

Paulo Victor Santos Souza

# **Túneis de Vento Numéricos**

Brasil

Niterói, Junho de 2016

S719t Souza, Paulo Victor Santos.

Túneis de vento numéricos / Paulo Victor Santos Souza ; orientador: Paulo Murilo Castro de Oliveira. -- Niterói, 2016. 86 p. : il.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal Fluminense, Instituto de Física, Niterói, 2016.  
Bibliografia: p.69-72.

1.DINÂMICA DOS FLUIDOS. 2.ESCOAMENTO VISCOSO. 3.TÚNEL DE VENTO. 4.ARRASTO. I.Oliveira, Paulo Murilo Castro de, Orientador. II.Universidade Federal Fluminense. Instituto de Física, Instituição responsável. III.Título.

CDD 532.05

Paulo Victor Santos Souza

## **Túneis de Vento Numéricos**

Tese de doutorado apresentada como requisito  
parcial para obtenção do título de Doutor em  
Física

Universidade Federal Fluminense - UFF

Instituto de Física

Programa de Pós-Graduação

Orientador: Dr. Paulo Murilo Castro de Oliveira

Brasil

Niterói, Junho de 2016

Paulo Victor Santos Souza

## **Túneis de Vento Numéricos**

Tese de doutorado apresentada como requisito  
parcial para obtenção do título de Doutor em  
Física

Trabalho aprovado. Brasil, 18 de Julho de 2016:

---

**Dr. Paulo Murilo Castro de Oliveira**  
Orientador

---

**Dr. Silvio Roberto de Azevedo Salinas**

---

**Dr. Luca Moriconi**

---

**Dr. Carlos Eduardo Magalhães de  
Aguar**

---

**Dr. Roberto Bechara Muniz**

Brasil  
Niterói, Junho de 2016

*Para Karla, porque também há romances que nunca terminam.*



# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus pelo dom da vida. Sua existência não pode ser comprovada por meio dos métodos da ciência. Contudo, admitir que ele existe e que tem uma personalidade me parece inevitável diante da beleza e da complexidade do Universo e da vida.

Agradeço também aos meus pais, Lucilena e Paulo Roberto, por tudo que me ensinaram e por sempre acreditarem em mim.

Agradeço aos amigos que tenho por sua sinceridade, lealdade e cumplicidade. Em especial, a Fernando dos Santos, Guilherme Raposo, Jaime Brandão, Erick Ribeiro, Luiz Carlos Cordeiro e Wagner Coelho.

Sou também muito grato aos professores que tive, tanto na Universidade Federal do Rio Janeiro quanto na Universidade Federal Fluminense. Em especial, Marcus Venícius Cougo Pinto, Raul Donangelo, Alexandre Tort e Penha Maria Cardozo Dias. Estes últimos, muito mais do que professores. Considero-os meus amigos.

Agradeço também aos colegas de doutorado Wagner Balthazar e Jaime Souza pelo companheirismo.

Sou também infinitamente grato àqueles que idealizaram e implementaram o consórcio Cederj por terem acreditado que é possível ensinar física à distância.

Agradeço especialmente ao meu orientador, professor Paulo Murilo, pela paciência e dedicação. Sua criatividade e tenacidade me inspiraram durante estes últimos anos e estou certo que continuarão a me influenciar durante todo o resto da minha carreira.

Finalmente, reitero meu amor e gratidão pela minha esposa, Karla. Em todos os momentos, bons e ruins, aprendi muito com ela. Amá-la tem me feito alguém maior.





*Vem que vem o vento,  
Vem que sopra num momento;  
Vou, montado num jumento,  
Cavalgar o arco-íris.  
Vem que vem cantar,  
Vem que vem sobrar,  
Vem que vai trazer  
Tudo aquilo que eu tive  
E que o vento carregou,  
Quando eu estava distraída  
A olhar pra meu umbigo,  
E o momento já passou.  
Vem que o vento volta,  
Devolvendo o meu sonho;  
Pesadelo tão medonho  
Que eu não quero nem lembrar.  
Vem que vai ventar,  
Vem que vai voltar,  
Vento vai ventar,  
Apagando num momento  
Todo o arrependimento  
De um vento tão ventado,  
De um momento tão demais,  
De um vento tão perdido  
Que não vai ventar jamais...*



# Resumo

Escoamentos viscosos não são, em geral, discutidos de maneira detalhada em cursos de física básica e geral. Isso se deve, em parte, ao fato de a equação de Navier-Stokes, que descreve escoamentos viscosos, admitir solução analítica apenas para alguns poucos casos, enquanto problemas mais sofisticados só podem ser resolvidos por meio de métodos numéricos. Nesta tese, apresenta-se um túnel de vento simulado, *i.e.*, apresenta-se uma solução para equação de Navier-Stokes para o fluxo sobre um objeto de formato arbitrário inserido em um túnel de vento cuja velocidade pode ser controlada. O túnel possibilita ao usuário visualizar o escoamento sobre o objeto e a eventual formação de vórtices turbulentos atrás dele, os conhecidos vórtices de von Kármán. Ademais, propõe-se um método alternativo para calcular a força de arrasto. A confiabilidade do método é atestada pela comparação entre os resultados obtidos por meio dele e resultados experimentais conhecidos. Espera-se que estas duas contribuições possam subsidiar o professor e permitir que uma discussão mais elaborada de escoamentos viscosos seja realizada. As potencialidades do túnel e do método são exemplificadas por meio do estudo do escoamento sobre alguns objetos de formatos diferentes. Um link para o download dos programas que compõem o túnel é apresentado ao final do texto.

**Palavras-chave:** dinâmica dos fluidos, escoamentos viscosos, túneis de vento, força de arrasto.



# Abstract

The flow of viscous fluids are not usually discussed in detail in introductory and general courses of physics. This is due in part to the fact that the Navier-Stokes equation, that describes the flow of viscous fluids, has analytical solution only for a few restricted cases, while more sophisticated problems can only be solved by numerical methods. In this thesis, it is presented a computer simulation of wind tunnel, specifically, it is presented a solution to the Navier-Stokes equation for the flow on an arbitrary object inserted in a wind tunnel whose speed can be controlled. The tunnel enables the user to visualize the flow on the object and the eventual formation of turbulent vortices behind it, the so-called von Kármán vortices. Furthermore, it is proposed an alternative method to calculate the drag force. The reliability of the method is demonstrated by comparing the results obtained using it with known experimental results. The expectation is that these two contributions can help the teacher in a more elaborate discussion of viscous flows. The potential of the tunnel and the method are exemplified by the study of flows over some different objects. A link to download the programs that make up the tunnel appears at the end of the text.

**Keywords:** fluid dynamics, viscous flows, wind tunnels, drag force.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Tempo de queda para diferentes alturas. As barras de erro verticais são desprezíveis. A barra de erro horizontal exibida para cada ponto experimental (vermelho) é calculada a partir das estatísticas de 10 medições para cada altura. Usando $g = 9,8\text{m/s}^2$ , a curva superior é a parábola de queda livre, $X = gT^2/2$ . As outras duas curvas correspondem a um movimento onde há força de arrasto proporcional ao quadrado da velocidade. Na curva inferior, a força atua durante todo o movimento. Na intermediária (azul), a mesma força de atrito começa a atuar somente após um certo instante (ponto azul vazado), sendo sem atrito o movimento anterior a este instante. . . . .	29
Figura 2 – Diagrama esquemático da versão mais sofisticada do experimento. . . .	30
Figura 3 – Medição direta das velocidades para uma bolinha de isopor com massa $m = 0,22\text{g}$ e diâmetro $D = 2,47\text{cm}$ em queda. Os dois conjuntos de dados experimentais correspondem a experimentos realizados em dias diferentes. Em (A), são apresentados os resultados para o experimento realizado durante um dia em que a temperatura aproximada era de $30^\circ\text{C}$ . Nesse caso, a velocidade terminal convergiu para $V_t \approx 4,0\text{m/s}$ enquanto em (B), são apresentados os resultados para o experimento realizado durante um dia em que a temperatura aproximada era de $25^\circ\text{C}$ . Nesse caso, a velocidade terminal convergiu para $V_t \approx 4,5\text{m/s}$ . A linha reta corresponde à queda livre. . . . .	31
Figura 4 – Representação do túnel de vento. A região de interesse é delimitada por um retângulo que se estende, horizontalmente, de $x = -3.0$ a $x = 7.0$ e, verticalmente, de $y = -2.5$ a $y = 2.5$ em unidades adimensionais usuais, onde se superpõe uma rede bidimensional de $400 \times 200$ pontos. O círculo representa o cilindro, dentro do qual as velocidades são mantidas nulas todo o tempo. Do lado de fora do retângulo (região externa à região de interesse), as velocidades são mantidas fixas e iguais à velocidade do vento, representada, por sua vez, pelas setas. Na região compreendida entre o interior do retângulo e o exterior do cilindro, as velocidades são definidas nos pontos cheios e as vorticidades nos pontos vazados. Embora a região de interesse corresponda a uma rede composta por $400 \times 200$ pontos, apenas alguns pontos estão representados (400 vezes menos, por clareza). As setas maiores representam a direção e o sentido do vento. . . . .	38
Figura 5 – Pontos aos quais se referem os subíndices na equação 2.5. . . . .	39

Figura 6 – Pontos aos quais se referem os subíndices nas equações 2.6 e 2.7. As letras $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k$ e $l$ referem-se a pontos na rede das vorticidades e os números 1, 2, 3 e 4 a pontos na rede das velocidades. O número 0 indica a posição onde as componentes da velocidade são calculadas. . . . .	39
Figura 7 – Pontos aos quais se referem os subíndices na equação 2.8. As letras $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k$ e $l$ referem-se a pontos na rede das velocidades. O número 0 indica a posição onde a vorticidade é calculada. . . . .	40
Figura 8 – Campo de vorticidades resultante para solução da equação de Stokes 2.4 para o escoamento sobre um cilindro. As setas maiores indicam o sentido do vento. . . . .	41
Figura 9 – Linhas de corrente resultantes da solução da equação de Stokes 2.4 para o escoamento sobre um cilindro. O vento flui da esquerda para direita. . . . .	41
Figura 10 – Campo de velocidades resultante para solução da equação de Stokes 2.4 para o escoamento sobre um cilindro. É fácil perceber dois tipos de simetria em relação aos eixos $X$ e $Y$ tomando o centro do cilindro como origem: $v_x(x, -y) = v_x(x, y)$ , $v_x(-x, y) = v_x(x, y)$ , $v_y(x, -y) = -v_y(x, y)$ e $v_y(-x, y) = -v_y(x, y)$ . O vento flui da esquerda para direita. Apenas uma parte do túnel é mostrada: 6.0 na direção $X$ e 3.0 na direção $Y$ em unidades adimensionais usuais. . . . .	41
Figura 11 – Pontos aos quais se referem os subíndices na equação 2.9. Como antes, as letras $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o$ e $p$ referem-se a pontos na rede das velocidades e os números 1, 2, 3 e 4 a pontos na rede das vorticidades. O número 0 indica a posição onde é calculada a vorticidade e sua taxa de variação temporal. . . . .	42
Figura 12 – Configurações sucessivas do campo de velocidades mostrando a formação de um vórtice atrás do cilindro (cinza). Apenas uma pequena região perto do cilindro é mostrada: 1.0 na direção $X$ e 0.65 na direção $Y$ em unidades adimensionais usuais. A configuração inicial (a) corresponde ao fluxo laminar de Stokes ( $Re \rightarrow 0$ ) determinada previamente. Então, em $t=0$ , o vento é ligado de repente e mantido fixo em $Re = 30$ . As figuras seguintes mostram o surgimento gradual de um vórtice girando em sentido horário acima do eixo $X$ . Um segundo vórtice simétrico ao primeiro, mas girando no sentido anti-horário, aparece simultaneamente abaixo do eixo $X$ . Posteriormente, ambos os vórtices se movem um pouco para trás do cilindro, crescem, estabilizam e permanecem estacionários atrás do cilindro. Apenas velocidades bem pequenas são mostradas para não sobrecarregar as figuras. . . . .	44



Figura 13 – Campo de velocidades atrás do cilindro. Partindo da configuração de Stokes, o vento é de repente ligado em $t = 0$ e o número de Reynolds é mantido fixo em $Re = 1000$ . Mostra-se aqui o fluxo bem perto do cilindro, mas apenas acima do eixo $X$ (4.0 na direção $X$ e 0.65 na direção $Y$ em unidades adimensionais usuais), quando o vento, em $t = 1$ , já viajou o correspondente a um diâmetro do cilindro. O outro vórtice, que está abaixo do eixo, não é mostrado. Apenas velocidades pequenas são mostradas para não sobrecarregar a figura. . . . .	45
Figura 14 – Campo de velocidades atrás do cilindro em um instante posterior ao retratado na figura 13, <i>i.e.</i> , em $t = 2$ . Os vórtices ainda são simétricos. Novamente, apenas uma parte do túnel é mostrada: 4.0 na direção $X$ e 0.65 na direção $Y$ em unidades adimensionais usuais. Apenas velocidades pequenas são mostradas para não sobrecarregar a figura. . . . .	45
Figura 15 – Campo de velocidades resultante da solução do problema de Stokes para o escoamento sobre duas chapas retangulares delgadas idênticas inseridas horizontalmente no túnel. O vento flui da esquerda para direita. A simetria em relação aos eixos, já observada no escoamento sobre um cilindro, é também bastante evidente neste caso. Apenas uma parte do túnel é mostrada: 4.0 na direção $X$ e 2.0 na direção $Y$ em unidades adimensionais usuais. . . . .	46
Figura 16 – Campo de vorticidades resultante da solução do problema de Stokes para o escoamento sobre duas chapas retangulares delgadas idênticas inseridas horizontalmente no túnel. As setas indicam o sentido do vento. Apenas uma parte do túnel é mostrada: 6.0 na direção $X$ e 5.0 na direção $Y$ em unidades adimensionais usuais. . . . .	47
Figura 17 – Campo de vorticidades resultante da solução do problema de Stokes para o escoamento sobre duas chapas retangulares delgadas idênticas inseridas horizontalmente no túnel de um ponto de vista diferente do observado na figura 16. O vento flui para fora do plano da folha. . . . .	47
Figura 18 – Campo de velocidades associado ao escoamento sobre uma chapa retangular delgada inserida verticalmente no túnel. Partindo da configuração de Stokes, o vento é de repente ligado em $t = 0$ e o número de Reynolds é mantido fixo em $Re = 50$ . No estágio inicial (a), os vórtices ainda estão ausentes. Depois de algum tempo, eles aparecem e o sistema entra no regime estacionário (b), com os vórtices estacionados atrás do obstáculo. Apenas velocidades pequenas são mostradas para não sobrecarregar a figura. O vento flui da esquerda para direita. Apenas uma parte do túnel é mostrada: 1.0 na direção $X$ e 1.0 na direção $Y$ em unidades adimensionais usuais. . . . .	48

- Figura 19 – Campo de velocidades em um instante durante o regime transiente quando o fluido escoar sobre um triângulo. Partindo da configuração de Stokes, o vento é de repente ligado em  $t = 0$  e o número de Reynolds é mantido fixo em  $Re=1000$ . Apenas velocidades pequenas são mostradas para não sobrecarregar a figura. O vento flui da esquerda para direita. Apenas uma parte do túnel é mostrada: 7.5 na direção  $X$  e 2.0 na direção  $Y$  em unidades adimensionais usuais. . . . . 49
- Figura 20 – Força de arrasto sobre um cilindro estático no túnel de vento. Inicialmente o túnel está desligado. Em seguida, em  $t = 0$ , o túnel é ligado e o número de Reynolds é mantido fixo em  $Re = 1000$ . Durante uma unidade de tempo, o vento viaja o equivalente a um diâmetro do cilindro. A força de arrasto adimensional é representada em termos do conhecido coeficiente de arrasto. Enquanto a componente da força na direção perpendicular ao fluxo do vento é desprezível, a componente da força que é paralela ao fluxo de vento cresce, atinge um valor máximo, decresce e finalmente estabiliza. Neste momento, o sistema entra no regime estacionário e aparecem continuamente vórtices sucessivos girando em sentidos alternados atrás do cilindro. A esteira de vórtices de von Kármán é então formada. O destaque mostra o mesmo numa escala longa no tempo. . . . . 53
- Figura 21 – Linhas de corrente para configuração de Stokes ( $Re \rightarrow 0$ ), quando o cilindro gira em sentido horário com (a)  $\omega = 0.1$  e (b)  $\omega = 0.5$ . A rotação do cilindro quebra a simetria axial. Com o aumento da velocidade angular, as linhas são deformadas. O vento viaja da esquerda para direita. . . . . 55
- Figura 22 – Partindo da configuração laminar de Stokes para o cilindro que gira no sentido horário com velocidade angular  $\omega = 0.5$ , o vento é ligado em  $t = 0$  e mantido fixo em  $Re = 1000$ . Depois de um tempo transiente, o campo de velocidades muda continuamente e periodicamente. A figura (a) mostra um vórtice girando em sentido anti-horário. Em seguida, ele se afasta para a direita. Algum tempo mais tarde, um outro vórtice aparece atrás do cilindro girando em sentido horário, como mostrado na figura (b). Posteriormente, na figura (c), o campo de velocidades regressa à configuração observada na figura (a). Todo o processo é repetido periodicamente. Apenas uma parte do túnel é mostrada: 1.5 na direção  $X$  e 2.0 na direção  $Y$  em unidades adimensionais usuais. . . . . 56

Figura 23 – Força de arrasto sobre um cilindro que gira no sentido horário com velocidade angular  $\omega = 0.1$ . Partindo da configuração laminar de Stokes, o vento é ligado em  $t = 0$  e mantido fixo em  $Re = 1000$ . Durante uma unidade de tempo, o vento viaja o equivalente a um diâmetro do cilindro. O coeficiente de arrasto (a) apresenta o mesmo comportamento observado para o cilindro fixo. Durante o regime transiente, o coeficiente de sustentação (b) também cresce, alcança um máximo e decresce. Entretanto, esta componente não estabiliza simplesmente. Ao invés disso, fica oscilando perceptivelmente em torno de um valor médio não nulo. A oscilação deve-se ao aparecimento de vórtices girando em sentidos alternados, uma assinatura da esteira de von Kármán. Para números de Reynolds pequenos, da ordem de algumas dezenas, ambas as componentes não oscilam, o que é esperado na ausência dos vórtices sucessivos. . . . . 57

Figura 24 – Coeficientes de sustentação em função do tempo para cilindros girando com diferentes velocidades angulares pequenas: (a)  $\omega = 0.1$ ; (b)  $\omega = 0.2$ ; (c)  $\omega = 0.3$ ; (d)  $\omega = 0.4$ ; e (e)  $\omega = 0.5$ . Partindo da configuração laminar de Stokes, o vento é ligado em  $t = 0$  e mantido fixo em  $Re = 1000$ . Durante uma unidade de tempo, o vento viaja o equivalente a um diâmetro do cilindro. Depois de um estágio transiente, todos os coeficientes de sustentação oscilam perceptivelmente em torno de valores médios não nulos. . . . . 58

Figura 25 – Coeficientes de sustentação em função do tempo para cilindros girando com velocidades angulares grandes: (a)  $\omega = 1.0$ ; (b)  $\omega = 2.0$ ; e (c)  $\omega = 2.4$ . Partindo da configuração laminar de Stokes, o vento é ligado em  $t = 0$  e mantido fixo em  $Re = 1000$ . Durante uma unidade de tempo, o vento viaja o equivalente a um diâmetro do cilindro. Quando  $\omega \approx 2.0$ , as oscilações de alta frequência são substituídas por oscilações de frequência bem mais baixa devido a ausência da esteira de von Kármán. . . . . 59

Figura 26 – Asa introduzida no túnel. . . . . 60

Figura 27 – Coeficientes em função do tempo para o escoamento sobre a asa com ângulo de ataque acionado em  $0^\circ$ . Partindo da configuração laminar de Stokes, o vento é ligado em  $t = 0$  e mantido fixo em  $Re = 1000$ . Durante uma unidade de tempo, o vento viaja o equivalente a 1.0 em unidades usuais. Em (a), apresenta-se o coeficiente de arrasto  $e$ , em (b), o coeficiente de sustentação. O coeficiente de arrasto cresce, atinge um valor máximo, reduz-se um pouco e estabiliza, passando a oscilar levemente (imperceptível na figura) em torno de um valor fixo positivo, enquanto o coeficiente de sustentação é constante e muito próximo de zero, o que é esperado para um obstáculo axialmente simétrico. . . . . 60

Figura 28 – Coeficientes em função do tempo para o escoamento sobre a asa com ângulo de ataque acionado em  $15^\circ$ . Partindo da configuração laminar de Stokes, o vento é ligado em  $t = 0$  e mantido fixo em  $Re = 1000$ . Durante uma unidade de tempo, o vento viaja o equivalente a 1.0 em unidades usuais. Em (a), apresenta-se o coeficiente de arrasto  $e$ , em (b), o coeficiente de sustentação. Assim como antes, o coeficiente de arrasto cresce, atinge um valor máximo, reduz-se um pouco e estabiliza, passando a oscilar em torno de um valor fixo positivo enquanto o coeficiente de sustentação, após o transiente (neste caso, bem diferente do caso para ângulo de ataque  $0^\circ$ , pois a simetria axial foi quebrada), passa a flutuar em torno de um valor fixo positivo, embora pequeno se comparado com o valor em que o coeficiente de arrasto estabiliza. . . . . 61

Figura 29 – Asa com flap. . . . . 62

Figura 30 – Coeficientes em função do tempo para os escoamento sobre asas com e sem flap com o ângulo de ataque acionado em  $15^\circ$ . Partindo da configuração laminar de Stokes, o vento é ligado em  $t = 0$  e mantido fixo em  $Re = 1000$ . Durante uma unidade de tempo, o vento viaja o equivalente a 1.0 em unidades usuais. Em (a) e (b), observam-se, respectivamente, os coeficientes de arrasto e de sustentação para asa **sem** flap (repetido da figura 28) enquanto em (c) e (d), observam-se, respectivamente, os coeficientes de arrasto e de sustentação para asa **com** flap. Como esperado, para um mesmo ângulo de ataque, as curvas para a asa com flap se estabilizam em valores mais altos do que as curvas para a asa sem flap, embora o comportamento qualitativo das curvas seja aproximadamente o mesmo com ou sem flap. . . . . 62

Figura 31 – Vórtices surgindo atrás de duas chapas retangulares idênticas quando, partindo da configuração de Stokes, o vento é ligado e mantido fixo em $Re = 1000$ . Apenas velocidades pequenas são mostradas para não sobrecarregar a figura. Apenas uma parte do túnel é mostrada: 7.5 na direção $X$ e 3.0 na direção $Y$ em unidades adimensionais usuais. . . . .	63
Figura 32 – Coeficientes de arrasto em função do tempo para o escoamento sobre duas placas paralelas idênticas. Partindo da configuração laminar de Stokes, o vento é ligado em $t = 0$ e mantido fixo em $Re = 1000$ . Durante uma unidade de tempo, o vento viaja o equivalente a 1.0 em unidades usuais. A evolução temporal dos coeficientes de arrasto é a mesma para ambas as chapas. . . . .	64
Figura 33 – Coeficientes de sustentação em função do tempo para o escoamento sobre duas placas paralelas idênticas. Partindo da configuração laminar de Stokes, o vento é ligado em $t = 0$ e mantido fixo em $Re = 1000$ . Durante uma unidade de tempo, o vento viaja o equivalente a 1.0 em unidades usuais. Em (a), observa-se o coeficiente de sustentação associado à placa superior e, em (b), à inferior. As placas experimentam forças de mesmo módulo e direção, porém, em sentidos contrários. Por esta razão, tendem a se afastar. . . . .	64
Figura 34 – Pontos vizinhos em uma rede discreta. Os pontos distam $\Delta$ um do outro. 0 demarca a posição em torno da qual as funções são expandidas em série de Taylor. . . . .	75
Figura 35 – Pontos vizinhos em uma rede discreta. As letras $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k$ e $l$ rotulam pontos na rede das velocidades. 1, 2, 3, 4 demarcam posições onde são calculadas velocidades. 0 demarca a posição onde calcula-se a vorticidade. . . . .	77
Figura 36 – Pontos vizinhos em duas redes discretas. As letras $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k$ e $l$ rotulam pontos na rede das vorticidades. Os números 1, 2, 3, 4 rotulam pontos na rede das velocidades. 5, 6, 7 e 8 demarcam posições onde são calculadas vorticidades. 0 demarca a posição onde calcula-se a velocidade. . . . .	78
Figura 37 – Pontos vizinhos em duas redes discretas. As letras $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k$ e $l$ rotulam pontos na rede das velocidades. Os números 1, 2, 3 e 4 rotulam pontos na rede das vorticidades. 5, 6, 7, 8 demarcam posições onde são calculadas velocidades. 0 demarca a posição onde deseja-se calcular tanto a velocidade como a vorticidade. . . . .	81



# Lista de símbolos

Re          Número de Reynolds





# Sumário

	<b>Introdução</b> . . . . .	<b>25</b>
<b>1</b>	<b>PODE UMA BOLINHA EM QUEDA FREAR?</b> . . . . .	<b>29</b>
1.1	Pode uma bolinha em queda frear? . . . . .	29
1.2	Interpretação do resultado . . . . .	32
<b>2</b>	<b>TÚNEIS DE VENTO NUMÉRICOS</b> . . . . .	<b>35</b>
2.1	O método e seus resultados . . . . .	37
2.2	A versão generalizada do túnel . . . . .	46
<b>3</b>	<b>UM MÉTODO ALTERNATIVO PARA DETERMINAR A FORÇA DE ARRASTO</b> . . . . .	<b>51</b>
3.1	Cilindro girante . . . . .	55
3.2	Asa . . . . .	60
3.3	Chapas paralelas . . . . .	63
<b>4</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> . . . . .	<b>65</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> . . . . .	<b>67</b>
	<b>APÊNDICES</b> . . . . .	<b>71</b>
	<b>APÊNDICE A – O MÉTODO DAS RELAXAÇÕES SUCESSIVAS</b> . . . . .	<b>73</b>
	<b>APÊNDICE B – DEDUÇÃO DAS PRINCIPAIS EQUAÇÕES</b> . . . . .	<b>75</b>
B.0.1	Dedução da equação 2.8 . . . . .	76
B.0.2	Dedução das equações 2.6 e 2.7 . . . . .	78
B.0.3	Dedução da equação 2.9 . . . . .	81



# Introdução

Pode uma bolinha em queda frear? Um experimento recente (1) mostra que, surpreendentemente, a resposta é sim. Os autores sugerem que isso se deve à formação gradativa de uma esteira de vórtices no ar atrás da bolinha. Esses vórtices, que surgem em virtude da viscosidade do fluido, são arrastados pela bolinha em queda e, por isso, são responsáveis pela força de arrasto que se opõe ao movimento. No início do processo de formação da esteira, a força de arrasto é proporcional à velocidade. Tão logo a esteira tenha sido completada, a força se torna proporcional ao quadrado da velocidade. Na transição entre um regime e outro, o arrasto torna-se maior que o peso e a frenagem é observada na bolinha.

Embora interessantes e profícuos (por exemplo, veja as referências (2,3)), problemas que envolvem dinâmica de fluidos viscosos não são, em geral, discutidos em cursos de física básica e geral. Quando isso ocorre, o assunto é tratado de maneira superficial (4,5). Por quê? Para responder a esta pergunta, é necessário primeiro definir o que são fluidos viscosos e discutir como são descritos.

Em mecânica dos fluidos, costuma-se definir por fluido qualquer substância que evidentemente não seja um sólido. Quando submetido a uma tensão de cisalhamento (tipo de tensão gerada por forças que atuam em sentidos opostos), um fluido tende a se deformar. A viscosidade, uma propriedade do fluido que determina quão facilmente o fluido se deforma, é uma função do fluido em questão e da temperatura e corresponde ao atrito interno resultante das interações entre as moléculas (5,6).

Fluidos viscosos são descritos por meio de uma equação derivada independentemente por G. G. Stokes (1816 - 1903) (7) e L. M. H. Navier (1785-1836) (8), a equação de Navier-Stokes, que na forma adimensional é escrita (9) <sup>1</sup>:

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{\Omega} - \vec{\nabla} \times (\vec{\Omega} \times \vec{v}), \quad (1)$$

em que  $\vec{v}$  é o campo de velocidades,  $\vec{\Omega} = \nabla \times \vec{v}$  é a vorticidade e  $Re$  é o número de Reynolds, uma grandeza adimensional resultante da divisão de forças de inércia por forças de viscosidade em um elemento de fluido. Explicitamente,

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu}, \quad (2)$$

em que  $V$  é a velocidade do vento (longe do obstáculo, para o caso de um objeto inserido em um túnel de vento),  $D$  é uma dimensão característica do objeto,  $\mu$  é a viscosidade e  $\rho$

<sup>1</sup> Pode-se encontrar facilmente na literatura deduções fenomenológicas da equação de Navier-Stokes, embora não haja uma dedução a partir de primeiros princípios aplicados à estrutura atômica microscópica do fluido. Veja, por exemplo, (5,9).

é a massa específica do fluido. O número ou coeficiente de Reynolds foi introduzido por G. G. Stokes em 1851. Contudo, foi O. Reynolds (1842 - 1912) que popularizou o seu uso em 1883 e demonstrou, pela primeira vez, que o número poderia ser utilizado como um critério para distinção entre escoamento laminar, no qual as trajetórias das partículas do fluido tendem a ser paralelas, e turbulento, no qual as trajetórias das partículas são curvas, irregulares e entrecruzadas (6,9–11).

A equação de Navier-Stokes admite soluções analíticas para alguns poucos casos (9). Na verdade, a prova matemática da existência de uma solução global para a equação de Navier-Stokes ainda não existe e é um dos *Millennium Prize Problems* (5). Com isso, resta-nos recorrer às simulações numéricas. Embora simulações numéricas para solução da equação de Navier-Stokes sejam numerosas na literatura (veja alguns exemplos nas referências (12–15)), não é comum encontrar simulações voltadas para o ensino.

O objetivo da pesquisa cujos resultados são relatados nesta tese foi desenvolver simulações que pudessem ser aplicadas ao ensino. Com este propósito, desenvolveu-se um túnel de vento simulado no qual se pode escolher o formato do objeto a ser inserido no túnel assim como a velocidade do vento (16) e um método para determinação da força de arrasto sobre objetos de formato arbitrário alternativo aos existentes (17). Espera-se que estas duas contribuições sejam capazes de subsidiar o professor e permitir que uma discussão mais profunda de escoamentos viscosos seja realizada.

Este texto está organizado da seguinte maneira. Inicialmente, no capítulo 1, apresenta-se em detalhes o inspirador experimento que motivou o desenvolvimento da pesquisa cujos resultados são relatados nesta tese (1).

No capítulo 2, apresenta-se o túnel de vento numérico, *i.e.*, um método de solução para a equação de Navier-Stokes originalmente desenvolvido para confirmar o cenário descrito no início desta introdução e generalizado por nós (16) para permitir a simulação do escoamento sobre objetos de formato arbitrário.

No capítulo 3, apresenta-se um método alternativo, recentemente introduzido por nós (17), para determinar a força de arrasto também sobre objetos de formato arbitrário.

Inicialmente, o método é aplicado à solução do clássico problema de um cilindro infinito estático, perpendicular ao vento, inserido em um túnel de vento inicialmente desligado e, repentinamente ligado com número de Reynolds  $Re = 1000$ . Depois de um tempo transiente, a força no estado estacionário se estabiliza em um valor a ser comparado com o experimentalmente conhecido valor do coeficiente de arrasto  $C_D \approx 1.0$  (18–23). O acordo com esse valor experimental é excelente. Antes disso, porém, quando o vento é ligado, a força de arrasto cresce, alcança um máximo, decresce um pouco e, finalmente se estabiliza. Este comportamento é o mesmo que o observado em diversos experimentos relatados na literatura (24–30), em particular, no experimento descrito no início desta

introdução, no qual uma bolinha em queda surpreendentemente freia (1).

Em seguida, as potencialidades do túnel e do método são exibidas por meio da discussão de três outros exemplos.

Finalmente, no capítulo 4, alguns comentários, conclusões e perspectivas que podem ser úteis ao leitor e eventual utilizador do túnel são apresentados.

Nos apêndices, apresentam-se o método das relaxações sucessivas, usado na solução da equação de Navier-Stokes, e a dedução das principais equações utilizadas.



# 1 Pode uma bolinha em queda frear?

Este capítulo é dedicado à descrição do resultado experimental que motivou a realização da pesquisa cujos resultados são relatados nesta tese. O experimento aqui descrito foi originalmente publicado na referência (1). Inicialmente, apresentam-se o experimento propriamente dito e seus resultados. Em seguida, discute-se uma possível interpretação para esses resultados. O experimento, embora simples, traz à tona a complexidade e a beleza dos fenômenos que envolvem a dinâmica de fluidos viscosos.

## 1.1 Pode uma bolinha em queda frear?

Considere o movimento de uma bolinha de isopor com diâmetro  $D \approx 2,47\text{cm}$  e massa  $m \approx 0,22\text{g}$ , lançada de diferentes alturas. A figura 1 apresenta o tempo de queda da bolinha para diferentes alturas. Esses dados foram obtidos na realização de um experimento caseiro (1).

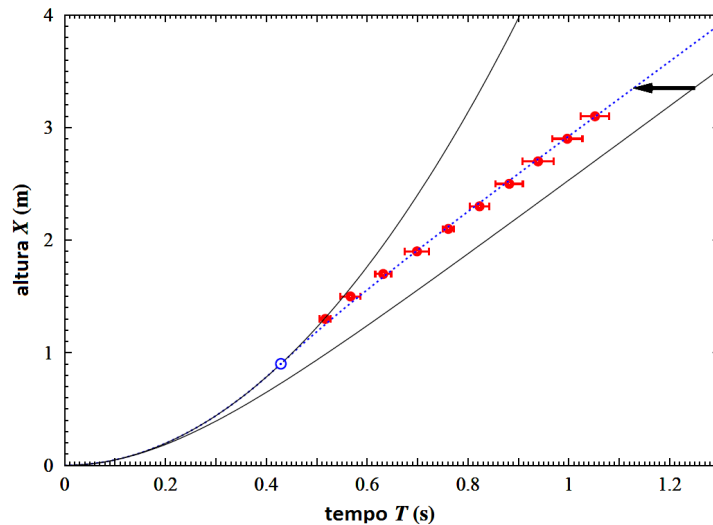


Figura 1 – Tempo de queda para diferentes alturas. As barras de erro verticais são desprezíveis. A barra de erro horizontal exibida para cada ponto experimental (vermelho) é calculada a partir das estatísticas de 10 medições para cada altura. Usando  $g = 9,8\text{m/s}^2$ , a curva superior é a parábola de queda livre,  $X = gT^2/2$ . As outras duas curvas correspondem a um movimento onde há força de arrasto proporcional ao quadrado da velocidade. Na curva inferior, a força atua durante todo o movimento. Na intermediária (azul), a mesma força de atrito começa a atuar somente após um certo instante (ponto azul vazado), sendo sem atrito o movimento anterior a este instante.

A partir do gráfico representado na figura 1, é fácil perceber que o modelo da queda livre,  $X = gT^2/2$  obviamente não é consonante com os dados experimentais, talvez com

exceção dos dois primeiros pontos, correspondentes às medições realizadas para as duas menores alturas. Para estes dois pontos, a influência do ar em torno da bolinha parece ser desprezível.

Com o intuito de confirmar o resultado, uma versão mais sofisticada do experimento foi realizada (1). Na nova versão, uma câmera digital capaz de produzir 1200 tomadas por segundo foi utilizada para medição direta das velocidades. Entre um total de 4096 tomadas para cada queda, apenas três eram relevantes: a que corresponde ao lançamento da bolinha,  $S_0$ , e duas outras mais,  $S_1$  e  $S_2$ , tomadas quando a bolinha já estava prestes a atingir o chão. A câmera foi fixada no chão e orientada horizontalmente para filmar o fim da trajetória, como se pode ver na figura 2.

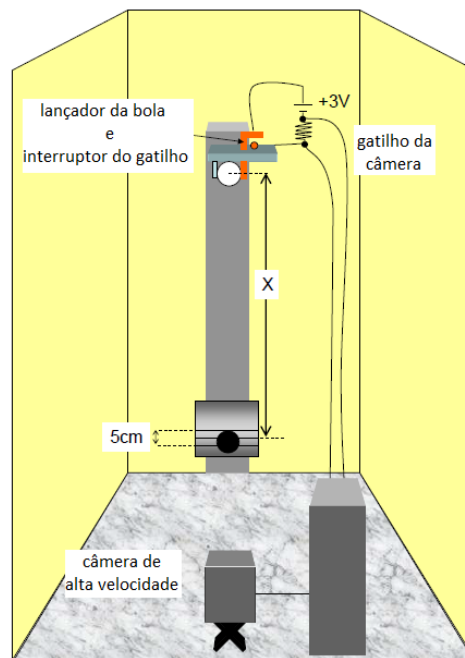


Figura 2 – Diagrama esquemático da versão mais sofisticada do experimento.

A tomada  $S_0$  foi usada para determinar o tempo de início do movimento. O sistema foi acionado por um gancho mecânico que liberava simultaneamente a bola e enviava um sinal elétrico para a câmera. A altura  $X$  entre a linha central e o ponto onde a bola foi lançada também foi determinada previamente. Três linhas horizontais foram previamente desenhadas em uma placa de vidro iluminada por trás, na frente da qual a bolinha passou durante a queda. Na sequência das imagens gravadas, nada se viu nas tomadas iniciais, enquanto a bolinha ainda estava acima do campo visual da câmera. Finalmente, a bolinha apareceu dentro do campo visual da câmera e foi possível observar sua queda. Embora tenha sido possível registrar cerca de 50 tomadas em que a bolinha apareceu, apenas



duas tomadas específicas,  $S1$  e  $S2$ , foram importantes para a análise do resultado. Essas tomadas foram escolhidas de dois modos diferentes.

Primeiramente, fez-se  $S1$  corresponder à tomada em que a bolinha atingiu a linha central horizontal e  $S2$  à tomada em que a bolinha saiu da mesma linha. Nesse caso, a distância que foi dividida pelo intervalo de tempo entre as tomadas  $S1$  e  $S2$  foi o próprio diâmetro da bolinha. O resultado, mostrado na figura 3, curva A, foi obtido da média entre 5 repetições para cada altura. Em seguida, fez-se  $S1$  corresponder à tomada em que a bolinha atingiu a linha superior e  $S2$  à tomada em que a bolinha atingiu a linha inferior. Nesse caso, a distância que foi dividida pelo intervalo de tempo foi a distância entre as linhas, 5cm. Para alturas acima de 1,35m, quando, os efeitos da turbulência começavam a ser relevantes, foram realizadas 10 repetições em vez de apenas 5. Além disso, ainda para esse caso, a distância entre duas alturas consecutivas foi reduzida para 10cm em vez de 20cm. O resultado obtido por meio deste segundo modo de escolher  $S1$  e  $S2$  é também mostrado na figura 3, curva B.

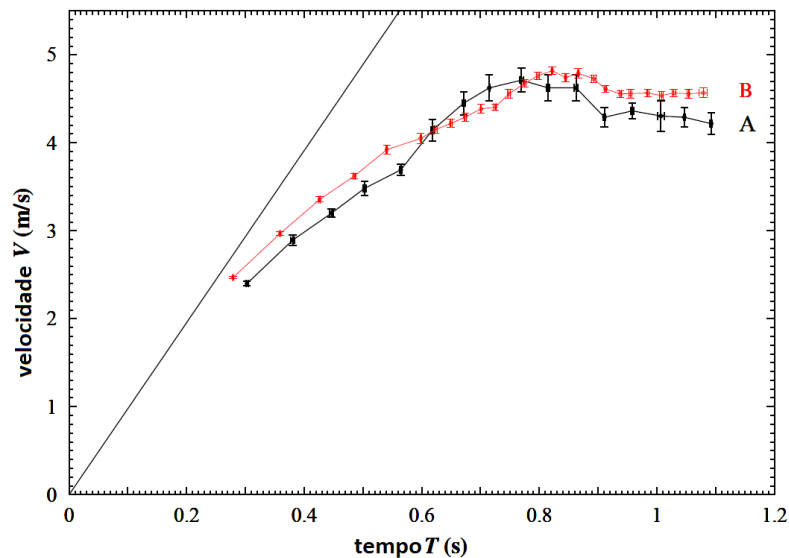


Figura 3 – Medição direta das velocidades para uma bolinha de isopor com massa  $m = 0,22\text{g}$  e diâmetro  $D = 2,47\text{cm}$  em queda. Os dois conjuntos de dados experimentais correspondem a experimentos realizados em dias diferentes. Em (A), são apresentados os resultados para o experimento realizado durante um dia em que a temperatura aproximada era de  $30^\circ\text{C}$ . Nesse caso, a velocidade terminal convergiu para  $V_t \approx 4,0\text{m/s}$  enquanto em (B), são apresentados os resultados para o experimento realizado durante um dia em que a temperatura aproximada era de  $25^\circ\text{C}$ . Nesse caso, a velocidade terminal convergiu para  $V_t \approx 4,5\text{m/s}$ . A linha reta corresponde à queda livre.

Os resultados experimentais obtidos nas duas versões mostram-se consoantes e, evidentemente, indicam para uma única interpretação, a saber, de que a velocidade da bolinha **diminui** antes da velocidade terminal ser alcançada. Mas como isso é possível?

Na seção seguinte, apresenta-se e discute-se a justificativa originalmente oferecida pelos autores (1).

## 1.2 Interpretação do resultado

Além do modelo da queda livre, o modelo mais simples que poderia ser aplicado ao fenômeno é o correspondente à tradicional força de Stokes,  $F = 3\pi D\mu V$ , para uma bolinha movendo-se com velocidade constante  $V$  em um fluido de viscosidade  $\mu$ , onde  $D$  é o diâmetro da bolinha. Essa fórmula é válida apenas enquanto o fluxo de ar em torno da bolinha é laminar, sem vórtices turbulentos, o que não corresponde à situação experimental descrita na seção anterior. Mesmo assim, é possível estimar a ordem de magnitude da força de Stokes correspondente à máxima velocidade observada,  $V \approx 4\text{m/s}$ . Usando a viscosidade do ar  $\mu \approx 2 \times 10^{-5}\text{kg/m.s}$ , obtêm-se  $F \approx 10^{-5}\text{N}$ . Entretanto, para o caso considerado, essa força é desprezível pois é duas ordens de grandeza menor que o peso,  $mg \approx 2 \times 10^{-3}\text{N}$ . Assim, pode-se concluir que a força de Stokes, que é proporcional a  $V$ , não é relevante para a situação experimental em questão.

Na verdade, no problema em consideração, a velocidade  $V \approx 4\text{m/s}$  corresponde a um número de Reynolds  $Re \approx 6 \times 10^3$ . Medições experimentais indicam que, para  $10^3 < Re < 10^5$ , a força de arrasto é proporcional ao quadrado da velocidade e, conseqüentemente, muito maior que a predição laminar do modelo de Stokes. Tais medições são, em geral, realizadas em túneis de vento, onde obstáculos são fixados e a velocidade do vento, que é controlável, é constante. Contudo, este tipo de medição difere da realizada no experimento descrito anteriormente. À medida que a bolinha cai (e a velocidade aumenta), formam-se atrás dela vórtices sucessivos que se estendem por uma distância correspondente a cerca de uma centena de diâmetros da bolinha e tendem a formar um tipo de esteira, conhecida como *esteira de von Kármán*. Enquanto medições em túneis de vento costumam ser realizadas quando a esteira de von Kármán já está formada, no experimento descrito na seção anterior, medições foram realizadas enquanto a esteira estava se **formando** (o que corresponde ao estágio inicial do movimento, quando a força de arrasto é desprezível) e quando a esteira já estava **formada** (o que corresponde ao estágio do movimento em que a força de arrasto já é proporcional ao quadrado da velocidade e não pode ser desprezada).

Portanto, de alguma forma, o obstáculo arrasta a esteira de vórtices atrás de si ao mover-se, o que aumenta consideravelmente a força contrária ao movimento da bolinha em comparação com o caso laminar de Stokes. Para o caso da bolinha, os vórtices não aparecem continuamente logo de início pois a bolinha é solta a partir do repouso. Portanto, existe um intervalo de tempo, que denominamos *transiente*, durante o qual a esteira está ausente e, conseqüentemente, a força de arrasto, proporcional ao quadrado da velocidade, também. Tão logo a esteira esteja formada, tem-se outro regime, que pode-se denominar

*estacionário* (embora não seja estacionário no pleno sentido da palavra pois o sistema muda no tempo, mas de maneira cíclica (9)), e a força de atrito ganha a forma

$$F = \frac{mg}{V_\ell^2} V^2, \quad (1.1)$$

onde  $V_\ell$  é a velocidade limite. Desse modo, pela 2ª Lei de Newton, tem-se que

$$\frac{dV}{dT} = g[1 - (V/V_\ell)^2]. \quad (1.2)$$

A curva inferior na figura 1 corresponde à atuação do termo de atrito,  $g(V/V_\ell)^2$ , durante todo o movimento. Este modelo, obviamente, superestima o efeito da força de atrito por fazê-la atuar desde o início do movimento. Em consequência disso, observa-se na figura 1 uma discrepância entre os resultados experimentais e a curva inferior. Os autores sugerem então que, no início da queda, a equação 1.2 deva ser substituída por outra. O opção mais simples corresponde a deixar a bolinha cair livremente e fazer o termo de atrito atuar apenas a partir de um instante escolhido convenientemente, nesse caso, o instante demarcado com bola azul vazada na figura 1.

Negligenciar completamente a força de arrasto no início do movimento, embora pareça algo extremo, é razoável, como se pode verificar, quando se avalia a razão entre a força de arrasto no regime estacionário, obtida por meio do coeficiente de arrasto experimental (proporcional ao número de Reynolds), e o peso da bolinha durante os regimes transiente e estacionário. Até aproximadamente  $Re = 300$ , a razão entre o arrasto e o peso é da ordem de  $10^{-2}$ . Para  $Re = 1000$ , esta razão é da ordem de  $10^{-1}$ . Finalmente, para  $Re = 3000$ , o atrito começa a se aproximar do peso  $mg$ . Assim, é plausível supor que quando a bolinha alcança uma velocidade correspondente a aproximadamente  $Re = 3000$ , a esteira já está formada. Essa interpretação é reforçada por resultados obtidos em um experimento recente com bolinhas caindo na água (31). Embora nenhuma velocidade acima da velocidade limite tenha sido observada para as bolas de vidro ou metálicas utilizadas no experimento, uma oscilação de velocidade foi observada durante o regime transiente e também nesse caso, os autores sugerem que estas oscilações estão relacionadas à evolução temporal da esteira de vórtices.

Em suma, a experiência acima relatada exhibe um efeito surpreendente: uma bolinha em queda pode frear! Há um intervalo de tempo transiente durante o qual a esteira de vórtices ainda está ausente. Durante esse regime transiente, a força de atrito que atua sobre a bolinha é substancialmente menor do que o seu valor durante o regime estacionário, quando esta é proporcional a  $V^2$ . Por conseguinte, também durante esse regime transiente, a bolinha pode adquirir uma velocidade maior do que seu valor final  $V_\ell$ . Porém, é possível confirmar a interpretação do fenômeno sugerida pelos resultados experimentais? O próximo capítulo é devotado à discussão dessa questão.



## 2 Túneis de vento numéricos

Como confirmar o cenário descrito no capítulo anterior? Em princípio, o problema poderia ser resolvido por meio de uma abordagem fenomenológica que fornecesse a força de arrasto em função da velocidade e do tempo; com isso, bastaria resolver a 2ª lei de Newton adicionando esta força ao peso da bola. Porém, nenhuma abordagem fenomenológica macroscópica seria útil para que se obtenha uma compreensão da dinâmica do fluxo de ar atrás da bolinha e de sua relação com a força de arrasto. Portanto, a fim de estudar o fenômeno, é preciso adotar uma abordagem que nos permita descrever o campo de velocidades do ar em torno da bola numa escala sub-milimétrica. Em outras palavras, é necessário resolver a equação de Navier-Stokes 2.1.

Neste capítulo, apresenta-se um método numérico de solução para equação de Navier-Stokes originalmente desenvolvido para confirmar o cenário descrito no capítulo anterior (32) e generalizado por nós com o intuito de descrever escoamentos viscosos sobre corpos de formato arbitrário (16). Enquanto a solução original aplicava-se exclusivamente ao escoamento sobre um cilindro infinito estático, perpendicular ao vento (equivalente bidimensional da bolinha), na versão generalizada, resguardadas certas condições que serão descritas oportunamente, é possível descrever o escoamento sobre objetos de qualquer formato. Conseqüentemente, a solução generalizada mostrou-se um instrumento didático poderoso, capaz de subsidiar uma discussão mais profunda do que a usual da dinâmica de fluidos viscosos em cursos de física básica e geral (16).

Porém, antes de apresentar uma descrição detalhada do método, algumas considerações se fazem necessárias. Estas são válidas para ambas as versões, pois os pressupostos adotados nas versões original e generalizada são os mesmos.

Resolver a equação de Navier-Stokes para o caso da bolinha que cai não é uma tarefa trivial. O número de Reynolds é, neste caso, dependente do tempo e precisaria ser calculado em tempo real a partir de  $Re = 0$ , correspondente à velocidade inicial da bolinha. Além disso, para conhecer como o número de Reynolds varia no tempo, seria necessário calcular a força de arrasto para cada instante e adicioná-la ao peso da bola, para, em seguida, resolver a 2ª lei de Newton e determinar a variação instantânea da velocidade. Finalmente, a partir desta variação, uma integração a partir de  $t = 0$  forneceria  $Re(t)$ .

Por esta razão, uma simplificação básica foi proposta para a simulação original (32) e adotada também na versão generalizada. Considera-se o número de Reynolds

$$Re(t) \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq 0 \\ Re, & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

onde  $Re$  é uma constante. Isto corresponde a um túnel de vento inicialmente desligado e

ligado no instante  $t=0$  com uma dada velocidade fixa do vento.

Ademais, o movimento da bolinha é descrito em termos de campos de velocidades e vorticidades tridimensionais, o que naturalmente implicaria em um enorme esforço computacional.

Por isso, a bolinha foi substituída por um cilindro infinito, introduzido perpendicularmente à direção do fluxo do vento que, por sua vez, supõe-se estar restrito a um único plano, neste caso, o plano  $X$ - $Y$ . Esta hipótese se respalda no fato de as curvas conhecidas para a força de arrasto no estado estacionário sobre uma esfera e sobre um cilindro serem essencialmente as mesmas. Similarmente, a versão generalizada atem-se apenas a obstáculos cilíndricos (isto é, uma base bidimensional de formato qualquer estendida ao longo da terceira dimensão) infinitos (isto é, a terceira dimensão é muito maior do que as duas primeiras) e movimentos bidimensionais do fluido (perpendiculares à terceira dimensão).

O método consiste em associar diferenças finitas e relaxações sucessivas<sup>1</sup>, para resolver numericamente a equação de Navier-Stokes adimensional na região delimitada por um retângulo que se estende, horizontalmente, de  $x = -3.0$  a  $x = 7.0$  e, verticalmente, de  $y = -2.5$  a  $y = 2.5$  em unidades adimensionais do diâmetro do cilindro, obstáculo originalmente inserido no túnel (32). Daqui para diante, estas unidades serão denominadas *unidades adimensionais usuais*. Denomina-se *região de interesse* a região delimitada por este retângulo. Superpõe-se ao retângulo uma rede bidimensional de  $400 \times 200$  pontos. Uma rede deste tamanho foi suficiente para os propósitos desta pesquisa. Contudo, tanto seu tamanho quanto sua resolução podem ser facilmente ampliados no caso de necessidade de maior precisão. Na verdade, duas redes idênticas, mas transladadas, uma para as velocidades e outra para as vorticidades, são utilizadas. Os pontos em ambas as redes estão espaçados de uma distância  $\Delta$ . O valor final de todas as equações que compõem a simulação apresenta precisão, no mínimo, até o termo de segunda ordem em  $\Delta$ . Isso é extremamente importante para a eficiência do método, pois a ocorrência de correlações de longo alcance é esperada dentro da escala macroscópica. Para que dois pontos das redes que distam  $L$  um do outro sejam conectados, é preciso realizar  $N$  passos de tamanho  $\Delta$  na rede. A cada passo, acumulam-se erros numéricos de modo que a imprecisão local é multiplicada por  $N = L/\Delta$ . Assim, com a imprecisão local proporcional a  $\Delta^2$ , o erro total permanece controlável, *i.e.*, proporcional a  $\Delta$ . Deste modo, pode-se obter qualquer precisão desejada simplesmente escolhendo  $\Delta$  suficientemente pequeno. Adotou-se  $\Delta = 0.0025$  em ambas implementações.

As configurações iniciais dos campos de velocidades e vorticidades são as resultantes da solução da equação de Navier-Stokes no limite em que  $Re \rightarrow 0$ . Neste limite, a equação de Navier-Stokes reduz-se a equação de Laplace. Utilizar esta configuração inicial é necessário

<sup>1</sup> Detalhes sobre a utilização de relaxações sucessivas na solução de equações diferenciais estão no apêndice A.

pois, do contrário, um comportamento transiente espúrio pode ser obtido. Veja, por exemplo, (33). Então, inicialmente, os vórtices estão ausentes e se formam gradualmente à medida que o tempo passa, dependendo do número de Reynolds escolhido quando o vento é ligado.

Realizados estes comentários necessários, na seção seguinte, descreve-se detalhadamente o procedimento de construção do túnel de vento numérico.

## 2.1 O método e seus resultados

Reconsidere a já mencionada equação de Navier-Stokes adimensional 1, agora renumerada <sup>2</sup>:

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{\Omega} - \vec{\nabla} \times (\vec{\Omega} \times \vec{v}), \quad (2.1)$$

em que  $\vec{v}$ , como já explicado, é o campo de velocidades do fluido. No caso em consideração, bidimensional,  $\vec{v}(x, y, t) = v_x(x, y, t) \hat{x} + v_y(x, y, t) \hat{y}$ . A também já mencionada vorticidade,

$$\vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}, \quad (2.2)$$

é um vetor auxiliar. Neste caso (bidimensional), a vorticidade é sempre paralela ao obstáculo e, naturalmente, representa um campo escalar  $\Omega(x, y, t)$ . No túnel, todas as velocidades são muito menores que a velocidade do som ( $\approx 330\text{m/s}$ ) e, por esta razão, flutuações na densidade do ar não aparecem. Assim, vale também a equação de continuidade,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0. \quad (2.3)$$

O conjunto formado pelas equações 2.1, 2.2 e 2.3 define completamente o problema. Além disso, as condições de contorno são: (a) na superfície do obstáculo e dentro dele, são mantidas nulas as velocidades e vorticidades e (b) fora da região de interesse, as velocidades são constantes e uniformes: o vento tem apenas uma componente não nula, ao longo da direção  $X$ , de modo que nesta região,  $\vec{v} = V \hat{x}$  (por conveniência, fez-se  $V = 1$  em unidades adimensionais) e as vorticidades são nulas.

Em princípio, se conhecidas as configurações iniciais dos campos de velocidades e vorticidades, pode-se resolver o conjunto formado por 2.1, 2.2 e 2.3 e obter a velocidade e a vorticidade em qualquer posição  $(x, y)$  em qualquer instante  $t > 0$ .

<sup>2</sup> Adimensional porque todas as grandezas já foram supostas expressas em termos de algum padrão fixo, por exemplo a unidade de velocidades é a velocidade do vento, e a de distâncias o diâmetro do cilindro (9).

Como já mencionado, a configuração inicial é sem vento, *i.e.*, com o túnel desligado. Esta configuração é obtida a partir da solução da equação de Navier-Stokes no limite em que  $Re \rightarrow 0$ , o que se mostrou crucial diante dos resultados obtidos nos diversos testes realizados. Neste limite, a equação de Navier-Stokes reduz-se à equação de Laplace (neste contexto, é chamada equação de Stokes). Com isso em mente, resolve-se a equação de Stokes,

$$\nabla^2 \Omega = 0, \quad (2.4)$$

na região de interesse, mostrada na figura 4. No limite de Stokes, como é sabido (9), espera-se que o fluxo seja laminar, estacionário e independente do tempo.

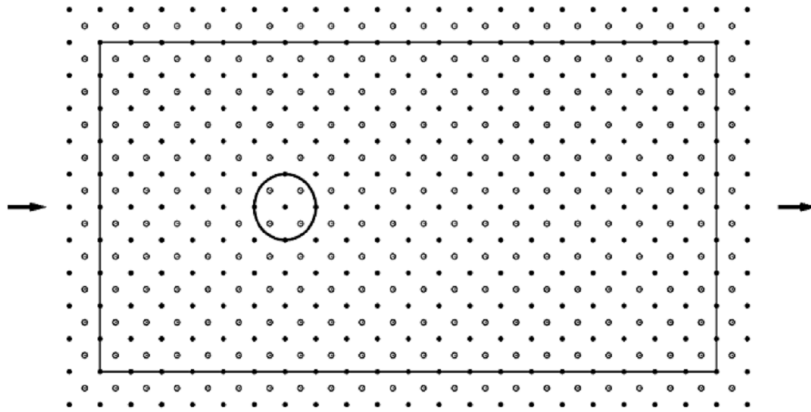


Figura 4 – Representação do túnel de vento. A região de interesse é delimitada por um retângulo que se estende, horizontalmente, de  $x = -3.0$  a  $x = 7.0$  e, verticalmente, de  $y = -2.5$  a  $y = 2.5$  em unidades adimensionais usuais, onde se superpõe uma rede bidimensional de  $400 \times 200$  pontos. O círculo representa o cilindro, dentro do qual as velocidades são mantidas nulas todo o tempo. Do lado de fora do retângulo (região externa à região de interesse), as velocidades são mantidas fixas e iguais à velocidade do vento, representada, por sua vez, pelas setas. Na região compreendida entre o interior do retângulo e o exterior do cilindro, as velocidades são definidas nos pontos cheios e as vorticidades nos pontos vazados. Embora a região de interesse corresponda a uma rede composta por  $400 \times 200$  pontos, apenas alguns pontos estão representados (400 vezes menos, por clareza). As setas maiores representam a direção e o sentido do vento.

A equação 2.4 pode ser resolvida numericamente pelo tradicional método das relaxações sucessivas sobre as vorticidades (explicado em mais detalhes no apêndice A), que consiste, neste caso, na substituição da vorticidade em um ponto da rede pela média aritmética das vorticidades dos seus quatro vizinhos imediatos, ou seja, faz-se

$$\Omega_0 = \frac{1}{4}(\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4) \quad (2.5)$$



em todos os pontos da rede até que haja convergência. Os pontos aos quais se referem os subíndices na equação 2.5 podem ser vistos na figura 5.

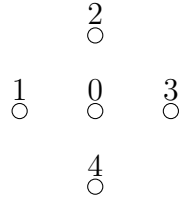


Figura 5 – Pontos aos quais se referem os subíndices na equação 2.5.

Contudo, embora as relaxações ocorram sobre as vorticidades, o problema envolve também velocidades. Por isso, é necessário, a partir do conhecimento das vorticidades, obter as velocidades correspondentes e vice-versa. A velocidade em qualquer posição pode ser obtida a partir do conhecimento das velocidades e vorticidades nos pontos na vizinhança fazendo

$$v_{y0} = \frac{v_{y1} + v_{y2} + v_{y3} + v_{y4}}{4} - \frac{\Delta}{64}(9(-\Omega_a + \Omega_b - \Omega_e + \Omega_f) + \Omega_i - \Omega_j + \Omega_k - \Omega_l) \quad (2.6)$$

e

$$v_{x0} = \frac{v_{x1} + v_{x2} + v_{x3} + v_{x4}}{4} - \frac{\Delta}{64}(9(-\Omega_a - \Omega_b + \Omega_e + \Omega_f) + \Omega_c + \Omega_d - \Omega_g - \Omega_h). \quad (2.7)$$

Os subíndices  $x$  e  $y$  referem-se a direções. Os pontos aos quais se referem os demais subíndices nas equações 2.6 e 2.7 podem ser vistos na figura 6 <sup>3</sup>.

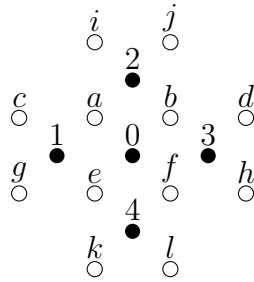


Figura 6 – Pontos aos quais se referem os subíndices nas equações 2.6 e 2.7. As letras  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$ ,  $f$ ,  $g$ ,  $h$ ,  $i$ ,  $j$ ,  $k$  e  $l$  referem-se a pontos na rede das vorticidades e os números 1, 2, 3 e 4 a pontos na rede das velocidades. O número 0 indica a posição onde as componentes da velocidade são calculadas.

<sup>3</sup> As equações 2.6 e 2.7 são deduzidas no apêndice B.

Igualmente, a vorticidade em qualquer posição pode ser obtida a partir do conhecimento das velocidades nos pontos na vizinhança fazendo

$$\Omega_0 = \frac{1}{16\Delta} [9(-v_{xa} - v_{xb} + v_{xe} + v_{xf} - v_{ya} + v_{yb} - v_{ye} + v_{yf}) + v_{xc} + v_{xd} - v_{xg} - v_{xh} + v_{yi} + v_{yk} - v_{yj} - v_{yl}]. \quad (2.8)$$

Como antes, os subíndices  $x$  e  $y$  referem-se a direções. Os pontos aos quais se referem os demais subíndices na equação 2.8 podem ser vistos na figura 7 <sup>4</sup>.

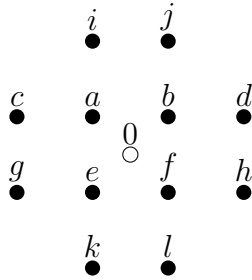


Figura 7 – Pontos aos quais se referem os subíndices na equação 2.8. As letras  $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k$  e  $l$  referem-se a pontos na rede das velocidades. O número 0 indica a posição onde a vorticidade é calculada.

Assim, o protocolo de solução é o seguinte: os campos de velocidades e vorticidades são iniciados na região de interesse em uma configuração arbitrária <sup>5</sup>. Usando a equação 2.8, as vorticidades são atualizadas em todos os pontos da rede. Em seguida, as vorticidades são relaxadas usando a equação 2.5. Este procedimento é repetido até que ocorra a convergência. Finalmente, as velocidades são atualizadas a partir das vorticidades relaxadas usando as equações 2.6 e 2.7. Todo este processo é repetido até a convergência final. Nas figuras 8, 9 e 10 são representados, respectivamente, o campo de vorticidades, as linhas de corrente e o campo de velocidades resultantes da aplicação deste protocolo para a solução do problema de Stokes para o escoamento sobre um cilindro.

<sup>4</sup> A equação 2.8 é deduzida no apêndice B.

<sup>5</sup> Esta configuração não é solução da equação de Stokes 2.4. Na verdade, o método consiste na gradativa correção desta configuração, que é substituída sucessivamente por configurações cada vez mais próximas da solução da equação de Stokes.

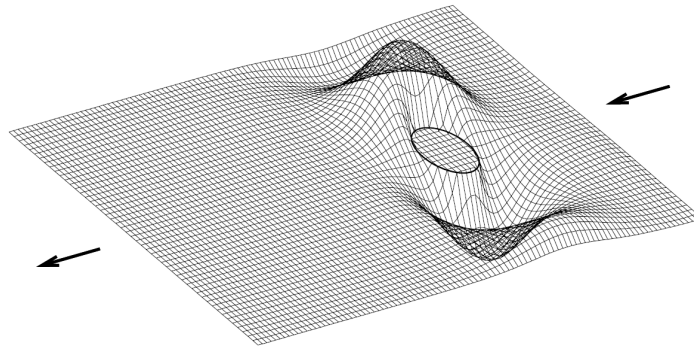


Figura 8 – Campo de vorticidades resultante para solução da equação de Stokes 2.4 para o escoamento sobre um cilindro. As setas maiores indicam o sentido do vento.

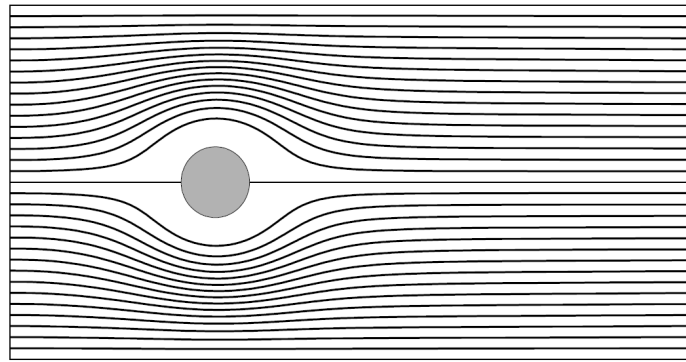


Figura 9 – Linhas de corrente resultantes da solução da equação de Stokes 2.4 para o escoamento sobre um cilindro. O vento flui da esquerda para direita.

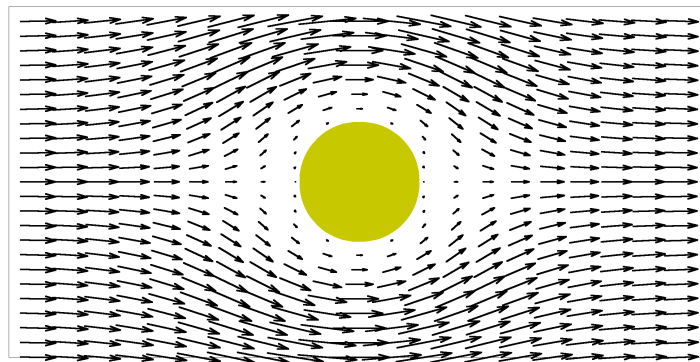


Figura 10 – Campo de velocidades resultante para solução da equação de Stokes 2.4 para o escoamento sobre um cilindro. É fácil perceber dois tipos de simetria em relação aos eixos  $X$  e  $Y$  tomando o centro do cilindro como origem:  $v_x(x, -y) = v_x(x, y)$ ,  $v_x(-x, y) = v_x(x, y)$ ,  $v_y(x, -y) = -v_y(x, y)$  e  $v_y(-x, y) = -v_y(x, y)$ . O vento flui da esquerda para direita. Apenas uma parte do túnel é mostrada: 6.0 na direção  $X$  e 3.0 na direção  $Y$  em unidades adimensionais usuais.

As velocidades e vorticidades resultantes da solução da equação de Stokes 2.4 são usadas como configuração inicial para o problema com o vento ligado. A versão discretizada da equação de Navier-Stokes 2.1 é:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega_0}{\partial t} = & \frac{1}{Re\Delta^2}(\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4 - 4\Omega_0) - \frac{\Omega_3 - \Omega_1}{512\Delta} [81(v_{xa} + v_{xb} + v_{xe} + v_{xf}) \\ & - 9(v_{xc} + v_{xd} + v_{xg} + v_{xh} + v_{xi} + v_{xj} + v_{xk} + v_{xl}) + (v_{xm} + v_{xn} + v_{xo} + v_{xp})] \\ & - \frac{\Omega_2 - \Omega_4}{512\Delta} [81(v_{ya} + v_{yb} + v_{ye} + v_{yf}) \\ & - 9(v_{yc} + v_{yd} + v_{yg} + v_{yh} + v_{yi} + v_{yj} + v_{yk} + v_{yl}) + (v_{ym} + v_{yn} + v_{yo} + v_{yp})], \end{aligned} \quad (2.9)$$

Mais uma vez, os subíndices  $x$  e  $y$  referem-se a direções. Os pontos aos quais se referem os demais subíndices na equação 2.9 são mostrados na figura 11 <sup>6</sup>.

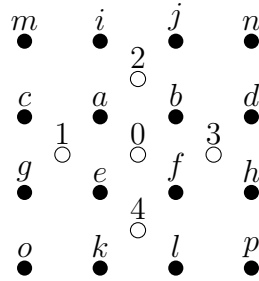


Figura 11 – Pontos aos quais se referem os subíndices na equação 2.9. Como antes, as letras  $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o$  e  $p$  referem-se a pontos na rede das velocidades e os números 1, 2, 3 e 4 a pontos na rede das vorticidades. O número 0 indica a posição onde é calculada a vorticidade e sua taxa de variação temporal.

Partindo das velocidades e vorticidades provenientes da solução de 2.4 e usando a equação 2.9, as vorticidades em toda rede são evoluídas no tempo fazendo

$$\Omega(t + \Delta t) = \Omega(t - \Delta t) + 2\Delta t \frac{\partial \Omega}{\partial t}, \quad (2.10)$$

em que  $\Delta t$  é o intervalo de tempo discretizado. Em ambas implementações, em unidades adimensionais, fez-se  $\Delta t = \Delta/10$ . Em seguida, as velocidades correspondentes às vorticidades evoluídas são determinadas usando novamente as equações 2.6 e 2.7. Então, a vorticidade em cada ponto da rede é relaxada por meio da equação

$$\Omega_0 = \frac{\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4}{4} - Re\Delta^2 \left\{ \frac{\partial \Omega_0}{\partial t} + v_{x0} \frac{(\Omega_3 - \Omega_1)}{2\Delta} + v_{y0} \frac{(\Omega_2 - \Omega_4)}{2\Delta} \right\}, \quad (2.11)$$

em que  $v_{x0}$  e  $v_{y0}$  são as médias sobre as velocidades nos pontos  $a, b, e$  e  $f$  na figura 11 e o termo  $\partial \Omega_0 / \partial t$  é obtido diretamente da equação 2.9. Os pontos aos quais se referem os subíndices 0, 1, 2, 3 e 4 na equação 2.11 são também mostrados na figura 11

<sup>6</sup> A equação 2.9 é deduzida no apêndice B.

<sup>7</sup>. O procedimento é repetido, até que seja alcançada a convergência. Posteriormente, as velocidades correspondentes às vorticidades relaxadas são determinadas usando mais uma vez as equações 2.6 e 2.7 e, finalmente, as vorticidades são atualizadas a partir desta última configuração das velocidades usando a equação 2.8 e assim sucessivamente.

Contudo, com o objetivo de evitar grandes flutuações numéricas, depois de cada passo no tempo, uma pequena fração da conhecida viscosidade numérica é introduzida nas vorticidades. Este procedimento consiste simplesmente em acrescentar sistematicamente ao campo de vorticidades uma pequena fração de seu próprio Laplaciano. Neste caso, as vorticidades  $\Omega$  são substituídas pela expressão  $f\nabla^2\Omega + (1-f)\Omega$ , onde  $f$  é a fração escolhida (34). Para o problema de Stokes, com  $Re = 0$  e Laplaciano nulo, isto não muda nada, e pode ser feito à vontade. Para  $Re > 0$ , a viscosidade numérica promove a suavização numérica, mas pode introduzir desvios quantitativos no resultado. Em princípio, a fração do Laplaciano somada deve ser pequena o suficiente para que tais desvios permaneçam controlados. Para  $Re = 1000$ , adotou-se  $f = 0.01$  em ambas as implementações <sup>8</sup>.

Com a aplicação do inteiro procedimento de solução, é possível acompanhar a evolução temporal dos campos de velocidades e vorticidades e assim, descrever o fluxo no túnel. As considerações a seguir, acerca da evolução temporal do sistema, são relativas ao escoamento sobre um cilindro. Isto não representa, entretanto, perda de generalidade pois observou-se aproximadamente a mesma a dinâmica para todos os obstáculos que foram inseridos no túnel ao longo da pesquisa <sup>9</sup>.

Para  $Re \approx 1$ , o fluxo permanece laminar, embora a simetria em relação ao eixo  $Y$ , anteriormente observada na solução do problema de Stokes (veja a figura 10), não esteja mais presente, pois a região perturbada atrás do cilindro torna-se um pouco mais longa que a região à frente dele.

Para  $Re \approx 10$ , dois vórtices simétricos aparecem atrás do cilindro, um acima do eixo  $X$ , girando no sentido horário, e outro abaixo do eixo  $X$ , girando no sentido anti-horário. Ambos se formam simultaneamente, bem perto do cilindro. Em seguida, crescem e se movem um pouco à jusante. Finalmente, eles estabilizam e permanecem estacionários atrás do cilindro. Neste caso, a simetria em relação ao eixo  $X$  continua preservada. Na figura 12 pode-se observar o gradativo processo de aparecimento de um destes vórtices atrás do cilindro, quando, partindo da configuração de Stokes, repentinamente o vento é ligado e

<sup>7</sup> Na aplicação do método das relaxações sucessivas ao caso da equação de Navier-Stokes, outros termos aparecem e estes também precisam ser expressos em função dos valores das velocidades e vorticidades nos pontos em seu entorno, tantos pontos quantos forem necessários para que todas as diferenças finitas que substituem as derivadas tenham, no mínimo, precisão até o termo de segunda ordem tanto no passo discreto espacial quanto no passo de tempo.

<sup>8</sup> Após este procedimento, novamente é preciso atualizar as velocidades usando as equações 2.6 e 2.7 e, em seguida, as vorticidades, usando a equação 2.8.

<sup>9</sup> Nos diversos testes realizados durante a pesquisa, foi possível perceber que o formato do obstáculo afeta o fluxo especialmente durante o regime transiente.

mantido fixo em  $Re = 30$ .

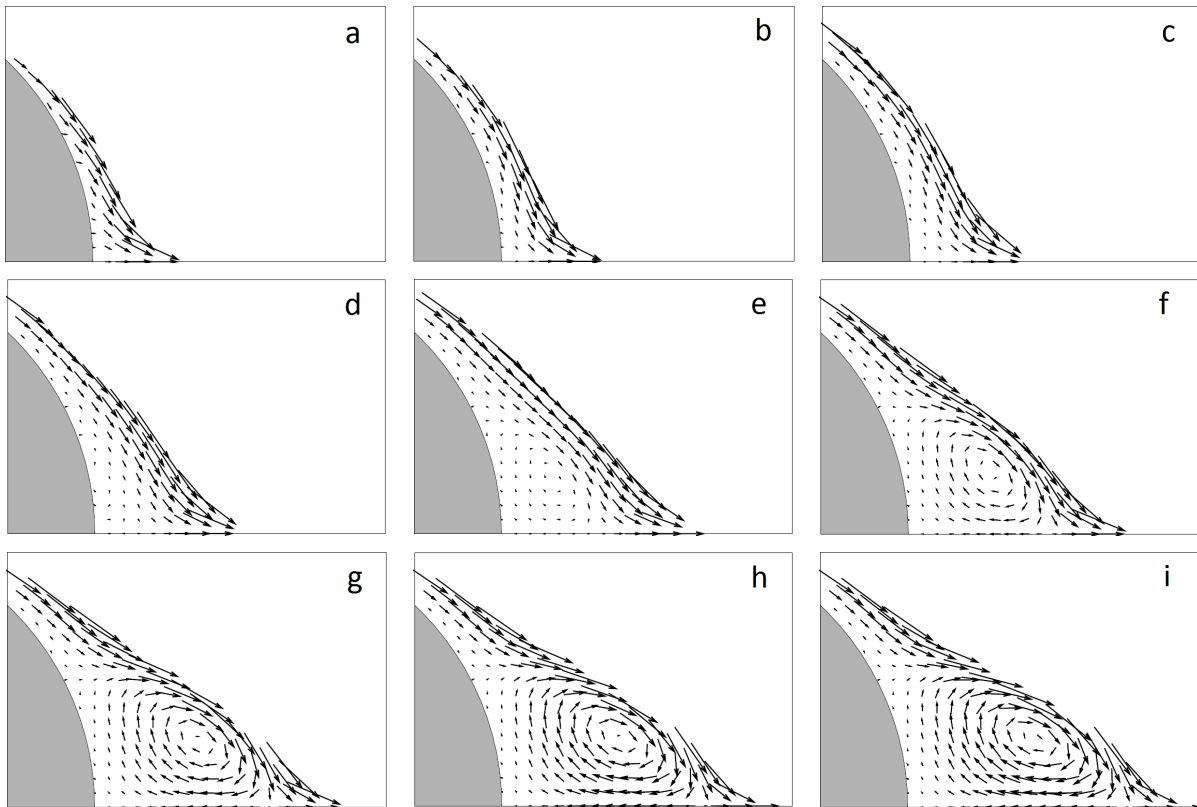


Figura 12 – Configurações sucessivas do campo de velocidades mostrando a formação de um vórtice atrás do cilindro (cinza). Apenas uma pequena região perto do cilindro é mostrada: 1.0 na direção  $X$  e 0.65 na direção  $Y$  em unidades adimensionais usuais. A configuração inicial (a) corresponde ao fluxo laminar de Stokes ( $Re \rightarrow 0$ ) determinada previamente. Então, em  $t=0$ , o vento é ligado de repente e mantido fixo em  $Re = 30$ . As figuras seguintes mostram o surgimento gradual de um vórtice girando em sentido horário acima do eixo  $X$ . Um segundo vórtice simétrico ao primeiro, mas girando no sentido anti-horário, aparece simultaneamente abaixo do eixo  $X$ . Posteriormente, ambos os vórtices se movem um pouco para trás do cilindro, crescem, estabilizam e permanecem estacionários atrás do cilindro. Apenas velocidades bem pequenas são mostradas para não sobrecarregar as figuras.

À medida que o número de Reynolds torna-se maior, o fluxo torna-se perpetuamente dependente do tempo, ou seja, não há mais regime estacionário. A esteira de vórtices de von Kármán começa a se formar. Para  $Re = 1000$ , dois vórtices simétricos aparecem atrás do cilindro. Um destes vórtices é mostrado na figura 13. Posteriormente, estes vórtices movem-se afastando-se do cilindro e começam a se esticar ao longo da direção  $X$ , como mostrado na figura 14.

Este processo de afastamento e esticamento continua até que, repentinamente, muito esticado e distante do cilindro (uma distância correspondente a cerca de três ou quatro diâmetros do cilindro), um vórtice se bifurca e forma um par de vórtices movendo-se

no mesmo sentido e repelindo-se mutuamente ao longo da direção  $X$ . A simetria em relação ao eixo  $X$  é finalmente quebrada. Algum tempo depois, o mesmo acontece com o outro vórtice. Só então a esteira de von Kármán começa a se formar: um vórtice girando lentamente no sentido horário, afastando-se do cilindro, é seguido por outro vórtice, este último girando no sentido anti-horário, e assim sucessivamente.

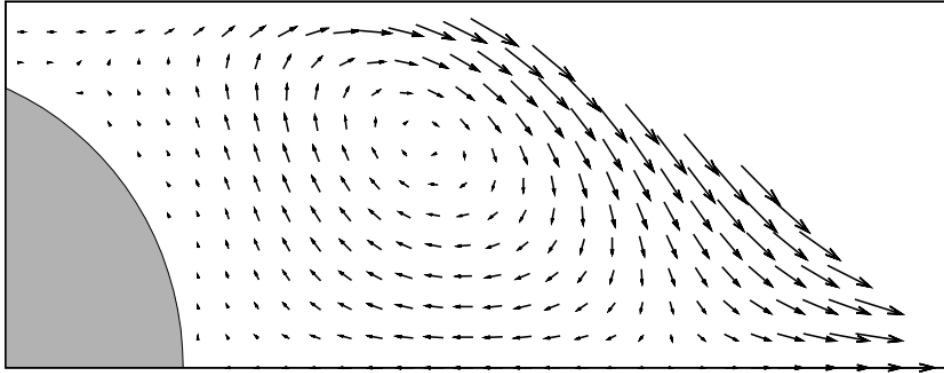


Figura 13 – Campo de velocidades atrás do cilindro. Partindo da configuração de Stokes, o vento é de repente ligado em  $t = 0$  e o número de Reynolds é mantido fixo em  $Re = 1000$ . Mostra-se aqui o fluxo bem perto do cilindro, mas apenas acima do eixo  $X$  (4.0 na direção  $X$  e 0.65 na direção  $Y$  em unidades adimensionais usuais), quando o vento, em  $t = 1$ , já viajou o correspondente a um diâmetro do cilindro. O outro vórtice, que está abaixo do eixo, não é mostrado. Apenas velocidades pequenas são mostradas para não sobrecarregar a figura.

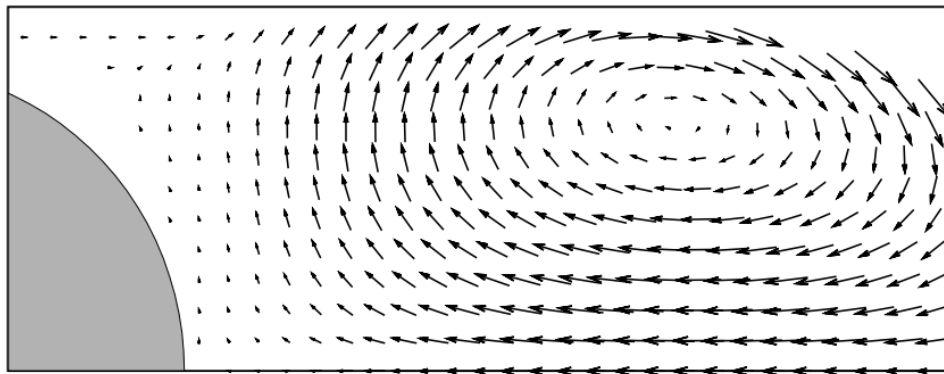


Figura 14 – Campo de velocidades atrás do cilindro em um instante posterior ao retratado na figura 13, *i.e.*, em  $t = 2$ . Os vórtices ainda são simétricos. Novamente, apenas uma parte do túnel é mostrada: 4.0 na direção  $X$  e 0.65 na direção  $Y$  em unidades adimensionais usuais. Apenas velocidades pequenas são mostradas para não sobrecarregar a figura.

Assim, a versão original do túnel de vento numérico mostrou-se capaz de simular o escoamento de um fluido viscoso sobre um cilindro para  $Re \leq 1000$ . Todavia, na versão generalizada do túnel, pode-se estudar o escoamento sobre objetos de formato arbitrário. Na próxima seção, explica-se como isso é possível e apresentam-se alguns exemplos.

## 2.2 A versão generalizada do túnel

Em princípio, na versão generalizada do túnel é possível simular o escoamento sobre objetos de qualquer formato resguardada a condição de que sua área não seja maior do que a de um retângulo de dimensões  $2.0 \times 1.0$  em unidades usuais. Ademais, o objeto precisa estar localizado no centro do túnel. Atendidas estas condições, obteve-se sucesso em simular para números de Reynolds  $\leq 1000$ , sendo possível simular com números de Reynolds próximos de 1000 sem que alterações significativas no tamanho da rede, nas condições de contorno e na viscosidade numérica fossem necessárias. Seguem abaixo alguns exemplos.

Na figura 15, é mostrado o fluxo laminar resultante da solução do problema de Stokes para o escoamento sobre duas chapas retangulares delgadas idênticas. Nas figuras 16 e 17, pode-se observar o campo de vorticidades resultante da solução do problema de Stokes para o escoamento sobre o mesmo obstáculo.

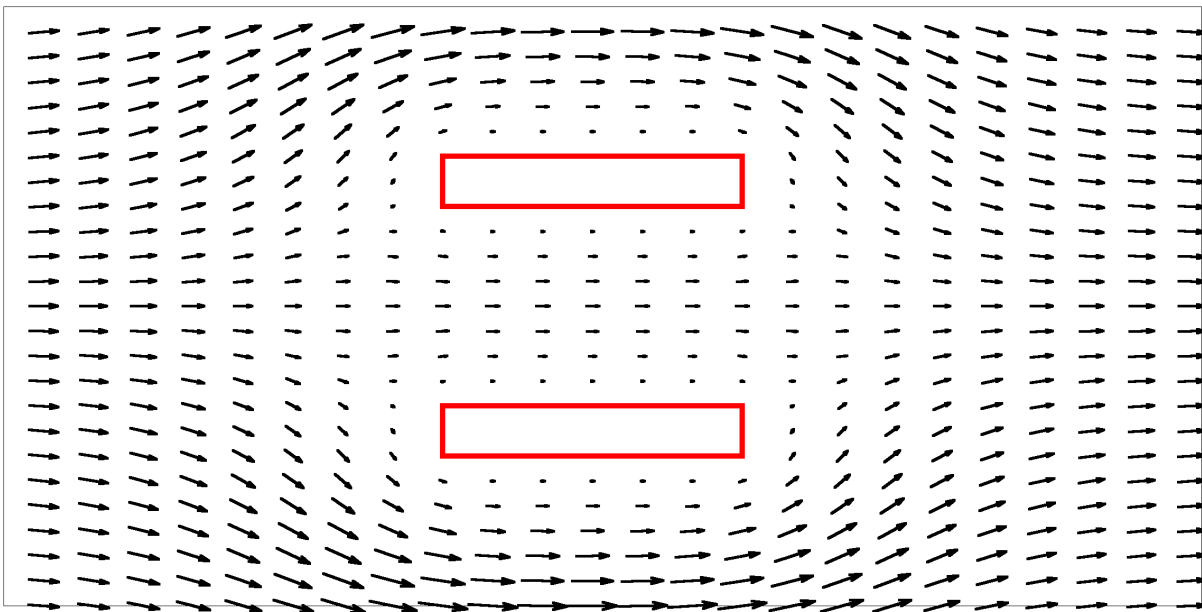


Figura 15 – Campo de velocidades resultante da solução do problema de Stokes para o escoamento sobre duas chapas retangulares delgadas idênticas inseridas horizontalmente no túnel. O vento flui da esquerda para direita. A simetria em relação aos eixos, já observada no escoamento sobre um cilindro, é também bastante evidente neste caso. Apenas uma parte do túnel é mostrada: 4.0 na direção  $X$  e 2.0 na direção  $Y$  em unidades adimensionais usuais.



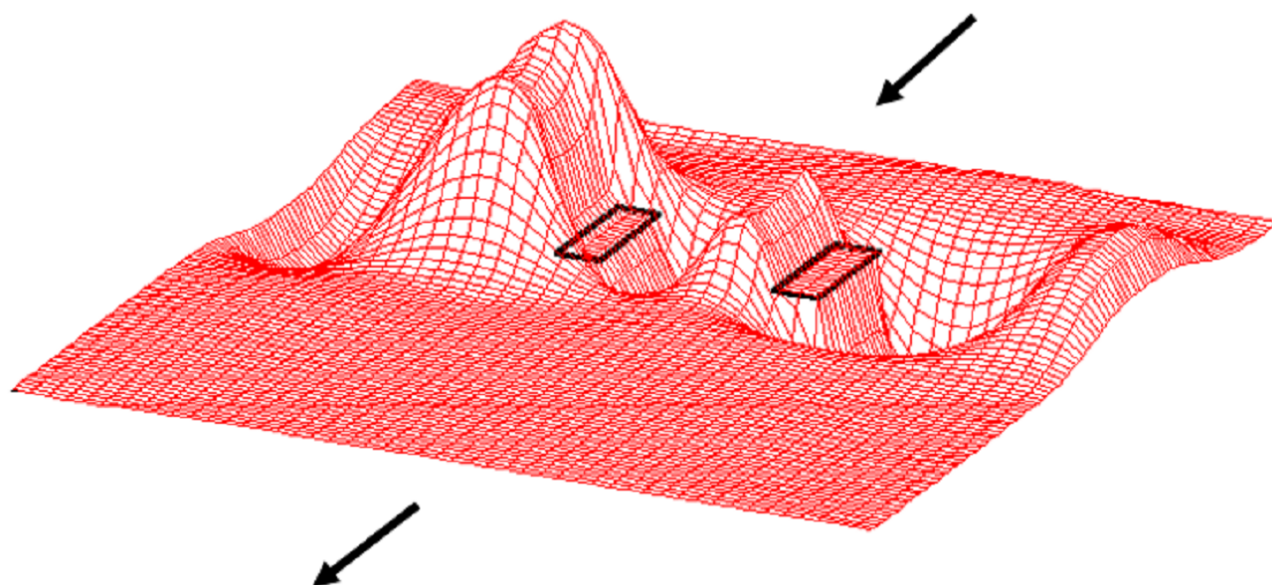


Figura 16 – Campo de vorticidades resultante da solução do problema de Stokes para o escoamento sobre duas chapas retangulares delgadas idênticas inseridas horizontalmente no túnel. As setas indicam o sentido do vento. Apenas uma parte do túnel é mostrada: 6.0 na direção  $X$  e 5.0 na direção  $Y$  em unidades adimensionais usuais.

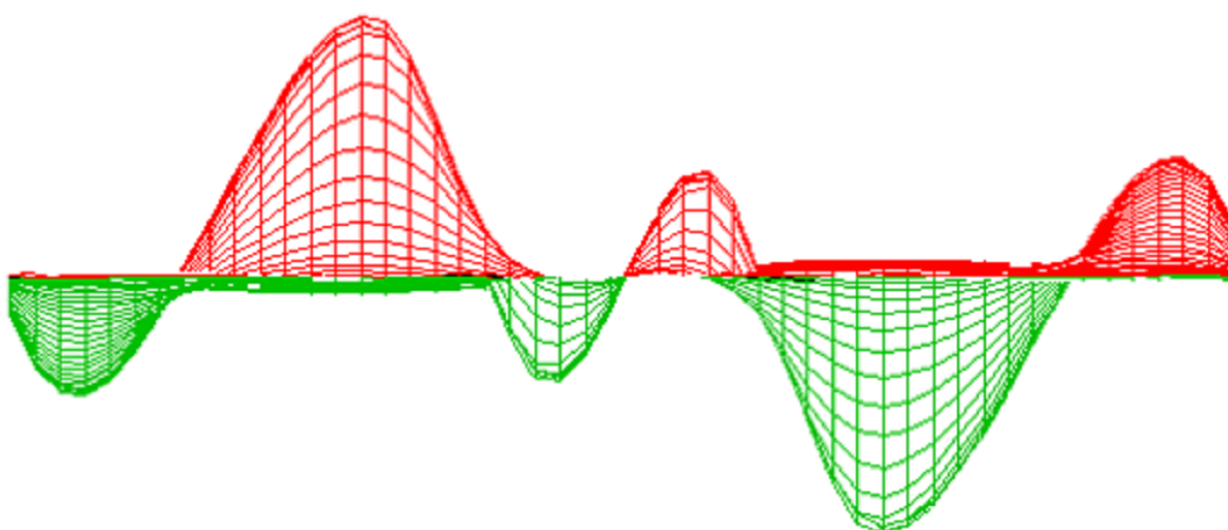


Figura 17 – Campo de vorticidades resultante da solução do problema de Stokes para o escoamento sobre duas chapas retangulares delgadas idênticas inseridas horizontalmente no túnel de um ponto de vista diferente do observado na figura 16. O vento flui para fora do plano da folha.

Na figura 18(a), mostra-se o campo de velocidades durante o estágio transiente quando o fluido escoava sobre uma chapa retangular delgada inserida verticalmente no túnel. Na figura 18(b), mostra-se o mesmo, porém, durante o regime estacionário. Partindo da configuração de Stokes, de repente, em  $t = 0$ , o vento é ligado e mantido fixo em  $Re = 50$ .

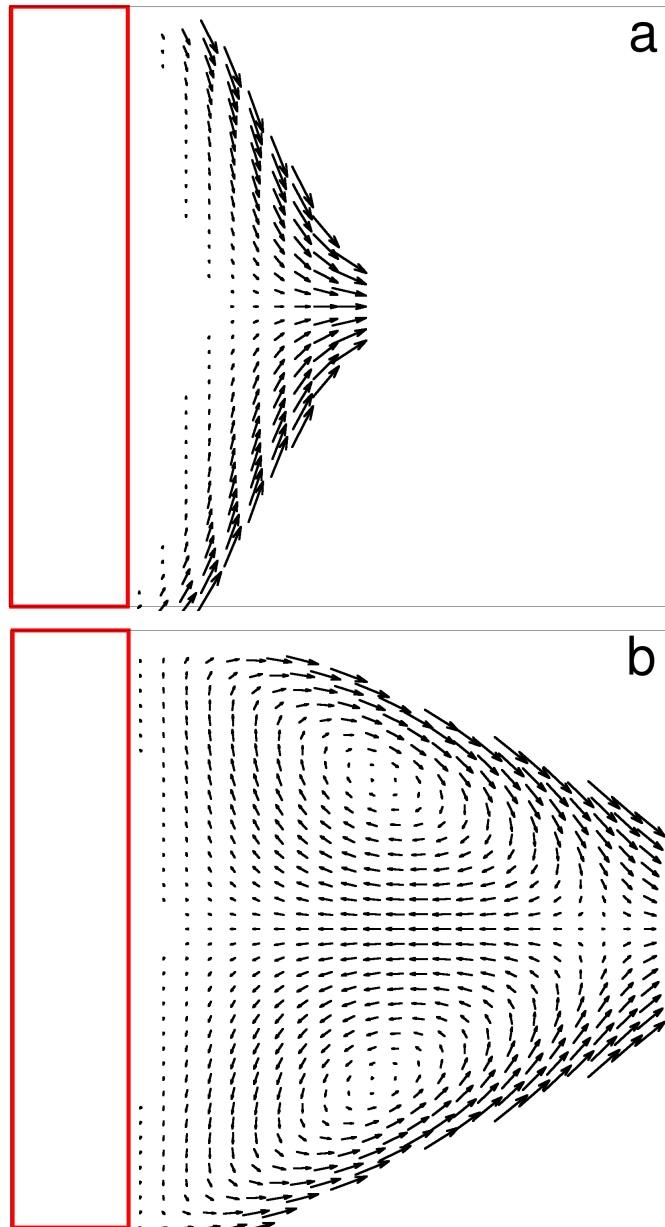


Figura 18 – Campo de velocidades associado ao escoamento sobre uma chapa retangular delgada inserida verticalmente no túnel. Partindo da configuração de Stokes, o vento é de repente ligado em  $t = 0$  e o número de Reynolds é mantido fixo em  $Re = 50$ . No estágio inicial (a), os vórtices ainda estão ausentes. Depois de algum tempo, eles aparecem e o sistema entra no regime estacionário (b), com os vórtices estacionados atrás do obstáculo. Apenas velocidades pequenas são mostradas para não sobrecarregar a figura. O vento flui da esquerda para direita. Apenas uma parte do túnel é mostrada: 1.0 na direção  $X$  e 1.0 na direção  $Y$  em unidades adimensionais usuais.

Na figura 19, mostra-se o campo de velocidades em um instante durante o regime transiente quando o fluido escoava sobre um triângulo. Partindo da configuração de Stokes, de repente, o vento é ligado em  $t = 0$  e o número de Reynolds é mantido fixo em  $Re = 1000$ .

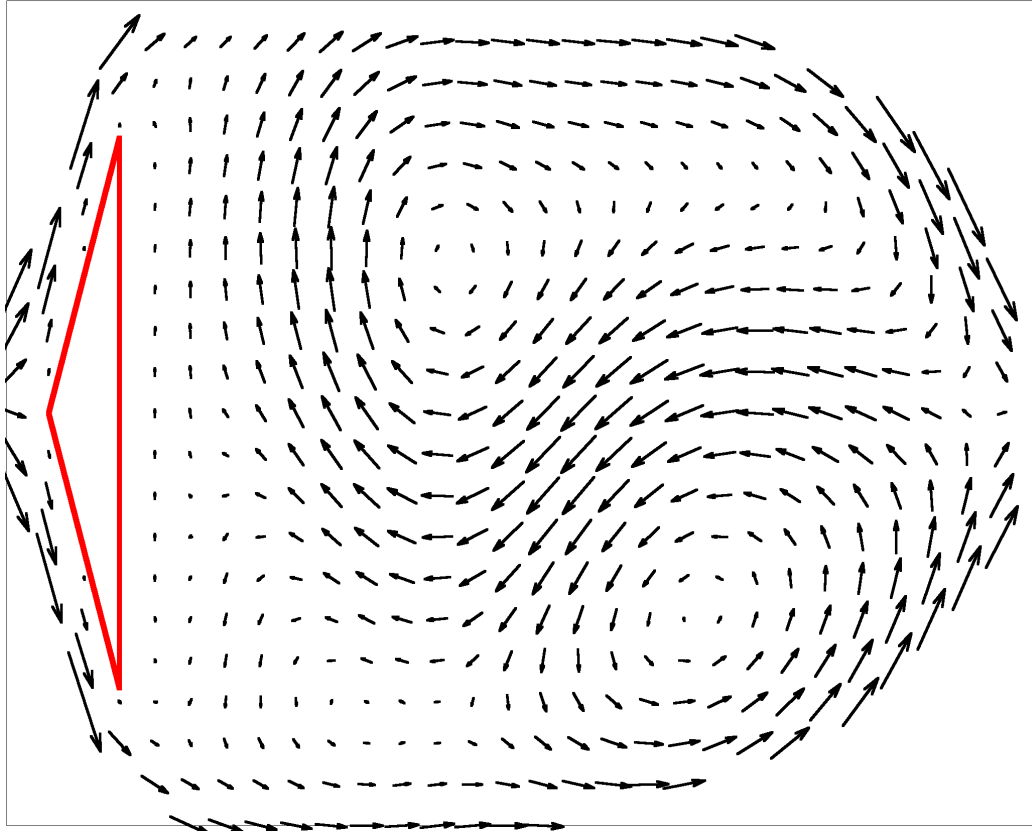


Figura 19 – Campo de velocidades em um instante durante o regime transiente quando o fluido escoava sobre um triângulo. Partindo da configuração de Stokes, o vento é de repente ligado em  $t = 0$  e o número de Reynolds é mantido fixo em  $Re=1000$ . Apenas velocidades pequenas são mostradas para não sobrecarregar a figura. O vento flui da esquerda para direita. Apenas uma parte do túnel é mostrada: 7.5 na direção  $X$  e 2.0 na direção  $Y$  em unidades adimensionais usuais.

Assim, a versão generalizada do túnel de vento numérico mostrou-se capaz de simular o escoamento sobre obstáculos de formato arbitrário para  $Re \leq 1000$ , o que torna evidente sua utilidade didática. Porém, como calcular a força sobre estes obstáculos? Apenas conhecendo o comportamento desta força seria possível irrefutavelmente confirmar o cenário descrito no capítulo 1 desta tese. Além disso, a possibilidade de calcular a força sobre objetos imersos no túnel expandiria ainda mais suas potencialidades didáticas. No capítulo seguinte, apresenta-se um método recentemente desenvolvido para calcular a força de arrasto sobre obstáculos de formato arbitrário.



### 3 Um método alternativo para determinar a força de arrasto

A maneira tradicional de calcular a força de arrasto sobre um obstáculo rígido envolve o conhecimento de dois elementos básicos: a tensão de cisalhamento, provocada pelos efeitos viscosos, e a tensão normal que é devida a pressão na parede do obstáculo. É preciso então realizar uma integração dessas tensões sobre a superfície do obstáculo, o que só é possível se conhecidos o formato do obstáculo e as distribuições de pressão e tensão de cisalhamento ao longo da superfície do obstáculo, o que normalmente é muito difícil, tanto teórica como experimentalmente (6, 35).

Alternativamente, é possível obter a força de arrasto unicamente a partir do conhecimento do campo de velocidades do fluido em torno do obstáculo. Nesse caso, é preciso realizar uma integração sobre a superfície do obstáculo que envolve o gradiente deste campo ao longo da superfície (36, 37). Contudo, quando o campo de velocidades é determinado em pontos de uma rede discreta, a precisão para o cálculo do gradiente fica comprometida, a menos que se adote uma rede muito fina perto da superfície de integração, o que requer um grande esforço computacional.

Para contornar este problema técnico, apresenta-se neste capítulo um método alternativo para a determinação da força de arrasto (17), que consiste em substituir a integral de superfície acima citada por uma integral de volume sobre todo o volume ocupado pelo obstáculo, como se descreve a seguir.

Considere conhecida, no instante  $t$ , a configuração do campo de velocidades em todo o espaço. Esta configuração no instante  $t$  é obtida a partir de configurações em instantes anteriores por meio da solução da equação de Navier-Stokes para o problema em questão, neste caso, o escoamento sobre um obstáculo de formato arbitrário. No interior do obstáculo e na sua superfície, todas as velocidades são nulas em qualquer instante  $t$ . Suponha então que o obstáculo seja removido no instante  $t$  e o volume que o obstáculo ocupava seja preenchido com fluido estático. Partindo de uma configuração do campo de velocidades no instante  $t$ , obtém-se a configuração futura no tempo  $t + \delta t$ . Como o obstáculo rígido foi substituído por um fluido, algumas velocidades não nulas aparecem no interior do volume anteriormente ocupado pelo obstáculo. Em outras palavras, a substituição do obstáculo estático por fluido também estático no instante  $t$  permite que o campo de velocidades comece a penetrar no interior do seu volume a partir deste instante  $t$ . Num instante posterior  $t + \delta t$ , este campo de velocidades interno pode ser integrado no volume. O resultado é multiplicado pela densidade do fluido, obtendo-se assim o momento que seria transferido do fluido para o obstáculo. Dividindo-se este impulso por  $\delta t$ , finalmente

obtem-se a força de arrasto <sup>1</sup>. Todavia, em relação ao método, dois comentários se fazem necessários.

Primeiramente, deve-se salientar que neste método, nenhuma contribuição convectiva é necessária de modo que o procedimento de transferência de impulso newtoniano é suficiente. Existem duas descrições diferentes para tratar movimentos em fluidos contínuos. Na descrição de Lagrange, o volume de controle move-se com o fluido de modo que a porção de fluido no interior desse volume é sempre a mesma. Nesta descrição, pode-se aplicar diretamente as leis de Newton. Na descrição de Euler, o volume de controle é fixo, estático, e é o fluido que passa através dele. A relação entre essas duas descrições é feita através das chamadas derivadas convectivas. A derivada material ( $D/Dt$ ), aplicável na descrição de Euler, é obtida pela adição das derivadas convectivas ( $v_x\partial/\partial x + v_y\partial/\partial y + v_z\partial/\partial z$ ) à usual derivada temporal ( $d/dt$ ), aplicável na descrição de Lagrange (5). Esse termo adicional dá origem às correções convectivas sobre as forças inerciais newtonianas. No entanto, no caso em consideração, o obstáculo é substituído por um fluido estático e o volume de controle é o volume do próprio obstáculo. Como no exato instante da substituição o fluido está estático, o volume de controle é o mesmo em ambas as descrições, e por isso, não há nenhuma tradução entre elas ( $\partial/\partial x = \partial/\partial y = \partial/\partial z = 0$ ). Então, quaisquer derivadas convectivas desaparecem e nenhuma correção convectiva é necessária nesta formulação.

Ademais, a acurácia do procedimento de determinação da força de arrasto depende exclusivamente da acurácia do método utilizado na solução da equação de Navier-Stokes. Embora qualquer método possa ser utilizado com este propósito, em todos os exemplos apresentados neste capítulo, utiliza-se a associação de diferenças finitas e relaxações sucessivas, da maneira como já descrito no capítulo 2.

Realizados esses comentários, descrevem-se a seguir os resultados obtidos por meio da aplicação do método. Inicialmente, o método foi aplicado ao clássico problema do escoamento sobre um cilindro estático. A figura 20 mostra a força de arrasto em função do tempo para o escoamento sobre um cilindro estático inserido em um túnel de vento inicialmente desligado e de repente ligado com  $Re = 1000$ .

A análise do gráfico mostra que a força de arrasto sobre um cilindro estático cresce, alcança um valor máximo, decresce e estabiliza. A existência de um regime transiente durante o qual a força de arrasto alcança um valor maior do que seu valor no regime estacionário é confirmada por diversos estudos experimentais (24–30). Em especial, este resultado concorda com a interpretação apresentada para os resultados experimentais obtidos para o problema da bolinha em queda, descrita no capítulo 1 desta tese: há um tempo transiente durante o qual a esteira de von Kármán ainda não está completa e a

<sup>1</sup> O tempo  $\delta t$  em questão pode ser escolhido de maneira arbitrária. A escolha é aceitável apenas se for atendida a seguinte condição: quando o tempo  $\delta t$  é multiplicado por dois, o momento transferido torna-se duas vezes maior.

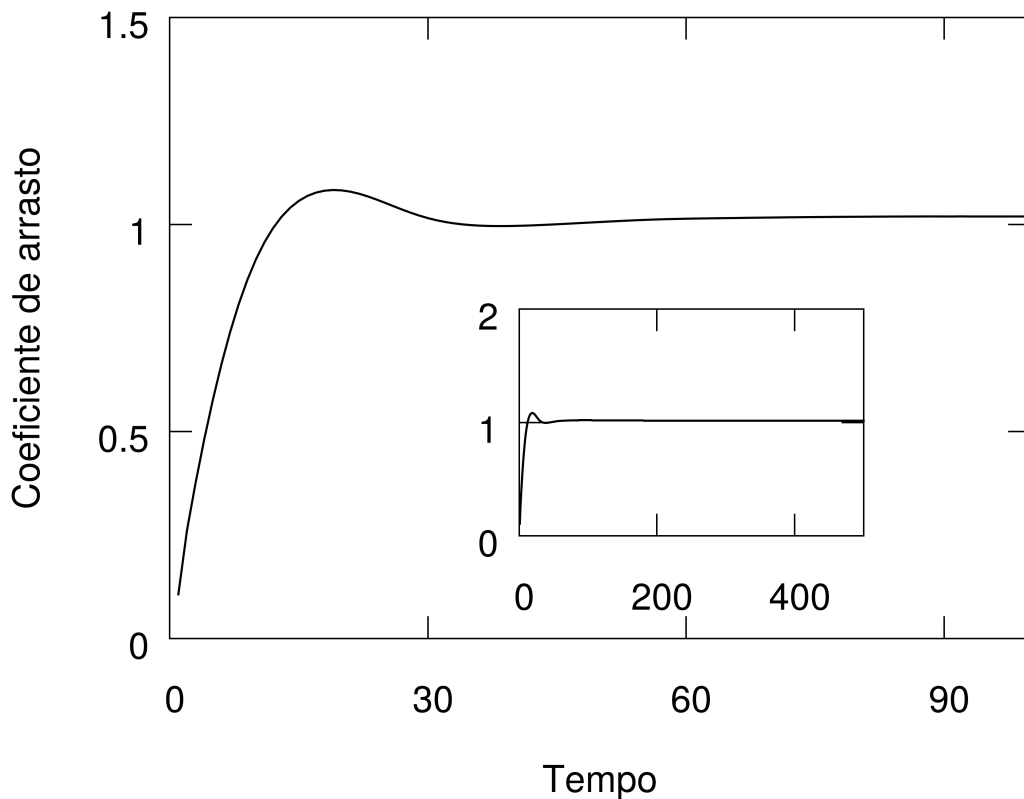


Figura 20 – Força de arrasto sobre um cilindro estático no túnel de vento. Inicialmente o túnel está desligado. Em seguida, em  $t = 0$ , o túnel é ligado e o número de Reynolds é mantido fixo em  $Re = 1000$ . Durante uma unidade de tempo, o vento viaja o equivalente a um diâmetro do cilindro. A força de arrasto adimensional é representada em termos do conhecido coeficiente de arrasto. Enquanto a componente da força na direção perpendicular ao fluxo do vento é desprezível, a componente da força que é paralela ao fluxo de vento cresce, atinge um valor máximo, decresce e finalmente estabiliza. Neste momento, o sistema entra no regime estacionário e aparecem continuamente vórtices sucessivos girando em sentidos alternados atrás do cilindro. A esteira de vórtices de von Kármán é então formada. O destaque mostra o mesmo numa escala longa no tempo.

força de arrasto não é proporcional ao quadrado da velocidade, o que ocorre tão logo a esteira esteja formada. Na transição entre os regimes, o cilindro experimenta uma força de arrasto de valor **maior** que o seu valor final.

Ademais, os resultados obtidos por meio do método estão de acordo com os dados experimentais conhecidos. A comparação entre estes resultados e os dados experimentais segue abaixo. Considere o conhecido *coeficiente de arrasto* (9),

$$C_D = \frac{F_{drag}}{\frac{1}{2} \rho V^2 D l}, \quad (3.1)$$

em que  $F_{drag}$  é a componente da força de arrasto paralela ao vento,  $\rho$  é a densidade do fluido,  $V$  é a velocidade do vento,  $D$  é o diâmetro do cilindro e  $l$  é o comprimento do

cilindro. Coeficientes de arrasto são medidos desde o começo do século XX. O coeficiente de arrasto no regime estacionário para um cilindro estático foi medido pela primeira vez (pelo que se sabe) em 1921 (18). Depois disso, vários experimentos similares foram realizados e hoje, é um fato conhecido de que, para  $Re = 1000$ ,  $C_D \approx 1.0$  (19–23), enquanto por meio do método descrito neste capítulo obteve-se  $C_D = 1.01$ . A excelente concordância entre os dados experimentais e o valor obtido por meio do método é uma evidência irrefutável de sua validade.

Naturalmente, o método acima descrito pode ser aplicado não apenas a um cilindro estático, mas a objetos de qualquer formato. Para demonstrar a versatilidade e as potencialidades didáticas do método (e também do túnel), apresentam-se nas seções seguintes os resultados obtidos por meio da utilização do método na determinação da força de arrasto experimentada por diferentes obstáculos sobre os quais escoar um fluido viscoso no túnel de vento numérico.



### 3.1 Cilindro girante

Em uma versão ligeiramente diferente do problema original, um cilindro que gira com velocidade angular constante  $\omega$  é introduzido no túnel. Neste caso, a velocidade do fluido sobre a superfície do cilindro não é mais nula, mas igual à velocidade da superfície, *i.e.*, o fluido gira com o cilindro. A velocidade angular do fluido  $\omega$  é medida em unidades tais que  $\omega = 1$  corresponde à magnitude das velocidades na superfície do cilindro igual à velocidade do vento.

O ponto de partida da simulação, como antes, é a equação de Navier-Stokes no limite em  $Re \rightarrow 0$ . As linhas de corrente associadas à solução do problema de Stokes para o escoamento sobre um cilindro girante para  $\omega = 0.1$  e  $\omega = 0.5$  são mostradas na figura 21.

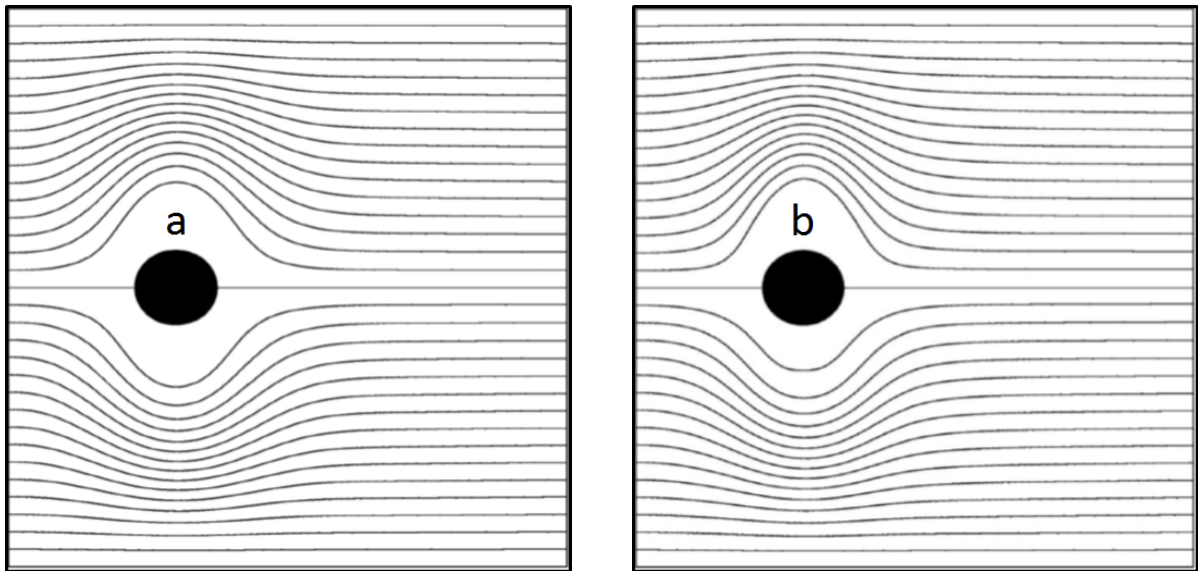


Figura 21 – Linhas de corrente para configuração de Stokes ( $Re \rightarrow 0$ ), quando o cilindro gira em sentido horário com (a)  $\omega = 0.1$  e (b)  $\omega = 0.5$ . A rotação do cilindro quebra a simetria axial. Com o aumento da velocidade angular, as linhas são deformadas. O vento viaja da esquerda para direita.

Em seguida, o vento é de repente ligado e mantido fixo em  $Re = 1000$ . Observa-se então que, após um tempo transiente, o sistema passa a apresentar um comportamento cíclico: um vórtice girando em sentido anti-horário aparece atrás do cilindro, um pouco abaixo do eixo  $X$ , como mostra a figura 22a; então, este vórtice cresce e vagarosamente se move para trás do cilindro. Depois de algum tempo, um segundo vórtice aparece na região acima do eixo  $X$  girando em sentido horário, como mostra a figura 22b; este vórtice também cresce e lentamente se afasta do cilindro; mais tarde, um terceiro vórtice girando em sentido anti-horário começa a se formar atrás do cilindro na região abaixo do eixo  $X$ , como mostra a figura 22c; e o processo se repete continuamente.

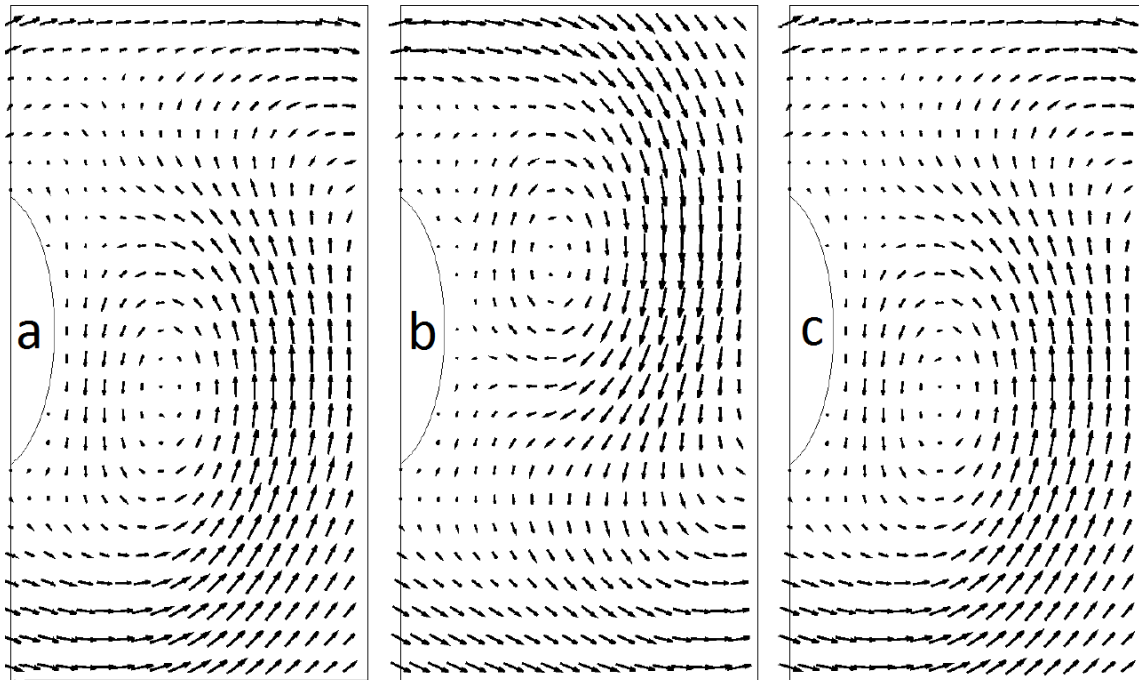


Figura 22 – Partindo da configuração laminar de Stokes para o cilindro que gira no sentido horário com velocidade angular  $\omega = 0.5$ , o vento é ligado em  $t = 0$  e mantido fixo em  $Re = 1000$ . Depois de um tempo transiente, o campo de velocidades muda continuamente e periodicamente. A figura (a) mostra um vórtice girando em sentido anti-horário. Em seguida, ele se afasta para a direita. Algum tempo mais tarde, um outro vórtice aparece atrás do cilindro girando em sentido horário, como mostrado na figura (b). Posteriormente, na figura (c), o campo de velocidades regressa à configuração observada na figura (a). Todo o processo é repetido periodicamente. Apenas uma parte do túnel é mostrada: 1.5 na direção  $X$  e 2.0 na direção  $Y$  em unidades adimensionais usuais.

O método descrito para determinação da força de arrasto na seção anterior pode ser facilmente aplicado ao caso do cilindro girante com uma pequena diferença: o volume ocupado inicialmente pelo cilindro é substituído por uma porção de fluido movendo-se exatamente como o cilindro, *i.e.*, girando como um corpo rígido, no instante  $t$ <sup>2</sup>.

Neste caso, devido à rotação do cilindro, a força sobre o cilindro tem uma componente não nula na direção transversal ao fluxo do vento. As componentes da força sobre um cilindro que gira com velocidade angular  $\omega = 0.1$  são mostrados na figura 23, onde as componentes da força de arrasto são expressas em termos dos coeficientes de arrasto e sustentação. Como o coeficiente de arrasto, o coeficiente de sustentação é um coeficiente adimensional amplamente usado em dinâmica de fluidos e é definido (6):

$$C_L = \frac{F_{lift}}{\frac{1}{2} \rho V^2 D l}, \quad (3.2)$$

em que  $F_{lift}$  é a componente da força de arrasto na direção transversal ao fluxo do vento.

<sup>2</sup> Também neste caso nenhuma contribuição convectiva é necessária pois  $(v_x \partial / \partial x + v_y \partial / \partial y = 0)$ .

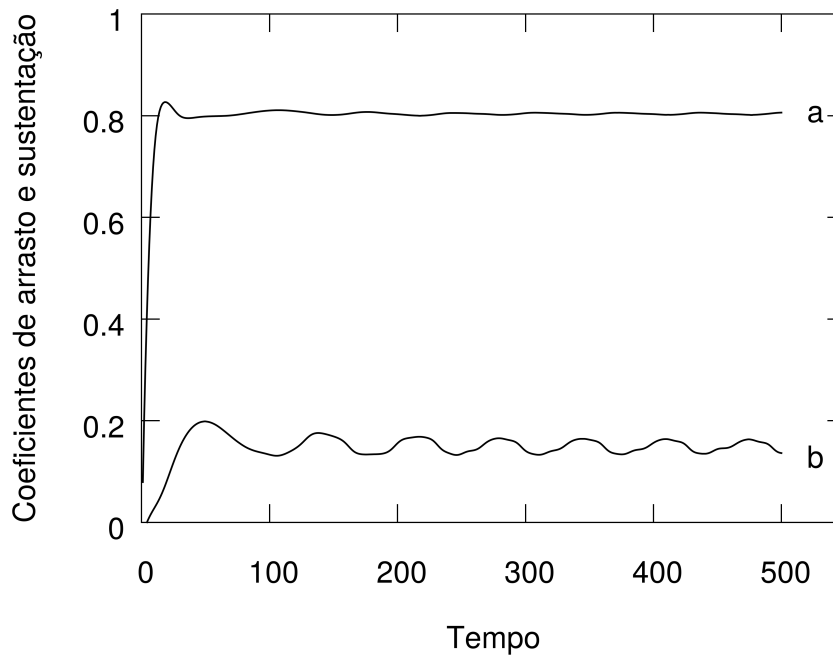


Figura 23 – Força de arrasto sobre um cilindro que gira no sentido horário com velocidade angular  $\omega = 0.1$ . Partindo da configuração laminar de Stokes, o vento é ligado em  $t = 0$  e mantido fixo em  $Re = 1000$ . Durante uma unidade de tempo, o vento viaja o equivalente a um diâmetro do cilindro. O coeficiente de arrasto (a) apresenta o mesmo comportamento observado para o cilindro fixo. Durante o regime transiente, o coeficiente de sustentação (b) também cresce, alcança um máximo e decresce. Entretanto, esta componente não estabiliza simplesmente. Ao invés disso, fica oscilando perceptivelmente em torno de um valor médio não nulo. A oscilação deve-se ao aparecimento de vórtices girando em sentidos alternados, uma assinatura da esteira de von Kármán. Para números de Reynolds pequenos, da ordem de algumas dezenas, ambas as componentes não oscilam, o que é esperado na ausência dos vórtices sucessivos.

O aparecimento deste coeficiente de sustentação não nulo deve-se a uma assimetria na separação na camada limite<sup>3</sup>, que é antecipada na parte de baixo do cilindro, em virtude da rotação em sentido horário. Em consequência disso, a esteira é, como um todo, defletida para baixo, o que justifica os valores não nulos do coeficiente de sustentação observados nas figuras 23 e 24, onde são mostradas as evoluções temporais do coeficiente de sustentação para várias velocidades angulares pequenas. Trata-se de uma clara manifestação de um efeito conhecido como Efeito Magnus (6)<sup>4</sup>.

<sup>3</sup> A camada limite resulta da aderência das moléculas de ar ao objeto. Devido a viscosidade do ar, a aderência é parcialmente transferida às moléculas situadas mais longe do objeto; isso define uma região que se move com o objeto e é chamada de camada limite (2).

<sup>4</sup> Dá-se o nome de *efeito Magnus* à alteração da trajetória de um objeto que se move através de um fluido por causa de sua rotação (4).

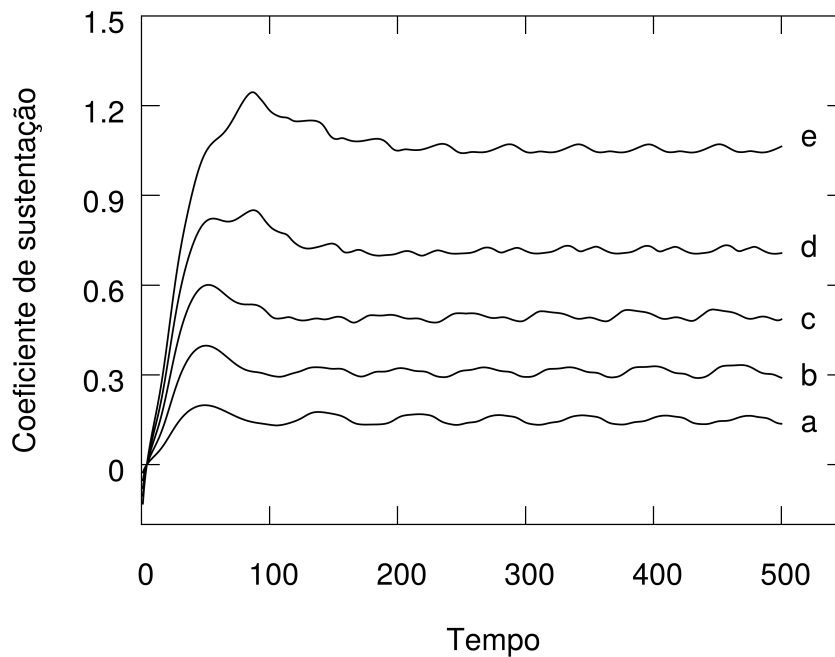


Figura 24 – Coeficientes de sustentação em função do tempo para cilindros girando com diferentes velocidades angulares pequenas: (a)  $\omega = 0.1$ ; (b)  $\omega = 0.2$ ; (c)  $\omega = 0.3$ ; (d)  $\omega = 0.4$ ; e (e)  $\omega = 0.5$ . Partindo da configuração laminar de Stokes, o vento é ligado em  $t = 0$  e mantido fixo em  $Re = 1000$ . Durante uma unidade de tempo, o vento viaja o equivalente a um diâmetro do cilindro. Depois de um estágio transiente, todos os coeficientes de sustentação oscilam perceptivelmente em torno de valores médios não nulos.

As oscilações do coeficiente de sustentação no tempo devem-se ao aparecimento sucessivo de vórtices girando em sentidos alternados na formação da esteira. Perto do cilindro, um vórtice girando em sentido anti-horário (veja figura 22a) empurra o cilindro para baixo, subtraindo uma força extra do valor médio, o que corresponde a um mínimo da força de Magnus na figura 23b. Em seguida, um vórtice girando em sentido horário (veja figura 22b) empurra o cilindro para cima, adicionando uma força extra ao valor médio, o que corresponde a um máximo na figura 23b. É interessante notar que o coeficiente de arrasto também oscila, embora sua oscilação seja difícil de visualizar (figura 23a) (33, 38).

Para velocidades angulares grandes ( $\omega \approx 2.0$ ), é sabido que a esteira de vórtices tende a desaparecer (39–45). A figura 25 mostra a evolução temporal do coeficiente de sustentação para valores de  $\omega$  maiores que antes. Os resultados indicam que, para velocidades angulares a partir de  $\omega \approx 1.0$ , as oscilações de alta frequência relacionadas a sequência de vórtices sucessivos são atenuadas à medida que a velocidade angular cresce e tendem a desaparecer para velocidades angulares próximas de  $\omega \approx 2.0$ , quando são substituídas por oscilações de frequência muito menor.

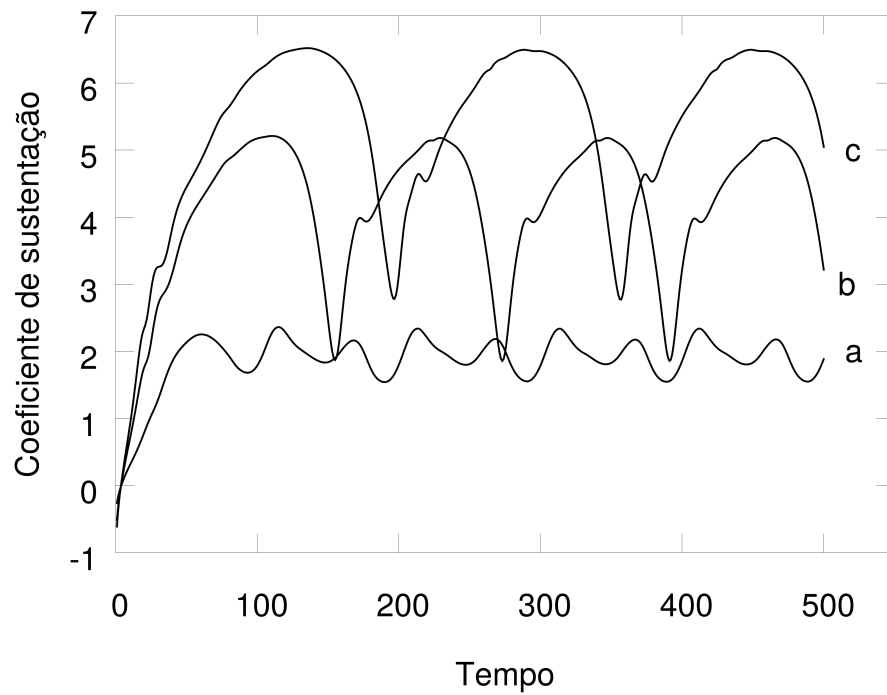


Figura 25 – Coeficientes de sustentação em função do tempo para cilindros girando com velocidades angulares grandes: (a)  $\omega = 1.0$ ; (b)  $\omega = 2.0$ ; e (c)  $\omega = 2.4$ . Partindo da configuração laminar de Stokes, o vento é ligado em  $t = 0$  e mantido fixo em  $Re = 1000$ . Durante uma unidade de tempo, o vento viaja o equivalente a um diâmetro do cilindro. Quando  $\omega \approx 2.0$ , as oscilações de alta frequência são substituídas por oscilações de frequência bem mais baixa devido a ausência da esteira de von Kármán.

## 3.2 Asa

Nesta seção, descreve-se o escoamento sobre um modelo simplificado de asa cujo ângulo de ataque, *i.e.*, o ângulo que o eixo da asa faz com a direção do vento, pode ser controlado. A asa inserida no túnel é mostrada na figura 26.

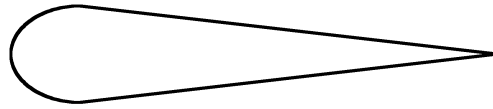


Figura 26 – Asa introduzida no túnel.

Para a velocidade do vento fixa em  $Re = 1000$ , o ângulo de ataque pode variar entre  $\pm 22^\circ$  sem que as paredes do túnel interfiram fortemente na simulação. Como antes, partindo da configuração laminar de Stokes, o vento é ligado em  $t = 0$  e mantido fixo em  $Re = 1000$ . Neste caso, após o regime transiente, vórtices girando em sentidos contrários aparecem alternadamente atrás da asa, assim como ocorre no escoamento sobre o cilindro. A força de arrasto em função do tempo é mostrada na figura 27 para o ângulo de ataque igual a  $0^\circ$  e, na figura 28, para o ângulo de ataque igual a  $15^\circ$ .

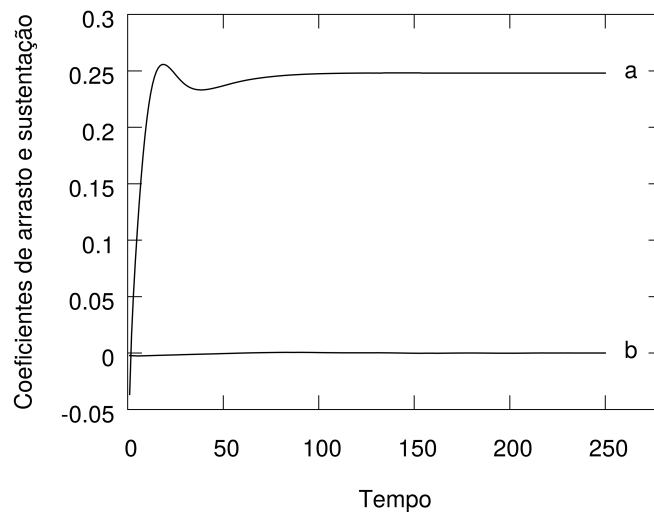


Figura 27 – Coeficientes em função do tempo para o escoamento sobre a asa com ângulo de ataque acionado em  $0^\circ$ . Partindo da configuração laminar de Stokes, o vento é ligado em  $t = 0$  e mantido fixo em  $Re = 1000$ . Durante uma unidade de tempo, o vento viaja o equivalente a 1.0 em unidades usuais. Em (a), apresenta-se o coeficiente de arrasto e, em (b), o coeficiente de sustentação. O coeficiente de arrasto cresce, atinge um valor máximo, reduz-se um pouco e estabiliza, passando a oscilar levemente (imperceptível na figura) em torno de um valor fixo positivo, enquanto o coeficiente de sustentação é constante e muito próximo de zero, o que é esperado para um obstáculo axialmente simétrico.

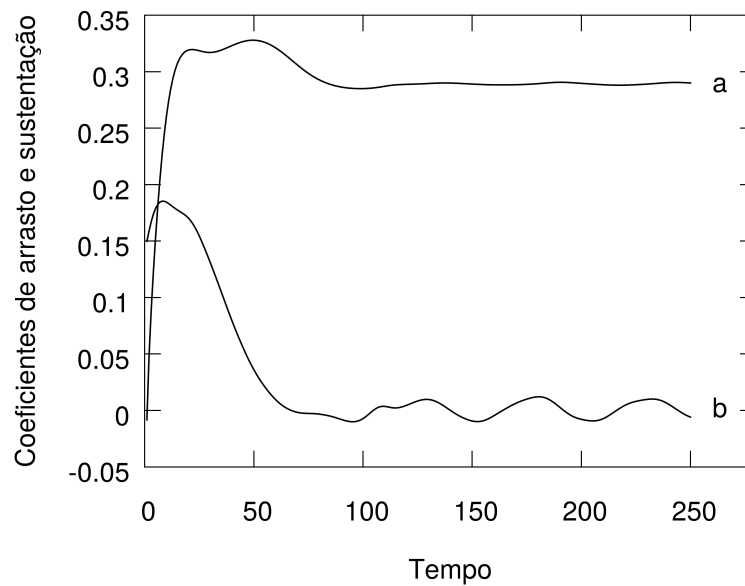


Figura 28 – Coeficientes em função do tempo para o escoamento sobre a asa com ângulo de ataque acionado em  $15^\circ$ . Partindo da configuração laminar de Stokes, o vento é ligado em  $t = 0$  e mantido fixo em  $Re = 1000$ . Durante uma unidade de tempo, o vento viaja o equivalente a 1.0 em unidades usuais. Em (a), apresenta-se o coeficiente de arrasto e, em (b), o coeficiente de sustentação. Assim como antes, o coeficiente de arrasto cresce, atinge um valor máximo, reduz-se um pouco e estabiliza, passando a oscilar em torno de um valor fixo positivo enquanto o coeficiente de sustentação, após o transiente (neste caso, bem diferente do caso para ângulo de ataque  $0^\circ$ , pois a simetria axial foi quebrada), passa a flutuar em torno de um valor fixo positivo, embora pequeno se comparado com o valor em que o coeficiente de arrasto estabiliza.

Para a asa, o coeficiente de arrasto apresenta um comportamento qualitativo análogo ao observado para o caso do cilindro estático (veja figura 20): o coeficiente de arrasto cresce, atinge um valor máximo, reduz-se um pouco e estabiliza, passando a oscilar em torno de um valor fixo positivo. A curva como um todo é modificada com o ângulo de ataque, em particular, verifica-se o aumento do valor em torno do qual o coeficiente estabiliza, como é possível verificar comparando as figuras 27(a) e 28(a).

O coeficiente de sustentação também depende do ângulo de ataque. Para um ângulo de ataque igual a  $0^\circ$ , observa-se que este coeficiente é constante e muito próximo de zero, o que é esperado para um obstáculo axialmente simétrico (6). Veja a figura 27(b). À medida que o ângulo de ataque cresce, a simetria axial é quebrada, o aspecto da curva se modifica, é possível perceber a existência dos regimes transiente e estacionário e nota-se que o valor em torno do qual o coeficiente de sustentação se estabiliza cresce. Veja a figura 28(b). Este resultado corresponde satisfatoriamente ao que se sabe sobre a relação entre a sustentação, força correspondente ao coeficiente sustentação, e o ângulo de ataque (46, 47).

Na simulação, a asa pode ser ligeiramente modificada para incluir um tipo de flap. Flaps consistem em abas ou superfícies articuladas existentes na parte posterior das asas que alteram temporariamente a geometria das mesmas. Quando abaixados e/ou estendidos, os flaps aumentam o arrasto e a sustentação, o que é especialmente importante no procedimento de pouso de aviões reais. O flap instalado na asa é mostrado na figura 29 e é equivalente a um flap do tipo ventral. Os coeficientes de arrasto e sustentação em função do tempo para asas com e sem flap para um ângulo de ataque acionado em  $15^\circ$  são mostrados na figura 30. Da análise do gráfico, percebe-se que a presença do flap altera a força de arrasto, em particular, aumentando o valor em torno do qual ambas as componentes oscilam no regime estacionário em relação ao valor para asa sem o flap, o que se harmoniza com o que se sabe a respeito da função deste tipo de flap nas asas (6).

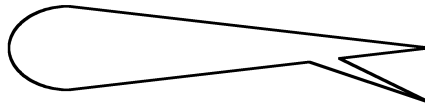


Figura 29 – Asa com flap.

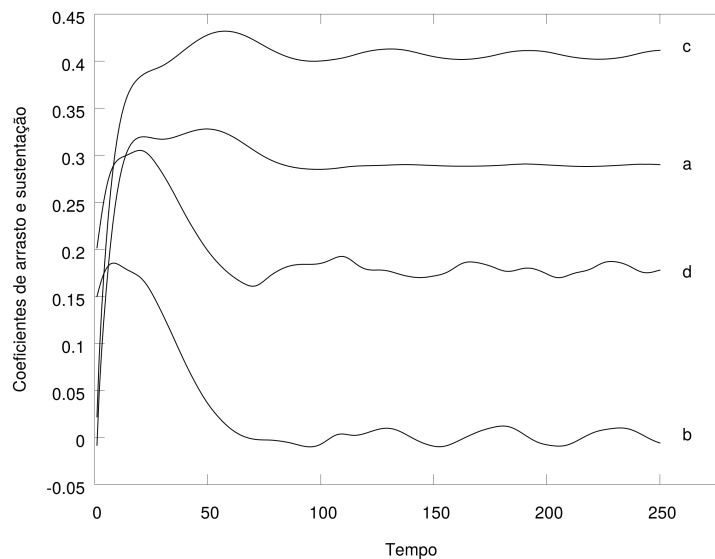


Figura 30 – Coeficientes em função do tempo para os escoamento sobre asas com e sem flap com o ângulo de ataque acionado em  $15^\circ$ . Partindo da configuração laminar de Stokes, o vento é ligado em  $t = 0$  e mantido fixo em  $Re = 1000$ . Durante uma unidade de tempo, o vento viaja o equivalente a 1,0 em unidades usuais. Em (a) e (b), observam-se, respectivamente, os coeficientes de arrasto e de sustentação para asa **sem** flap (repetido da figura 28) enquanto em (c) e (d), observam-se, respectivamente, os coeficientes de arrasto e de sustentação para asa **com** flap. Como esperado, para um mesmo ângulo de ataque, as curvas para a asa com flap se estabilizam em valores mais altos do que as curvas para a asa sem flap, embora o comportamento qualitativo das curvas seja aproximadamente o mesmo com ou sem flap.



### 3.3 Chapas paralelas

Finalmente, apresenta-se nesta seção os resultados obtidos para o escoamento sobre um obstáculo composto de dois objetos, a saber, duas chapas retangulares idênticas. As placas foram dispostas simetricamente em relação ao eixo  $X$  e têm, cada uma, uma área de  $1.25 \times 0.25$  em unidades adimensionais usuais. Novamente, partindo da configuração de Stokes, de repente, o vento é ligado e mantido fixo em  $Re = 1000$ . A figura 31 mostra dois vórtices começando a aparecer atrás do obstáculo durante o regime transiente.

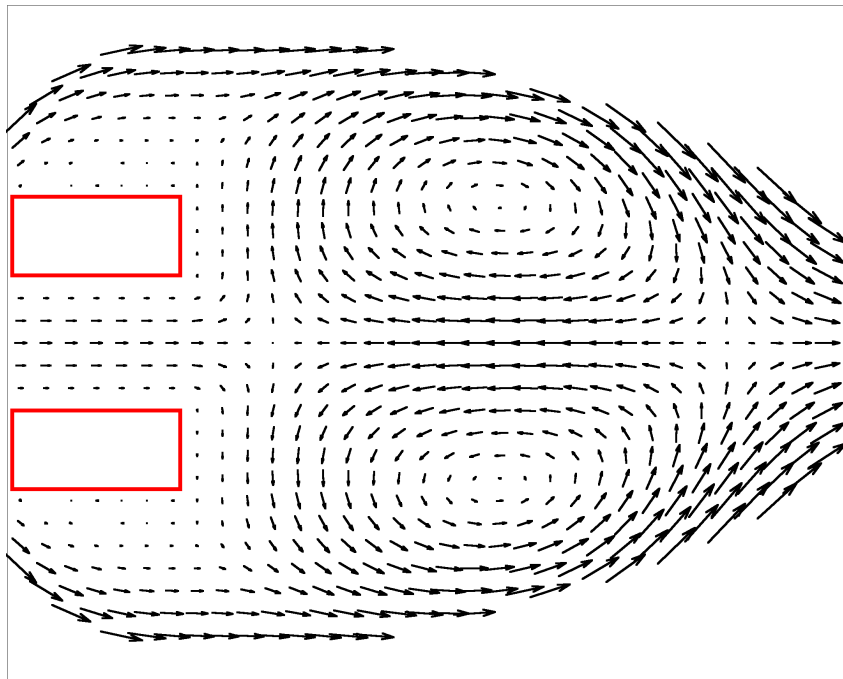


Figura 31 – Vórtices surgindo atrás de duas chapas retangulares idênticas quando, partindo da configuração de Stokes, o vento é ligado e mantido fixo em  $Re = 1000$ . Apenas velocidades pequenas são mostradas para não sobrecarregar a figura. Apenas uma parte do túnel é mostrada: 7.5 na direção  $X$  e 3.0 na direção  $Y$  em unidades adimensionais usuais.

Como antes, o procedimento para determinação da força de arrasto apresentado no início deste capítulo pode ser aplicado. Por um lado, a evolução temporal dos coeficientes de arrasto é a mesma para ambas as chapas (veja a figura 32). Por outro lado, como mostra a figura 33, a evolução temporal dos coeficientes de sustentação apresenta comportamento inverso para cada placa, o que revela que as placas tendem a se afastar. Esse afastamento pode ser explicado qualitativamente pelo princípio de Bernoulli (apenas qualitativamente, porque este se refere a escoamento laminares): como a velocidade do fluido na região entre as placas é menor do que na região externa às placas, a pressão na região entre as placas é maior do que na região externa às placas. Dessa diferença de pressões, surge a força que faz com que as placas tendam a se afastar (4).

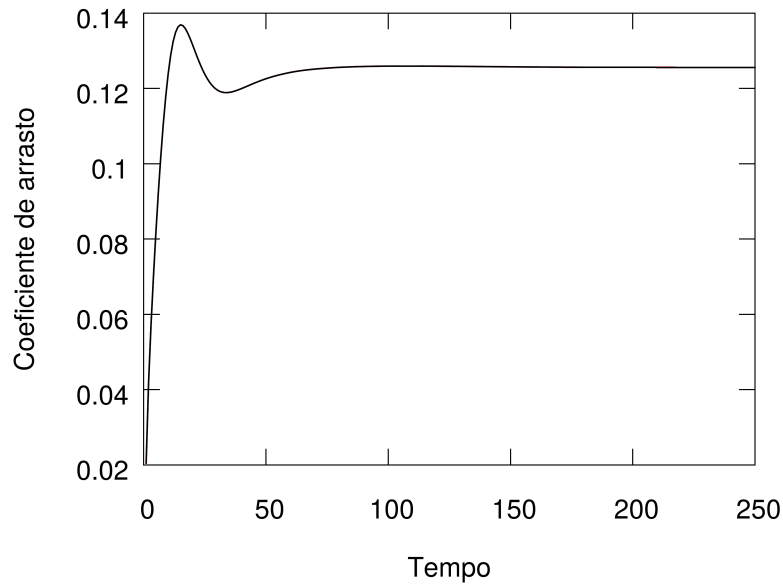


Figura 32 – Coeficientes de arrasto em função do tempo para o escoamento sobre duas placas paralelas idênticas. Partindo da configuração laminar de Stokes, o vento é ligado em  $t = 0$  e mantido fixo em  $Re = 1000$ . Durante uma unidade de tempo, o vento viaja o equivalente a 1.0 em unidades usuais. A evolução temporal dos coeficientes de arrasto é a mesma para ambas as chapas.

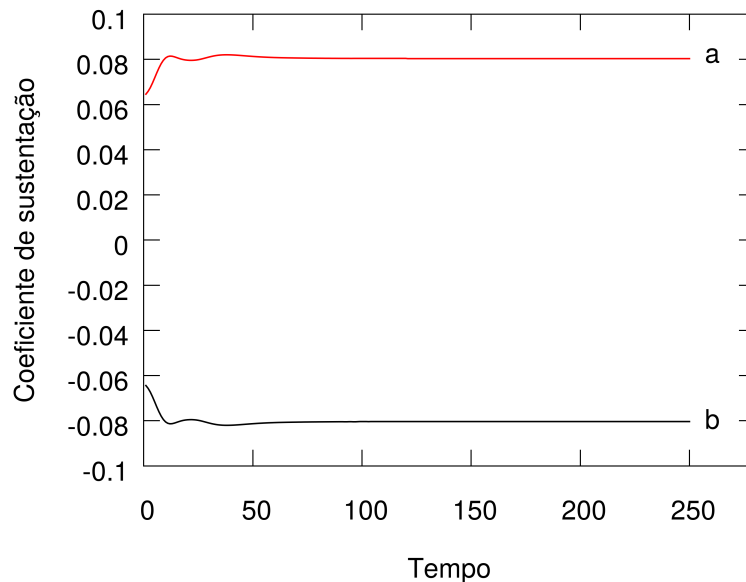


Figura 33 – Coeficientes de sustentação em função do tempo para o escoamento sobre duas placas paralelas idênticas. Partindo da configuração laminar de Stokes, o vento é ligado em  $t = 0$  e mantido fixo em  $Re = 1000$ . Durante uma unidade de tempo, o vento viaja o equivalente a 1.0 em unidades usuais. Em (a), observa-se o coeficiente de sustentação associado à placa superior e, em (b), à inferior. As placas experimentam forças de mesmo módulo e direção, porém, em sentidos contrários. Por esta razão, tendem a se afastar.

## 4 Considerações finais

O estudo de escoamentos viscosos, embora riquíssimo, é praticamente ausente em cursos de física geral e básica. Isso se deve, em parte, ao fato desse tipo de escoamento ser descrito pela equação de Navier-Stokes que, por sua vez, só admite solução analítica para alguns poucos casos. Diante desse quadro, foram apresentados nesta tese (a) um túnel de vento simulado no qual se pode escolher o formato do objeto a ser inserido no túnel assim como a velocidade do vento e (b) um método alternativo para determinar a força de arrasto sobre objetos de qualquer formato. O objetivo destes desenvolvimentos é instrumentalizar o professor e viabilizar que uma discussão mais aprofundada do tema seja realizada.

Os programas que compõem a simulação, assim como um arquivo com instruções para utilização do túnel podem ser baixados no endereço <<https://www.dropbox.com/s/t3y8og20zfhypk8/programas.rar?dl=0>>.

Alguns comentários finais se fazem necessários. O túnel foi concebido para analisar escoamentos bidimensionais. Pode-se pensar em modificá-lo para o estudo de escoamentos tridimensionais, porém, a experiência adquirida com a utilização do túnel indica que isso exigiria demasiado esforço computacional, o que até então não pôde ser contornado nem mesmo com a utilização de clusters de alto desempenho. Isto se deve ao fato de ser difícil realizar um processo de computação em paralelo para o túnel, uma vez que, uma configuração é gerada a partir da anterior.

No túnel, “as paredes” que limitam a região de interesse, inevitavelmente, interferem nos resultados. Na verdade, em duas dimensões, a influência das paredes faz-se sentir até distâncias proporcionais a  $1/Re$  em uma unidade de comprimento igual ao tamanho linear do objeto. Desta forma, para  $Re$  nulo e velocidades fixas no infinito, não há solução matemática aceitável a grandes distâncias e os resultados são apenas aproximadamente corretos. Para  $Re$  pequenos, a influência das paredes poderia ser minimizada, se as paredes fossem muito mais afastadas do objeto ou, se um túnel tridimensional fosse adotado. Contudo, estas duas estratégias não se mostraram viáveis do ponto de vista da eficiência computacional. Para  $Re$  grandes, o problema desaparece. Essa interferência, contudo, não modifica os principais aspectos qualitativos da solução, aspectos estes que foram o foco da pesquisa (48, 49).

Em um formato piloto, o túnel foi utilizado em duas disciplinas, física térmica para o curso técnico de automação industrial e física geral II para licenciatura em física do Instituto Federal do Rio de Janeiro. Na aplicação no curso de automação, por tratar-se de um curso de nível médio, o tópico escoamentos viscosos foi apresentado como complementar.

Neste caso, o problema da bolinha que freia ao cair foi apresentado e discutido em detalhes com o auxílio do túnel. Simulações com asas também foram utilizadas para discutir as razões físicas pelas quais o avião consegue manter-se no ar. No curso de licenciatura, o túnel foi utilizado por um grupo de alunos para elaboração do projeto da final da disciplina. Neste caso, inicialmente, os alunos se familiarizaram com túnel numérico. Posteriormente, inseriram diferentes objetos no túnel, como uma bala de revólver (semi círculo), um triângulo e um cilindro girando com velocidade angular controlável.

As possibilidades do túnel numérico não se esgotaram com os resultados que foram apresentados nesta tese. Por exemplo, apenas concernente ao problema do cilindro girante, este poderia ser modificado para que dois cilindros, ao invés de um, fossem inseridos no túnel. As velocidades angulares poderiam, então, ser combinadas de acordo com o interesse do usuário, o que poderia resultar em diferentes dinâmicas de escoamento e, conseqüentemente, diferentes comportamentos para a força de arrasto.

Evidentemente, as potencialidades do túnel de vento são muito grandes, estando restritas apenas à imaginação do usuário. Sem mais, findamos este texto reiterando a certeza que temos de que o túnel de vento numérico desenvolvido por nós representa uma importante inovação, constituindo-se em um instrumento para o professor, que, acreditamos, muito beneficiará o processo de ensino-aprendizagem. Com isso, cada vez mais alunos poderão contemplar a beleza e a riqueza dos fenômenos que envolvem escoamentos viscosos.

# Referências

- 1 OLIVEIRA, P. M. C. de et al. Can a falling ball lose speed? *arXiv preprint arXiv:1005.4086*, 2010.
- 2 AGUIAR, C.; RUBINI, G. A aerodinâmica da bola de futebol. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 26, n. 4, p. 297, 2004.
- 3 LEROY, B. O efeito “folha seca”. *Revista Brasileira de Física*, v. 7, n. 3, p. 693, 1977.
- 4 NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica 2*. Cap. 2. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 2008.
- 5 SCHNEIDERBAUER, S.; KRIEGER, M. What do the Navier-Stokes equations mean? *European Journal of Physics*, v. 35, n. 1, p. 015020, 2014.
- 6 MUNSON, B. R.; YOUNG, D. F.; OKIISHI, T. H. *Fundamentals of fluid mechanics*. Chap. 9. New York: John Wiley & Sons, 1990.
- 7 STOKES, G. G. *On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums*. [S.l.]: Pitt Press, 1851. v. 9.
- 8 NAVIER, C. L. M. H. Mémoire sur les lois du mouvement des fluides. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France*, v. 6, p. 389, 1823.
- 9 FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. *The Feynman lectures on physics 2*. Chap 41. Reading: Addison-Wesley, 1969.
- 10 REYNOLDS, O. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Proceedings of the royal society of London*, v. 35, n. 224, p. 84, 1883.
- 11 ROTT, N. Note on the history of the reynolds number. *Annual review of fluid mechanics*, v. 22, n. 1, p. 1, 1990.
- 12 ENGELMAN, M. S.; JAMNIA, M. Transient flow past a circular cylinder: a benchmark solution. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 11, n. 7, p. 985, 1990.
- 13 ALFONSI, G.; GIORGINI, A. Temporal evolution of high-order vortices in the nonsymmetric wake past a circular cylinder. *Fluid Dynamics Research*, v. 31, n. 1, p. 13, 2002.
- 14 SUH, J.-C.; KIM, K.-S. A vorticity–velocity formulation for solving the two-dimensional Navier–Stokes equations. *Fluid Dynamics Research*, v. 25, n. 4, p. 195, 1999.
- 15 PESAVENTO, U.; WANG, Z. J. Falling paper: Navier-Stokes solutions, model of fluid forces, and center of mass elevation. *Physical Review Letters*, v. 93, n. 14, p. 144501, 2004.
- 16 SOUZA, P. V. S.; OLIVEIRA, P. M. C. de. Numerical wind tunnels. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 38, n. 2, p. 2303, 2016.

- 17 SOUZA, P. V. S.; GIRARDI, D.; OLIVEIRA, P. M. C. de. Drag force in wind tunnels: a new method. *arXiv preprint arXiv:1505.01101*, 2015.
- 18 WIESELSBERGER, C. Neuere feststellungen über die gesetze des flüssigkeits-und luftwiderstandes. *Phys. Z.*, v. 22, n. 11, p. 321, 1921.
- 19 FINN, R. K. Determination of the drag on a cylinder at low reynolds numbers. *Journal of Applied Physics*, v. 24, n. 6, p. 771, 1953.
- 20 TRITTON, D. J. Experiments on the flow past a circular cylinder at low reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 6, n. 4, p. 547, 1959.
- 21 ROSHKO, A. Experiments on the flow past a circular cylinder at very high reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 10, n. 3, p. 345, 1961.
- 22 JAYAWEERA, K.; MASON, B. J. The behaviour of freely falling cylinders and cones in a viscous fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 22, n. 4, p. 709, 1965.
- 23 KATO, H.; MIZUNO, Y. An experimental investigation of viscoelastic flow past a circular cylinder. *Bulletin of Japan Society of Mechanical Engineers*, v. 26, n. 214, p. 529, 1983.
- 24 SARPKEYA, T. Separated flow about lifting bodies and impulsive flow about cylinders. *The American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, v. 4, n. 3, p. 414, 1966.
- 25 TANEDA, S. The development of the lift of an impulsively started elliptic cylinder at incidence. *Journal of the Physical Society of Japan*, v. 33, n. 6, p. 1706, 1972.
- 26 SARPKEYA, T. *Impulsive Flow about a Circular Cylinder*. Monterey, California, 1978.
- 27 NOMURA, T.; KITAMURA, N.; KITAGAWA, T. Characteristics of unsteady drag on a square cylinder under sudden change of wind speed. In: *Proceedings of 3rd International Symposium on Computational Wind Engineering*. Birmingham, United Kingdom: International Association for Wind Engineering, 2000.
- 28 TAKEUCHI, T.; MAEDA, J.; KAWASHITA, H. The overshoot of aerodynamic forces on a railcar-like body under step-function-like gusty winds. In: *Sixth International Colloquium on Bluff Body Aerodynamics & Applications*. Milano, Italy: International Association for Wind Engineering, 2008.
- 29 SHIRATO, H. et al. Transient drag force on 2-dbluff bodies under gusty wind condition. In: *The Seventh Asia-Pacific Conference on Wind Engineering*. Taipei, Taiwan: International Association for Wind Engineering, 2009.
- 30 TAKEUCHI, T.; MAEDA, J. Effects of inertia force proportional to flow acceleration on unsteady wind forces acting on an elliptic cylinder under short-rise-time gusts. In: *Proceedings of 5th International Symposium on Computational Wind Engineering*. Chapel Hill, United States of America: International Association for Wind Engineering, 2010.
- 31 MORDANT, N.; PINTON, J.-F. Velocity measurement of a settling sphere. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, v. 18, n. 2, p. 343, 2000.

- 32 OLIVEIRA, P. M. C. de. Relaxation method for Navier-Stokes equation. *International Journal of Modern Physics C*, v. 23, n. 4, p. 1250021, 2012.
- 33 CRUCHAGA, M. A. et al. Computing past cylinder flows. *Mecánica Computacional*, v. 21, n. 5, p. 462, 2002.
- 34 PRESS, W. H. et al. *Numerical recipes in C*. Chap 19. Cambridge: Cambridge University Press, 1988.
- 35 LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. *Fluid mechanics*. Chap. 2. Oxford: Pergamon, 1987.
- 36 NOCA, F.; SHIELS, D.; JEON, D. A comparison of methods for evaluating time-dependent fluid dynamic forces on bodies, using only velocity fields and their derivatives. *Journal of Fluids and Structures*, v. 13, n. 5, p. 551, 1999.
- 37 TAN, B. T.; THOMPSON, M. C.; HOURIGAN, K. Evaluating fluid forces on bluff bodies using partial velocity data. *Journal of Fluids and Structures*, v. 20, n. 1, p. 5, 2005.
- 38 LU, X.-Y. Numerical study of the flow behind a rotary oscillating circular cylinder. *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, v. 16, n. 1, p. 65, 2002.
- 39 CHEW, Y.; CHENG, M.; LUO, S. A numerical study of flow past a rotating circular cylinder using a hybrid vortex scheme. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 299, p. 35, September 1995.
- 40 CHEN, Y.-M.; OU, Y.-R.; PEARLSTEIN, A. Development of the wake behind a circular cylinder impulsively started into rotatory and rectilinear motion. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 253, p. 449, 1993.
- 41 STOJKOVIĆ, D.; BREUER, M.; DURST, F. Effect of high rotation rates on the laminar flow around a circular cylinder. *Physics of Fluids*, v. 14, p. 3160, 2002.
- 42 MITTAL, S.; KUMAR, B. Flow past a rotating cylinder. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 476, p. 303, 2003.
- 43 KALININ, E. I.; MAZO, A. B. Steady and periodic regimes of laminar flow around the rotating cylinder. *TsAGI Science Journal*, v. 42, n. 5, p. 637, 2011.
- 44 RAO, A. et al. Three-dimensionality in the wake of a rotating cylinder in a uniform flow. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 717, p. 1, 2013.
- 45 RAO, A. et al. A review of rotating cylinder wake transitions. *Journal of Fluids and Structures*, v. 53, p. 2, 2015.
- 46 BABINSKY, H. How do wings work? *Physics Education*, v. 38, n. 6, p. 497, 2003.
- 47 WELTNER, K. et al. Complementation of fluid dynamics and aerodynamic lift. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 23, n. 4, p. 429, 2001.
- 48 CHILDRESS, S. *An introduction to theoretical fluid mechanics*. Chap. 7. New York: Courant Institute of Mathematical Sciences, 2009.
- 49 SHAW, W. T. A simple resolution of stokes' paradox? *arXiv preprint arXiv:0901.3621*, 2009.

- 50 PURCELL, E. M. *Electricity and magnetism*. Chap. 3. New York: McGraw-Hill, 1965.
- 51 SCHERER, C. *Métodos computacionais da Física*. Cap. 3. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2005.



# Apêndices



# APÊNDICE A – O método das relaxações sucessivas

O método das relaxações sucessivas é um método numérico simples e eficiente para resolver a equação de Laplace  $\nabla^2\psi(\vec{r}) = 0$  para um campo  $\psi(\vec{r})$  dentro de uma superfície na qual algumas condições de contorno fixas são definidas. Baseia-se no fato de que  $\psi(\vec{r}_o)$  corresponde à média contínua sobre os valores da função na vizinhança, ao longo de um contorno fechado em torno de  $\vec{r}_o$ . Para uma rede discreta (por exemplo, uma rede quadrada ou cúbica),  $\psi(\vec{r}_o)$  deve ser igual à média discreta sobre os pontos vizinhos na rede. O método consiste em partir de uma distribuição de  $\psi(\vec{r})$  de teste para os pontos da rede dentro da região de interesse que não obedece à acima mencionada aproximação pela média. Em seguida, cada  $\psi(\vec{r})$  é substituído pela média tomada sobre os valores da função em seus pontos vizinhos, em sequência, até que ocorra a convergência numérica sobre toda a região.

Aplicou-se o método das relaxações sucessivas na pesquisa relatada nesta tese, inicialmente, para resolver a equação de Stokes 2.4. Neste caso, a aplicação do método consistiu simplesmente na substituição da vorticidade em um ponto da rede pela média das vorticidades dos seus quatro vizinhos imediatos.

Porém, o método pode ser estendido a outros problemas mais complicados do que o problema de Laplace, contanto que sejam modelados pelo operador Laplaciano  $\nabla^2$ . No desenvolvimento da pesquisa, o método foi também usado para resolver a equação completa de Navier-Stokes 2.1. Neste caso, outros termos aparecem na equação e estes também precisam ser expressos em função dos valores das velocidades e vorticidades nos pontos em seu entorno, tantos pontos quantos forem necessários para que todas as diferenças finitas que substituem as derivadas tenham, no mínimo, precisão até o termo de segunda ordem tanto no passo discreto espacial quanto no passo de tempo. Isto é necessário, como já explicado, para que o erro numérico total do protocolo permaneça controlável.

Para mais detalhes sobre o uso de relaxações sucessivas na solução de equações diferenciais, veja as referências (50, 51).



## APÊNDICE B – Dedução das principais equações

Na construção do túnel de vento numérico, associam-se relaxações sucessivas e diferenças finitas para resolver as equações de Stokes 2.4 e Navier-Stokes 2.1. O método das relaxações sucessivas foi brevemente apresentado no apêndice A. Neste apêndice, apresentam-se as deduções das principais equações utilizadas na construção do túnel.

Considere o conjunto de pontos representado na figura 34.

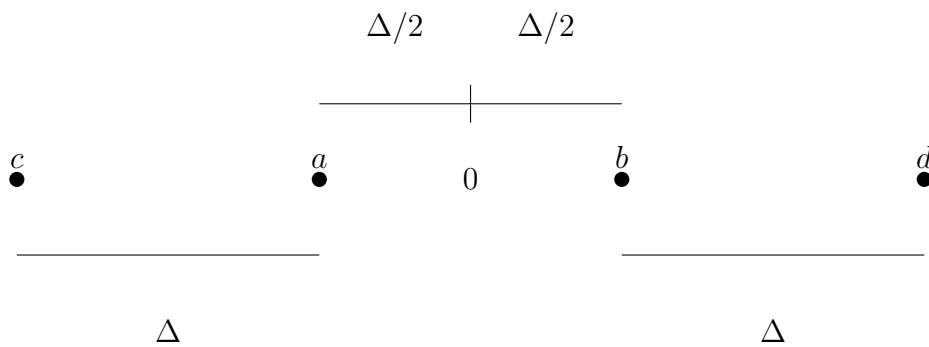


Figura 34 – Pontos vizinhos em uma rede discreta. Os pontos distam  $\Delta$  um do outro. 0 demarca a posição em torno da qual as funções são expandidas em série de Taylor.

O valor de uma função  $f$  nos pontos  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , e  $d$  é respectivamente,  $f_a$ ,  $f_b$ ,  $f_c$  e  $f_d$ . No método das diferenças finitas, derivadas são aproximadas por diferenças finitas por meio da expansão em série de Taylor da função derivada. A expansão das funções  $f_a$ ,  $f_b$ ,  $f_c$  e  $f_d$  em série de Taylor em torno da posição 0 fornece:

$$f_c = f_0 + \frac{\partial f_0}{\partial x}(-3\Delta/2) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2}(-3\Delta/2)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f_0}{\partial x^3}(-3\Delta/2)^3 + \dots, \quad (\text{B.1})$$

$$f_a = f_0 + \frac{\partial f_0}{\partial x}(-\Delta/2) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2}(-\Delta/2)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f_0}{\partial x^3}(-\Delta/2)^3 + \dots, \quad (\text{B.2})$$

$$f_b = f_0 + \frac{\partial f_0}{\partial x}(\Delta/2) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2}(\Delta/2)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f_0}{\partial x^3}(\Delta/2)^3 + \dots, \quad (\text{B.3})$$

$$f_d = f_0 + \frac{\partial f_0}{\partial x}(3\Delta/2) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2}(3\Delta/2)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f_0}{\partial x^3}(3\Delta/2)^3 + \dots \quad (\text{B.4})$$

Somando-se B.1 e B.4, inicialmente, e, B.2 e B.3 em seguida, obtém-se respectivamente que

$$f_d + f_c = 2f_0 + \frac{9}{4} \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} \Delta^2 + O(\Delta^4) \quad (\text{B.5})$$

e

$$f_b + f_a = 2f_0 + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 f_0}{\partial x^2} \Delta^2 + O(\Delta^4) \quad (\text{B.6})$$

Multiplicando-se B.6 por 9 e subtraindo B.5 do resultado obtém-se que

$$9(f_b + f_a) - (f_c + f_d) = 16f_0 + O(\Delta^4), \quad (\text{B.7})$$

donde segue que

$$f_0 = \frac{9(f_b + f_a) - (f_c + f_d)}{16} + O(\Delta^4). \quad (\text{B.8})$$

Deste modo, é possível expressar o valor de uma função em uma posição qualquer em termos dos valores desta função nos pontos da vizinhança desta posição com uma precisão mais do que suficiente para o caso em consideração.

Ademais, subtraindo-se B.2 de B.3 obtém-se que

$$\frac{\partial f_0}{\partial x} = \frac{f_b - f_a}{\Delta} + O(\Delta^2). \quad (\text{B.9})$$

Esta equação permite que se expresse o valor da derivada de uma função em uma posição qualquer em termos dos valores da função nos pontos da vizinhança desta posição com uma precisão também suficiente para o caso em consideração. Nas subseções seguintes, utiliza-se B.8 e B.9 para deduzir as principais equações utilizadas na construção do túnel.

### B.0.1 Dedução da equação 2.8

Inicialmente, combina-se B.8 e B.9 para, a partir de uma configuração conhecida do campo de velocidades, determinar o campo de vorticidades. Considere o conjunto de pontos representado na figura 35. A vorticidade na posição 0 é

$$\vec{\Omega}_0 = \vec{\nabla} \times \vec{v}_0 = \left( \frac{\partial v_{y0}}{\partial x} - \frac{\partial v_{x0}}{\partial y} \right) \hat{k} \Leftrightarrow \Omega_0 = \left( \frac{\partial v_{y0}}{\partial x} - \frac{\partial v_{x0}}{\partial y} \right), \quad (\text{B.10})$$

pois o campo de velocidades é, no caso em consideração, bidimensional e, conseqüentemente, o campo de vorticidades é escalar. Porém, usando B.9 segue que

$$\Omega_0 = \left( \frac{\partial v_{y0}}{\partial x} - \frac{\partial v_{x0}}{\partial y} \right) = \left( \frac{v_{y3} - v_{y1}}{\Delta} - \frac{v_{x2} - v_{x4}}{\Delta} \right) + O(\Delta^2). \quad (\text{B.11})$$

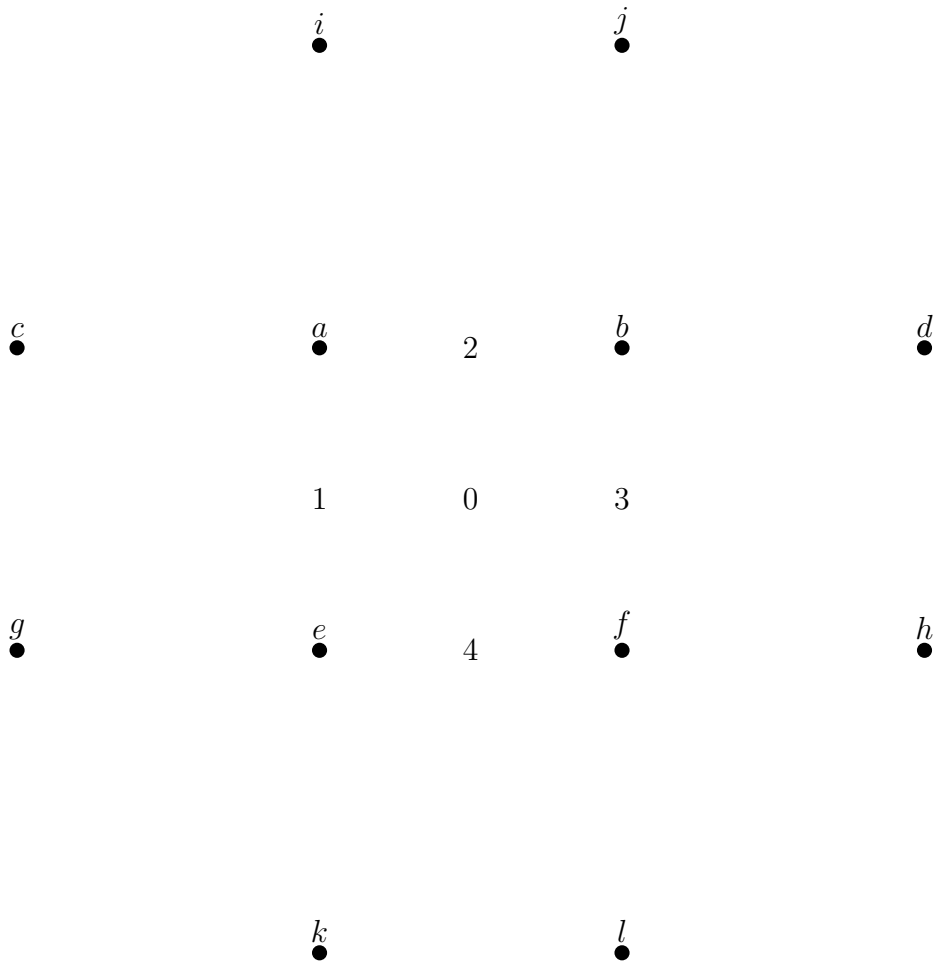


Figura 35 – Pontos vizinhos em uma rede discreta. As letras  $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k$  e  $l$  rotulam pontos na rede das velocidades. 1, 2, 3, 4 demarcam posições onde são calculadas velocidades. 0 demarca a posição onde calcula-se a vorticidade.

Mas, por B.8, tem-se que

$$v_{y3} = \frac{9(v_{yb} + v_{yf}) - (v_{yj} + v_{yl})}{16} + O(\Delta^4), \quad (\text{B.12})$$

$$v_{y1} = \frac{9(v_{ya} + v_{ye}) - (v_{yi} + v_{yk})}{16} + O(\Delta^4), \quad (\text{B.13})$$

$$v_{x2} = \frac{9(v_{xa} + v_{xb}) - (v_{xc} + v_{xd})}{16} + O(\Delta^4), \quad (\text{B.14})$$

$$v_{x4} = \frac{9(v_{xe} + v_{xf}) - (v_{xg} + v_{xh})}{16} + O(\Delta^4). \quad (\text{B.15})$$

Substituindo as equações anteriores em B.11 obtém-se que

$$\begin{aligned} \Omega_0 = \frac{1}{16\Delta} [ & 9(-v_{xa} - v_{xb} + v_{xe} + v_{xf} - v_{ya} + v_{yb} - v_{ye} + v_{yf}) \\ & + v_{xc} + v_{xd} - v_{xg} - v_{xh} + v_{yi} + v_{yk} - v_{yj} - v_{yl}] + O(\Delta^2), \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

exatamente a equação 2.8.

### B.0.2 Dedução das equações 2.6 e 2.7

Analogamente, é necessário, a partir de uma configuração conhecida do campo de vorticidades, obter o campo de velocidades. Considere o conjunto de pontos representado na figura 36.

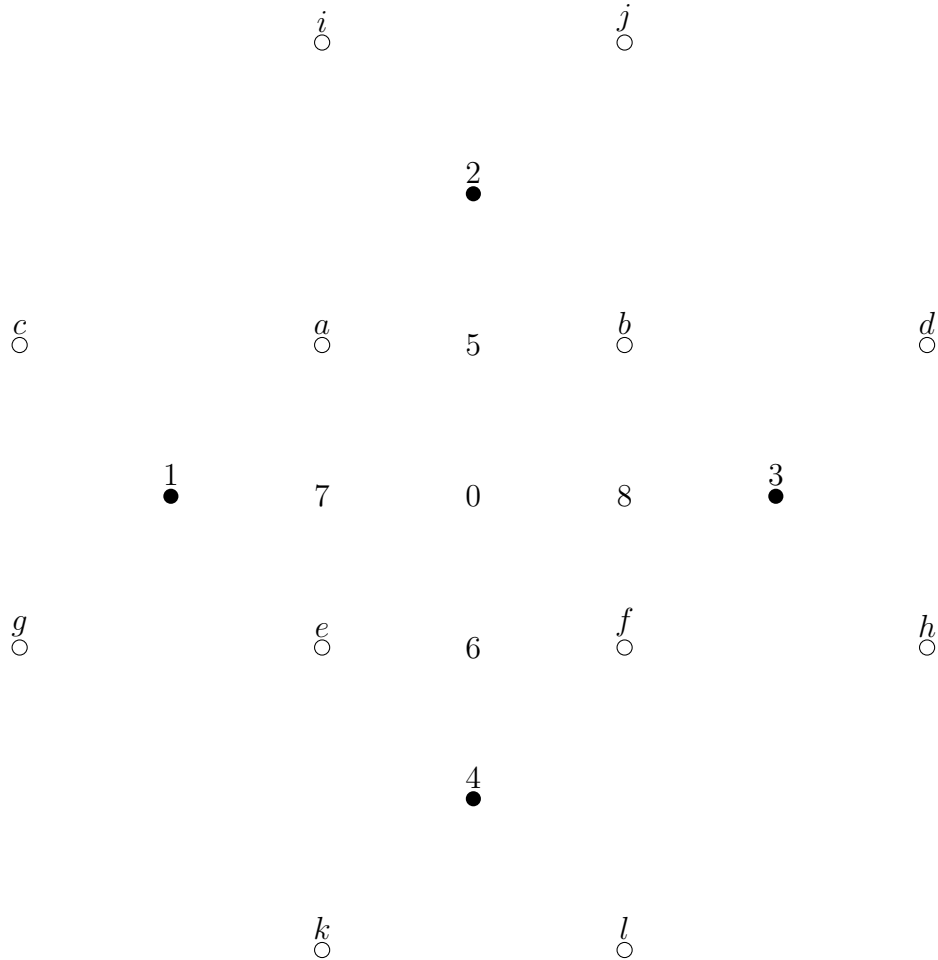


Figura 36 – Pontos vizinhos em duas redes discretas. As letras  $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k$  e  $l$  rotulam pontos na rede das vorticidades. Os números  $1, 2, 3, 4$  rotulam pontos na rede das velocidades.  $5, 6, 7$  e  $8$  demarcam posições onde são calculadas vorticidades.  $0$  demarca a posição onde calcula-se a velocidade.

Novamente, lembrando que no caso em consideração a vorticidade é um campo escalar e derivando B.10 em relação a  $x$ , obtém-se que

$$\frac{\partial \Omega_0}{\partial x} = \left( \frac{\partial^2 v_{y0}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v_{x0}}{\partial x \partial y} \right). \quad (\text{B.17})$$

Mas, pela equação de continuidade segue que

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{\partial v_x}{\partial x} \Leftrightarrow \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial y}. \quad (\text{B.18})$$



Substituindo-se B.18 em B.17, obtém-se finalmente que

$$\frac{\partial \Omega_0}{\partial x} = \left( \frac{\partial^2 v_{y0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{y0}}{\partial y^2} \right). \quad (\text{B.19})$$

Da mesma forma, é possível mostrar que

$$-\frac{\partial \Omega_0}{\partial y} = \left( \frac{\partial^2 v_{x0}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_{x0}}{\partial y^2} \right). \quad (\text{B.20})$$

Mas, expandindo-se as velocidades em 1, 2, 3 e 4 em torno de 0 obtém-se:

$$v_3 = v_0 + \frac{\partial v_0}{\partial x}(\Delta) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}(\Delta)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3}(\Delta)^3 + \dots, \quad (\text{B.21})$$

$$v_1 = v_0 + \frac{\partial v_0}{\partial x}(-\Delta) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}(-\Delta)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 v_0}{\partial x^3}(-\Delta)^3 + \dots, \quad (\text{B.22})$$

$$v_2 = v_0 + \frac{\partial v_0}{\partial y}(\Delta) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}(\Delta)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3}(\Delta)^3 + \dots, \quad (\text{B.23})$$

$$v_4 = v_0 + \frac{\partial v_0}{\partial y}(-\Delta) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2}(-\Delta)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 v_0}{\partial y^3}(-\Delta)^3 + \dots \quad (\text{B.24})$$

Somando-se as equações B.21, B.22, B.23 e B.24, obtém-se que

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} = \frac{1}{\Delta^2} (v_1 + v_2 + v_3 + v_4 - 4v_0) + O(\Delta^2), \quad (\text{B.25})$$

que é válida tanto para a componente na direção  $X$  como para a componente na direção  $Y$ . Substituindo-se B.25 em B.19 e B.20 obtém-se que

$$\frac{\partial \Omega_0}{\partial x} = \frac{1}{\Delta^2} (v_{y1} + v_{y2} + v_{y3} + v_{y4} - 4v_{y0}) + O(\Delta^2) \quad (\text{B.26})$$

e

$$-\frac{\partial \Omega_0}{\partial y} = \frac{1}{\Delta^2} (v_{x1} + v_{x2} + v_{x3} + v_{x4} - 4v_{x0}) + O(\Delta^2). \quad (\text{B.27})$$

Ademais, expandindo-se as vorticidades em 5, 6, 7 e 8 em torno 0 obtém-se:

$$\Omega_8 = \Omega_0 + \frac{\partial \Omega_0}{\partial x}(\Delta/2) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial x^2}(\Delta/2)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \Omega_0}{\partial x^3}(\Delta/2)^3 + \dots, \quad (\text{B.28})$$

$$\Omega_7 = \Omega_0 + \frac{\partial \Omega_0}{\partial x}(-\Delta/2) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial x^2}(-\Delta/2)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \Omega_0}{\partial x^3}(-\Delta/2)^3 + \dots, \quad (\text{B.29})$$

$$\Omega_5 = \Omega_0 + \frac{\partial \Omega_0}{\partial y}(\Delta/2) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial y^2}(\Delta/2)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \Omega_0}{\partial y^3}(\Delta/2)^3 + \dots, \quad (\text{B.30})$$

$$\Omega_6 = \Omega_0 + \frac{\partial \Omega_0}{\partial y}(-\Delta/2) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial y^2}(-\Delta/2)^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \Omega_0}{\partial y^3}(-\Delta/2)^3 + \dots \quad (\text{B.31})$$

Subtraindo B.29 de B.28 e B.31 de B.30 obtém-se, respectivamente, que

$$\frac{\partial \Omega_0}{\partial x} = \frac{1}{\Delta}(\Omega_8 - \Omega_7) + O(\Delta^2) \quad e \quad \frac{\partial \Omega_0}{\partial y} = \frac{1}{\Delta}(\Omega_5 - \Omega_6) + O(\Delta^2). \quad (\text{B.32})$$

Mas, por B.7, segue que

$$\Omega_7 = \frac{9(\Omega_a + \Omega_e) - \Omega_k - \Omega_i}{16} + O(\Delta^4), \quad (\text{B.33})$$

$$\Omega_8 = \frac{9(\Omega_b + \Omega_f) - \Omega_j - \Omega_l}{16} + O(\Delta^4), \quad (\text{B.34})$$

$$\Omega_5 = \frac{9(\Omega_a + \Omega_b) - \Omega_d - \Omega_c}{16} + O(\Delta^4), \quad (\text{B.35})$$

$$\Omega_6 = \frac{9(\Omega_e + \Omega_f) - \Omega_h - \Omega_g}{16} + O(\Delta^4). \quad (\text{B.36})$$

Substituindo-se B.33, B.34, B.35 e B.36 em B.32 obtém-se que

$$\frac{\partial \Omega_0}{\partial x} = \frac{1}{\Delta} \left( \frac{9(\Omega_b + \Omega_f) - \Omega_j - \Omega_l}{16} - \frac{9(\Omega_a + \Omega_e) - \Omega_k - \Omega_i}{16} \right) + O(\Delta^2) \quad (\text{B.37})$$

e

$$\frac{\partial \Omega_0}{\partial y} = \frac{1}{\Delta} \left( \frac{9(\Omega_a + \Omega_b) - \Omega_d - \Omega_c}{16} - \frac{9(\Omega_e + \Omega_f) - \Omega_h - \Omega_g}{16} \right) + O(\Delta^2). \quad (\text{B.38})$$

donde segue que

$$\frac{\partial \Omega_0}{\partial x} = \frac{1}{16\Delta} (9(-\Omega_a + \Omega_b - \Omega_e + \Omega_f) + \Omega_i - \Omega_j + \Omega_k - \Omega_l) + O(\Delta^2) \quad (\text{B.39})$$

e

$$\frac{\partial \Omega_0}{\partial y} = \frac{1}{16\Delta} (9(+\Omega_a + \Omega_b - \Omega_e - \Omega_f) - \Omega_c - \Omega_d + \Omega_g + \Omega_h) + O(\Delta^2). \quad (\text{B.40})$$

Substituindo-se B.39 em B.26 e B.40 em B.27 tem-se que

$$\frac{1}{\Delta^2} (v_{y1} + v_{y2} + v_{y3} + v_{y4} - 4v_{y0}) = \frac{1}{16\Delta} (9(-\Omega_a + \Omega_b - \Omega_e + \Omega_f) + \Omega_i - \Omega_j + \Omega_k - \Omega_l) + O(\Delta^2) \quad (\text{B.41})$$

e

$$\frac{1}{\Delta^2} (v_{x1} + v_{x2} + v_{x3} + v_{x4} - 4v_{x0}) = \frac{1}{16\Delta} (9(-\Omega_a - \Omega_b + \Omega_e + \Omega_f) + \Omega_c + \Omega_d - \Omega_g - \Omega_h) + O(\Delta^2). \quad (\text{B.42})$$

Finalmente, resolvendo-se as duas expressões anteriores para  $v_{y0}$  e  $v_{x0}$  obtém-se:

$$v_{y0} = \frac{v_{y1} + v_{y2} + v_{y3} + v_{y4}}{4} - \frac{\Delta}{64} (9(-\Omega_a + \Omega_b - \Omega_e + \Omega_f) + \Omega_i - \Omega_j + \Omega_k - \Omega_l) + O(\Delta^2) \quad (\text{B.43})$$

e

$$v_{x0} = \frac{v_{x1} + v_{x2} + v_{x3} + v_{x4}}{4} - \frac{\Delta}{64} (9(-\Omega_a - \Omega_b + \Omega_e + \Omega_f) + \Omega_c + \Omega_d - \Omega_g - \Omega_h) + O(\Delta^2), \quad (\text{B.44})$$

exatamente, as equações 2.6 e 2.7.

### B.0.3 Dedução da equação 2.9

Finalmente, deriva-se a versão discreta da equação de Navier-Stokes 2.1. Considere o conjunto de pontos representado na figura 37.

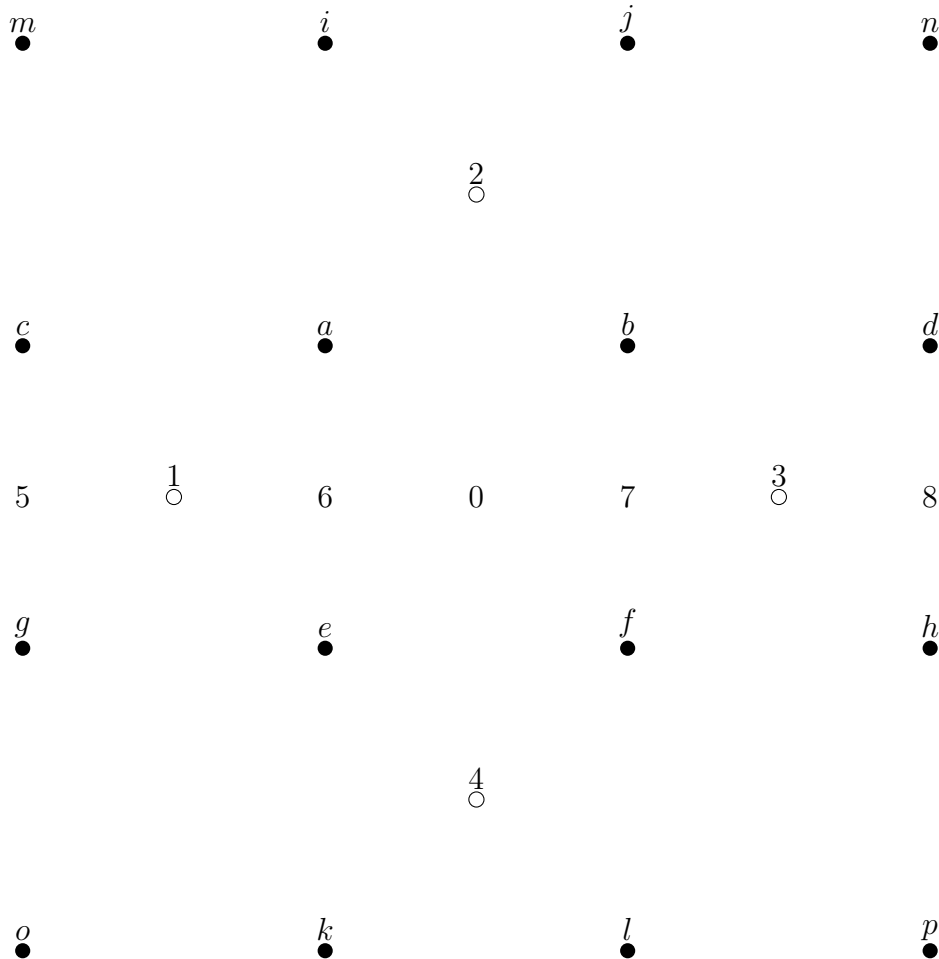


Figura 37 – Pontos vizinhos em duas redes discretas. As letras  $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k$  e  $l$  rotulam pontos na rede das velocidades. Os números 1, 2, 3 e 4 rotulam pontos na rede das vorticidades. 5, 6, 7, 8 demarcam posições onde são calculadas velocidades. 0 demarca a posição onde deseja-se calcular tanto a velocidade como a vorticidade.

Reconsidere a equação de Navier-Stokes calculada na posição 0:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Omega_0}{\partial t} &= \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{\Omega}_0 - \vec{\nabla} \times (\vec{\Omega}_0 \times \vec{v}_0) \leftrightarrow \\
 \frac{\partial \Omega_0}{\partial t} &= \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial y^2} \right) - v_{x0} \frac{\partial \Omega_0}{\partial x} - v_{y0} \frac{\partial \Omega_0}{\partial y} \leftrightarrow \\
 \frac{\partial \Omega_0}{\partial t} &= \frac{1}{Re \Delta^2} (\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4 - 4\Omega_0) - v_{x0} \frac{\partial \Omega_0}{\partial x} - v_{y0} \frac{\partial \Omega_0}{\partial y}, \quad (B.45)
 \end{aligned}$$

em que se fez

$$\left(\frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega_0}{\partial y^2}\right) = \frac{1}{\Delta^2}(\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4 - 4\Omega_0) + O(\Delta^2). \quad (\text{B.46})$$

É preciso então expressar os termos  $v_{x0}\partial\Omega_0/\partial x$  e  $v_{y0}\partial\Omega_0/\partial y$  em função dos valores das vorticidades e velocidades nos pontos na vizinhança de 0. Usa-se B.9 para fazer

$$\frac{\partial\Omega_0}{\partial x} = \frac{\Omega_3 - \Omega_1}{2\Delta} + O(\Delta^2) \quad e \quad \frac{\partial\Omega_0}{\partial y} = \frac{\Omega_2 - \Omega_4}{2\Delta} + O(\Delta^2), \quad (\text{B.47})$$

enquanto as expressões  $v_{x0}$  e  $v_{y0}$  são determinadas da seguinte forma: usa-se B.8 para expressar a velocidade na posição 5,  $v_5$ , em termos das velocidades nos pontos  $c$ ,  $g$ ,  $m$  e  $o$ . Faz-se o mesmo com as velocidades nos pontos 6, 7 e 8. Em seguida, usa-se novamente B.8 para expressar a velocidade em 0 em termos de  $v_5, v_6, v_7$  e  $v_8$ . Segue então que

$$v_0 = \frac{1}{256}[81(v_a + v_b + v_e + v_f) - 9(v_c + v_d + v_g + v_h + v_i + v_j + v_k + v_l) + (v_m + v_n + v_o + v_p)] + O(\Delta^4), \quad (\text{B.48})$$

que é válida tanto para a componente na direção  $X$  como para a componente na direção  $Y$ . Substituindo B.48 e B.47 em B.45 obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Omega_0}{\partial t} = & \frac{1}{Re\Delta^2}(\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \Omega_4 - 4\Omega_0) \\ & - \frac{\Omega_3 - \Omega_1}{512\Delta}[81(v_{xa} + v_{xb} + v_{xe} + v_{xf}) \\ & - 9(v_{xc} + v_{xd} + v_{xg} + v_{xh} + v_{xi} + v_{xj} + v_{xk} + v_{xl}) \\ & + (v_{xm} + v_{xn} + v_{xo} + v_{xp})] \\ & - \frac{\Omega_2 - \Omega_4}{512\Delta}[81(v_{ya} + v_{yb} + v_{ye} + v_{yf}) \\ & - 9(v_{yc} + v_{yd} + v_{yg} + v_{yh} + v_{yi} + v_{yj} + v_{yk} + v_{yl}) \\ & + (v_{ym} + v_{yn} + v_{yo} + v_{yp})] + O(\Delta^2), \end{aligned} \quad (\text{B.49})$$

exatamente a equação 2.9.