

Universidade Federal Fluminense
Instituto de Física
Curso de Pós-Graduação em Física



INSTITUTO DE FÍSICA
Universidade Federal Fluminense

Antonio Romero da Costa Pinheiro

Implementação Óptica da Versão
Quântica do Dilema do
Prisioneiro usando modos
paraxiais

Niterói - R.J.

06 de Março de 2013

Antonio Romero da Costa Pinheiro

Implementação Óptica da Versão Quântica do
Dilema do Prisioneiro usando modos paraxiais

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Física.

Orientador:

Prof. Dr. José Augusto Oliveira Huguenin

06 de Março de 2013

“Tu, Senhor e Deus *meu*, és digno de receber a glória, a honra e o poder, porque criastes todas as coisas, e por tua vontade elas existem e foram criadas.”

Apocalipse 4.11

“Deus não joga dados em um jogo clássico,... obviamente joga em um jogo quântico.”

Dedico este trabalho aos meus pais, Maria de Fátima Silva da Costa e Francisco Pinheiro Gomes, aos meus irmãos, Raquel da Costa Pinheiro e Rogério da Costa Pinheiro e a minha namorada, Siliana Oliveira Abreu.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus pela vida. Agradeço ao meu orientador José Augusto Oliveira Huguenin em acreditar no meu trabalho. Pela orientação incomparável e a preocupação de obtermos sempre o melhor. Acima de tudo, é um verdadeiro amigo.

Agradeço aos professores colaboradores para a realização do trabalho, Antonio Zelaquett Khoury, Carlos Eduardos de Souza Rodriguez, Dilson Pereira Caetano e Alexandre Grezzi de Miranda Schmidt. Apredei muito com esses professores, sempre estiveram dispostos.

Agradeço todos os professores do Instituto de Física da UFF que contribuíram com minha formação acadêmica durante estes dois anos de mestrado.

Agradeço ao professor Ernesto Fagundes Galvão, principalmente, ajudando a solucionar dúvidas com respeito aos conceitos de computação quântica, nos corredores do instituto.

Agradeço aos meus amigos e colegas da pós-graduação em física e aos grandes companheiros de sala.

Agradeço plenamente à Universidade Federal Fluminense pela oportunidade e disponibilidade de recursos fundamentais.

O trabalho de todas as funcionárias da biblioteca do instituto de física foi muito importante, desde a disponibilização de livros ao entendimento de eventuais atrasos na entrega, agradeço a todos.

Agradeço aos funcionários da secretária do curso de pós-graduação, em particular a Valéria Vanda Azevedo de Lima.

Bom, todos esses agradecimentos acima só foram possíveis graças a minha família, que sempre me apoiou nessa jornada. E por fim agradeço ao órgão de fomento, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Sumário

Resumo	xiii
Abstract	xiv
1 Introdução	1
2 Descrição Paraxial de um feixe luminoso	5
2.1 Aproximação Paraxial	7
2.1.1 Feixes Gaussianos	10
2.2 Graus de Liberdade de um Feixe Paraxial	13
2.2.1 Momento Angular	13
2.2.2 Modos Transversos	14
2.2.3 Polarização	25
2.3 Representação Geométrica dos Graus de Liberdade de Feixes Paraxiais	31
2.4 Graus de Liberdade de um Feixe Paraxial para a Codificação e o Processamento de Informação Quântica	34
3 Princípios da Teoria dos Jogos Quânticos	38
3.1 Modelo Físico do Dilema do Prisioneiro	41

4	Dilema do Prisioneiro com Modo Paraxial	50
4.1	Espaço de Estratégias	51
4.2	Operações de Emaranhamento	52
4.3	Descrição Experimental	53
4.4	Resultados Experimentais e Redução de Pena	62
5	Conclusões e Perspectivas	68
A	Transformações no Espaço de Qubits	70
B	Simulação Matemática da Versão Quântica do Dilema do Pri- sioneiro	74
	Referências Bibliográficas	84

Lista de Figuras

- 2.1 *Distribuição de intensidade óptica com perfil gaussiano. W é a distância a partir do eixo do feixe ao ponto onde a intensidade do campo cai $1/e^2$ do valor máximo.* 10
- 2.2 *Propagação de um feixe gaussiano na região em que está focalizado. Nesta região, o feixe laser tem a característica principal de uma onda plana, a frente de onda é plana. W_0 é a cintura do feixe, localizada no foco, Z_R é o comprimento de Rayleigh, a distância em que $W(z) = \sqrt{2}W_0$* 12
- 2.3 *A região escura indica a presença de luminosidade. (a) Distribuição espacial de intensidades do modo de um feixe laser com simetria retangular, HG_{mn} . (b) Distribuição espacial de intensidade do modo de um feixe laser com simetria cilíndrica, LG_{lp}* 17
- 2.4 *(a) Feixe com singularidade de fase nula, $l = 0$, o vetor de onda coincide com o eixo de propagação, é o caso do modo transversos fundamental. (b) Feixe com singularidade $l \neq 0$, o vetor de onda executa um movimento espiral em torno de eixo de propagação. Créditos para Padgett e Allen na referência [26].* 19

2.5	(a) <i>Máscara de difração para a produção experimental de um modo hermite-gaussiano, HG.</i> (b) <i>Máscara de difração para a produção experimental de um modo laguerre-gaussiano, LG.</i>	20
2.6	<i>Exemplos de decomposição de $LG_{\pm 10}$ e HG_{01}^{45}</i>	22
2.7	<i>Conversores astigmáticos: (a) Conversor $\pi/2$ e (b) Conversor π. Ambos os conversores são compostos por duas lentes cilíndricas com distância focal f. A distância entre as lentes é $f\sqrt{2}$ para o conversor $\pi/2$ e $2f$ para o conversor π. O conversor $\pi/2$ transforma um $HG_{01}^{45^\circ}$ em um LG_{+10} e o conversor π leva LG_{+10} em LG_{-10}.</i>	23
2.8	<i>Conversor Astigmático $\pi/2$ de modo com lentes cilíndricas. O conversor $\pi/2$ transforma um $HG_{01}^{45^\circ}$ em um LG_{+10}. A cintura do feixe W_0 está situada no foco das lentes, $z = 0$.</i>	24
2.9	<i>Conversor π de modo espacial: Prisma de Dove. Ele está rodado de um ângulo de 45° com a horizontal. O modo incidente é HG_{10} após passar pelo prisma se torna HG_{01}.</i>	24
2.10	<i>Vetor \vec{k} de propagação e os dois vetores de polarização \hat{e}_1 e \hat{e}_2. A superfície representa a frente de onda.</i>	27
2.11	<i>A composição do vetor intensidade \vec{E} em termos das ondas polarizadas linearmente, $E_1 \hat{e}_1$ e $E_2 \hat{e}_2$.</i>	28
2.12	<i>A composição do vetor intensidade \vec{E} em termos das ondas polarizadas linearmente E_1 e E_2. Neste caso, há uma diferença de fase ϕ entre as duas amplitudes. A onda está polarizada à direita, isto é, helicidade h positiva.</i>	29

2.13	<i>A composição do vetor intensidade \vec{E} em termos das ondas polarizadas linearmente E_1 e E_2. Aqui, as amplitudes estão defasadas de $\phi = \pm\pi/2$. Onda polarizada circularmente à esquerda, helecidade h positiva.</i>	30
2.14	<i>(a) Esfera de Poincaré com estados de polarização indicados e (b) Esfera de Modo Primeira Ordem com os modos de indicados.</i>	33
2.15	<i>Representação geométrica de um qubit na esfera de Bloch. O estado $\psi\rangle$ é representado por um vetor apontando da origem a um ponto na superfície da esfera unitária. A direção do vetor é definida pelos ângulos polar θ e azimutal φ.</i>	36
2.16	<i>Convenção entre polarização, modo espacial e bases computacionais. Na linha superior, o estado de polarização horizontal \hat{e}_H e modo espacial horizontal $\psi_h(\mathbf{r})$ (HG_{10}) estão associados ao estado de base computacional $0\rangle$. Na linha inferior, polarização vertical \hat{e}_V e modo espacial vertical $\psi_v(\mathbf{r})$ (HG_{01}) estão codificados no estado de base computacional $1\rangle$.</i>	37
3.1	<i>Circuito do Dilema do Prisioneiro Clássico. Uma fonte de dois bits C de informação. Os artefatos de Alice e Bob, U_A e U_B, respectivamente. Por fim, o dispositivo de medida.</i>	42
3.2	<i>Circuito do Dilema do Prisioneiro Quântico proposto por Eisert et al. [12]. O primeiro dispositivo é o estágio de preparação do estado inicial $\psi_0\rangle$. Em seguida, os artefatos de Alice e Bob, \hat{U}_A e \hat{U}_B, respectivamente. O segundo dispositivo é representado por \hat{U}^\dagger e finalmente as medidas são realizadas do estado final $\psi_f\rangle$.</i>	43

3.3	<i>Redução de pena de Alice calculado por Eisert et al., no Dilema do Prisioneiro Quântico como função das estratégias \hat{U}_A e \hat{U}_B, com estado inicial $\psi_i\rangle$ maximamente emaranhado. A construção do gráfico foi desenvolvida parametrizando as estratégias \hat{U}_A e \hat{U}_B com o parâmetro $\tau \in [-1, 1]$. Assim, $\hat{U}_A = \hat{U}(\tau\pi, 0)$ para $\tau \in [0, 1]$ e $\hat{U}_A = \hat{U}(0, -\tau\pi)$ para $\tau \in [-1, 0]$. Fazendo o mesmo para Bob. Cooperar \hat{C} corresponde a $\tau = 0$, acusar \hat{D} a $\tau = 1$ e \hat{Q} é representado por $\tau = -1$.</i>	47
3.4	<i>Redução de pena de Bob no Dilema do Prisioneiro Quântico como função das estratégias \hat{U}_A e \hat{U}_B, com estado inicial $\psi_i\rangle$ maximamente emaranhado. A construção do gráfico foi desenvolvida seguindo a mesma parametrização da Figura 3.3.</i>	48
4.1	<i>Circuito para a versão quântica do Dilema do Prisioneiro, $C(\theta, \phi)$ é um conversor de modos e $MZ(\phi)$ é um interferômetro de Mach-Zehnder. A região delimitada à esquerda é o estágio de preparação do estado inicial do jogo $\psi_h(\mathbf{r})\hat{e}_H\rangle$. O estado $\Psi_2\rangle$ é medido e assim computada as reduções de pena $\\$_j(\hat{U}_A, \hat{U}_B)$.</i>	53

- 4.2 *Desenho esquemático do esquema (“setup”) experimental para implementar a versão quântica do Dilema do Prisioneiro. Um laser de HE-Ne (632,8 nm) emite o modo fundamental, TEM_{00} . Após passar pela máscara de difração MÁ-S-HG, o modo é $|\psi_h(\mathbf{r})\hat{e}_H\rangle$. O estágio de preparação do estado $|\Psi_0\rangle$ é composto por uma QWP e o primeiro MZ. Os artefatos de Alice e Bob estão representado por esferas. A operação U^\dagger é obtida pelo dispositivo composto por um dois MZ’s e uma QWP. E por fim, o dispositivo de medida é proposto por um PBS, dois interferômetros Mach-Zehnder modificados (um espelho adicional) e quatro detectores. 54*
- 4.3 *Desenho esquemático do primeiro interferômetro Mach-Zehnder com um PBS na entrada e na saída, mostrado no esquema experimental. Em um dos braços tem um prisma de Dove rodado de 45° com relação ao plano da mesa ótica. Com esta configuração, ele realiza a transformação $MZ(0)$, Equação (4.7). . . 55*
- 4.4 *Tabela de coeficientes do modo $\Psi_2(\mathbf{r})$, o modo final, nas bases computacionais que rotulamos como sendo $|C\rangle$ e $|D\rangle$. Os valores numéricos são os coeficientes c_{mn} . Vamos tomar um exemplo para esclarecer como procede a leitura da tabela. Digamos que Alice (Coluna) escolha a estratégia iX e Bob (linha) escolha a estratégia Q_2 , a jogada correspondente para estas duas escolhas é dada por $iX \otimes Q_2$. O estado final para a jogada é $|\Psi_2(\mathbf{r})\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(|D \otimes C\rangle + |C \otimes D\rangle) \Rightarrow |\Psi_2(\mathbf{r})\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(|DC\rangle + |CD\rangle)$. O restante é obtido seguindo o exemplo. . . 60*

4.5	<i>Desenho esquemático de um interferômetro Mach-Zehnder com um espelho adicional em um dos braços. Este é conhecido na literatura como MZIM.</i>	61
4.6	<i>Tabela de resultado das medidas de $\Psi_2(\mathbf{r})\rangle$, o modo final, nas bases de modos espaciais e modo de polarização. As linhas estão subdivididas em bases de vetores de polarização linear, $\hat{e}_H\rangle \equiv H$ e $\hat{e}_V\rangle \equiv V$. As colunas estão subdivididas em bases de vetores de modo espacial de HG, $\psi_h\rangle \equiv h$ e $\psi_v\rangle \equiv v$. A leitura da tabela é feita seguindo a leitura da tabela na Figura 4.4.</i>	63
4.7	<i>Imagens da tela do osciloscópio para o registro de intensidade de uma jogada, $iZ \otimes Q_2$ (imagem da CCD). A tela a frente mostra a intensidade detectada e a tela atrás é a intensidade de ruído.</i>	64
4.8	<i>Redução de pena de Alice para um jogo com modo maximamente não separável. Construimos o gráfico escolhendo uma parametrização de tal maneira que as estratégias $C(\theta_A, \phi_A)$ e $C(\theta_B, \phi_B)$ dependam do parâmetro $\tau \in [-1, 1]$, ao passo que $C_A = C(0, \tau\pi)$ para $\tau \in [0, 1]$ e $C_A = C(\pi/4, -\tau\pi)$ para $\tau \in [-1, 0)$. A estratégia I (cooperar) corresponde ao valor $\tau = 0$, iX (acusar) a $\tau = -1$, e iZ é representada por $\tau = 1$. Os pontos correspondem aos valores experimentais obtidos com as medidas de intensidade.</i>	66

4.9	<i>Redução de pena de Bob para a versão quântica do Dilema do Prisioneiro usando um modo maximamente não separável. Construimos o gráfico seguindo a mesma parametrização que adotamos para construir o gráfico de redução de pena de Alice, Figura 4.8. Os pontos correspondem aos valores experimentais obtidos com as medidas de intensidade.</i>	67
A.1	<i>Circuito quântico para a criação de estado maximamente emaranhado, isto é, o estado de Bell $\frac{1}{\sqrt{2}}[00\rangle + 11\rangle]$. Combinação de uma Hadamard e um CNOT.</i>	72

Resumo

Neste trabalho a abordagem da mecânica quântica para o conhecido Dilema do Prisioneiro, um dos exemplos básicos que ilustra os conceitos da teoria dos jogos, é implementada com uso da não separabilidade de feixes paraxiais clássicos cuja estrutura recentemente foi denominada como emaranhamento não quântico entre graus de liberdade de polarização e modos transversos, também chamados modos “spin-órbita”. O conceito de emaranhamento é fundamental na versão quântica do Dilema do Prisioneiro, que traz um rico universo de estratégias. Como mostraremos, essa riqueza pode ser alcançada num contexto inesperado, que é o de modos paraxiais de spin-órbita na óptica clássica. Apresentaremos a descrição de feixes paraxiais e como os graus de liberdade de polarização e de modos transversos podem ser usados no processamento de informação quântica. Discutiremos brevemente o Dilema do Prisioneiro clássico e quântico. Demonstraremos e apresentaremos uma realização experimental do Dilema do Prisioneiro Quântico com o uso do emaranhamento não quântico em modos paraxiais clássicos.

Palavras-chave: Modos paraxiais, Dilema do Prisioneiro, Jogos Quânticos, Informação Quântica.

Abstract

In this work, the approach of quantum mechanics to the well known Prisoner's Dilemma, one of the basic examples that illustrates the concepts of game theory is implemented with the use of the non separability of a classical paraxial beam whose structure was recently called non quantum entanglement between the polarization and transverse mode degree of freedom, also called spin-orbit. Entanglement is fundamental in the quantum version of the Prisoner's Dilemma, which brings a rich strategies universe. As we will show, this wealth can be achieved in a unexpected context: the paraxial spin-orbit mode in classical optics. We will present the description of the paraxial beam and the polarization and transverse mode degrees of freedom that can be used in quantum information processing. We will briefly discuss the Classical and Quantum Prisoner's Dilemma. We will present a experimental realization of Quantum Prisoner's Dilemma and also demonstrate it with non quantum entanglement in classical paraxial modes.

Keywords: Paraxial Modes, Prisoner's Dilemma, Quantum Games, Quantum Information.

Capítulo 1

Introdução

Uma das mais recentes aplicações da mecânica quântica é seu uso em informação e computação quântica através da implementação de algoritmos computacionais, como por exemplo, a fatoração de números primos [1] e a busca em banco de dados [2]. A vantagem de tal implementação é a velocidade de efetuar os cálculos computacionais sobretudo devido o paralelismo obtido pela superposição de estados e o emaranhamento quântico. Este é uma propriedade usualmente atribuída a sistemas quânticos compostos que não são descritos separadamente, ou seja, que não podem ser descritos por um vetor de estado em termos de um produto tensorial de vetores. Esta propriedade é sensível à medidas locais não unitárias realizadas em cada parte do sistema composto, mas não é afetada por operações locais unitárias.

Inúmeros protocolos de informação quântica dependem do emaranhamento. A teleportação quântica [3] é um exemplo de protocolo conhecido que dependem do emaranhamento quântico. Os protocolos de teleportação são obtidos com o uso de estados emaranhados, comunicação clássica seguindo operações locais unitárias e medidas. Em alguns casos, a criptografia quântica [4] usa estados quânticos emaranhados.

No que se refere a luz, uma aplicação de grande interesse é o uso de seus graus de liberdade, em geral a nível de foto-contagem, em operações lógicas como também foi proposto por Zeilinger et al. na referência [5]. Por exemplo, na conversão paramétrica descendente espontânea, onde pares de fótons são gerados a partir de um feixe de bombeamento que carrega momento angular orbital, os estados dos fótons apresentam emaranhamento neste grau de liberdade de cada fóton que compõe o par gerado [6]. Com os modos espaciais do campo eletromagnético carregando momento angular orbital podemos obter emaranhamento multidimensional. Assim, definimos um espaço de Hilbert discreto multidimensional. O momento angular orbital oferece um sistema de multiestados que pode ser combinado com o momento angular intrínseco (spin) ou outros graus de liberdade.

Embora frequentemente atribuídos a sistemas quânticos, emaranhamento tem sido identificado em óptica clássica como uma superposição coerente de modos paraxiais com perfil espacial transversal e polarização ortogonal de um feixe luminoso. Na literatura, esta superposição é referida como *Modos Paraxiais “Spin-Órbita”*. O uso dos modos paraxiais spin-órbita como um recurso óptico clássico para investigar inúmeros fenômenos já é evidenciado na literatura, como a fase topológica adquirida por um estado emaranhado seguindo uma evoluções cíclicas dentro de operações locais unitárias [7] e para demonstrar criptografia quântica BB84 livre de alinhamento [8]. Além disso, uma desigualdade tipo Bell para modos “spin-órbita” foi investigada em domínios clássicos [9].

Na descrição da teoria eletromagnética da luz, a energia pode ser identificada com uma direção normal da frente de onda. Se a aproximação paraxial garante que as direções de propagação da onda eletromagnética são todas exclusivamente ao mesmo eixo de referência, a equação da onda eletromag-

nética, obtida a partir das equações de Maxwell, pode ser substituída por uma equação diferencial de segunda ordem, a *Equação Paraxial de Helmholtz*. Esta equação descreve, por exemplo, a propagação de feixes lasers.

Se considerarmos um feixe laser monocromático se propagando ao longo da direção z , usualmente, podemos descrevê-lo pelo seu vetor unitário de polarização \hat{e} e seu modo espacial $\psi(\vec{r})$. Os modos espaciais ou modos transversos em coordenadas cartesianas são as soluções de Hermite-Gauss (*HG*) da equação paraxial da onda e, em coordenadas cilíndricas, são as soluções de Laguerre-Gauss (*LG*). O subespaço dos modos espaciais de primeira ordem têm uma estrutura de qubit similar ao espaço de modos da polarização. A combinação dos dois espaços de modos podemos gerar um modo paraxial spin-órbita não separável.

Para estudos de situações de conflito e tomadas de decisões, a teoria de jogos tem um importante papel. Os conceitos de teorias de jogos estão presentes em diferentes áreas de conhecimento. Como a economia [10] e a biologia evolucionária [11]. A ação de dois ou mais jogadores pode ser modulada em regras típicas de um determinado campo e podemos simular estes jogos em sistemas físicos.

A teoria de jogos é um bom cenário para aplicar conceitos da mecânica quântica. A versão quântica [12] do Dilema do Prisioneiro é um exemplo onde a aplicação da mecânica quântica favorece aos jogadores terem um sucesso maior do que na versão clássica desse jogo. A versão quântica usa o emaranhamento como um recurso fundamental e as estratégias dos jogadores para atuarem em um sistema quântico são operações unitárias [13].

Sabendo, então, que podemos associar informação, sobre tudo, informação quântica codificada nos graus de liberdade de um feixe luminoso, propomos assim uma implementação óptica para a versão quântica do Dilema

do Prisioneiro. Além de sermos capazes de preparar o estado emaranhado, elemento fundamental do jogo quântico, podemos efetuar as estratégias dos jogadores por meio de operações unitárias locais associadas à ação de elementos ópticos sobre feixes.

Até o momento, na literatura, ocorreram duas realizações experimentais da versão quântica do Dilema do Prisioneiro: uma usando um computador quântico por Ressonância Magnética Nuclear [14] e a outra na computação quântica unidirecional (“one-way”) [15]. Neste último, usando estados “clusters”, onde foi empregado o emaranhamento de pares de fótons produzidos por conversão paramétrica descendente. Na implementação experimental do Dilema do Prisioneiro apresentada nesta dissertação, o número de decisões de cada jogador foi aumentado e, obtivemos um total de vinte e cinco jogadas, nove a mais do que na última implementação obtida pelo grupo de Zeilinger [15].

Outra motivação para implementar o Dilema do Prisioneiro Quântico é que acredita-se que muitos problemas em informação quântica podem ser considerados como jogos quânticos, por exemplo clonagem quântica [16], criptografia quântica [4] e algoritmos quânticos [13].

A dissertação está organizada da seguinte maneira: no Capítulo 2, apresentaremos uma revisão de propagação de feixes lasers, além do seu rico potencial para aplicação em informação quântica considerando um modo paraxial “spin-órbita”. No capítulo 3, apresentaremos os conceitos básicos de um jogo clássico e quântico, em especial o problema do Dilema do Prisioneiro. No capítulo 4, abordaremos a implementação experimental do Dilema do Prisioneiro Quântico usando um modo paraxial “spin-órbita” maximamente entranhado. Por fim, no Capítulo 5, apresentaremos as principais conclusões e perspectivas deste trabalho.

Capítulo 2

Descrição Paraxial de um feixe luminoso

A descrição clássica do campo eletromagnético é completamente feita pelas equações de Maxwell que são generalizações de resultados experimentais.

Em regiões do espaço onde não há carga ou corrente, isto é, no vácuo, as equações de Maxwell são escritas como [17]:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 \quad (2.3)$$

e

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0, \quad (2.4)$$

onde μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo, ε_0 é a permissividade elétrica do vácuo, $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ é o vetor posição. Nestas equações notamos que

existe um elevado grau de simetria entre os campos elétrico \vec{E} e magnético \vec{B} , diferenciando-se por uma constante. São equações de primeira ordem fortemente acopladas, definindo uma auto sustentação entre as duas grandezas físicas.

As equações de Maxwell podem ser manipuladas matematicamente obtendo-se duas equações compactas, para construir estas equações, basta aplicar o rotacional sobre os membros das Equações (2.1) e (2.2), de modo que obtemos

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (2.5)$$

e

$$\nabla^2 \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t^2}, \quad (2.6)$$

onde usamos a identidade vetorial

$$\nabla \times (\times \nabla) = \nabla (\nabla \cdot) - \nabla^2.$$

As Equações (2.5) e (2.6) são separadas para o campos elétrico e magnético, porém, agora, as equações são de segunda ordem.

Se compararmos as Equações (2.5) e (2.6) com a equação de onda tridimensional

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (2.7)$$

concluimos que as componentes do campo eletromagnético são soluções de uma equação de onda, a *Equação da Onda Eletromagnética*. Além disso, a velocidade de propagação da onda eletromagnética, isto é,

$$v = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0},$$

que é precisamente a velocidade da luz c .

As Equações (2.5) e (2.6) representam seis equações escalares, em qualquer sistema de coordenada, seja esta, cartesiana, cilíndrica ou esférica.

Considerando o tipo mais simples de ondas em três dimensões, as ondas planas, e usando o eixo z como a direção de propagação, além de garantir que os campos são uniformes em todos os planos perpendiculares à direção de propagação, a onda plana pode ser representada pela seguinte amplitude do campo elétrico (solução da Equação 2.5):

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\kappa z - \omega t)}, \quad (2.8)$$

onde \vec{E}_0 é a amplitude do campo elétrico no plano perpendicular ao eixo de propagação e $(\kappa z - \omega t)$ expressa a fase da mesma, sendo que $\kappa = 2\pi/\lambda$ é o módulo do vetor de onda e ω é a frequência da onda eletromagnética.

Justamente devido a extensão transversal de \vec{E}_0 ser limitada no infinito, a Equação (2.8) não descreve um feixe laser. Uma solução mais apropriada será discutida na Seção 2.1, a fim de se obter uma equação que descreva um feixe laser.

2.1 Aproximação Paraxial

As ondas planas são soluções muito importantes do ponto de vista matemático. Porém, elas apresentam complicações quando analisamos fenomenologicamente, pois não têm significado físico, já que a energia das ondas planas é infinita ao longo da sua evolução espacial devido sua amplitude ser uniforme em todo o plano infinito de fase constante nesse plano. Para um feixe laser, não encontramos essa complicação. A distribuição da sua intensidade, em qualquer plano transversal, é representada por uma função gaussiana com

simetria circular centrada em torno do eixo de propagação do feixe. De acordo com esse comportamento, o campo pode ser escrito como:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{e}u(x, y, z) e^{-i\omega t}, \quad (2.9)$$

onde $u(x, y, z)$ é a dependência espacial.

Substituindo a Equação (2.9) na Equação (2.5) obtemos a *Equação de Helmholtz*

$$\nabla^2 u + \kappa^2 u = 0. \quad (2.10)$$

Para o feixe laser se propagando na direção do eixo z , a equação acima tem solução da forma

$$u(x, y, z) = \psi(x, y, z) e^{-i\kappa z}. \quad (2.11)$$

Fazendo o uso desta solução na Equação (2.10), obtemos a seguinte equação:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - 2i\kappa \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad (2.12)$$

onde ψ é a amplitude do campo elétrico. Para um feixe laser cuja amplitude varia lentamente ao longo da direção de propagação em comparação com um comprimento de onda λ , podemos aplicar a aproximação

$$\left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right| \ll \left| \kappa \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|, \quad (2.13)$$

onde desprezamos o termo $\partial^2 \psi / \partial z^2$. Esta é a chamada *aproximação paraxial*. Sendo assim, isto resulta na equação

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - 2i\kappa \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad (2.14)$$

que é a chamada de *Equação Paraxial da equação de Helmholtz*. Podemos reescrever esta equação como:

$$\nabla_{\perp}^2 \psi - 2i\kappa \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad (2.15)$$

onde ∇_{\perp}^2 é o Laplaciano nas coordenadas transversais (x, y) .

A Equação (2.15) é análoga à equação de Schrödinger para um partícula livre com z fazendo o papel de tempo, sendo que a solução desse tipo de equação é tem a seguinte forma:

$$\psi(x, y, z) = A \text{Exp} \left[-ip(z) - \kappa \frac{\rho^2}{2q(z)} \right], \quad (2.16)$$

onde, $\rho^2 = x^2 + y^2$ é a dependência transversal e A é uma constante. O parâmetro $p(z)$ representa uma mudança de fase complexa que está associado com a propagação do feixe luminoso, e $q(z)$ é um parâmetro complexo do feixe que descreve variação gaussiana na intensidade do feixe com a distância ρ do eixo óptico [18]. Este é o chamado *feixe paraxial*.

Quando substituimos a Equação (2.16) na Equação (2.14) e analisamos os coeficientes que possuem a mesma potência em ρ , obtemos as equações que determinam $p(z)$ e $q(z)$

$$\kappa \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{q(z)} \right) + \frac{1}{q^2(z)} = 0 \quad (2.17a)$$

$$\frac{dp(z)}{dz} = -\frac{i}{q(z)} \quad (2.17b)$$

O sistema de Equação (2.17) é a forma reduzida da Equação (2.5) para um feixe de luz coerente e monocromático, isto é, a diferença de fase é constante no espaço e no tempo de ondas eletromagnéticas que apresentam apenas um comprimento de onda.

2.1.1 Feixes Gaussianos

O perfil transversal da intensidade óptica é descrito por uma função gaussiana, Figura 2.1, também chamado de *Modo transversal fundamental* de propagação.

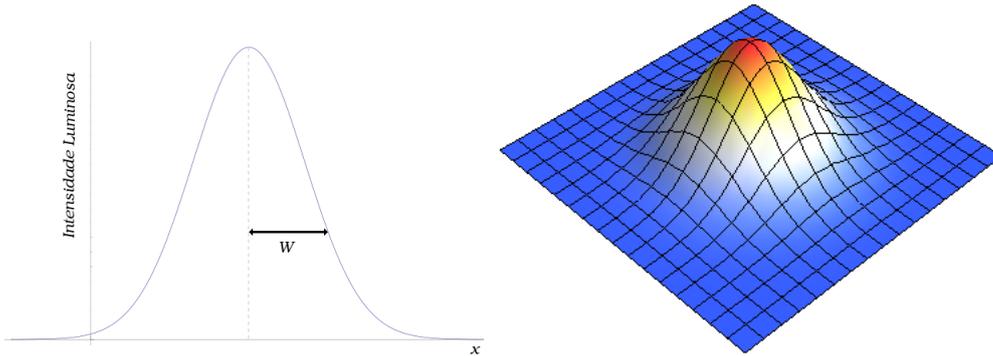


Figura 2.1: *Distribuição de intensidade óptica com perfil gaussiano. W é a distância a partir do eixo do feixe ao ponto onde a intensidade do campo cai $1/e^2$ do valor máximo.*

As soluções das equações reduzidas, Equação (2.17), estão disponíveis na referência [19]. Para $q(z)$, temos a seguinte função complexa:

$$q(z) = z + iz_R, \quad (2.18)$$

onde $z_R = \pi W_0^2/\lambda$, chamado de *comprimento de Rayleigh*, é a distância da *cintura do feixe*,¹ W_0 , aumentada por um fator $\sqrt{2}$. A cintura do feixe é o local em que o raio do feixe é mínimo, obtido na região focal. Estas duas constantes estão ilustradas na Figura 2.2.

A expressão para $p(z)$ é encontrada substituindo a Equação (2.18) na Equação (2.17), que resulta

¹Cintura do feixe, que em inglês é Beam Waist, razão pela qual é identificada pela letra W_0 .

$$-i p(z) = -\ln \sqrt{\left(1 + \frac{z_R^2}{z^2}\right)} + i \arctan\left(\frac{z_R}{z}\right), \quad (2.19)$$

onde usamos a propriedade $i \ln(a + ib) = \ln \sqrt{a^2 + b^2} + i \arctan(b/a)$.

Neste momento, obtidas as expressões para $q(z)$ e $p(z)$, uma solução da equação paraxial, Equação (2.16), está completa. Para facilitar a descrição e compreensão de um feixe gaussiano vamos escrever a razão $1/q(z)$ como:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{2}{\kappa W(z)}, \quad (2.20)$$

onde

$$R(z) = z \left(1 + \frac{z_R^2}{z^2}\right),$$

é um parâmetro real conhecido como *Raio de Curvatura* da frente de onda e

$$W(z) = W_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}},$$

que também é um parâmetro real, interpretado como a *Largura do feixe*. A frente de onda é esférica, logo, $R(z)$ e $W(z)$ variam conforme o feixe se propaga (divergindo ou convergindo) de acordo com a direção z . Na distância em que $\rho = W(z)$, a amplitude do campo toma o valor $1/e$ em relação à distância $\rho = W_0$.

Para o fator que envolve a função $p(z)$, seguindo a referência [20], temos:

$$e^{-ip(z)} = \frac{W_0}{W(z)} e^{i\varphi(z)}, \quad (2.21)$$

onde

$$\varphi(z) = \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right),$$

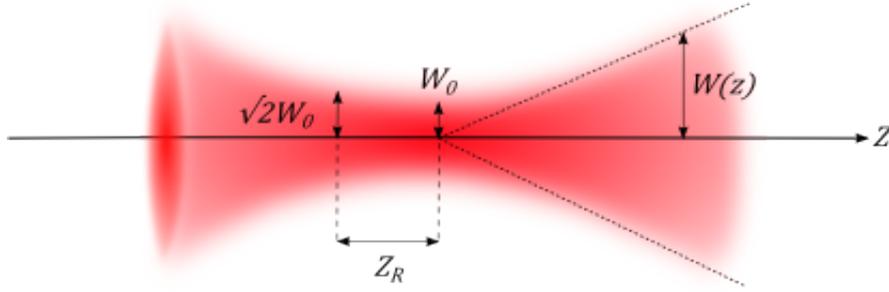


Figura 2.2: Propagação de um feixe gaussiano na região em que está focalizado. Nesta região, o feixe laser tem a característica principal de uma onda plana, a frente de onda é plana. W_0 é a cintura do feixe, localizada no foco, Z_R é o comprimento de Rayleigh, a distância em que $W(z) = \sqrt{2}W_0$.

é conhecida como *fase de Gouy*. Esta fase é uma mudança de fase adicional que um feixe gaussiano adquire ao longo da sua direção de propagação.

Agora, com todos estes resultados para o feixe gaussiano fundamental, podemos reescrever a expressão para a solução da equação de Helmholtz como

$$\psi(x, y, z) = A \frac{W_0}{W(z)} \text{Exp} \left[-i\kappa z - \frac{\rho^2}{W^2(z)} - i\kappa \frac{\rho^2}{2R(z)} + i\varphi(z) \right]. \quad (2.22)$$

Feixes gaussianos deste tipo são produzidos por muitos lasers que oscilam no modo transversal fundamental [21]. Por meio da Figura 2.2 podemos identificar todos parâmetros associados ao feixe gaussiano. A intensidade I do feixe fundamental é proporcional ao módulo quadrado da amplitude. Tomando o módulo quadrado de ψ na Equação (2.22), obtemos:

$$I(x, y, z) \propto |\psi(x, y, z)|^2 = 2|A|^2 \frac{W_0^2}{\pi W^2(z)} \text{Exp} \left[-2 \frac{\rho^2}{W^2(z)} \right]. \quad (2.23)$$

Como consideramos anteriormente, a intensidade tem um perfil gaussiano,

como ilustrado na Figura 2.1.

2.2 Graus de Liberdade de um Feixe Paraxial

Um modo paraxial possui estruturas muito mais ricas que um feixe gaussiano. Estas estruturas podem ser usadas como graus de liberdade para manipulação e aplicação em diversos problemas. Vamos apresentar nesta seção os principais graus de liberdade de feixes paraxiais e seu uso para informação quântica.

2.2.1 Momento Angular

Uma das propriedades mais significante da teoria de Maxwell é que prediz que a onda eletromagnética transporta energia e momento [22]. O momento total da luz é composto por momento linear e momento angular. O momento angular total \vec{J} de um campo eletromagnético é dado por

$$\vec{J} = \varepsilon_0 \int \vec{r} \times [\vec{E} \times \vec{B}] d^3\vec{r} \quad (2.24)$$

A expressão entre colchetes é a taxa temporal do fluxo de energia eletromagnética por unidade de área denominada como o vetor de Poynting. O momento angular relacionado com o campo de radiação é dado por:

$$\vec{J}_{rad} = \vec{L}_{rad} + \vec{S}_{rad}, \quad (2.25)$$

com

$$\vec{S}_{rad} = \varepsilon_0 \int d^3\vec{r} \vec{E}_\perp \times \vec{A}_\perp, \quad (2.26a)$$

e

$$\vec{L}_{rad} = \varepsilon_0 \sum_{j=x,y} \int d^3\vec{r} E_j^\perp (\vec{r} \times \nabla) A_j^\perp, \quad (2.26b)$$

onde \vec{A}_\perp é potencial vetor transversal e obedece a seguinte relação entre o campo elétrico:

$$\vec{E}_\perp = -\frac{\partial \vec{A}_\perp}{\partial t}.$$

O momento angular total é composto pelas partes intrínseca \vec{S}_{rad} e a parte orbital \vec{L}_{rad} , extrínseca, Equações (2.26a) e (2.26b), respectivamente. A parte intrínseca não depende da definição da origem do sistema de coordenadas, o que é diferente para a parte orbital [23]. O momento angular intrínseco está associado com os estados de polarização circular, já momento angular orbital está associado com a estrutura espacial da frente de onda. Nas próximas duas subseções abordaremos os modos paraxiais com estrutura espacial da frente de onda bem definida e seus estados de polarizações.

2.2.2 Modos Transversos

As características espaciais de um feixe laser estão estritamente relacionadas com os modos transversos do feixe, como a divergência, o diâmetro e a distribuição transversal de energia.

Até agora obtivemos apenas a expressão matemática para um feixe de luz em que o perfil de intensidade em qualquer seção transversal do feixe é dado por uma função gaussiana, Equação (2.22). Ou seja, a variação da amplitude do campo depende somente da distância de z e da distância ρ do eixo. Existem outros tipos de soluções da Equação (2.14), isto é, soluções mais gerais com propriedades similares. Estas soluções formam um conjunto

completo de funções que são chamadas de *Modos Transversos de Propagação* [18]. Nesta seção, veremos as representações matemáticas dos modos de propagação nos sistemas de coordenadas cartesianas e cilíndricas. Os modos Hermite-gaussianos e Laguerre-gaussianos são, matematicamente, as soluções exatas e ao mesmo tempo conveniente para equação de onda paraxial no espaço livre.

2.2.2.1 Modos Hermite-gaussianos

As soluções da equação paraxial em coordenadas cartesianas são produtos de polinômios de Hermite com funções gaussianas, chamadas assim, funções de Hermite-Gauss:

$$\psi_{m,n}(x, y, z) = \frac{A_{mn}}{W(z)} H_m \left(\sqrt{2} \frac{x}{W(z)} \right) H_n \left(\sqrt{2} \frac{y}{W(z)} \right) \times \\ \times \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{W^2(z)} - i\kappa \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} + i\varphi(m, n, z) \right], \quad (2.27)$$

onde $H_n(x)$ é o polinômio de Hermite [24]. Na literatura, os modos são designados por HG_{mn} , em que os índices m e n representam número de linhas nodais de intensidade do feixe na direção vertical e na direção horizontal, respectivamente, determinando, assim, a forma do perfil transversal nestas duas direções. Ainda na equação acima, temos A_{mn} como sendo a constante de normalização. A soma dos índices do modo, $N = n + m$, indica a ordem do modo, por exemplo, $N = 0$; *Ordem zero ou fundamental*, $N = 1$; *Primeira Ordem*, e assim sucessivamente.

Alguns polinômios de Hermite de ordem inferior são apresentados abaixo

$$H_0(\nu) = 1, \quad (2.28a)$$

$$H_1(\nu) = \nu, \quad (2.28b)$$

$$H_2(\nu) = 4\nu^2 - 2, \quad (2.28c)$$

$$H_3(\nu) = 8\nu^3 - 12\nu. \quad (2.28d)$$

Os parâmetros $R(z)$ e $W(z)$ não são alterados para os modos de ordem superior, ou seja, a curvatura da frente de onda permanece como para um modo fundamental, ocorre apenas uma modificação na estrutura transversa do feixe e a fase de Gouy φ é função dos índices de m e n , descrita por:

$$\varphi(m, n, z) = (N + 1) \arctan \left(\frac{\lambda z}{\pi W_0^2} \right). \quad (2.29)$$

Isto significa que a velocidade de fase aumenta com a de ordem do modo. A Figura 2.3(a) apresenta a distribuição espacial de energia para as primeiras ordens do modo hermite-gaussiano. Como podemos ver, eles apresentam simetria retangular. O número de linhas nodais é igual à ordem N do modo HG_{mn} . Quanto maior a ordem transversa, mais complexa é a estrutura do modo. Outra característica que podemos destacar é que o modo transverso fundamental é obtido fazendo $m = 0$ e $n = 0$, que é o modo gaussiano descrito na Seção 2.1, como está ilustrado na Figura 2.3(a).

Os modos hermite-gaussianos não carregam momento angular orbital, apenas momento angular intrínseco, dependendo de sua polarização.

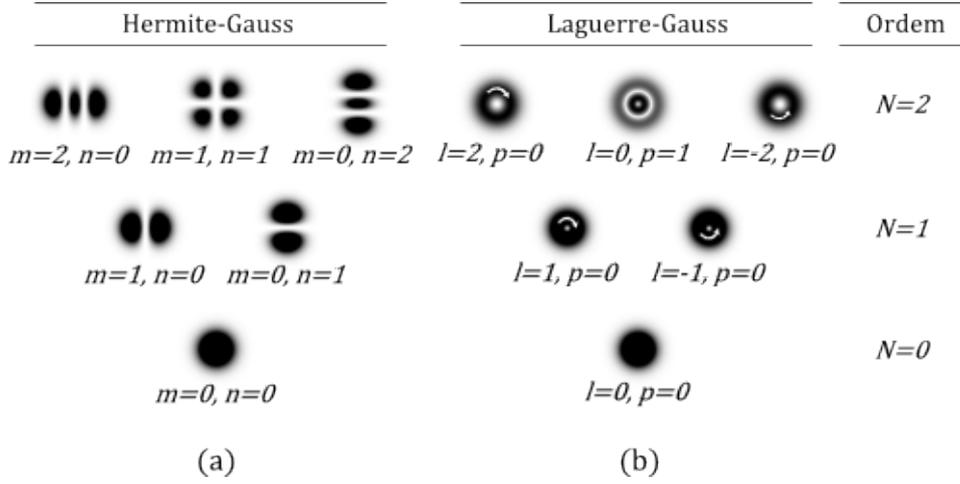


Figura 2.3: A região escura indica a presença de luminosidade. (a) Distribuição espacial de intensidades do modo de um feixe laser com simetria retangular, HG_{mn} . (b) Distribuição espacial de intensidade do modo de um feixe laser com simetria cilíndrica, LG_{lp} .

2.2.2.2 Modos Laguerre-gaussianos

As soluções da Equação (2.14) em coordenadas cilíndricas são os modos laguerre-gaussianos

$$\psi_{l,p}(\rho, \theta, z) = \frac{A_{lp}}{W(z)} \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{W(z)} \right)^l L_p^l \left(\frac{2\rho^2}{W^2(z)} \right) e^{il\theta} \times \exp \left[-\frac{\rho^2}{W^2(z)} + \frac{i\kappa\rho^2}{2R(z)} - i\varphi(l, p, z) \right], \quad (2.30)$$

onde as relações entre as coordenadas cilíndricas e cartesianas são

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (2.31)$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right) \quad (2.32)$$

e

$$z = z. \quad (2.33)$$

A solução, agora, contém os Polinômios de Laguerre L_p^l [24], por esse motivo leva o nome de Modos de Laguerre-Gauss, LG_{lp} . Os índices p e l são respectivamente os índices radial (número de anéis existentes na distribuição de intensidade) e azimutal (helicidade), sendo que $p \geq 0$ e ambos números inteiros. A constante A_{lp} é a constante de normalização.

Alguns polinômios de Laguerre de ordem inferior são apresentados abaixo:

$$L_0^l(\nu) = 1, \quad (2.34a)$$

$$L_1^l(\nu) = l + 1 - \nu, \quad (2.34b)$$

$$L_2^l(\nu) = \frac{1}{2}(l+1)(l+2) - (l+2)\nu + \frac{1}{2}\nu^2, \quad (2.34c)$$

$$L_3^l(\nu) = \frac{1}{6}(l+1)(l+2)(l+3) - \frac{1}{2}(l+2)(l+3)\nu + \frac{1}{2}(l+3)\nu^2 - \frac{1}{6}\nu^3 \quad (2.34d)$$

Nesse sistema de coordenada, os parâmetros $R(z)$ e $W(z)$ do feixe também permanecem inalterados, apenas a fase de Gouy é modificada novamente, como ocorreu em coordenadas cartesianas. A expressão para a fase de Gouy fica, agora, como uma função dos índices dos modos laguerre-gaussianos

$$\varphi(l, p, z) = (2p + |l| + 1) \arctan\left(\frac{\lambda z}{\pi W_0^2}\right). \quad (2.35)$$

A ordem do modo é dada por $N = 2p + |l|$ e, o modo transverso fundamental também é obtido fazendo $l = 0$ e $p = 0$, que conseqüentemente coincide com o feixe gaussiano, apresentado anteriormente.

O termo l na Equação (2.30), é conhecido como a carga topológica. Se l

for zero, a indefinição de θ , Equação (2.32), na origem do plano transversal implica em uma singularidade que se apresenta como uma região cuja radiância é nula.

Na Figura 2.3(b) encontramos a distribuição de intensidade das primeiras ordens dos modos de Laguerre-Gauss. Como podemos ver, a distribuição de intensidade apresenta simetria cilíndrica e o número de anéis que aparece na estrutura radial é igual ao valor de p . Para $p = 0$, a singularidade aumenta de acordo com o aumento do índice l . Na Figura 2.3(b), o modo laguerre-gaussiano de primeira ordem possui singularidade fase ao longo do eixo de propagação. Portanto, quando $l \neq 0$, o vetor de onda \vec{k} executa um movimento espiral em torno do eixo de propagação com helicidade l . Estes feixes são chamados de *Vórtices Ópticos* [25] e são ditos possuidores de momento angular orbital. A Figura 2.4(b) ilustra a frente de onda deste tipo de feixe. Para um feixe que não possui momento angular orbital, a frente de onda é representada na Figura 2.4(a).

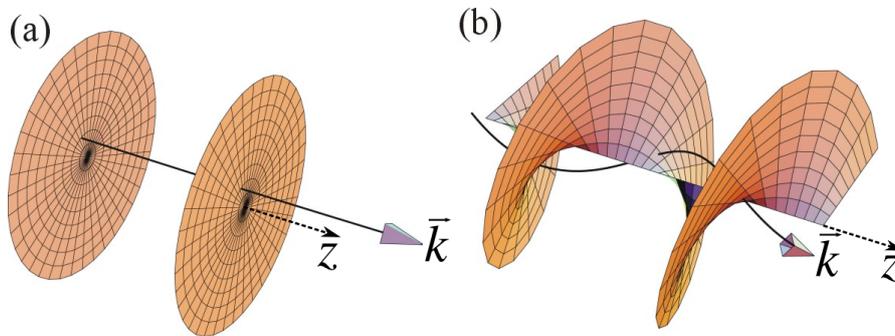


Figura 2.4: (a) Feixe com singularidade de fase nula, $l = 0$, o vetor de onda coincide com o eixo de propagação, é o caso do modo transversos fundamental. (b) Feixe com singularidade $l \neq 0$, o vetor de onda executa um movimento espiral em torno de eixo de propagação. Créditos para Padgett e Allen na referência [26].

2.2.2.3 Produção dos Modos Transversos

A produção dos modos transversos pode ser realizada por diferentes métodos. Podemos citar os métodos que utilizam meios de fase homogênea, como por exemplo, placas de fase espiral [27] e placas-Q [28]. Os métodos mais comumente usados nos laboratórios são o método holográfico [29] e o método astigmático [30].

No método holográfico, utiliza-se uma máscara [31] na qual foi gravada um padrão de interferência entre o campo desejado e um campo de referência. Inicialmente a interferência é simulada computacionalmente [32]. O campo de referência normalmente é uma onda plana ou um modo transversal fundamental do laser colimado. Ao incidirmos o campo de referência na máscara holográfica, as ordens de difração terão o perfil transversal usado para gerar as máscaras. Em nosso trabalho, o campo desejado foi o modo hermite-gaussiano de primeira ordem, HG_{10} . Assim, experimentalmente usamos uma máscara de difração para a produção de um feixe com perfil hermite-gaussiano. A Figura 2.5(a) ilustra esquematicamente a produção de um feixe com perfil HG e, para LG , Figura 2.5(b).

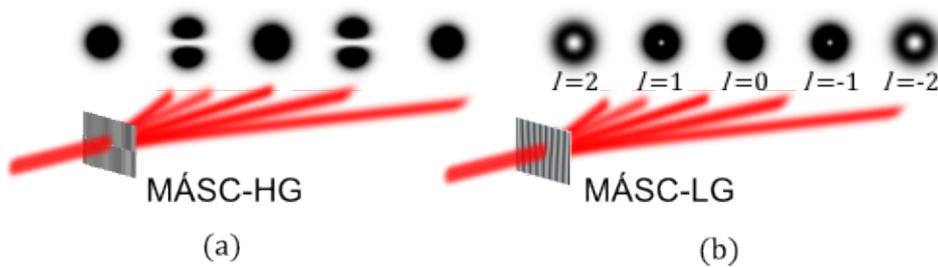


Figura 2.5: (a) Máscara de difração para a produção experimental de um modo hermite-gaussiano, HG . (b) Máscara de difração para a produção experimental de um modo laguerre-gaussiano, LG .

Antes de apresentar o outro método de conversão de modos transversos,

vamos entender um pouco da decomposição dos modos. Vimos que os modos hermite-gaussianos formam um conjunto completo ortogonal de modos, ou seja, qualquer feixe de luz monocromático pode ser entendido com uma superposição de modos HG com o mesmo eixo óptico, mesmo tamanho e posição da cintura, apenas com os índices do modo n e m diferentes. O conjunto de soluções de Laguerre-Gauss também formam um conjunto completo, com as mesmas propriedades do feixe, com os índices l e p .

Usando as relações entre os polinômios de Hermite e Laguerre é possível mostrar que os modos LG podem ser decompostos em uma soma de modos HG e vice-versa [30]:

$$\psi_{l,p}(x, y, z) = \sum_{\kappa=0}^N i^{\kappa} b(m, n, \kappa) \psi_{N-\kappa, \kappa}^{m,n}(x, y, z), \quad (2.36)$$

onde o fator i^{κ} é diferença de fase relativa entre as componentes do modo e o termo $b(m, n, \kappa)$ é um coeficiente real dado por

$$b(m, n, \kappa) = \left(\frac{(N - \kappa)! \kappa!}{2^N n! m!} \right)^{1/2} \frac{1}{\kappa!} \frac{d^{\kappa}}{dt^{\kappa}} [(1 - t)^n (1 + t)^m]_{t=0}. \quad (2.37)$$

Se usarmos as relações entre os produtos dos polinômios de Hermite, verificamos que o modo HG , cujo o eixo principal forma um ângulo de 45° com o plano (x, y) , pode ser decomposto dentro do mesmo conjunto

$$\psi_{m,n} \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}}, z \right) = \sum_{\kappa=0}^N b(m, n, \kappa) \psi_{N-\kappa, \kappa}^{m,n}(x, y, z), \quad (2.38)$$

onde a única diferença entre a Equação (2.36) é que as componentes sucessivas estão em fase. Na Figura 2.6 temos alguns exemplos de decomposição de modos de primeira ordem.

$$\begin{aligned}
\text{LG}_{+10} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \text{HG}_{01} - \text{HG}_{10} \} \\
\text{LG}_{-10} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \text{HG}_{01} + \text{HG}_{10} \} \\
\text{HG}_{01}^{45} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \text{HG}_{01} + i \text{HG}_{10} \} \\
\text{HG}_{10}^{45} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \text{HG}_{01} - i \text{HG}_{10} \}
\end{aligned}$$

Figura 2.6: Exemplos de decomposição de $LG_{\pm 10}$ e HG_{01}^{45}

Experimentalmente, as decomposições entre os modos transversos são realizadas por um conjunto de lentes cilíndricas, que irão formar os *Conversores Astigmáticos* de modos [22]. Os conversores de modos alteram a fase de Gouy relativa para transformar modos hermite-gaussianos em laguerre-gaussianos e vice-versa.

O conversor astigmático de lentes cilíndricas é construído fazendo a exploração da diferença da fase de Gouy dos termos sucessivos na Equação (2.36). A diferença de fase total é determinada por

$$\phi = 2 \left[\arctan \left(\sqrt{\frac{1+d/f}{1-d/f}} \right) - \arctan \left(\sqrt{\frac{1-d/f}{1+d/f}} \right) \right], \quad (2.39)$$

que varia de 0 a π . Na equação acima, d é a distância da cintura do feixe às lentes e f é a distância focal das lentes. O conversor é chamado astigmático justamente por que o feixe é astigmático entre as lentes cilíndricas. Experimentalmente, o modo que entra no conversor é adaptado pelo uso de lentes esféricas no processo conhecido como “casamento de modos”.

Então, se a diferença de fase é igual à $\pi/2$, implica que da Equação (2.39) que $d = f/\sqrt{2}$. Este conversor é chamado de *Conversor $\pi/2$* , que transforma um $HG_{01}^{45^\circ}$ em um LG_{+10} . Porém, se a diferença de fase é π , o conversor é chamado de *Conversor π* , e $d = f$. Este transforma LG_{+10} em LG_{-10} . Outro exemplo de transformação do conversor π é: quando rodado por um ângulo θ , ele transforma HG em um outro HG , porém, o modo é rodado de 2θ . Os dois tipos de conversores estão ilustrados na Figura 2.7.

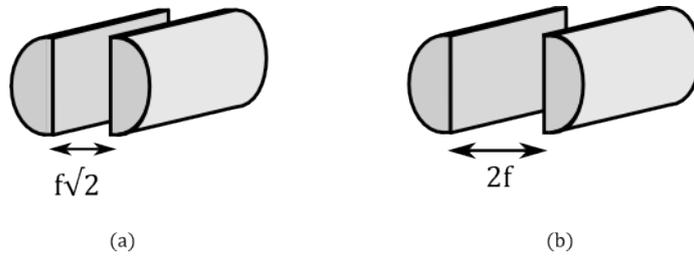


Figura 2.7: *Conversores astigmáticos: (a) Conversor $\pi/2$ e (b) Conversor π . Ambos os conversores são compostos por duas lentes cilíndricas com distância focal f . A distância entre as lentes é $f\sqrt{2}$ para o conversor $\pi/2$ e $2f$ para o conversor π . O conversor $\pi/2$ transforma um $HG_{01}^{45^\circ}$ em um LG_{+10} e o conversor π leva LG_{+10} em LG_{-10} .*

A Figura 2.8 ilustra a transformação que um conversor astigmático $\pi/2$. Um modo transversal $HG_{01}^{45^\circ}$ ao passar por conjunto de lentes cilíndricas é transformado em um modo LG_{+10} . Obteríamos esta mesma transformação, rodando de 45° o conjunto de lentes e incidindo um modo HG_{01} .

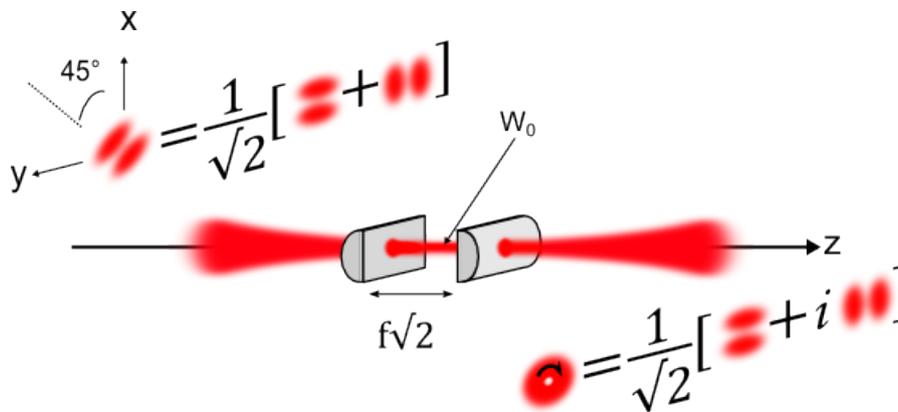


Figura 2.8: *Conversor Astigmático $\pi/2$ de modo com lentes cilíndricas. O conversor $\pi/2$ transforma um $HG_{01}^{45^\circ}$ em um LG_{+10} . A cintura do feixe W_0 está situada no foco das lentes, $z = 0$.*

Um outro tipo de conversor π de modo é o prisma de Dove, DP (do inglês Dove prism). Este componente óptico atua no perfil espacial flipando-o. Quando a base do prisma está rodada por um ângulo θ em relação a horizontal, além de flipar o perfil transverso ele gira-o por um ângulo de 2θ , como esperado para um conversor π . A Figura 2.9 ilustra um prisma de Dove operando em uma transformação HG_{01} em HG_{10} .

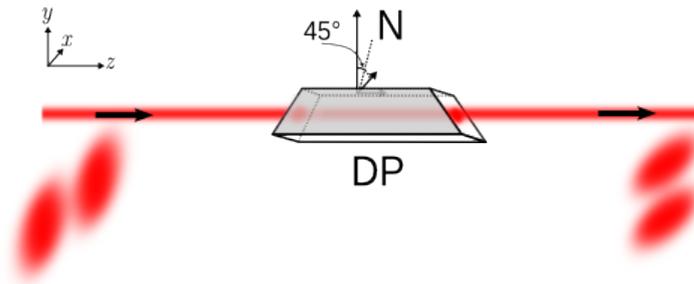


Figura 2.9: *Conversor π de modo espacial: Prisma de Dove. Ele está rodado de um ângulo de 45° com a horizontal. O modo incidente é HG_{10} após passar pelo prisma se torna HG_{01} .*

Com estes componentes podemos transformar os modos HG e LG de

primeira ordem uns nos outros.

2.2.3 Polarização

As características espaciais de feixes no espaço livre são descritas pelas soluções da equação de Helmholtz escalar tanto para um sistema com simetria retangular (x, y, z) , modos HG_{mn} , quanto para um sistema de simetria cilíndrica (ρ, θ, z) , modos LG_{lp} . A equação de Helmholtz escalar também é usada para descrever a propagação de onda eletromagnética linearmente polarizada de uma única componente cartesiana de um campo vetorial arbitrário [33].

Como vimos na Seção 2.1, a onda plana, para o campo elétrico, Equação (2.8), é dada por

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\kappa \vec{n} \cdot \vec{r} - \omega t)}. \quad (2.40)$$

Da mesma forma, para o campo magnético temos

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}_0 e^{i(\kappa \vec{n} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (2.41)$$

com ω é frequência e $\vec{\kappa}$ é o vetor de onda. As Equações (2.40) e (2.41) satisfazem tanto a equação de Helmholtz vetorial como todas as equações de Maxwell no vácuo. Os vetores \vec{E}_0 , \vec{B}_0 e \vec{n} são constantes. Para assegurarmos a relação do vetor de onda e da frequência,

$$\kappa = \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \omega,$$

devemos ter que o vetor \vec{n} dos campos satisfaça

$$\vec{n} \cdot \vec{n} = 1.$$

Das duas equações de Maxwell, Equações (2.3) e (2.4), ou seja, das equações de divergência,

$$\vec{n} \cdot \vec{E}_0 = 0 \quad (2.42)$$

e

$$\vec{n} \cdot \vec{B}_0 = 0. \quad (2.43)$$

Assim, o caráter transversal do campo eletromagnético é estabelecido. Isto significa que \vec{E}_0 e \vec{B}_0 são ambos perpendiculares à direção de propagação \vec{n} . Motivo pelo qual a onda é chamada *Onda Transversal*. Já as equações rotacionais, Equações (2.1) e (2.2), apresentam uma nova restrição,

$$\vec{B}_0 = \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \vec{n} \times \vec{E}_0.$$

Quando os campos elétrico e magnético têm a mesma fase, o vetor \vec{n} é real. Neste caso, introduzimos um conjunto de vetores reais unitários mutuamente ortogonais ($\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{n}$), como podemos identificar na Figura 2.10, que representa uma onda transversal se propagando na direção \hat{n} . Um exemplo seria escolher uma configuração de tal maneira que a onda esteja se propagando na direção do eixo z , assim, \hat{e}_1 e \hat{e}_2 estão no eixo x (\hat{e}_x) e y (\hat{e}_y), respectivamente.

Em termos desses vetores unitários, as amplitudes dos campos transversos \vec{E}_0 e \vec{B}_0 são

$$\vec{E}_0 = \hat{e}_1 E_0 \quad (2.44a)$$

e

$$\vec{B}_0 = \hat{e}_2 \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} E_0, \quad (2.44b)$$

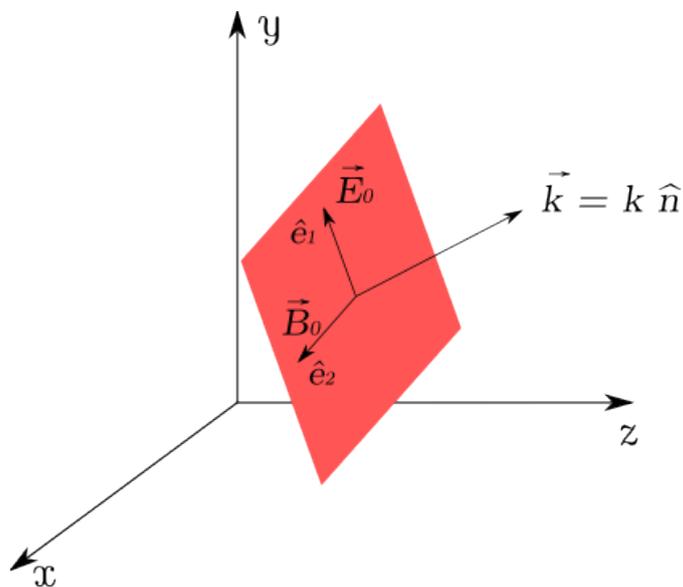


Figura 2.10: Vetor \vec{k} de propagação e os dois vetores de polarização \hat{e}_1 e \hat{e}_2 . A superfície representa a frente de onda.

onde E_0 e B_0 são constantes. Estas amplitudes são válidas somente para a onda que tem a representação geométrica dada pela Figura 2.10. Primeiramente, o campo elétrico sempre oscila na direção \hat{e}_1 . Segundo, o campo elétrico poderia sempre oscilar na direção de \hat{e}_2 . Então, no primeiro caso, a onda é dita ser polarizada linearmente com vetor de polarização \hat{e}_1 e, no segundo caso, a onda é polarizada linearmente com vetor de polarização \hat{e}_2 . Portanto, estas duas ondas podem ser combinadas para dar uma onda plana mais geral

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = (\hat{e}_1 E_1 + \hat{e}_2 E_2) e^{i(\kappa \hat{n} \cdot \vec{r} - \omega t)}. \quad (2.45)$$

As amplitudes E_1 e E_2 são números complexos, para garantir a existência de diferença de fase entre ondas de polarização linear diferente. Como o vetor campo elétrico, Equação (2.45), é um tipo de solução geral, ele determina as propriedades de polarização. Se E_1 e E_2 têm a mesma fase, nós temos um

onda *Polarizada Linearmente*, como mostra a Figura 2.11. Se uma diferença

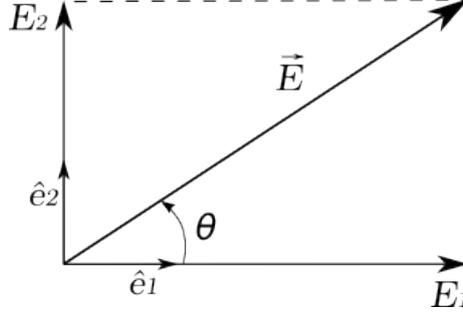


Figura 2.11: A composição do vetor intensidade \vec{E} em termos das ondas polarizadas linearmente, $E_1 \hat{e}_1$ e $E_2 \hat{e}_2$.

de fase ϕ existir entre E_1 e E_2 , nós teremos uma onda *Polarizada Elipticamente*,

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \hat{e}_1 E_1 e^{i(\kappa \hat{n} \cdot \vec{r} - \omega t)} + \hat{e}_2 E_2 e^{i(\kappa \hat{n} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)}. \quad (2.46)$$

A Figura 2.12 ilustra a onda polarizada elipticamente. Um caso especial do onda elipticamente polarizada é a onda *Polarizada Circularmente*, sendo que as intensidades E_1 e E_2 têm a mesma magnitude, porém elas têm uma defasagem de $\phi = \pm\pi/2$, como está ilustrado na Figura 2.13. A equação para a onda polarizada circularmente fica

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 (\hat{e}_1 \pm i \hat{e}_2) e^{i(\kappa \hat{n} \cdot \vec{r} - \omega t)}, \quad (2.47)$$

onde E_0 é uma amplitude real.

Na Equação (2.47), quando o sinal dentro dos parênteses for positivo, $(\hat{e}_1 + i \hat{e}_2)$, a onda está *polarizada circularmente à esquerda*, ou tem *helicidade positiva*. Para o sinal negativo, $(\hat{e}_1 - i \hat{e}_2)$, a onda está *polarizada circularmente à direita*, ou tem *helicidade negativa*.

Note que a onda polarizada circularmente tem momento angular intrínseco,

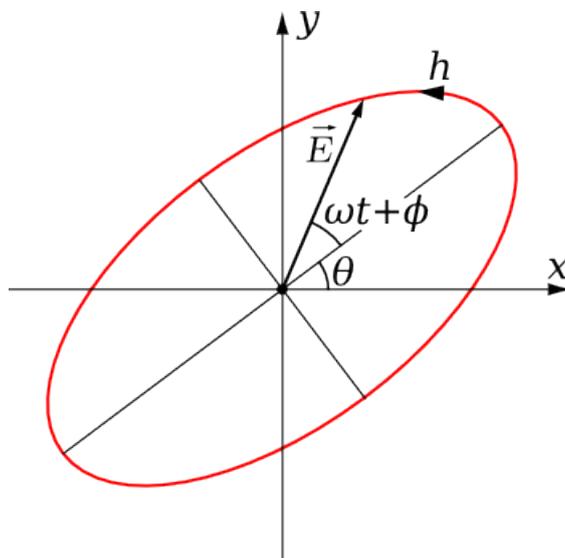


Figura 2.12: A composição do vetor intensidade \vec{E} em termos das ondas polarizadas linearmente E_1 e E_2 . Neste caso, há uma diferença de fase ϕ entre as duas amplitudes. A onda está polarizada à direita, isto é, helicidade h positiva.

isto é, se calcularmos \vec{S}_{rad} , dado pela Equação (2.26a), usando o campo $\vec{E}(\vec{r}, t)$, expresso pela Equação (2.47), obtemos que $\vec{S}_{rad} \neq 0$. Isto não é o que acontece se fazermos esse mesmo procedimento para uma onda polarizada linearmente, Equação (2.45), ou seja, o momento angular intrínseco é nulo.

As ondas polarizadas circularmente formam uma base para descrição de estados de polarização [17]. As transformações entre os estados de polarização são realizadas por meio de placas birrefringentes. Com estes componentes ópticos controlamos a fase relativa ϕ entre as componentes transversais do campo elétrico. Quando a fase relativa entre as componentes dada pela placa birrefringente corresponde à $\phi = \pi$, trata-se de placa de meia onda, (HWP)². A placa de meia onda transforma luz circularmente polarizada à

²Do inglês Half Wave Plate

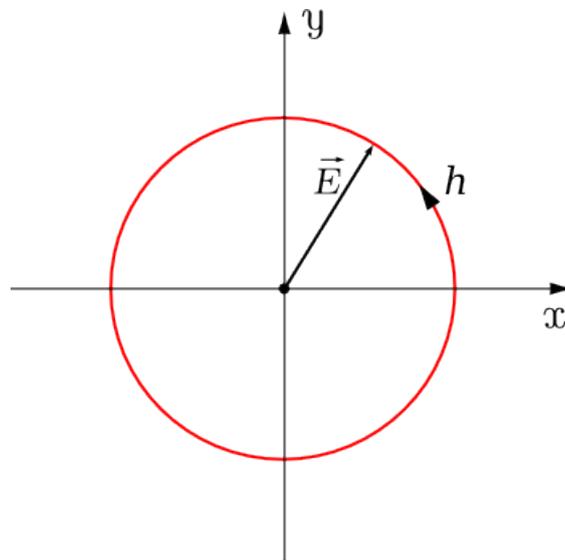


Figura 2.13: A composição do vetor intensidade \vec{E} em termos das ondas polarizadas linearmente E_1 e E_2 . Aqui, as amplitudes estão defasadas de $\phi = \pm\pi/2$. Onda polarizada circularmente à esquerda, helecidade h positiva.

esquerda para circularmente polarizada à direita. No entanto, se a fase relativa corresponde à $\phi = \pi/2$, a placa é dita uma placa de quarto de onda, (QWP)³. Esta transforma luz linearmente polarizada em luz circularmente polarizada. Tanto os estados de polarização quanto placas birrefringentes são descritos através de matrizes de Jones [34]. Assim, podemos fazer transformações entre estes estados de polarização com estes componentes ópticos ou associações deles.

³Do inglês Quarter Wave Plate

2.3 Representação Geométrica dos Graus de Liberdade de Feixes Paraxiais

Até agora, a polarização da onda eletromagnética foi considerada em termos das componentes do campo elétrico. Uma alternativa útil de descrição dos estados polarização seria por meio de grandezas observáveis da onda eletromagnética, isto é, a polarização em termos da intensidade luminosa. O conjunto de valores que define esta relação é conhecido como *Parâmetros de Stokes* [35]. Os parâmetros de Stokes são definidos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{I_{0^\circ} - I_{90^\circ}}{I_{0^\circ} + I_{90^\circ}}, \\ S_2 &= \frac{I_{45^\circ} - I_{135^\circ}}{I_{45^\circ} + I_{135^\circ}}, \\ S_3 &= \frac{I_r - I_l}{I_r + I_l}, \end{aligned} \tag{2.48}$$

onde I_{0° , I_{45° , I_{90° e I_{135° são as intensidades da luz em várias orientações de polarizadores lineares e I_r (à direita) e I_l (à esquerda) são as intensidades das componentes polarizadas circularmente. Estes parâmetros determinam completamente o estado de polarização do feixe, sendo assim,

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = 1. \tag{2.49}$$

Desta equação conclui-se que um feixe de luz completamente polarizado é representado por um ponto na superfície de uma esfera de raio unitário, a *Esfera de Poincaré*, Figura 2.14(a).

Em 1999, Padgett e Courtial [36] construíram uma representação geométrica análoga para os modos transversos de primeira ordem. Eles defini-

ram o seguinte conjunto de parâmetros:

$$\begin{aligned}
o_1 &= \frac{I_{HG_{10}^{0^\circ}} - I_{HG_{10}^{90^\circ}}}{I_{HG_{10}^{0^\circ}} + I_{HG_{10}^{90^\circ}}}, \\
o_2 &= \frac{I_{HG_{10}^{45^\circ}} - I_{HG_{10}^{135^\circ}}}{I_{HG_{10}^{45^\circ}} + I_{HG_{10}^{135^\circ}}}, \\
o_3 &= \frac{I_{LG_0^1} - I_{LG_0^{-1}}}{I_{LG_0^1} + I_{LG_0^{-1}}},
\end{aligned} \tag{2.50}$$

onde $I_{HG_{10}^\alpha}$ representa a intensidade do modo hermite-gaussiano com α sendo o ângulo entre a linha nodal e a horizontal. $I_{LG_0^\pm}$ indica a intensidade do modo laguerre-gaussiano do feixe. Assim como os parâmetros de Stokes obedecem a Equação (2.49), os parâmetros dos modos satisfazem a seguinte propriedade:

$$o_1^2 + o_2^2 + o_3^2 = 1. \tag{2.51}$$

Isto implica que os parâmetros dos modos transversos são as coordenadas cartesianas de um espaço em que os modos de primeira ordem são representados por um ponto na superfície de uma esfera de raio unitário, a *Esfera de Modos de Primeira Ordem*, como ilustrada na Figura 2.14(b).

Os polos norte e sul da esfera de Poincaré representam os autoestados do momento angular de spin (luz circularmente polarizada a esquerda e a direita, respectivamente). No equador estão as polarizações lineares. Em qualquer outro ponto estão as polarizações elípticas. Como a luz é completamente polarizada, qualquer estado de polarização linear pode ser escrito como uma superposição de estados circularmente polarizados, como visto na Seção 2.2.3. Então qualquer estado de polarização é representado por um ponto na superfície da esfera.

Na esfera de modos transversos, os polos norte e sul representam os au-

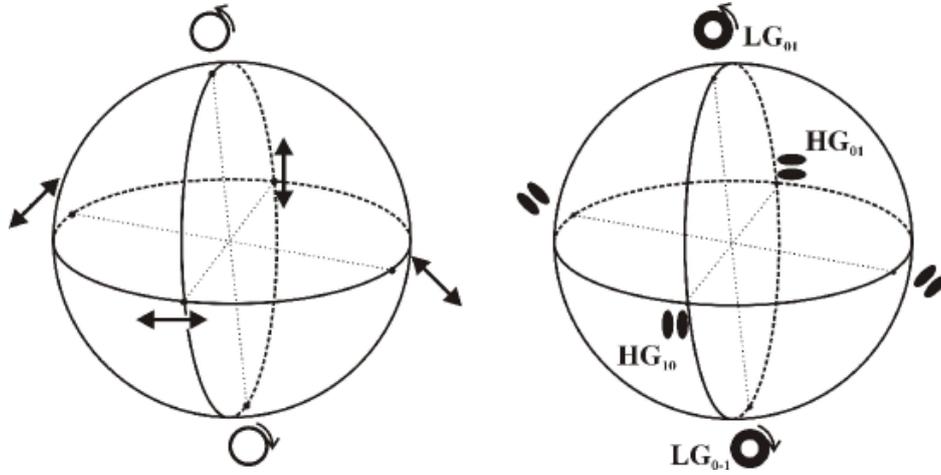


Figura 2.14: (a) Esfera de Poincaré com estados de polarização indicados e (b) Esfera de Modo Primeira Ordem com os modos de indicados.

toestados do momento angular orbital (os modos laguerre-gaussianos de helicidade positiva e negativa, respectivamente). No equador estão os modos hermite-gaussianos de primeira ordem, todos outros pontos possuem modos que são análogos à polarização elíptica. Como vimos na Subseção 2.2.1, os modos hermite-gaussianos podem ser escritos como uma superposição dos modos laguerre-gaussianos. Sendo assim, qualquer ponto na superfície da esfera de modos representará um modo de primeira ordem.

As transformações efetuadas sobre os modos são realizadas com o uso dos conversores de modo e são análogas às transformações realizadas nos estados de polarização por meio de placas birrefringentes. Em 1993, Beijersbergen et al. [30] concluíram que um conversor de modo $\pi/2$, que converte um modo $HG_{01}^{45^\circ}$ em um modo LG_{+10} por introduzir uma diferença de fase $\phi = \pi/2$ entre as componentes HG_{10} e HG_{01} , é análogo a uma QWP, que converte luz linearmente polarizada em circular por introduzir uma diferença de fase $\phi = \pi/2$ entre as componentes lineares. Para um conversor de modo π , que introduz uma diferença de fase $\phi = \pi$, é similar a uma HWP que converte

luz circularmente polarizada a direita em circular a esquerda por introduzir uma diferença de fase $\phi = \pi$ entre as componentes lineares.

2.4 Graus de Liberdade de um Feixe Paraxial para a Codificação e o Processamento de Informação Quântica

Podemos utilizar os graus de liberdade da luz para a representação de sistema de comunicação quântica. Como vimos, descrevemos sua polarização por meio de dois estados ortogonais, por exemplo, horizontal \hat{e}_H e vertical \hat{e}_V , que podem ser usados para codificar um bit de informação de um sistema quântico. Podemos representar por exemplo, o valor 0 pelo estado de polarização horizontal e o valor 1 pelo estado de polarização vertical. O sistema não precisa, necessariamente, ser formado por polarização horizontal e vertical, havendo a possibilidade dos estados de polarização linear formarem ângulos entre os eixos vertical e horizontal ou, ter polarização circular à direita ou à esquerda, desde que sejam ortogonais entre si. Em vez disso, se o sistema físico está em uma superposição dos estados ortogonais, este representa um *qubit* (bit quântico), $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$. Os estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$ são os estados de base computacional. Um exemplo de qubit de polarização é

$$|\psi\rangle = \alpha|\hat{e}_H\rangle + \beta|\hat{e}_V\rangle, \quad (2.52)$$

onde $|\hat{e}_H\rangle = |0\rangle$ e $|\hat{e}_V\rangle = |1\rangle$. Assim, $|\psi\rangle$ é uma superposição de estados de polarizações horizontal e vertical identificados pelos vetores unitários de polarização \hat{e}_H e \hat{e}_V .

Como vimos na Seção 2.2, os modos transversos formam um conjunto

completo de bases ortogonais. Sendo assim, convém, também, codificar os modos transversos como bits de informação, conhecidos na literatura como qubits espaciais. A representação direta dos modos transversos de ordem $N = 1$, tanto para os modos laguerre-gaussianos, LG_{lp} , como para os hermite-gaussianos, HG_{mn} , que também representam um sistema bidimensional, é análoga à representação dos estados de polarização. Um exemplo de um qubit espacial é

$$|LG_{01}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|HG_{10}\rangle + i|HG_{01}\rangle) \quad (2.53)$$

onde $|HG_{10}\rangle = |0\rangle$ e $|HG_{01}\rangle = |1\rangle$, assim temos um qubit espacial da superposição de dois modos HG de primeira ordem.

Outra analogia em usar os graus de liberdade da luz como qubits de informação é que a representação geométrica de um feixe completamente polarizado como também dos modos transversos de primeira ordem do campo eletromagnético é idêntica a representação geométrica de um qubit. A representação geométrica do qubit está ilustrada na Figura 2.15.

Uma forma mais geral de escrever um qubit é

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle, \quad (2.54)$$

onde θ e φ definem um ponto sobre a superfície de uma esfera de raio unitário, a esfera de Bloch, Figura 2.15.

Uma vez com o espaço do modo de polarização (momento angular intrínseco) e o de modo espacial definidos, podemos combiná-los para gerar uma superposição coerente do tipo

$$\begin{aligned} |\Psi(\mathbf{r})\rangle = & \alpha |\psi_h(\mathbf{r}) \hat{e}_H\rangle + \beta |\psi_v(\mathbf{r}) \hat{e}_H\rangle \\ & + \gamma |\psi_h(\mathbf{r}) \hat{e}_V\rangle + \delta |\psi_v(\mathbf{r}) \hat{e}_V\rangle, \end{aligned} \quad (2.55)$$

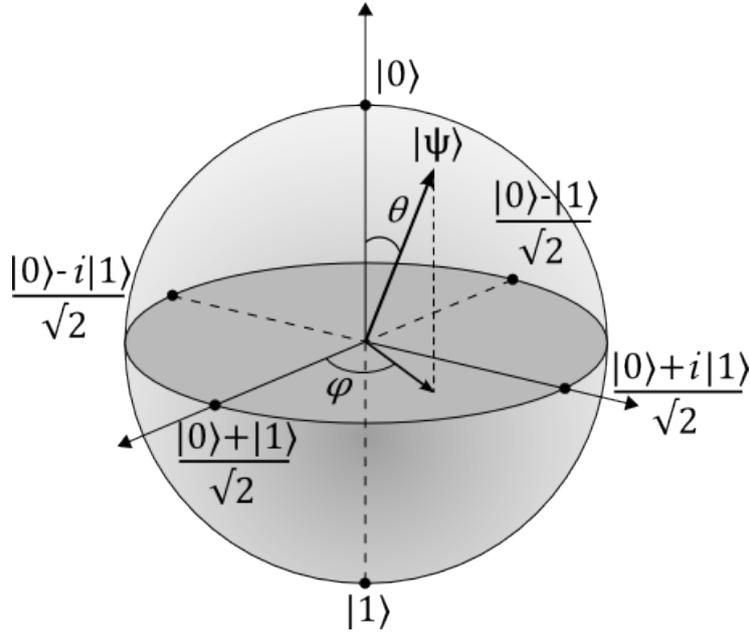


Figura 2.15: Representação geométrica de um qubit na esfera de Bloch. O estado $|\psi\rangle$ é representado por um vetor apontando da origem a um ponto na superfície da esfera unitária. A direção do vetor é definida pelos ângulos polar θ e azimutal φ .

onde $\psi_h(\mathbf{r}) = |HG_{01}\rangle$, $\psi_v(\mathbf{r}) = |HG_{10}\rangle$ e os coeficientes α , β , γ e δ são números complexos e $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$. Podemos fazer uma analogia direta com a descrição de um estado quântico de dois qubits mais geral possível,

$$|\psi\rangle = \alpha |00\rangle + \beta |01\rangle + \gamma |10\rangle + \delta |11\rangle.$$

Para medir o grau de emaranhamento destes estados, podemos usar a “concurrence” [37]. Em particular é possível escrever a “concurrence” de $|\psi\rangle$ como

$$\mathcal{C} = |\alpha\delta - \beta\gamma|.$$

Para $\mathcal{C} = 1$, temos um estado maximamente emaranhado. $\mathcal{C} = 0$, um estado separável.

No caso da superposição de modos “spin-órbita” temos para $\mathcal{C} = 1$, modos maximamente não separáveis, ou seja, não podemos escrever o campo eletromagnético como um produto entre os modos transversos e um vetor de polarização. Para $\mathcal{C} = 0$, temos modos separáveis, já que para estes modos escrevemo-los como o produto de um modo transverso por um vetor de polarização. Esta descrição foi feita na referência [7].

Atualmente os modos não separáveis são conhecidos na literatura como emaranhamento não-quântico de modos [38].

Usaremos neste trabalho somente feixes de ordem $N = 1$. Adotaremos a convenção entre polarização, modo espacial e bases computacionais, como ilustra a Figura 2.16

$$\begin{array}{ccc}
 \text{polarização, Modo espacial} & \rightarrow & \text{Bases computacionais} \\
 |\leftrightarrow\rangle, |\bullet\bullet\rangle & \rightarrow & |0\rangle \\
 |\updownarrow\rangle, |\bullet\circ\rangle & \rightarrow & |1\rangle
 \end{array}$$

Figura 2.16: *Convenção entre polarização, modo espacial e bases computacionais. Na linha superior, o estado de polarização horizontal \hat{e}_H e modo espacial horizontal $\psi_h(\mathbf{r})$ (HG_{10}) estão associados ao estado de base computacional $|0\rangle$. Na linha inferior, polarização vertical \hat{e}_V e modo espacial vertical $\psi_v(\mathbf{r})$ (HG_{01}) estão codificados no estado de base computacional $|1\rangle$.*

Capítulo 3

Princípios da Teoria dos Jogos Quânticos

De acordo com Hong Guo [39], a teoria de jogos proposta por Von Neumann e Morgenstern [40] e, com contribuições de Jon Nash [41], estabelece uma importante regra para ciências das decisões e sistemas de conflitos.

Os processos de tomadas de decisão são encontrados da economia [10] à biologia evolucionária [11], onde cientistas estudam as competições entre populações. Um modelo de competição descreve a situação de dois jogadores. Um deles deve decidir se vai cooperar com o outro ou não cooperar, afim de obter o melhor resultado. Como exemplo, podemos mencionar o Dilema do Prisioneiro. É um jogo de soma não nula, isto é, um jogo que a soma dos ganhos de todos os jogadores não é nula. O Dilema do Prisioneiro também pode ser cooperativo ou não cooperativo, com informações completas ou não para os jogadores.

O Dilema do Prisioneiro é um problema da teoria dos jogos, originalmente formulado por Merrill Flood [42] em 1950. Neste problema, dois jogadores, Alice e Bob por exemplo, são suspeitos de terem cometido um crime. Então,

eles têm que decidir se cooperam ou acusam o outro, pois a redução de pena será dada de acordo com suas escolhas.

Como em qualquer jogo, é esperado que cada jogador queira aumentar ao máximo sua vantagem sobre o adversário. Mas a redução de sua pena não depende apenas de sua decisão e sim da combinação das decisões dos dois jogadores. A redução da pena é o ganho, que na teoria dos jogos é conhecido como o “*payoff*” de cada jogador. A redução de pena no Dilema do Prisioneiro de cada jogador é mostrada na Tabela 3.1, para as estratégias adotadas por Alice e Bob: Cooperar (C) ou Acusar (D) do inglês de “Defect”.

(R_A, R_B)	Bob : C	Bob : D
Alice : C	(3,3)	(0,5)
Alice : D	(5,0)	(1,1)

Tabela 3.1: *Tabela de redução de pena R. As colunas representam as estratégias efetuadas por Bob, e as linhas por Alice. A primeira entrada entre parênteses denota Alice e a segunda denota Bob. Os valores numéricos correspondem a $r = 3$ “prêmio”, $p = 1$ “punição”, $t = 5$ “tentação” e $s = 0$ “sem redução”.*

De acordo com a redução de pena representada na Tabela 3.1, observemos que os jogadores são provocados a escolher (D, D) , apesar de que ambos também obteriam um bom resultado se cooperassem (C, C) . Porém, Alice e Bob não podem se comunicar, estão em celas diferentes tendo que tomar sua decisão, sem o conhecimento do que o outro decidiu. Neste ponto, aparece o dilema. Alice terá que escolher cooperar com Bob ou acusá-lo. Da mesma forma, Bob terá que fazer suas escolhas. Porém, uma má escolha pode custar sua liberdade.

Para um jogo cooperativo, os jogadores escolheriam a estratégia que maximizasse a redução de pena de ambos, ou seja, a estratégia (C, C) , que

corresponde ao *Ótimo de Pareto*¹. Por outro lado, se o jogo é não cooperativo, cada jogador tentará maximizar sua redução de pena, isto é, a escolha seria (D, D) , que é o *Equilíbrio de Nash*², o equilíbrio dominante, ou seja, leva cada jogador a acusar, embora seja sujeito a um ganho muito pior. A vantagem de escolher a estratégia dominante é que sempre seu ganho será maior ou igual ao do seu adversário.

Se o jogo é repetido várias vezes os jogadores podem adotar estratégias probabilísticas, em que a estratégia C tenha uma probabilidade p de ser efetuada e a estratégia D tenha probabilidade $1 - p$ de ser realizada. Nesta situação, teremos uma função de redução de pena $\$j$, para Alice e Bob, dada por uma redução de penalidade média

$$\$j = \sum_{m,n=C,D} P(m,n) R_j(m,n), \quad (3.1)$$

onde $j = A, B$ e $P(m,n) = P_A(m)P_B(n)$ é a probabilidade conjunta que Alice escolha m e Bob escolha n . $R_j(m,n)$ está relacionado com valores numéricos da Tabela 3.1. Na abordagem clássica do dilema do prisioneiro, a função de redução de pena tem mínimo absoluto em $P_A(D) = P_B(D) = 1$, que indica a melhor escolha a ser feita, isto é, definir sua escolha como sendo acusar o adversário por mais que tenha prometido cooperar com o adversário, a princípio.

¹É um conceito de eficiência dentro das ciências econômicas, desenvolvido por Vilfredo Pareto, que indica a situação em que a eficiência não pode melhorar sem arruinar a situação do outro.

²Representa a situação em que todos jogadores escolheram a estratégia ótima e qualquer alteração de sua estratégia acarretará em uma redução de pena menor.

3.1 Modelo Físico do Dilema do Prisioneiro

Até agora, não discutimos nenhum sistema físico que simule ou implemente um jogo. Podemos, no entanto, usar sistemas físicos em que os jogadores podem atuar para executar suas estratégias e simular (ou prevêr) resultados. Os jogadores podem jogar utilizando a polarização de um feixe laser, por exemplo. Por cada cela passa um feixe laser com polarização horizontal \hat{e}_H . Cada jogador possui uma HWP e pode utilizá-la para mudar o estado de polarização do feixe, convertendo-a à polarização vertical \hat{e}_V , por exemplo. Se codificarmos $\hat{e}_H \equiv C$ e $\hat{e}_V \equiv D$, o interrogador pode medir as polarizações com cubos polarizados (PBS - do inglês Polarizing Beam Splitter) e detectores depois que os jogadores tiverem feito suas escolhas e monta a tabela de redução de pena 3.1. Assim, teremos um sistema em que o jogo do Dilema do Prisioneiro clássico pode ser implementado.

Neste contexto, o emprego da mecânica quântica pode ser explorado. Se pensarmos no conceito de superposição linear existente na mecânica quântica, podemos ter uma situação que um jogador tenha a possibilidade de fazer uma superposição de estratégias, ou seja, uma *estratégia quântica*. Isto foi o que propôs David A. Meyer, em 1999. Ele implementou estratégias quânticas para lançamentos de moedas [13], generalizando um jogo para o domínio quântico. No mesmo ano, Jens Eisert et al. generalizaram o Dilema do Prisioneiro a nível quântico [12] e comprovando, assim como Meyer, que jogadores quando se apoiam em estratégias quânticas sempre aumentam a sua confiabilidade em relação ao jogador que usou estratégia clássica. Além disso, Eisert et al. mostraram que na versão quântica, os jogadores escapam do dilema. Fugir do dilema significa que a redução de pena correspondente ao Equilíbrio de Nash coincide com a redução de pena do Ótimo de Pareto.

Na teoria clássica de jogos, cada decisão dos jogadores pode ser associada

por um bit de informação, ou seja, com as estratégias clássicas possíveis C (Cooperar) e D (Acusar). O modelo físico proposto por Eisert para a versão clássica do dilema do prisioneiro consiste de três ingredientes: uma fonte de dois bits de informação, um para cada jogador (os feixe polarizados, no exemplo acima); artefatos físicos para Alice e Bob efetuar suas estratégias (as HWP mencionadas); e um dispositivo de medidas físicas para computar a redução de penalidade de cada jogador (o PBS e dois detectores mencionados). A Figura 3.1 mostra um circuito para a versão clássica do Dilema do Prisioneiro.

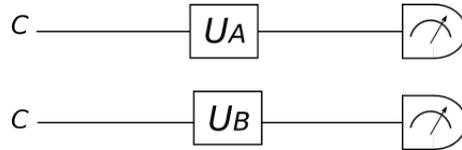


Figura 3.1: *Circuito do Dilema do Prisioneiro Clássico.* Uma fonte de dois bits C de informação. Os artefatos de Alice e Bob, U_A e U_B , respectivamente. Por fim, o dispositivo de medida.

A formulação quântica foi concebida associando as estratégias C e D a dois vetores de base $|C\rangle$ e $|D\rangle$ no espaço de Hilbert de um sistema quântico de dois níveis, um qubit. Sendo assim, o estado do jogo é descrito por um vetor de estado no espaço:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B, \quad (3.2)$$

que é um espaço composto pelo produto tensorial de dois espaços formados pelos conjuntos de bases $\{|m\rangle\}$ e $\{|n\rangle\}$, respectivamente, onde $m, n = C, D$. Logo, o vetor de estado do jogo é:

$$|m\rangle_A \otimes |n\rangle_B = |mn\rangle_{AB}, \quad (3.3)$$

onde o primeiro qubit é o que Alice efetua suas decisões e segundo o de Bob.

Na versão quântica do dilema do prisioneiro existem dois ingredientes adicionais: um estágio de preparação do estado inicial $|\psi_0\rangle$ obtido pelo operador \hat{U} . O outro é o \hat{U}^\dagger , que é posicionado logo após os artefatos de Alice e Bob. \hat{U}^\dagger executa o processo inverso do \hat{U} . Assim, o circuito para a versão quântica do dilema do prisioneiro proposto por Eisert et al. é ilustrado na Figura 3.2.

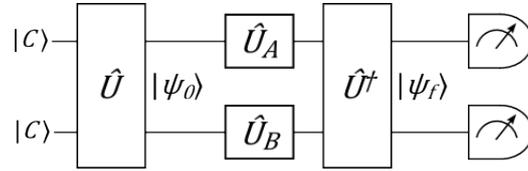


Figura 3.2: *Circuito do Dilema do Prisioneiro Quântico proposto por Eisert et al. [12]. O primeiro dispositivo é o estágio de preparação do estado inicial $|\psi_0\rangle$. Em seguida, os artefatos de Alice e Bob, \hat{U}_A e \hat{U}_B , respectivamente. O segundo dispositivo é representado por \hat{U}^\dagger e finalmente as medidas são realizadas do estado final $|\psi_f\rangle$.*

No estágio de preparação, o dispositivo que realiza a operação não local é dada por:

$$\hat{U} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & i \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & i & 1 & 0 \\ i & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Logo, $|\psi_0\rangle = \hat{U}|CC\rangle$ será expresso por

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|CC\rangle + i|DD\rangle), \quad (3.5)$$

que é um estado maximamente emaranhado de dois qubits. Portanto, \hat{U} é uma transformação que cria o estado emaranhado $|\psi_0\rangle$, recurso fundamental

na versão quântica do jogo.

O outro estágio, como ilustrado na Figura 3.2, o \hat{U}^\dagger , que faz o processo inverso do primeiro, é também um operador não local. Necessariamente usamos o operador \hat{U}^\dagger para que possamos medir na base computacional. Informalmente podemos designá-lo como a transformação de “desemaranhamento”.

Alice e Bob compartilham pares de qubits emaranhados, mas executam estratégias em um único qubit. Assim, as estratégias de ambos estão associadas com operadores locais e unitários, \hat{U}_A e \hat{U}_B , que pertencem ao espaço de estratégias G . Eisert et al. propuseram um espaço de estratégias restrito, dado pelas seguintes matrizes:

$$U_{A,B}(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} & e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

com $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi \leq \pi/2$. O espaço G pode ser identificado como um subconjunto do grupo de matrizes $SU(2)$, com fase global irrelevante. As estratégias clássicas cooperar e acusar são associadas respectivamente aos operadores;

$$\hat{U}_{A,B}(0, 0) = \hat{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.7)$$

e

$$\hat{U}_{A,B}(\pi, 0) = \hat{D} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

que são a matriz identidade I e a matriz de Pauli Y , respectivamente, a menos de um fator de fase de $\pi/2$. Já a estratégia quântica está associada ao operador;

$$\hat{U}_{A,B}(0, \pi/2) = \hat{Q} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

que é a matriz de Pauli Z multiplicada por um fator de fase de $\pi/2$. As matrizes de Pauli estão disponíveis no Apêndice A.

Assim, de acordo com o circuito da Figura 3.2, uma vez preparado o estado inicial, Alice e Bob executam suas estratégias. O estado do jogo será

$$(\hat{U}_A \otimes \hat{U}_B)\hat{U}|CC\rangle. \quad (3.10)$$

Este estado é sujeito à transformação U^\dagger , que levará ao estado final

$$|\psi_f\rangle = \hat{U}^\dagger(\hat{U}_A \otimes \hat{U}_B)\hat{U}|CC\rangle. \quad (3.11)$$

Obtido o estado final $|\psi_f\rangle$, é feita uma medida final nos qubits separados. Com a medida final pode-se avaliar a função redução de pena, Equação (3.1), com probabilidades

$$P(m, n) = |\langle mn|\psi_f\rangle|^2, \quad (3.12)$$

associadas com dois resultados possíveis de cada qubit. Por exemplo, a função de redução de pena de Alice é dada por

$$\$A = r P(C, C) + s P(C, D) + t P(D, C) + p P(D, D). \quad (3.13)$$

A redução de pena na versão quântica do Dilema do Prisioneiro de cada jogador é mostrada na Tabela 3.2.

A Figura 3.3 mostra a função redução de pena de Alice, calculado por Eisert et al. [12], no Dilema do Prisioneiro Quântico como função das estratégias \hat{U}_A e \hat{U}_B . A construção do gráfico foi desenvolvida parametrizando as estratégias \hat{U}_A e \hat{U}_B com o parâmetro $\tau \in [-1, 1]$. Assim, $\hat{U}_A = \hat{U}(\tau\pi, 0)$ para $\tau \in [0, 1]$ e $\hat{U}_A = \hat{U}(0, -\tau\pi)$ para $\tau \in [-1, 0[$. Cooperar \hat{C} corresponde

(R_A, R_B)	Bob : C	Bob : D	Bob : Q
Alice : C	(3,3)	(0,5)	(1,1)
Alice : D	(5,0)	(1,1)	(0,5)
Alice : Q	(1,1)	(5,0)	(3,3)

Tabela 3.2: Tabela de redução de pena R para a versão quântica do Dilema do Prisioneiro. As colunas representam as estratégias efetuadas por Bob, e as linhas por Alice. A primeira entrada entre parênteses denota Alice e a segunda denota Bob.

a $\tau = 0$, acusar \hat{D} a $\tau = 1$ e \hat{Q} é representado por $\tau = -1$. Como falamos anteriormente a redução de pena dos jogadores não depende exclusivamente de suas escolhas, mas também das escolhas de estratégias do adversário.

A função de redução de pena do Bob é obtida fazendo a mudança dos valores numéricos $t \leftrightarrow s$ na Equação (3.13), isto é, obtemos a transposta da função de redução de pena de Alice. Veja na Tabela 3.1, que estes valores numéricos justamente estão na antidiagonal. A Figura 3.4 mostra a função redução de pena de Bob seguindo a mesma parametrização adotada para o gráfico de redução de pena de Alice, Figura 3.3.

Vimos anteriormente que a estratégia dominante na versão clássica do Dilema do Prisioneiro é \hat{D} . Vamos analisar o que acontece na versão quântica: Bob decide escolher \hat{D} , então Alice escolhe a estratégia quântica \hat{Q} . De acordo com a redução de pena de Alice, Figura 3.3, Alice obtém redução de pena $\$_{Alice} = 5$. Neste caso, a estratégia \hat{Q} passa a ser a dominante e consequentemente a jogada $\hat{Q} \otimes \hat{Q}$ é o novo equilíbrio de Nash, com redução de pena de Alice e Bob $\$_{Alice}(\hat{Q}, \hat{Q}) = \$_{Bob}(\hat{Q}, \hat{Q}) = 3$. Analizando os gráficos das Figuras 3.4 e 3.3, vemos que se Alice e Bob escolheram \hat{Q} e depois decidem alterar sua escolha, a sua redução de pena será menor.

Outra propriedade que podemos analisar no gráfico de redução de pena de Alice, Figura 3.3 é que: se Bob decide sempre escolher a estratégia \hat{Q} e

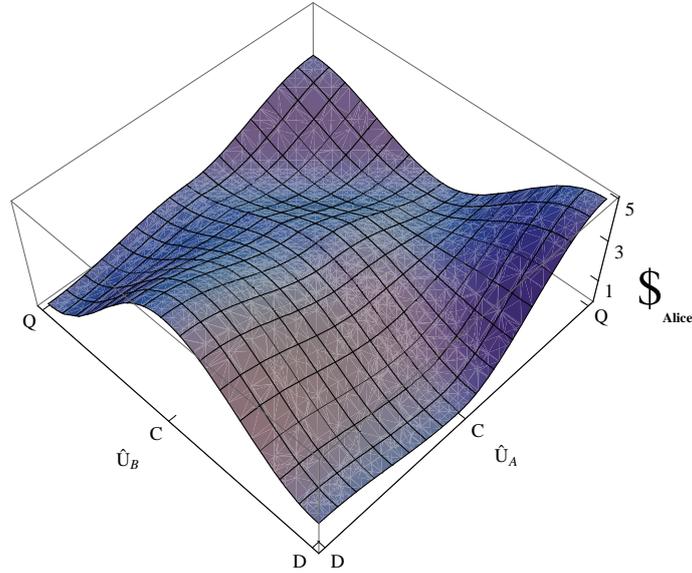


Figura 3.3: Redução de pena de Alice calculado por Eisert et al., no Dilema do Prisioneiro Quântico como função das estratégias \hat{U}_A e \hat{U}_B , com estado inicial $|\psi_i\rangle$ maximamente emaranhado. A construção do gráfico foi desenvolvida parametrizando as estratégias \hat{U}_A e \hat{U}_B com o parâmetro $\tau \in [-1, 1]$. Assim, $\hat{U}_A = \hat{U}(\tau\pi, 0)$ para $\tau \in [0, 1]$ e $\hat{U}_A = \hat{U}(0, -\tau\pi)$ para $\tau \in [-1, 0[$. Fazendo o mesmo para Bob. Cooperar \hat{C} corresponde a $\tau = 0$, acusar \hat{D} a $\tau = 1$ e \hat{Q} é representado por $\tau = -1$.

Alice altera a sua continuamente, ela terá uma redução de pena

$$\$_A[\hat{U}_A(\theta, \phi), \hat{Q}] \leq 3$$

para todo $\theta \in [0, \pi]$ e $\phi \in [0, \pi/2]$. De forma análoga, se Alice fixa na estratégia \hat{Q} e Bob altera a sua escolha continuamente. A redução de pena de Bob, de acordo com o gráfico Figura 3.4, será:

$$\$_B[\hat{Q}, \hat{U}_B(\theta, \phi)] \leq 3.$$

Portanto, a estratégia quântica é a estratégia ótima.

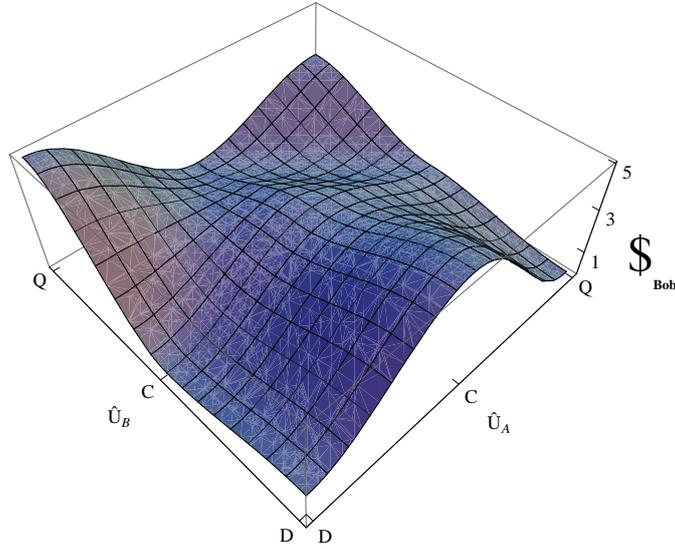


Figura 3.4: *Redução de pena de Bob no Dilema do Prisioneiro Quântico como função das estratégias \hat{U}_A e \hat{U}_B , com estado inicial $|\psi_i\rangle$ maximamente emaranhado. A construção do gráfico foi desenvolvida seguindo a mesma parametrização da Figura 3.3.*

Outra característica é que a jogada $\hat{Q} \otimes \hat{Q}$ tem propriedade de ótimo de Pareto, isto é, qualquer outra jogada não dominante presente no gráfico de redução de pena de Alice e Bob, conforme pode ser visto nas Figuras 3.3 e 3.4, não há como melhorar sua redução de pena sem piorar a redução de pena do outro.

A versão quântica do Dilema do Prisioneiro foi implementada experimentalmente usando um computador quântico de ressonância magnética nuclear (RMN) [14], por Du et al. no ano seguinte à publicação dos resultados teóricos da versão quântica do dilema por Eisert et. al. Em 2007, usando um método de computação quântica baseada em medidas, Zeilinger et al. efetuaram a segunda realização experimental do Dilema do Prisioneiro Quântico [15].

A referência [15] mostra a implementação da versão quântica baseando-se

em estados emaranhados de “cluster” fotônicos no contexto de computação quântica unidimensional (“one-way”) [43]. O estado “cluster” é preparado usando o método interferométrico, empregando pares de fótons emaranhados gerados por conversão paramétrica descendente espontânea. Nesta implementação, o estágio de preparação do estado $|\psi_0\rangle$ é composto pela combinação da operação Hadamard (H) e a Porta de Fase Controlada (CP - do inglês Controlled Phase). As transformações referentes a estas operações estão disponíveis no Apêndice A. O estágio de desemaranhamento também é composto por uma porta H e uma CP . O espaço de estratégia é formado por quatro estratégias para cada jogador, ou seja, com total de dezesseis jogadas. Os jogadores compartilham pares de fótons emaranhados e suas estratégias são efetuadas por rotações do estado de polarização de seu fóton.

No capítulo seguinte apresentaremos a primeira implementação óptica da versão quântica do Dilema do Prisioneiro usando um modo paraxial associando modo transversal e polarização de um feixe clássico. Neste trabalho aumentamos o espaço de estratégias, totalizando vinte e cinco jogadas, maior espaço de estratégias conhecido atualmente. Esta implementação experimental foi posta em ação no Laboratório de Óptica Quântica da Universidade Federal Fluminense.

Capítulo 4

Dilema do Prisioneiro com Modo Paraxial

Realizamos a implementação das estratégias de um jogo quântico com modos maximamente não separáveis, que possui o chamado emaranhamento não quântico, como tem sido discutido na literatura, fornecido por um modo paraxial, Equação (2.55). Na linguagem de jogos, podemos estabelecer uma codificação entre os vetores de base do jogo e os dois graus de liberdade de um feixe luminoso, os vetores unitários de polarização linear e os modos espaciais de HG de primeira ordem. Com isso, temos as seguintes equivalências: $|\hat{e}_H\rangle \equiv |C\rangle$ e $|\hat{e}_V\rangle \equiv |D\rangle$ para polarização e, $|\psi_h(\mathbf{r})\rangle \equiv |C\rangle$ e $|\psi_v(\mathbf{r})\rangle \equiv |D\rangle$ para o modo espacial.

De acordo com essa codificação, o estado inicial, Equação (3.5), que Alice e Bob deverão efetuar suas estratégias é um modo paraxial não separável

$$|\Psi_0(\mathbf{r})\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\psi_h(\mathbf{r})\rangle \hat{e}_H + i |\psi_v(\mathbf{r})\rangle \hat{e}_V] . \quad (4.1)$$

Este é um modo com “concurrence” $\mathcal{C} = 1$, ou seja, um modo maximamente

não separável ou, maximamente entranhado, onde este entranhamento é não quântico.

4.1 Espaço de Estratégias

Como discutimos no Capítulo 2, a estrutura do modo não separável é análogo a de um qubit. Assim, as estratégias para cada jogador podem ser implementadas por operações unitárias em cada grau de liberdade. Seguindo Eisert et al. [12], idealizamos um espaço de estratégias gerado por operações unitárias $SU(2)$

$$C(\theta, \phi) = \begin{bmatrix} \cos \frac{\phi}{2} + i \sin \frac{\phi}{2} \cos 2\theta & i \sin \frac{\phi}{2} \sin 2\theta \\ i \sin \frac{\phi}{2} \sin 2\theta & \cos \frac{\phi}{2} - i \sin \frac{\phi}{2} \cos 2\theta \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

onde são exclusivamente transformações efetuadas por componentes ópticos, como por exemplos, placas de quarto de onda, placas de meia onda, conjuntos de Lentes Cilíndricas e Prisma de Dove. A representação matricial desses tipos de elementos, Equação (4.2), é baseada na notação das matrizes de Jones [44],

$$C(\phi, \theta) = R(-\theta)F(\phi)R(\theta), \quad (4.3)$$

onde ϕ é o atraso de fase entre as componentes transversais do vetor campo elétrico (ou entre os modos ψ_h e ψ_v) e θ é ângulo de rotação do eixo rápido do componente. Convencionamos que ângulos de rotação são informados em graus e o retardo de fase em radianos, para facilitar na identificação do significado físico em toda a descrição experimental, que será abordada na seção seguinte. Na Equação (4.3), $R(\theta) \in SO(2)$, sendo matrizes unitárias de rotação e $F(\phi) \in SU(2)$, que é responsável pelo atraso de fase. Na linguagem experimental, chamamos a matriz, Equação (4.2), como Conversor de Modos

rodado por um ângulo θ .

4.2 Operações de Emaranhamento

Na versão quântica, antes e depois das operações dos jogadores temos dois estágios que caracterizam operações de emaranhamento. Um para obter o estado $|\Psi_0(\mathbf{r})\rangle$, estado inicial do jogo, e o outro para fazer o processo inverso. Em nossa implementação específica os operadores não locais são obtidos por combinações de $C(\theta, \phi)$ e

$$MZ(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{i\phi} \\ 0 & 0 & e^{i\phi} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

que é a representação matricial, na base

$$\{|\psi_h(\mathbf{r}) \hat{e}_H\rangle, |\psi_v(\mathbf{r}) \hat{e}_H\rangle, |\psi_h(\mathbf{r}) \hat{e}_V\rangle, |\psi_v(\mathbf{r}) \hat{e}_V\rangle\},$$

de um interferômetro Mach-Zehnder construído com divisores de feixes polarizados (PBS)¹ na entrada e na saída. Além disso, um Prisma de Dove (DP) é inserido em um dos braços do interferômetro e o atraso de fase ϕ entre os braços é controlado por um transdutor piezoelétrico (PZT)².

Propomos, então, o circuito ilustrado na Figura 4.1, para implementar a versão quântica do Dilema do Prisioneiro usando basicamente os elementos óticos lineares citados acima.

Fizemos a simulação do Jogo no Software Mathematica[®] comprovando

¹Do inglês Polarizing Beam Splitters

²Do inglês Piezoelectric Transducer

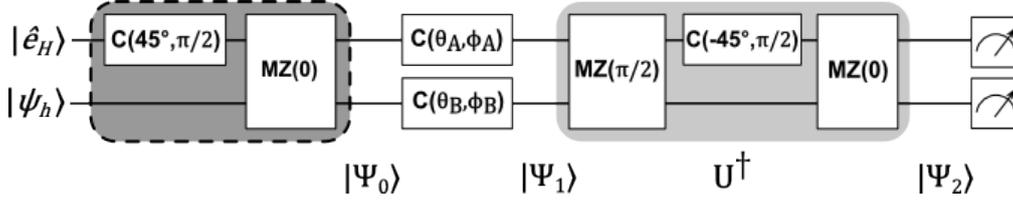


Figura 4.1: *Circuito para a versão quântica do Dilema do Prisioneiro, $C(\theta, \phi)$ é um conversor de modos e $MZ(\phi)$ é um interferômetro de Mach-Zehnder. A região delimitada à esquerda é o estágio de preparação do estado inicial do jogo $|\psi_h(\mathbf{r})\hat{e}_H\rangle$. O estado $|\Psi_2\rangle$ é medido e assim computada as reduções de pena $\$_j(\hat{U}_A, \hat{U}_B)$.*

que nosso circuito está de acordo com os resultados teóricos já existentes na literatura [39], para as estratégias conhecidas. No Apêndice B, disponibilizamos os comandos.

4.3 Descrição Experimental

Seguindo nosso circuito, montamos o esquema experimental, ilustrado na Figura 4.2, com os elementos ópticos correspondentes às transformações. Iniciaremos a descrição experimental comparando o circuito e o esquema experimental.

O modo fundamental, TEM_{00} , proveniente de um laser de He-Ne (632,8 nm) é difratado por uma máscara de difração que gera modos HG da primeira ordem. Obtemos, assim, o modo inicial $|\psi_h(\mathbf{r})\hat{e}_H\rangle$, que em nossa codificação é correspondente ao estado $|CC\rangle$. Este modo é enviado para uma placa de quarto de onda (QWP) com o eixo rápido rodado de 45 graus. Sabemos que a quarto de onda introduz uma defasagem de $\phi = \pi/2$, então, para este

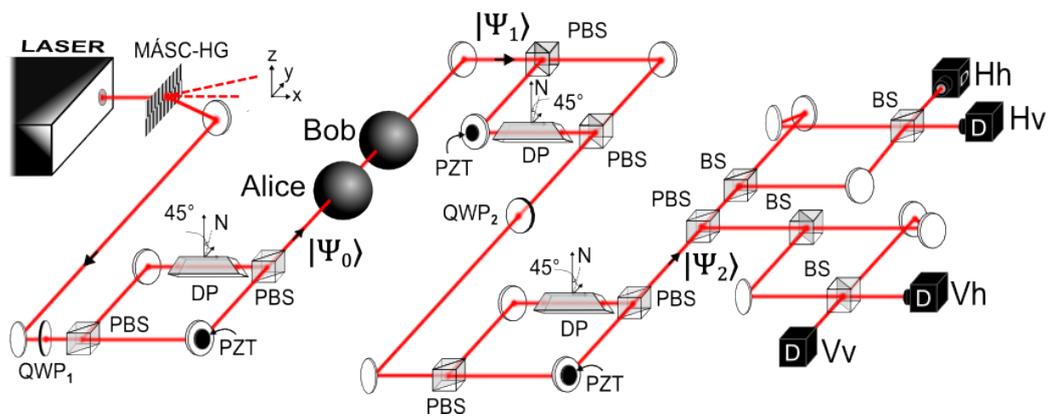


Figura 4.2: *Desenho esquemático do esquema (“setup”) experimental para implementar a versão quântica do Dilema do Prisioneiro. Um laser de HE-Ne (632,8 nm) emite o modo fundamental, TEM_{00} . Após passar pela máscara de difração MÁSC-HG, o modo é $|\psi_h(\mathbf{r})\hat{e}_H\rangle$. O estágio de preparação do estado $|\Psi_0\rangle$ é composto por uma QWP e o primeiro MZ. Os artefatos de Alice e Bob estão representado por esferas. A operação U^\dagger é obtida pelo dispositivo composto por um dois MZ’s e uma QWP. E por fim, o dispositivo de medida é proposto por um PBS, dois interferômetro Mach-Zehnder modificados (um espelho adicional) e quatro detectores.*

componente, a matriz conversor, Equação (4.2), é

$$C(45^\circ, \pi/2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Esta faz a seguinte transformação sobre o vetor de polarização $|\hat{e}_H\rangle$:

$$|\hat{e}_H\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|\hat{e}_H\rangle + i|\hat{e}_V\rangle).$$

O modo espacial não sofreu transformação, ou seja, após a QWP o modo paraxial tem a seguinte forma:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_h(\mathbf{r}) \hat{e}_H\rangle + i|\psi_h(\mathbf{r}) \hat{e}_V\rangle). \quad (4.6)$$

Este modo passa pelo primeiro interferômetro MZ, a Figura 4.3 mostra com mais detalhes este interferômetro.

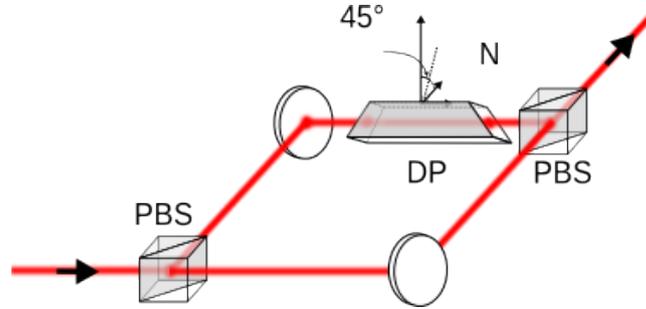


Figura 4.3: Desenho esquemático do primeiro interferômetro Mach-Zehnder com um PBS na entrada e na saída, mostrado no esquema experimental. Em um dos braços tem um prisma de Dove rodado de 45° com relação ao plano da mesa óptica. Com esta configuração, ele realiza a transformação $MZ(0)$, Equação (4.7).

A matriz correspondente à transformação do primeiro interferômetro é

dada por

$$MZ(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$

onde há um DP rodado de $\theta = 45^\circ$ que faz a transformação $\psi_h \rightarrow \psi_v$, como vimos na Seção 2.2.1. Logo, a transformação $MZ(0)$ superpõe coerentemente os modos $\psi_h(\mathbf{r}) \hat{e}_H$ e $\psi_h(\mathbf{r}) \hat{e}_V$. Portanto, após este estágio (região delimitada à esquerda do circuito, Figura 4.1, contendo a QWP e o interferômetro $MZ(0)$), teremos criado o estado emaranhado $|\psi_0\rangle$ dado por³

$$|\Psi_0(\mathbf{r})\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\psi_h(\mathbf{r}) \hat{e}_H\rangle + i |\psi_v(\mathbf{r}) \hat{e}_V\rangle], \quad (4.8)$$

que tem a mesma estrutura do estado inicial proposto por Eisert et al.:

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|CC\rangle + i|DD\rangle), \quad (4.9)$$

levando-se em conta nossa codificação.

O próximo estágio é o momento que os jogadores deverão aplicar suas estratégias. Cada jogador atua em um único grau de liberdade, isto é, Alice atua localmente no modo de polarização enquanto Bob atua localmente no modo espacial. Portanto, Alice efetua suas estratégias do tipo $C(\theta_A, \phi_A)$ com placas de onda (ação sobre a polarização) e Bob com prismas de Dove ou conjunto de lentes cilíndricas (ação sobre o modo espacial), com estratégias do tipo $C(\theta_B, \phi_B)$.

Após os jogadores terem feito suas escolhas de estratégias, o modo para-

³Vale notar que este aparato não implementa o operador \hat{U} proposto por Eisert et al., mas apenas cria o estado $|\psi_0\rangle$ necessário para o jogo quântico do Dilema do Prisioneiro.

xial é:

$$|\Psi_1(\mathbf{r})\rangle = [C(\theta_A, \phi_A) \otimes C(\theta_B, \phi_B)] |\Psi_0(\mathbf{r})\rangle, \quad (4.10)$$

onde o termo entre colchetes denota o produto tensorial entre as transformações do espaço de modos de polarização e as do espaço de modos espaciais.

Tanto para Alice quanto para Bob, implementamos cinco estratégias:

$$C_{A,B}(45^\circ, \pi) = iX, \quad (4.11a)$$

$$C_{A,B}(45^\circ, \pi/2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [I + iX] = Q_1, \quad (4.11b)$$

$$C_{A,B}(\theta, 0) = I, \quad (4.11c)$$

$$C_{A,B}(0, \pi/2) = \frac{1}{\sqrt{2}} [I + iZ] = Q_2 \quad (4.11d)$$

e

$$C_{A,B}(0, \pi) = iZ, \quad (4.11e)$$

aqui, X e Z são as matrizes de Pauli e I é matriz identidade. As estratégias I e iX são equivalentes às clássicas, o prisioneiro coopera ou acusa, respectivamente. As outras estratégias são intrinsecamente quânticas, que envolvem rotações e atraso de fase. Para as estratégias quânticas não existe um análogo no cenário clássico.

Como discutimos no Capítulo 2, conversores do modo de polarização podem ser feitos por placas birrefringentes, como por exemplo, uma QWP que corresponde à $\phi = \pi/2$ e uma HWP à $\phi = \pi$. Conversores de modo espacial podem ser feitos por Lentes cilíndricas [30] para ϕ variável, ou por prisma de Dove para $\phi = \pi$. Portanto, as estratégias de Alice, iX e iZ , são implementadas por uma HWP rodada 45° e 0° , respectivamente. As estratégias Q_1 e Q_2 , de Alice, são implementadas por uma QWP rodada de 45° e 0° respec-

tivamente. Já as estratégias de Bob, iX e iZ , são implementadas por um prisma de Dove rodado de 45° e 0° , respectivamente e, Q_1 e Q_2 por um conversor de lente cilíndrica rodado de 45° e 0° , respectivamente. A estratégia I , por ambos, foi implementada ao retirarmos os componentes ópticos.

Seguindo a descrição experimental, passamos para o estágio do operador U^\dagger (região sobreada do circuito). Para este operador não local, necessariamente temos o transposto conjugado de \hat{U} , proposto por Eisert et al., Equação (3.9). Podemos calculá-lo facilmente, sendo dado por

$$U^\dagger = MZ(0) [C(-45^\circ, \pi/2) \otimes I] MZ(\pi/2), \quad (4.12)$$

onde

$$MZ(\pi/2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.13)$$

e

$$C(-45^\circ, \pi/2) \otimes I = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

O significado físico aqui é que, após passar pelo espaço de estratégias, o feixe é enviado a um interferômetro MZ, porém com diferença de fase $\phi = \pi/2$, em seguida por uma QWP rodada de $\theta = -45^\circ$ e, finalmente, passa por outro interferômetro com os braços balanceados ($\phi = 0$). Então, o estado do feixe após este estágio é:

$$|\Psi_2(\mathbf{r})\rangle = U^\dagger |\Psi_1(\mathbf{r})\rangle = \sum_{m,n} c_{mn} |\psi_m(\mathbf{r}) \hat{e}_n\rangle, \quad (4.15)$$

onde $m = h, v$ e $n = H, V$. Na tabela ilustrada na Figura 4.4 temos todos os coeficientes c_{mn} , do modo paraxial final $\Psi_2(\mathbf{r})$, resultantes de todas as estratégias (vinte e cinco jogadas no total) calculados computacionalmente (Apêndice B). A leitura da tabela apresentada na Figura 4.4 é feita da seguinte maneira. Por exemplo, Digamos que Alice (Coluna) escolha a estratégia iX e Bob (linha) escolha a estratégia Q_2 , a jogada correspondente para estas duas escolhas é dada por $(iX \otimes Q_2)$. O estado final para a jogada é

$$|\Psi_2(\mathbf{r})\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(|D \otimes C\rangle + |C \otimes D\rangle),$$

ou, escrevendo em outra notação

$$|\Psi_2(\mathbf{r})\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(|DC\rangle + |CD\rangle).$$

O restante é obtido seguindo o exemplo acima.

A Tabela 4.1 mostra a redução de pena para o estado final $\Psi_2(\mathbf{r})$.

(R_A, R_B)	Bob : iX	Bob : Q_1	Bob : I	Bob : Q_2	Bob : iZ
Alice : iX	(1, 1)	(3, 1/2)	(5, 0)	(5/2, 5/2)	(0, 5)
Alice : Q_1	(1/2, 3)	(9/4, 9/4)	(4, 3/2)	(9/4, 9/4)	(1/2, 3)
Alice : I	(0, 5)	(3/2, 4)	(3, 3)	(2, 2)	(1, 1)
Alice : Q_2	(5/2, 5/2)	(9/4, 9/4)	(2, 2)	(1, 1)	(2, 2)
Alice : iX	(5, 0)	(3, 1/2)	(1, 1)	(2, 2)	(3, 3)

Tabela 4.1: Tabela de redução de pena R para a versão quântica do Dilema do Prisioneiro usando os modos paraxiais maximamente inseparável.

Na Tabela 4.1, temos nossos resultados teóricos tanto para a redução de pena do domínio clássico (iX e I), da versão quântica (iX , I e iZ) e das estratégias adicionais (Q_1 e Q_2) propostas neste trabalho. As estratégias adicionais estão de acordo com a teoria, isto é, as características do Ótimo de Pareto e Equilíbrio de Nash são preservadas.

	iX	Q_1	I	Q_2	iZ						
iX	0	0	0	0	0	$\frac{i}{\sqrt{2}}$	0	i	$ C\rangle$		
	0	-1	$\frac{i}{\sqrt{2}}$	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	i	0	$\frac{i}{\sqrt{2}}$	0	0	$ D\rangle$	
Q_1	0	$\frac{i}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{i}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{i}{2}$	0	$\frac{i}{\sqrt{2}}$	$ C\rangle$
	0	$\frac{i}{\sqrt{2}}$	$\frac{i}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{i}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{i}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$ D\rangle$
I	0	i	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{i}{\sqrt{2}}$	1	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	0	$ C\rangle$
	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	1	$ D\rangle$
Q_2	0	$\frac{i}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{i}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	0	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	0	$ C\rangle$
	$\frac{i}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{i}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	1	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$ D\rangle$
iZ	0	0	0	0	0	0	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	0	-1	0	$ C\rangle$
	i	0	$\frac{i}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	1	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	0	$ D\rangle$

$|C\rangle$ $|D\rangle$ $|C\rangle$ $|D\rangle$ $|C\rangle$ $|D\rangle$ $|C\rangle$ $|D\rangle$ $|C\rangle$ $|D\rangle$

Figura 4.4: Tabela de coeficientes do modo $\Psi_2(\mathbf{r})$, o modo final, nas bases computacionais que rotulamos como sendo $|C\rangle$ e $|D\rangle$. Os valores numéricos são os coeficientes c_{mn} . Vamos tomar um exemplo para esclarecer como procede a leitura da tabela. Digamos que Alice (Coluna) escolha a estratégia iX e Bob (linha) escolha a estratégia Q_2 , a jogada correspondente para estas duas escolhas é dada por $iX \otimes Q_2$. O estado final para a jogada é $|\Psi_2(\mathbf{r})\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(|D \otimes C\rangle + |C \otimes D\rangle) \Rightarrow |\Psi_2(\mathbf{r})\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(|DC\rangle + |CD\rangle)$. O restante é obtido seguindo o exemplo.

Por fim, chegamos ao último estágio de nossa implementação experimental, o aparato de medida. Neste estágio, o modo $\Psi_2(\mathbf{r})$ é enviado primeiramente para um PBS, em que a projeção da polarização é conhecida em cada saída, cada saída é direcionada a um interferômetro de Mach-Zehnder com um espelho adicional em um dos braços, que é denominado por MZIM (do inglês Modified Mach-Zehnder Interferometer)[45]. A Figura 4.5 ilustra um desenho esquemático de um MZIM. Neste interferômetro as projeções do modo espacial são estabelecidas.

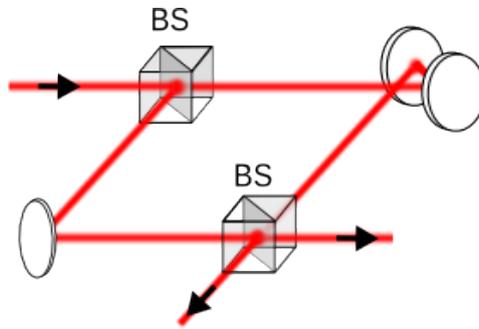


Figura 4.5: *Desenho esquemático de um interferômetro Mach-Zehnder com um espelho adicional em um dos braços. Este é conhecido na literatura como MZIM.*

O interferômetro de Mach-Zehnder modificado trabalha de forma similar a um divisor de feixe (do inglês Beam Splitter, BS), porém para os modos transversos de primeira ordem escritos na base HG , isto é, qualquer modo transversal de ordem $N = 1$ após passar pelo MZIM é decomposto nas bases de modos HG_{10} e HG_{01} .

4.4 Resultados Experimentais e Redução de Pena

Em nosso esquema Experimental o que medimos são as intensidades projetadas. Portanto, as probabilidades $P(m, n)$ são dadas por:

$$P(m, n) = |c_{mn}|^2 = \left| \int d^2\mathbf{r} \psi_m^*(\mathbf{r}) [\hat{e}_n^* \cdot \Psi_2(\mathbf{r})] \right|^2, \quad (4.16)$$

que correspondem às probabilidades de fotodeteccção, quando o feixe é atenuado a regime de um fóton. As intensidades projetadas são medidas nas quatro saídas dos dois MZIM's, com uma câmera CCD (do inglês Charge-coupled device) e com quatro fotodetectores. As imagens obtidas com a CCD são exibidas na tabela da Figura 4.6. Trata-se de imagens correspondentes ao perfil espacial nas bases HG de primeira ordem.

Como esperado, somente as portas com c_{mn} não nulos são iluminadas. As duas Tabelas, Tabelas 4.4 e 4.6, estão qualitativa e quantitativamente em acordo com os resultados medidos e os resultados calculados computacionalmente. Portanto as duas tabelas estão normalizadas. Normalizadas no sentido de que as intensidade totais em cada jogada são aproximadamente as mesmas.

As probabilidades $P(m, n)$ são usadas para computar a função redução de pena, Equação (3.1),

$$\$j = \sum_{m,n=C,D} P(m, n) R_j(m, n).$$

onde, $j = A, B$.

A função redução de pena é avaliada com as intensidades medidas nos quatro detectores. A intensidade de ruído é subtraída em todas as medidas

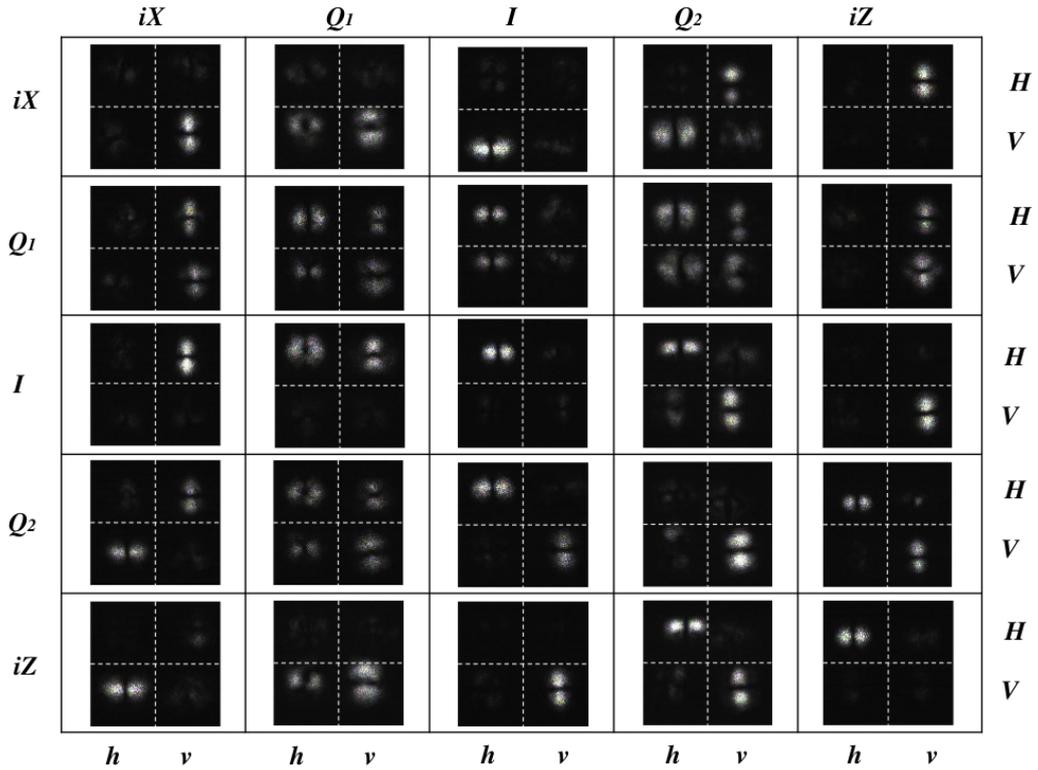


Figura 4.6: Tabela de resultado das medidas de $|\Psi_2(\mathbf{r})\rangle$, o modo final, nas bases de modos espaciais e modo de polarização. As linhas estão subdivididas em bases de vetores de polarização linear, $|\hat{e}_H\rangle \equiv H$ e $|\hat{e}_V\rangle \equiv V$. As colunas estão subdivididas em bases de vetores de modo espacial de HG, $|\psi_h\rangle \equiv h$ e $|\psi_v\rangle \equiv v$. A leitura da tabela é feita seguindo a leitura da tabela na Figura 4.4.

e as intensidades parciais são normalizadas com a intensidade total em cada jogada. Então a função redução de pena experimental, Equação (3.1), é dada por

$$\$ = r \frac{I_R(h, H)}{I_T(\alpha \otimes \beta)} + s \frac{I_R(h, V)}{I_T(\alpha \otimes \beta)} + t \frac{I_R(v, H)}{I_T(\alpha \otimes \beta)} + p \frac{I_R(v, V)}{I_T(\alpha \otimes \beta)} \quad (4.17)$$

onde $\alpha, \beta = (iX, Q_1, I, Q_2, iZ)$, I_R é a intensidade relativa (intensidade detectada menos o intensidade de ruído) e

$$I_T = [I_R(h, H) + I_R(h, V) + I_R(v, H) + I_R(v, V)].$$

Sendo assim, a probabilidade $P(m, n)$ é dada por $I_R(m, n)/I_T$.

Na Figura 4.7 são ilustrados os registros dos quatro detectores, as imagens são da tela do osciloscópio para a intensidade detectada e para a intensidade do ruído para uma jogada, $iZ \otimes Q_2$.

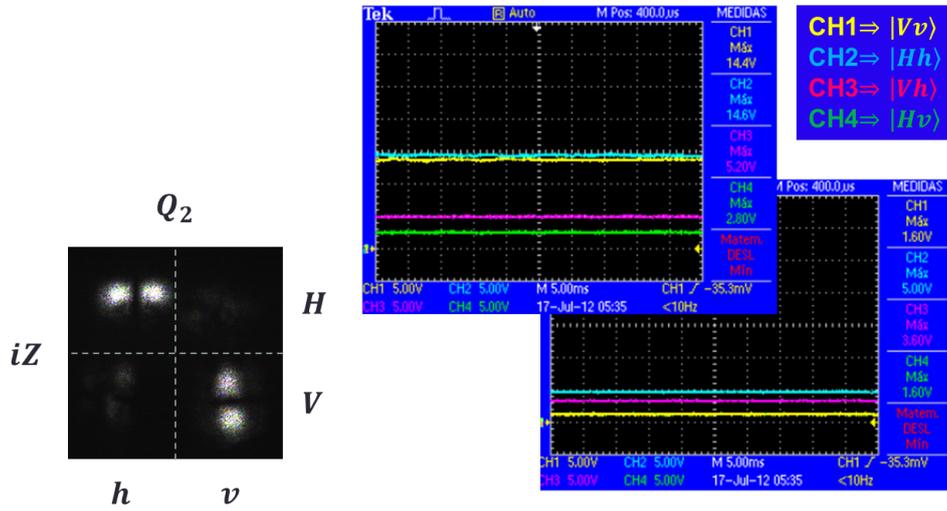


Figura 4.7: *Imagens da tela do osciloscópio para o registro de intensidade de uma jogada, $iZ \otimes Q_2$ (imagem da CCD). A tela a frente mostra a intensidade detectada e a tela atrás é a intensidade de ruído.*

Os resultados experimentais são mostrados na Figura 4.8 juntamente com a curva teórica da redução de pena. Podemos verificar um excelente acordo entre as medidas e os valores esperados. Vale salientar que, sempre estávamos preocupados com a intensidade de saída em cada porta, pois com a medida de intensidade que poderíamos obter a redução de pena. Portanto, não bastava apenas obter os estados de bases, teríamos que balancear e alinhar todos os componentes para que sempre em cada jogada a intensidade resultante das quatro portas permanecesse aproximadamente igual.

Avaliamos a redução de pena de Alice como função dos parâmetros de estratégias (θ_A, ϕ_A) e (θ_B, ϕ_B) no domínio $(\theta = 0, 0 \leq \phi \leq \pi)$ e $(\theta = 45^\circ, 0 \leq \phi \leq \pi)$. O resultado analítico e os pontos correspondendo a todas combinações possíveis das estratégias experimentais são mostrados na Figura 4.8. Os valores experimentais foram obtidos das medidas de intensidade relativas, de acordo com a Equação (4.17).

Para a redução de pena de Bob, fazemos a mudança entre os valores numéricos, $t \leftrightarrow s$, na Equação (4.17). Isto é equivalente à transposta da tabela da Figura 4.4. A Figura 4.9 mostra a redução de pena de Bob para a versão quântica do Dilema do Prisioneiro usando um modo maximamente não separável.

Observando os resultados experimentais e teóricos, concluímos que a estratégia quântica $C_A = C_B = iZ$ está de acordo com a proposta originalmente apresentada na referência [12]. Ela também representa o equilíbrio dominante, equilíbrio de Nash ($iZ \otimes iZ$), com um resultado melhor do que a estratégia dominante na versão clássica, $C_A = C_B = iX$. Se analisarmos o gráfico de redução de pena de Alice, Figura 4.8, vemos que: se Alice escolhe a estratégia iZ e Bob também escolher iZ , a redução de pena de Alice seria $\$_A(iZ, iZ) = 3$ em vez de $\$_A(iZ, iX) = 5$, no caso Bob escolhesse a estratégia

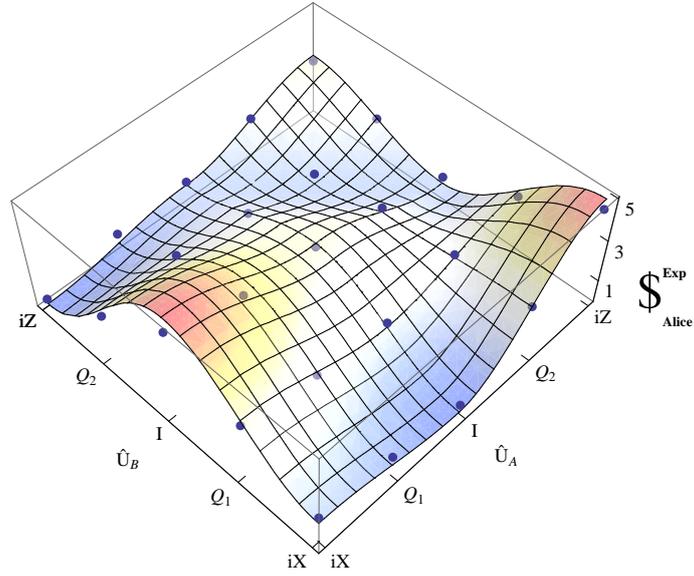


Figura 4.8: *Redução de pena de Alice para um jogo com modo maximamente não separável. Construímos o gráfico escolhendo uma parametrização de tal maneira que as estratégias $C(\theta_A, \phi_A)$ e $C(\theta_B, \phi_B)$ dependam do parâmetro $\tau \in [-1, 1]$, ao passo que $C_A = C(0, \tau\pi)$ para $\tau \in [0, 1]$ e $C_A = C(\pi/4, -\tau\pi)$ para $\tau \in [-1, 0)$. A estratégia I (cooperar) corresponde ao valor $\tau = 0$, iX (acusar) a $\tau = -1$, e iZ é representada por $\tau = 1$. Os pontos correspondem aos valores experimentais obtidos com as medidas de intensidade.*

clássica dominante.

De acordo com o gráfico da Figura 4.8, a iZ é uma estratégia ótima, pois se Bob decide sempre escolher a estratégia iZ e Alice varia sua escolha, ela terá uma redução de pena:

$$\$_A[C_A(\theta, \phi), iZ] \leq 3$$

para todo $\theta \in [0, 45^\circ]$ e $\phi \in [0, \pi]$. De forma análoga, se Alice fixa na estratégia iZ e Bob altera a sua escolha, a redução de pena de Bob, de

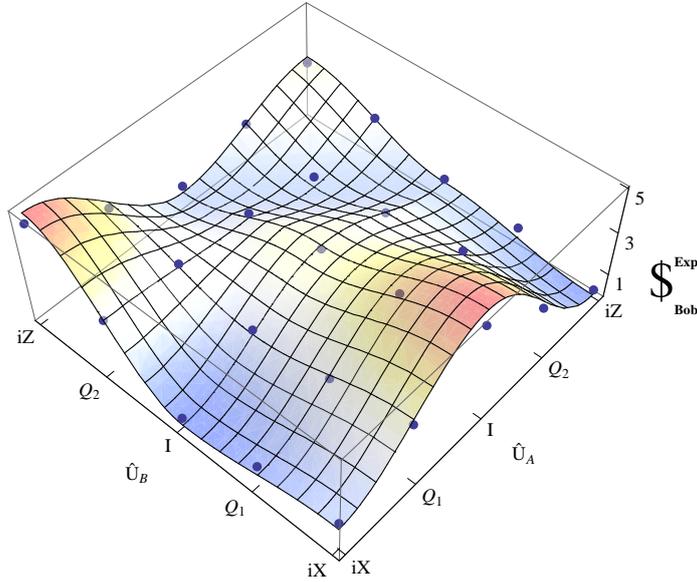


Figura 4.9: *Redução de pena de Bob para a versão quântica do Dilema do Prisioneiro usando um modo maximamente não separável. Construímos o gráfico seguindo a mesma parametrização que adotamos para construir o gráfico de redução de pena de Alice, Figura 4.8. Os pontos correspondem aos valores experimentais obtidos com as medidas de intensidade.*

acordo com o gráfico Figura 4.9, será:

$$\$_B[iZ, C_B(\theta, \phi)] \leq 3.$$

Outra característica é que a jogada $iZ \otimes iZ$ também se identifica como um ótimo de Pareto, isto é, uma vez atingindo esse ponto, o jogador não pode ter uma melhor redução de pena sem agravar a redução de pena do adversário.

Vimos que na versão clássica o Ótimo de Pareto corresponde a Alice e Bob cooperarem, porém, não é o equilíbrio do jogo. Já na versão quântica, além de ser o Ótimo de Pareto é o equilíbrio dominante, Equilíbrio de Nash. Portanto, o dilema do jogo desaparece porque iZ é tanto a estratégia ótima quanto a mais eficiente.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas

Vamos apresentar as conclusões e perspectivas para a continuação do trabalho. Como vimos durante a dissertação, o uso de graus de liberdade do campo eletromagnético como recursos computacionais tem sido cada vez mais empregado. A vantagem oferecida pela aproximação é que a mecânica quântica pode ser, em alguns casos, simulada em um contexto de óptica clássica. Em particular, o grupo de óptica e informação quântica da UFF tem usado modos transversos e polarização de feixe paraxiais para investigar inúmeros fenômenos como a fase topológica adquirida por um estado emaranhado seguindo uma evolução cíclica dentro de operações locais unitárias [7] e para demonstrar criptografia quântica BB84 independente do alinhamento prévio [8]. Além disso, uma desigualdade tipo Bell para os modos spin-orbita foi investigada em domínio clássico [9].

Neste trabalho mostramos que esta abordagem também pode ser usada para implementação de jogos quânticos. Para este fim, apresentamos em detalhes os modos transversos na aproximação paraxial, mostrando como codificar os graus de liberdade transversos e de polarização da luz em uma base computacional. Também mostramos como operar transformações nestes

graus de liberdade e como gerar estados não separáveis, ou seja, feixes paraxiais que apresentam o chamado emaranhamento não quântico.

Apresentamos um problema clássico em teoria dos jogos, o Dilema do Prisioneiro, em sua versão clássica e em sua extensão ao domínio quântico.

Por fim, apresentamos a implementação experimental para a versão quântica do Dilema do Prisioneiro usando feixes paraxiais maximamente não separáveis como recurso para avaliar o desempenho das estratégias. Aumentamos o espaço de estratégias dos jogadores, o maior número de estratégias implementado conhecido na literatura. Os resultados obtidos estão de acordo com esperados, em que todas as características da função redução de pena são mantidas.

Esta implementação abre perspectivas promissoras assegurando aplicações de grande potencial de emaranhamento não quântico para investigar protocolos de informação quântica. A importância da quantização do Dilema do Prisioneiro prova que princípios quânticos altera o processo de informação. Ou seja, novos métodos de comunicação e criptografia quântica podem ser concebidos como jogos quânticos [46], além disto a implementação de outros jogos quânticos, como por exemplo, a Roleta Russa Quântica [47], podem ser alcançados neste contexto.

Apêndice A

Transformações no Espaço de Qubits

As transformações são efetuadas sobre os estados que representam um sistema físico. Se consideramos um sistema no qual haja apenas dois estados linearmente independentes, por exemplo,

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

que formam uma base do espaço, neste caso, o espaço de Hilbert bidimensional, \mathcal{H}^2 . Um estado mais geral neste espaço pode ser obtido por uma combinação linear:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (\text{A.2})$$

com $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$. Este estado é uma representação de um qubit espacial ou qubit de polarização.

As operações ou transformações efetuadas sobre os qubits espaciais ou qubits de polarização são basicamente as rotações e as reflexões na esfera de Bloch. As operações tanto podem ser sobre um qubit simples ou sobre

multiqubits. As matrizes de Pauli são exemplos de transformações em um qubit,

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

juntamente com o operador identidade

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Estas quatro matrizes juntas formam um conjunto completo de bases para gerar qualquer matriz Hermitiana 2×2 . Para efeito de análise, se aplicarmos X sobre o qubit $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ obtemos um qubit invertido, $X|\psi\rangle = \beta|0\rangle + \alpha|1\rangle$. Em termos de computação quântica, X é uma porta-NOT. Agora, se aplicarmos a Z , resulta em uma inversão na fase do bit 1, $Z|\psi\rangle = \alpha|0\rangle - \beta|1\rangle$.

Outra operação muito importante é a chamada transformação Hadamard

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Se aplicarmos a Hadamard sobre em um dos estados da base computacional obteremos uma superposição dos estados da base, $H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$.

Para transformações em dois qubits, uma das mais importantes é a operação Não-Controlada, usualmente referida na literatura como *CNOT* (do inglês Controlled Not gate). Condicionada a um dos qubits, o qubit de *controle*, a operação é inverter o bit do outro qubit, o qubit *alvo*. A forma

matricial desta é a seguinte:

$$U_{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Outro exemplo de porta de dois qubits é a porta de fase controlada CP (do inglês Controlled Phase gate). Nesta, a operação é basicamente adicionar uma fase ϕ ao qubit de controle. A forma matricial desta porta quântica é:

$$U_{CP} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

A $CNOT$ ou CP e uma Hadamard são essenciais para a criação de um estado maximamente emaranhado ou dois subsistemas não-separáveis. O circuito quântico para esta criação pode ser como o que está ilustrado na Figura A.1.

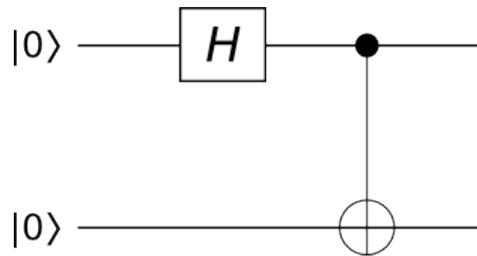


Figura A.1: Circuito quântico para a criação de estado maximamente emaranhado, isto é, o estado de Bell $\frac{1}{\sqrt{2}}[|00\rangle + |11\rangle]$. Combinação de uma Hadamard e um $CNOT$.

Todas as transformações citadas acima são frequentemente usadas quando fazemos operações sobre qubits de polarização ou qubits espaciais. Estas operações são equivalentes à descrição matemática das transformações de um componente óptico, matriz de Jones, [48]. Por exemplo, uma *HWP* e *QWP*, além da defasagem, elas aplicam uma rotação no qubit em torno dos eixos ordenados, $R_{i=x,y,z}(\theta)$ ou que correspondem as três matrizes de Pauli.

Apêndice B

Simulação Matemática da Versão Quântica do Dilema do Prisioneiro

Apresentamos na sequência, a construção dos cálculos para implementação do Dilema do Prisioneiro Quântico com modo paraxiais. Os cálculos são apresentados através dos comandos para o Software MATHEMATICA[®], mostrando, também, as respectivos resultados (“outputs”).

O quadro de imagens apresentado no final dos comandos está em acordo com os resultados experimentais, apresentados na Figura [4.6](#).

1. Definições

1.1. Um qubit

→ Estados de Polarização

Exit[]

```
In[1]:= H = {{1}, {0}}; Bra0 = Transpose[H];
Print["|0>POL=", H // MatrixForm];
V = {{0}, {1}}; Bra1 = Transpose[V];
Print["|1>POL=", V // MatrixForm];
```

$$|0\rangle_{\text{POL}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|1\rangle_{\text{POL}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

→ Estados Espaciais

```
In[5]:= h = {{1}, {0}}; bra0 = Transpose[h];
Print["|0>MTRANS=", h // MatrixForm];
v = {{0}, {1}}; bra1 = Transpose[v];
Print["|1>MTRANS=", v // MatrixForm];
```

$$|0\rangle_{\text{MTRANS}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|1\rangle_{\text{MTRANS}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.2. Dois qubits

→ Estados de base : $|\psi_n\rangle = |i\rangle_{\text{POL}} \otimes |j\rangle_{\text{MTRANS}} = |ij\rangle$ onde $i, j = 0, 1$

```
In[9]:= Clear[phi 1, phi 2, alpha 1, alpha 2];
psi 1= KroneckerProduct[H, h]; bra00 = Transpose[psi 1];
psi 2= KroneckerProduct[H, v]; bra01 = Transpose[psi 2];
psi 3= KroneckerProduct[V, h]; bra10 = Transpose[psi 3];
psi 4= KroneckerProduct[V, v]; bra11 = Transpose[psi 4];
Print["|00>=", psi 1 // MatrixForm];
Print["|01>=", psi 2 // MatrixForm];
Print["|10>=", psi 3 // MatrixForm];
Print["|11>=", psi 4 // MatrixForm];
base = {"|00>", "|01>", "|10>", "|11>"};
```

$$|00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1.3. Conversor, $C(\alpha, \phi) = R(-\alpha) c[\phi] R(\alpha)$

→ Conversor de Polarização = Waveplate, converso de modo = Conversor

```
In[19]:= PhasePOL = {{Exp[-I * phi 1/ 2], 0}, {0, Exp[I * phi 1/ 2]}};
PhaseOAM = {{Exp[-I * phi 2/ 2], 0}, {0, Exp[I * phi 2/ 2]}};

RotPOL = {{Cos[alpha 1], -Sin[alpha 1]}, {Sin[alpha 1], Cos[alpha 1]}};
RotPOLtrans = Transpose[RotPOL];

RotOAM = {{Cos[alpha 2], -Sin[alpha 2]}, {Sin[alpha 2], Cos[alpha 2]}};
RotOAMtrans = Transpose[RotOAM];

Waveplate = RotPOLtrans.PhasePOL.RotPOL; (*WAVEPLATE@alpha-degree*)
Conversor = RotOAMtrans.PhaseOAM.RotOAM; (*CONVERTER@alpha-degree*)
```

2. Estágio de Preparação do Ψ_0

→ $C(45, \pi/2) = \text{QWP45}$, $\text{MZ}(0) = \text{MZ1}$

```
In[27]:= QWP45 = KroneckerProduct[Waveplate, Conversor];
phi 1= pi / 2;
phi 2= 0;
alpha 1= pi / 4;
alpha 2= 0;

In[32]:= MZ1 = {{1, 0, 0, 0}, {0, -1, 0, 0}, {0, 0, 0, -1}, {0, 0, 1, 0}};
Simplify[MZ1 // MatrixForm];
Print["MZ1*QWP45=", Simplify[MZ1.QWP45 // MatrixForm]];
psi 0= Simplify[MZ1.QWP45.psi 1];

a01 = Simplify[Det[Transpose[psi 0.psi 1]];
a02 = Simplify[Det[Transpose[psi 0.psi 2]];
a03 = Simplify[Det[Transpose[psi 0.psi 3]];
a04 = Simplify[Det[Transpose[psi 0.psi 4]];
Print["Psi_0=", a01 * "|00>" + a02 * "|01>" + a03 * "|10>" + a04 * "|11>"];
```

$$\text{MZ1} * \text{QWP45} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Psi_0 = \frac{|00\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{i|11\rangle}{\sqrt{2}}$$

3. Espaço de Estratégias

```
In[41]:= Clear[phi 1, phi 2, alpha 1, alpha 2];
phi 1= 0; phi 2= 0; alpha 1= 0; alpha 2= 0;
I = Waveplate;

Clear[phi 1, phi 2, alpha 1, alpha 2];
phi 1= pi / 2; phi 2= 0; alpha 1= pi / 4; alpha 2= 0;
Q 1= Simplify[Waveplate];

Clear[phi 1, phi 2, alpha 1, alpha 2];
phi 1= pi; phi 2= 0; alpha 1= pi / 4; alpha 2= 0;
iX = Waveplate;

Clear[phi 1, phi 2, alpha 1, alpha 2];
phi 1= -pi; phi 2= 0; alpha 1= 0; alpha 2= 0;
Q 2= 1 / Sqrt[2] * (I + Waveplate);

Clear[phi 1, phi 2, alpha 1, alpha 2];
phi 1= -pi; phi 2= 0; alpha 1= pi; alpha 2= 0;
iZ = Waveplate;
```

3.1 Construção de Jogadas

→ $C(\theta_A, \phi_A) \otimes C(\theta_B, \phi_B)$

```

In[56]:= II = Simplify[KroneckerProduct[I, I]];
IQ 1= Simplify[KroneckerProduct[I, Q 1]];
I iX= Simplify[KroneckerProduct[I, iX]];
IQ 2= Simplify[KroneckerProduct[I, Q 2]];
I iz= Simplify[KroneckerProduct[I, iz]];

Q 1I= Simplify[KroneckerProduct[Q 1, I]];
Q 1Q 1= Simplify[KroneckerProduct[Q 1, Q 1]];
Q 1iX= Simplify[KroneckerProduct[Q 1, iX]];
Q 1Q 2= Simplify[KroneckerProduct[Q 1, Q 2]];
Q 1iz= Simplify[KroneckerProduct[Q 1, iz]];

iXI = Simplify[KroneckerProduct[iX, I]];
iXQ 1= Simplify[KroneckerProduct[iX, Q 1]];
iX iX= Simplify[KroneckerProduct[iX, iX]];
iXQ 2= Simplify[KroneckerProduct[iX, Q 2]];
iX iz= Simplify[KroneckerProduct[iX, iz]];

Q 2I= Simplify[KroneckerProduct[Q 2, I]];
Q 2Q 1= Simplify[KroneckerProduct[Q 2, Q 1]];
Q 2iX= Simplify[KroneckerProduct[Q 2, iX]];
Q 2Q 2= Simplify[KroneckerProduct[Q 2, Q 2]];
Q 2iz= Simplify[KroneckerProduct[Q 2, iz]];

izi = Simplify[KroneckerProduct[iz, I]];
izQ 1= Simplify[KroneckerProduct[iz, Q 1]];
iz iX= Simplify[KroneckerProduct[iz, iX]];
izQ 2= Simplify[KroneckerProduct[iz, Q 2]];
iz iz= Simplify[KroneckerProduct[iz, iz]];

```

3.2 Operador espaço de estratégias : Matriz (5 x 5)

```

In[81]:= OPERATOR1 = {{iXiX, iXQ 1, iXI, iXQ 2, iXiz}, {Q 1iX, Q 1Q 1, Q 1I, Q 1Q 2, Q 1iZ},
  {I iX, IQ 1, I, IQ 2, I iz}, {Q 2iX, Q 2Q 1, Q 2I, Q 2Q 2, Q 2iZ}, {iz iX, izQ 2, izI, izQ 2, iz iz}};
Tabl = OPERATOR1.# Q
TABLE = Simplify[Table[Flatten[Tabl[[aa, bb]]].base, {aa, 1, 5}, {bb, 1, 5}]];
Print[Style[Estado  $\Psi_1$ , 16, Blue]]
Print[TABLE // MatrixForm]

```

Estado Ψ_1

4. Operador U^\dagger

→ $MZ(0) [C(-45^\circ, \pi/2) \otimes I] MZ(\pi/2) = MZ2.QWP45.MZ3$

```

In[86]:=
MZ2 = {{1, 0, 0, 0}, {0, -1, 0, 0}, {0, 0, 0, -1}, {0, 0, 1, 0}};
MZ2 // MatrixForm;
QWP45 = (1 / Sqrt[2]) * {{1, 0, 1, 0}, {0, 1, 0, 1}, {-I, 0, I, 0}, {0, -I, 0, I}};
QWP45 // MatrixForm;
MZ3 = {{1, 0, 0, 0}, {0, -1, 0, 0}, {0, 0, 0, -I}, {0, 0, I, 0}};
MZ3 // MatrixForm;
U† = Simplify[MZ2.QWP45.MZ3];
Print["U†=", U† // MatrixForm];

```

$$U^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

```

In[94]:= Print[Style[Estado Ψ2, 16, Blue]]
Tab2 = Simplify[Table[Flatten[U†.Tab1[[aa, bb]]].base, {aa, 1, 5}, {bb, 1, 5}]];
Print[Tab2 // MatrixForm]

```

Estado Ψ_2

$$\begin{pmatrix} -|11\rangle & \frac{i(|10\rangle + i|11\rangle)}{\sqrt{2}} & i|10\rangle & \frac{i(|01\rangle + |10\rangle)}{\sqrt{2}} & i|01\rangle \\ \frac{i(|01\rangle + i|11\rangle)}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}(|00\rangle + i(|01\rangle + |10\rangle + i|11\rangle)) & \frac{|00\rangle + i|10\rangle}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}(|00\rangle + i|01\rangle + i|10\rangle + |11\rangle) & \frac{i|01\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \\ i|01\rangle & \frac{|00\rangle + i|01\rangle}{\sqrt{2}} & |00\rangle & \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} & |11\rangle \\ \frac{i(|01\rangle + |10\rangle)}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}(|00\rangle + i|01\rangle + i|10\rangle + |11\rangle) & \frac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} & |11\rangle & \frac{-|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \\ i|10\rangle & \frac{-|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} & |11\rangle & \frac{-|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} & -|00\rangle \end{pmatrix}$$

5. Perfil de Intensidade

```
In[97]:= phi = Arg[x + I y];
HG[x_, y_, m_, n_] = Exp[-(x^2 + y^2) / 2] HermiteH[n, x] HermiteH[m, y];
```

```
In[99]:= HG10[x_, y_] = Exp[-(x^2 + y^2) / 2] HermiteH[1, x] HermiteH[0, y];
HG01[x_, y_] = Exp[-(x^2 + y^2) / 2] HermiteH[0, x] HermiteH[1, y];
```

```
In[101]:= phi H= DensityPlot[Abs[HG10[x, y]]^2, {x, -5, 5},
  {y, -5, 5}, Mesh -> False, PlotPoints -> 50, Frame -> False];
phi V= DensityPlot[Abs[HG01[x, y]]^2, {x, -5, 5}, {y, -5, 5},
  Mesh -> False, PlotPoints -> 50, Frame -> False];
phi 00= DensityPlot[Abs[0]^2, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, Mesh -> False,
  PlotPoints -> 50, Frame -> False];
```

5.1. Perfil de Intensidade do feixe após U^\dagger

```

In[104]:= A11a =  $\phi$   $\mathbb{H}$ 
A12a = DensityPlot[Abs[HG01[x, y] + I * HG10[x, y]]^2,
  {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, Mesh  $\rightarrow$  False, PlotPoints  $\rightarrow$  50, Frame  $\rightarrow$  False];
A13a =  $\phi$   $\mathbb{V}$ 
A14a = DensityPlot[Abs[HG01[x, y]]^2 + Abs[I * HG10[x, y]]^2,
  {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, Mesh  $\rightarrow$  False, PlotPoints  $\rightarrow$  50, Frame  $\rightarrow$  False];
A15a =  $\phi$   $\mathbb{V}$ 

A21a = DensityPlot[Abs[HG10[x, y]]^2 + Abs[I * HG10[x, y]]^2,
  {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, Mesh  $\rightarrow$  False, PlotPoints  $\rightarrow$  50, Frame  $\rightarrow$  False];
A22a = DensityPlot[Abs[HG01[x, y] + I * HG10[x, y]]^2 + Abs[I * HG01[x, y] - HG10[x, y]]^2,
  {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, Mesh  $\rightarrow$  False, PlotPoints  $\rightarrow$  50, Frame  $\rightarrow$  False];
A23a = DensityPlot[Abs[HG01[x, y]]^2 + Abs[I * HG01[x, y]]^2, {x, -5, 5},
  {y, -5, 5}, Mesh  $\rightarrow$  False, PlotPoints  $\rightarrow$  50, Frame  $\rightarrow$  False];
A24a = DensityPlot[Abs[HG01[x, y] + I * HG10[x, y]]^2 + Abs[HG01[x, y] + I * HG10[x, y]]^2,
  {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, Mesh  $\rightarrow$  False, PlotPoints  $\rightarrow$  50, Frame  $\rightarrow$  False];
A25a = DensityPlot[Abs[HG10[x, y]]^2 + Abs[I * HG10[x, y]]^2, {x, -5, 5},
  {y, -5, 5}, Mesh  $\rightarrow$  False, PlotPoints  $\rightarrow$  50, Frame  $\rightarrow$  False];

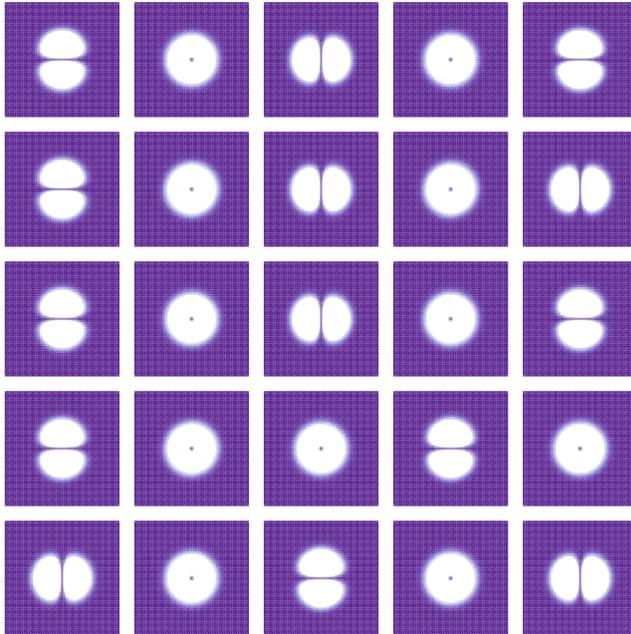
A31a =  $\phi$   $\mathbb{H}$ 
A32a = DensityPlot[Abs[I * HG01[x, y] - HG10[x, y]]^2,
  {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, Mesh  $\rightarrow$  False, PlotPoints  $\rightarrow$  50, Frame  $\rightarrow$  False];
A33a =  $\phi$   $\mathbb{V}$ 
A34a = DensityPlot[Abs[HG01[x, y]]^2 + Abs[I * HG10[x, y]]^2,
  {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, Mesh  $\rightarrow$  False, PlotPoints  $\rightarrow$  50, Frame  $\rightarrow$  False];
A35a =  $\phi$   $\mathbb{V}$ 

A41a = DensityPlot[Abs[HG01[x, y]]^2 + Abs[I * HG10[x, y]]^2,
  {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, Mesh  $\rightarrow$  False, PlotPoints  $\rightarrow$  50, Frame  $\rightarrow$  False];
A42a = DensityPlot[Abs[I * HG01[x, y] + HG10[x, y]]^2 + Abs[I * HG01[x, y] + HG10[x, y]]^2,
  {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, Mesh  $\rightarrow$  False, PlotPoints  $\rightarrow$  50, Frame  $\rightarrow$  False];
A43a = DensityPlot[Abs[HG01[x, y]]^2 + Abs[HG01[x, y]]^2, {x, -5, 5},
  {y, -5, 5}, Mesh  $\rightarrow$  False, PlotPoints  $\rightarrow$  50, Frame  $\rightarrow$  False];
A44a =  $\phi$   $\mathbb{V}$ 
A45a = DensityPlot[Abs[-HG01[x, y]]^2 + Abs[I * HG10[x, y]]^2,
  {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, Mesh  $\rightarrow$  False, PlotPoints  $\rightarrow$  50, Frame  $\rightarrow$  False];

A51a =  $\phi$   $\mathbb{V}$ 
A52a = DensityPlot[Abs[HG01[x, y] + I * HG10[x, y]]^2,
  {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, Mesh  $\rightarrow$  False, PlotPoints  $\rightarrow$  50, Frame  $\rightarrow$  False];
A53a =  $\phi$   $\mathbb{H}$ 
A54a = DensityPlot[Abs[HG01[x, y]]^2 + Abs[-HG10[x, y]]^2,
  {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, Mesh  $\rightarrow$  False, PlotPoints  $\rightarrow$  50, Frame  $\rightarrow$  False];
A55a =  $\phi$   $\mathbb{H}$ 

```

```
In[129]:= GraphicsGrid[{{A33a, A32a, A31a, A34a, A35a},
  {A23a, A22a, A21a, A24a, A25a},
  {A13a, A12a, A11a, A14a, A15a},
  {A43a, A42a, A41a, A44a, A45a},
  {A53a, A52a, A51a, A54a, A55a}}]
```



Out[129]=

5.2. Perfil de Intensidade nos estados de base

→ Feixe após os MZIM's. Padrão de intensidade a ser detectado pela CCD

```
In[130]:= A11 = GraphicsGrid[{{ϕ H ϕ 0Q, {ϕ 0Q ϕ 0Q}}]; A12 = GraphicsGrid[{{ϕ H ϕ V}, {ϕ 0Q ϕ 0Q}}];
A13 = GraphicsGrid[{{ϕ 0Q ϕ V}, {ϕ 0Q ϕ 0Q}}]; A14 = GraphicsGrid[{{ϕ H ϕ 0Q, {ϕ 0Q ϕ V}}];
A15 = GraphicsGrid[{{ϕ 0Q ϕ 0Q, {ϕ 0Q ϕ V}}];

A21 = GraphicsGrid[{{ϕ H ϕ 0Q, {ϕ H ϕ 0Q}}]; A22 = GraphicsGrid[{{ϕ H ϕ V}, {ϕ H ϕ V}}];
A23 = GraphicsGrid[{{ϕ 0Q ϕ V}, {ϕ 0Q ϕ V}}]; A24 = GraphicsGrid[{{ϕ H ϕ V}, {ϕ H ϕ V}}];
A25 = GraphicsGrid[{{ϕ 0Q ϕ V}, {ϕ 0Q ϕ V}}];

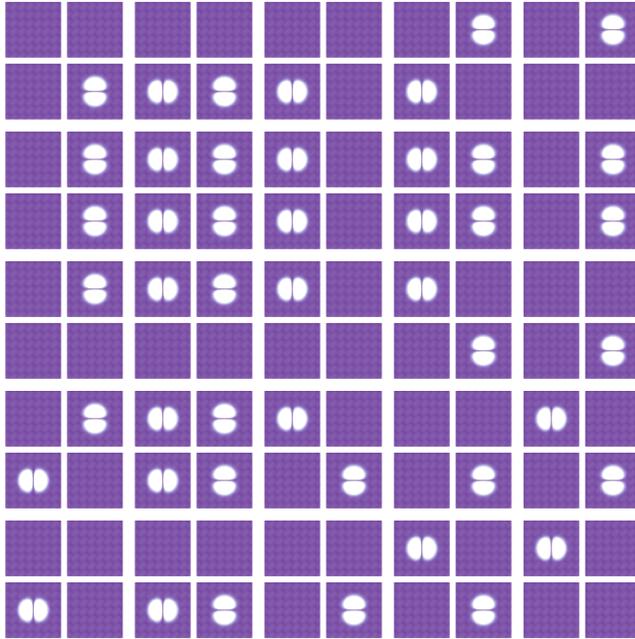
A31 = GraphicsGrid[{{ϕ 0Q ϕ 0Q, {ϕ H ϕ 0Q}}]; A32 = GraphicsGrid[{{ϕ 0Q ϕ 0Q, {ϕ H ϕ V}}];
A33 = GraphicsGrid[{{ϕ 0Q ϕ 0Q, {ϕ 0Q ϕ V}}]; A34 = GraphicsGrid[{{ϕ 0Q ϕ V}, {ϕ H ϕ 0Q}}];
A35 = GraphicsGrid[{{ϕ 0Q ϕ V}, {ϕ 0Q ϕ 0Q}}];

A41 = GraphicsGrid[{{ϕ H ϕ 0Q, {ϕ 0Q ϕ V}}]; A42 = GraphicsGrid[{{ϕ H ϕ V}, {ϕ H ϕ V}}];
A43 = GraphicsGrid[{{ϕ 0Q ϕ V}, {ϕ H ϕ 0Q}}]; A44 = GraphicsGrid[{{ϕ 0Q ϕ 0Q, {ϕ 0Q ϕ V}}];
A45 = GraphicsGrid[{{ϕ H ϕ 0Q, {ϕ 0Q ϕ V}}];

A51 = GraphicsGrid[{{ϕ 0Q ϕ 0Q, {ϕ 0Q ϕ V}}]; A52 = GraphicsGrid[{{ϕ 0Q ϕ 0Q, {ϕ H ϕ V}}];
A53 = GraphicsGrid[{{ϕ 0Q ϕ 0Q, {ϕ H ϕ 0Q}}]; A54 = GraphicsGrid[{{ϕ H ϕ 0Q, {ϕ 0Q ϕ V}}];
A55 = GraphicsGrid[{{ϕ H ϕ 0Q, {ϕ 0Q ϕ 0Q}}];
```

```
In[135]:= GraphicsGrid[{{A33, A32, A31, A34, A35},  
  {A23, A22, A21, A24, A25},  
  {A13, A12, A11, A14, A15},  
  {A43, A42, A41, A44, A45},  
  {A53, A52, A51, A54, A55}}]
```

Out[135]=



Referências Bibliográficas

- [1] Shor, P. *Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring*, Proceedings 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, Santa Fe, NM, USA, 20-22 Nov. 1994, IEEE Comput. Soc. Press, pp. 124-134 (1994).
- [2] Grover, L. K. *A Fast Quantum Mechanical Algorithm for Database Search*, Proceedings of the 28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing, Philadelphia, pp. 212-219 (1996).
- [3] Bennett, C. H.; Brassard, C.; Crépeau, C.; et al., *Teleporting an Unknown Quantum State via Dual Classical and Einstein-Podolsky-Rosen Channels*, Phys. Rev. Lett. 70, 1895-1899 (1993).
- [4] A. K. Ekert, *Quantum cryptography based on Bell's theorem*, Phys. Rev. Lett. 67, 661 (1991).
- [5] A. Mair, A. Vaziri, G. Weihs, A. Zeilinger, *Entanglement of the orbital angular momentum states of photons*, Nature (London) 412, 313 (2001).
- [6] Arnaut, H. H.; Barbosa, G. A. *Orbital and angular momentum of single photons and entangled pairs of photons generated by parametric down-conversion*, Phys. Rev. Lett. 85, 286-289 (2000).

- [7] Souza, C. E. R.; Huguenin, J. A. O.; Milman, P.; Khoury, A. Z., *Topological phase for spin-orbit transformations on a laser beam*, Phys. Rev. Lett., v. 99, p. 160401, (2007).
- [8] Souza, C. E. R.; Borges, C. V. S.; Khoury, A. Z.; Huguenin, J. A.; Aolita, L.; Walborn, S. P., *Quantum key distribution without a shared reference frame*, Phys. Rev. A, v. 77, p. 032345, (2008).
- [9] Borges, C.V. S.; Hor-Meyll, M; Huguenin, J. A. O; et al., *Bell-like inequality for the spin-orbit separability of a laser beam*, Phys. Rev. A, 82 (3): Art. No. 033833 (2010).
- [10] Chen, K. Y., Hogg, T., Beausoleil, R., *A quantum treatment of public goods economics*, Quantum Information Processing 1 (6), 449–469 (2002).
- [11] P. E. Turner, L. Cho, *Prisoner's dilemma in an RNA virus*, Nature 398, 441 (1999).
- [12] Jens Eisert et al, *Quantum game and quantum strategies*, Phys. Rev. Lett. 83, 3077–3080 (1999).
- [13] D.A. Meyer, *Quantum strategies*, Phys. Rev. Lett. 82, 1052–1055 (1999).
- [14] Du J., Li H, Xu X., Shi M., Wu J., Zhou X., Han R., *Experimental Realization of Quantum Games on a Quantum Computer*, Phys. Rev. Lett. 88 137902 (2002).
- [15] R. Prevedel, A Stefanov, P, Walther, A. Zeilinger, *Experimental realization of a quantum game on a one-way quantum computer*, New J. Phys. 9, 205 (2007).

- [16] Werner, R. F., *Optimal cloning of pure states*, Phys. Rev. A 58, 1827 (1998).
- [17] Jackson, J. D., *Classical electrodynamics*; John Wiley & Sons: Third Ed., New York, (1998).
- [18] H. Kogelnik and T. Li, *Laser beams and resonators*, Appl. Opt. 5 (10), 1550 (1966)
- [19] A. Yariv, *Quantum Electronics*, John Wiley: Third Ed., New York, 1989.
- [20] Siegman, A. E., *Lasers*, University Science Books, Mill Valley, CA (1986).
- [21] Paschotta, R., *Encyclopedia of Laser Physics and Technology*, Wiley VCH, Berlin, 2008.
- [22] Allen, L. et al., *Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes*, Phys. Rev. A, 45, 11 (1992).
- [23] Van Enk, S. J., *Geometric phase, transformations of gaussian light beams and angular momentum transfer*. Opt. Comm. 102, 59-64 (1993).
- [24] G. B. Arfken, H. J. Weber, F. E. Harris, *Física Matemática: Métodos Matemáticos para Engenharia e Física*, Campus - Elsevier, 1^o Edição, New York (2007).
- [25] Couillet, P.; Gil, L.; Rocca, F.; *Optical Vortices*, Opt. Commun. 73, 403-408, (1989).
- [26] Padgett, M., Allen, L., *Light with a twist in its tail*, Contemp. Phys. 41, 5, 275-285 (2000).

- [27] Beijersbergen, M. W., *Helical-wavefront laser beams produced with a spiral phase plate*, Opt. Commun. 112 (5–6), 321 (1994).
- [28] Marrucci, L. et al., *Optical Spin-to-Orbital Angular Momentum Conversion in Inhomogeneous Anisotropic Media*, Phys. Rev. Lett. 96, 163905 (2006).
- [29] He, H., Heckenberg, N. R., Rubinsztein-Dunlop, H., *Optical particle trapping with higher-order doughnut beams produced using high efficiency computer generated holograms*, J. Mod. Opt. 42, 217–223 (1995).
- [30] Beijersbergen, M. W., Allen, L., Van der Veen, H. E. L. O., Woerdman, J. P., *Astigmatic laser mode converters and transfer of orbital angular momentum*, Opt. Commun. 96, 123 (1993).
- [31] Souza, C. E. R., *Aplicações do Momento Angular Orbital da luz à Computação e Informação Quântica*, Tese de Doutorado, Inst. de Física UFF, (2010).
- [32] Heckenberg, N. R., McDuff, R., Smith, C. P., White, A. G., *Generation of optical phase singularities by computer-generated holograms*, Opt. Lett. 17(3), 221–223 (1992).
- [33] Hall, D. G., *Vector beam solution of Maxwell's wave equation*, Opt. Lett. 21, 9–11 (1996).
- [34] Hecht, E., *Optics*, Addison-Wesley Longman, 3ed, (1998).
- [35] M. J. Walker, *Matrix calculus and the Stokes parameters of polarized radiation*, Am. J. Phys. 22, 170–174 (1954).
- [36] Padgett, M. J., Courtial, J., *Poincaré-sphere equivalent for light beams containing orbital angular momentum*. Opt. Lett. 24, 430 (1999).

- [37] Scott Hill, William K. Wootters *Entanglement of a Pair of Quantum Bits*, Phys. Rev. Lett. 78, 50225025 (1997).
- [38] Simon, B. N., Simon, S., Gori, F. et al., *Nonquantum Entanglement Resolves a Basic Issue in Polarization Optics*, Phys. Rev. Lett. 104, 023901 (2010).
- [39] Hong Guo, Juheng Zhang , Gary J. Koehler, *A survey of quantum games*, Decision Support Systems 46, 318–332 (2008).
- [40] Von Neumann, J., Morgenstern, O., *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton, Princeton University Press, (1944).
- [41] Nash, Jr. F. J., *The Bargaining Problem*, Econometrica, Vol 18, 155162 (1950).
- [42] Flood, M .M., *Some Experimental Games*, Research Memorandum RM-789-1-PR, RAND Corporation, Santa-Monica, CA, USA, June (1952).
- [43] Raussendorf, R., Briegel, H. J., *A one-way quantum computer*. Phys. Rev. Lett., 86(22):5188–5191, (2001).
- [44] Simon, R., Mukunda, N., *Universal $SU(2)$ Gadget for Polarization Optics*, Phys. Lett. A 138, 474 (1989).
- [45] Sasada, H., Okamoto, M., *Transverse-mode beam splitter of a light beam and its application to quantum cryptography*, Phys. Rev. A 68, 012323 (2003).
- [46] Mahboobeh Houshmand, Monire Houshmand, H. R. Mashhadi, *Game Theory Based View to the Quantum Key Distribution BB84 Protocol*. Proceedings of the 2010 Third International Symposium on Intelligent

- Information Technology and Security Informatics - IITSI, IEEE Computer Society, 332-336, (2010).
- [47] Schmidt, A.G.M., Da Silva, L., *Quantum Russian Roulette* Physica A: Statistical Mechanics and its Applications 392, 2, 400-410 (2013).
- [48] Shi Fang Li, *Jones-Matrix Analysis with Pauli matrices: application to ellipsometry*, J. Opt. Soc. Am. A 17, 5 (2000)
- [49] Bekshaev, A., M.Soskin, M.Vasnetsov, *Paraxial Light Beams with Angular Momentum*, Nova Science Publishers, United States, (2008).
- [50] Galvez, E. J. et al, *Geometric Phase Associated with Mode Transformations of Optical Beams Bearing Orbital Angular Momentum*, Phys. Rev. Lett. 90, 203901 (2003).
- [51] Berry, M.V., *Paraxial Beams of Spinning Light*, Proc. SPIE 3487, 6-11 (1998).
- [52] Courtial, J., Padgett, M. J., *Performance of a Cylindrical Lens Mode Converter for Producing Laguerre-Gaussian laser Modes*, Optics Comm. 159, 13 (1999).
- [53] Turnbull, G. A. et al., *The Generation of Free-Space Laguerre-Gaussian Modes at millimetre-wave frequencies by use of a Spiral Phaseplate*, Optics Comm. 127, 183 (1996).
- [54] Curtis, J. E., Grier, D G., *Structure of Optical Vortices*, Phys. Rev, Lett. 90, 133901 (2003).
- [55] Kennedy, S. A. et al., *Creation of Laguerre-Gaussian laser Modes using Diffractive Optics*, Phys. Rev. A 66, 043801 (2002).

- [56] Shi Fang Li, *Jones-Matrix Analysis*, J. Opt. Soc. Am. A 17, 5 (2000)
- [57] Erikson, W. L., Singh, S., *Polarization properties of Maxwell-Guassian laser beams*, Phys. Rev. E 49, 5778-5786 (1994).
- [58] Bickel, W. S., Bailey, W. M., *Stokes vectors, Mueller matrices, and polarized scattered light*, Am. J. Phys. 53, 468-478 (1985).
- [59] Myerson, R. B., *Game Theory: An Analysis of Conflict*, MIT Press, Cambridge, MA, (1991).
- [60] Benjamin, S.C., Hayden, P.M., *Multiplayer Quantum Games*, Phys. Rev. A 64, 030301 (2001).
- [61] Du, J., Li, H., Xu, X., Zhou, X., Han, R., *Entanglement enhanced multiplayer quantum games*. Phys. Lett. A 302: 229-233 (2002).