Harmônico. Iniciamos esse estudo pelos cálculos das constantes de recobrimento, que é um resultado central desta tese que, inclusive, será aplicado Capítulo 7.

# Capítulo 5

## Constantes de recobrimento

Os processos de Geração de Segundo Harmônico envolvem infinitas integrais de combinações dos modos espaciais do campo elétrico, como mostram as Eq. (2.80), Eq. (2.81) e Eq. (2.82). Muitas dessas integrais não contribuem no processo, outras são pouco significativas, e outras são mais relevantes do que o esperado. Então, saber quais integrais são importantes no processo é tarefa necessária, e por isso esse tema ganha esse capítulo exclusivo.

Aqui apresentamos um resultado bem geral dos cálculos dessas constantes de recobrimento. Obtemos expressões analíticas, envolvendo também as ordens radiais do problema e as condições necessárias para seus surgimentos.

As constantes de recobrimento, definidas matematicamente na Eq. (2.69), são responsáveis por acoplar as infindáveis possibilidades de modos de Laguerre-Gauss que surgem na dinâmica de processos não-lineares multimodos. O que elas fazem é, basicamente, nos fornecer valores que indicam a superposição espacial dos perfis transversos destes modos, sendo que, quanto maior essa quantidade, maior é a contribuição desse modo gerado, nos dando uma ideia do peso que cada acoplamento terá ao longo desse processo.

Sendo assim, esse acoplamento entre os modos de Laguerre-Gauss é dado pela

Eq. (2.71)<sup>1</sup>, isto é,

$$\begin{aligned}
R_{pp'p''}^{ll'l''} &= \int_0^\infty r dr \int_0^{2\pi} d\theta \left\{ \sqrt{\frac{2p!}{\pi w_{2\omega}^2 (p + |l|)!}} \left( \frac{\sqrt{2}r}{w_{2\omega}} \right)^{|l|} L_p^{|l|} \left( \frac{2r^2}{w_{2\omega}^2} \right) e^{-\frac{r^2}{w_{2\omega}^2} + il\theta} \right\} \\
&\times \left\{ \sqrt{\frac{2p'!}{\pi w_H^2 (p' + |l'|)!}} \left( \frac{\sqrt{2}r}{w_H} \right)^{|l'|} L_{p'}^{|l'|} \left( \frac{2r^2}{w_H^2} \right) e^{-\frac{r^2}{w_H^2} - il'\theta} \right\} \\
&\times \left\{ \sqrt{\frac{2p''!}{\pi w_V^2 (p'' + |l''|)!}} \left( \frac{\sqrt{2}r}{w_V} \right)^{|l''|} L_{p''}^{|l''|} \left( \frac{2r^2}{w_V^2} \right) e^{-\frac{r^2}{w_V^2} - il''\theta} \right\} \quad (5.1)
\end{aligned}$$

Com a ajuda da Eq. (2.62), junto com o casamento de fase (Eq. (2.77)), obtemos a relação entre a cintura dos feixes do primeiro harmônico e do feixe do segundo harmônico, dada por

$$\frac{1}{w_{2\omega}^2} = \frac{1}{w_H^2} + \frac{1}{w_V^2}. \quad (5.2)$$

Assim começamos a simplificar a Eq. (5.1), já substituindo a relação acima, nos levando a:

$$\begin{aligned}
R_{pp'p''}^{ll'l''} &= \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w_{2\omega} w_H w_V} \sqrt{\frac{p!}{(p + |l|)!} \frac{p'!}{(p' + |l'|)!} \frac{p''!}{(p'' + |l''|)!}} \left( \int_0^{2\pi} d\theta e^{i(l-l'-l'')\theta} \right) \\
&\times \int_0^\infty r dr \left( \frac{2r^2}{w_{2\omega}^2} \right)^{\frac{|l|}{2}} \left( \frac{w_{2\omega}^2}{w_H^2} \frac{2r^2}{w_{2\omega}^2} \right)^{\frac{|l'|}{2}} \left( \frac{w_{2\omega}^2}{w_V^2} \frac{2r^2}{w_{2\omega}^2} \right)^{\frac{|l''|}{2}} \\
&\times L_p^{|l|} \left( \frac{2r^2}{w_{2\omega}^2} \right) L_{p'}^{|l'|} \left( \frac{w_{2\omega}^2}{w_H^2} \frac{2r^2}{w_{2\omega}^2} \right) L_{p''}^{|l''|} \left( \frac{w_{2\omega}^2}{w_V^2} \frac{2r^2}{w_{2\omega}^2} \right) e^{-\frac{2r^2}{w_{2\omega}^2}}. \quad (5.3)
\end{aligned}$$

Nosso passo seguinte é fazer a substituição de variável

$$x = \frac{2r^2}{w_{2\omega}^2}, \quad (5.4)$$

<sup>1</sup>Lembrando...  $R_{pp'p''}^{ll'l''} = \int u_{pl}^{2\omega} u_{p'l'}^H * u_{p''l''}^V * d^2\mathbf{r}$ .

e realizar a integral angular<sup>2</sup>, resultando em

$$R_{pp'p''}^{ll'l''} = \frac{\delta_{l,l'+l''}}{w_{2\omega}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\frac{p!}{(p+|l|)!} \frac{p'!}{(p'+|l'|)!} \frac{p''!}{(p''+|l''|)!}} \left(\frac{w_{2\omega}}{w_H}\right)^{|l'|+1} \left(\frac{w_{2\omega}}{w_V}\right)^{|l''|+1} \\ \times \int_0^\infty dx x^{\frac{|l|+|l'|+|l''|}{2}} L_p^{|l|}(x) L_{p'}^{|l'|}\left(\frac{w_{2\omega}^2}{w_H^2}x\right) L_{p''}^{|l''|}\left(\frac{w_{2\omega}^2}{w_V^2}x\right) e^{-x}. \quad (5.5)$$

Assim podemos calcular  $R_{000}^{000}$

$$R_{000}^{000} = \frac{1}{w_{2\omega}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{w_{2\omega}}{w_H}\right) \left(\frac{w_{2\omega}}{w_V}\right) \int_0^\infty dx e^{-x}, \quad (5.6)$$

que possui como solução

$$R_{000}^{000} = \frac{1}{w_{2\omega}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{w_{2\omega}}{w_H}\right) \left(\frac{w_{2\omega}}{w_V}\right). \quad (5.7)$$

Dividindo Eq. (5.5) por Eq. (5.7), chegamos ao recobrimento normalizado, o qual utilizaremos a partir de agora, que é:

$$\Lambda_{pp'p''}^{ll'l''} = \delta_{l,l'+l''} \left(\frac{w_{2\omega}}{w_H}\right)^{|l'|} \left(\frac{w_{2\omega}}{w_V}\right)^{|l''|} \sqrt{\frac{p!}{(p+|l|)!} \frac{p'!}{(p'+|l'|)!} \frac{p''!}{(p''+|l''|)!}} \\ \times \int_0^\infty dx x^{\frac{|l|+|l'|+|l''|}{2}} L_p^{|l|}(x) L_{p'}^{|l'|}\left(\frac{w_{2\omega}^2}{w_H^2}x\right) L_{p''}^{|l''|}\left(\frac{w_{2\omega}^2}{w_V^2}x\right) e^{-x} \quad (5.8)$$

Para resolver a integral acima e determinar o valor das constantes de recobrimento, precisaremos das propriedades dos polinômios associados de Laguerre [75]

$$\int_0^\infty x^k L_n^k(x) L_m^k(x) e^{-x} dx = \frac{(n+k)!}{n!} \delta_{nm} \quad (5.9)$$

$$L_0^k(x) = 1 \quad (5.10)$$

---


$$2 \int_0^{2\pi} d\theta e^{i(l-l'-l'')\theta} = 2\pi \delta_{l,l'+l''}.$$

$$x^P = \sum_{m=0}^P \frac{(-1)^m P! (k+P)!}{(P-m)! (k+m)!} L_m^k(x) \quad (5.11)$$

sendo que esta última, Eq. (5.11), é desenvolvida mais detalhadamente no Apêndice B.

## 5.1 Soluções para as Constantes de Recobrimento

Resolver a integral da Eq. (5.8) de modo que contemple todos os índices radiais, todos os índices angulares, o descasamento de fase, e sua variação ao longo da direção de propagação é um problema que encontramos bastante dificuldade e não achamos solução na literatura<sup>3</sup>. Por esse motivo, vamos trabalhar a partir de algumas considerações que nos permitiram seguir os cálculos adiante e obter resultados.

As considerações que fizemos para chegar até a integral da Eq. (5.8) são:

i) Há casamento de fase nos processos não-lineares<sup>4</sup> no nosso cristal, ou seja,

$$\Delta k = 0. \quad (5.12)$$

ii) O comprimento de Rayleigh é muito maior que o tamanho do cristal<sup>5 6</sup>, que é onde ocorrem os processos não-lineares, de modo que

$$Z = 0; \quad (5.13)$$

iii) Só resolveremos problemas envolvendo geração de segundo harmônico e

---

<sup>3</sup>Achamos algumas famílias de soluções, como em [76] (que por sinal tem um pequeno deslize nas contas, parece que houve uma confusão entre a função fatorial e a gama em todos os fatoriais da Eq.(11) deles), mas não a solução geral.

<sup>4</sup>Essa consideração já foi feita desde o Capítulo 2.

<sup>5</sup>Lembrando que  $Z = z/z_R$ , e  $z_R$  é o comprimento de Rayleigh.

<sup>6</sup>Essa consideração também já foi feita desde o Capítulo 2.

com condições iniciais iguais a:

$$a_{p'l'}^H(0) = \sum_i \delta_{p'0} \delta_{l'i} a_{0l_i}^H(0), \quad (5.14)$$

$$a_{p''l''}^V(0) = \sum_j \delta_{p''0} \delta_{l''j} a_{0l_j}^V(0), \quad (5.15)$$

$$b_{pl}(0) = 0. \quad (5.16)$$

Ou seja, não vamos injetar nenhuma semente no feixe com frequência  $2\omega$ . Ambos os feixes de entrada de frequência  $\omega$  vão ter ordem radial zero, entretanto estes podem ter diferentes combinações de MAO.

Aplicando as condições acima, que equivale a substituir  $p' = p'' = 0$ , a Eq. (5.8) reduz para<sup>7</sup>

$$\begin{aligned} \Lambda_{p00}^{l'l''} &= \delta_{l,l+l''} \left( \frac{w_{2\omega}}{w_H} \right)^{|l'|} \left( \frac{w_{2\omega}}{w_V} \right)^{|l''|} \sqrt{\frac{p!}{(p+|l|)!} \frac{1}{|l'|!} \frac{1}{|l''|!}} \\ &\times \int_0^\infty dx x^{\frac{|l|+|l'|+|l''|}{2}} L_p^{|l|}(x) e^{-x}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Agora determinar as constantes de recobrimento a partir da Eq. (5.17) fica bem mais agradável, e é isso que faremos. A estratégia que usamos aqui é comparar essa equação com a relação de ortogonalidade dos polinômios associados de Laguerre, Eq. (5.9), e utilizar a Eq. (5.11).

Primeiro vamos substituir a identidade

$$x^{\frac{|l'+l''|-(|l'|+|l''|)}{2}} x^{-\left[\frac{|l'+l''|-(|l'|+|l''|)}{2}\right]} = 1 \quad (5.18)$$

---

<sup>7</sup>A partir de agora entende-se  $\Lambda_{p00}^{l'l''}$  por  $\Lambda_{p00}^{l'l''}(0)$ .

dentro da integral, que nos leva a:

$$\begin{aligned}\Lambda_{p00}^{l'l''} &= \delta_{l,l'+l''} \left(\frac{w_{2\omega}}{w_H}\right)^{|l'|} \left(\frac{w_{2\omega}}{w_V}\right)^{|l''|} \sqrt{\frac{p!}{(p+|l'+l''|)!} \frac{1}{|l'|!} \frac{1}{|l''|!}} \\ &\times \int_0^\infty dx x^{|l'+l''|} x^P L_p^{|l'+l''|}(x) e^{-x},\end{aligned}\quad (5.19)$$

definindo, convenientemente,

$$P = \frac{|l'| + |l''| - |l'+l''|}{2}.\quad (5.20)$$

Substituindo a Eq. (5.11) e arrumando:

$$\begin{aligned}\Lambda_{p00}^{l'l''} &= \delta_{l,l'+l''} \left(\frac{w_{2\omega}}{w_H}\right)^{|l'|} \left(\frac{w_{2\omega}}{w_V}\right)^{|l''|} \sqrt{\frac{p!}{(p+|l'+l''|)!} \frac{1}{|l'|!} \frac{1}{|l''|!}} \\ &\times \sum_{m=0}^P \frac{(-1)^m P! (|l'+l''|+P)!}{(P-m)! (|l'+l''|+m)!} \\ &\times \int_0^\infty dx x^{|l'+l''|} L_m^{|l'+l''|}(x) L_p^{|l'+l''|}(x) e^{-x}.\end{aligned}\quad (5.21)$$

Agora aplicando a ortogonalidade, Eq. (5.9), enfim chegamos a:

$$\begin{aligned}\Lambda_{p00}^{l'l''} &= \sum_{m=0}^P \delta_{l,l'+l''} \delta_{mp} \left(\frac{w_{2\omega}}{w_H}\right)^{|l'|} \left(\frac{w_{2\omega}}{w_V}\right)^{|l''|} \\ &\times \sqrt{\frac{1}{p! (p+|l'+l''|)! |l'|! |l''|!}} \frac{(-1)^p P! (|l'+l''|+P)!}{(P-p)!}.\end{aligned}\quad (5.22)$$

Enfim, esta é a nossa solução para as constantes de recobrimento - Eq. (5.22) - uma solução geral, dentro das nossas considerações para os problemas que queremos tratar. Desta surgem detalhes interessantes que vale comentar:

- A primeira é a já conhecida conservação de momento angular  $l = l' + l''$ , que surge em  $\delta_{l,l'+l''}$ ;



- A segunda, que não é tão comentada assim em textos sobre GSH, é o surgimento de ordens radiais diferentes de zero no feixe convertido.
- A terceira: não apenas surgem recobrimentos para ordens radiais diferentes de zero, como elas estarão limitadas por  $P$  (definido na Eq. (5.20)), isto é:

$$p \leq P. \quad (5.23)$$

Esta inequação surge graças ao termo  $\sum_{m=0}^P \delta_{mp}$ .

Encontrar tal solução já é uma boa vantagem, mas, para ficar ainda melhor, estudaremos um pouco a quantidade  $P$  para observarmos o que surge de interessante.

## 5.2 Avaliando os valores de $P$

Para finalizarmos esta parte sobre as constantes de recobrimento, discutiremos sobre a quantidade  $P$ . Esta surge apenas como uma definição para auxiliar nos cálculos, mas vimos que possui propriedades interessantes.

Primeiro vamos relembrar sua definição:

$$P = \frac{|l'| + |l''| - |l' + l''|}{2}, \quad (5.24)$$

que leva em

$$P + |l' + l''| = \frac{|l'| + |l''| + |l' + l''|}{2}. \quad (5.25)$$

Já adiantando, estes cálculos resultam em:

$$P = \begin{cases} 0, & \text{se } l'l'' \geq 0, \\ \min\{|l'|, |l''|\}, & \text{se } l'l'' < 0. \end{cases} \quad (5.26)$$

$$P + |l' + l''| = \begin{cases} |l'| + |l''|, & \text{se } l'l'' \geq 0, \\ \max\{|l'|, |l''|\}, & \text{se } l'l'' < 0. \end{cases} \quad (5.27)$$

Traduzindo a parte operacional contida nesta equação, pode-se notar que somar MAO de feixes que possuem o mesmo sinal, ou giram para o mesmo lado, é mais simples de trabalhar<sup>8</sup>.

As subseções a seguir são apenas para provar as relações que acabamos de mostrar na Eq. (5.26).

### 5.2.1 $l'l'' \geq 0$

Primeiro vamos considerar que os feixes de entrada possuem MAO obedecendo as relações:

$$l' = \pm a, \quad a \geq 0, \quad (5.28)$$

$$l'' = \pm b, \quad b \geq 0, \quad (5.29)$$

$$l'l'' = ab \geq 0. \quad (5.30)$$

Substituindo esses valores em  $P$ , Eq. (5.24):

$$P = \frac{|\pm a| + |\pm b| - |\pm a \pm b|}{2}, \quad (5.31)$$

$$P = \frac{a + b - |\pm(a + b)|}{2}, \quad (5.32)$$

$$P = 0. \quad (5.33)$$

---

<sup>8</sup>Quando dizemos que é mais simples de trabalhar é porque este processo só contempla modos com  $p = 0$ .

Agora, substituindo em  $P + |l' + l''|$ , Eq. (5.24):

$$P + |\pm a \pm b| = |a| + |b|. \quad (5.34)$$

Logo, concluímos que - para  $l'l'' \geq 0$  -

$$P = 0, \quad (5.35)$$

e

$$P + |l' + l''| = |l'| + |l''|. \quad (5.36)$$

Como  $p$  é menor ou igual a  $P$ , e, neste caso,  $P = 0$ , só sobrevive a ordem radial zero, isto é:

$$p = 0, \text{ se } l'l'' \geq 0. \quad (5.37)$$

A constante de recobrimento, neste caso, se reduz a:

$$\Lambda_{p00}^{l'l''} = \delta_{p0} \delta_{l,l+l''} \left( \frac{w_{2\omega}}{w_H} \right)^{|l'|} \left( \frac{w_{2\omega}}{w_V} \right)^{|l''|} \sqrt{\frac{(|l'| + |l''|)!}{|l'|! |l''|!}}. \quad (5.38)$$

### 5.2.2 $l'l'' < 0$

Agora, consideramos que os feixes de entrada possuem MAO obedecendo às relações:

$$l' = \pm a, \quad a > 0, \quad (5.39)$$

$$l'' = \mp b, \quad b > 0, \quad (5.40)$$

$$l'l'' = -ab < 0. \quad (5.41)$$

Substituindo esses valores em  $P$ , Eq. (5.24):

$$P = \frac{|\pm a| + |\mp b| - |\pm a \mp b|}{2}, \quad (5.42)$$

$$P = \frac{a + b - |\pm(a - b)|}{2}, \quad (5.43)$$

$$P = \frac{a + b - |a - b|}{2}, \quad (5.44)$$

$$P = \min \{a, b\}. \quad (5.45)$$

Agora substituindo em  $P + |l' + l''|$ , Eq. (5.24):

$$P + |\pm a \mp b| = \frac{|\pm a| + |\mp b| + |\pm a \mp b|}{2}, \quad (5.46)$$

$$P + |\pm(a - b)| = \frac{a + b + |\pm(a - b)|}{2}, \quad (5.47)$$

$$P + |a - b| = \frac{a + b + |a - b|}{2}, \quad (5.48)$$

$$P + |a - b| = \max \{a, b\}. \quad (5.49)$$

Ou seja - para  $l'l'' < 0$  -

$$P = \min \{|l'|, |l''|\}, \quad (5.50)$$

e

$$P + |l' + l''| = \max \{|l'|, |l''|\}. \quad (5.51)$$

Sabendo que

$$P! (P + |l' + l''|)! = \min \{|l'|, |l''|\}! \max \{|l'|, |l''|\}!, \quad (5.52)$$

$$P! (P + |l' + l''|)! = |l'|! |l''|!, \quad (5.53)$$

podemos substituir na Eq. (5.22) e, finalmente, obter as constantes de recobrimento para  $l'' < 0$ , que serão:

$$\Lambda_{p00}^{l'l''} = \delta_{l,l'+l''} \sum_{m=0}^P \delta_{pm} \left( \frac{w_{2\omega}}{w_H} \right)^{|l'|} \left( \frac{w_{2\omega}}{w_V} \right)^{|l''|} \sqrt{\frac{|l'|! |l''|!}{p! (p + |l' + l''|)! (P - p)!}} \frac{(-1)^p}{(P - p)!}, \quad (5.54)$$

ou,

$$\Lambda_{p00}^{l'l''} = \begin{cases} \delta_{l,l'+l''} \left( \frac{w_{2\omega}}{w_H} \right)^{|l'|} \left( \frac{w_{2\omega}}{w_V} \right)^{|l''|} \sqrt{\frac{|l'|! |l''|!}{p! (p + |l' + l''|)! (P - p)!}} \frac{(-1)^p}{(P - p)!}, & \text{se } p \leq P, \\ 0, & \text{se } p > P. \end{cases} \quad (5.55)$$

Vimos aqui que, em processos de Geração de Segundo Harmônico envolvendo modos que possuem Momento Angular Orbital, os modos participantes são aqueles que possuem constantes de recobrimento não nulas. Calculamos essas constantes de recobrimento para modos de entrada do primeiro harmônico que possuem ordens radiais nulas e MAO quaisquer e observamos que somar feixes com MAO de mesmo sinal produz resultado diferente de somar MAO com sinais opostos. E mais, analisando esses resultados conseguimos também encontrar um limite superior para as ordens radiais que surgem no problema.

Esse é um resultado bem geral que pode ser usado como base para vários experimentos, inclusive as aplicações que teremos no Capítulo 7.

A seguir vamos trabalhar o problema da Geração de Segundo Harmônico, que consiste em encontrar a solução das equações dinâmicas (Eq. (2.80), Eq. (2.81) e Eq. (2.82)). Nosso resultado neste capítulo será uma generalização da solução

obtida por Bloembergen e colaboradores [28], que poderá ser aplicado em vários experimentos, como, por exemplo, os descritos no Capítulo 7.

## Capítulo 6

# Resolvendo o problema da Geração de Segundo Harmônico

Agora que já conhecemos as constantes de recobrimento, e com isso sabemos quais modos contribuirão nos processos, podemos retornar para as equações dinâmicas multimodos.

Neste capítulo reproduzimos de forma detalhada os soluções de Bloembergen e colaboradores [28], além de generalizar essas equações para o caso multimodo.

Antes de iniciar o problema é necessário fazer algumas considerações para seguir, assim como fizemos nos cálculos das constantes de recobrimento. Por sinal, as considerações são as mesmas que as do Capítulo 5, Seção 5.1, sendo que o terceiro item possui mais uma implicação, que será:

- Dadas as condições iniciais,

$$a_{p'l'}^H(0) = \sum_i \delta_{p'0} \delta_{l'i} a_{0l_i}^H(0), \quad (6.1)$$

$$a_{p''l''}^V(0) = \sum_j \delta_{p''0} \delta_{l''j} a_{0l_j}^V(0), \quad (6.2)$$

$$b_{pl}(0) = 0, \quad (6.3)$$

os MAO's e as ordens radiais dos campos de frequência  $\omega$  se manterão constantes ao longo da propagação, isto é:

$$a_{p'l'}^H(z) = \sum_i \delta_{p'0} \delta_{l'l_i} a_{0l_i}^H(z), \quad (6.4)$$

$$a_{p''l''}^V(z) = \sum_j \delta_{p''0} \delta_{l''l_j} a_{0l_j}^V(z). \quad (6.5)$$

Ou seja, se os modos de entrada possuem  $p = 0$ , eles terão  $p = 0$  ao longo do cristal.

A seguir, mostraremos as soluções que encontramos nos problemas que analisamos, onde teremos algumas generalizações da solução obtida por Bloembergen e colaboradores [28].

## 6.1 Problema a 2+1 modos

As condições iniciais deste problema são:

$$a_{p'l'}^H(0) = \delta_{p'0} \delta_{l'l_H} a_{0l_H}^H(0), \quad (6.6)$$

$$a_{p''l''}^V(0) = \delta_{p''0} \delta_{l''l_V} a_{0l_V}^V(0), \quad (6.7)$$

$$b_{pl}(0) = 0, \quad (6.8)$$

$$l_H l_V \geq 0, \quad (6.9)$$



que pelas nossas considerações, e pelas regra de seleção das constantes de recobrimento, Eq. (5.38), evoluem para:

$$a_{p'l'}^H(z) = \delta_{p'0} \delta_{l'l_H} a_{0l_H}^H(z), \quad (6.10)$$

$$a_{p''l''}^V(z) = \delta_{p''0} \delta_{l''l_V} a_{0l_V}^V(z), \quad (6.11)$$

$$\Lambda_{p00}^{l'l''} = \delta_{l,l'+l''} \delta_{p0} \left( \frac{w_{2\omega}}{w_H} \right)^{|l'|} \left( \frac{w_{2\omega}}{w_V} \right)^{|l''|} \sqrt{\frac{(|l'| + |l''|)!}{|l'|! |l''|!}} \quad (6.12)$$

As equações que pretendemos resolver aqui são:

$$\frac{da_{0l_H}^H}{dz} = \imath g \Lambda_{000}^{l_H l_V} b_{0(l_H+l_V)} a_{0l_V}^{V*}, \quad (6.13)$$

$$\frac{da_{0l_V}^V}{dz} = \imath g \Lambda_{000}^{l_H l_V} b_{0(l_H+l_V)} a_{0l_H}^{H*}, \quad (6.14)$$

$$\frac{db_{0(l_H+l_V)}}{dz} = \imath 2g \Lambda_{000}^{l_H l_V} a_{0l_H}^H a_{0l_V}^V. \quad (6.15)$$

Estas equações já são bem conhecidas, figurando, por exemplo, em livros didáticos como [11, 12].

No entanto, por mais que tenha deixado de ser um problema multimodo, ainda são equações não-lineares e resolvê-las continua não sendo uma tarefa simples.

Redefinindo as variáveis do problema, para trabalhar com uma notação menos carregada, as equações acima passam a ser

$$\frac{da_H}{dz} = \imath \mu G b a_V^*, \quad (6.16)$$

$$\frac{da_V}{dz} = \imath \nu G b a_H^*, \quad (6.17)$$

$$\frac{db}{dz} = \imath 2\eta G a_H a_V. \quad (6.18)$$

Uma outra vantagem em escrevê-las assim é que elas também podem ser usadas

para solucionar o problema envolvendo  $2 + (P + 1)$  modos, que será discutido na seção a seguir (Seção 6.2). Então,  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $\eta$  e  $G$  são apenas parâmetros para resolvermos uma família maior de problemas, inclusive as Eq. (6.13), Eq. (6.14) e Eq. (6.15).

A forma que encontramos de trabalhar esse sistema, obtendo relações interessantes e uma solução analítica, foi substituir os campos por suas intensidades e fases, como na Subseção. 2.3.1. Desta forma, escreve-se:

$$\frac{dI_H}{dz} = 2\mu G \sqrt{JI_H I_V} \text{sen}(\xi), \quad (6.19)$$

$$I_H \frac{d\phi_H}{dz} = \mu G \sqrt{JI_H I_V} \text{cos}(\xi), \quad (6.20)$$

$$\frac{dI_V}{dz} = 2\nu G \sqrt{JI_H I_V} \text{sen}(\xi), \quad (6.21)$$

$$I_V \frac{d\phi_V}{dz} = \nu G \sqrt{JI_H I_V} \text{cos}(\xi), \quad (6.22)$$

$$\frac{dJ}{dz} = -4\eta G \sqrt{JI_H I_V} \text{sen}(\xi), \quad (6.23)$$

$$J \frac{d\psi}{dz} = 2\eta G \sqrt{JI_H I_V} \text{cos}(\xi), \quad (6.24)$$

onde

$$\xi = \phi_H + \phi_V - \psi . \quad (6.25)$$

As relações de Manley-Rowe, nesse caso (Eq. (??) e Eq. (??)), serão:

$$I_V(z) = \frac{\nu}{\mu} I_H(z) + \left( I_V(0) - \frac{\nu}{\mu} I_H(0) \right) \quad (6.26)$$

$$J(z) = -2\frac{\eta}{\mu} I_H(z) + \left( J(0) + 2\frac{\eta}{\mu} I_H(0) \right) \quad (6.27)$$

Uma relação interessante surge quando derivamos a Eq. (6.24) (ou Eq. (6.20) ou Eq. (6.22)):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left( J \frac{d\psi}{dz} \right) &= \left[ \frac{2\eta G}{2\sqrt{JI_H I_V}} \left( \frac{dJ}{dz} I_H I_V + J \frac{dI_H}{dz} I_V + J I_H \frac{dI_V}{dz} \right) \right] \cos(\xi) \\ &+ 2\eta G \sqrt{JI_H I_V} \left( -\text{sen}(\xi) \frac{d\xi}{dz} \right) \end{aligned} \quad (6.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left( J \frac{d\psi}{dz} \right) &= \frac{2\eta G \cos(\xi)}{2\mu\sqrt{JI_H I_V}} (-2\eta I_H I_V + \mu J I_V + \nu J I_H) \frac{dI_H}{dz} \\ &- 2\eta G \sqrt{JI_H I_V} \text{sen}(\xi) \left( \frac{d\phi_H}{dz} + \frac{d\phi_V}{dz} - \frac{d\psi}{dz} \right) \end{aligned} \quad (6.29)$$

e adiantado alguns passos, chegamos a:

$$\frac{d}{dz} \left( J \frac{d\psi}{dz} \right) = 0. \quad (6.30)$$

Ou seja, a quantidade entre parênteses é conservada. Assim temos, comparando com a Eq. (6.24):

$$\sqrt{J(z)I_H(z)I_V(z)} \cos(\xi(z)) = \sqrt{J(0)I_H(0)I_V(0)} \cos(\xi(0)). \quad (6.31)$$

A Eq. (6.31) é uma importante relação de conservação, que nos trará mais informações daqui para frente. Um caso especial desta aparece quando aplicamos as condições iniciais do nosso problema, mais especificamente  $J(0) = 0$  (Eq. (6.9)), que é

$$\sqrt{J(z)I_H(z)I_V(z)} \cos(\xi(z)) = 0. \quad (6.32)$$

Aplicando Eq. (6.32) em Eq. (6.20), Eq. (6.22) e Eq. (6.24)

$$I_H \frac{d\phi_H}{dz} = 0 \quad (6.33)$$

$$I_V \frac{d\phi_V}{dz} = 0 \quad (6.34)$$

$$J \frac{d\psi}{dz} = 0 \quad (6.35)$$

e isso nos leva a concluir que:

- a intensidade, para um dado comprimento dentro do cristal, deve ser nula; ou
- se a intensidade, para um dado comprimento dentro do cristal, não for nula a fase necessariamente se conserva.
- se as três fases se conservarem, ou seja, se as intensidades forem todas não nulas, da Eq.(6.32) teríamos que

$$\xi(z) = (2n + 1) \frac{\pi}{2}, \quad (6.36)$$

isto é, as fases estão amarradas por essa relação junto com a Eq.(6.25). Esse é o caso de interesse, que será melhor discutido a seguir.

### 6.1.1 Solução analítica

Aqui vamos buscar uma solução analítica para o problema. Para isto vamos considerar o Travamento de Fase<sup>1</sup> obtido na Eq. (6.36), que leva em

$$\cos(\xi(z)) = 0, \quad \forall z. \quad (6.37)$$

Ao substituir na Eq. (6.32), chega-se a:

$$I_H(z) \neq 0, \quad (6.38)$$

$$I_V(z) \neq 0, \quad (6.39)$$

$$J(z \neq 0) \neq 0, \quad (6.40)$$

$$\phi_H(z) + \phi_V(z) - \psi(z) = (2n + 1) \frac{\pi}{2}. \quad (6.41)$$

Como as intensidades são todas não nulas ao longo do cristal, as fases, como vimos anteriormente, serão todas conservadas, ou seja,

$$\phi_H(z) = \phi_H(0), \quad (6.42)$$

$$\phi_V(z) = \phi_V(0), \quad (6.43)$$

$$\psi(z) = \psi(0), \quad (6.44)$$

e o que chamamos de Travamento de Fase é traduzido na equação:

$$\phi_H(z) + \phi_V(z) - \psi(z) = \phi_H(0) + \phi_V(0) - \psi(0) = (2n + 1) \frac{\pi}{2}. \quad (6.45)$$

Além de considerar o Travamento de Fase em todo o cristal, vamos considerar

---

<sup>1</sup>Em inglês é conhecido como Phase Lock.

que:

$$I_V(0) = \frac{\nu}{\mu} I_H(0). \quad (6.46)$$

Assim, as Eq. (6.26) e Eq. (6.27) se tornam:

$$I_V(z) = \frac{\nu}{\mu} I_H(z), \quad (6.47)$$

$$J(z) = 2 \frac{\eta}{\mu} (I_H(0) - I_H(z)). \quad (6.48)$$

Substituindo essas equações e a Eq. (6.37) nas Eq. (6.19), Eq. (6.21) e Eq. (6.23), o sistema de equações para as intensidade se reduz a Eq. (6.47), Eq. (6.48) e

$$\frac{dI_H}{dz}(z) = (-1)^n 2G \sqrt{2\eta\nu} \sqrt{I_H(0) - I_H(z)} I_H(z), \quad (6.49)$$

que, por sua vez, têm como solução:

$$J(z) = 2 \frac{\eta}{\mu} I_H(0) \tanh^2 \left( \sqrt{2\eta\nu I_H(0)} Gz \right), \quad (6.50)$$

$$I_H(z) = I_H(0) \operatorname{sech}^2 \left( \sqrt{2\eta\nu I_H(0)} Gz \right), \quad (6.51)$$

$$I_V(z) = \frac{\nu}{\mu} I_H(z). \quad (6.52)$$

Finalmente, para obter a solução do nosso problema a 2 + 1 modos, basta substituir

$$\mu = \nu = \eta = 1, \quad (6.53)$$

$$G = g\Lambda_{000}^{l_H l_V} \quad (6.54)$$

nas equações anteriores e chegamos a:

$$J_{0(l_H+l_V)}(z) = 2 \tanh^2 \left( \sqrt{2I_{0l_H}^H(0)g\Lambda_{000}^{u_Hl_V}} z \right), \quad (6.55)$$

$$I_{0l_H}^H(z) = I_{0l_H}^H(0) \operatorname{sech}^2 \left( \sqrt{2I_{0l_H}^H(0)g\Lambda_{000}^{u_Hl_V}} z \right), \quad (6.56)$$

$$I_{0l_V}^V(z) = I_{0l_H}^H(z). \quad (6.57)$$

que já é conhecida desde 1962 [28] pelo prêmio nobel Bloembergen, e colaboradores, com a diferença de que aqui a solução serve para quaisquer  $l_H$  e  $l_V$  tais que  $l_H l_V \geq 0$ , aspecto não contemplado anteriormente.

## 6.2 Problema a $2 + (P + 1)$ modos

Agora vamos considerar o caso em que os dois feixes de entrada geram  $P + 1$  modos do segundo harmônico, sendo produzidos pelas condições iniciais:

$$a_{p'l'}^H(0) = \delta_{p'0} \delta_{l'l_H} a_{0l_H}^H(0), \quad (6.58)$$

$$a_{p''l''}^V(0) = \delta_{p''0} \delta_{l''l_V} a_{0l_V}^V(0), \quad (6.59)$$

$$b_{pl}(0) = 0, \quad (6.60)$$

$$l_H l_V < 0. \quad (6.61)$$

Pelas nossas considerações, e pelas regra de seleção das constantes de recobrimto, Eq. (5.54), evoluem para:

$$a_{p'l'}^H(z) = \delta_{p'0} \delta_{l'l_H} a_{0l_H}^H(z), \quad (6.62)$$

$$a_{p''l''}^V(z) = \delta_{p''0} \delta_{l''l_V} a_{0l_V}^V(z), \quad (6.63)$$

$$\Lambda_{p00}^{l'l''} = \delta_{l,l'+l''} \sum_{m=0}^P \delta_{mp} \left( \frac{w_{2\omega}}{w_H} \right)^{|l'|} \left( \frac{w_{2\omega}}{w_V} \right)^{|l''|} \sqrt{\frac{|l'|! |l''|!}{p! (p + |l'| + |l''|)!}} \frac{(-1)^p}{(P-p)!}. \quad (6.64)$$

Então, as equações que pretendemos resolver aqui são:

$$\begin{aligned} \frac{da_{0l_H}^H}{dz} &= ig \sum_{p=0}^P \Lambda_{p00}^{l_H l_V} b_{p(l_H+l_V)} a_{0l_V}^V *, \\ \frac{da_{0l_V}^V}{dz} &= ig \sum_{p=0}^P \Lambda_{p00}^{l_H l_V} b_{p(l_H+l_V)} a_{0l_H}^H *, \\ \frac{db_{0(l_H+l_V)}}{dz} &= i2g \Lambda_{000}^{l_H l_V} a_{0l_H}^H a_{0l_V}^V \\ \frac{db_{1(l_H+l_V)}}{dz} &= i2g \Lambda_{100}^{l_H l_V} a_{0l_H}^H a_{0l_V}^V \\ &\vdots \\ \frac{db_{p(l_H+l_V)}}{dz} &= i2g \Lambda_{p00}^{l_H l_V} a_{0l_H}^H a_{0l_V}^V \\ &\vdots \\ \frac{db_{P(l_H+l_V)}}{dz} &= i2g \Lambda_{P00}^{l_H l_V} a_{0l_H}^H a_{0l_V}^V. \end{aligned} \quad (6.65)$$

Analisando as equações acima, é possível notar que

$$\frac{db_{p(l_H+l_V)}}{dz} = \beta_p^{l_H l_V} \frac{db_{0(l_H+l_V)}}{dz}, \quad (6.66)$$

com

$$\beta_p^{l_H l_V} = \frac{\Lambda_{p00}^{l_H l_V}}{\Lambda_{000}^{l_H l_V}}, \quad (6.67)$$

que, por sua vez, leva a<sup>2</sup>:

$$b_{p(l_H+l_V)} = \beta_p^{l_H l_V} b_{0(l_H+l_V)}. \quad (6.68)$$

---

<sup>2</sup>Lembrando que  $B_{p(l_H+l_V)}(0) = 0$ .



Substituindo essas relações no sistema de Equações Dinâmicas, descrito por Eq. (6.65), conseguimos reescrevê-lo como:

$$\frac{da_{0l_H}^H}{dz} = \nu \gamma_{l_H l_V} \tilde{G}_{l_H l_V} b_{0(l_H+l_V)} a_{0l_V}^V, \quad (6.69)$$

$$\frac{da_{0l_V}^V}{dz} = \nu \gamma_{l_H l_V} \tilde{G}_{l_H l_V} b_{0(l_H+l_V)} a_{0l_H}^H, \quad (6.70)$$

$$\frac{db_{0(l_H+l_V)}}{dz} = i2\tilde{G}_{l_H l_V} a_{0l_H}^H a_{0l_V}^V, \quad (6.71)$$

com<sup>3</sup>

$$\tilde{G}_{l_H l_V} = g\Lambda_{000}^{l_H l_V}, \quad (6.72)$$

$$\gamma_{l_H l_V} = \sum_{p=0}^P (\beta_p^{l_H l_V})^2. \quad (6.73)$$

As Eq. (6.69), Eq. (6.70) e Eq. (6.71) nos dizem que a dinâmica do problema a  $2 + (P + 1)$  modos se reduz ao problema a  $2 + 1$  modos. Fato este que nos foi bem surpreendente e interessante - pois graças a isso basta resolver o problema a  $2 + 1$  modos, que já estamos solucionando toda a família de problemas com  $2 + (P + 1)$  modos.

Logo, para encontrar uma solução analítica para este problema, basta voltar nas Eq. (6.50), Eq. (6.51) e Eq. (6.52), e substituir

$$\mu = \gamma_{l_H l_V}, \quad (6.74)$$

$$\nu = \gamma_{l_H l_V}, \quad (6.75)$$

$$\eta = 1, \quad (6.76)$$

$$G = \tilde{G}_{l_H l_V}, \quad (6.77)$$

---

<sup>3</sup>Os cálculos de  $\gamma_{l_H l_V}$  serão desenvolvidos no Apêndice C.

que chegamos a

$$J_{0(l_H+l_V)}(z) = \frac{I_{0l_H}^H(0)}{\gamma_{l_H l_V}} \tanh^2 \left( \sqrt{2\gamma_{l_H l_V} I_{0l_H}^H(0) g \Lambda_{000}^{l_H l_V} z} \right), \quad (6.78)$$

$$I_{0l_H}^H(z) = I_{0l_H}^H(0) \operatorname{sech}^2 \left( \sqrt{2\gamma_{l_H l_V} I_{0l_H}^H(0) g \Lambda_{000}^{l_H l_V} z} \right), \quad (6.79)$$

$$J_{p(l_H+l_V)}(z) = |\beta_p^{l_H l_V}|^2 J_{0(l_H+l_V)}(z), \quad (6.80)$$

$$I_{0l_V}^V(z) = I_{0l_H}^H(z). \quad (6.81)$$

Para descobrir as fases  $\psi_p$ , basta retornar em Eq. (6.67) e reescrevê-la como:

$$\beta_p^{l_H l_V} = (-1)^p |\beta_p^{l_H l_V}|. \quad (6.82)$$

Assim, substituindo em Eq. (6.68),

$$b_{p(l_H+l_V)} = (-1)^p |\beta_p^{l_H l_V}| b_{0(l_H+l_V)} \quad (6.83)$$

$$\sqrt{J_{p(l_H+l_V)}} e^{i\psi_p(l_H+l_V)} = e^{ip\pi} |\beta_p^{l_H l_V}| \sqrt{J_{0(l_H+l_V)}} e^{i\psi_0(l_H+l_V)} \quad (6.84)$$

e, por fim, encontramos:

$$\psi_{p(l_H+l_V)} = \psi_{0(l_H+l_V)} + (2n + p) \pi. \quad (6.85)$$

E aí está a solução do problema a  $2 + (P + 1)$  modos, que são as Eq. (6.78), Eq. (6.79), Eq. (6.80), Eq. (6.81) e Eq. (6.85)<sup>4</sup>.

Como podemos ver, os resultados desse capítulo generalizam aquele obtido por Bloembergen e colaboradores [28]<sup>5</sup> para o caso multimodo envolvendo Mo-

<sup>4</sup>Lembrando que as fases são todas constantes, como calculamos na subseção anterior.

<sup>5</sup>Que era um problema a  $2 + 1$  modos e sem Momento Angular Orbital

mento Angular Orbital. Encontramos a solução de ambos os casos, onde foi usado o fato surpreendente (pelo menos para nós) de que o problema a  $2 + (P + 1)$  modos pode ser reduzido ao problema a  $2 + 1$  modos, o que simplificou bastante sua resolução.

No capítulo que segue, vamos juntar as informações obtidas no capítulo atual e no anterior para propor uma explicação teórica dos resultados experimentais obtidos em [27] e sugerir um novo experimento.

## Capítulo 7

# Soma de Momento Angular Orbital na Geração de Segundo Harmônico

Este capítulo tem como mote o artigo "Arbitrary orbital angular momentum addition in second harmonic generation", [27], pois foi observando estes resultados interessantes que surgiram dúvidas que culminaram em uma análise mais precisa do processo de Geração de Segundo Harmônico com vórtices óticos.

O primeiro ganho obtido a partir desta análise foi o calculo das constantes de recobrimento, descritas no Capítulo 5, seguido da solução das equações dinâmicas multimodos, no Capítulo 6, que são os resultados mais gerais dessa tese.

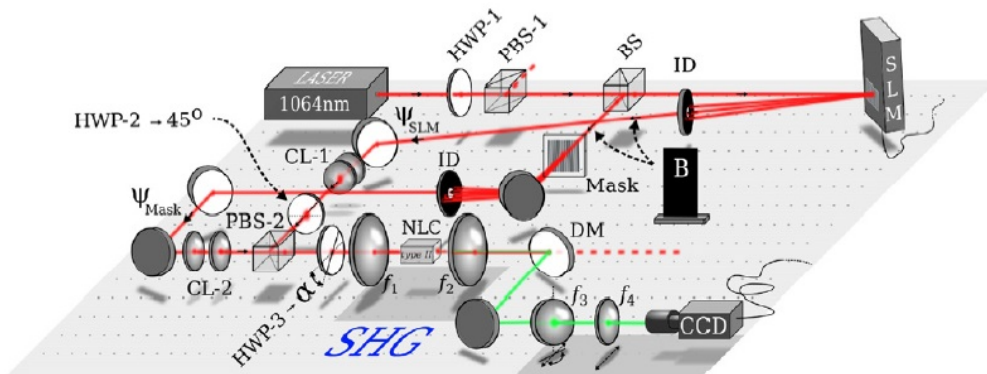
Além disso, obtivemos uma melhor descrição teórica dos resultados experimentais de [27] sobre soma de Momento Angular Orbital, propondo deixar a questão do astigmatismo (como pensavam os autores) mais para segundo plano e, em contra partida, tomando a sua frente considerar ordens radiais maiores que zero, mostrando que as constantes de recobrimento para esses casos não são tão desprezíveis como se esperava.

E o último ganho descrito nesta tese será apresentarmos uma sequência ao

esquema de Mistura de MAO Controlada por Polarização<sup>1</sup>, proposto também em [27], onde expomos novas ideias e resultados interessantes.

Sendo assim, esse é um capítulo em que aplicamos nossos resultados mais gerais para propor uma explicação para um experimento já existente, apresentar um novo e, de certa forma, tentar confirmar nossa previsão teórica, deixando-a mais robusta. Por esse motivo vamos descrever e aproveitar todo o esquema montado em [27].

O esquema experimental utilizado encontra-se na Fig. 7.1. Ele contém todos os passos realizados para preparar e manipular o vórtice inicial, o cristal onde ocorrerá a dinâmica não-linear dos modos e o estágio de medida. Como o objetivo aqui não é detalhar o experimento nem extrair medidas, e sim propor cálculos e hipóteses que venham a, possivelmente, corroborá-los, este capítulo focará em alguns elementos deste aparato.



**Figure 1.** Sketch of the experimental setup.

Figura 7.1: Retirada de [27]. Esquema experimental proposto para soma de MAO na GSH.

O primeiro elemento de interesse é a "barreira B", que serve para permitir a passagem apenas do feixe que passa pela máscara (função Mask), ou permitir a

<sup>1</sup>Do inglês: Polarization Controlled OAM Mixing.

passagem apenas do feixe que passa pelo SLM (função SLM), ou ainda permitir a passagem de ambos os feixes ao mesmo tempo (função Ambos).

O segundo elemento de interesse é "HWP-3". Este é uma lâmina de meia onda que está livre para girar de um ângulo  $\alpha$ . Para realizar as medidas que comprovam a soma de MAO, esta é mantida fixa em  $\alpha = 0^\circ$ . Já no caso da Mistura de MAO Controlada por Polarização, ela fica livre para escolhermos os ângulos de interesse, que serão discutidos na Seção 7.3. É possível reparar que este se encontra antes do cristal, seguindo a trajetória do feixe.

O terceiro a ser analisado é a "lâmina tiltada", representada por  $f_3$ . Ela fará o papel do conversor de modos descrito na Seção 7.1.

O quarto elemento é a "Mask" (máscara). A função desse componente é memorizar um único perfil Laguerre-Gauss  $LG_{pl}$  (que chamamos de  $u_{pl}$ ) para transformar um feixe  $TEM_{00}$  nesse perfil gravado. Nesse experimento, o feixe fixado na máscara é um  $LG_{01}$ .

O quinto, e último, elemento é o "SLM". Este terá quase a mesma função da "Mask", a diferença é que um "SLM" é capaz de gravar vários perfis de Laguerre-Gauss. Nesse experimento, os feixes possíveis são  $LG_{0l_{SLM}}$ , com  $-2 \leq l_{SLM} \leq 2$ .

Então o que vamos fazer nas seções seguintes é: mostrar como converter os nossos modos (Laguerre-Gauss) para os modos de Hermite-Gauss a  $45^\circ$ , para assim compararmos com os resultados experimentais; em seguida vamos destrinchar a Soma de MAO; e por fim apresentar nossos avanços sobre Mistura de MAO Controlada por Polarização.

## 7.1 Conversão de modos

Aqui discutiremos a conversão entre os modos de Hermite-Gauss e Laguerre-Gauss, que será importante para realizarmos a simulação dos nossos resultados teóricos para compararmos com os experimentais apresentados em [27]. Essa conversão de modos tem como referência o trabalho [77].

Primeiro vamos definir

$$U_{nm}^i = (-1)^{\min(n,m)} \frac{C_{nm}^{LG}}{w_i} \left( \frac{2r^2}{w_i^2} \right)^{\frac{|n-m|}{2}} L_{\min(n,m)}^{|n-m|} \left( \frac{2r^2}{w_i^2} \right) e^{-\frac{r^2}{w_i^2}} e^{i \left( \frac{r^2}{w_i^2} + (n-m)\theta \right)}, \quad (7.1)$$

$$C_{nm}^{LG} = \sqrt{\frac{2}{\pi n! m!}} \min(n, m)!. \quad (7.2)$$

Também vamos precisar dos modos de Hermite-Gauss:

$$v_{nm}^i = \frac{C_{nm}^{HG}}{w_i} H_n \left( \frac{\sqrt{2}x}{w_i} \right) H_m \left( \frac{\sqrt{2}y}{w_i} \right) e^{-\frac{(x^2+y^2)}{w_i^2}} e^{i \frac{(x^2+y^2)}{w_i^2}}, \quad (7.3)$$

$$C_{nm}^{HG} = \sqrt{\frac{2}{\pi 2^{n+m} n! m!}}, \quad (7.4)$$

e dos modos Hermite-Gauss a 45°:

$$w_{nm}^i(x, y, z) = v_{nm}^i \left( \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}}, z \right). \quad (7.5)$$

De posse das equações acima, a conversão dos modos será dada por

$$U_{nm}^i = \sum_{j=0}^N t^j b(n, m, j) v_{N-j,j}^i, \quad (7.6)$$

$$w_{nm}^i = \sum_{j=0}^N b(n, m, j) v_{N-j,j}^i, \quad (7.7)$$

$$b(n, m, j) = \sqrt{\frac{(N-j)!j!}{2^N n!m!}} \frac{1}{j!} \frac{d^j}{dt^j} [(1-t)^n (1+t)^m] |_{t=0}, \quad (7.8)$$

$$N = n + m. \quad (7.9)$$

Comparando o modo de Laguerre-Gauss, Eq. (2.60), com a Eq. (7.1), encontramos a relação<sup>2</sup>

$$u_{pl}^i = (-1)^p U_{nm}^i, \quad (7.10)$$

com

$$p = \min(n, m), \quad (7.11)$$

$$l = n - m, \quad (7.12)$$

ou, invertendo essa relação,

$$n = p + \max(l, 0), \quad (7.13)$$

$$m = p - \min(l, 0). \quad (7.14)$$

Assim, conseguimos escrever as conversões de modos Laguerre-Gauss para Hermite-Gauss e Hermite-Gauss a 45° para Hermite-Gauss, agora precisamos entender o que acontece experimentalmente para sabermos o que fazer com essas

---

<sup>2</sup>Repere que a Eq. (7.1) representa um modo de Laguerre-Gauss, definido a menos de uma fase  $(-1)^p$ .



conversões.

A "lâmina tiltada" que, pela análise dos dados experimentais, consideramos fazer o papel de um conversor de modos, tem sua ação traduzida pelo operador "Q", tal que:

$$Q v_{nm}^i = (-i)^m v_{nm}^i. \quad (7.15)$$

Dessa maneira, quando um modo de Laguerre-Gauss passa pela lâmina ele sofrerá a transformação

$$Q u_{pl}^i = (-1)^p w_{nm}^i, \quad (7.16)$$

ou seja, será convertido em um modo Hermite-Gauss a  $45^\circ$ .

No Apêndice D detalhamos algumas das conversões aqui descritas. Isso será útil para simular os perfis teóricos que serão apresentados nas figuras a seguir, que vão da Fig. 7.3 a Fig. 7.11.

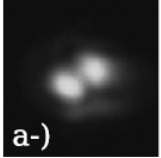
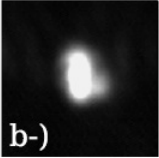
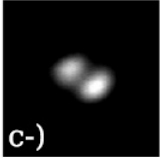
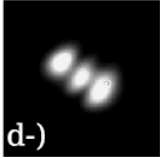
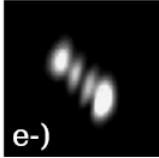
## 7.2 Soma de Momento Angular Orbital

O procedimento utilizado em [27] para comprovar a soma de MAO arbitrário foi comparar os perfis de intensidade do segundo harmônico encontrados experimentalmente com os esperados. Portanto, vamos seguir a mesma orientação para mostrar os nossos resultados.

A Fig. 7.2 mostra o perfil experimental de feixes produzidos pela soma de MAO na GSH, ou seja, o perfil do campo do segundo harmônico (frequência  $2\omega$ ). O experimento somou  $l_{Mask} = 1$  com  $l_{SLM}$  variando de  $-2$  a  $2$  (como dito anteriormente), resultando em  $l_{2\omega} = l_{Mask} + l_{SLM}$ . Estes feixes passam pela "lâmina tiltada", que funcionará como um conversor de modos, e aí sim geram os perfis de Hermite-Gauss correspondentes a cada feixe do segundo harmônico com

$l_{2\omega}$ .

Ainda na Fig. 7.2, os perfis a-), c-), d-) e e-) se mostram compatíveis com o esperado, o que comprovaria a soma de MAO nestes casos. No entanto, o item b-) apresenta um perfil oval, diferente do previsto, que era circular. Com isso, a estratégia deles passou a ser a contagem de linhas nodais, argumentado que o "perfil oval", e outras possíveis deformações menos chamativas em outras figuras, surgiu do astigmatismo promovido pela "lâmina tiltada".

$I_{\text{SLM}} \backslash I_{\text{Mask}}$	-2	-1	0	1	2
1	 a-)	 b-)	 c-)	 d-)	 e-)
$l_{2\omega}$	-1	0	1	2	3

**Figure 3.** Topological charge addition in type II SHG. The value of the topological charge produced in the second harmonic field is determined by the number of nodal lines and the orientation of the HG profiles. In all cases  $l_{\text{Mask}} = 1$ . (a)  $l_{\text{SLM}} = -2$ ,  $l_{2\omega} = -1$ , (b)  $l_{\text{SLM}} = -1$ ,  $l_{2\omega} = 0$ , (c)  $l_{\text{SLM}} = 0$ ,  $l_{2\omega} = 1$ , (d)  $l_{\text{SLM}} = 1$ ,  $l_{2\omega} = 2$ , (e)  $l_{\text{SLM}} = 2$ ,  $l_{2\omega} = 3$ . The SHG topological charge is consistent with  $l_{2\omega} = l_{\text{Mask}} + l_{\text{SLM}}$ .

Figura 7.2: Retirada de [27]. Resultados experimentais para Soma de MAO arbitrário. As figuras são os perfis de intensidade do segundo harmônico.

Finalmente todas as imperfeições foram justificadas e, contando as linhas nodais e observando a orientação do perfil dos feixes do segundo harmônico, que se assemelha ao esperado, comprovaram experimentalmente a soma de MAO.

No entanto, não ficamos completamente satisfeitos com essas justificativas para o "perfil oval", pois suspeitávamos que ordens radiais não nulas (isto é,  $p > 0$ ) estariam produzindo esse efeito.

Assim, começamos a estudar e calcular as constantes de recobrimento, descri-

tas anteriormente no Capítulo 5. Foi então que percebemos que o astigmatismo pode não ser tão central para explicar o "perfil oval" do item *b-*) da Fig. 7.2.

Voltando no Capítulo 5:

- Para  $l_H l_V \geq 0$ , a única ordem radial do segundo harmônico que aparece no problema é  $p = 0$ . Ou seja, os outros modos com  $p \neq 0$  não são desprezados, eles de fato não vão surgir, pois as constantes de recobrimento que acoplam estes modos no sistema serão todas nulas.
- Para  $l_H l_V < 0$ , vimos que as constantes de recobrimento vão acoplar modos do segundo harmônico com ordens radiais que estarão limitadas superiormente por  $P$  (isto é  $p \leq P$ , com  $P = \min(|l_H|, |l_V|)$ ). Ou seja, neste caso teremos modos de ordens radiais superiores que entrarão na dinâmica do sistema.

Retornando a Fig. 7.2, temos que o MAO na máscara é fixado em  $l_{Mask} = 1$ . Assim, quando  $l_{SLM} \geq 0$  sabemos que a única ordem radial que surge é  $p = 0$  e o experimento vai de encontro ao esperado, como mostram as Fig. 7.3, Fig. 7.4 e Fig. 7.5.

Já no caso em que  $l_{SLM} < 0$ , nós temos que  $P = 1$ . Ou seja, além do modo com  $p = 0$ , participará do processo o modo com  $p = 1$ . Mas qual será a relevância deste último? Será que ele não pode ser realmente desprezado?

Para começar a responder essas perguntas, precisamos, primeiro, calcular as constantes de recobrimento neste caso. Voltando na Eq. (5.22) e aplicando  $P = 1$ ,  $l_{Mask} = 1$  e  $l_{SLM} = -|l_{SLM}|$  chegamos a:

$$\Lambda_{p00}^{l1(-|l_{SLM}|)} = \delta_{l,1-|l_{SLM}|} \sum_{m=0}^1 \delta_{pm} (-1)^p \left(\frac{w_{2\omega}}{w_H}\right) \left(\frac{w_{2\omega}}{w_V}\right)^{|l_{SLM}|} \sqrt{\frac{|l_{SLM}|!}{p! (p + |l_{SLM}| - 1)!}} \quad (7.17)$$

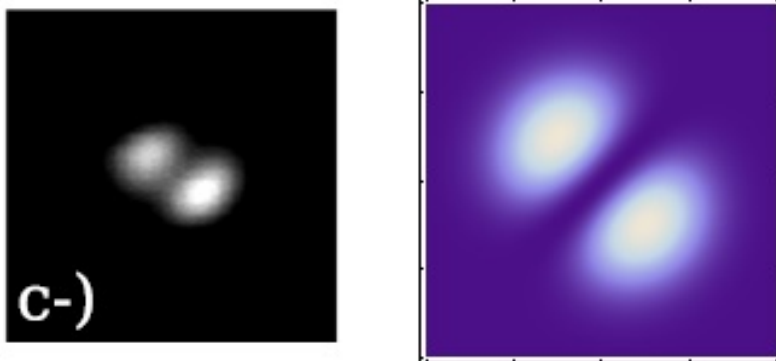


Figura 7.3: Imagem do lado esquerdo retirada de [27]. Comparação entre o resultado experimental (lado esquerdo) e a simulação dos resultados teóricos discutidos ao longo desta tese na saída do cristal (lado direito) do perfil de intensidade do segundo harmônico para a soma " $l_{Mask} = 1$ " mais " $l_{SLM} = 0$ ", resultando em " $l = 1$ ".

que equivale a:

$$\Lambda_{000}^{l1(-|l_{SLM}|)} = \delta_{l,1-|l_{SLM}|} \sqrt{|l_{SLM}|} \left( \frac{w_{2\omega}}{w_H} \right) \left( \frac{w_{2\omega}}{w_V} \right)^{|l_{SLM}|}, \quad (7.18)$$

$$\Lambda_{100}^{l1(-|l_{SLM}|)} = -\delta_{l,1-|l_{SLM}|} \left( \frac{w_{2\omega}}{w_H} \right) \left( \frac{w_{2\omega}}{w_V} \right)^{|l_{SLM}|}, \quad (7.19)$$

e comparando estas duas, temos que:

$$\Lambda_{100}^{l1(-|l_{SLM}|)} = -\frac{1}{\sqrt{|l_{SLM}|}} \Lambda_{000}^{l1(-|l_{SLM}|)} \quad (7.20)$$

Agora, respondendo a questão levantada:

- No caso em que  $l_{SLM} = -2$ , temos que:

$$\Lambda_{100}^{(-1)1(-2)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Lambda_{000}^{(-1)1(-2)}. \quad (7.21)$$

Podemos pensar na competição entre a geração dos modos  $B_{0(-1)}$  e  $B_{1(-1)}$ , e o último teria um peso 50% menor de surgir que o primeiro. Então, neste

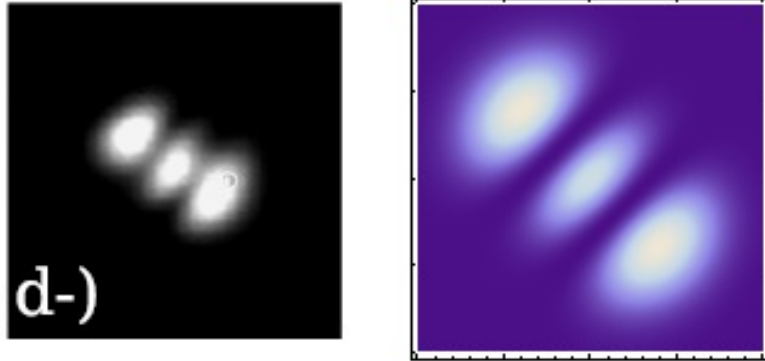


Figura 7.4: Imagem do lado esquerdo retirada de [27]. Comparação entre o resultado experimental (lado esquerdo) e a simulação dos resultados teóricos discutidos ao longo desta tese na saída do cristal (lado direito) do perfil de intensidade do segundo harmônico para a soma " $l_{Mask} = 1$ " mais " $l_{SLM} = 1$ ", resultando em " $l = 2$ ".

caso, dá até pra vislumbrar a possibilidade de desconsiderar o modo com  $p = 1$ . No entanto, esta pode não ser uma aproximação tão boa. A comparação entre o experimento e o que simulamos está na Fig. 7.6.

- No caso em que  $l_{SLM} = -1$ , temos que:

$$\Lambda_{100}^{01(-1)} = -\Lambda_{000}^{01(-1)}. \quad (7.22)$$

Aqui ambos os modos  $B_{00}$  e  $B_{10}$  possuem o mesmo peso para serem gerados, e desconsiderar o último se torna uma aproximação um tanto grosseira. A comparação entre o experimento e o que simulamos está na Fig. 7.7.

A comparação das duas imagens da Fig. 7.7 dá um indício de que as ordens radiais podem, de fato, explicar esse "perfil oval". No entanto, elas fazem um ângulo de  $90^\circ$  entre si, o que torna nossa análise muito pouco conclusiva. Mas, depois de algumas reuniões e discussões, inclusive com os autores de [27], nos demos conta de algo importante, que é fase de Gouy ganha na propagação fora do cristal. Por esse motivo vamos descrever um pouco mais esse assunto a seguir.

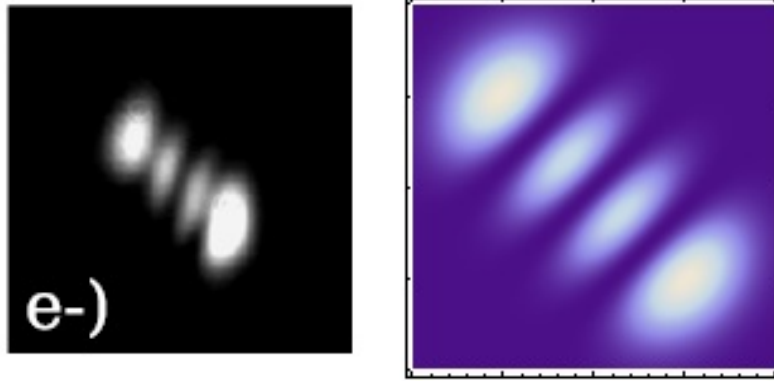


Figura 7.5: Imagem do lado esquerdo retirada de [27]. Comparação entre o resultado experimental (lado esquerdo) e a simulação dos resultados teóricos discutidos ao longo desta tese na saída do cristal (lado direito) do perfil de intensidade do segundo harmônico para a soma " $l_{Mask} = 1$ " mais " $l_{SLM} = 2$ ", resultando em " $l = 3$ ".

### 7.2.1 Propagação fora do cristal e fase de Gouy

Ao longo desta tese, as análises da Geração de Segundo Harmônico foram todas dentro do meio não-linear, que é o cristal. Mas, ao considerar a propagação fora desse meio, percebemos que é possível melhorar ainda mais a comparação entre as figuras teóricas e experimentais envolvendo o "perfil oval"(Fig. 7.7).

Fora do cristal os feixes se propagam num meio linear, ou seja,  $\chi = 0$  (que é o nosso  $\chi^{(2)}$ ). A dinâmica dos modos continuará sendo descrita pelas Eq. (2.80), Eq. (2.81) e Eq. (2.82), mas por essa ausência do cristal elas se tornam

$$\frac{da_{p'l'}^H}{dz} = 0 \quad (7.23)$$

$$\frac{da_{p''l''}^V}{dz} = 0 \quad (7.24)$$

$$\frac{db_{pl}}{dz} = 0 \quad (7.25)$$

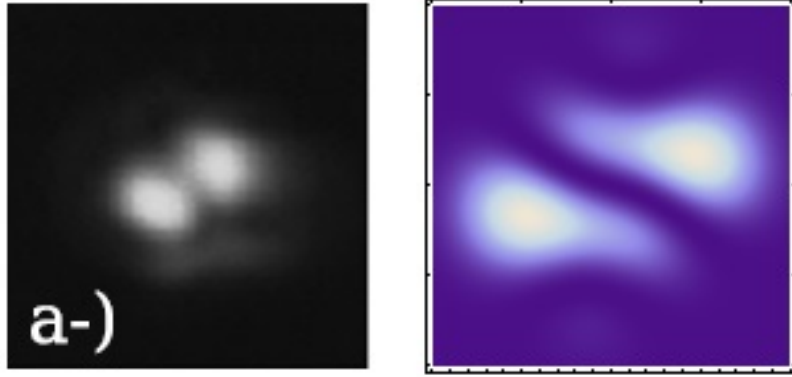


Figura 7.6: Imagem do lado esquerdo retirada de [27]. Comparação entre o resultado experimental (lado esquerdo) e a simulação dos resultados teóricos discutidos ao longo desta tese na saída do cristal (lado direito) do perfil de intensidade do segundo harmônico para a soma " $l_{Mask} = 1$ " mais " $l_{SLM} = -2$ ", resultando em " $l = -1$ ".

o que leva em

$$a_{p'l'}^H(z) = a_{p'l'}^H(z_l) \quad (7.26)$$

$$a_{p''l''}^V(z) = a_{p''l''}^V(z_l) \quad (7.27)$$

$$b_{pl}(z) = b_{pl}(z_l) \quad (7.28)$$

onde  $z_l$  é a posição onde se encontra a saída do cristal. Em outras palavras, essas amplitudes dos modos permanecerão constantes, com os mesmos valores na saída do cristal.

Assim, a variação do campo elétrico ao longo  $z$  (e de  $r$ ) será dada pelos modos Laguerre-Gauss  $u_{pl}(\mathbf{r}, z)$ , definidos na Eq. (2.60). Vamos reescrevê-los de modo que possamos evidenciar a única fase que depende de  $(p, l)$

$$u_{pl}(\mathbf{r}, z) = \bar{u}_{pl}(\mathbf{r}, z)e^{-i\varphi_{pl}(z)}, \quad (7.29)$$

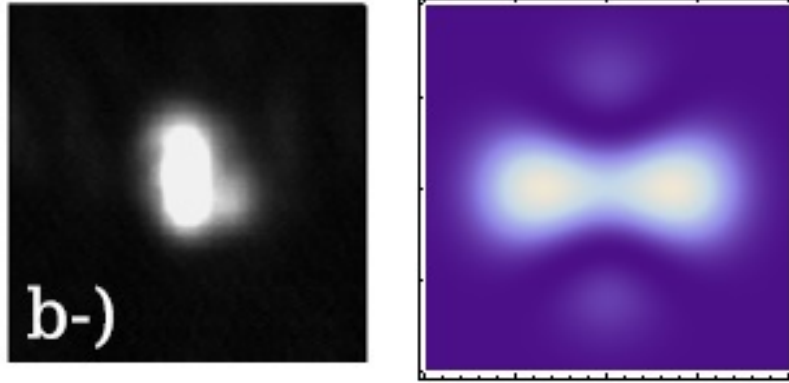


Figura 7.7: Imagem do lado esquerdo retirada de [27]. Comparação entre o resultado experimental (lado esquerdo) e a simulação dos resultados teóricos discutidos ao longo desta tese na saída do cristal (lado direito) do perfil de intensidade do segundo harmônico para a soma " $l_{Mask} = 1$ " mais " $l_{SLM} = -1$ ", resultando em " $l = 0$ ".

onde

$$\varphi_{pl}(z) = (2p + |l| + 1) \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{z}{z_R} \right) \quad (7.30)$$

é a fase de Gouy.

Lembrando... O campo elétrico do segundo harmônico é descrito por

$$E_{2\omega} = \sum_{pl} \bar{u}_{pl}^{2\omega} B_{pl} e^{-i\varphi_{pl}} e^{i(k_{2\omega}z - 2\omega t)}, \quad (7.31)$$

que ao passar pela "lâmina tiltada" se torna<sup>3</sup>

$$QE_{2\omega} = \sum_{pl} (-1)^p w_{nm}^{2\omega} B_{pl} e^{-i\varphi_{pl}} e^{i(k_{2\omega}z - 2\omega t)}. \quad (7.32)$$

Assim, as intensidades sem e com a "lâmina tiltada" serão, respectivamente,

$$I_{2\omega} = \left| \sum_{pl} \bar{u}_{pl}^{2\omega} b_{pl} e^{-i\varphi_{pl}} \right|^2, \quad (7.33)$$

<sup>3</sup>Lembre que, da Eq. (7.14),  $n = p + \max(l, 0)$  e  $p - \min(l, 0)$ .



$$J_{2\omega} = \left| \sum_{pl} (-1)^p w_{nm}^{2\omega} b_{pl} e^{-i\varphi_{pl}} \right|^2. \quad (7.34)$$

Agora sim, vamos discutir qual o perfil de intensidade do segundo harmônico no experimento de [27] a medida que ele se propaga fora do cristal

i)  $l'l'' \geq 0$

Neste caso, a única ordem radial é zero. Portanto, as intensidades, sem e com a "lâmina tiltada", serão

$$I_{2\omega} = \delta_{l,l'+l''} \left| \bar{u}_{0l}^{2\omega} b_{0l} e^{-i\varphi_{0l}} \right|^2. \quad (7.35)$$

$$J_{2\omega} = \delta_{l,l'+l''} \left| w_{nm}^{2\omega} b_{0l} e^{-i\varphi_{pl}} \right|^2. \quad (7.36)$$

Como só tem um modo, sua fase será igual a fase global e a intensidade do segundo harmônico não dependerá de fase alguma, tendo a forma

$$I_{2\omega} = \delta_{l,l'+l''} \left| \bar{u}_{0l}^{2\omega} \right|^2 J_{0l}, \quad (7.37)$$

$$J_{2\omega} = \delta_{l,l'+l''} \left| w_{nm}^{2\omega} \right|^2 J_{0l}. \quad (7.38)$$

Concluindo... Nesse caso, a propagação fora do cristal não modifica o perfil do segundo harmônico, ou seja, este será o mesmo independentemente de onde se coloque o anteparo para formar a imagem.

ii)  $l'l'' < 0$ , com  $l' = 1$  e  $l'' = -|l_{SLM}|$

Neste caso, teremos ordem radial zero e um. Portanto, as intensidades, sem e com a "lâmina tiltada", serão

$$I_{2\omega} = \delta_{l,1-|l_{SLM}|} \left| \bar{u}_{0l}^{2\omega} b_{0l} e^{-i\varphi_{0l}} + \bar{u}_{1l}^{2\omega} b_{1l} e^{-i\varphi_{1l}} \right|^2. \quad (7.39)$$

$$J_{2\omega} = \delta_{l,1-|l_{SLM}|} \left| w_{0(-l)}^{2\omega} b_{0l} e^{-i\varphi_{0l}} - w_{1(1-l)}^{2\omega} b_{1l} e^{-i\varphi_{1l}} \right|^2. \quad (7.40)$$

Dessa vez há dois modos com fases diferentes, ou seja, fase relativa não nula, o que gera interferência entre os mesmos. Sendo assim, as intensidade do segundo harmônico, sem e com a "lâmina tiltada", serão

$$I_{2\omega} = \delta_{l,1-|l_{SLM}|} \left| \left( \bar{u}_{0l} \sqrt{J_{0l}} + e^{-i(\varphi_{1l}-\varphi_{0l})} e^{i(\psi_{1l}-\psi_{0l})} \bar{u}_{1l} \sqrt{J_{1l}} \right) \right|^2, \quad (7.41)$$

$$J_{2\omega} = \delta_{l,1-|l_{SLM}|} \left| \left( w_{0(-l)} \sqrt{J_{0l}} - e^{-i(\varphi_{1l}-\varphi_{0l})} e^{i(\psi_{1l}-\psi_{0l})} w_{1(1-l)} \sqrt{J_{1l}} \right) \right|^2, \quad (7.42)$$

Substituindo as diferenças de fase e o resultado obtido na Eq. () temos

$$I_{2\omega} = \delta_{l,1-|l_{SLM}|} \left| \left( \sqrt{|l_{SLM}|} \bar{u}_{0l} - e^{-2i \tan^{-1}(Z)} \bar{u}_{1l} \right) \right|^2 \frac{J_{0l}}{|l_{SLM}|}, \quad (7.43)$$

$$J_{2\omega} = \delta_{l,1-|l_{SLM}|} \left| \left( \sqrt{|l_{SLM}|} w_{0(-l)} + e^{-2i \tan^{-1}(Z)} w_{1(1-l)} \right) \right|^2 \frac{J_{0l}}{|l_{SLM}|}, \quad (7.44)$$

onde explicitamos a dependência em  $z$  na fase<sup>4</sup>

Portanto, nesse caso, a propagação fora do cristal modifica o perfil do segundo harmônico. Ele terá uma fase relativa de  $\pi$ , ganha pela interação não linear dentro do cristal, e de  $-2 \tan^{-1}(Z)$  adquirida fora do cristal por causa da fase de Gouy.

Então, graças a essa análise fora do cristal, simular o que acontece na propagação do feixe do segundo harmônico. No caso em que  $l'' \geq 0$  só haverá um modo, sendo sua fase uma fase global que, conseqüentemente, não altera o perfil de intensidade a medida que se propaga. Assim, a comparação entre a simulação e o experimento continua sendo as ilustradas nas Fig. 7.3, Fig. 7.4 e Fig. 7.5.

---

<sup>4</sup>Lembre que  $Z = \frac{z}{z_R}$ .

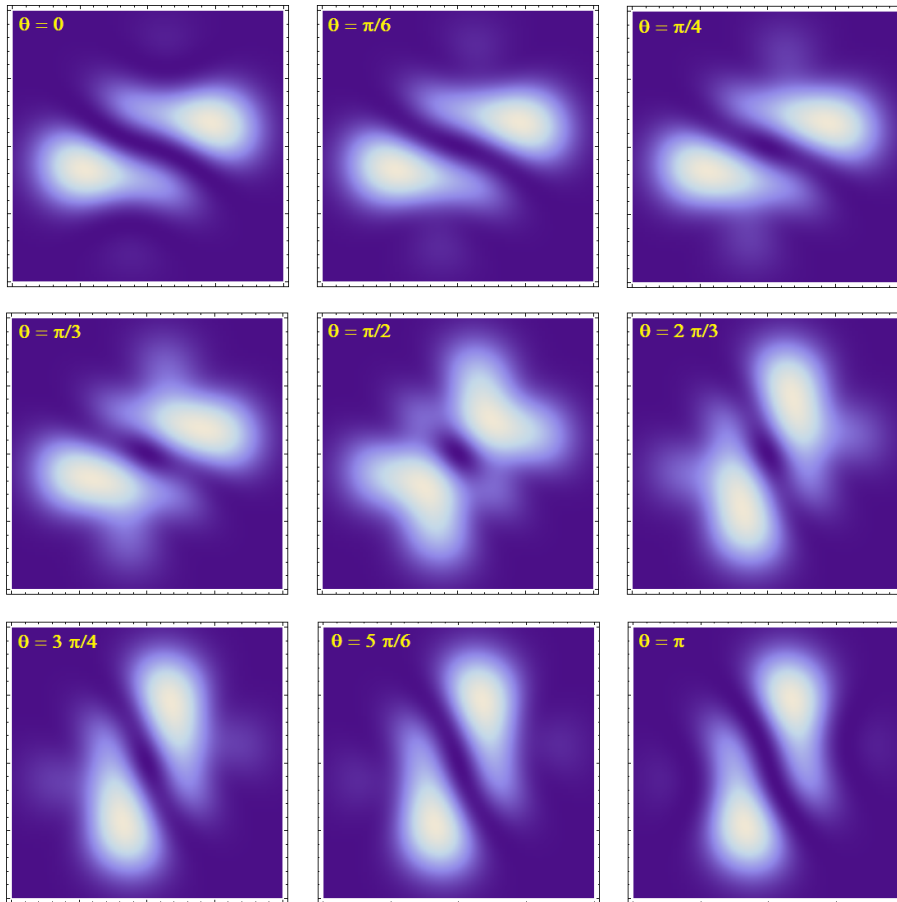


Figura 7.8: Perfil de intensidade ao longo da propagação, com  $Z = \tan(\theta/2)$ , " $l_{Mask} = 1$ " mais " $l_{SLM} = -2$ ", resultando em " $l = -1$ ".

Já no caso em que  $l'' < 0$  a fase de Gouy ganha ao longo da propagação mudará sim o perfil de intensidade do segundo harmônico. Então vamos ilustrar esse perfil a medida que o feixe se propaga nas figuras: Fig. 7.9 para  $l' = 1$ ,  $l'' = -2$ , resultando em  $l = -1$ ; e Fig. 7.8 para  $l' = 1$ ,  $l'' = -1$ , resultando em  $l = 0$ .

Logo, uma melhor comparação entre os perfis experimentais "a-)" e "b-)" da Fig. 7.2 podem ser vistas, respectivamente, nas Fig. 7.10 e Fig. 7.11, isto é, para o detector colocado a uma distância em torno de  $z = \sqrt{3}z_R$ . Esses resultados nos dão mais um forte indício de que as ordens radiais são capazes de explicar o

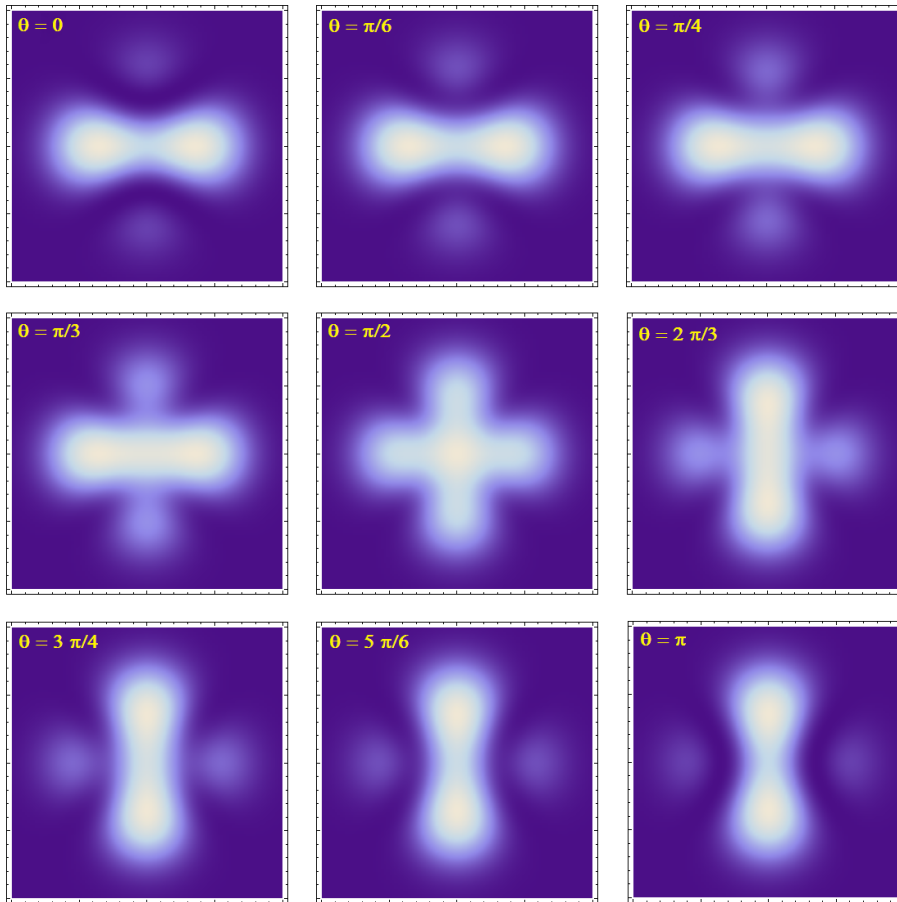


Figura 7.9: Perfil de intensidade ao longo da propagação, com  $Z = \tan(\theta/2)$ , " $l_{Mask} = 1$ " mais " $l_{SLM} = -1$ ", resultando em " $l = 0$ ".

"perfil oval" e que devem ser levadas em conta em outros experimentos.

### 7.3 Mistura de MAO Controlada por Polarização

A ideia do experimento esquematizado na Fig. 7.1 foi montar um dispositivo capaz de realizar soma de MAO arbitrário, tanto somando dois feixes diferentes quanto somando o mesmo feixe (que é a dobra do MAO). Os autores conseguiram realizar várias possibilidades com o aparato. Então a questão da soma de MAO, esmiuçada na seção anterior, retorna aqui, mas agora discutiremos melhor outra

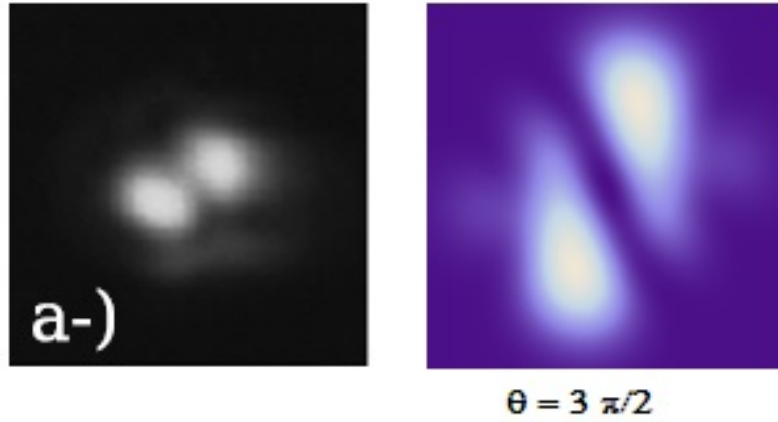


Figura 7.10: Imagem do lado esquerdo retirada de [27]. Comparação entre o resultado experimental (lado esquerdo) e a simulação dos resultados teóricos discutidos ao longo desta tese na saída do cristal (lado direito) do perfil de intensidade do segundo harmônico para a soma " $l_{Mask} = 1$ " mais " $l_{SLM} = -2$ ", resultando em " $l = -1$ ", detectado a uma distância de  $z = \sqrt{3}z_R$ .

possibilidade, que é o problema da Mistura de MAO Controlada por Polarização.

Com o auxílio da "barreira B" e da "HWP-3"(Fig. 7.1), os autores foram capazes de criar diferentes pesos nas combinações do feixe SLM e do feixe Mask, que conseqüentemente dão origem aos perfis de intensidade do segundo harmônico mostrados em Fig. 7.12. Então vamos logo detalhar nosso objeto de trabalho.

Para obter o perfil do item a-) da Fig. 7.12, foi preciso que a "barreira B" bloqueasse totalmente o feixe SLM, operando no que vamos chamar aqui de função Mask, e que a "HWP-3" fosse posicionada em  $\alpha = 45^\circ$ . Assim, o modo resultante que entra no cristal terá a forma:

$$\mathbf{E}_\omega^{Mask} = \sqrt{\frac{I_0}{c\epsilon_0}} (u_{01}^H \hat{e}_H + u_{01}^V \hat{e}_V) e^{i(kz - \omega t)}, \quad (7.45)$$

isto é,  $l_H = l_V = l_{Mask} = 1$  e a soma  $l_H + l_V = 2$  nos dá o dobramento de  $l_{Mask}$  como comprova o experimento<sup>5</sup>. Lembramos, que a todo momento, mantemos

<sup>5</sup>Note que a única ordem radial que surgirá aqui é  $p = 0$ , pois  $l_H l_V = (l_{Mask})^2 \geq 0$  sempre.

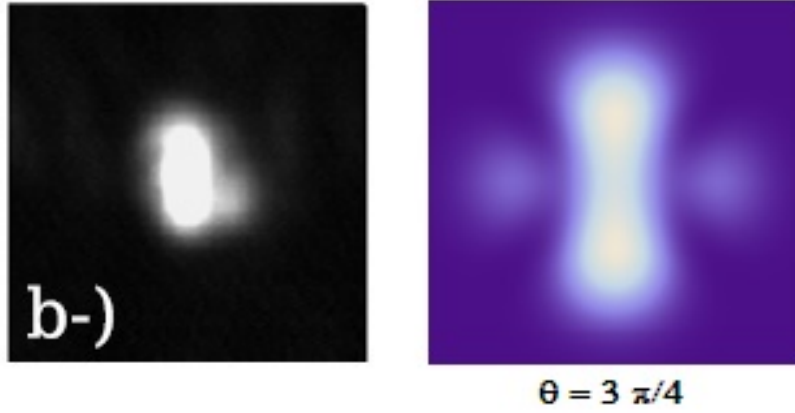


Figura 7.11: Imagem do lado esquerdo retirada de [27]. Comparação entre o resultado experimental (lado esquerdo) e a simulação dos resultados teóricos discutidos ao longo desta tese na saída do cristal (lado direito) do perfil de intensidade do segundo harmônico para a soma " $l_{Mask} = 1$ " mais " $l_{SLM} = -1$ ", resultando em " $l = 0$ ", detectado a uma distância de  $z = \sqrt{3}z_R$ .

fixo  $l_{Mask} = 1$ .

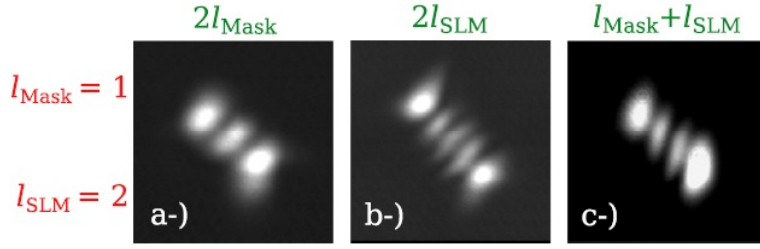
Já para selecionar o perfil do item  $b-$ ) da Fig. 7.12, foi necessário que a "barreira B" operasse no que vamos chamar aqui de função SLM, e que a "HWP-3" fosse posicionada em  $\alpha = -45^\circ$ . Assim, o modo resultante que entra no cristal terá a forma:

$$\mathbf{E}_\omega^{SLM} = \sqrt{\frac{I_0}{c\epsilon_0}} (u_{02}^H \hat{e}_H + u_{02}^V \hat{e}_V) e^{i(kz - \omega t)}, \quad (7.46)$$

isto é,  $l_H = l_V = l_{SLM} = 2$  e a soma  $l_H + l_V = 4$  nos dá o dobramento de  $l_{SLM}$  como comprova o experimento<sup>6</sup>. Nesta seção, manteremos fixo, inicialmente,  $l_{SLM} = 2$ .

E por último, vamos falar da montagem na função Ambos, que possibilitou também a geração dos perfis da Fig. 7.2, discutidos na seção anterior. Neste caso, a "barreira B" vai operar na função Ambos e o modo resultante, imediatamente

<sup>6</sup>Note que a única ordem radial que surgirá aqui é  $p = 0$ , pois  $l_H l_V = (l_{SLM})^2 \geq 0$  sempre.



**Figure 2.** Arbitrary topological charge addition on type II second harmonic generation. (a)  $l_{2\omega} = 2 l_{\text{Mask}} = 2$ , (b)  $l_{2\omega} = 2 l_{\text{SLM}} = 4$ , (c)  $l_{2\omega} = l_{\text{Mask}} + l_{\text{SLM}} = 3$ .

Figura 7.12: Retirada de [27]. Resultados experimentais para Soma de MAO arbitrário obtido utilizando a Mistura de MAO Controlada por Polarização. As figuras são os perfis de intensidade do segundo harmônico.

antes de passar pela "HWP-3", será:

$$\mathbf{E}_{\omega}^{\text{Ambos}} = \sqrt{\frac{I_0}{c\epsilon_0}} (u_{01}^H \hat{e}_H + u_{02}^V \hat{e}_V) e^{i(kz - \omega t)}, \quad (7.47)$$

E, para selecionar o perfil do item c-) da Fig. 7.12, após passar pela "HWP-3", basta escolher  $\alpha = 0^\circ$  que o feixe terá a mesma forma da Eq. (7.47).

Esta foi a Mistura de MAO Controlada por Polarização proposta e realizada experimentalmente por Buono e colaboradores [27]. Agora vamos mostrar nossa contribuição sobre esse assunto.

## 7.4 Mistura de MAO Controlada por Polarização Generalizada

Vamos mostrar nossos avanços nesse tema de uma forma mais geral, que pode ser traduzida experimentalmente variando o MAO produzido no SLM, como feito na Soma de MAO, e substituindo a máscara por mais um SLM (que chamaremos de SLMask, para diferenciar do outro). Então, faremos a seguir uma releitura das

função Mask, função SLM e função Ambos.

Agora, na Função SLMask (anteriormente chamada de função Mask), continuamos com um modo de entrada separável, descrito por:

$$\mathbf{E}_\omega^{SLMask} = \sqrt{\frac{2I_0}{c\epsilon_0}} (u_{0l_{SLMask}}^H \cos(\alpha) \hat{e}_H + u_{0l_{SLMask}}^V \sin(\alpha) \hat{e}_V) e^{i(kz - \omega t)}, \quad (7.48)$$

com a diferença que neste o momento angular pode variar.

Já a Função SLM difere da anterior pelo fato de que agora o SLM vai variar o momento angular. De resto, continuamos com um modo separável, descrito por:

$$\mathbf{E}_\omega^{SLM} = \sqrt{\frac{2I_0}{c\epsilon_0}} (-u_{0l_{SLM}}^H \sin(\alpha) \hat{e}_H + u_{0l_{SLM}}^V \cos(\alpha) \hat{e}_V) e^{i(kz - \omega t)}, \quad (7.49)$$

Até aqui não tivemos uma contribuição tão significativa para esses dois casos. O que trazemos de interessante vem do estudo do problema na Função Ambos.

O que motivou analisar mais detalhadamente a Função Ambos foi a pergunta: "o que acontece se girarmos a "HWP-3", gerando um  $\alpha$  qualquer?" Então vamos estudar a GSH em função da polarização dos campos de entrada.

Dado um ângulo  $\alpha$  qualquer, o modo que entrará no cristal, na Função Ambos, será:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\omega^{Ambos} &= \sqrt{\frac{2I_0}{c\epsilon_0}} \left\{ \left( u_{0l_{SLMask}}^H \hat{e}_H + u_{0l_{SLM}}^V \hat{e}_V \right) \cos(\alpha) \right. \\ &\quad \left. - \left( u_{0l_{SLM}}^H \hat{e}_H - u_{0l_{SLMask}}^V \hat{e}_V \right) \sin(\alpha) \right\} e^{i(kz - \omega t)} \end{aligned} \quad (7.50)$$

Vamos analisar este processo em três partes:

i)  $l_{SLMask} = l_{SLM} = l$



Neste caso, o modo de entrada descrito por Eq. (7.50) se reduz a:

$$\mathbf{E}_\omega^{Ambos} = \sqrt{\frac{4I_0}{c\epsilon_0}} \left( u_{0l}^H \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \hat{e}_H + u_{0l}^V \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) \hat{e}_V \right) e^{i(kz - \omega t)}. \quad (7.51)$$

Ou seja, se tivermos dois SLM's com o mesmo MAO e  $\alpha = 0$ , por exemplo, reproduzimos os casos dos dobramento do MAO (Eq. (7.45) e Eq. (7.46), e itens a-) e b-) da Fig. 7.12) sem precisar usar a "barreira B" e com  $l$  qualquer<sup>7</sup>.

ii)  $l_{SLM_{ask}} \neq l_{SLM}$ , com  $\alpha = n\frac{\pi}{2}$

Neste caso, o modo de entrada será descrito por Eq. (7.50), substituindo  $\alpha = n\frac{\pi}{2}$  esta é reduzida a<sup>8</sup>:

$$\mathbf{E}_\omega^{Ambos} = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\frac{2I_0}{c\epsilon_0}} (u_{0l_{SLM_{ask}}} \hat{e}_H + u_{0l_{SLM}} \hat{e}_V) e^{i(kz - \omega t)}, & \text{se } n \text{ for par} \\ (-1)^n \sqrt{\frac{2I_0}{c\epsilon_0}} (u_{0l_{SLM}} \hat{e}_H - u_{0l_{SLM_{ask}}} \hat{e}_V) e^{i(kz - \omega t)}, & \text{se } n \text{ for impar} \end{cases} \quad (7.52)$$

e assim conseguimos reproduzir a soma de MAO representada no item c-) da Fig. 7.12, e também na Fig. 7.2.

iii)  $l_{SLM_{ask}} \neq l_{SLM}$ , com  $\alpha \neq n\frac{\pi}{2}$

Nesse caso, este modo possui uma dinâmica mais complicada e, por esse motivo, vamos separá-lo em duas partes, descrevendo-as nas duas subseções seguintes. Para simplificar a notação, vamos utilizar  $l_{SLM_{ask}} = l_1$  e  $l_{SLM} = l_2$ .

<sup>7</sup>Repare que, nesse caso, se  $\alpha = (2n + 1)\frac{\pi}{4}$  não teremos GSH.

<sup>8</sup>Para  $n$  é um inteiro qualquer.

### 7.4.1 $l_{SLM_{ask}} \neq l_{SLM}$ , com $l_{SLM_{ask}} l_{SLM} \geq 0$

Nesse caso, não teremos mais um problema a  $2 + 1$  equações, apresentado na Seção 6.1, mas sim um problema a  $4 + 3$  modos, isto é, 4 modos do primeiro harmônico (entrada) e 3 modos do segundo harmônico, que será descrito por

$$\frac{da_{0l_1}^H}{dz} = ig \left( \Lambda_{000}^{(2l_1)l_1l_1} b_{0(2l_1)} a_{0l_1}^{V*} + \Lambda_{000}^{(l_1+l_2)l_1l_2} b_{0(l_1+l_2)} a_{0l_2}^{V*} \right), \quad (7.53)$$

$$\frac{da_{0l_1}^V}{dz} = ig \left( \Lambda_{000}^{(2l_1)l_1l_1} b_{0(2l_1)} a_{0l_1}^{H*} + \Lambda_{000}^{(l_1+l_2)l_1l_2} b_{0(l_1+l_2)} a_{0l_2}^{H*} \right), \quad (7.54)$$

$$\frac{da_{0l_2}^H}{dz} = ig \left( \Lambda_{000}^{(2l_2)l_2l_2} b_{0(2l_2)} a_{0l_2}^{V*} + \Lambda_{000}^{(l_1+l_2)l_1l_2} b_{0(l_1+l_2)} a_{0l_1}^{V*} \right), \quad (7.55)$$

$$\frac{da_{0l_2}^V}{dz} = ig \left( \Lambda_{000}^{(2l_2)l_2l_2} b_{0(2l_2)} a_{0l_2}^{H*} + \Lambda_{000}^{(l_1+l_2)l_1l_2} b_{0(l_1+l_2)} a_{0l_1}^{H*} \right), \quad (7.56)$$

$$\frac{db_{0(2l_1)}}{dz} = i2g \Lambda_{000}^{(2l_1)l_1l_1} a_{0l_1}^H a_{0l_1}^V, \quad (7.57)$$

$$\frac{db_{0(2l_2)}}{dz} = i2g \Lambda_{000}^{(2l_2)l_2l_2} a_{0l_2}^H a_{0l_2}^V, \quad (7.58)$$

$$\frac{db_{0(l_1+l_2)}}{dz} = i2g \Lambda_{000}^{(l_1+l_2)l_1l_2} (a_{0l_1}^H a_{0l_2}^V + a_{0l_2}^H a_{0l_1}^V). \quad (7.59)$$

Traduzindo as condições iniciais para a notação usada nas equações dinâmicas:

$$a_{0l_1}^H(0) = \sqrt{I_0} \cos(\alpha), \quad (7.60)$$

$$a_{0l_1}^V(0) = \sqrt{I_0} \sen(\alpha), \quad (7.61)$$

$$a_{0l_2}^H(0) = -\sqrt{I_0} \sen(\alpha), \quad (7.62)$$

$$a_{0l_2}^V(0) = \sqrt{I_0} \cos(\alpha), \quad (7.63)$$

onde  $\alpha$  é o ângulo de orientação da "HWP-3".

Para esse sistema de equações não encontramos nenhuma solução analítica. Então o que vamos mostrar aqui são soluções numéricas desenvolvidas no soft-

ware MATLAB.

As Fig. 7.13, Fig. 7.14, Fig. 7.15, Fig. 7.16 e Fig. 7.17 mostram as curvas de intensidade em função da posição  $z$  do campo no cristal, para algumas orientações ( $\alpha$ ) da "HWP-3". O valor destacado,  $z = 0.1268u.m.$ , é um valor que podemos considerar como nosso cristal pequeno<sup>9</sup>.

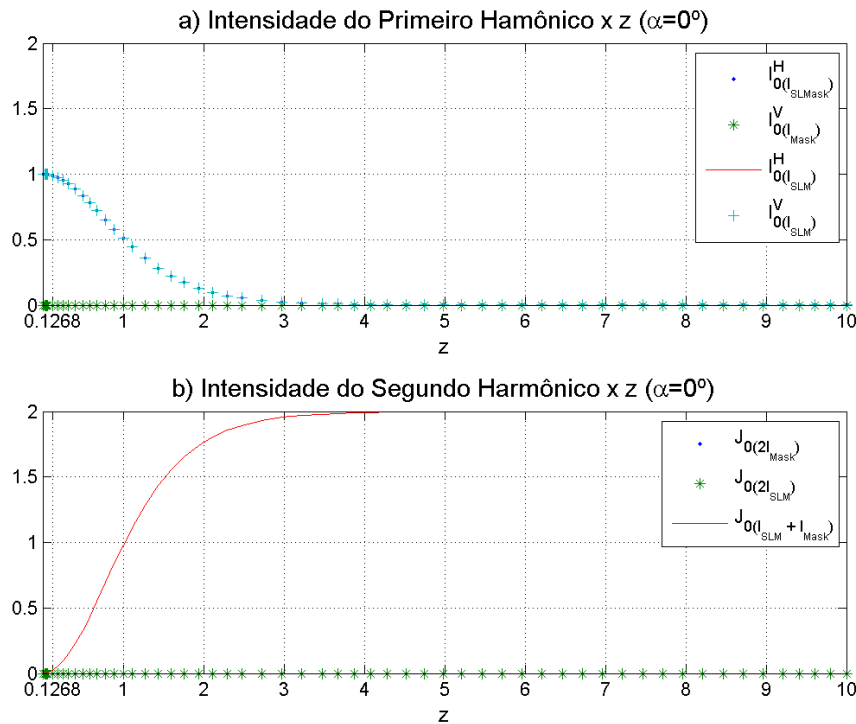


Figura 7.13: Produzida no MATLAB. Intensidades do problema a 7 modos em função do comprimento " $z$ " dentro do cristal para a "HWP-3" orientada a  $\alpha = 0^\circ$  - com  $g_\omega = 1u.m.$ ,  $I_0 = 1u.m.$ ,  $l_{SLM_{ask}} = 1$  e  $l_{SLM} = 2$  - sendo: a) as 4 intensidades do primeiro harmônico, e b) as 3 intensidades do segundo harmônico.

Quando  $\alpha = 0^\circ$  (Fig. 7.13) e  $\alpha = 90^\circ$  (Fig. 7.17), as intensidades  $J_{0(2l_{SLM_{ask}})}$  e  $J_{0(2l_{SLM})}$  são nulas, indicando que os dobramentos dos MAO's  $l_{SLM_{ask}}$  e  $l_{SLM}$  não ocorrem, restando apenas  $J_{0(l_{SLM_{ask}} + l_{SLM})}$ , dando origem ao feixe com MAO  $l_{SLM_{ask}} + l_{SLM}$ . Além disso, eles seguem os mesmos tipos de soluções encon-

<sup>9</sup>Repere que os intensidades estão variando muito pouco nessa região.

tradas no Capítulo 6, que são do tipo:  $\tanh(x)$ , para as intensidades do segundo harmônico, e  $\text{sech}(x)$ , para as intensidades do primeiro harmônico.

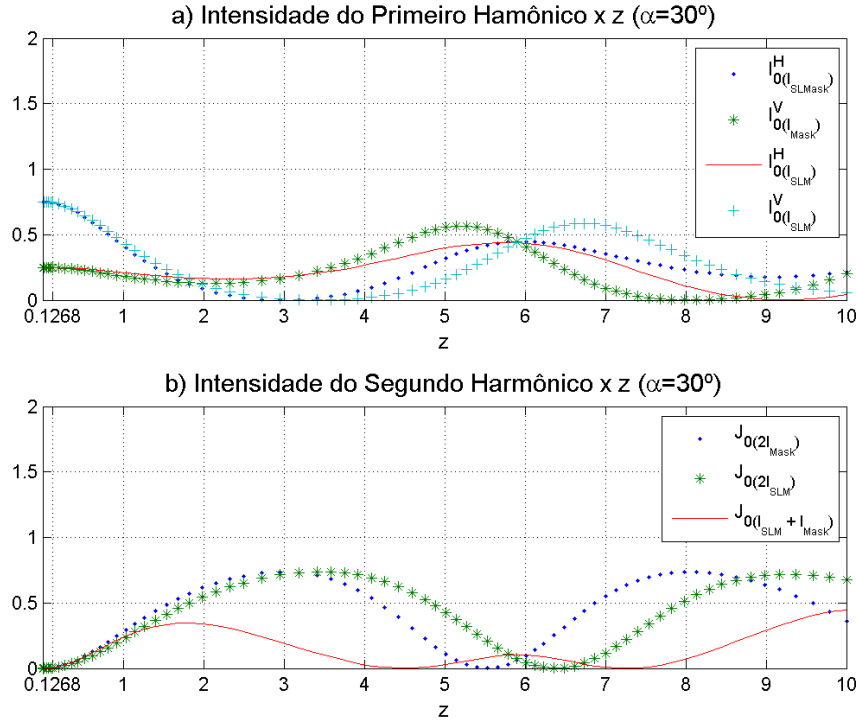


Figura 7.14: Produzida no MATLAB. Intensidades do problema a 7 modos em função do comprimento " $z$ " dentro do cristal para a "HWP-3" orientada a  $\alpha = 30^\circ$  - com  $g_\omega = 1u.m.$ ,  $I_0 = 1u.m.$ ,  $l_{SLM_{Mask}} = 1$  e  $l_{SLM} = 2$  - sendo: a) as 4 intensidades do primeiro harmônico, e b) as 3 intensidades do segundo harmônico.

Já para  $\alpha = 45^\circ$  (Fig. 7.15) acontece o oposto, o feixe contendo a soma  $l_{SLM_{Mask}} + l_{SLM}$  é suprimido, resultado no que nos foi bastante surpreendente, restando o dobramento dos MAO's  $l_{SLM_{Mask}}$  e  $l_{SLM}$ . Além disso, os dobramentos surgem como se fossem dois problemas independentes, um envolvendo o MAO  $l_{SLM_{Mask}}$  e o outro envolvendo o MAO  $l_{SLM}$ . Esses feixes também seguem os mesmos tipos de soluções encontradas no Capítulo 6, que são do tipo:  $\tanh(x)$ , para as intensidades do segundo harmônico, e  $\text{sech}(x)$ , para as intensidades do primeiro harmônico.

Para as orientações  $\alpha = 30^\circ$  (Fig. 7.14) e  $\alpha = 60^\circ$  (Fig. 7.16), tanto os dobramentos dos MAO's com  $l_{SLM_{ask}}$  e  $l_{SLM}$ , quanto a soma  $l_{SLM_{ask}} + l_{SLM}$  são gerados. Aqui os perfis não são nada simples de modelar.

Essas figuras e observações ilustram bem que esse experimento consegue transitar entre os dobramentos e a soma dos MAO's do primeiro harmônico, com esse controle sendo realizado pela orientação da "HWP-3- que por sua vez controla as polarizações dos feixes envolvidos no processo.

Esse controle das polarizações dos feixes do primeiro harmônico, mediado pela "HWP-3", fica ainda mais evidente na Fig. 7.18. Nesta, plotamos as intensidades em função de  $\alpha$ , com cristal de comprimento  $z_l = 0.1268u.m.$  (comprimento destacado nas Fig. 7.13, Fig. 7.14, Fig. 7.15, Fig. 7.16 e Fig. 7.17)<sup>10</sup>. É possível notar que todas as observações anteriores - sobre as intensidades em função das orientações ( $\alpha$ ) - continuam valendo, e verificar outras possibilidades que podem ser interessantes.

#### 7.4.2 $l_{SLM_{ask}} \neq l_{SLM}$ com $l_{SLM_{ask}}l_{SLM} < 0$

Nesse caso, teremos um problema a  $4 + (P + 1)$  modos, que será descrito por:

$$\frac{da_{0l_1}^H}{dz} = \imath g \left( \Lambda_{000}^{(2l_1)l_1l_1} b_{0(2l_1)} a_{0l_1}^{V*} + \sum_{p=0}^P \Lambda_{p00}^{(l_1+l_2)l_1l_2} b_{p(l_1+l_2)} a_{0l_2}^{V*} \right) \quad (7.64)$$

$$\frac{da_{0l_1}^V}{dz} = \imath g \left( \Lambda_{000}^{(2l_1)l_1l_1} b_{0(2l_1)} a_{0l_1}^{H*} + \sum_{p=0}^P \Lambda_{p00}^{(l_1+l_2)l_1l_2} b_{p(l_1+l_2)} a_{0l_2}^{H*} \right) \quad (7.65)$$

$$\frac{da_{0l_2}^H}{dz} = \imath g \left( \Lambda_{000}^{(2l_2)l_2l_2} b_{0(2l_2)} a_{0l_2}^{V*} + \sum_{p=0}^P \Lambda_{p00}^{(l_1+l_2)l_1l_2} b_{p(l_1+l_2)} a_{0l_1}^{V*} \right) \quad (7.66)$$

$$\frac{da_{0l_2}^V}{dz} = \imath g \left( \Lambda_{000}^{(2l_2)l_2l_2} b_{0(2l_2)} a_{0l_2}^{H*} + \sum_{p=0}^P \Lambda_{p00}^{(l_1+l_2)l_1l_2} b_{p(l_1+l_2)} a_{0l_1}^{H*} \right) \quad (7.67)$$

<sup>10</sup>Valor qualquer, escolhido para realizar o cálculo numérico.

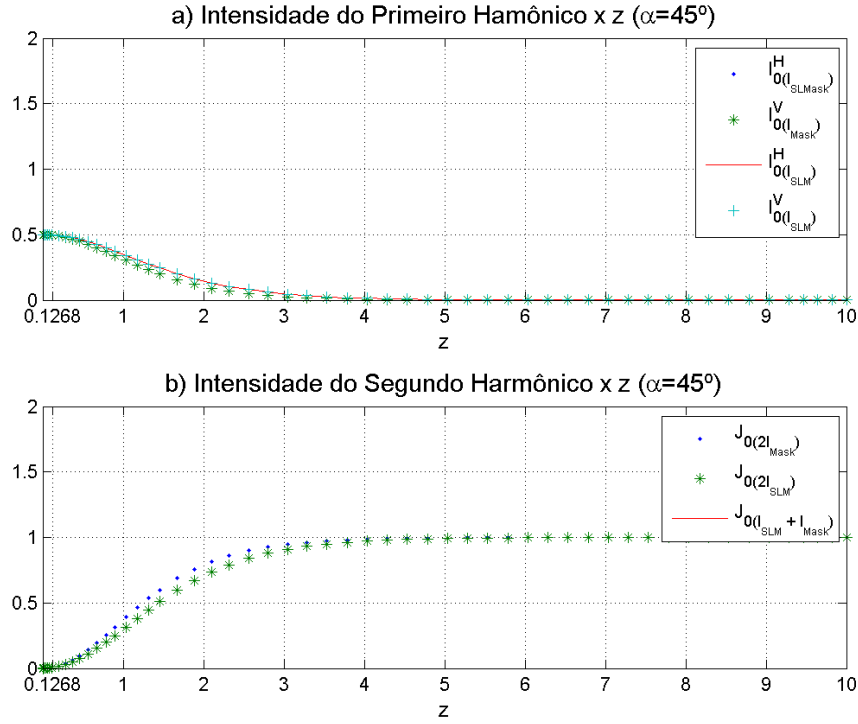


Figura 7.15: Produzida no MATLAB. Intensidades do problema a 7 modos em função do comprimento "z" dentro do cristal para a "HWP-3" orientada a  $\alpha = 45^\circ$  - com  $g_\omega = 1u.m.$ ,  $I_0 = 1u.m.$ ,  $l_{SLMask} = 1$  e  $l_{SLM} = 2$  - sendo: a) as 4 intensidades do primeiro harmônico, e b) as 3 intensidades do segundo harmônico.

$$\frac{db_{0(2l_1)}}{dz} = i2g\Lambda_{000}^{(2l_1)l_1l_1} a_{0l_1}^H a_{0l_1}^V \quad (7.68)$$

$$\frac{db_{0(2l_2)}}{dz} = i2g\Lambda_{000}^{(2l_2)l_2l_2} a_{0l_2}^H a_{0l_2}^V \quad (7.69)$$

$$\frac{db_{0(l_1+l_2)}}{dz} = i2g\Lambda_{000}^{(l_1+l_2)l_1l_2} (a_{0l_1}^H a_{0l_2}^V + a_{0l_2}^H a_{0l_1}^V) \quad (7.70)$$

$$\frac{db_{1(l_1+l_2)}}{dz} = i2g\Lambda_{100}^{(l_1+l_2)l_1l_2} (a_{0l_1}^H a_{0l_2}^V + a_{0l_2}^H a_{0l_1}^V) \quad (7.71)$$

$\vdots$

$$\frac{db_{p(l_1+l_2)}}{dz} = i2g\Lambda_{p00}^{(l_1+l_2)l_1l_2} (a_{0l_1}^H a_{0l_2}^V + a_{0l_2}^H a_{0l_1}^V) \quad (7.72)$$

$\vdots$

$$\frac{db_{P(l_1+l_2)}}{dz} = i2g\Lambda_{P00}^{(l_1+l_2)l_1l_2} (a_{0l_1}^H a_{0l_2}^V + a_{0l_2}^H a_{0l_1}^V) \quad (7.73)$$

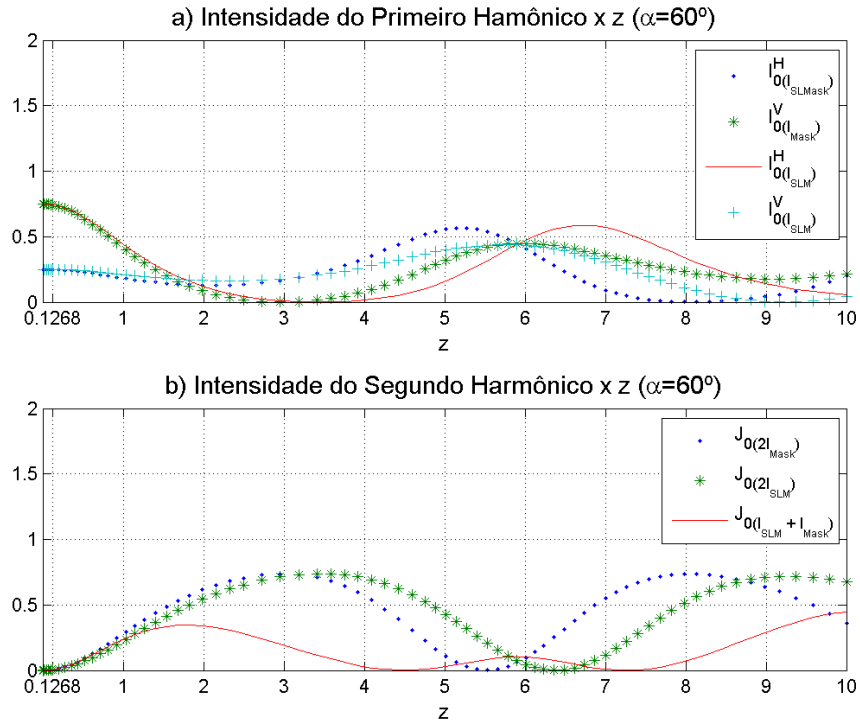


Figura 7.16: Produzida no MATLAB. Intensidades do problema a 7 modos em função do comprimento "z" dentro do cristal para a "HWP-3" orientada a  $\alpha = 60^\circ$  - com  $g_\omega = 1u.m.$ ,  $I_0 = 1u.m.$ ,  $l_{SLMask} = 1$  e  $l_{SLM} = 2$  - sendo: a) as 4 intensidades do primeiro harmônico, e b) as 3 intensidades do segundo harmônico.

Usando aqui a mesma ideia aplicada na Seção 6.2<sup>11</sup>, a Eq. (7.73) nos leva a:

$$b_{p(l_1+l_2)} = \beta_p^{l_1 l_2} b_{0(l_1+l_2)}, \quad (7.74)$$

<sup>11</sup>As quantidades  $\beta_p^{l_1 l_2}$  e  $\gamma_{l_1 l_2}$  são as mesmas definidas no Apêndice C.

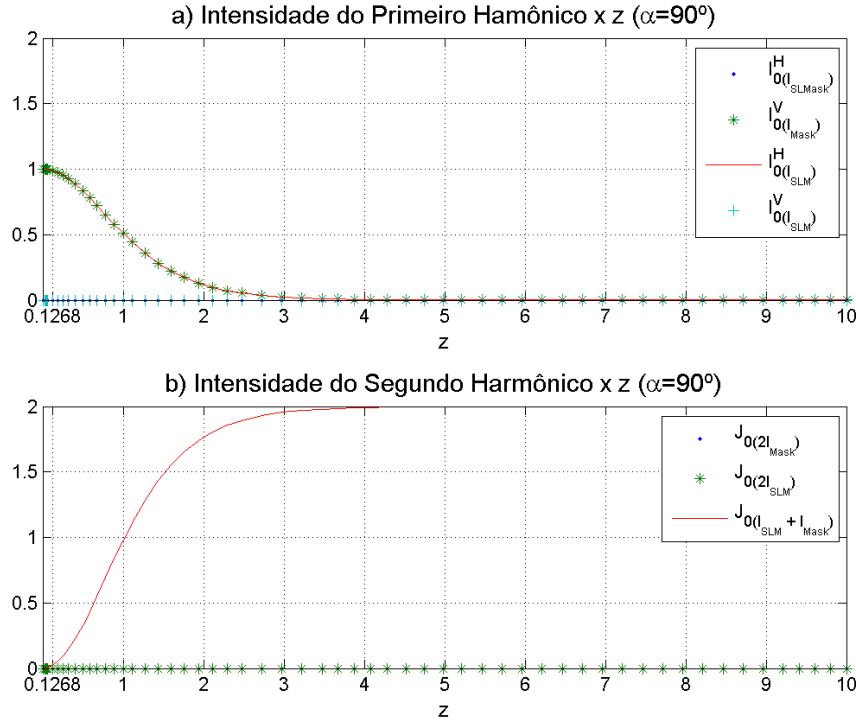


Figura 7.17: Produzida no MATLAB. Intensidades do problema a 7 modos em função do comprimento "z" dentro do cristal para a "HWP-3" orientada a  $\alpha = 90^\circ$  - com  $g_\omega = 1 u.m.$ ,  $I_0 = 1 u.m.$ ,  $l_{SLM_{ask}} = 1$  e  $l_{SLM} = 2$  - sendo: a) as 4 intensidades do primeiro harmônico, e b) possui as 3 intensidades do segundo harmônico.

e substituindo no sistema acima chegamos a:

$$\frac{da_{0l_1}^H}{dz} = ig \left( \Lambda_{000}^{(2l_1)l_1l_1} b_{0(2l_1)} a_{0l_1}^{V*} + \gamma_{l_1l_2} \Lambda_{000}^{(l_1+l_2)l_1l_2} b_{0(l_1+l_2)} a_{0l_2}^{V*} \right) \quad (7.75)$$

$$\frac{da_{0l_1}^V}{dz} = ig \left( \Lambda_{000}^{(2l_1)l_1l_1} b_{0(2l_1)} a_{0l_1}^{H*} + \gamma_{l_1l_2} \Lambda_{000}^{(l_1+l_2)l_1l_2} b_{0(l_1+l_2)} a_{0l_2}^{H*} \right) \quad (7.76)$$

$$\frac{da_{0l_2}^H}{dz} = ig \left( \Lambda_{000}^{(2l_2)l_2l_2} b_{0(2l_2)} a_{0l_2}^{V*} + \gamma_{l_1l_2} \Lambda_{000}^{(l_1+l_2)l_1l_2} b_{0(l_1+l_2)} a_{0l_1}^{V*} \right) \quad (7.77)$$

$$\frac{da_{0l_2}^V}{dz} = ig \left( \Lambda_{000}^{(2l_2)l_2l_2} b_{0(2l_2)} a_{0l_2}^{H*} + \gamma_{l_1l_2} \Lambda_{000}^{(l_1+l_2)l_1l_2} b_{0(l_1+l_2)} a_{0l_1}^{H*} \right) \quad (7.78)$$



$$\frac{db_{0(2l_1)}}{dz} = i2g\Lambda_{000}^{(2l_1)l_1l_1} a_{0l_1}^H a_{0l_1}^V \quad (7.79)$$

$$\frac{db_{0(2l_2)}}{dz} = i2g\Lambda_{000}^{(2l_2)l_2l_2} a_{0l_2}^H a_{0l_2}^V \quad (7.80)$$

$$\frac{db_{0(l_1+l_2)}}{dz} = i2g\Lambda_{000}^{(l_1+l_2)l_1l_2} (a_{0l_1}^H a_{0l_2}^V + a_{0l_2}^H a_{0l_1}^V) . \quad (7.81)$$

Ou seja, reduzimos o problema de  $4 + (P + 3)$  modos para um problema de  $4 + 3$  modos, graças a Eq. (7.74).

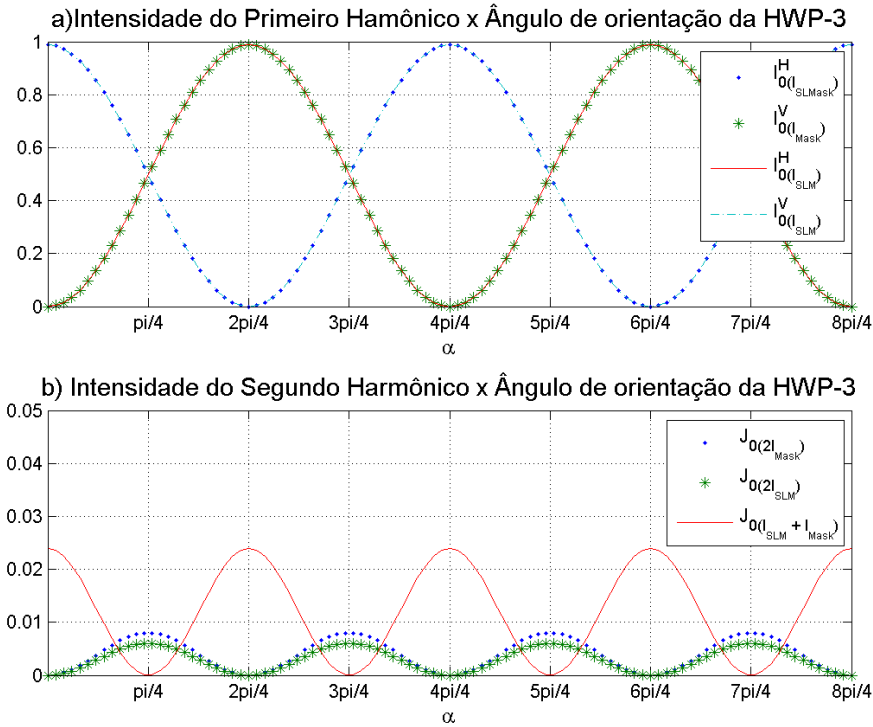


Figura 7.18: Produzida no MATLAB. Mistura de MAO Controlada por Polarização - intensidades do problema a 7 modos em função do ângulo de orientação " $\alpha$ " da "HWP-3", para um cristal de comprimento  $z_l = 0.1268u.m.$  - com  $g_\omega = 1u.m.$ ,  $I_0 = 1u.m.$ ,  $l_{SLMask} = 1$  e  $l_{SLM} = 2$  - sendo: a) as 4 intensidades do primeiro harmônico, e b) as 3 intensidades do segundo harmônico.

A Fig. 7.19 mostra que o controle de polarização, através da orientação da "HWP-3", também se aplica nesse caso.

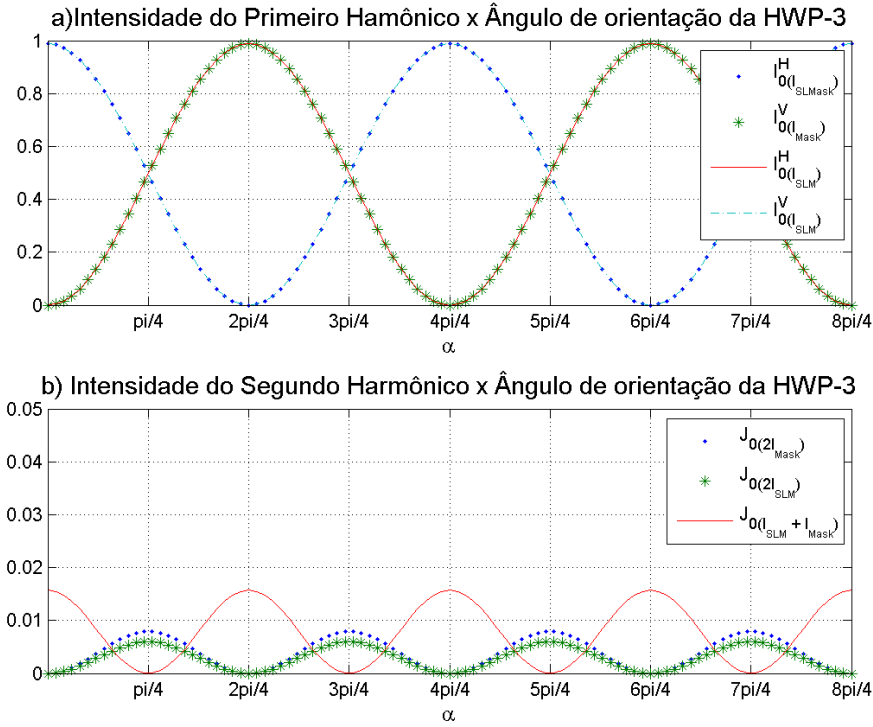


Figura 7.19: Produzida no MATLAB. Mistura de MAO Controlada por Polarização - intensidades do problema a 8 modos em função do ângulo de orientação " $\alpha$ " da "HWP-3", para um cristal de comprimento  $z_l = 0.1261u.m.$  - com  $g_\omega = 1u.m.$ ,  $I_0 = 1u.m.$ ,  $l_{SLMask} = 1$  e  $l_{SLM} = -2$  - sendo: a) as 4 intensidades do primeiro harmônico, e b) as 3 intensidades do segundo harmônico.

Assim, concluímos esse capítulo, salientando que nosso enfoque analítico foi capaz de explicar os detalhes que contrariam o senso comum nos resultados publicados por Buono e colaboradores [27], e também conseguimos propor uma generalização para um de seus experimentos.

A seguir vamos propor uma explicação para as ordens radiais dos feixes do primeiro harmônico permanecerem inalteradas durante o processo no cristal. Ou seja, vamos descrever uma possível forma de justificar que  $a_{0l_H}^H(0)$  e  $a_{0l_V}^V(0)$  evoluem ao longo do meio não-linear para  $a_{0l_H}^H(z)$  e  $a_{0l_V}^V(z)$ , isto é, mantendo  $p' = 0$  e  $p'' = 0$ .

## Capítulo 8

# Por que as ordens radiais dos feixes do primeiro harmônico permanecem inalteradas ao longo do cristal?

Após várias tentativas, reflexões e ideias para resolver as equações dinâmicas (muitas delas frustradas, diga-se de passagem) pensamos em uma ferramenta que é muito útil para resolver problemas: Expansão em Série de Taylor. Assim, surge mais uma opção para trabalhar essas equações e, quem sabe, extrair informações que ainda não tínhamos.

Assumimos ao longo desta tese que as ordens radiais  $p'$  e  $p''$  dos modos do primeiro harmônico (entrada) permanecem inalteradas a medida que os feixes adentram o cristal. Mas isso deveria ser necessariamente verdade? Agora com essa ferramenta em mãos, conseguimos responder essa pergunta com mais segurança, e a resposta é: NÃO.

Mas, então, por que os cálculos feitos com os  $p'$  e  $p''$  dos modos do primeiro harmônico constantes são considerados válidos? Por que são comprovados experimentalmente? Também graças a Expansão em Série de Taylor temos uma

resposta pra essa pergunta, que é: pelo fato da não linearidade ser considerada pequena, mesmo após o uso de técnicas que aumentem a sua magnitude, dos experimentos serem realizados com cristais finos ao longo da direção de propagação e pelos feixes de entrada não serem muito intensos.

Dito isso, mostraremos, a seguir, os cálculos que nos guiaram a essas conclusões.

## 8.1 Expansão em série de Taylor

A expansão em série de Taylor dos campos é dada por:

$$a_{p'l'}^H(z) = a_{p'l'}^H(0) + \frac{da_{p'l'}^H}{dz}(0)z + \frac{d^2a_{p'l'}^H}{dz^2}(0)\frac{z^2}{2!} + \dots \quad (8.1)$$

$$a_{p''l''}^V(z) = a_{p''l''}^V(0) + \frac{da_{p''l''}^V}{dz}(0)z + \frac{d^2a_{p''l''}^V}{dz^2}(0)\frac{z^2}{2!} + \dots \quad (8.2)$$

$$b_{pl}(z) = b_{pl}(0) + \frac{db_{pl}}{dz}(0)z + \frac{d^2b_{pl}}{dz^2}(0)\frac{z^2}{2!} + \dots \quad (8.3)$$

Os termos de derivada primeira são determinados pelas equações dinâmicas (Eq. (2.80), Eq. (2.81) e Eq. (2.82)). Já os termos de derivada segunda serão obtidos derivando

as equações dinâmicas e terão a forma:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 a_{p'l'}^H}{dz^2} &= -g^2 \sum_{pl} \sum_{p''l''} \Lambda_{pp'p''}^{ll'l''} \sum_{p_1'l_1'} \\ &\cdot \left( 2 \sum_{p_1'l_1'} \Lambda_{pp_1'p_1''}^{ll_1'l_1''} a_{p_1'l_1'}^V a_{p_1'l_1''}^{V*} - \sum_{p_1'l_1} \Lambda_{p_1p_1'p_1''}^{l_1l_1'l_1''} b_{p_1'l_1}^* b_{pl} \right) a_{p_1'l_1'}^H, \quad (8.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 a_{p''l''}^V}{dz^2} &= -g^2 \sum_{pl} \sum_{p'l'} \Lambda_{pp'p''}^{ll'l''} \sum_{p_1'l_1'} \\ &\cdot \left( 2 \sum_{p_1'l_1'} \Lambda_{pp_1'p_1''}^{ll_1'l_1''} a_{p_1'l_1'}^H a_{p_1'l_1''}^{H*} - \sum_{p_1'l_1} \Lambda_{p_1p_1'p_1''}^{l_1l_1'l_1''} b_{p_1'l_1}^* b_{pl} \right) a_{p_1'l_1'}^V, \quad (8.5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 b_{pl}}{dz^2} &= -2g^2 \sum_{p'l'} \sum_{p''l''} \Lambda_{pp'p''}^{ll'l''} \sum_{p_1'l_1} \\ &\cdot \left( \sum_{p_1'l_1'} \Lambda_{p_1p_1'p_1''}^{l_1l_1'l_1''} a_{p_1'l_1'}^V a_{p_1'l_1''}^{V*} - \sum_{p_1'l_1} \Lambda_{p_1p_1'p_1''}^{l_1l_1'l_1''} a_{p_1'l_1}^H a_{p'l'}^H \right) b_{p_1'l_1}. \quad (8.6) \end{aligned}$$

Para ilustrar o nosso ponto aqui, vamos discutir o caso mais simples possível, que vem das condições iniciais:

$$a_{p'l'}^H(0) = \delta_{p'0} \delta_{l'l_H} a_{0l_H}^H(0), \quad (8.7)$$

$$a_{p''l''}^V(0) = \delta_{p''0} \delta_{l''l_V} a_{0l_V}^V(0), \quad (8.8)$$

$$b_{pl}(0) = 0, \quad (8.9)$$

$$l_H l_V \geq 0. \quad (8.10)$$

Assim, teremos as derivadas primeiras em  $z = 0$

$$\frac{da_{p'l'}^H}{dz}(0) = 0, \quad (8.11)$$

$$\frac{da_{p''l''}^V}{dz}(0) = 0, \quad (8.12)$$

$$\frac{db_{pl}}{dz}(0) = g\Lambda_{000}^{l_H l_V} a_{0l_H}^H(0) a_{0l_V}^V(0), \quad (8.13)$$

e as derivadas segundas, também em  $z = 0$ ,

$$\frac{d^2 a_{p'l'}^H}{dz^2}(0) = -2g^2 \delta_{l'l_H} \Lambda_{0p'0}^{l_H l_V} \Lambda_{000}^{l_H l_V} I_{0l_V}^V(0) a_{0l_H}^H(0), \quad (8.14)$$

$$\frac{d^2 a_{p''l''}^V}{dz^2}(0) = -2g^2 \delta_{l''l_V} \Lambda_{00p''}^{l_H l_V} \Lambda_{000}^{l_H l_V} I_{0l_H}^H(0) a_{0l_V}^V(0), \quad (8.15)$$

$$\frac{d^2 b_{pl}}{dz^2}(0) = 0. \quad (8.16)$$

Vemos que nas derivadas segundas surgem os recobrimentos  $\Lambda_{0p'0}^{l_H l_V}$  e  $\Lambda_{00p''}^{l_H l_V}$ .

Os cálculos destes<sup>1</sup> resultam:

$$\begin{aligned} \Lambda_{0p'0}^{l_H l_V} &= \delta_{l, l_H + l_V} \sqrt{\frac{p'!(p' + |l_H|)!}{|l_H + l_V|! |l_V|!}} \sum_{n=0}^{p'} (-1)^n \\ &\times \frac{(|l_H + l_V| + P + n)!}{(p' - n)! (|l_H| + n)! n!} \left(\frac{w_{2\omega}}{w_H}\right)^{2(|l_H| + n)} \left(\frac{w_{2\omega}}{w_V}\right)^{2|l_V|}, \end{aligned} \quad (8.17)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_{00p''}^{l_H l_V} &= \delta_{l, l_H + l_V} \sqrt{\frac{p''!(p'' + |l_V|)!}{|l_H + l_V|! |l_H|!}} \sum_{n=0}^{p''} (-1)^n \\ &\times \frac{(|l_H + l_V| + P + n)!}{(p'' - n)! (|l_V| + n)! n!} \left(\frac{w_{2\omega}}{w_H}\right)^{2|l_H|} \left(\frac{w_{2\omega}}{w_V}\right)^{2(|l_V| + n)}. \end{aligned} \quad (8.18)$$

A Eq. (8.17) mostra que todos os índices  $p'$  surgem no problema quando con-

<sup>1</sup>Estes cálculos podem ser feitos substituindo  $\Lambda_{0p'0}^{l_H l_V}$  e  $\Lambda_{00p''}^{l_H l_V}$  em Eq. (5.8), considerando  $Z = 0$ , e após algumas manipulações chegamos nas equações referidas.

sideramos o termo  $\frac{d^2 a_{p'l'}^H}{dz^2}(0)$ . E a Eq. (8.18) mostra que todos os índices  $p''$  surgem no problema quando consideramos o termo  $\frac{d^2 a_{p''l''}^V}{dz^2}(0)$ .

Até agora, vimos que o problema só complica a cada passo que damos. Se considerarmos os termos de segunda ordem na expansão em série de Taylor, já entram todos os valores de  $p'$  e  $p''$  no problema e, a partir daí, tende a ficar mais difícil de calcular. E assim, com o auxílio das Eq. (8.17) e Eq. (8.18) e desses argumentos, conseguimos justificar a resposta da primeira pergunta, que basicamente afirmava: se tivermos  $p' = 0$  e  $p'' = 0$  em  $z = 0$ , ao longo do cristal, deveríamos ter todos os valores de  $p'$  e  $p''$  ao invés de apenas  $p' = 0$  e  $p'' = 0$ .

O surgimento de ordens radiais não nulas nos feixes do primeiro harmônico (feixes de entrada), que é algo bastante contra intuitivo, pode ser entendido fisicamente como uma conversão paramétrica descendente vinda da interação do feixe do segundo harmônico, gerado dentro do cristal, com os feixes de entrada.

Para confirmar a resposta da segunda pergunta, vamos substituir os termos da expansão dos campos até segunda ordem:

$$\begin{aligned} a_{p'l'}^H(z) &= \delta_{p'0} \delta_{l'l_H} a_{0l_H}^H(0) \\ &- \left( \delta_{l'l_H} \Lambda_{0p'0}^{ll_Hl_V} \Lambda_{000}^{ll_Hl_V} I_{0l_V}^V(0) a_{0l_H}^H(0) \right) (gz)^2, \end{aligned} \quad (8.19)$$

$$\begin{aligned} a_{p''l''}^V(z) &= \delta_{p''0} \delta_{l''l_V} a_{0l_V}^V(0) \\ &- \left( \delta_{l''l_V} \Lambda_{00p''}^{ll_Hl_V} \Lambda_{000}^{ll_Hl_V} I_{0l_H}^H(0) a_{0l_V}^V(0) \right) (gz)^2, \end{aligned} \quad (8.20)$$

$$b_{pl}(z) = \left( \delta_{p0} \delta_{l,l_H+l_V} \Lambda_{000}^{ll_Hl_V} a_{0l_H}^H(0) a_{0l_V}^V(0) \right) (gz). \quad (8.21)$$

Analisando essas equações, vemos que os termos problemáticos, que vão envolver infinitas possibilidades de  $p'$  e  $p''$ , são os que escalam com  $(gz)^2$ . Então o que precisamos fazer aqui é ajustar esses termos para que se tornem desprezíveis comparados com os outros. Voltando a estes:

- Todas as constantes de recobrimentos, da forma que definimos, são norma-

lizadas, isto é,  $-1 \leq \Lambda_{pp'p''}^{l'l''} \leq 1$ , o que é algo que contribui para reduzir os termos de segunda ordem;

- Temos um controle das intensidades iniciais. Mas não podemos aumentá-las muito, pois isto contribuiria para elevar a contribuição dos termos de segunda ordem. Também não podemos diminuí-las muito, porque assim teríamos que, necessariamente, considerar efeitos quânticos, por exemplo, (o que não fizemos aqui);
- A constante  $g$  escala com  $\chi^{(2)2}$ , que é considerada muito pequena. Mesmo com seus outros componentes, continuamos com  $g \ll 1$ , o que leva em  $g^2 \cong 0$ ;
- Para realizar os experimentos e, conseqüentemente, neste trabalho também, foram usados cristais bem finos na direção de propagação, de modo que  $z \ll 1$  e, conseqüentemente,  $z^2 \cong 0$ , assim desprezando os termos de segunda ordem.

Então, juntando as informações acima, concluímos que os termos que escalam com  $(gz)^2$  e com intensidades iniciais não muito elevadas podem ser negligenciados, assim justificando o fato das nossas considerações reproduzirem os resultados teóricos e experimentais, desprezando modos com  $p' > 0$  e  $p'' > 0$ . Com isso, legitimamos também a resposta da segunda pergunta.

Para fechar esse capítulo, apresentamos a solução dos campos obtidas por expansão em série de Taylor para as condições iniciais dadas pelas Eq. (8.7),

---

<sup>2</sup>Não-linearidade de segunda ordem. Este é considerado muito pequeno, ao passo que esses efeitos são bem difíceis de se observar.



Eq. (8.8), Eq. (8.9) e Eq. (8.10)

$$a_{p'l'}^H(z) = \delta_{p'0} \delta_{l'l_H} a_{0l_H}^H(0), \quad (8.22)$$

$$a_{p''l''}^V(z) = \delta_{p''0} \delta_{l''l_V} a_{0l_V}^V(0), \quad (8.23)$$

$$b_{pl}(z) = \delta_{p0} \delta_{l,l_H+l_V} \left( \Lambda_{000}^{l_H l_V} a_{0l_H}^H(0) a_{0l_V}^V(0) \right) (gz). \quad (8.24)$$

Nelas conseguimos extrair mais informações, passando para intensidade:

$$I_{p'l'}^H(z) = \delta_{p'0} \delta_{l'l_H} I_{0l_H}^H(0), \quad (8.25)$$

$$I_{p''l''}^V(z) = \delta_{p''0} \delta_{l''l_V} I_{0l_V}^V(0), \quad (8.26)$$

$$J_{pl}(z) = \delta_{p0} \delta_{l,l_H+l_V} \left( \Lambda_{000}^{l_H l_V} \right)^2 I_{0l_H}^H(0) I_{0l_V}^V(0) (gz)^2, \quad (8.27)$$

e fase:

$$\phi_{p'l'}^H(z) = \delta_{p'0} \delta_{l'l_H} \phi_{0l_H}^H(0), \quad (8.28)$$

$$\phi_{p''l''}^V(z) = \delta_{p''0} \delta_{l''l_V} \phi_{0l_V}^V(0), \quad (8.29)$$

$$\psi_{pl}(z) = \delta_{p0} \delta_{l,l_H+l_V} \left( \phi_{0l_H}^H(0) + \phi_{0l_V}^V(0) \right). \quad (8.30)$$

Nas Eq. (8.25) e Eq. (8.26), observamos que as intensidades dos primeiros harmônicos permanecerão constantes ao longo do cristal. E pela Eq. (8.27), vemos que a intensidade gerada no segundo harmônico é muito pequena.

Já nas Eq. (8.28) e Eq. (8.29), vemos que as fases dos primeiros harmônicos se manterão inalteradas. E na Eq. (8.30) obtemos que a relação de Travamento de Fase<sup>3</sup> permanece constante ao longo do cristal, para quaisquer intensidades de entrada (desde que sejam pequenas) dos primeiros harmônicos.

Assim concluímos que, na GSH com soma de MAO, as ordens radiais dos

---

<sup>3</sup>Obtida anteriormente na Eq. (6.45), sendo que nesta equação o Travamento de Fase só se mantém para  $I_{0l_H}^H(0) = I_{0l_V}^V(0)$ .

feixes do primeiro harmônico permanecem inalteradas sempre que os valores da não-linearidade do cristal, do comprimento do cristal e das intensidades de entrada não sejam muito elevadas.

Por fim, vamos nos encaminhar para as conclusões e perspectivas desta tese.

# Capítulo 9

## Conclusões e perspectivas

Vamos aqui retomar nossos resultados já apresentados para, assim, concluir este trabalho. Em seguida, apresentaremos algumas perspectivas destes estudos.

A primeira contribuição original desta tese aparece no Capítulo 4. Em [14], foi mostrado que a desigualdade tipo Bell serviria como um critério para avaliar a separabilidade do modo clássico. O que fizemos foi dar sequência a este trabalho, mostrando que a coerência do estado quântico é um fator determinante para o emaranhamento deste - da mesma forma que a coerência da superposição de modos é um fator determinante para a inseparabilidade de modos e para o emaranhamento. Também apontamos o importante papel da flutuação do número de fótons em testemunhar o emaranhamento.

No capítulo seguinte, apresentamos os cálculos que fizemos das constantes de recobrimento; um dos resultados gerais desta tese, capaz de ser aplicado em vários experimentos. Esses cálculos foram feitos pensando em solucionar o problema da soma de MAO na GSH com cristal tipo-II, para ambos os feixes de entrada com ordem radial nula, momento angular qualquer e baixa intensidade (de acordo com o que foi discutido no Capítulo 8). Nessas condições, obtivemos um resultado geral para o valor das constantes de recobrimento, onde surgiram regras de seleção

para as ordens radiais, além das regras de seleção para os momentos angulares que já eram conhecidas. Esses resultados foram: se os feixes de entrada tiverem Momento Angular Orbital de mesmo sinal ou pelo menos um deles for nulo (ou seja,  $l_1 l_2 \geq 0$ ), será gerado apenas um feixe com ordem radial nula ( $p = 0$ ); e se os feixes de entrada tiverem MAO de sinais contrários (isto é,  $l_1 l_2 < 0$ ), surgirão  $P + 1$  feixes, sendo  $P$  o maior valor da ordem radial ( $p$ ) nesse processo e igual ao módulo do menor dos momentos angulares de entrada ( $P = \min \{|l_1|, |l_2|\}$ ).

No Capítulo 6, conseguimos generalizar a solução para as equações dinâmicas obtida por Bloembergen e colaboradores [28], que é o outro grande resultado desta tese, também podendo ser utilizado em várias aplicações. Assim, mostramos uma solução para o caso em que é gerado apenas um feixe com ordem radial nula e MAO qualquer<sup>1</sup>; e para o caso em que são gerados  $P + 1$  feixes (cada um com uma ordem radial diferente, começando com  $p = 0$  até  $p = P$ ) e também com MAO qualquer, que pode ser reduzido ao caso anterior.

Já no Capítulo 7, desenvolvemos uma aplicação dos resultados anteriores para propor uma explicação alternativa para o resultado inesperado, que foi o "perfil oval" da "figure 3 b-)" de [27] (que também pode ser visto na Fig. 7.2 e na imagem da esquerda da Fig. 7.7). Nossa proposta é que a constante de recobrimento para a soma  $l_{Mask} = 1$  e  $l_{SLM} = -1$  diz que serão gerados dois feixes, um com  $p = 0$  e outro com  $p = 1$ , com pesos iguais<sup>2</sup>. Então o feixe com  $p = 1$ , anteriormente ignorado, tem papel extremamente importante nesse processo. A simulação desse resultado teórico pode ser vista na Fig. 7.9 (que mostra o perfil ao longo da propagação), assim como a comparação teórico-experimental na Fig. 7.11. Com essa mesma hipótese, vimos que a soma  $l_{Mask} = 1$  e  $l_{SLM} = -2$  gera também um feixe com  $p = 0$  e outro com  $p = 1$ , também ignorado anteriormente, produzindo um

<sup>1</sup>A diferença do nosso resultado para o que foi obtido há anos atrás por [28] é que os feixes que eles usaram não tinham estrutura espacial, e o nossos possuem estrutura espacial com momento angular qualquer.

<sup>2</sup>Lembramos que o que chamamos de peso aqui é o módulo das constantes de recobrimento.

perfil um pouco diferente como mostra a Fig. 7.8 (perfil ao longo da propagação), e a comparação teórico-experimental é dada por Fig. 7.10.

Ainda no Capítulo 7 mostramos outra aplicação de nossos resultados mais gerais, consistindo na generalização do problema também proposto em [27], que foi o Mistura de MAO Controlada por Polarização. Aproveitando o mesmo esquema experimental, trocamos a máscara por outro SLM, que chamamos de SLMask, e mostramos que, mudando a orientação da "HWP-3" e, conseqüentemente, alterando a polarização dos feixes do primeiro harmônico, conseguíamos alternar as medidas das intensidades do segundo harmônico, alternando entre: apenas dobramento dos MAO's; apenas a soma dos MAO's; e ambos os dobramentos e a soma dos MAO's.

E por último, no Capítulo 8, justificamos as aproximações utilizadas anteriormente fazendo a expansão em série de Taylor dos campos envolvidos na GSH. Mostramos que os feixes do primeiro harmônico com ordens radiais não nulas só surgem no problema nos termos de segunda ordem da série de Taylor. Assim, ao considerarmos cristais pequenos ( $z_l \ll z_R$ ), não-linearidade de segunda ordem pequena (o que leva em  $g \ll 1$ ) e intensidades pequenas (de modo que  $\sqrt{I}gl \ll 1$ , que representa o termo de segunda ordem na expansão em série de Taylor), os termos de segunda ordem e de ordens superiores da expansão em série de Taylor serão muito pequenos. Conseqüentemente, serão desprezados, validando nossas considerações e tornando nossos resultados das constantes de recobrimento gerais para os casos de interesse. Além disso, mostramos que nessas condições a relação de travamento de fase se mantém para quaisquer intensidades de entrada dos primeiros harmônicos (desde que sejam pequenas).

Nosso artigo [1] possui algumas perspectivas já concluídas por outros grupos, como os trabalhos [78, 79, 80, 81, 82], mostrando um pouco de sua relevante contribuição nos estudos de inseparabilidade clássica e quântica e emaranhamento

em vários graus de liberdade numa mesma partícula.

Uma outra perspectiva para esse trabalho é confirmar essa previsão teórica do surgimento de ordens radiais não nulas, o que já está em andamento no Laboratório de Ótica Quântica do Instituto de Física da UFF. E, confirmando essa previsão, utilizar essas informações para aplicá-las no OPO.

Mais uma perspectiva é obter resultados mais gerais para a constante de recobrimento, considerar o descasamento de fase ( $\Delta k \neq 0$ ). E para problemas envolvendo feixes de entrada mais intensos (de acordo com o discutido no Capítulo 8), podemos considerar também as constantes de recobrimento em função do comprimento na direção de propagação (obtido ao considerar cristais maiores) ou considerando ordens radiais quaisquer nos outros dois feixes (que no caso de GSH, que foi o caso descrito nesta tese, chamamos de feixes de entrada).

Vimos que, ao considerar ordens radiais superiores, o perfil do segundo harmônico que simulamos se assemelha bastante com o experimental. Isso indica que considerar o modo com  $p = 1$  pode ser uma explicação mais forte do que o astigmatismo. No entanto, mais experimentos ainda precisam ser feitos para comprovar o surgimento dessas ordens radiais superiores no problema.

Inicialmente, pretendíamos seguir o trabalho até o momento em que o estudo sobre inseparabilidade clássica e quântica e sobre SHG com soma de momento angular se encontrassem para observarmos o que surgiria de interessante. Mas, como a abordagem que utilizamos para resolver o SHG com soma de MAO se mostrava cada vez mais desafiadora, não foi possível chegarmos a esse patamar e isto fica como uma perspectiva bem interessante, ao nosso ver.

E por último, mas não menos importante, realizar um experimento que consiga separar cada ordem radial em feixes independentes diferente, assim desenvolvendo novas aplicações.

# Apêndice A

## Cálculo das desigualdades tipo Bell

Neste apêndice serão apresentados os cálculos detalhados que foram realizados para produzir os resultados apresentados em [1], que também estão descritos na Seção 4.3.

### A.1 Independência de fase ganha no MZIM para medida de intensidade

Os campos de saída, Eq. (4.19), serão reescritos aqui como:

$$\mathbf{B}_j^{(+)}(\mathbf{r}, t) = e^{i(\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \mathbf{B}_j(\mathbf{r}, t), \quad (\text{A.1})$$

onde

$$\mathbf{B}_1 = \chi_1 a_{Hh}^1 \psi_h \mathbf{e}_H + \phi_1 a_{Vv}^1 \psi_v \mathbf{e}_V + \zeta_2 a_{Hv}^2 \psi_v \mathbf{e}_H + \omega_2 a_{Vh}^2 \psi_h \mathbf{e}_V, \quad (\text{A.2})$$

$$\mathbf{B}_2 = \zeta_1 a_{Hv}^1 \psi_v \mathbf{e}_H + \omega_1 a_{Vh}^1 \psi_h \mathbf{e}_V + \chi_2 a_{Hh}^2 \psi_h \mathbf{e}_H + \phi_2 a_{Vv}^2 \psi_v \mathbf{e}_V. \quad (\text{A.3})$$

As intensidades de saída, substituindo as equações acima na Eq. (4.21), são:

$$\hat{I}_1 = |\chi_1|^2 a_{Hh}^{\prime 1 \dagger} a_{Hh}^{\prime 1} + |\phi_1|^2 a_{Vv}^{\prime 1 \dagger} a_{Vv}^{\prime 1} + |\zeta_2|^2 a_{Hv}^2 \dagger a_{Hv}^2 + |\omega_2|^2 a_{Vh}^2 \dagger a_{Vh}^2, \quad (\text{A.4})$$

$$\hat{I}_2 = |\zeta_1|^2 a_{Hv}^{\prime 1 \dagger} a_{Hv}^{\prime 1} + |\omega_1|^2 a_{Vh}^{\prime 1 \dagger} a_{Vh}^{\prime 1} + |\chi_2|^2 a_{Hh}^2 \dagger a_{Hh}^2 + |\phi_2|^2 a_{Vv}^2 \dagger a_{Vv}^2. \quad (\text{A.5})$$

Como

$$\langle 0 | a_i^{2 \dagger} a_i^2 | 0 \rangle = 0, \quad (\text{A.6})$$

$$\langle 0 | a_i^{j \dagger} a_i^j a_k^{l \dagger} a_k^l | 0 \rangle = 0, \text{ para } j = 2 \text{ ou } l = 2, \quad (\text{A.7})$$

o vácuo de  $\mathbf{A}_2$  não influenciará nas medidas de intensidade e nem de flutuação de intensidade. Por esse motivo, os termos  $a_i^2$  serão todos desconsiderados daqui por diante, e as Eq. (A.4) e Eq. (A.5) passam a ser:

$$\hat{I}_1 = |\chi_1|^2 a_{Hh}^{\prime 1 \dagger} a_{Hh}^{\prime 1} + |\phi_1|^2 a_{Vv}^{\prime 1 \dagger} a_{Vv}^{\prime 1} \quad (\text{A.8})$$

$$\hat{I}_2 = |\zeta_1|^2 a_{Hv}^{\prime 1 \dagger} a_{Hv}^{\prime 1} + |\omega_1|^2 a_{Vh}^{\prime 1 \dagger} a_{Vh}^{\prime 1} \quad (\text{A.9})$$

Como todos os termos envolvendo  $a_i^2$  serão desconsiderados, será feita a troca  $a_i^1 \rightarrow a_i$  (e também nas fases) para facilitar a notação daqui pra frente. Substituindo os valores de  $a_i^{\prime 1}$ , obtidos na Eq. (4.18), nas equações acima



encontra-se:

$$\begin{aligned}
\hat{I}_1 = |\chi|^2 & \left[ \left( \hat{n}_{Hh} \cos^2(\beta) \cos^2(\alpha) - a_{Hh}^\dagger a_{Hv} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \cos^2(\alpha) - a_{Hh}^\dagger a_{Vh} \cos^2(\beta) \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} + a_{Hh}^\dagger a_{Vv} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} \right) \right. \\
& + \left( -a_{Hv}^\dagger a_{Hh} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \cos^2(\alpha) + \hat{n}_{Hv} \text{sen}^2(\beta) \cos^2(\alpha) + a_{Hv}^\dagger a_{Vh} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} - a_{Hv}^\dagger a_{Vv} \text{sen}^2(\beta) \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} \right) \\
& + \left( -a_{Vh}^\dagger a_{Hh} \cos^2(\beta) \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} + a_{Vh}^\dagger a_{Hv} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} + \hat{n}_{Vh} \cos^2(\beta) \text{sen}^2(\alpha) - a_{Vh}^\dagger a_{Vv} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \text{sen}^2(\alpha) \right) \\
& + \left. \left( a_{Vv}^\dagger a_{Hh} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} - a_{Vv}^\dagger a_{Hv} \text{sen}^2(\beta) \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} - a_{Vv}^\dagger a_{Vh} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \text{sen}^2(\alpha) + \hat{n}_{Vv} \text{sen}^2(\beta) \text{sen}^2(\alpha) \right) \right] \\
& + |\phi|^2 \left[ \left( \hat{n}_{Hh} \text{sen}^2(\beta) \text{sen}^2(\alpha) + a_{Hh}^\dagger a_{Hv} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \text{sen}^2(\alpha) + a_{Hh}^\dagger a_{Vh} \text{sen}^2(\beta) \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} + a_{Hh}^\dagger a_{Vv} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} \right) \right. \\
& + \left( a_{Hv}^\dagger a_{Hh} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \text{sen}^2(\alpha) + \hat{n}_{Hv} \cos^2(\beta) \text{sen}^2(\alpha) + a_{Hv}^\dagger a_{Vh} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} + a_{Hv}^\dagger a_{Vv} \cos^2(\beta) \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} \right) \\
& + \left( a_{Vh}^\dagger a_{Hh} \text{sen}^2(\beta) \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} + a_{Vh}^\dagger a_{Hv} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} + \hat{n}_{Vh} \text{sen}^2(\beta) \cos^2(\alpha) + a_{Vh}^\dagger a_{Vv} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \cos^2(\alpha) \right) \\
& + \left. \left( a_{Vv}^\dagger a_{Hh} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} + a_{Vv}^\dagger a_{Hv} \cos^2(\beta) \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} + a_{Vv}^\dagger a_{Vh} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \cos^2(\alpha) + \hat{n}_{Vv} \cos^2(\beta) \cos^2(\alpha) \right) \right],
\end{aligned} \tag{A.10}$$

$$\begin{aligned}
\hat{I}_2 = |\zeta|^2 & \left[ \left( \hat{n}_{Hh} \text{sen}^2(\beta) \cos^2(\alpha) + a_{Hh}^\dagger a_{Hv} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \cos^2(\alpha) - a_{Hh}^\dagger a_{Vh} \text{sen}^2(\beta) \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} - a_{Hh}^\dagger a_{Vv} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} \right) \right. \\
& + \left( a_{Hv}^\dagger a_{Hh} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \cos^2(\alpha) + \hat{n}_{Hv} \cos^2(\beta) \cos^2(\alpha) - a_{Hv}^\dagger a_{Vh} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} - a_{Hv}^\dagger a_{Vv} \cos^2(\beta) \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} \right) \\
& + \left( -a_{Vh}^\dagger a_{Hh} \text{sen}^2(\beta) \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} - a_{Vh}^\dagger a_{Hv} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} + \hat{n}_{Vh} \text{sen}^2(\beta) \text{sen}^2(\alpha) + a_{Vh}^\dagger a_{Vv} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \text{sen}^2(\alpha) \right) \\
& + \left. \left( -a_{Vv}^\dagger a_{Hh} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} - a_{Vv}^\dagger a_{Hv} \cos^2(\beta) \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} + a_{Vv}^\dagger a_{Vh} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \text{sen}^2(\alpha) + \hat{n}_{Vv} \cos^2(\beta) \text{sen}^2(\alpha) \right) \right] \\
& + |\phi|^2 \left[ \left( \hat{n}_{Hh} \cos^2(\beta) \cos^2(\alpha) - a_{Hh}^\dagger a_{Hv} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \text{sen}^2(\alpha) + a_{Hh}^\dagger a_{Vh} \cos^2(\beta) \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} - a_{Hh}^\dagger a_{Vv} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} \right) \right. \\
& + \left( -a_{Hv}^\dagger a_{Hh} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \text{sen}^2(\alpha) + \hat{n}_{Hv} \text{sen}^2(\beta) \text{sen}^2(\alpha) - a_{Hv}^\dagger a_{Vh} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} + a_{Hv}^\dagger a_{Vv} \text{sen}^2(\beta) \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} \right) \\
& + \left( a_{Vh}^\dagger a_{Hh} \cos^2(\beta) \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} - a_{Vh}^\dagger a_{Hv} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} + \hat{n}_{Vh} \cos^2(\beta) \cos^2(\alpha) - a_{Vh}^\dagger a_{Vv} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \cos^2(\alpha) \right) \\
& + \left. \left( -a_{Vv}^\dagger a_{Hh} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} + a_{Vv}^\dagger a_{Hv} \text{sen}^2(\beta) \frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} - a_{Vv}^\dagger a_{Vh} \frac{\text{sen}(2\beta)}{2} \cos^2(\alpha) + \hat{n}_{Vv} \text{sen}^2(\beta) \cos^2(\alpha) \right) \right].
\end{aligned} \tag{A.11}$$

onde  $\hat{n}_i = a_i^\dagger a_i$ .

Considerando que a intensidade se conserva neste problema, isto é:

$$\mathbf{B}_1^\dagger \cdot \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2^\dagger \cdot \mathbf{B}_2 = \mathbf{A}_1^\dagger \cdot \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2^\dagger \cdot \mathbf{A}_2. \tag{A.12}$$

Isso que equivale a:

$$\hat{I}_1 + \hat{I}_2 = \hat{n}_{Hh} + \hat{n}_{Hv} + \hat{n}_{Vh} + \hat{n}_{Vv}. \quad (\text{A.13})$$

Substituindo as Eq. (A.10) e Eq. (A.11) em Eq. (A.13), obtém-se o sistema de equações (organizado de forma conveniente para os cálculos):

$$|\chi|^2 \cos^2(\beta) \cos^2(\alpha) + |\phi|^2 \sin^2(\beta) \sin^2(\alpha) + |\zeta|^2 \sin^2(\beta) \cos^2(\alpha) + |\omega|^2 \cos^2(\beta) \sin^2(\alpha) = 1, \quad (\text{A.14})$$

$$|\chi|^2 \sin^2(\beta) \cos^2(\alpha) + |\phi|^2 \cos^2(\beta) \sin^2(\alpha) + |\zeta|^2 \cos^2(\beta) \cos^2(\alpha) + |\omega|^2 \sin^2(\beta) \sin^2(\alpha) = 1, \quad (\text{A.15})$$

$$|\chi|^2 \sin^2(\beta) \sin^2(\alpha) + |\phi|^2 \cos^2(\beta) \cos^2(\alpha) + |\zeta|^2 \cos^2(\beta) \sin^2(\alpha) + |\omega|^2 \sin^2(\beta) \cos^2(\alpha) = 1, \quad (\text{A.16})$$

$$|\chi|^2 \cos^2(\beta) \sin^2(\alpha) + |\phi|^2 \sin^2(\beta) \cos^2(\alpha) + |\zeta|^2 \sin^2(\beta) \sin^2(\alpha) + |\omega|^2 \cos^2(\beta) \cos^2(\alpha) = 1, \quad (\text{A.17})$$

$$-|\chi|^2 \cos^2(\alpha) + |\phi|^2 \sin^2(\alpha) + |\zeta|^2 \cos^2(\alpha) - |\omega|^2 \sin^2(\alpha) = 0, (\text{A.18})$$

$$-|\chi|^2 \sin^2(\alpha) + |\phi|^2 \cos^2(\alpha) + |\zeta|^2 \sin^2(\alpha) - |\omega|^2 \cos^2(\alpha) = 0, (\text{A.19})$$

$$-|\chi|^2 \cos^2(\beta) + |\phi|^2 \sin^2(\beta) - |\zeta|^2 \sin^2(\beta) + |\omega|^2 \cos^2(\beta) = 0, (\text{A.20})$$

$$-|\chi|^2 \sin^2(\beta) + |\phi|^2 \cos^2(\beta) - |\zeta|^2 \cos^2(\beta) + |\omega|^2 \sin^2(\beta) = 0, (\text{A.21})$$

$$|\chi|^2 + |\phi|^2 - |\zeta|^2 - |\omega|^2 = 0. \quad (\text{A.22})$$

Resolvendo o sistema acima, encontra-se:

$$|\chi|^2 = |\phi|^2 = |\zeta|^2 = |\omega|^2 = 1. \quad (\text{A.23})$$

E substituindo nas Eq. (A.8) e Eq. (A.9), obtém-se:

$$\hat{I}_1 = a_{Hh}^{\prime 1 \dagger} a_{Hh}^{\prime 1} + a_{Vv}^{\prime 1 \dagger} a_{Vv}^{\prime 1}, \quad (\text{A.24})$$

$$\hat{I}_2 = a_{Hv}^{\prime 1 \dagger} a_{Hv}^{\prime 1} + a_{Vh}^{\prime 1 \dagger} a_{Vh}^{\prime 1}, \quad (\text{A.25})$$

o que mostra que as fases ganhas ao atravessar o MZIM não contribuem para as medidas de intensidade, e, conseqüentemente, para as medidas de flutuação de intensidade.

## A.2 Medidas efetivas

As intensidades Eq. (A.10) e Eq. (A.11) podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned} \hat{I}_i &= \hat{N}k_i + (\hat{n}_{Hv} + \hat{n}_{Vh})l_i \\ &+ \left[ - \left( a_{Hh}^{\dagger} a_{Hv} + a_{Hv}^{\dagger} a_{Hh} \right) + \left( a_{Vh}^{\dagger} a_{Vv} + a_{Vv}^{\dagger} a_{Vh} \right) \right] \mu_i \\ &+ \left[ - \left( a_{Hh}^{\dagger} a_{Vh} + a_{Vh}^{\dagger} a_{Hh} \right) + \left( a_{Hv}^{\dagger} a_{Vv} + a_{Vv}^{\dagger} a_{Hv} \right) \right] \eta_i \\ &+ \left[ - \left( a_{Hh}^{\dagger} a_{Vv} + a_{Vv}^{\dagger} a_{Hh} \right) + \left( a_{Hv}^{\dagger} a_{Vh} + a_{Vh}^{\dagger} a_{Hv} \right) \right] o_i, \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

com

$$\hat{N} = a_{Hv}^{\dagger} a_{Hh} + a_{Vv}^{\dagger} a_{Vv}, \quad (\text{A.27})$$

$$k_1 = l_2 = \cos^2(\beta) \cos^2(\alpha) + \sin^2(\beta) \sin^2(\alpha), \quad (\text{A.28})$$

$$k_2 = l_1 = \cos^2(\beta) \sin^2(\alpha) + \sin^2(\beta) \cos^2(\alpha), \quad (\text{A.29})$$

$$k_3 = -l_3 = \cos(2\beta) \cos(2\alpha), \quad (\text{A.30})$$

$$\mu_3 = 2\mu_1 = -2\mu_2 = \sin(2\beta) \cos(2\alpha), \quad (\text{A.31})$$

$$\eta_3 = 2\eta_1 = -2\eta_2 = \cos(2\beta) \sin(2\alpha), \quad (\text{A.32})$$

$$o_3 = 2o_1 = -2o_2 = \sin(2\beta) \sin(2\alpha). \quad (\text{A.33})$$

Como as componentes  $Hv$  e  $Vh$  dos estados iniciais de interesse não estão excitadas, é possível escrever um operador de intensidade efetivo ( $\hat{I}_{ef}$ ) e de intensidade quadrada efetivo ( $(\hat{I}^2)_{ef}$ ), necessário para determinar a flutuação de intensidade, que obedecem as relações:

$$\langle \hat{I}_{ef} \rangle = \langle \hat{I} \rangle, \quad (\text{A.34})$$

$$\langle (\hat{I}^2)_{ef} \rangle = \langle \hat{I}^2 \rangle. \quad (\text{A.35})$$

Para determinar a intensidade efetiva, basta eliminar os termos que não contribuem na Eq. (A.26), o que leva a:

$$\hat{I}_{efi} = \hat{N}k_i + \left( a_{Hh}^\dagger a_{Vv} + a_{Vv}^\dagger a_{Hh} \right) o_i. \quad (\text{A.36})$$

Já o caso da intensidade quadrada efetiva não é tão simples. Não basta elevar ao quadrado a intensidade efetiva ( $(\hat{I}^2)_{ef} \neq (\hat{I}_{ef})^2$ ). É preciso elevar ao quadrado a intensidade definida na Eq. (A.26) e, depois de feito isso, eliminar os termos que

não contribuem. Assim a intensidade quadrada efetiva se identifica como<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned}
(\hat{I}^2)_{efi} &= \hat{N}^2 k_i^2 + 2 \left( a_{Hh}^\dagger a_{Vv} + a_{Vv}^\dagger a_{Hh} \right) \hat{N} k_i o_i \\
&+ \hat{N} \left( \mu_i^2 + \eta_i^2 + o_i^2 \right) - 2 \left( a_{Hh}^\dagger a_{Vv} + a_{Vv}^\dagger a_{Hh} \right) \mu_i \eta_i \\
&+ \left( a_{Hh}^\dagger{}^2 a_{Vv}^2 + 2 \hat{n}_{Hh} \hat{n}_{Vv} + a_{Vv}^\dagger{}^2 a_{Hh}^2 \right) o_i^2. \quad (\text{A.37})
\end{aligned}$$

Que também pode ser escrito como:

$$(\hat{I}^2)_{efi} = (\hat{I}_{efi})^2 + \hat{N} \left( \mu_i^2 + \eta_i^2 \right) - 2 \left( a_{Hh}^\dagger a_{Vv} + a_{Vv}^\dagger a_{Hh} \right) \mu_i \eta_i. \quad (\text{A.38})$$

---

<sup>1</sup>Para isso é necessário que  $\left[ \hat{N}, \left( a_{Hh}^\dagger a_{Vv} + a_{Vv}^\dagger a_{Hh} \right) \right] = 0$ , o que de fato é verdade.

## Apêndice B

# Uma relação importante envolvendo polinômio de Laguerre associado

Aqui provamos que

$$x^P = \sum_{m=0}^P (-1)^m \frac{P!(k+P)!}{(P-m)!(k+m)!} L_m^k(x) \quad (\text{B.1})$$

anteriormente visto na Eq. (5.11) do Capítulo 5.

Para provar essa relação, será necessário utilizar as seguintes:

$$xL_m^k(x) = (m+k)L_m^{k-1}(x) - (m+1)L_{m+1}^{k-1}(x), \quad (\text{B.2})$$

$$xL_m(x) = (2m+1)L_m(x) - mL_{m-1}(x) - (m+1)L_{m+1}(x), \quad (\text{B.3})$$

$$L_m(x) = L_m^0(x). \quad (\text{B.4})$$

Prova por indução:

$$x^0 = L_0^k(x) = 1 \quad (\text{B.5})$$

O próximo passo é mostrar que essa relação funciona para  $x^{P+1}$ .

$$x(x^P) = \sum_{m=0}^P (-1)^m \frac{P!(k+P)!}{(P-m)!(k+m)!} x L_m^k(x), \quad (\text{B.6})$$

substituindo a Eq. (B.2)

$$x(x^P) = \sum_{m=0}^P (-1)^m \frac{P!(k+P)!}{(P-m)!(k+m)!} [(m+k)L_m^{k-1}(x) - (m+1)L_{m+1}^{k-1}(x)] \quad (\text{B.7})$$

$$x(x^P) = \left[ \sum_{m=0}^P (-1)^m \frac{P!(k+P)!}{(P-m)!(k+m-1)!} L_m^{k-1}(x) \right] - \left[ \sum_{m=0}^P (-1)^m \frac{P!(k+P)!(m+1)}{(P-m)!(k+m)!} L_{m+1}^{k-1}(x) \right], \quad (\text{B.8})$$

fazendo a mudança  $m+1 \rightarrow m$  no segundo tremo da equação acima

$$x(x^P) = \left[ \sum_{m=0}^P (-1)^m \frac{P!(k+P)!}{(P-m)!(k+m-1)!} L_m^{k-1}(x) \right] - \left[ \sum_{m=1}^{P+1} (-1)^{m-1} \frac{P!(k+P)!m}{(P-m+1)!(k+m-1)!} L_m^{k-1}(x) \right], \quad (\text{B.9})$$

trocando o sinal do segundo termo, por causa do  $(-1)^{-1}$ , e igualando os somatórios

$$x(x^P) = \left[ \frac{(k+P)!}{(k-1)!} L_0^{k-1}(x) + \sum_{m=1}^P (-1)^m \frac{P!(k+P)!}{(P-m)!(k+m-1)!} L_m^{k-1}(x) \right] + \left[ \sum_{m=1}^P (-1)^m \frac{P!(k+P)!m}{(P-m+1)!(k+m-1)!} L_m^{k-1}(x) + (-1)^{P+1} (P+1)! L_{P+1}^{k-1}(x) \right]. \quad (\text{B.10})$$

Somando e arrumando os termos da equação acima chega-se a:

$$x(x^P) = x^{P+1} = \sum_{m=0}^{P+1} (-1)^m \frac{(P+1)! [(k-1) + (P+1)]!}{[(P+1)-m]! [(k-1)+m]!} L_m^{k-1}(x), \quad (\text{B.11})$$

provando, assim, que a Eq. (B.1) vale para todo  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $k \geq 1$ .

Para provar que também vale para  $k = 0$ , o primeiro passo é substituir este valor na Eq. (B.1), isto é:

$$x^P = \sum_{m=0}^P (-1)^m \frac{(P!)^2}{(P-m)!m!} L_m(x). \quad (\text{B.12})$$

Feito isso, é só seguir os mesmos passos utilizados chegar na Eq. (B.11). Substituindo a Eq. (B.3), ao invés da Eq. (B.2), que chegamos a:

$$x(x^P) = x^{P+1} = \sum_{m=0}^{P+1} (-1)^m \frac{[(P+1)!]^2}{[(P+1)-m]!m!} L_m(x). \quad (\text{B.13})$$

Provando, assim, que a Eq. (B.1) vale para todo  $k = 0$ .

Por fim, com as Eq. (B.11) e Eq. (B.13), prova-se que a Eq. (B.1) vale para todo  $k \in \mathbb{N}$ .



# Apêndice C

## Cálculo da constante $\gamma_{l_H l_V}$

Aqui apresentamos os cálculos das constantes  $\gamma_{l_H l_V}$ , que serão utilizados na resolução das equações dinâmicas a  $2 + (P + 1)$  modos (Capítulo 6), e a  $4 + (P + 3)$  modos (Capítulo 7).

Relembrando as definições apresentadas na Seção 6.2:

$$\beta_p^{l_H l_V} = \frac{\Lambda_{p00}^{l_H l_V}}{\Lambda_{000}^{l_H l_V}}, \quad (\text{C.1})$$

$$\gamma_{l_H l_V} = \sum_{p=0}^P (\beta_p^{l_H l_V})^2. \quad (\text{C.2})$$

Substituindo a Eq. (5.54) em Eq. (C.1) encontramos:

$$\beta_p^{l_H l_V} = \sum_{m=0}^P \delta_{mp} \sqrt{\frac{|l_H + l_V|!}{p!(p + |l_H + l_V|)!} \frac{P!}{(P - p)!}} (-1)^p, \quad (\text{C.3})$$

que é o mesmo que:

$$\beta_p^{l_H l_V} = \begin{cases} \sqrt{\frac{|l_H + l_V|!}{p!(p + |l_H + l_V|)!} \frac{P!}{(P - p)!}} (-1)^p, & \text{se } 0 \leq p \leq P \\ 0 & \text{se } p > P \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

Dessa forma, o intervalo considerado será  $0 \leq p \leq P$  e, nesse intervalo,  $\gamma_{l_H l_V}$  segue como:

$$\gamma_{l_H l_V} = \frac{P! |l_H + l_V|!}{(P + |l_H + l_V|)!} \sum_{p=0}^P \frac{(P + |l_H + l_V|)!}{(p + |l_H + l_V|)! (P - p)!} \frac{P!}{p! (P - p)!}. \quad (\text{C.5})$$

Utilizando a identidade de Chu-Vandermonde [83], obtemos:

$$\sum_{p=0}^P \frac{(P + |l_H + l_V|)!}{(p + |l_H + l_V|)! (P - p)!} \frac{P!}{p! (P - p)!} = \frac{(2P + |l_H + l_V|)!}{P! (P + |l_H + l_V|)!}. \quad (\text{C.6})$$

Assim chega-se ao valor de  $\gamma_{l_H l_V}$ , que é:

$$\gamma_{l_H l_V} = \frac{|l_H + l_V|! (2P + |l_H + l_V|)!}{[(P + |l_H + l_V|)!]^2}. \quad (\text{C.7})$$

# Apêndice D

## Conversões na lâmina tiltada

Aqui descreveremos em detalhes os cálculos do que acontece com o feixe ao passar pela "lâmina tiltada", que servirão para realizar as simulações dos perfis transversos apresentados no Capítulo 7.

Apresentamos os cálculos das conversões entre os modos Laguerre-Gauss e Hermite-Gauss a  $45^\circ$  produzidas na "lâmina tiltada" da Fig. 7.1 do Capítulo 7.

### D.1 $p' = p'' = 0$ e $l'l'' \geq 0$

Nesse caso teremos que  $p = 0$  e  $l \geq 0$ . Assim, as transformações de interesse serão:

$$Q u_{0l}^{2\omega} = (-1)^p w_{l0}^{2\omega} \quad (\text{D.1})$$

- $l = 0$

$$Q u_{00}^i = w_{00}^i \quad (\text{D.2})$$

$$w_{00}^i = v_{00}^i \quad (\text{D.3})$$

- $l = 1$

$$Q u_{01}^i = w_{10}^i \quad (\text{D.4})$$

$$w_{10}^i = \frac{v_{10}^i - v_{01}^i}{\sqrt{2}} \quad (\text{D.5})$$

- $l = 2$

$$Q u_{02}^i = w_{20}^i \quad (\text{D.6})$$

$$w_{20}^i = \frac{v_{20}^i - \sqrt{2}v_{11}^i + v_{02}^i}{2} \quad (\text{D.7})$$

- $l = 3$

$$Q u_{03}^i = w_{30}^i \quad (\text{D.8})$$

$$w_{30}^i = \frac{v_{30}^i - \sqrt{3}v_{21}^i + \sqrt{3}v_{12}^i - v_{03}^i}{2\sqrt{2}} \quad (\text{D.9})$$

## D.2 $p' = p'' = 0$ e $l'l'' < 0$

Aqui vamos considerar os casos apenas onde  $l' = 1$  e  $l'' = -|l_{SLM}|$ , o que leva em  $\{p\} = \{0, 1\}$  e  $l = 1 - |l_{SLM}| \leq 0$ . Assim, as transformações de interesse serão:

$$Q u_{pl}^{2\omega} = (-1)^p w_{p(p-l)}^{2\omega} \quad (\text{D.10})$$

- $p = 0, l = 0$

$$Q u_{00}^i = w_{00}^i \quad (\text{D.11})$$

$$w_{00}^i = v_{00}^i \quad (\text{D.12})$$

- $p = 1, l = 0$

$$Q u_{10}^i = -w_{11}^i \quad (\text{D.13})$$

$$w_{11}^i = \frac{v_{20}^i - v_{02}^i}{\sqrt{2}} \quad (\text{D.14})$$

- $p = 0, l = -1$

$$Q u_{0-1}^i = w_{01}^i \quad (\text{D.15})$$

$$w_{01}^i = \frac{v_{10}^i + v_{01}^i}{\sqrt{2}} \quad (\text{D.16})$$

- $p = 1, l = -1$

$$Q u_{1-1}^i = -w_{12}^i \quad (\text{D.17})$$

$$w_{12}^i = \frac{\sqrt{3}v_{30}^i + v_{21}^i - v_{12}^i - \sqrt{3}v_{03}^i}{2\sqrt{2}} \quad (\text{D.18})$$

# Referências Bibliográficas

- [1] L. J. Pereira, A. Z. Khoury, and K. Dechoum, "Quantum and classical separability of spin-orbit laser modes", *PHYSICAL REVIEW A* **90**, 053842 (2014).
- [2] Schalow, A. L., Townes, C. H., "Infrared and Optical Masers", *Physical Review* **112**, 1940 (1958).
- [3] Sanders, J. H., "Optical Maser Design", *Phys. Rev. Lett.* **3**, 86 (1959).
- [4] Javan, A., "Possibility of Production of Negative Temperature in Gas Discharges", *Phys. Rev. Lett.* **3**, 87 (1959).
- [5] Maiman, T. H., "Stimulated Optical Radiation in Ruby", *Nature* **187**, 493 (1960).
- [6] J. S. Bell, "On the Eistein Podolky Rosen paradox", *Physics* **1**, 195 (1964).
- [7] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?" *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).

- [8] Alain Aspect, Philippe Grangier, and Gérard Roger, "Experimental Realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment: A New Violation of Bell's Inequalities", *Phys. Rev. Lett.* **49**, 91 (1982).
- [9] Nielsen Chuang, "Computação Quântica e Informação Quântica", livro didático.
- [10] P. A. Franken, A. E. Hill, C. W. Peters, and G. Weinreich, "Generation of Optical Harmonics", *Phys. Rev. Lett.* **7**, 118 (1961).
- [11] Amnon Yariv, "Quantum Electronics", livro didático.
- [12] Robert W. Boyd, "Nonlinear Optics", livro didático.
- [13] R. J. C. Spreeuw, "A Classical Analogy of Entanglement", *Found. Phys.* **28**, 361 (1998).
- [14] C. V. S. Borges, M. Hor-Meyll, J. A. O. Huguenin, and A. Z. Khoury, "Bell-like inequality for the spin-orbit separability of a laser beam", *PHYSICAL REVIEW A* **82**, 033833 (2010).
- [15] K. H. Kagalwala, G. Di Giuseppe, A. F. Abouraddy, and B. E. A. Saleh, "Bell's measure in classical optical coherence", *Nat. Photon.* **7**, 72 (2013).
- [16] A. Vallés, V. D'Ambrosio, M. Hendrych, M. Mičuda, L. Marrucci, F. Sciarrino, and J. P. Torres, "Generation of tunable entanglement and violation of a Bell-like inequality between different degrees of freedom of a single photon", *Phys. Rev. A* **90**, 052326 (2014)
- [17] B. N. Simon, S. Simon, F. Gori, M. Santarsiero, R. Borghi, N. Mukunda, and R. Simon, "Nonquantum Entanglement Resolves a



- Basic Issue in Polarization Optics", *Phys. Rev. Lett.* **104**, 023901 (2010).
- [18] X. F. Qian and J. H. Eberly, "Entanglement and classical polarization states", *Opt. Lett.* **36**, 4110 (2011).
- [19] P. Chowdhury, A. S. Majumdar, and G. S. Agarwal, "Nonlocal continuous-variable correlations and violation of Bell's inequality for light beams with topological singularities", *Phys. Rev. A* **88**, 013830 (2013).
- [20] F. De Zela, "Relationship between the degree of polarization, indistinguishability, and entanglement", *Phys. Rev. A* **89**, 013845 (2014).
- [21] P. Ghose and A. Mukherjee, "Entanglement in Classical Optics", *Rev. Theor. Sci.* **2**, 274 (2014).
- [22] A. Holleczek, A. Aiello, C. Gabriel, C. Marquardt, and G. Leuchs, "Classical and quantum properties of cylindrically polarized states of light", *Opt. Express* **19**, 9714 (2011).
- [23] C. Gabriel, A. Aiello, W. Zhong, T. G. Euser, N. Y. Joly, P. Banzer, M. Förtsch, D. Elser, U. L. Andersen, Ch. Marquardt, P. St. J. Russell, and G. Leuchs, "Entangling Different Degrees of Freedom by Quadrature Squeezing Cylindrically Polarized Modes" *Phys. Rev. Lett.* **106**, 060502 (2011).
- [24] C. Gabriel, A. Aiello, S. Berg-Johansen, C. Marquardt, and G. Leuchs, "Tools for detecting entanglement between different degrees of freedom in quadrature squeezed cylindrically polarized modes", *Eur. Phys. J. D* **66**, 172 (2012).

- [25] F. Toepfel, A. Aiello, C. Marquardt, E. Giacobino, and G. Leuchs, "Classical entanglement in polarization metrology", *New J. Phys.* **16**, 073019 (2014).
- [26] A. Aiello, F. Toepfel, C. Marquardt, E. Giacobino, and G. Leuchs, "Classical entanglement: Oxymoron or resource?", arXiv:1409.0213 (2014).
- [27] W. T. Bueno, L. F. C. Moraes, J. A. O. Huguenin, C. E. R. Souza and A. Z. Khoury, "Arbitrary orbital angular momentum addition in second harmonic generation", *New Journal of Physics* **16**, 093041 (2014).
- [28] J. A. Armstrong, N. Bloembergen, J. Ducuing and P. S. Pershan, "Interactions between Light Waves in a Nonlinear Dielectric", *Phys. Rev.* **127**, 1918 (1962).
- [29] M. Lax, W. H. Louisell and W. B. McKnight, "From Maxwell to paraxial wave optics", *Phys. Rev. A* **11**, 1365 (1975).
- [30] Carlos Eduardo Rodrigues de Souza, "Aplicações do Momento Angular Orbital da luz à Computação e Informação Quântica", tese de doutorado, IF-UFF (2010).
- [31] Bernardo Coutinho Camilo dos Santos, "Dinâmica e Ruído Quântico em Osciladores Paramétricos Óticos com Momento Angular Orbital", tese de doutorado, IF-UFF (2009).
- [32] Carolina Vannier dos Santos Borges, "Bell inequalities with Orbital Angular Momentum of Light", tese de doutorado, IF-UFF e Université Paris-Sud (2012).

- [33] Duarte Manuel Esteves Estrada, "Propagação de Feixes Ópticos em Meios Não-Lineares", dissertação de mestrado, Instituto Superior Técnico - Universidade Técnica de Lisboa (2008).
- [34] David J. Griffiths, "Introduction to Electrodynamics", livro didático.
- [35] John David Jackson, "Classical Electrodynamics", livro didático.
- [36] George B. Arfken and Hans J. Weber, "Mathematical Methods for Physicists", livro didático.
- [37] Allan Rodrigues Vieira, "Seleção de modos spin-órbita em um interferômetro Sagnac", dissertação de mestrado, IF-UFF (2013).
- [38] Carlos Eduardo Rodrigues de Souza, "Fases Geométricas na Produção de Vórtices Ópticos", dissertação de mestrado, IF-UFF (2006).
- [39] Leonardo Justino Pereira, "Emaranhamento e Desigualdade de Bell no Modelo XXZ", dissertação de mestrado, IF-UFF (2012).
- [40] D. Bohm, "A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden"Variables. I", Phys. Rev. **85**, 166 (1952).
- [41] D. Bohm, "A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden"Variables. II", Phys. Rev. **85**, 180 (1952).
- [42] J. F. Clauser, M.A. Horne, A. Shimony and R. A. Holt, "Proposed experiment to test local hidden-variable theories", Phys. Rev. Lett. **23**, 880(1969).
- [43] Antonio Acín, "Entanglement: Entangled and bound", Nature Physics **5**, 711 (2009).

- [44] Oliver Cohen, "Unlocking Hidden Entanglement with Classical Information", *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2493 (1998).
- [45] Daniel Collins and Nicolas Gisin, "A relevant two qubit Bell inequality inequivalent to the CHSH inequality", *J. Phys. A: Math. Gen.* **37**, 1775 (2004).
- [46] R. F. Werner, "Quantum states with Einstein-Podolsky-Rosen correlations admitting a hidden-variable model", *Phys. Rev. A* **40**, 4277 (1989).
- [47] Francesco Buscemi, "All Entangled Quantum States Are Nonlocal", *Phys. Rev. Lett.* **108**, 200401 (2012).
- [48] Serge Massar and Stefano Pironio, "Viewpoint: A Closer Connection Between Entanglement and Nonlocality", *Physics* **5**, 56 (2012).
- [49] M. J. Padgett and J. Courtial, "Poincaré-sphere equivalent for light beams containing orbital angular momentum", *Opt. Lett.* **24**, 430 (1999).
- [50] M. França Santos, P. Milman, A. Z. Khoury, and P. H. Souto Ribeiro, "Measurement of the degree of polarization entanglement through position interference", *Phys. Rev. A* **64**, 023804 (2001).
- [51] D. P. Caetano, P. H. Souto Ribeiro, J. T. C. Pardal, and A. Z. Khoury, "Quantum image control through polarization entanglement in parametric down-conversion", *Phys. Rev. A* **68**, 023805 (2003).
- [52] A. N. de Oliveira, S. P. Walborn, and C. H. Monken, "Implementing the Deutsch algorithm with polarization and transverse spatial modes", *J. Opt. B: Quantum Semiclassical Opt.* **7**, 288 (2005).

- [53] L. Marrucci, C. Manzo, and D. Paparo, "Optical Spin-to-Orbital Angular Momentum Conversion in Inhomogeneous Anisotropic Media", *Phys. Rev. Lett.* **96**, 163905 (2006).
- [54] E. Nagali, F. Sciarrino, F. De Martini, L. Marrucci, B. Piccirillo, E. Karimi, and E. Santamato, "Quantum Information Transfer from Spin to Orbital Angular Momentum of Photons", *Phys. Rev. Lett.* **103**, 013601 (2009).
- [55] E. Nagali, F. Sciarrino, F. De Martini, B. Piccirillo, E. Karimi, L. Marrucci, and E. Santamato, "Polarization control of single photon quantum orbital angular momentum states", *Opt. Express* **17**, 18745 (2009).
- [56] C. E. R. Souza and A. Z. Khoury, "A Michelson controlled-not gate with a single-lens astigmatic mode converter", *Opt. Express* **18**, 9207 (2010).
- [57] A. R. Vieira, M. Hor-Meyll, and A. Z. Khoury, "Spin-orbit mode selection with a modified Sagnac interferometer", *J. Opt. Soc. Am. B* **30**, 1623 (2013).
- [58] L. Aolita and S. P. Walborn, "Quantum Communication without Alignment using Multiple-Qubit Single-Photon States", *Phys. Rev. Lett.* **98**, 100501 (2007).
- [59] C. E. R. Souza, C.V. S. Borges, A. Z. Khoury, J. A. O. Huguenin, L. Aolita, and S. P. Walborn, "Quantum key distribution without a shared reference frame", *Phys. Rev. A* **77**, 032345 (2008).
- [60] V. D'Ambrosio, E. Nagali, S. P. Walborn, L. Aolita, S. Slussarenko, L. Marrucci, and F. Sciarrino, "Complete experimental toolbox for

- alignment-free quantum communication", *Nat. Commun.* **3**, 961 (2012).
- [61] L. Chen and W. She, "Teleportation of a controllable orbital angular momentum generator", *Phys. Rev. A* **80**, 063831 (2009).
- [62] J. T. Barreiro, T.-C. Wei, and P. G. Kwiat, "Remote Preparation of Single-Photon Hybrid Entangled and Vector-Polarization States", *Phys. Rev. Lett.* **105**, 030407 (2010).
- [63] A. Z. Khoury and P. Milman, "Quantum teleportation in the spin-orbit variables of photon pairs", *Phys. Rev. A* **83**, 060301(R) (2011).
- [64] M. Erhard, H. Qassim, H. Mand, E. Karimi, and R. W. Boyd, "Real-time imaging of spin-to-orbital angular momentum hybrid remote state preparation", *Phys. Rev. A* **92**, 022321 (2015).
- [65] C. E. R. Souza, J. A. O. Huguenin, P. Milman, and A. Z. Khoury, "Topological Phase for Spin-Orbit Transformations on a Laser Beam", *Phys. Rev. Lett.* **99**, 160401 (2007).
- [66] C. E. R. Souza, J. A. O. Huguenin, and A. Z. Khoury, "Topological phase structure of vector vortex beams", *J. Opt. Soc. Am. A* **31**, 1007 (2014).
- [67] Scott Hill and William K. Wootters, "Entanglement of a Pair of Quantum Bits", *Phys. Rev. Lett.* **78**, 5022 (1997).
- [68] William K. Wootters, "Entanglement of Formation of an Arbitrary State of Two Qubits", *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2245 (1998).

- [69] H. Sasada and M. Okamoto, "Transverse-mode beam splitter of a light beam and its application to quantum cryptography", *Phys. Rev. A* **68**, 012323 (2003).
- [70] L. Chen and W. She, "Single-photon spin-orbit entanglement violating a Bell-like inequality", *J. Opt. Soc. Am. B* **27**, A7 (2010).
- [71] E. Karimi, J. Leach, S. Slussarenko, B. Piccirillo, L. Marrucci, L. Chen, W. She, S. Franke-Arnold, M. J. Padgett, and E. Santamato, "Spin-orbit hybrid entanglement of photons and quantum contextuality" *Phys. Rev. A* **82**, 022115 (2010).
- [72] A. Heidmann, R. J. Horowicz, S. Reynaud, E. Giacobino, C. Fabre, and G. Camy, "Observation of Quantum Noise Reduction on Twin Laser Beams", *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2555 (1987).
- [73] B. Coutinho dos Santos, K. Dechoum, and A. Z. Khoury, "Continuous-Variable Hyperentanglement in a Parametric Oscillator with Orbital Angular Momentum", *Phys. Rev. Lett.* **103**, 230503 (2009).
- [74] Y. Yamamoto, S. Machida, and O. Nilsson, "Amplitude squeezing in a pump-noise-suppressed laser oscillator", *Phys. Rev. A* **34**, 4025 (1986).
- [75] <http://mathworld.wolfram.com/AssociatedLaguerrePolynomial.html>
- [76] C. Schwob, P.F. Cohadon, C. Fabre, M.A.M. Marte, H. Ritsch, A. Gatti, L. Lugiato, "Transverse effects and mode couplings in OPOS", *Appl. Phys. B* **66**, 685 (1998)

- [77] M. W. Beijersbergen, L. Allen, H. E. L. O van der Veen, and J. P. Woerdman, "Astigmatic laser mode converters and transfer of orbital angular momentum", *Opt. Commun.* **96**, 123 (1993).
- [78] Seyed Mohammad Hashemi Rafsanjani, Mohammad Mirhosseini, Omar S. Magaña-Loaiza, and Robert W. Boyd, "State transfer based on classical nonseparability", *PHYSICAL REVIEW A* **92**, 023827 (2015).
- [79] Giovanni Milione, Thien An Nguyen, Jonathan Leach, Daniel A. Nolan, and Robert R. Alfano, "Using the non-separability of vector beams to encode information for optical communication", *Optics Letters* **40**, 4887 (2015).
- [80] Kumel H. Kagalwala, H. Esat Kondakci, Ayman F. Abouraddy and Bahaa E. A. Saleh, "Optical coherency matrix tomography", *Scientific Reports* **5**, 15333 (2015).
- [81] Andrea Aiello, Falk Töppel, Christoph Marquardt<sup>1</sup>, Elisabeth Giacobino, and Gerd Leuchs, "Quantum-like nonseparable structures in optical beams", *New Journal of Physics* **17**, 043024 (2015).
- [82] B Stoklasa, L Motka, J Rehacek, Z Hradil, L L Sánchez-Soto, and GS Agarwal, "Experimental violation of a Bell-like inequality with optical vortex beams", *New Journal of Physics* **17**, 113046 (2015).
- [83] <http://mathworld.wolfram.com/Chu-VandermondeIdentity.html>
- [84] Jose Augusto Oliveira Huguenin, "Correlações espaciais e temporais na amplificação e oscilação paramétrica", tese de doutorado, IF-UFF (2006).



- [85] Williamys Cristiano Soares Silva, "Geração e Caracterização de Feixes Possuindo Momento Angular Orbital", tese de doutorado, IF-UFAL (2011).
- [86] M. Granata, C. Buy, R. Ward, and M. Barsuglia, "Higher-Order Laguerre-Gauss Mode Generation and Interferometry for Gravitational Wave Detectors", PRL **105**, 231102 (2010).