



Universidade Federal Fluminense
Instituto de Física

Tiago Ribeiro da Silva Santos

**Renormalizabilidade em teorias com violação de Lorentz:
eletrodinâmica quântica e teoria de Yang-Mills**

Niterói

2016

Tiago Ribeiro da Silva Santos

**Renormalizabilidade em teorias com violação de Lorentz: eletrodinâmica
quântica e teoria de Yang-Mills**

Tese apresentada, como requisito parcial
para obtenção do título de Doutor, ao Pro-
grama de Pós-Graduação em Física, da Uni-
versidade Federal Fluminense.



INSTITUTO DE FÍSICA
Universidade Federal Fluminense

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Ferreira Sobreiro

Niterói

2016

S237 Santos, Tiago Ribeiro da Silva.

Renormalizabilidade em teorias com violação de Lorentz :
eletrodinâmica quântica e teoria de Yang-Mills / Tiago Ribeiro
da Silva Santos ; orientador: Rodrigo Ferreira Sobreiro. --
Niterói, 2016.

171 p. : il.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal Fluminense,
Instituto de Física, Niterói, 2016.

Bibliografia: p. 158-171.

1.VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ. 2.SIMETRIA DE BRST.
3.RENORMALIZABILIDADE. 4.UNITARIEDADE. I. Sobreiro, Rodrigo
Ferreira, Orientador. II.Universidade Federal Fluminense.
Instituto de Física, Instituição responsável. III.Título.

CDD 530.1435

DEDICATÓRIA

Aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

A Deus, o Alfa e o Ômega, o Princípio e o Fim, aquele que é, que era, e que vem, o Todo-Poderoso.

À minha família, por seu amor e suas orações.

Ao meu orientador Rodrigo Sobreiro (-E aí, progressos?!), por aceitar orientar um estranho que bateu em sua porta do nada procurando sua orientação: não só por estar preocupado com o andamento da pesquisa, mas também por propiciar desde logo a independência científica.

Ao colega Anderson Tomaz (-E aí, café?!), pelas discussões acirradas. Mas sinto dizer, Anderson, que suas ideias tinham existência, mas não essência. Brincadeira! Agradeço imensamente sua ajuda no estudo da causalidade e unitariedade.

Ao colega Antônio Duarte (-E aí, como é que vai essa força?!). Pelo seu grande estímulo; sempre com ótimas ideias e discussões. Este tem magnanimidade científica.

Ao colega Guilherme Sadoski (-Mas isso não é fundamental!). Nossos embates foram acirrados. Um conselho: boa sorte com a Teoria Fundamental! Mas cuidado com os conselheiros, dizia Sertillanges!

Ao Instituto de Física, e toda sua equipe que propiciou minha estadia nessa casa.

À PROPI, Capes e CNPq pelo suporte financeiro.

“Ora et labora.”

São Bento

*“The endless cycle of idea and action,
Endless invention, endless experiment,
Brings knowledge of motion, but not of stillness;
Knowledge of speech, but not of silence;
Knowledge of words, and ignorance of the Word.
All our knowledge brings us nearer to death,
But nearness to death no nearer to God.
Where is the Life we have lost in living?
Where is the wisdom we have lost in knowledge?
Where is the knowledge we have lost in information?
The cycles of Heaven in twenty centuries
Brings us farther from God and nearer to the Dust.”*

T. S. Eliot

RESUMO

SANTOS, T. R. S. *Renormalizabilidade em teorias com violação de Lorentz: eletrodinâmica quântica e teoria de Yang-Mills*. 2016. 171 f. Tese (Doutorado em Física) – Instituto de Física, Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2016.

Esta tese é devotada a aspectos teóricos de modelos que violam a simetria de Lorentz; abrangendo a eletrodinâmica quântica e a Teoria de Yang-Mills pura com violação das simetrias de Lorentz e de CPT. Concentramo-nos na análise da renormalizabilidade desses modelos. Na eletrodinâmica quântica analisamos a renormalização a 1-laço por meio de métodos analíticos, *i.e.*, cálculos explícitos dos diagramas de Feynman, onde aplicamos a regularização dimensional junto com a prescrição de subtração \overline{MS} para subtrair divergências ultravioletas que surgem na função vértice, e discutimos ainda o problema da geração do termo tipo Chern-Simons. No intuito de estender a análise da renormalizabilidade em todas as ordens em teoria de perturbações, abrangendo problemas como estabilidade quântica e anomalias de calibre –, e rediscutir a indução radiativa do termo tipo Chern-Simons – empregamos a quantização de BRST e a abordagem de renormalização algébrica, um método independente do esquema de renormalização. Além disso, é empregado o método de Symanzik como controlador das quebras das simetrias de Lorentz e de CPT. A análise da renormalizabilidade da Teoria de Yang-Mills pura é feita por meio desses mesmos métodos. Devido à geração de termos de massa para os campos de calibre não-abelianos, uma consequência da exigência da estabilidade quântica, provenientes de coeficientes de violação de Lorentz, analisamos ainda o espectro físico do propagador dos campos de calibre não-abelianos, abrangendo o estudo da causalidade e unitariedade desse setor.

Palavras-chave: Violação da simetria de Lorentz. Simetria de BRST.
Renormalizabilidade. Unitariedade.

ABSTRACT

SANTOS, T. R. S. *Renormalizability in Lorentz-violating theories: quantum electrodynamics and Yang-Mills theory*. 2016. 171 f. Tese (Doutorado em Física) – Instituto de Física, Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2016.

This thesis is devoted to theoretical aspects of Lorentz-violating models; covering quantum electrodynamics and pure Yang-Mills theory with violation of Lorentz and CPT symmetries. We focus in the analysis of the renormalizability of these models. In the quantum electrodynamics, we analyse the renormalization to 1-loop through analytical methods, *i.e.*, explicit computation of the Feynman diagrams, and we apply the dimensional regularization together with the \overline{MS} prescription in order to subtract ultraviolet divergences that rise in the vertex function, and we still discuss the problem of Chern-Simons like term generation. In order to extend the renormalizability analysis to all orders in perturbation theory, covering issues like quantum stability and gauge anomalies – and rediscuss the Chern-Simons like term generation –, we employ the BRST quantization and the algebraic renormalization technique, a renormalization independent method. Moreover, it is employed the Symanzik method as a controller of Lorentz and CPT breakings. The analysis of the renormalizability of pure Yang-Mills theory is performed via same methods. Due to the generation of mass terms for the non-Abelian gauge fields, a consequence of the exigency of the quantum stability, from Lorentz breakings coefficients, we analyse the physical spectrum of the non-Abelian gauge field propagator, taking into account issues like causality and unitarity.

Keywords: Lorentz symmetry violation. BRST symmetry. Renormalizability. Unitarity.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Função de Green de dois pontos.	23
Figura 2 - Função de Green de três pontos.	23
Figura 3 - Transformação de Lorentz de Observador.	41
Figura 4 - Transformação de Lorentz de Partícula.	42
Figura 5 - Gráficos a 1-laço na EDQ usual.	55
Figura 6 - Polarização do vácuo na EDQ estendida.	55
Figura 7 - Autoenergia do elétron na EDQ estendida.	55
Figura 8 - Vértice elétron-fóton na EDQ estendida.	56
Figura 9 - Tri-vértice do fóton na EDQ estendida.	99

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Números quânticos dos campos.	69
Tabela 2 - Números quânticos dos tensores de fundo.	69
Tabela 3 - Números quânticos das fontes.	73
Tabela 4 - Números quânticos das fontes.	105
Tabela 5 - Tabela multiplicativa satisfeita por θ , ω , S , Σ e Λ . O produto obedece a ordem “linha vezes coluna”.	120
Tabela 6 - Mapa discreto das fontes.	145
Tabela 7 - Mapa discreto dos campos.	146
Tabela 8 - Mapa discreto dos bilineares de Dirac.	146

SUMÁRIO

	INTRODUÇÃO	11
1	UNITARIEDADE E RENORMALIZABILIDADE EM TQC	17
1.1	A matriz S e a fórmula de redução de LSZ	17
1.2	Funcionais geradores das funções de Green	20
1.3	Renormalização	24
1.3.1	<u>Regularização</u>	28
1.3.2	<u>Prescrição de renormalização</u>	29
1.4	Renormalização algébrica: seus fundamentos	32
1.4.1	<u>Operadores compostos</u>	33
1.4.2	<u>Princípio de Ação Quântica</u>	34
1.4.3	<u>Cohomologia</u>	39
2	MODELO PADRÃO ESTENDIDO	40
2.1	O MPE e a violação da simetria de Lorentz	40
2.1.1	<u>Transformação de Lorentz de observador</u>	41
2.1.2	<u>Transformação de Lorentz de partícula</u>	42
2.1.3	<u>Violação da simetria de Lorentz</u>	43
2.2	O MPE mínimo	46
2.2.1	<u>Estabilidade, causalidade e unitariedade</u>	46
2.2.2	<u>Renormalizabilidade</u>	48
3	EDQ COM VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ	50
3.1	Eletrodinâmica com violação da simetria de Lorentz	50
3.2	Renormalização a 1-laço	52
3.3	Sobre a geração do termo tipo Chern-Simons	62
3.4	Prescrição de regularização e ambiguidades a 1-laço: discussão	64
4	RENORMALIZABILIDADE DA EDQ ESTENDIDA EM TODAS AS ORDENS	67
4.1	Quantização de BRST da eletrodinâmica com violação da simetria de Lorentz	67
4.1.1	<u>Identidades de Ward</u>	74
4.2	Estabilidade quântica	75
4.3	Discussão	81
5	ANOMALIAS DE CALIBRE NA EDQ ESTENDIDA	85
5.1	Anomalias de calibre e renormalizabilidade	85
5.1.1	<u>Interlúdio: sobre o conceito de anomalia</u>	86
5.1.2	<u>Cohomologia e anomalia</u>	89
5.2	Identidades de Ward anômalas	91

5.3	Operador de Slavnov-Taylor anômalo	94
5.4	Discussão	98
6	RENORMALIZABILIDADE DA TEORIA DE YANG-MILLS COM VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ	102
6.1	Teoria de Yang-Mills com violação da simetria de Lorentz	102
6.2	Quantização de BRST e a restauração da simetria de Lorentz . .	103
6.3	Renormalizabilidade	109
6.3.1	<u>Identities de Ward</u>	109
6.3.2	<u>Contratermo mais geral</u>	109
6.3.3	<u>Estabilidade quântica da teoria de Yang-Mills com violação de Lorentz</u> . .	112
6.4	Discussão: renormalizabilidade e anomalias de calibre	116
7	ESPECTRO DO CAMPO DE CALIBRE NA TEORIA DE YANG- MILLS MASSIVA COM VIOLAÇÃO DE LORENTZ	118
7.1	Termos de massa e a quantização de BRST	118
7.2	Causalidade e estados físicos	121
7.2.1	<u>Caso tipo espaço</u>	122
7.2.1.1	Parte I: Casos especiais	125
7.2.1.2	Parte II: Caso geral	130
7.2.2	<u>Caso tipo tempo</u>	132
7.3	Discutindo causalidade e a existência de estados físicos	137
	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	139
	APÊNDICE A – Notações e convenções	142
	APÊNDICE B – Interlúdio matemático	143
	APÊNDICE C – Simetrias discretas	144
	APÊNDICE D – Alguns resultados em regularização dimensional	150
	APÊNDICE E – Termos de vácuo: EDQ estendida	153
	APÊNDICE F – Renormalização alternativa dos parâmetros	156
	APÊNDICE G – Alguns resultados completos	157
	REFERÊNCIAS	158

INTRODUÇÃO

Atualmente, o melhor formalismo conhecido que descreve sistemas de partículas em interação a altas energias é o formalismo de Teoria Quântica de Campos (TQC). A TQC concilia os princípios da Mecânica Quântica com os princípios da Relatividade Especial. Contudo, até agora, não se tem uma descrição totalmente consistente da Relatividade Geral dentro dos princípios da Mecânica Quântica. Não obstante, três das quatro interações fundamentais, *i.e.*, eletromagnética, força nuclear fraca e força nuclear forte, são descritas por teorias quânticas de campos – mais especificamente, teorias de calibre. O Modelo Padrão (MP) da Física de partículas dá uma descrição unificada [1, 2] dessas três interações: a unificação é codificada na simetria sob o grupo de calibre¹ $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$. De fato, o Modelo Eletrofraco [3, 4], referente ao setor $SU(2)_L \times U(1)_Y$, incorpora as interações eletromagnética e fraca. (A Eletrodinâmica Quântica [5, 6, 7] refere-se ao setor $U(1)_{em}$ do modelo prévio, *i.e.*, quando a simetria é quebrada espontaneamente.) A Cromodinâmica Quântica (CDQ) [8, 9], relacionada ao grupo $SU(3)_c$, descreve as interações fortes. Ainda, desde que esse modelo é construído sobre uma variedade minkowskina 4-dimensional, *i.e.*, $M^{(1,3)}$, a simetria sob o grupo de Poincaré é de fundamental importância.

Basicamente, a simetria sob o grupo de Poincaré diz que as leis da Física devem ser invariantes sob translações no espaço-tempo e rotações no espaço-tempo (ou transformações de Lorentz). Estas nos dizem que os resultados experimentais são independentes da orientação do laboratório, *i.e.*, invariância por rotação, e independente da velocidade no espaço, *i.e.*, *boosts*. Aquelas nos dizem que um experimento deve levar à mesma física se for realizado em um ponto do espaço x ou x' e também em um instante de tempo t ou t' . De fato, isto é bem estabelecido através dos princípios da Relatividade Especial [10]; que são:

- Princípio da relatividade;
- Princípio da constância da velocidade da luz.

O primeiro princípio já era bem conhecido e estabelecido por Galileu, sobre o qual estava estabelecida a mecânica newtoniana, ou seja, que as leis da Física são independentes de velocidade, orientação do experimento e translação temporal. Em linguagem de simetria: a mecânica newtoniana é invariante sob transformações de Galileu. Contudo, como bem notado por Lorentz, as equações de Maxwell, que descrevem os fenômenos eletromagnéticos,

¹ Os subscriptos nos grupos referem-se à carga de cor, c , quiralidade *left*, L , e hipercarga, Y .

não são invariantes sob transformações de Galileu. Na verdade, as equações de Maxwell são invariantes pelas chamadas transformações de Lorentz. No entanto, foi através de Einstein que as transformações de Lorentz passaram a ter um profundo significado físico. De fato, o *princípio da relatividade* segundo Einstein estabelece que as leis físicas devem ser covariantes sob um conjunto de transformações entre referenciais inerciais. O segundo princípio estabelecido por Einstein clama que a velocidade da luz é a mesma em todos os referenciais inerciais². Através desses dois princípios as transformações de Lorentz podem ser derivadas de uma forma sistemática. Entretanto, o sucesso da Relatividade Especial não reside necessariamente somente nesse fato, mas na profunda mudança do nosso entendimento sobre espaço e tempo, bem como nosso entendimento sobre energia. De fato, neste cenário, espaço e tempo não são conceitos absolutos, mas são unificados no conceito de espaço-tempo, onde o que é invariante agora é um elemento de linha em um espaço de Minkowski.

Note, contudo, que a covariância das leis físicas estabelecida pela Relatividade Especial diz respeito somente a referenciais inerciais. No intuito de generalizar esse conceito para referenciais não-inerciais [11], Einstein postulou o princípio da equivalência, que pode ser melhor entendido através de dois princípios:

- *Princípio de equivalência fraco*: igualdade entre massa inercial m_i (que aparece na segunda lei de Newton) e massa gravitacional m_g (que aparece na lei da gravitação universal de Newton), $m_i = m_g$.
- *Princípio de equivalência forte*: é impossível distinguir um referencial não-inercial de um campo gravitacional local. Ou em uma linguagem mais formal: o espaço-tempo é uma variedade riemanniana e localmente é Minkowski. Ainda é válido o princípio da equivalência fraco.

Basicamente este último princípio estabelece que as leis da Física são covariantes sob transformações gerais de coordenadas ou difeomorfismos. Em suma, aqui a gravidade ganha um conceito geométrico. Ainda, as transformações de Lorentz são válidas somente localmente.

A partir dos conceitos mencionados acima, vemos o profundo papel das simetrias para a Física. De maneira informal, entendemos por simetria a propriedade de um sistema permanecer invariante quando é aplicada alguma transformação sobre ele. Do ponto de vista matemático, podemos relacionar essa transformação a algum operador. De fato, sob um ponto de vista formal – deste que estudaremos aqui teorias de campo – podemos considerar um campo como uma função que mapeia uma variedade – por exemplo, o

² Este princípio pode ser apresentado de outra forma: existe uma velocidade limite de propagação de informação. Interessante que essa velocidade coincide com a velocidade da luz.

espaço de Minkowski – em um espaço vetorial; esta função pode ser suave, ou mesmo uma distribuição. Assim, fica natural pensar em operadores atuando nesse espaço vetorial.

A importância de simetrias tornou-se mais clara e profunda através do trabalho de Emmy Noether [12], que associa cada simetria contínua de um funcional – no nosso caso, da ação – a uma quantidade conservada. Deste modo, as simetrias passaram a desenvolver um papel importante na construção e seleção de modelos físicos. Por exemplo, a Teoria de Campos (TC) sobre um espaço de Minkowski é uma teoria construída sob a invariância do grupo de Poincaré. Enfatizando novamente, o grupo de Poincaré inclui translações no espaço-tempo (que levam à conservação do tensor energia-momento) e transformações de Lorentz – rotações (que levam à conservação do momento angular) e *boosts*. A conciliação dessa teoria com a mecânica quântica aparece quando as partículas, que nessa teoria são descritas por campos, são identificadas como estados no espaço de Fock que se transformam sob representações irredutíveis unitárias do grupo de Poincaré [13, 14]. Os estados de uma única partícula são completamente definidos pelos dois operadores de Casimir do grupo de Poincaré: um associado à massa e outro ao spin da partícula; ou helicidade dependendo se a partícula é massiva ou não. Também, além de estabelecer a estrutura causal de modelos físicos, a covariância de Lorentz limita a forma dos funcionais, construídos a partir dos campos e suas derivadas, à forma de escalares de Lorentz.

É importante enfatizar que, se considerarmos todas as possíveis transformações de Lorentz, existe um subconjunto de transformações que formam um grupo discreto, isto é, a paridade P , que é uma reflexão espacial, $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$, e a reversão temporal T , $t \rightarrow -t$. O operador associado à paridade é implementado de forma unitária, ao contrário da reversão temporal, que é uma operação antiunitária. Além dessas duas transformações discretas, há a operação de conjugação de carga C , também implementada unitariamente. Essa operação associa o estado de uma partícula, por exemplo, de carga $-q$, ao estado de sua antipartícula, de carga $+q$. Contudo, convém ressaltar que o mapa completo entre um estado de uma partícula para o estado de sua antipartícula é realizado pela operação completa de CPT. É importante mencionar que a EDQ, a CDQ e a Relatividade são simétricas sob as operações C , P e T individualmente, ao contrário do Modelo Eletrofraco que viola C e P separadamente, mas preserva CP e T . Não obstante, sabe-se que o MP preserva a simetria completa CPT. Isto pode ser entendido como uma consequência do Teorema CPT [15, 16, 17]:

- Uma TQC local invariante de Lorentz com um hamiltoniano hermitiano é invariante sob CPT.

Caso seja construída uma teoria que viole a simetria de Lorentz, nada se pode afirmar sobre a simetria de CPT. Em caso contrário há um teorema devido a Greenberg [18], que diz que:

- Se a invariância de CPT é violada em uma teoria quântica de campos interagente, então essa teoria também viola a simetria de Lorentz.

A partir desse teorema se conclui que caso seja observada a violação de CPT na Natureza, verifica-se também a violação da simetria de Lorentz.

Não menos importante no MP, a simetria de calibre, que é uma simetria no espaço interno dos campos, além limitar os tipos de interações entre os campos, tem um papel importante na prova da renormalizabilidade e unitariedade das teorias de calibre [19, 20, 21].

Apesar da importância das simetrias na Física, novos cenários surgem através da violação de simetrias. De fato, quantidades que usualmente são não observáveis devido a simetrias tornam-se observáveis quando violações de simetrias se manifestam. Para entendermos isso melhor, consideremos o seguinte exemplo: seja uma teoria de campos descrita por uma ação. Usualmente constrói-se uma ação com todo o conteúdo de simetria possível. Nesse caso, a violação de simetrias pode se manifestar de dois modos: (i) quebra explícita de simetria: a violação manifesta-se diretamente na ação; (ii) quebra espontânea de simetria: a ação é invariante, mas as soluções da teoria não, *i.e.*, o estado de vácuo da teoria não é mais invariante. Um exemplo dessa segunda situação é uma teoria de campos escalar, com um potencial tipo “chapéu mexicano”, e invariante sob uma simetria interna global de um grupo G . Neste caso, existe um mínimo não-trivial do potencial, *i.e.*, o vácuo da teoria. Contudo, embora o potencial seja invariante sob a ação de um elemento $g \in G$, o estado de vácuo não mais será invariante sob a ação de g . Diz-se, neste caso, que houve uma quebra espontânea de simetria. O ponto interessante é que o estado de vácuo é invariante sob um elemento g , se $g \in H$, onde H é um grupo de estabilidade. Neste caso, temos a propagação de $(\dim G - \dim H)$ bósons escalares de massa nula; os chamados bósons de Nambu-Goldstone [22, 23]. O teorema de Goldstone [24] assegura que para cada elemento da álgebra de Lie do grupo G que quebra a simetria do estado de vácuo, teremos um bóson de massa nula. Desde que a quebra de simetria é espontânea, sempre teremos pelo menos um bóson escalar de massa nula. Entretanto, no caso de simetria interna local, *i.e.*, simetria de calibre, o teorema de Goldstone deixa de ser válido, ou seja, não temos mais propagação de campos de massa nula. Neste caso entra em cena o mecanismo de Higgs [25, 26]. O mecanismo de quebra espontânea de simetria é de suma importância para a geração de massa dos bósons vetoriais no Modelo Eletrofraco [27, 28]. Neste caso a condensação do campo de Higgs é responsável por gerar massa para os férmions e bósons do setor eletrofraco do MP, onde o que seriam os modos de massa nula, são absorvidos como modos longitudinais dos bósons vetoriais massivos W^\pm e Z .

Não obstante, a observação de assimetrias ou simetrias aproximadas em uma determinada escala de energia pode dar indícios de uma física mais completa em escalas de energias maiores. Um exemplo é a quebra da simetria de sabor. De fato, através da

análise das massas de estados ligados de quarks – as chamadas excitações –, observa-se que essa simetria é uma simetria aproximada, e que deveria existir algum mecanismo que quebrasse essa simetria. Ainda, a violação da simetria quiral [29] e sua relação com o decaimento do pión neutro em dois fótons [30], $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$. Onde o pión é um estado ligado descrito por um par quark-antiquark. Interessante desse decaimento é que, a fim de que a previsão teórica para a constante de acoplamento desse decaimento coincidissem com os resultados experimentais, os quarks deveriam existir em $N = 3$ número de cores, *i.e.*, eles deveriam pertencer à representação fundamental de $SU(3)$. Na verdade esse é um dos poucos cálculos em CDQ que é realizado perturbativamente. Enfim, os exemplos de quebras de simetrias são inúmeros, e não nos estenderemos.

No entanto, é no contexto de quebra de simetria que está inserida esta tese. Especificamente, trataremos da quebra da simetria de Lorentz no MP proposta por Kostelecky e Colladay [31]. Tal quebra foi primeiramente observada teoricamente como uma possibilidade de quebra espontânea de simetria em teoria de cordas [32]. Basicamente, tal violação caracteriza-se pelo fato de o espaço-tempo ser (por hipótese) permeado por vetores de fundo constantes. Assim, é esperado que o comportamento dos campos usuais do MP, tanto do ponto de vista clássico como do ponto de vista quântico, seja afetado devido à presença de tais campos de fundo. Esta tese está dedicada à análise do MP, com foco em aspectos de renormalizabilidade e unitariedade, quando tal violação é levada em conta. Contudo, acreditamos ser mais conveniente dedicarmos um capítulo especial para explorarmos o conceito de violação da simetria de Lorentz acima descrito, e justificar se os aspectos a serem estudados nesta tese são de fato relevantes, do que tratá-lo na introdução.

Os temas abordados nesta tese serão apresentados da seguinte forma: no Cap. 1 apresentaremos uma abordagem geral sobre unitariedade e renormalizabilidade em TQC perturbativa. Analisando a condição de unitariedade sobre a função de Green de dois pontos advinda da condição de unitariedade da matriz S . Faremos uma exposição geral sobre funcionais geradores e os diferentes tipos de funções de Green. Apresentaremos também os fundamentos de teoria de renormalização: incluindo renormalização analítica e algébrica. Esses conceitos serão de suma importância nesta tese. No Cap. 2 discorreremos detalhadamente sobre o conceito de violação da simetria de Lorentz. Ademais, apresentamos as motivações de se estudar a violação da simetria de Lorentz. A eletrodinâmica quântica com violação da simetria de Lorentz é apresentada no Cap. 3, onde estudaremos sua renormalizabilidade a 1-laço. Aqui, verificaremos que esse modelo é renormalizável a 1-laço. No Cap. 4 analisamos a renormalizabilidade dessa teoria em todas as ordens em teoria de perturbações; com foco na análise da estabilidade quântica. De fato, tal propriedade é verificada em todas as ordens. O Cap. 5 é dedicado ao estudo das anomalias de calibre nessa teoria; é analisado se as identidades de Ward da teoria clássica se mantêm no nível quântico. Mostraremos claramente que a EDQ estendida é livre de anomalias de

calibre. O Cap. 6 é dedicado à análise da renormalizabilidade em todas as ordens da Teoria de Yang-Mills pura com violação da simetria de Lorentz. Embora tal estudo apresente sutilezas em comparação com o modelo abeliano, sua renormalizabilidade é verificada. No Cap. 7 é analisado a causalidade e a unitariedade da Teoria de Yang-Mills quando termos de massa são gerados devido a exigência da estabilidade quântica. Veremos que, sob certas condições, esse modelo é causal. Contudo, a análise da unitariedade realizada somente no setor dos campos de calibre, sem considerar os campos fantasmas, mostra a violação da unitariedade desse modelo. Convém ressaltar que, ao final de cada capítulo – especificamente, do Cap. 3 ao Cap. 7 – faremos uma discussão detalhada dos resultados obtidos no referido capítulo. No capítulo final apresentamos nossas conclusões e perspectivas, comparando, e enfatizando, todos os resultados obtidos nesta tese. Sugerimos o leitor ver inicialmente as notações aqui adotadas no Ap. A.

1 UNITARIEDADE E RENORMALIZABILIDADE EM TQC

Neste capítulo abordaremos alguns elementos fundamentais em TQC. Os assuntos aqui abordados podem ser consultados em livros-texto. Entretanto, acreditamos que é necessário enfatizar, embora sem muitos detalhes, alguns pontos importantes que serão usados nos capítulos mais técnicos desta tese. Além disso, alguns pontos que consideramos importantes serão abordados somente nos capítulos seguintes, a fim de não antecipar conceitos que mereçam mais destaque nos referidos capítulos. Aqui, nos concentraremos na definição dos elementos da matriz S , *i.e.*, a matriz de espalhamento. Em seguida, através da fórmula de redução de LSZ, explicitaremos a profunda relação entre os elementos da matriz S e as funções de Green. Assim, é necessária uma definição dessas funções. Na sequência, daremos a definição formal para o funcional gerador dessas funções, assim como a definição dos funcionais geradores mais fundamentais em TQC, os chamados geradores dos diagramas irredutíveis a uma partícula. Contudo, as correções quânticas sobre esses geradores podem conter termos mal definidos com respeito a altos momentos. Deste modo, um método de regularização é necessário para tratar esse problema. O procedimento de renormalização irá nos ajudar a eliminar os termos mal definidos dos diagramas irredutíveis a uma partícula. Entretanto, não se conhece um método de regularização aplicável em todas as teorias conhecidas; no sentido de preservar todas as simetrias da teoria no nível clássico. E, além disso, existem teorias que não se conhece um esquema de regularização que preserve todas as simetrias das teorias no nível clássico, *e.g.*, teorias supersimétricas. Levando isso em conta, exporemos uma breve revisão sobre o método de renormalização algébrica, a qual é uma abordagem de renormalização independente do esquema de renormalização (regularização, prescrição de subtração e condições de renormalização).

1.1 A matriz S e a fórmula de redução de LSZ

Em mecânica quântica, dado um estado inicial de uma única partícula, bem definido, pertencente a um espaço de Hilbert, podemos calcular a probabilidade de esse estado ser medido em outro estado final. A condição de unitariedade e a conservação da probabilidade exigem que a norma do estado inicial deva ser unitária; que também deve coincidir com a norma do estado final. Em TQC, lidamos com sistemas onde o número de partículas de um sistema físico é variável e, além disso, essas partículas podem interagir entre si. Dado um estado inicial de n partículas, a questão que fica é: como calcular a amplitude de probabilidade da transição do estado inicial de n partículas para um estado final de m partículas? Desde que as partículas são interagentes, o estado intermediário,

digamos, em $t = 0$, é desconhecido. Contudo, só temos bem definidos – em momento, spin, carga; grandezas que descrevem completamente o espectro do hamiltoniano da teoria – os estados assintóticos, *i.e.*, o estado inicial de n partículas, $|p_1, \dots, p_n; in\rangle$ (em $t \rightarrow -\infty$) e o estado final de m partículas, $|out; q_1, \dots, q_m\rangle$ (em $t \rightarrow +\infty$). A amplitude de probabilidade para que a transição entre o estado inicial dado e o estado final ocorra é obtida através dos elementos da matriz S ,

$$S_{fi} = \langle q_1, \dots, q_m; out | p_1, \dots, p_n; in \rangle. \quad (1.1)$$

O princípio da completeza assintótica [16] requer que os estados *in* e *out* pertençam ao mesmo espaço de Hilbert, e este espaço seja o espaço completo da teoria quântica. Em princípio, esses dois estados assintóticos são ortonormais aos possíveis estados ligados decorrente de interações entre as partículas. Assim, deve existir um operador S que relaciona esses dois estados assintóticos, tal que,

$$|p_1, \dots, p_n; out\rangle = S |p_1, \dots, p_n; in\rangle. \quad (1.2)$$

A completeza dos estados *in* e *out* implica imediatamente na unitariedade do operador S , *i.e.*, $S^\dagger S = 1$. Visto de outra forma: dado um estado inicial, a soma sobre todos os possíveis estados finais deve fornecer uma probabilidade unitária. Em suma, a unitariedade da matriz S implica na conservação da probabilidade.

No espalhamento entre partículas, não necessariamente todas as partículas participam do processo de espalhamento. Levando isso em conta, pode-se decompor a matriz S em uma parte trivial, indicando as partículas que não contribuem para o processo, e uma parte não-trivial, descrita pelo operador de espalhamento T , tal que $S = 1 + iT$. Assim, a condição de unitariedade implica

$$(1 - iT^\dagger)(1 + iT) = 1, \implies T^\dagger T = i(T^\dagger - T). \quad (1.3)$$

A partir da conservação de energia e momento na transição do estado $|i\rangle$ para o estado $|f\rangle$, temos a seguinte relação

$$\langle f | T | i \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \mathcal{T}_{fi}, \quad (1.4)$$

e, conseqüentemente,

$$\langle f | T^\dagger | i \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \mathcal{T}_{if}^*, \quad (1.5)$$

Inserindo um conjunto completo de estados intermediários $|n\rangle$, obtemos

$$\begin{aligned}\langle f|T^\dagger T|i\rangle &= \sum_n \langle f|T^\dagger|n\rangle \langle n|T|i\rangle \\ &= (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \sum_n (2\pi)^4 \delta^4(P_n - P_i) \mathcal{T}_{nf}^* \mathcal{T}_{ni} .\end{aligned}\quad (1.6)$$

A partir das Eqs. (1.3)-(1.6), obtém-se

$$-i(\mathcal{T}_{if} - \mathcal{T}_{fi}^*) = \sum_n (2\pi)^4 \delta^4(P_n - P_i) \mathcal{T}_{nf}^* \mathcal{T}_{ni} ,\quad (1.7)$$

onde a soma é suposta ser sobre todos os possíveis estados intermediários, assim como espaço de fase invariante de Lorentz e spin das partículas. É importante notar que a relação (1.7) é mantida ordem a ordem em teoria de perturbações; por exemplo, no lado esquerdo de (1.7) temos uma matriz de espalhamento de ordem g na constante de acoplamento, enquanto que no lado direito, que é quadrado na matriz de espalhamento, é de ordem g^2 ; é uma relação entre a teoria no nível árvore e a teoria a 1-laço (sendo mais precisos, temos uma relação recursiva, se considerarmos teoria de perturbações). Vale mencionar que a Eq. (1.7) nada mais é que o teorema ótico generalizado.

Embora a Eq. (1.1) nos forneça a forma geral de como obter os elementos da matriz S , a forma como ela se encontra não nos é conveniente. Contudo, é sabido em TQC que um operador de campo³ ϕ quando atua no estado de vácuo $|0\rangle$ [17] cria um estado de uma única partícula de uma definida posição. A aplicação sucessiva desse operador de campo sobre o estado de vácuo cria estados de múltiplas partículas. De posse dessa propriedade, podemos definir o valor esperado no vácuo do produto dos campos ordenado temporalmente

$$G^n(x_1, \dots, x_n) = \langle 0|T\phi(x_1), \dots, \phi(x_n)|0\rangle .\quad (1.8)$$

Esta relação é chamada função de Green de n pontos no espaço das posições. Usualmente, estamos interessados na função de Green no espaço dos momentos (que são as grandezas mensuráveis em um laboratório). Esta pode ser obtida pela transformada de Fourier da função de Green no espaço das posições. É importante notar que, em princípio, os campos ϕ 's são interagentes, não satisfazendo as relações de dispersões clássicas, e, portanto, seus momentos não estão na camada de massa. De fato, se esse campo é considerado como sendo interagente, ao atuar no estado de vácuo, ele não necessariamente criará um estado de uma única partícula com uma massa bem definida, mas um estado de múltiplas

³ Por simplicidade, consideraremos as discussões deste capítulo com um campo escalar neutro.

partículas com massas que, a princípio, não são iguais.

A importância de se estudar as funções de Green está no fato de que elas podem ser relacionadas aos elementos da matriz S descritos na Eq. (1.1). De fato, a partir da fórmula de redução de LSZ (Lehmann-Symanzik-Zimmermann) [33, 34], temos a seguinte relação

$$\begin{aligned} \langle q_1, \dots, q_m; out | p_1, \dots, p_n; in \rangle &= \prod_{i=1}^m \lim_{q_i^2 \rightarrow m_i^2} (q_i^2 - m_i^2) \prod_{j=1}^n \lim_{p_j^2 \rightarrow m_j^2} (p_j^2 - m_j^2) \times \\ &\times G^{m+n}(-q_1, \dots, -q_m; p_1, \dots, p_n). \end{aligned} \quad (1.9)$$

A partir dessa relação, vemos que – desde que os momentos estão na camada de massa – os elementos da matriz S serão diferente de zero a menos que os momentos das pernas externas da função de Green de $(n + m)$ pontos estejam na camada de massa.

Um fato importante é que a relação (1.7) pode impor restrições sobre a função de Green de dois pontos. Além disso, o teorema ótico generalizado pode ser obtido de acordo com as regras de Cutkosky [35], as quais podem ser entendidas da seguinte maneira: (i) dado um diagrama de laço (ver Sec. 1.2), corte as linhas internas de todas as possíveis formas e, então, coloque as linhas cortadas na camada de massa; (ii) para cada corte, coloque o propagador na camada de massa e some sobre todo o espaço de fase e sobre o spin das partículas; (iii) some sobre todas as contribuições possíveis de corte. Através do estudo da equação de maior tempo [36], nota-se que a relação (1.7) é satisfeita se a parte imaginária do resíduo da função de Green de dois pontos satisfaz a seguinte relação [37]

$$\Im \Pi > 0, \quad (1.10)$$

onde Π é a função de Green de dois pontos, avaliada na camada de massa, saturada com fontes externas apropriadas. Uma demonstração detalhada da relação (1.10) pode ser encontrada na Ref. [38].

1.2 Funcionais geradores das funções de Green

A função de Green (1.8) descreve todos os possíveis diagramas da teoria, conexos ou não. Contudo, não se sabe, atualmente, como calcular exatamente essa função. Entretanto, no intuito de calculá-la perturbativamente, pode-se definir formalmente o funcional

gerador para essa função como

$$\begin{aligned} Z[J] &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n G^n(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \dots J(x_n) \quad \text{ou} \\ &= \int D\phi \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(S[\phi] + \int d^4x J(x)\phi(x) \right) \right], \end{aligned} \quad (1.11)$$

onde $S[\phi]$ é a ação clássica e $J(x)$ é uma fonte externa clássica (uma função suave e, se necessário, de suporte compacto). A função de Green de n pontos pode ser obtida através de sucessivas derivadas funcionais de $Z[J]$ em relação à fonte $J(x)$ e, no fim, toma-se $J(x) = 0$,

$$G^n(x_1, \dots, x_n) = (-i\hbar)^n \frac{\delta^n}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} Z[J]|_{J=0}. \quad (1.12)$$

Ainda, pode-se prosseguir e definir um novo funcional gerador, $Z_c[J]$,

$$Z_c[J] = -i\hbar \ln Z[J], \quad (1.13)$$

onde $Z_c[J]$ gera somente diagramas conexos. De fato, aplicando derivadas funcionais sucessivas em $Z_c[J]$ em relação à fonte $J(x)$, obtém-se

$$G_c^n(x_1, \dots, x_n) = (-i\hbar)^{n-1} \frac{\delta^n}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} Z_c[J]|_{J=0}, \quad (1.14)$$

a função de Green conexa G_c^n . Outro importante resultado decorre da definição do funcional $Z_c[J]$,

$$\phi_c(x) = \frac{\delta Z_c[J]}{\delta J(x)} \Big|_{J=0}, \quad (1.15)$$

onde $\phi_c(x)$ é um campo clássico; que nada mais é que o valor esperado no vácuo do operador de campo ϕ . Usualmente, em teorias sem quebra espontânea de simetria, esse valor é nulo. Contudo, na presença da fonte $J(x)$, o campo clássico é um funcional da fonte $J(x)$ e não necessariamente é nulo, como é possível notar a partir da Eq. (1.15). Desde que o campo $\phi_c(x)$ e a fonte $J(x)$ são variáveis conjugadas uma da outra, através de uma transformada de Legendre, pode-se definir um novo funcional gerador,

$$\Gamma[\phi_c] = Z_c[J[\phi_c]] - \int d^4x J[\phi_c](x)\phi_c(x). \quad (1.16)$$

O funcional gerador $\Gamma[\phi_c]$ gera todos os diagramas irreduzíveis a uma partícula; estes são diagramas com as pernas externas amputadas, *i.e.*, são compostos somente de diagramas de laços. Assim, esses diagramas permanecem conexos ao se cortar qualquer linha interna.

A partir da Eq. (1.16)

$$\begin{aligned}
\frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(x)} &= \frac{\delta Z_c[J]}{\delta\phi_c(x)} - \int d^4y \frac{\delta J(y)}{\delta\phi_c(x)} \phi_c(y) - J(x) \\
&= \int d^4y \frac{\delta Z_c[J]}{\delta J(y)} \frac{\delta J(y)}{\delta\phi_c(x)} - \int d^4y \frac{\delta J(y)}{\delta\phi_c(x)} \frac{\delta Z_c[J]}{\delta J(y)} - J(x) \\
&= -J(x),
\end{aligned} \tag{1.17}$$

onde usamos a regra da cadeia para a derivada funcional e a definição do campo clássico. Por conveniência, podemos escrever o funcional gerador $\Gamma[\phi_c]$ como

$$\Gamma[\phi_c] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \Gamma^n(x_1, \dots, x_n) \phi_c(x_1) \dots \phi_c(x_n), \tag{1.18}$$

onde Γ^n é denominada função vértice de n pontos. A expansão de $\Gamma[\phi_c]$ corresponde à expansão em laços da série perturbativa, que coincide com a expansão em \hbar . De fato, a mais baixa ordem de $\Gamma[\phi_c]$ em \hbar corresponde à ação clássica [39],

$$\Gamma^{(0)}[\phi_c] = S[\phi_c]. \tag{1.19}$$

Devido a isso, $\Gamma[\phi_c]$ é usualmente denominada ação efetiva. Colocando-a de uma forma geral, temos

$$\Gamma[\phi_c] = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n \Gamma^{(n)}[\phi_c]. \tag{1.20}$$

Em princípio, em teorias sem quebra espontânea de simetria, a ordem em teoria de perturbações coincide com a ordem na constante de acoplamento.

Seguindo a análise do funcional gerador $\Gamma[\phi_c]$, vejamos sua relação com as funções de Green. Seja

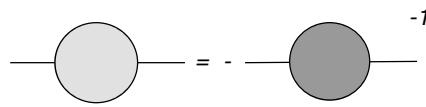
$$\frac{\delta}{\delta J(y)} = \int d^4z \frac{\delta\phi_c(z)}{\delta J(y)} \frac{\delta}{\delta\phi_c(z)} = \int d^4z \frac{\delta^2 Z_c[J]}{\delta J(y) \delta J(z)} \frac{\delta}{\delta\phi_c(z)}. \tag{1.21}$$

Atuando esta relação em (1.17), encontramos

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta J(y)} \frac{\delta\Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(x)} &= -\delta^4(x-y) \\
\int d^4z \frac{\delta^2 Z_c[J]}{\delta J(y) \delta J(z)} \frac{\delta^2 \Gamma[\phi_c]}{\delta\phi_c(z) \delta\phi_c(x)} &= -\delta^4(x-y).
\end{aligned} \tag{1.22}$$

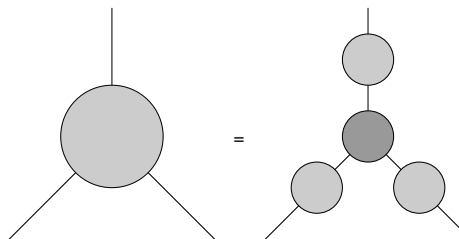
Nota-se desta expressão que o propagador completo do campo ϕ é a inversa da função vértice de dois pontos. Isto significa que, no espaço dos momentos, o propagador completo apresenta um polo correspondendo à raiz da função vértice de dois pontos, *i.e.*, a massa

Figura 1 - Função de Green de dois pontos.



Legenda: O lado direito desta figura corresponde à inversa da função vértice de dois pontos.

Figura 2 - Função de Green de três pontos.



Legenda: A função de Green de três pontos corresponde à funções de Green de dois pontos conectadas através da função vértice de três pontos.

de qualquer partícula estável criada pelo campo ϕ quando atua no estado de vácuo. A relação (1.22) pode ser visualizada através do diagrama mostrado na Fig. 1.

Prosseguindo no estudo dos funcionais geradores, podemos obter importantes relações entre a função de Green de n pontos e a função vértice de n pontos. De fato, aplicando (1.21) em (1.22), obtemos

$$\int d^4x' \frac{\delta^3 Z_c[J]}{\delta J(x)\delta J(x')\delta J(z)} \frac{\delta^2 \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x')\phi_c(y')} + \int d^4x'd^4z' G(x, x')G(z, z') \frac{\delta^3 \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x')\delta \phi_c(y')\delta \phi_c(z')} = 0. \quad (1.23)$$

Multiplicando esta expressão por $G(y, y')$, integrando sobre y' , e usando (1.22), obtemos

$$\frac{\delta^3 Z_c[J]}{\delta J(x)\delta J(y)\delta J(z)} = - \int d^4x'd^4y'd^4z' G(x, x')G(y, y')G(z, z') \frac{\delta^3 \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x')\delta \phi_c(y')\delta \phi_c(z')}. \quad (1.24)$$

Vemos que a função de Green de três pontos corresponde a inserir como um vértice a função vértice de três pontos, e nas pernas externas inserir a função de Green completa de dois pontos, como pode ser visto na Fig. 2. Chegamos aqui a um importante resultado: o cálculo da função vértice de n pontos determina completamente o cálculo da função de

Green de n pontos. De fato, mostramos que a função de Green de dois pontos é obtida a partir da função vértice de dois pontos; este resultado, por sua vez, pode ser usado, junto com a função vértice de três pontos, para calcular a função de Green de três pontos. Este procedimento pode ser aplicado ao cálculo de funções de Green com um número arbitrário de pernas externas. Agora o cálculo dos elementos da matriz S fica claro, *i.e.*, fica limitado a inserir as funções vértices como vértices e nas pernas externas colocar as funções de dois pontos completas. Estas, contudo, de acordo com a representação de Källén-Lehmann, devem ser avaliadas na camada de massa [40, 41]. Realmente, a representação espectral da função de Green de dois pontos diz que ela apresenta um polo simples. Realmente, da fórmula de redução de LSZ, vemos que os momentos são tomados na camada de massa. Assim, cada perna externa da função de Green deve também estar na camada de massa; que de fato acontece, como acabamos de ver. Isso significa que os elementos da matriz S equivalem a tomar o resíduo da função de Green de n pontos.

Calcular $\Gamma[\phi_c]$, em geral, não é uma tarefa fácil. De fato, o cálculo desse funcional só é possível perturbativamente. No nível clássico, como vimos anteriormente, se devidamente normalizada, $\Gamma[\phi_c]$ corresponde à ação clássica $S[\phi_c]$; no nível árvore é equivalente substituir a função vértice pelos vértices da ação clássica. Correções quânticas sobre Γ são provenientes de diagramas de laços. Essas correções, contudo, como veremos adiante, normalmente são divergentes devido à arbitrariedade na integração dos momentos internos. Isso pode trazer sérios problemas; por exemplo, a interpretação física para os elementos da matriz S fica comprometida. Na seção seguinte analisaremos essa questão em mais detalhes.

1.3 Renormalização

Os diagramas em TQC que nos fornecem uma visão esquemática das interações entre partículas existem em dois tipos: diagramas de árvore e diagramas de laços. Os diagramas de árvore contêm somente vértices ligados entre si através de propagadores sem correções quânticas. Não é difícil notar que os momentos internos dos diagramas de árvore – embora não estejam na camada de massa – são determinados completamente pelos momentos externos. Nos diagramas de laços, contudo, para cada laço existe uma integração no momento interno do laço. Este momento, entretanto, não é determinado completamente pelo momento das pernas externas do diagrama. Isto significa que, em altos momentos, *i.e.*, regime ultravioleta, esses diagramas podem apresentar divergências. Além disso, se irmos a ordens mais altas em teoria de perturbações, *i.e.*, mais laços, o grau de divergência desses diagramas pode vir a aumentar. Desde que os cálculos em laços representam correções à ação efetiva, é necessário, então, um procedimento que nos permita tratar essas divergências de um modo sistemático. De fato, para determinados

modelos, esse procedimento existe.

A ideia prévia do grau de divergências para os diagramas pode ser mais bem entendida através da seguinte expressão, que descreve um diagrama de Feynman genérico,

$$I(p_1, \dots, p_m) = \int d^d k_1 \dots d^d k_n f(k_1, \dots, k_n; p_1, \dots, p_m), \quad (1.25)$$

onde d é a dimensão do espaço-tempo em questão, os k 's representam os momentos internos independentes (número de laços), os p 's são os momentos externos (satisfazendo a condição de conservação de energia e momento, $\sum_{i=0}^m p_i = 0$) e $f(k_1, \dots, k_n; p_1, \dots, p_m)$ é uma função dos momentos. A contagem de potências de k em I indica o grau de divergência do dado diagrama. Para fins práticos, não é conveniente contar o grau superficial de divergência dos diagramas através da integração nos momentos internos. O grau superficial de divergência pode ser determinado, de uma forma alternativa, através da dimensão do espaço-tempo da teoria em questão e através do número de pernas externas dos diagramas. De fato, o grau superficial de divergência para um dado diagrama irreduzível a uma partícula γ é dado por

$$\delta(\gamma) = d - \sum_{\Phi} d_{\Phi} N_{\Phi} - \sum_i d_{g_i} V_i, \quad (1.26)$$

onde N_{Φ} é o número de pernas externas do diagrama γ relacionado ao campo Φ , d_{Φ} corresponde à dimensão canônica UV de Φ e d_{g_i} é a dimensão canônica da constante de acoplamento g_i correspondente ao vértice V_i . Um importante teorema para a teoria de renormalização, devido a Weinberg [42], estabelece que a integral de um diagrama de Feynman é absolutamente convergente se o grau superficial de divergência, $\delta(\gamma)$, de um subdiagrama $\gamma_i \subset \gamma$ é negativo. Incluindo também o caso em que γ_i e γ coincidem.

Através desse resultado podemos classificar três tipos de teorias para as quais $\delta(\gamma) > 0$, quanto ao quesito de renormalizabilidade por contagem de potências; são elas:

- Teoria super-renormalizável: possui um número finito de diagramas divergentes;
- Teoria renormalizável: possui um número finito de diagramas divergentes, mas as divergências surgem a todas as ordens em teoria de perturbações;
- Teoria não-renormalizável: todos os diagramas são divergentes a altas ordens em teoria de perturbações;

A partir de (1.26) nota-se que a constante de acoplamento desempenha um papel importante no critério de renormalizabilidade de uma teoria. De fato, o grau superficial de divergências depende fortemente da dimensão de massa da constante de acoplamento, e, tomando-se em conta que a ordem em teoria de perturbações está relacionada à ordem na constante de acoplamento, pode-se caracterizar o critério de renormalizabilidade através da dimensão de massa da constante de acoplamento:

- $d_{g_i} > 0$: a teoria apresenta diagramas divergentes somente até uma dada ordem em teoria de perturbações. Caso de teoria super-renormalizável;
- $d_{g_i} = 0$: o número de diagramas divergentes é finito, mas as divergências devem ser absorvidas ordem a ordem em teoria de perturbações com a introdução de sutis contratermos. Caso de teoria renormalizável;
- $d_{g_i} < 0$: o número de diagramas divergentes aumenta à medida que se vai a altas ordens em teoria de perturbações. Assim, seria necessário um número infinito de contratermos para absorver essas divergências. Este é o caso de uma teoria não-renormalizável.

Alguns comentários são necessários acerca de teorias não-renormalizáveis e renormalizáveis: Embora uma teoria possa ser não-renormalizável, isso não significa que a teoria seja quanticamente inconsistente ou não-preditiva. Um ponto importante de se entender é que em teorias não-renormalizáveis a previsibilidade é restrita à escala de energia que elas estejam sendo aplicadas, os tipos de fenômenos que estejam sendo estudados e o grau de precisão de interesse sobre as variáveis que estejam sendo calculadas. Vimos acima que um critério de não-renormalizabilidade é a dimensão negativa de massa da constante de acoplamento; dito de outro modo, a constante de acoplamento tem a forma $g_i \sim 1/m_i$, onde m_i é uma escala de energia. Isto significa que uma teoria é bem preditiva se tratamo-la em escalas de energias $p \ll m_i$. A teoria deixa de ser viável se $p \sim m_i$. Isso ocorre, por exemplo, na teoria de Schrödinger, onde, embora não-renormalizável, é bastante consistente para $p \ll m_e$. Onde m_e é a massa do elétron – se o elétron for a partícula em estudo. A altas energias, contudo, é necessário um tratamento via EDQ. De fato, a teoria de Schrödinger é um limite de baixas energias desta última. Outro exemplo é a teoria de Fermi, proposta para descrever o decaimento beta do nêutron. Essa teoria, que é um limite de baixas energias do Modelo Eletrofraco, é bastante consistente para energias tais que $p \ll 300$ GeV, onde, neste caso, a escala de energia é definida pela constante de acoplamento de Fermi, G_F , com $G_F \sim (300 \text{ GeV})^{-2}$. Outro exemplo é o caso da Gravitação. Embora não-renormalizável perturbativamente, a expansão perturbativa da teoria da Relatividade Geral de Einstein só deixa de ser preditiva para energias $p \sim M_P$, onde $M_P \sim 10^{19}$ GeV é a massa de Planck.

No que diz respeito às teorias renormalizáveis, é importante apontar que elas também apresentam um regime em que a teoria de perturbações falha. Isto ocorre no chamado polo de Landau da teoria. A EDQ, entretanto, não possui uma escala de energia plausível onde a teoria de perturbações poderia falhar. Na verdade, ela possui um polo de Landau em ultra altas energias, bem acima da escala de Planck, da ordem de 10^{310} GeV. Assim, fica impossível afirmar o que seria a EDQ próxima dessa escala energia. Deste modo, parece que teorias renormalizáveis não são interessantes e não apresentam vantagens em relação às não-renormalizáveis, mas apresentam, como veremos: (i) sendo uma

teoria renormalizável, isso significa que um número finito de contratermos é suficiente para cancelar divergências. Em teorias não-renormalizáveis as divergências podem ser canceladas, contudo, são necessários infinitos contratermos; o que reduz a previsibilidade dessas teorias, ou seja, existem infinitos parâmetros para serem fixados experimentalmente⁴; (ii) em geral, teorias renormalizáveis são teorias mais fundamentais⁵, no sentido de que delas podem emergir outras teorias, em limites de energias específicos. Assim, elas contêm graus de liberdades físicos que usualmente não se tornam explícitos em teorias efetivas ou emergentes; (iii) outro ponto importante em se trabalhar com teorias renormalizáveis e mais completas é que as previsões sobre os parâmetros da teoria são mais precisas do que no regime de teoria efetiva. Um exemplo disso é a correção para o fator giromagnético do elétron proveniente da EDQ, que é o maior acerto conhecido entre previsão teórica e experimento. Isto não ocorre se considerarmos a teoria de Schrödinger; (iv) o critério de renormalizabilidade por contagem de potências é de grande importância para selecionar modelos físicos. Por exemplo, ao fixarmos o espaço-tempo como sendo 4-dimensional, a relação (1.26) irá selecionar um número finito de modelos renormalizáveis que possam descrever campos de calibre, autointeragentes ou não, e (ou) em interação com os demais campos de matéria.

Embora tenhamos tecido comentários gerais acerca de teorias renormalizáveis, e mencionado até a questão de contratermos, nem tudo foi dito a respeito da renormalizabilidade perturbativa de uma teoria. De fato, a renormalizabilidade por contagem de potências é um critério necessário mas não suficiente para garantir a renormalizabilidade de uma teoria. Na sequência, exporemos critérios importantes para garantir que uma teoria seja, de fato, renormalizável perturbativamente. Alguns dos critérios já foram comentados, outros serão mais bem expostos nas seções seguintes; são eles:

- Renormalizabilidade por contagem de potências;
- Ação local, *i.e.*, os campos entram na ação em um mesmo ponto do espaço-tempo, e polinomial nos campos e suas derivadas. Isto para evitar correções quânticas não polinomiais nos momentos externos dos diagramas de Feynman;
- Ausência de anomalias no nível quântico, isto é, as simetrias da teoria clássica são preservadas no nível quântico;

⁴ Isto é melhor entendido no caso da renormalização na camada de massa. Veremos adiante que é necessário introduzir sutis contratermos à teoria clássica a fim de cancelar divergências na teoria. Na renormalização na camada de massa se usa condições de renormalização para fixar os parâmetros dos contratermos. Usualmente estes parâmetros são fixados por condições físicas. Em outras palavras, são determinadas *a priori* por experimentos físicos.

⁵ Isto não é uma regra nem um critério para caracterizar ou dizer se uma teoria é fundamental ou não. Na maioria das teorias físicas existentes isso ocorre. Contudo, o tema central desta tese é sobre uma teoria renormalizável mas que não é fundamental.

- Estabilidade quântica: os contratermos podem ser absorvidos pela redefinição dos campos e parâmetros da teoria clássica.

A fim de continuar com o programa de renormalização, outro passo é importante. De fato, mencionamos anteriormente que as correções quânticas sobre uma teoria clássica estão contidas nas integrais de Feynman. Estas, por sua vez, podem apresentar divergências; o que não é conveniente para fins práticos. No intuito de tratar essas divergências, pode-se introduzir algum método que regularize essas integrais divergentes, de modo a torná-las finitas e isolar suas partes divergentes reguladas. Existem vários métodos de regularização e sua praticidade pode variar de teoria para teoria. Exporemos aqui alguns comentários sobre os principais esquemas de regularização.

1.3.1 Regularização

Vimos que as divergências na integral de Feynman (1.25) ocorrem devido à integração em altos momentos; essas divergências podem ser regularizadas de acordo com as seguintes prescrições:

- *Regularização por corte na escala*: ao invés de integrar em altos momentos, limita-se a integração até uma dada escala de energia, Λ . Deste modo, o resultado da integral (1.25) terá uma dependência em Λ .

Este esquema de regularização, contudo, quebra a invariância manifesta sob o grupo de Poincaré. Outra desvantagem deste método é que ele pode induzir massa para campos de calibre. Isso implica na violação da simetria de calibre, a qual é uma questão problemática tanto do ponto de vista da renormalizabilidade como da unitariedade. O fato de realizar a integração nos momentos com uma escala de energia limitada pode implicar na supressão de alguns graus de liberdade da teoria em estudo.

- *Regularização de Pauli-Villars*: este método consiste em introduzir um propagador de um campo fantasma de modo a tornar a integral do tipo (1.25), se divergente, finita [43].

Este esquema funciona bem para teorias de calibre abelianas, uma vez que ele preserva a invariância de calibre. Em teorias não-abelianas este método falha, uma vez que a covariância de calibre é perdida nessas teorias.

- *Regularização dimensional*: a partir de (1.25) ou (1.26), nota-se que a divergência do gráfico de Feynman pode ser reduzida através da redução da dimensão do espaço-tempo. O presente método de regularização consiste em, ao invés de realizar a integral de Feynman no espaço-tempo em que a teoria é definida, integrar sobre um espaço-tempo de dimensão arbitrária [44, 45].

Por exemplo, para uma teoria definida em quatro dimensões, calculam-se as integrais de Feynman em um espaço $d = 4 - \epsilon$ dimensional. No final, as partes divergentes são isoladas em termos do tipo $1/\epsilon^n$, com $\epsilon \rightarrow 0$ – indicando os polos –, onde n indica a ordem em teoria de perturbações. Além disso, a fim de manter a constante de acoplamento adimensional, faz-se um *rescaling* na dimensão da constante de acoplamento, introduzindo um parâmetro de massa μ tal que $g_i \rightarrow \mu^p g_i$, onde p é uma potência que irá depender do vértice em questão, de modo a manter a ação adimensional, uma vez que a dimensão canônica dos campos também é alterada.

Este método é vantajoso em relação aos anteriores, pois além preservar a simetria manifesta de Poincaré, não viola a simetria de calibre; o que torna este método bastante conveniente para tratar divergências em teorias quânticas de calibre. Contudo, como todo método de regularização, ele não é absoluto, isto é, aplicável a todos os tipos de teorias conhecidas. Tratar teorias com férmions quirais com este método requer um pouco de cuidado. Por exemplo, no setor eletrofraco do Modelo Padrão, onde os bósons de calibre acoplam-se a férmions quirais, cuidados extras são necessários a fim de se obter um resultado consistente acerca da anomalia quiral. No entanto, não entraremos nessa questão, por hora. Apesar de que, nesta tese, estudaremos a renormalizabilidade de acoplamentos do tipo pseudoescalar e pseudovetorial, usaremos aqui o método de regularização dimensional. Desde que nos interessa nesse assunto somente isolar divergências a 1-laço, não temos perda de generalidade.

1.3.2 Prescrição de renormalização

Uma vez que tenhamos regularizado as integrais de Feynman divergentes e isolado as partes divergentes das finitas, é necessário algum mecanismo que elimine essas divergências, *i.e.*, um esquema de renormalização. Existem vários esquemas de renormalização. O mais simples é o esquema⁶ MS, o qual consiste em absorver somente as partes divergentes, *i.e.*, partes do tipo $1/\epsilon$, da regularização dimensional. Contudo, esse esquema não é apropriado em teorias sem uma escala natural de renormalização, como, por exemplo, a CDQ. O esquema $\overline{\text{MS}}$ é apropriado para esse tipo de teoria. Esse esquema consiste em absorver, além das partes divergentes, também partes finitas que estão presentes em todas as integrais de Feynman. Esses termos universais são do tipo $\ln 4\pi - \gamma_E$, onde γ_E é a constante de Euler-Masceroni.

Outra abordagem é a renormalização na camada de massa. Basicamente, este esquema consiste em impor condições de renormalização sobre as integrais de Feynman

⁶ N.T.: Sigla do inglês *Minimal Subtraction*.

tais que os parâmetros renormalizados coincidam exatamente com os parâmetros físicos da teoria, ou seja, aqueles que são medidos em experimentos. Devido ao sucesso do esquema MS, tal esquema tem caído em desuso. Contudo, a renormalização na camada de massa é de grande importância para fixar ambiguidades que possam surgir nas correções radiativas de uma teoria [46].

Até agora, expomos esquemas de renormalização capazes de tornar uma teoria finita por subtrair suas partes divergentes. Contudo, a aplicabilidade desses esquemas exige que as integrais de Feynman tenham sido reguladas. Na sequência, faremos uma breve apresentação do esquema de renormalização de BPHZ (Bogoliubov-Parasiuk-Hepp-Zimmermann) [47, 48, 49], que é independente do esquema de regularização. Este método consiste em cancelar divergências das integrais de Feynman sem regularizá-las, sem a necessidade de um regulador ultravioleta. Isto é feito da seguinte forma: Considere um diagrama de Feynman γ com grau de divergência $\delta(\gamma)$; em seguida, introduz-se o operador t^γ . Este operador consiste em uma expansão de Taylor em torno do momento externo zero, da integral I , até o grau de divergência $\delta(\gamma)$. Deste modo, a integral renormalizada tem a forma

$$R = (1 - t^\gamma)I. \quad (1.27)$$

Por definição, se I é finita, $t^\gamma I = 0$. Caso o diagrama contenha vários laços internos, esse procedimento de subtração deve partir dos laços mais internos até o diagrama total. Em caso de subdivergências sobrepostas, deve-se usar a fórmula da floresta de Zimmermann a fim de subtrair essas divergências. Uma vez que o método usual de BPHZ subtrai divergências ultravioletas em momentos externos nulos, surgem divergências infravermelhas em teorias de campos de massa nula. A generalização desse método para campos de massa zero foi realizada por Lowenstein [50]. Entretanto, o método se torna muito mais complicado. Embora esse método seja vantajoso, uma vez que não depende de regulador ultravioleta, sua aplicabilidade em teorias de calibre, principalmente não-abelianas, é muito complicada. De fato, uma vez que a simetria de calibre nos fornece relações entre diferentes diagramas de Feynman, renormalizar diferentes diagramas de Feynman de modo a preservar a simetria de calibre pode ser uma tarefa muito difícil ou até impossível.

Vimos, ao longo desta seção, a forma esquemática do programa de renormalização. Embora não tenhamos feito aplicação a uma teoria específica, o método aqui apresentado – embora sem muitos detalhes – é geral; no sentido que pode ser aplicado em todas as teorias possíveis, mas cada uma com suas particularidades. Contudo, convém chamar atenção para dois pontos: regularização dimensional – seguida de uma prescrição de subtração de divergências – e o esquema de renormalização BPHZL. Mencionamos anteriormente que, embora muito útil em teorias de calibre, a regularização dimensional pode levar a resultados ambíguos em teorias com férmions quirais, uma vez que estes não são bem definidos

em dimensões diferentes de quatro. O método de renormalização de BPHZL poderia ser apropriado neste caso, mas, como é esperado que os férmions interajam com campos de calibre, a aplicabilidade desse método fica comprometida. É importante comentar que em teorias supersimétricas não existe um método de regularização conhecido que preserve todas as simetrias da ação clássica. Aplicar BPHZL aqui seria inconveniente. Aparentemente chegamos a um ponto difícil. Aparentemente, pois na próxima seção estudaremos uma abordagem de renormalização capaz de tratar os problemas acima mencionados.

Mas, antes de avançarmos, é preciso mencionar como se executa o procedimento de subtração de divergências de uma forma genérica, independente do uso de reguladores ou não. As divergências das integrais de Feynman, além da arbitrariedade na integração nos momentos internos, podem ser entendidas como sendo um resultado de trabalharmos com objetos definidos como o produto de distribuições. De fato, isto pode ser notado a partir de (1.8), onde temos o produto vários campos (distribuições). O procedimento de renormalização pode ser entendido como uma abordagem que trate, de uma forma sistemática, esses infinitos. Por exemplo, vimos a partir de (1.22) que a função de Green de dois pontos nada mais é que a inversa da função vértice de dois pontos, esta por sua vez – na representação de momento –, possui como raízes a massa no nível árvore mais correções quânticas. Na *teoria de perturbações não-renormalizada* se parte de uma ação não-renormalizada, denotada por

$$S[\phi_0] = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi_0 \partial^\mu \phi_0 - \frac{1}{2} m_0^2 \phi_0^2 - \frac{\lambda_0}{4!} \phi_0^4 \right), \quad (1.28)$$

onde ϕ_0 , m_0 e λ_0 , são o campo, a massa e a constante de acoplamento não-renormalizados, respectivamente. Desde que as correções sobre a função de dois pontos dessa teoria irão alterar o polo dessa função, com divergências isoladas incluídas, precisa-se redefinir o polo da teoria. A redefinição do polo da teoria acaba levando à seguinte relação

$$\langle 0 | \phi_0(k) \phi_0(-k) | 0 \rangle = Z_\phi \frac{i}{p^2 - m^2}, \quad (1.29)$$

onde m é a massa física. O fator Z_ϕ surge pela redefinição do campo na função de correlação. Sua forma é $Z_\phi = 1 + \delta_\phi$, onde δ_ϕ contém a parte divergente no limite que o regulador é “desligado” (se usado algum esquema de regularização) e é uma função da constante de acoplamento; em ordem $\mathcal{O}(\lambda^2)$ a 1-laço. Dessa forma o campo não-renormalizado é mau definido. Em resumo, na teoria de perturbações não-renormalizada, os contratermos para a massa e constante de acoplamento surgem por substituí-los pelos seus valores físicos. Por outro lado, na *teoria de perturbações renormalizada* os contratermos vêm da ação, ou seja,

$$S_r[\phi_r] = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi_r \partial^\mu \phi_r - \frac{1}{2} m_r^2 \phi_r^2 - \frac{\lambda_r}{4!} \phi_r^4 + \delta_\phi \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_r \partial^\mu \phi_r - \frac{1}{2} \delta_m \phi_r^2 - \frac{\lambda_r}{4!} \delta_\lambda \phi_r^4 \right) \quad (1.30)$$

onde ϕ_r, m_r e λ_r , são o campo, a massa e a constante de acoplamento renormalizados, respectivamente; e, são finitos. Neste caso, as divergências que surgem dos termos da ação (1.30) sem os parâmetros- δ 's são canceladas pela escolha sutil desses parâmetros. A rigor, esses dois métodos são equivalentes, embora para fins práticos o último é mais conveniente. De fato, existe um mapa entre os dois esquemas, tal que $\phi_0 = Z_\phi^{\frac{1}{2}}\phi_r$, $Z_\phi m_0^2 = m^2 + \delta_m$ e $Z_\phi \lambda_0 = (1 + \delta_\lambda)\lambda_r$. Embora a partir dessas definições a ação (1.30) possa ser escrita como a ação (1.28), não espera-se confusão entre as duas ações. Ao se partir de uma teoria descrita por (1.28), nota-se que seus parâmetros são mau definidos devido a infinitos, e o esquema de subtração de divergências controla as divergências por levar esses parâmetros mau definidos aos seus valores físicos. Por outro lado, ao se partir de (1.30), nota-se que os parâmetros são finitos e as divergências que surgem através dos diagramas de Feynman, construídos com base nesses parâmetros, são canceladas pelos contratermos que contêm os parâmetros- δ 's.

1.4 Renormalização algébrica: seus fundamentos

Na seção anterior vimos que o tratamento perturbativo das funções vértice requer um procedimento de renormalização no intuito de cancelar divergências ultravioletas; precedido por algum esquema de regularização ou não. Este procedimento, contudo, pode levar à violação das simetrias da teoria clássica. Desde que as simetrias descrevem completamente uma teoria, é conveniente que elas não sejam violadas quanticamente. Aqui é importante apontar duas situações distintas acerca da violação das simetrias da teoria clássica quando a teoria é estendida ao nível quântico: (i) a existência de um tratamento perturbativo independente do esquema de renormalização; de modo a evitar anomalias provenientes de patologias do método de regularização; (ii) a ausência de anomalias no nível quântico, *i.e.*, as simetrias clássicas são estendidas ao nível quântico. E, caso a teoria quântica apresente anomalias, estas sejam independentes do esquema de renormalização.

Baseado no Princípio de Ação Quântica [51], princípio este estabelecido por diversos teoremas gerais de teoria quântica de campos perturbativa, o método de renormalização algébrica [52] permite um estudo rigoroso do regime quântico de diversas teorias de campos, e de forma independente do esquema de renormalização. A questão principal reside na extensão das simetrias clássicas ao nível quântico, baseando-se somente nas relações algébricas entre funções de Green, descritas pelas identidades de Ward da teoria. Deste modo, a caracterização de anomalias e contratermos invariantes é possível, sem a necessidade do cálculo explícito das integrais relacionadas aos diagramas de Feynman. Contudo, para entender os pontos centrais da renormalização algébrica, as noções de inserções e do Princípio de Ação Quântica (PAQ) são necessárias.

1.4.1 Operadores compostos

Seja os operadores compostos clássicos $Q_i(x)$, definidos genericamente como o produto de campos presentes na teoria em estudo, podendo ser um vértice de interação usual, ou de modo geral $Q(x) = (\phi(x))^m$. Um procedimento padrão em TQC seria estudar as correções provenientes da teoria quântica sobre o dado operador. Essas correções podem ser determinadas através da noção de inserções, *i.e.*, por inserir na função de Green de n pontos o operador $Q(x)$, de modo que

$$\begin{aligned} \langle 0|TQ(x)\phi(x_1), \dots, \phi(x_n)|0\rangle &= N_d[Q(x)] \cdot G^n(x_1, \dots, x_n) \\ &= Q_d(x) \cdot G^n(x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (1.31)$$

onde o “ponto” simboliza a noção de inserção na função de Green G^n , N está relacionado ao produto normal devido a Zimmermann [53], algo semelhante a definição de Wick do produto normal de campos livres, e d é a dimensão do operador composto que entra de acordo com o critério de renormalizabilidade por contagem de potências. A noção de inserção pode ser estendida para a abordagem funcional, tal que

$$Q(x) \cdot Z[J] = \int D\phi Q(x) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(S[\phi] + \int d^4x J(x)\phi(x) \right) \right]. \quad (1.32)$$

Desde que os operadores compostos $Q_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, N$, indicando um número arbitrário de operadores compostos) não possuem equação clássica de movimento, eles não apresentam condições de contorno. Assim, não temos uma solução clássica para esses operadores e não temos um ponto a partir do qual são feitas as perturbações quânticas. A fim de contornar esses problemas e facilitar a manipulação das funções de Green para esses operadores, redefinimos a ação clássica $S[\phi]$,

$$S[\phi, \rho_i] = S[\phi] + \int d^4x \rho_i(x) Q^i(x), \quad (1.33)$$

onde $\rho_i(x)$ é uma fonte externa com dimensão ($\dim \rho = 4 - \dim Q$) em um espaço-tempo 4-dimensional. Podemos, então, definir um novo funcional gerador das funções de Green com a inserção dos operadores compostos

$$\begin{aligned} Z[J, \rho] &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{i}{\hbar} \right)^n \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{\hbar} \right)^m \frac{1}{m!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \int d^4y_1 \dots d^4y_m \times \\ &\times \langle 0|TQ^{j_1} \dots Q^{j_m} \phi(x_1) \dots \phi(x_n)|0\rangle \rho_{j_1}(y_1) \dots \rho_{j_m}(y_m) J(x_1) \dots J(x_n) \end{aligned} \quad (1.34)$$

De maneira análoga à Eq. (1.13), pode-se definir o funcional gerador das funções de Green conexas na presença de operadores compostos

$$Z_c[J, \rho] = -i\hbar \ln Z[J, \rho], \quad (1.35)$$

e, conseqüentemente, o gerador funcional das funções de Green irreduzíveis a uma partícula

$$\Gamma[\phi_c, \rho] = Z_c[J[\phi_c], \rho] - \int d^4x J[\phi_c](x)\phi_c(x). \quad (1.36)$$

Note que a transformada de Legendre é realizada somente em relação à fonte original J . Ainda,

$$\frac{\delta\Gamma[\phi_c, \rho]}{\delta\rho_i(x)} = Q^i(x) \cdot \Gamma[\phi_c], \quad (1.37)$$

onde $Q^i(x) \cdot \Gamma[\phi_c]$, na sua mais baixa ordem em \hbar , corresponde ao operador clássico $Q^i(x)$.

1.4.2 Princípio de Ação Quântica

Comentamos, na seção anterior, sobre a importância do PAQ para o estudo do tratamento perturbativo em TQC com base no conteúdo de simetrias da teoria em questão. Em teoria clássica de campos as simetrias da teoria clássica estão codificadas nas equações de movimento dos campos. Na teoria quântica, entretanto, as equações clássicas de campo já não fazem sentido. A fim de capturar as propriedades de simetria da teoria quântica, abordaremos na sequência a equação de Dyson-Schwinger, assim como sua relação com a noção de inserção e com o PAQ.

Seja a ação clássica da forma⁷ (1.28), para um campo escalar neutro, decomposta como

$$S[\phi] = S_0[\phi] + S_I[\phi], \quad (1.38)$$

onde

$$\begin{aligned} S_0[\phi] &= \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right), \\ S_I[\phi] &= - \int d^4x \frac{\lambda}{4!} \phi^4, \end{aligned} \quad (1.39)$$

⁷ Por hora não nos preocupamos como ela foi chamada anteriormente, mas tratemo-la como uma simples ação clássica usual, como na chamada.

são as ações livre e de interação, respectivamente. Por hora, tomemos o funcional gerador (1.11) para a ação livre $S_0[\phi]$,

$$Z_0[J] = \int D\phi \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(S_0[\phi] + \int d^4x J(x)\phi(x) \right) \right], \quad (1.40)$$

e realizando uma derivada funcional total em relação ao campo ϕ ,

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\phi(x)} Z_0[J] &= \int D\phi \frac{\delta}{\delta\phi(x)} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(S_0[\phi] + \int d^4x J(x)\phi(x) \right) \right] \\ 0 &= \int D\phi \left(\frac{\delta}{\delta\phi(x)} S_0[\phi] + J(x) \right) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(S_0[\phi] + \int d^4x J(x)\phi(x) \right) \right], \end{aligned} \quad (1.41)$$

onde assumimos que $Z_0[J]$ deve ser invariante sob esta derivada funcional. Ainda, considerando que $J(x)$ pode sair da integração funcional ($J(x)$ tem dependência no valor clássico do campo, *i.e.*, $\phi_c(x)$, que não é o caso), temos

$$\begin{aligned} \int D\phi \frac{\delta S_0[\phi]}{\delta\phi(x)} \exp \left(\frac{i}{\hbar} S_0[\phi] \right) + J(x) \int D\phi \exp \left(\frac{i}{\hbar} S_0[\phi, J] \right) &= 0 \\ \frac{\delta S_0[\phi]}{\delta\phi(x)} \cdot Z_0[J] + J(x) Z_0[J] &= 0. \end{aligned} \quad (1.42)$$

O primeiro termo em (1.42) corresponde à forma funcional da inserção do operador composto $\delta S_0[\phi]/\delta\phi$ no funcional gerador. A partir de (1.39) e do primeiro termo em (1.42), temos

$$\begin{aligned} - \int D\phi (\partial_x^2 + m^2) \phi(x) \exp \left(\frac{i}{\hbar} S_0[\phi, J] \right) + J(x) \int D\phi \exp \left(\frac{i}{\hbar} S_0[\phi, J] \right) &= 0 \\ \left[K_x \left(-i\hbar \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) - J(x) \right] Z_0[J] &= 0, \end{aligned} \quad (1.43)$$

com $K_x = \partial_x^2 + m^2$, onde usamos a propriedade $\langle 0|T\phi(x)\partial_\mu^y\phi(y)|0\rangle = \partial_\mu^y\langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle$ (ver demonstração no Ap. B) e que o campo pode ser substituído pelas derivadas funcionais atuando do lado de fora da integral funcional. A equação (1.43) é a equação de Dyson-Schwinger para o campo livre. A solução para essa equação tem a forma

$$Z_0[J] = \exp \left[-\frac{i}{2\hbar} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y) J(y) \right], \quad (1.44)$$

onde

$$\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} e^{-ip(x-y)} \quad (1.45)$$

é o propagador de Feynman do campo escalar livre, satisfazendo

$$K_x \Delta_F(x-y) = -\delta^4(x-y). \quad (1.46)$$

Uma vez estabelecida a noção de inserção e a equação de Dyson-Schwinger, vejamos a extensão para o caso interagente. De fato, semelhante à Eq. (1.42), a inserção para a ação completa tem a forma

$$\begin{aligned} \frac{\delta S[\phi]}{\delta \phi(x)} \cdot Z[J] + J(x)Z[J] &= 0 \text{ ou} \\ \int D\phi \left[-(\partial_x^2 + m^2) - \frac{\lambda}{3!} \phi^3(x) + J(x) \right] \exp\left(\frac{i}{\hbar} S[\phi, J]\right) &= 0 \\ \left[K_x \left(-i\hbar \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) + \mathcal{L}'_I \left(-i\hbar \frac{\delta}{\delta J(x)} \right) - J(x) \right] Z[J] &= 0, \end{aligned} \quad (1.47)$$

onde o “linha” em \mathcal{L}'_I significa diferenciação com respeito ao argumento. A equação (1.47) é a equação de Dyson-Schwinger no caso interagente. A solução de (1.47) (cf. Ref. [54], p. 199) tem a forma

$$Z[J] = \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int d^4x \mathcal{L}_I \left(-i\hbar \frac{\delta}{\delta J(x)} \right)\right] Z_0[J]. \quad (1.48)$$

Desde que \mathcal{L}_I leva em conta a constante de acoplamento, a solução (1.48) corresponde à uma solução perturbativa – em λ (ou \hbar) – da equação de Dyson-Schwinger. Colocando (1.47) de uma forma geral

$$\left(\frac{\delta S}{\delta \phi(x)} \Big|_{\phi = -i\hbar \frac{\delta}{\delta J(x)}} + J(x) \right) Z[J] = 0. \quad (1.49)$$

Diferenciando (1.49) em relação a um número arbitrário de fontes externas, obtém-se relações entre um número arbitrário de funções de Green. Essas relações são as chamadas identidades de Ward da teoria. De fato, a relação (1.49) foi obtida assumindo que o gerador funcional $Z[J]$ também goza, assim como a ação clássica $S[\phi]$, de uma simetria sob uma variação arbitrária do campo ϕ . Isso será mais entendido na sequência, quando tratarmos o PAQ.

Vimos anteriormente que o critério de renormalizabilidade por contagem de potências impõe restrições sobre as dimensões do espaço-tempo, dos campos e das constantes de acoplamento de uma teoria. Deste modo, o operador composto $\delta S/\delta \phi$ também tem sua dimensão fixada por

$$\dim \frac{\delta S}{\delta \phi} = 4 - \dim \phi. \quad (1.50)$$

Ademais, vimos que correções quânticas sobre as funções de Green são, na maioria das

vezes, mau definidas, devido à divergências ultravioletas. Ainda, desde que o operador composto acima mencionado irá receber correções quânticas, ele também irá apresentar esse problema. De modo geral, todo o procedimento descrito nesta seção é válido em teorias locais e renormalizáveis por contagem de potências. Portanto, a noção de inserção do operador composto clássico, descrito acima, pode ser generalizada para levar em conta suas correções quânticas, tal que,

$$\Delta(x) \cdot Z[J] + J(x)Z[J] = 0, \quad (1.51)$$

onde o $\Delta(x)$ é uma inserção de dimensão

$$\dim \Delta \leq 4 - \dim \phi, \quad (1.52)$$

e possui como mais baixa ordem a inserção clássica

$$\Delta(x) = \frac{\delta S}{\delta \phi(x)} + \mathcal{O}(\hbar). \quad (1.53)$$

Através da redefinição do funcional gerador, é simples estender a relação (1.51) para o gerador das funções de Green conexas

$$\Delta(x) \cdot Z_c[J] + J(x)Z_c[J] = 0, \quad (1.54)$$

e, por meio de uma transformada de Legendre, para a função vértice

$$\frac{\delta \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x)} = \Delta(x) \cdot \Gamma[\phi_c]. \quad (1.55)$$

Este resultado é o chamado PAQ. Ele estabelece que a extensão quântica de um operador clássico deve ser local e respeitar o critério de renormalizabilidade por contagem de potências. Note que a ação de um operador diferencial sobre o funcional gerador Γ resulta em uma inserção no mesmo funcional. Embora tenhamos chegado a esse resultado sem assumir que o funcional gerador era o renormalizado, o resultado (1.55) pode ser assumido como sendo o resultado para a teoria renormalizada. Poder-se-ia partir da teoria definida por uma ação renormalizada, no contexto de algum esquema de renormalização, por exemplo, o esquema de BPHZ, de modo a subtrair divergências de diagramas com divergências de cobertura.

O PAQ pode ser estendido para o caso de operadores compostos. De fato, seja $Q^i(x)$ um operador composto clássico acoplado à fonte externa $\rho_i(x)$, a versão de (1.55) para este caso é a seguinte

$$\frac{\delta \Gamma[\phi_c, \rho]}{\delta \rho_i(x)} \frac{\delta \Gamma[\phi_c, \rho]}{\delta \phi_c(x)} = \Delta^i(x) \cdot \Gamma[\phi_c, \rho], \quad (1.56)$$

onde

$$\dim \Delta^i \leq 4 - \dim \phi + \dim Q^i, \quad (1.57)$$

e, em sua ordem mais baixa,

$$\Delta^i(x) = Q^i(x) \frac{\delta S}{\delta \phi(x)} + \mathcal{O}(\hbar). \quad (1.58)$$

Vale ressaltar que o PAQ é estabelecido através de diversos teoremas de teoria quântica de campos perturbativa. A demonstração desses teoremas através do esquema de renormalização de BPHZ foi apresentada nas Refs. [55, 56, 57, 58]. A generalização para outros esquemas de renormalização também foi mostrada [59, 60, 61, 62, 63]. Nesses casos, um ponto em comum é o formalismo das funções de Green. Ainda, são assumidos critérios como localidade, renormalizabilidade por contagem de potências e invariância de Lorentz da teoria – consequentemente, covariância das funções de Green. Além disso, existe uma formulação do PAQ baseada na chamada formulação algébrica local [64], onde a constante de acoplamento é tratada como uma função local. Esta formulação do PAQ não utiliza funções de Green, mas depende de uma estrutura causal bem definida, assim como invariância de Poincaré. Em suma, é baseada na abordagem causal de Epstein-Glaser. Isto confirma que os resultados do PAQ são gerais, *i.e.*, independentes do esquema de renormalização utilizado. Isto torna esse princípio bastante poderoso para estudar as simetrias de uma teoria no nível quântico, sem a possibilidade de patologias provenientes do esquema de renormalização. Além disso, esse princípio é a pedra angular da renormalização algébrica. Em resumo, esta abordagem consiste em estudar a extensão das simetrias da teoria clássica, descritas pelas suas identidades de Ward, ao nível quântico. Essas extensões, por sua vez, seguem através dos critérios do PAQ. Assim, o estudo de possíveis anomalias e estabilidade quântica da teoria – renormalizabilidade – é feito sem a necessidade de cálculos explícitos das integrais de Feynman. Em outras palavras, a análise da renormalizabilidade de uma teoria fica baseada nas relações algébricas entre diferentes funções de Green. Para uma aplicação prática da renormalização algébrica, ver Refs. [65, 66].

É importante notar que o PAQ é aplicável a uma teoria – como a tratada neste capítulo – que seja local, renormalizável por contagem de potências e invariante de Lorentz. Precisamente, nesta tese, lidaremos com teorias que violam a simetria de Lorentz. Note, contudo, que o PAQ não invalida teorias que violam a simetria de Lorentz, mas que, na verdade, ele não pode ser seguramente aplicado em teorias desse tipo. Veremos adiante que, através do método das fontes externas de Symanzik, é possível aplicar o PAQ, dentro do formalismo algébrico, em modelos que violam a simetria de Lorentz e que sejam renormalizáveis por contagem de potências. Dessa forma, podemos analisar a

renormalizabilidade desses modelos em todas as ordens em teoria de perturbações. Ainda, podemos contornar problemas provenientes do esquema de renormalização nesses modelos. Mas isso será postergado para os capítulos seguintes, onde analisaremos essa questão em mais detalhes.

1.4.3 Cohomologia

Um conceito de grande importância dentro da renormalização algébrica – especialmente em teorias de calibre, a serem estudadas no tempo oportuno – é o conceito de cohomologia. Consideremos um operador nilpotente δ , tal que $\delta^2 = 0$. Este operador define um problema de cohomologia. As soluções da cohomologia são do tipo

$$\delta\Omega = 0 , \quad (1.59)$$

que não podem ser escritas como

$$\Omega = \delta\tilde{\Omega} . \quad (1.60)$$

A Eq. (1.59) nos diz que a quantidade Ω é fechada, enquanto que a Eq. (1.60) nos diz que a quantidade Ω é exata. Assim, quantidades fechadas são definidas a menos de uma quantidade exata. Isso define uma classe de cohomologia. Deste modo, se tomarmos duas quantidades fechadas, Ω_1 e Ω_2 , e se elas são definidas a menos de uma quantidade exata, *i.e.*,

$$\Omega_1 - \Omega_2 = \delta\tilde{\Omega} , \quad (1.61)$$

as quantidades Ω_1 e Ω_2 pertencerão à mesma classe de cohomologia. Resultado, a quantidade Ω pode ser escrita como a soma de uma quantidade não-trivial (fechada) mais uma quantidade trivial (exata). Portanto,

$$\Omega = \Omega_{nt} + \delta\tilde{\Omega} . \quad (1.62)$$

Desde que o operador δ é nilpotente, Ω é fechada para qualquer $\tilde{\Omega}$, ou seja, a quantidade $\tilde{\Omega}$ é ambígua.

Teorema. *Sejam as quantidades u_i e v_i (um par de campos, fontes, ou parâmetros escalares), definidas como*

$$\delta u_i = v_i , \quad \delta v_i = 0 , \quad (1.63)$$

i.e., um dubleto. O par (u_i, v_i) nunca pertencerá à parte não-trivial da cohomologia.

2 MODELO PADRÃO ESTENDIDO

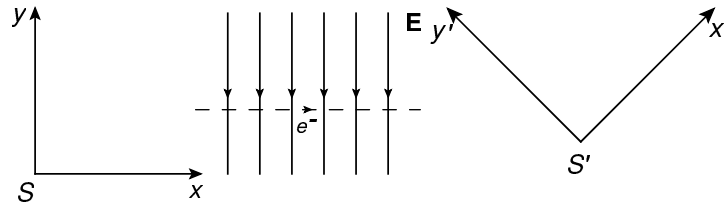
Neste capítulo abordaremos os aspectos gerais do Modelo Padrão Estendido (MPE), apontando suas subdivisões em MPE não-mínimo e mínimo. Mostraremos como o MP da Física de partículas e a Relatividade Geral são estendidos de modo a incorporar a violação das simetrias de Lorentz e de CPT no cenário do MPE. Além disso, descreveremos como essas violações podem se manifestar. Contudo, devido ao vasto conteúdo desse assunto nos limitaremos ao setor mínimo do MPE. Nossa principal atenção neste setor será descrever os avanços e estudos a cerca da consistência quântica do MPE, *i.e.*, como se situa o MPE dentro dos aspectos fundamentais das TQC's, tais como: estabilidade, causalidade, unitariedade e renormalizabilidade. Mostraremos que modelos para os quais as simetrias de Lorentz e de CPT são violadas, sob determinadas condições, também apresentam consistência sob os aspectos acima mencionados.

2.1 O MPE e a violação da simetria de Lorentz

O MPE é um modelo efetivo que descreve a violação das simetrias de Lorentz e de CPT [31, 67, 68, 69]. Ele é construído de forma a conter o MP da Física de partículas e a Relatividade Geral, acrescidos de termos que violam a simetria de Lorentz (infinitos, em princípio) construídos a partir dos campos fundamentais dessas teorias; onde campos de fundo são acoplados a operadores compostos desses campos fundamentais. A violação de Lorentz dentro do MPE pode ser proveniente de teorias mais fundamentais tais como: teoria de cordas [32, 70, 71, 72, 73], teoria de campos não-comutativa [74, 75, 76, 77, 78], *Loop Quantum Gravity* [79], teorias de campos supersimétricas [80, 81, 82], cenários de brana-mundo [83] e multiversos [84]. Dessa forma, uma das principais motivações de se estudar a violação da simetria de Lorentz é descrever efeitos de baixas energias provenientes de modelos de gravidade quântica. De fato, acessar uma física na escala de energia de Planck, $M_P \sim 10^{19}$ GeV, é algo impossível de se imaginar até em um futuro distante: uma defasagem de 15 ordens de magnitude da nossa escala de experimentos atual. Assim sendo, procura-se observar pequenos desvios do MP e da Relatividade Geral através da magnitude dos campos de fundo acoplados aos campos fundamentais dessas teorias. Desde que aqueles campos são Planck suprimidos, e até agora não se observou a violação da simetria de Lorentz na Natureza, a ordem de magnitude dos campos de fundo é esperada ser pequena.

Falamos em capítulos anteriores sobre a importância da simetria de Lorentz para a Física de partículas. Em vista disso, são necessários alguns esclarecimentos sobre o significado da violação da simetria de Lorentz no contexto do MPE. Uma vez que esse

Figura 3 - Transformação de Lorentz de Observador.



modelo incorpora campos de fundo, teremos, neste caso, duas distintas transformações de Lorentz: a transformação de Lorentz de observador e a transformação de Lorentz de partícula.

2.1.1 Transformação de Lorentz de observador

Para facilitar o entendimento, primeiro consideremos somente rotações em um sistema de referência bidimensional. Por exemplo, seja um ponto P em um sistema de referência S , cujas coordenadas neste referencial são descritas pelo par ordenado (x, y) . Podemos associar esse ponto P a outro referencial S' , por uma simples rotação anti-horária de ângulo θ do referencial S , tal que as coordenadas desse ponto no novo sistema de referência sejam

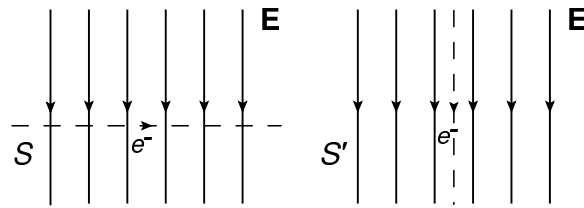
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Note que, nesse caso, independentemente se há um vetor de fundo, um observador no referencial S' verá um vetor de fundo girado de um ângulo $-\theta$. Neste caso os referenciais S e S' não têm nenhum significado físico. Assim, a física é independente de sistemas de coordenadas. Isto pode ser visualizado através da Fig. 3, onde o que é físico é sistema elétron - campo elétrico.

O exemplo acima pode ser generalizado facilmente para o caso de um campo de fundo sobre um espaço de Minkowski. De uma forma manifesta covariante de Lorentz, e a fim de incluir *boosts*, suponhamos que tenhamos um campo clássico genérico $\Phi^\mu(x)$ e um campo de fundo $Q^\mu(x)$ ⁸. Sob transformações de Lorentz de observador, *i.e.*, mudança de referenciais, esses campos se comportam como $\Phi^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu \Phi^\nu(x)$ e $Q^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu Q^\nu(x)$. Deste modo, um acoplamento do tipo $\Phi^\mu(x)Q_\mu(x)$, será um genuíno escalar de Lorentz,

⁸ Entende-se aqui que o argumento " x " não indica dependência em cada ponto do espaço-tempo, mas caracteriza o sistema de coordenadas em que ele é estudado.

Figura 4 - Transformação de Lorentz de Partícula.



ou seja, os índices estão contraídos.

2.1.2 Transformação de Lorentz de partícula

Nesta situação, por exemplo, ao invés de girar o referencial S , giramos o ponto P de uma rotação horária de ângulo θ , e deixamos S fixo, tal que as coordenadas no novo referencial S' sejam

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Nesta situação, se o ponto P descreve as coordenadas de um campo fundamental, tal operação significa uma rotação no referencial do campo. Contudo, se há um vetor de fundo ele não percebe essa rotação, pois ele permanece fixo em S . Nessa situação, como o sistema de coordenadas permanece fixo, podemos dizer que o verdadeiro referencial não é o sistema de coordenadas, mas sim o próprio elétron. Assim, se dissermos que S se refere ao elétron, a mudança para um referencial S' muda drasticamente a física, ao contrário da situação anterior (ver Fig. 4).

No espaço de Minkowski, sob transformação de Lorentz de partícula, o sistema de referência permanece fixo, mas os campos transformam-se como $\Phi'^{\mu}(x') = \Lambda^{\mu}_{\nu} \Phi^{\nu}(x)$ e $Q'^{\mu}(x') = Q^{\mu}(x)$ ⁹. Agora, um acoplamento do tipo $\Phi^{\mu}(x)Q_{\mu}(x)$ não mais será um genuíno escalar de Lorentz, *i.e.*, temos violação da simetria de Lorentz.

Essas duas situações são bem conhecidas. Por exemplo – como esquematizado nas Figs. 3 e 4 –, o caso de um elétron executando um movimento balístico imerso em um campo elétrico de um capacitor. Neste caso, o campo elétrico faz o papel de campo de fundo e um *boost* no referencial do elétron viola a simetria de Lorentz. De fato, nessa

⁹ Embora seja incomum a transformação $Q'^{\mu}(x') = Q^{\mu}(x)$ para um campo tensorial – tal transformação é comum à escalares – tal transformação indica que campos de fundo transformam-se como escalares sob o ponto de vista das transformações de Lorentz de partícula.

situação não há uma equivalência entre realizar um *boost* no referencial de um observador e realizar um *boost* no elétron. A consequência disso será a diferença de alcance do elétron nas duas situações [85]. Outro interessante exemplo é o caso de uma partícula em um potencial gravitacional linear, onde, aqui, o campo gravitacional é quem desempenha o papel de campo de fundo [86].

É importante notar que essa violação não é uma falha nos fundamentos da relatividade restrita, mas sim, uma falha sobre qual é a verdadeira rotação (ou *boost*) a ser aplicada, por exemplo, no sistema elétron-campo elétrico (capacitor). Neste caso, todo o sistema (experimento) – elétron-capacitor – deveria ser girado (ou sofrer um *boost*).

Em conclusão, desde que não há mais simetria de rotação em modelos com campos de fundo, a conservação de momento angular será violada. Isso não significa que não é possível a definição de spin para os campos fundamentais. De fato, os campos fundamentais ainda possuem representações irredutíveis sob o ponto de vista do grupo de Lorentz, *i.e.*, eles ainda sofrem as mesmas transformações de Lorentz sob a ação de elementos do grupo de Lorentz, com geradores variando de representação para representação. O setor de translações do grupo de Poincaré, contudo, não é afetado. Deste modo, o tensor energia-momento ainda é conservado.

2.1.3 Violação da simetria de Lorentz

Uma vez entendido o significado da violação da simetria de Lorentz, resta-nos saber de onde ela pode vir. Existem duas maneiras da violação da simetria de Lorentz se manifestar: através de uma quebra espontânea ou quebra explícita.

A quebra espontânea da simetria de Lorentz, como já comentamos, ocorre quando um campo tensorial adquire um valor esperado no vácuo não-trivial. Assim, uma vez que um campo tensorial condensa, ela irá adquirir um valor constante e selecionar uma direção privilegiada, permeando todo o espaço, implicando na violação da simetria de rotações e *boosts*. No caso de quebra espontânea, os modos de Nambu-Goldstone ou o mecanismo de Higgs podem trazer consequências extras a serem consideradas.

A quebra explícita da violação da simetria de Lorentz ocorre quando campos tensoriais de fundo são acoplados aos campos usuais do MP, mas não é levado em conta o surgimento de possíveis modos de Nambu-Goldstone: que são flutuações em torno do estado de vácuo (campos de fundo). Embora não esteja associado explicitamente a campos de fundo provenientes de uma quebra espontânea de simetria, esses acoplamentos não são sem sentido. De fato, é razoável pensar que se existe campos de fundo, é esperado que eles pudessem interagir com os demais campos do MP. Isso facilita o estudo fenomenológico e experimental, uma vez que através desses termos podemos indicar quais acoplamentos serão relevantes e onde os esforços devem ser direcionados.

Embora a violação explícita da simetria de Lorentz seja, teoricamente, consistente dentro do setor da Física de partículas, ela não é consistente no caso da gravitação [69]. Considerando o caso de uma teoria de gravidade do tipo Riemann-Cartan [11] com violação explícita da simetria de Lorentz, nota-se que as identidades de Bianchi são incompatíveis com a conservação covariante de energia e momento e as equações de movimento para a métrica. Este problema é contornado através da quebra espontânea de simetria; onde os coeficientes de violação de Lorentz surgem como soluções para as equações de movimento de campos fundamentais extras.

É sabido, contudo, que a quebra espontânea de simetria apresenta dois distintos cenários: quebra global e quebra local de simetria. Na gravitação isso é mais sutil, pois o campo que descreve a interação gravitacional é a métrica do espaço-tempo em questão, a qual é uma quantidade geométrica dependente em cada ponto do espaço-tempo. Diferentemente das teorias de Yang-Mills [87] onde o grupo de calibre é interno – onde se pode definir a conexão afim (ou campo de calibre) – o grupo de calibre da gravitação (considerado como uma variedade), que seria o grupo interno (também com transporte paralelo definido por uma conexão afim $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}(x)$) está diretamente relacionado à variedade base M . Contudo, sabe-se – do princípio de equivalência – que a variedade da relatividade geral localmente é Minkowski. Assim, há uma simetria de Lorentz local. Deste modo, pode-se associar localmente cada ponto da variedade base a um ponto no espaço tangente – que é Minkowski – através da *vierbein* e_{μ}^a . Ainda, a cada ponto do espaço-tempo pode-se associar uma fibra, e a conexão de spin ω_{μ}^{ab} pertencente a representação ajunta do grupo de Lorentz local define o transporte paralelo ao longo da fibra. Com a definição de *vierbein* e conexão de spin – o chamado formalismo de primeira ordem – se pode acoplar spin à gravitação.

É importante ressaltar que a quebra da simetria de Lorentz local implica na quebra de difeomorfismos e vice-versa. Em vista disso, a contagem dos modos de Nambu-Goldstone e a possibilidade do mecanismo de Higgs são propriedades sutis. De fato, a contagem dos modos de Nambu-Goldstone – como explicado na introdução – não se mantém no caso da quebra espontânea de simetria do espaço-tempo, e depende da geometria deste. Por exemplo, no espaço-tempo de Minkowski ou de Riemann os modos de Nambu-Goldstone aparecem como modos de massa nula ou modos auxiliares na *vierbein*. Não é difícil perceber que, embora não muito claro nesta rápida exposição, num espaço riemanniano os acoplamentos que poderiam fornecer massa para a métrica são acoplamentos derivativos nesta. Refletindo somente uma modificação da propagação da gravidade. Por outro lado, no espaço-tempo de Riemann-Cartan existe a possibilidade do mecanismo de Higgs; aonde a massa para a conexão de spin vem do termo cinético do campo que adquire valor esperado no vácuo não-trivial. Esta situação é favorecida se a conexão for propagante; que exige torção dinâmica. Convém ressaltar que os termos cinéticos associados à conexão de spin, que podem tornar isso possível, são sutis.

Em resumo, o estudo da quebra espontânea da simetria de Lorentz depende de vários fatores: tipos de campos que assumem valores esperados no vácuo não-triviais, características do potencial de Higgs, geometria do espaço-tempo etc. Nestes casos, embora a quebra de difeomorfismo implique necessariamente na quebra da simetria de Lorentz local, há diferenças entre os modos de Nambu-Goldstone relacionados à quebra de difeomorfismo e à quebra da simetria de Lorentz. Isto fica claro quando se estuda específicos modelos gravitacionais com quebra espontânea da simetria de Lorentz. Por exemplo, nos *Bumblebee models* [88, 89], que são modelos gravitacionais com campo vetorial, os modos de Nambu-Goldstone relacionados à quebra da simetria de Lorentz local são associados a fótons no calibre axial em um campo gravitacional, enquanto que os modos de Nambu-Goldstone relacionados à quebra de difeomorfismo são associados apenas a modos auxiliares. Além disso, nos chamados *Cardinal models* [90, 91], os modos de Nambu-Goldstone são relacionados a grávitons de massa nula. Aqui o campo que condensa é um campo tensorial de ordem dois sobre um espaço de Minkowski. Nota-se, portanto, que a quebra espontânea da simetria de Lorentz abre espaço para importantes questões fenomenológicas: novos tipos de interação.

Convém ressaltar que, além de toda a visão geral do ponto de vista teórico do MPE descrita acima, embora não completa, como será notado adiante, o MPE tem sido estudado extensivamente no âmbito fenomenológico e experimental. Podemos dizer que esses estudos estão situados em duas escalas de energias: altas energias e “baixas energias”. Altas energias poderia ser entendido como os fenômenos relacionados a processos astrofísicos com energias bem acima da escala do LHC¹⁰. Por exemplo, raios cósmicos ultraenergéticos poderiam induzir modificações nas usuais relações de dispersões relativísticas [92]; dependentes da energia e momento das partículas. Por baixas energias, referimo-nos aos processos terrestres oriundos de fenômenos atômicos ou na escala de energia do LHC. Estes processos, por sua vez, podem ser vantajosos em relação aos processos astrofísicos, devido à acurácia obtida nos experimentos. Devido à extensa literatura sobre aspectos fenomenológicos e experimentais do MPE, o leitor fica remetido a consultar as Refs. [93, 94] e referências aí contidas.

Vale ressaltar que existem várias abordagens que tratam a violação da simetria de Lorentz. Para uma visão geral sobre as diferentes abordagens da violação de Lorentz, do ponto de vista teórico, experimental e fenomenológico, ver Refs. [95, 96, 97].

Em resumo, o MPE é caracterizado pelos seguintes requerimentos:

- Independência de coordenadas;
- Contém toda a física conhecida;

¹⁰ N.T.: Sigla do inglês *Large Hadron Collider*.

- Presença de campos de fundo.

2.2 O MPE mínimo

Sendo o MPE um modelo efetivo que tem como objetivo uma ampla pesquisa de todas as possíveis violações de Lorentz a baixas energias, esse modelo leva em conta infinitos acoplamentos. A fim de sermos mais restritivos, concentraremos-nos no MPE mínimo. Este modelo é construído de modo a restringir infinitos acoplamentos e satisfaz os seguintes requerimentos:

- Respeita a simetria de calibre usual $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ do MP;
- Possui os mesmos campos do MP; incluindo Higgs e quebra espontânea de simetria do setor $SU(2)_L \times U(1)_Y$;
- Respeita a simetria do setor de translações do grupo de Poincaré;
- Os campos de fundo são acoplados a operadores compostos com dimensão limitada por quatro, *i.e.*, renormalizável por contagem de potências;
- O setor mínimo gravitacional, embora não-renormalizável, é constituído de acoplamentos que levam em conta as mais baixas ordens no tensor de Weyl, no tensor de Ricci e no escalar de curvatura. Este setor, contudo, não será estudado nesta tese.

É sabido que o MP da Física de partículas respeita os seguintes atributos: estabilidade, causalidade, unitariedade e renormalizabilidade. Assim, seria conveniente que qualquer extensão desse modelo ainda os preservasse. O MPE mínimo tem sido extensivamente estudado no que diz respeito a esses aspectos.

2.2.1 Estabilidade, causalidade e unitariedade

A estabilidade quântica está relacionada à propriedade do hamiltoniano da teoria ser limitado inferiormente. Em TQC isso significa que os autoestados no espaço de Fock devem possuir autovalores de energia positivos. Dessa forma, é necessário que a 0-componente do 4-momento seja positiva, $p^0 > 0$.

Intuitivamente, causalidade refere-se ao fato de que o efeito não pode preceder a causa ou que não existe propagação instantânea de informação; como bem estabelecido pelos postulados da Relatividade Restrita. Em TQC a causalidade pode ser vista através da análise da microcausalidade; campos de spin inteiro comutam (ou anticomutam, no

caso de campos de spin semi-inteiro) para um intervalo tipo espaço,

$$[\phi(t, \mathbf{x}), \phi(t, \mathbf{y})] = 0, \quad (x - y)^2 < 0. \quad (2.3)$$

Esta equação diz que a medida de um observável no ponto \mathbf{x} não pode ser afetada pela medida de um observável no ponto \mathbf{y} , no mesmo instante de tempo. Isto nada mais é que afirmar que nenhuma informação pode se propagar mais rápido que a velocidade da luz.

Unitariedade implica na ausência de estados de norma negativa na teoria. A condição de unitariedade foi discutida na Sec. 1.1.

Existe uma ideia bastante comum de que violar a simetria de Lorentz é equivalente a violar causalidade. Não necessariamente isso é verdade. Convém estar atento que, mesmo que uma teoria viole a simetria de Lorentz, mas preserve causalidade e unitariedade, ela ainda é uma teoria bem-vinda; o oposto não é verdade. A violação de Lorentz descrita nesta tese não invalida os postulados da Relatividade Restrita. Contudo, uma vez que campos de fundo acoplam-se aos campos usuais do MP, as relações de dispersão serão alteradas, mudando a estrutura de cone de luz em relação à teoria usual. A fim de estudar a consistência quântica do MPE, muitos estudos têm sido feitos, por exemplo, na EDQ com violação da simetria de Lorentz e de CPT: estudos acerca da estabilidade e causalidade do setor de férmions livre desse modelo [98] apontam que esse setor é causal e unitário à baixas energias comparadas à escala de energia de Planck. No entanto, o fato dos coeficientes de violação de Lorentz serem Planck-suprimidos leva à violação da estabilidade ou causalidade em escalas de energias próximas à escala de Planck. Este problema pode ser contornado através da quebra espontânea de simetria em cenários específicos. Estudos mostram que o setor bosônico de CPT-ímpar da eletrodinâmica [99] respeita estabilidade, causalidade e unitariedade [100, 101]. Além disso, esse setor quando analisado na presença do mecanismo de Higgs, também respeita causalidade e unitariedade para um vetor de fundo tipo espaço [102]. No setor bosônico de CPT-par [103], embora um pouco mais complicado devido a dificuldade de inverter o operador de onda de uma forma covariante manifesta de Lorentz, grande progresso tem sido feito acerca da consistência desses modelos. De fato, o setor não-birrefringente de paridade ímpar leva a uma eletrodinâmica estável, unitária e não-causal, enquanto que o setor de paridade par é estável, causal e unitário, para certos limites do tensor de fundo isotrópico [104]. Neste caso o propagador é obtido de uma maneira não-covariante manifesta de Lorentz (no sentido do referencial de observador). Quando o propagador de Feynman do setor não-birrefringente de paridade par anisotrópico é calculado de uma maneira tensorial fechada, resultados apontam que este setor é estável, unitário e não-causal [105]. O setor não-birrefringente de paridade ímpar também já foi analisado. Neste caso os critérios de unitariedade e microcausalidade são satisfeitos [106]. Ainda, existe a possibilidade de geração de massa para o campo do fóton a partir de tensores de CPT-par, e o estudo da consistência quântica desse modelo

também foi analisada [107, 108].

O setor de Yang-Mills com violação de Lorentz, contudo, não tem sido estudado como a EDQ estendida. No entanto, o setor de CPT-ímpar da teoria de Yang-Mills para o grupo de simetria $SO(3)$ foi estudado no contexto do mecanismo de Higgs e unitariedade e causalidade são esperadas serem mantidas para um vetor de fundo tipo espaço [109].

2.2.2 Renormalizabilidade

Vimos acima que o setor mínimo do MPE é construído de forma a ser renormalizável por contagem de potências. No entanto, esse não é um critério suficiente para a renormalizabilidade de uma teoria. Contudo, cálculos explícitos a 1-laço mostram que a EDQ com violação de Lorentz é renormalizável nessa ordem [110]. Além disso, o estudo do *running* dos coeficientes de violação de Lorentz é realizado. Verifica-se que os coeficientes de violação de Lorentz de CPT-par e CPT-ímpar têm o mesmo comportamento da função beta da constante de acoplamento eletromagnético. Uma extensão da prova da renormalizabilidade desse modelo em todas as ordens em teoria de perturbações foi proposta em [111], através do método de renormalização algébrica. O estudo da renormalizabilidade da EDQ com violação de Lorentz em espaços curvos também já foi verificada [112]. Aqui os autores tratam os campos de fundo como campos externos clássicos, ao invés de constantes.

Vale ressaltar que existem outras classes de teorias que violam a simetria de Lorentz que também respeitam unitariedade e renormalizabilidade [113]. Neste caso, a violação de Lorentz manifesta-se devido à altas derivadas no espaço, enquanto que as derivadas temporais permanecem na mesma ordem dos modelos fermiônico e bosônico usuais. Basicamente essa é uma teoria que viola a simetria de Lorentz à energias próximas à escala de Planck. A renormalizabilidade é garantida por mudar o critério de contagem de potências por introduzir o conceito de “*weighted power-counting*” [114]. O ponto principal é introduzir um regulador de modo a tratar essa discrepância entre derivadas temporais e espaciais. Em princípio, vértices que não são renormalizáveis pela contagem de potências usual são postos de forma renormalizáveis [115]. Por exemplo, a EDQ que viola a simetria de Lorentz a altas energias é super-renormalizável e seu limite a baixas energias coincide com a EDQ usual através de um limite apropriado de certos parâmetros escalares [116].

A renormalizabilidade da teoria de Yang-Mills pura com violação da simetria de Lorentz foi verificada a 1-laço [117]. Interessante nesse caso é o comportamento da função beta dos coeficientes de violação de Lorentz: o coeficiente de CPT-ímpar, nesse caso, tem o mesmo comportamento da constante de acoplamento de Yang-Mills, *i.e.*, ele é assintoticamente livre – comportamento oposto à sua versão abeliana; a função beta do coeficiente de CPT-par, contudo, não exhibe esse comportamento. Seu comportamento é

análogo ao caso abeliano. O Modelo Eletrofraco e a CDQ com violação da simetria de Lorentz também são renormalizáveis a 1-laço [118, 119].

Um ponto que gerou grandes debates foi a geração radiativa do termo tipo Chern-Simons na EDQ com violação da simetria de Lorentz (a controversia da geração de Chern-Simons) [31, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137]. Contudo, no âmbito de correções radiativas, consideramos o resultado mais drástico a geração radiativa de massa para o campo do fóton, levando à quebra da invariância de calibre [138, 139]. Voltaremos a tratar desses assuntos com mais detalhes no tempo oportuno. Importante mencionar que a geração radiativa do termo tipo Chern-Simons não-abeliano também foi obtida no setor de Yang-Mills acoplado à matéria [140].

Além dos aspectos listados acima, estudos têm sido dedicados ao setor não-mínimo da EDQ estendida [141, 142, 143, 144, 145, 146], temperatura finita [147, 148, 149] e correções radiativas [150, 151, 152, 153].

3 EDQ COM VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ

Neste capítulo apresentaremos a eletrodinâmica com violação da simetria de Lorentz no cenário do MPE mínimo, onde estenderemos a bem conhecida eletrodinâmica para um modelo que incorpore a violação da simetria de Lorentz, a chamada EDQ estendida. Além de definir a teoria clássica, analisaremos também a renormalização desse modelo a 1-laço através do cálculo dos diagramas de Feynman nesse novo cenário. Embora a renormalizabilidade dessa teoria já tenha sido analisada (ver Ref. [110]), os cálculos aqui realizados incluem mais um termo de violação de CPT-ímpar não incluído em cálculos anteriores, e os resultados que serão apresentados neste capítulo serão importantes em capítulos seguintes – a título de comparação –, onde analisaremos a renormalizabilidade da EDQ estendida em todas as ordens em teoria de perturbações.

3.1 Eletrodinâmica com violação da simetria de Lorentz

A eletrodinâmica é uma teoria de calibre baseada no grupo de calibre $U(1)$. Dessa forma, as interações entre o campo de calibre e os férmions de Dirac são limitadas a respeitarem essa simetria de calibre. Como já extensivamente comentado nesta tese, um dos requerimentos do MPE mínimo é que o setor de violação de Lorentz deve ser incorporado à teoria usual sem modificar o conteúdo desta e sem introduzir novos campos além dos campos de fundo acoplados a operadores compostos, construídos a partir dos campos usuais do MP. Com esses requerimentos, temos a seguinte ação que incorpora a violação da simetria de Lorentz

$$S_{EDQes} = S_{EDQ} + S_{VL}, \quad (3.1)$$

onde

$$S_{EDQ} = \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi \right] \quad (3.2)$$

é a ação clássica da EDQ. A derivada covariante é definida como $D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu$, o tensor intensidade de campo é escrito como $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, onde A_μ é o campo de calibre, ψ é o campo de Dirac e seu adjunto de Dirac é denotado por $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$. O parâmetro m é a massa do elétron e e é a constante de acoplamento eletromagnético. As matrizes γ^μ estão na representação de Dirac. O segundo termo no lado direito de (3.1) corresponde

ao setor de violação de Lorentz, e tem a forma

$$S_{VL} = \int d^4x \left(\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} v^\mu A^\nu \partial^\alpha A^\beta - \frac{1}{4} \kappa_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} + \bar{\psi} i \Gamma^\mu D_\mu \psi - \bar{\psi} M \psi \right), \quad (3.3)$$

onde

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu &\equiv c^{\nu\mu} \gamma_\nu + d^{\nu\mu} \gamma_5 \gamma_\nu + e^\mu + i f^\mu \gamma_5 + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta\mu} \sigma_{\alpha\beta}, \\ M &\equiv i m_5 \gamma_5 + a^\mu \gamma_\mu + b^\mu \gamma_5 \gamma_\mu + \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \sigma_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

A violação da simetria de Lorentz no setor fermiônico é caracterizada pelos campos tensoriais constantes: $c^{\nu\mu}$, $d^{\nu\mu}$, e^μ , f^μ , $g^{\alpha\beta\mu}$, m_5 , a^μ , b^μ e $h^{\mu\nu}$. Os campos tensoriais $c^{\nu\mu}$, $d^{\nu\mu}$, e^μ , f^μ and $g^{\alpha\beta\mu}$ são adimensionais e m_5 , a^μ , b^μ e $h^{\mu\nu}$ têm dimensão de massa 1. O campo tensorial $h^{\mu\nu}$ é antissimétrico e $g^{\alpha\beta\mu}$ é antissimétrico somente nos seus dois primeiros índices. Os tensores $c^{\nu\mu}$ e $d^{\nu\mu}$ são assumidos serem de traço nulo. No setor bosônico, a violação de Lorentz é caracterizada pelo campo v^μ , com dimensão de massa 1 (este termo faz parte da ação de Carroll-Field-Jackiw ou termo tipo Chern-Simons) e $\kappa_{\alpha\beta\mu\nu}$, que é adimensional. Este tensor obedece as mesmas propriedades do tensor de Riemann e possui traço nulo

$$\begin{aligned} \kappa_{\alpha\beta\mu\nu} &= \kappa_{\mu\nu\alpha\beta} = -\kappa_{\beta\alpha\mu\nu}, \\ \kappa_{\alpha\beta\mu\nu} + \kappa_{\alpha\mu\nu\beta} + \kappa_{\alpha\nu\beta\mu} &= 0, \\ \kappa^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

O requerimento de que a lagrangiana da EDQ estendida seja hermitiana implica que todos os campos de fundo sejam reais¹¹.

O fato dos tensores acima definidos serem constantes implica que a invariância de Lorentz da ação (3.1) é preservada somente sob transformações de Lorentz de observador, enquanto que, do contrário, não é invariante sob transformações de Lorentz de partícula. A constância desses tensores também implica que eles não sofrem transformações discretas, uma vez que eles estão “congelados”. Assim, acoplamentos que levam em conta tensores de fundo com um número par de índices preservam CPT¹², enquanto que acoplamentos com tensores de fundo com um número ímpar de índices não preservam CPT. Embora o modelo descrito pela ação (3.1) viole simetrias discretas, estas ainda desempenham um importante papel aqui. De fato, veremos adiante que as correções quânticas sobre a

¹¹ Neste caso os termos de derivadas devem ser definidos como, *e.g.*, na lagrangiana de Dirac, $i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \rightarrow \frac{1}{2}i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \frac{1}{2}i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$. Idem para o setor de violação de Lorentz. Por essa razão alguns acoplamentos aparecem com um fator i adicional.

¹² Para as características CPT explícitas dos campos ver Tabela 6 no Ap. C (ver Cap. 4 para uma correspondência fontes-campos de fundo).

ação clássica (3.1) são limitadas pelas propriedades dos tensores de fundo. Isso significa que, por exemplo, combinações entre tensores de fundo e (ou) parâmetros de massa que levam a um pseudovetor são evitadas a acoplarem-se a um operador composto vetorial. Isso é razoável assumir, do contrário não haveria distinção entre os vetores de fundo que acoplam-se aos bilineares de Dirac vetorial e pseudovetorial, por exemplo. Veremos adiante que essa propriedade é confirmada em cálculos a 1-laço.

Não é difícil ver que se definirmos as seguintes transformações de calibre infinitesimais

$$\begin{aligned}\delta A_\mu &= \partial_\mu \omega, \\ \delta \psi &= -ie\omega\psi, \\ \delta \bar{\psi} &= ie\omega\bar{\psi},\end{aligned}\tag{3.6}$$

onde ω é um parâmetro local infinitesimal, a ação (3.1) é invariante de calibre. Note, contudo, que o termo tipo Chern-Simons só é invariante de calibre se considerarmos que os termos de superfície podem ser seguramente desprezados e considerarmos o fato que $\partial_{[\nu}v_{\mu]} = 0$. Dizemos, então, que a simetria de calibre é preservada de forma fraca, ou na camada de massa. Embora não seja utilizada nenhuma equação de movimento para garantir a invariância de calibre da ação (3.1), o caráter da invariância de calibre na camada de massa reside no fato de ser utilizada a condição física da nulidade do 4-rotacional do campo de fundo¹³ v^μ .

3.2 Renormalização a 1-laço

Nesta seção iremos mostrar que o modelo descrito pela ação (3.1) é renormalizável a 1-laço em teoria de perturbações. Comentamos na Sec. 1.3 que uma teoria é renormalizável se as divergências que surgem nos diagramas irreduzíveis a uma partícula podem ser absorvidas pela redefinição dos campos, parâmetros e constantes de acoplamento. Contudo, os diagramas irreduzíveis a uma partícula dependem da dinâmica da teoria em questão; o que influenciará na forma da integral (1.25). Entretanto, a forma da expressão do grau superficial de divergências (1.26) é geral, mas depende dos tipos de acoplamentos da teoria. No nosso caso, uma vez que a eletrodinâmica usual foi modificada, existem duas formas de proceder a fim de construir os diagramas de Feynman da teoria e calcular suas

¹³ Neste caso, embora tal campo selecione uma direção privilegiada, ele não necessariamente será independente da posição do espaço-tempo, ou seja, constante. Contudo, isso implicaria na violação da conservação do tensor-energia momento. Assim, a fim de que o tensor energia-momento seja conservado, tal campo deve ser constante, *i.e.*, $\partial_\nu v_\mu = 0$.

respectivas integrais: uma forma é o chamado método não-perturbativo. Este método consiste em calcular o propagador modificado dos campos do fóton e do férmion. De fato, uma vez que os campos de fundo aparecem acoplados a termos bilineares nos campos do fóton e do férmion, nada mais natural pensar que esses termos implicariam numa modificação dos propagadores desses campos, e, assim, proceder-se-ia com o tratamento perturbativo como na EDQ usual, onde o parâmetro de perturbação seria a constante de acoplamento eletromagnético, perturbando-se em torno dos propagadores modificados. Existem, contudo, objeções nesse procedimento: O operador de onda do campo do fóton modificado não é invertível. Na verdade, só o termo usual do campo do fóton acrescido do termo tipo Chern-Simons é invertível (caso seja fixado o calibre), enquanto que o termo de CPT-par não é invertível. Caso similar acontece no setor fermiônico: o termo M junto com o operador de onda usual do campo do férmion é invertível. O outro termo que contem a matriz Γ acopla-se a um termo tipo vértice. Deste modo, mesmo que a parte cinética desse termo fosse invertível, não conseguiríamos isolar todo o setor de violação de Lorentz somente em termos cinéticos; ainda restaria uma contribuição de um termo de interação, estragando nosso objetivo de trabalhar com um único vértice de interação; o vértice da EDQ usual – caracterizando a ordem em teoria de perturbações. Outra dificuldade em se trabalhar com a abordagem não-perturbativa é o fato de os propagadores não-perturbativos dos campos de calibre e do férmion não terem causalidade e analiticidade bem definidas.

Outra forma de construir os diagramas de Feynman nesse modelo é através do chamado método perturbativo. Este método consiste em introduzir os coeficientes de violação de Lorentz como inserções nos diagramas de Feynman com divergências superficiais da EDQ usual. Isso é semelhante ao estudo das correções quânticas sobre operadores compostos, *i.e.*, inserindo-os nas funções de Green. As funções de Green mais fundamentais a nível árvore são descritas na sequência. Primeiramente segue o propagador do elétron

$$\longrightarrow = \frac{i(\gamma^\mu p_\mu + m)}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} \quad (3.7)$$

onde p_μ é o momento do elétron. O propagador do fóton no calibre de Feynman é

$$\mu \text{ ~~~~~ } \nu = -\frac{i\eta_{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon} \quad (3.8)$$

onde k_μ é o momento do fóton. O vértice elétron-fóton é dado por

$$\text{~~~~~} \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} = -ie\gamma^\mu \quad (3.9)$$

Ademais, para cada laço fechado de linhas fermiônicas deve-se acrescentar um fator -1 , advindo da permutação ímpar nos campos férmionicos – de acordo como teorema de Wick para o produto dos campos ordenado temporalmente; e deve-se tomar o traço, Tr , sobre as matrizes de Dirac, uma vez que uma soma em 1-laço de férmions resulta num escalar no espaço dos mesmos.

As regras de Feynman para a EDQ com violação da simetria de Lorentz são obtidas pela inserção dos coeficientes de violação de Lorentz no propagador do elétron e do fóton, ou seja,

$$\begin{aligned}
 \longrightarrow \times \longrightarrow &= -iM \\
 \longrightarrow \bullet \longrightarrow &= i\Gamma^\mu p_\mu \\
 \mu \text{ ~~~~~ } \times \text{ ~~~~~ } \nu &= -2ik^\alpha k^\beta \kappa_{\alpha\mu\beta\nu} \\
 \mu \text{ ~~~~~ } \bullet \text{ ~~~~~ } \nu &= 2v^\alpha \epsilon_{\alpha\mu\beta\nu} k^\beta
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

A inserção no vértice elétron-fóton é denotada por

$$\begin{array}{c}
 \diagup \\
 \text{~~~~~} \bullet \text{~~~~~} \\
 \diagdown
 \end{array} = -ie\Gamma^\mu \tag{3.11}$$

Através das regras de Feynman acima, obtém-se que o grau superficial de divergências da EDQ estendida é dado por

$$D = 4 - B - \frac{3}{2}F - V_B - V_F, \tag{3.12}$$

onde B é o número de pernas externas bosônicas, F é o número de pernas externas fermiônicas, V_B é uma inserção massiva no propagador bosônico e V_F é uma inserção massiva no propagador fermiônico. A expressão (3.12) nada mais é que a expressão (1.26), onde as inserções de violação de Lorentz desempenham um papel de constantes de acoplamento. Aqui, contudo, quem irá estabelecer a ordem em teoria de perturbações é a constante de acoplamento eletromagnético. Assim, a 1-laço, que é o interesse deste capítulo, teremos uma ordem $\mathcal{O}(e^2)$, e não é esperado contribuições não-lineares nos coeficientes de violação de Lorentz. A partir de (3.12), vemos que a EDQ usual possui um número finito de diagramas divergentes, veja Fig. 5. Contudo, através das identidades de Ward-Takahashi [154, 155, 156, 157], é possível mostrar que o gráfico d não apresenta divergências. E, pelo teorema de Furry [158], o gráfico e tem uma amplitude total nula.

A inserção dos coeficientes de violação de Lorentz nos gráficos a , b e c da EDQ usual levam aos diagramas topologicamente inequivalentes mostrados nas Figs. 6, 7 e 8. Desde que estamos interessados nesta tese somente em diagramas que apresentem divergências genuínas – com exceção da próxima seção –, não trataremos das inserções no gráfico d da

Figura 5 - Gráficos a-1-laço na EDQ usual.

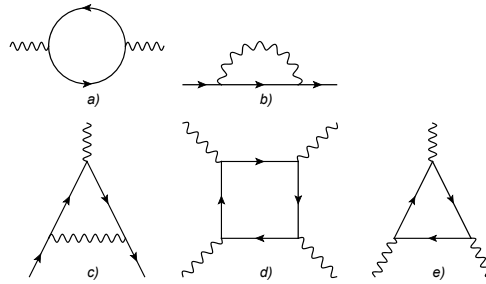
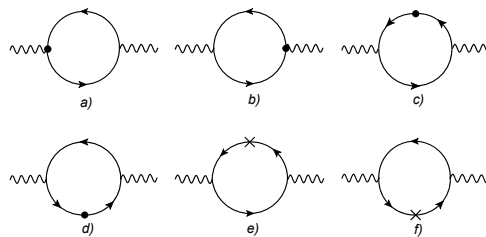


Figura 6 - Polarização do vácuo na EDQ estendida.



EDQ usual.

A fim de calcular as integrais de Feynman para os diagramas acima mostrados, empregaremos aqui o método de regularização dimensional. O método de regularização de Pauli-Villars também seria viável, uma vez que ele preserva a invariância de calibre, mas consideramos mais inconveniente devido à introdução de campos massivos auxiliares. Como já comentamos no Cap. 1, a regularização dimensional é vantajosa, pois além de preservar a simetria sob o grupo de Poincaré, preserva invariância de calibre. Contudo, na EDQ estendida, temos duas possíveis objeções para usá-la: a quebra da simetria de Lorentz e a presença da matriz γ_5 ; embora na ausência de férmions quirais. A primeira objeção pode ser contornada pelo fato de que as integrações são feitas nos momentos, e estes, por sua vez, são covariantes sob as transformações de observador e de partícula, e as integrais podem ser realizadas sem levar em conta o caráter dos coeficientes de violação de Lorentz. Estes irão aparecer apenas contraindo o resultado das integrais. A segunda objeção é um problema, pois embora as matrizes- γ e sua álgebra sejam bem definidas em dimensões arbitrárias, a matriz γ_5 só é bem definida em quatro dimensões. Isso significa

Figura 7 - Autoenergia do elétron na EDQ estendida.

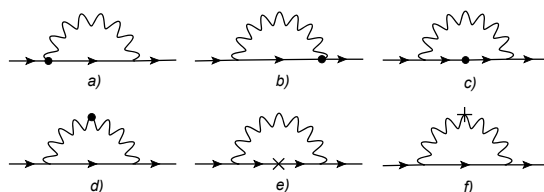
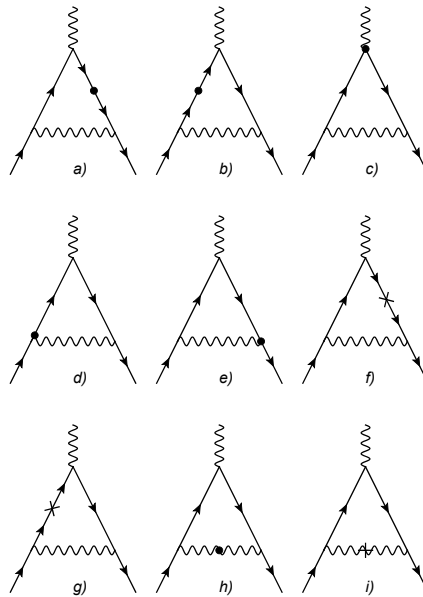


Figura 8 - Vértice elétron-fóton na EDQ estendida.



que a relação

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}\mathbb{1}, \quad (3.13)$$

é válida em d dimensões, enquanto que

$$\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0, \quad (3.14)$$

não é mais bem definida. De fato, a fim de reproduzir corretamente o resultado da anomalia quiral (ver Cap. 4), a álgebra (3.14) deve ser modificada em d dimensões. Seguindo a definição de t'Hooft-Veltman [45]

$$\begin{aligned} \{\gamma^\mu, \gamma_5\} &= 0, \quad \text{se } \mu = 0, 1, 2, 3, \\ [\gamma^\mu, \gamma_5] &= 0, \quad \mu > 4. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Como estamos interessados, nesta tese, somente em cálculos a 1-laço de quantidades divergentes – com exceção da próxima seção –, trabalharemos com a álgebra (3.14). De fato, se estivéssemos interessados em quantidades finitas, como possíveis induções radiativas, ou cálculos a mais ordens em teoria de perturbações, cuidados extras seriam necessários.

As correções radiativas com as divergências regularizadas para os gráficos mostrados na Fig. 5 referentes à polarização do vácuo, à autoenergia do elétron e ao vértice

elétron-fóton são, respectivamente, dadas por

$$\begin{aligned}\Pi^{\mu\nu}(k) &= \frac{4}{3}I_0 (k^\mu k^\nu - k^2 \eta^{\mu\nu}) , \\ \Sigma(p) &= I_0 (-\gamma^\mu p_\mu + 4m) , \\ \Lambda^\mu &= I_0 \gamma^\mu ,\end{aligned}\tag{3.16}$$

onde $I_0 = \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon}$. Desde que esses cálculos são comuns em livros-texto, não os desenvolvemos aqui.

Como um exemplo, para os gráficos da polarização do vácuo na EDQ estendida, mostrados na Fig. 6, apresentamos os passos iniciais do cálculo do primeiro diagrama desse tipo. A partir das regras de Feynman, obtém-se

$$i\Pi_a^{\mu\nu}(k) = -(-ie)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\Gamma^\mu \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \gamma^\nu \frac{i(\not{p} + \not{k} + m)}{(p+k)^2 - m^2} \right]. \tag{3.17}$$

Aplicando o procedimento de regularização dimensional apresentado no Ap. D,

$$i\Pi_a^{\mu\nu}(k) = -e^2 \mu^\epsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \text{Tr} \left\{ \frac{\Gamma^\mu (\not{p} + m) \gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m)}{[(p+k)^2 - m^2]x + (1-x)(p^2 - m^2)} \right\}. \tag{3.18}$$

O denominador, $D(p, k)$, de (3.18) pode ser escrito como

$$D(p, k) = [(p+k)^2 - m^2]x + (1-x)(p^2 - m^2) = (p+kx)^2 + x(1-x)k^2 - m^2. \tag{3.19}$$

Assim, se fizermos uma mudança de variável $p \rightarrow p - kx$ em todo integrando de (3.18), o denominador fica de uma forma mais conveniente, $D(p - kx, k) = p^2 - Q^2$, onde $Q^2 = -x(1-x)k^2 + m^2$. Desta maneira, depois de tomar o traço sobre as matrizes- γ , a integral (3.17) pode ser posta na forma das integrais (D.6) ou (D.7). Aplicando esse procedimento para todos os gráficos da Fig. 6, encontra-se

$$\begin{aligned}\Pi_a^{\mu\nu}(k) &= \frac{4}{3}I_0 (c^{\alpha\mu} k_\alpha k^\nu - k^2 c^{\nu\mu} - 6mi g^{\alpha\nu\mu} k_\alpha) , \\ \Pi_b^{\mu\nu}(k) &= \frac{4}{3}I_0 (c^{\alpha\nu} k_\alpha k^\mu - k^2 c^{\mu\nu} - 6mi g^{\mu\alpha\nu} k_\alpha) , \\ \Pi_c^{\mu\nu}(k) &= \frac{2}{3}I_0 [c^{\mu\alpha} k_\alpha k^\nu + c^{\nu\alpha} k_\alpha k^\mu - 2c^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta \eta^{\mu\nu} + m(k^\mu e^\nu + k^\nu e^\mu - 2e^\alpha k_\alpha \eta^{\mu\nu}) + \\ &\quad + 6mi (g^{\alpha\nu\mu} + g^{\mu\alpha\nu}) k_\alpha] , \\ \Pi_d^{\mu\nu}(k) &= \frac{2}{3}I_0 [c^{\mu\alpha} k_\alpha k^\nu + c^{\nu\alpha} k_\alpha k^\mu - 2c^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta \eta^{\mu\nu} - m(k^\mu e^\nu + k^\nu e^\mu - 2e^\alpha k_\alpha \eta^{\mu\nu}) + \\ &\quad + 6mi (g^{\alpha\nu\mu} + g^{\mu\alpha\nu}) k_\alpha] , \\ \Pi_e^{\mu\nu}(k) &= \frac{4}{3}I_0 (k^\mu a^\nu + k^\nu a^\mu - 2a^\alpha k_\alpha \eta^{\mu\nu} + 6mi h^{\mu\nu}) ,\end{aligned}$$

$$\Pi_f^{\mu\nu}(k) = -\frac{4}{3}I_0 (k^\mu a^\nu + k^\nu a^\mu - 2a^\alpha k_\alpha \eta^{\mu\nu} + 6mih^{\mu\nu}) . \quad (3.20)$$

Somando todas as contribuições para a polarização do vácuo na EDQ estendida apresentadas em (3.20), encontra-se

$$\Pi_{VL}^{\mu\nu}(k) = \frac{4}{3}I_0 [(c^{\alpha\mu} + c^{\mu\alpha}) k_\alpha k^\nu + (c^{\alpha\nu} + c^{\nu\alpha}) k_\alpha k^\mu - (c^{\mu\nu} + c^{\nu\mu}) k^2 - 2c^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta \eta^{\mu\nu}] . \quad (3.21)$$

O diagrama *a* (ver Fig. 7) relacionado à autoenergia do elétron na EDQ estendida contribui como

$$-i\Sigma_a(p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \Gamma^\mu \frac{i(\not{k} + \not{p} + m)}{(k+p)^2 - m^2} \gamma^\nu \frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2} . \quad (3.22)$$

Esta amplitude, regularizada, já com a parametrização de Feynman, tem a forma

$$-i\Sigma_a(p) = -e^2 \mu^\epsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\Gamma^\mu (\not{k} + \not{p} + m) \gamma_\mu}{[(k+p)^2 - m^2]x + (1-x)k^2]^2} . \quad (3.23)$$

Depois de um extenso cálculo, obtém-se para todos os diagramas da Fig. 7 os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} \Sigma_a(p) &= I_0 \left[\left(\Gamma^\mu - \frac{1}{2} \Gamma^\nu \gamma_\nu \gamma^\mu \right) p_\mu + m \Gamma^\nu \gamma_\nu \right] , \\ \Sigma_b(p) &= I_0 \left[(c^{\mu\nu} + d^{\mu\nu} \gamma_5) \gamma_\nu p_\mu - g^{\mu\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} p_\mu + g_{\alpha\beta}^\beta \sigma^{\alpha\mu} p_\mu + \frac{1}{2} \Gamma^\nu \gamma_\nu \gamma^\mu p_\mu + \right. \\ &\quad \left. - m \left(c^{\nu\mu} \gamma_\nu \gamma_\mu - d^{\nu\mu} \gamma_5 \gamma_\nu \gamma_\mu - e^\mu \gamma_\mu + i f^\mu \gamma_\mu - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta\mu} \gamma_\mu \sigma_{\alpha\beta} \right) \right] , \\ \Sigma_c(p) &= I_0 \left[\frac{1}{3} (c^{\mu\nu} + d^{\mu\nu} \gamma_5) \gamma_\nu p_\mu - \frac{2}{3} (c^{\nu\mu} + d^{\nu\mu} \gamma_5) \gamma_\nu p_\mu - 2 (e^\mu + i f^\mu \gamma_5) p_\mu + \right. \\ &\quad \left. + m \left(e^\mu \gamma_\mu - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta\mu} \gamma_\mu \sigma_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta\mu} \sigma_{\alpha\beta} \gamma_\mu \right) \right] , \\ \Sigma_d(p) &= I_0 [4im_5 \gamma_5 + (a^\mu + b^\mu \gamma_5) \gamma_\mu] , \\ \Sigma_e(p) &= 3I_0 \gamma_5 \gamma_\mu v^\mu , \\ \Sigma_f(p) &= -\frac{4}{3} I_0 \gamma^\nu p_\mu \kappa^{\mu\alpha}{}_{\nu\alpha} . \end{aligned} \quad (3.24)$$

Levando em conta toda a contribuição, temos

$$\begin{aligned} \Sigma_{VL}(p) &= I_0 \left[\frac{1}{3} (c^{\nu\mu} + d^{\nu\mu} \gamma_5) \gamma_\nu p_\mu + \frac{4}{3} (c^{\mu\nu} - \kappa^{\mu\alpha\nu}{}_\alpha + d^{\mu\nu} \gamma_5) \gamma_\nu p_\mu - (e^\mu + i f^\mu \gamma_5) p_\mu + \right. \\ &\quad \left. + m d_{\alpha\beta} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} \sigma_{\mu\nu} + 4im_5 \gamma_5 + (a^\mu + 3me^\mu) \gamma_\mu + \right. \end{aligned}$$

$$+ \left(b^\mu - \frac{1}{2} m g_{\alpha\beta\sigma} \epsilon^{\alpha\beta\sigma\mu} + 3v^\mu \right) \gamma_5 \gamma_\mu + \left(\frac{1}{2} g^{\alpha\beta\mu} \sigma_{\alpha\beta} + g^\beta_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\mu} - g^{\mu\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} \right) p_\mu \Big]. \quad (3.25)$$

O gráfico *a* do vértice elétron-fóton na EDQ estendida (ver Fig. 8) tem a forma

$$\begin{aligned} -ie\Lambda_a^\mu &= (-ie)^3 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^\alpha \frac{i(\not{k} + \not{p} + m)}{(k+p)^2 - m^2} \gamma^\mu \frac{i(\not{k} + \not{p}' + m)}{(k+p')^2 - m^2} i\Gamma^\rho(k+p')_\rho \times \\ &\times \frac{i(\not{k} + \not{p}' + m)}{(k+p')^2 - m^2} \gamma^\beta \frac{-i\eta_{\alpha\beta}}{k^2}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Sua versão regularizada é

$$\begin{aligned} -ie\mu^{\frac{\epsilon}{2}}\Lambda_a^\mu &= 6e^3\mu^{\frac{3\epsilon}{2}} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy y \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \times \\ &\times \frac{\gamma^\alpha(\not{k} + \not{p} + m)\gamma^\mu(\not{k} + \not{p}' + m)\Gamma^\rho(k+p')_\rho(\not{k} + \not{p}' + m)\gamma_\alpha}{[k^2(1-x-y) + ((k+p)^2 - m^2)x + ((k+p')^2 - m^2)y]^4}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Finalmente, as correções a 1-laço para o vértice elétron-fóton na EDQ estendida são:

$$\begin{aligned} \Lambda_a^\mu &= -I_0 \left[\frac{2}{3} (c^{\nu\mu} + d^{\nu\mu} \gamma_5) \gamma_\nu - \frac{1}{2} (c^{\nu\alpha} + d^{\nu\alpha} \gamma_5) \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma^\mu - \frac{1}{3} (c^{\mu\nu} + d^{\mu\nu} \gamma_5) \gamma_\nu + e^\mu + \right. \\ &\quad \left. + if^\mu \gamma_5 + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta\mu} \sigma_{\alpha\beta} - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta\sigma} (\sigma_{\alpha\beta} \gamma_\sigma \gamma^\mu + \gamma_\sigma \gamma^\mu \sigma_{\alpha\beta}) \right], \\ \Lambda_b^\mu &= -I_0 \left[\frac{2}{3} (c^{\mu\nu} + d^{\mu\nu} \gamma_5) \gamma_\nu + \frac{1}{2} (c^{\nu\alpha} + d^{\nu\alpha} \gamma_5) \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma^\mu - \frac{1}{3} (c^{\nu\mu} + d^{\nu\mu} \gamma_5) \gamma_\nu + e^\mu + \right. \\ &\quad \left. + if^\mu \gamma_5 - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta\mu} \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta\sigma} (\sigma_{\alpha\beta} \gamma_\sigma \gamma^\mu + \gamma_\sigma \gamma^\mu \sigma_{\alpha\beta}) \right], \\ \Lambda_c^\mu &= I_0 [(c^{\nu\mu} + d^{\nu\mu} \gamma_5) \gamma_\nu + 4(e^\mu + if^\mu \gamma_5)], \\ \Lambda_d^\mu &= -I_0 \left(\Gamma^\mu - \frac{1}{2} \Gamma^\nu \gamma_\nu \gamma^\mu \right), \\ \Lambda_e^\mu &= -I_0 \left[(c^{\mu\nu} + d^{\mu\nu} \gamma_5) \gamma_\nu + \frac{1}{2} (c^{\nu\alpha} + d^{\nu\alpha} \gamma_5) \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma^\mu + \frac{1}{2} (e^\nu + if^\nu \gamma_5) \gamma_\nu \gamma^\mu + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} g^{\alpha\beta\sigma} \gamma_\sigma \gamma^\mu \sigma_{\alpha\beta} \right], \\ \Lambda_i^\mu &= \frac{4}{3} I_0 \gamma^\nu \kappa^{\mu\alpha}_{\nu\alpha}, \\ \Lambda_f^\mu &= \Lambda_g^\mu = \Lambda_h^\mu = 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

A contribuição total é

$$\begin{aligned} \Lambda_{VL}^\mu &= -I_0 \left[\frac{1}{3} (c^{\nu\mu} + d^{\nu\mu} \gamma_5) + \frac{4}{3} (c^{\mu\nu} - \kappa^{\mu\alpha\nu}{}_\alpha + d^{\mu\nu} \gamma_5) - (e^\mu + i f^\mu \gamma_5) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{2} g^{\alpha\beta\mu} \sigma_{\alpha\beta} + g^\beta{}_{\alpha\beta} \sigma^{\alpha\mu} - g^{\mu\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Desde que esses são os cálculos a 1-laço das correções quânticas da ação clássica que são divergentes no limite $\epsilon \rightarrow 0$, precisamos renormalizar a teoria, a fim de termos uma ação efetiva finita; com parâmetros bem definidos. A partir da ação efetiva (1.20), temos

$$\Gamma = S + \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n \Gamma^{(n)} = S + \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n \Gamma_{fin}^{(n)} + \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n \Gamma_{div}^{(n)}, \quad (3.30)$$

onde separamos as correções quânticas sobre a ação efetiva nas partes finita e divergente. Como estamos interessados somente nos termos divergentes, desconsideraremos $\Gamma_{fin}^{(n)}$, e aplicaremos o esquema de renormalização MS no intuito de absorver as divergências da ação efetiva pela redefinição dos campos, parâmetros e constantes de acoplamento. Isso pode ser feito se definirmos a seguinte ação não-renormalizada

$$S[\Phi_0, \xi_0] = S[\Phi, \xi] + \sum_{n=1}^{\infty} \hbar^n \Gamma_{div}^{(n)}[\Phi, \xi]. \quad (3.31)$$

Assim, redefinindo as quantidades renormalizadas em termos das quantidades não-renormalizadas

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= Z_\Phi^{1/2} \Phi, & \Phi &\in \{A, \bar{\psi}, \psi\}, \\ \xi_0 &= Z_\xi \xi, & \xi &\in \{e, m\}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde os Z 's são os chamados fatores de renormalização enquanto Φ_0 e ξ_0 correspondem aos campos e parâmetros não-renormalizados, respectivamente. É simples fixar os parâmetros de renormalização se $S[\Phi, \xi]$ for a ação renormalizada, como em (1.30).

Os fatores de renormalização para o fóton, elétron e massa do elétron, são

$$\begin{aligned} Z_A^{1/2} &= 1 - \frac{e^2}{12\pi^2\epsilon}, \\ Z_\psi^{1/2} &= 1 - \frac{e^2}{16\pi^2\epsilon}, \\ Z_m &= 1 - \frac{3e^2}{8\pi^2\epsilon}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

respectivamente. A renormalização para a constante de acoplamento eletromagnético é

dada por

$$Z_e = Z_A^{-1/2} = 1 + \frac{e^2}{12\pi^2\epsilon}. \quad (3.34)$$

Vemos que os fatores de renormalização da EDQ usual não são alterados dentro do cenário de violação da simetria de Lorentz. Ainda, é importante notar que a renormalização da constante de acoplamento depende somente da renormalização do campo do fóton. Isto significa que o acoplamento eletromagnético não depende das propriedades do férmion em questão. Desta forma, o campo do fóton se acopla da mesma maneira à todas as partículas carregadas eletricamente.

Alguns campos de fundo, embora não possuam o mesmo número de índices ou dimensão de massa, possuem as mesmas simetrias discretas. Deste modo, eles sofrerão renormalização matricial. De modo geral, temos

$$\mathcal{J}_0 = \mathcal{Z}_{\mathcal{J}} \mathcal{J}, \quad (3.35)$$

onde \mathcal{J} é uma matriz coluna. A quantidade $\mathcal{Z}_{\mathcal{J}}$ é uma matriz quadrada com os fatores de renormalização associados. Primeiramente, para a matriz de renormalização dos fatores $\kappa_{\alpha\mu\beta\nu}$ e $c_{\nu\mu}$, obtemos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \kappa_{0\alpha\mu\beta\nu} \\ c_{0\nu\mu} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (Z_{\kappa\kappa})_{\alpha\mu\beta\nu}^{\theta\rho\omega\delta} & (Z_{\kappa c})_{\alpha\mu\beta\nu}^{\theta\omega} \\ (Z_{c\kappa})_{\nu\mu}^{\theta\rho\omega\delta} & (Z_{cc})_{\nu\mu}^{\theta\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_{\theta\rho\omega\delta} \\ c_{\theta\omega} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1 + \frac{e^2}{6\pi^2\epsilon})\delta_{\alpha}^{\theta}\delta_{\mu}^{\rho}\delta_{\beta}^{\omega}\delta_{\nu}^{\delta} & \frac{e^2}{12\pi^2\epsilon}T_{\alpha\mu\beta\nu}^{\theta\omega} \\ -\frac{e^2}{6\pi^2\epsilon}\eta^{\rho\delta}\delta_{\nu}^{\theta}\delta_{\mu}^{\omega} & \delta_{\nu}^{\theta}\delta_{\mu}^{\omega} + \frac{e^2}{6\pi^2\epsilon}(\delta_{\nu}^{\theta}\delta_{\mu}^{\omega} + \delta_{\mu}^{\theta}\delta_{\nu}^{\omega}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_{\theta\rho\omega\delta} \\ c_{\theta\omega} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

onde

$$T_{\alpha\mu\beta\nu}^{\theta\omega} \equiv \eta_{\alpha\nu}(\delta_{\mu}^{\theta}\delta_{\beta}^{\omega} + \delta_{\beta}^{\theta}\delta_{\mu}^{\omega}) - \eta_{\alpha\beta}(\delta_{\mu}^{\theta}\delta_{\nu}^{\omega} + \delta_{\nu}^{\theta}\delta_{\mu}^{\omega}) - \eta_{\mu\nu}(\delta_{\alpha}^{\theta}\delta_{\beta}^{\omega} + \delta_{\beta}^{\theta}\delta_{\alpha}^{\omega}) + \eta_{\mu\beta}(\delta_{\alpha}^{\theta}\delta_{\nu}^{\omega} + \delta_{\nu}^{\theta}\delta_{\alpha}^{\omega}). \quad (3.37)$$

A contração $T_{\alpha\mu\beta\nu}^{\theta\omega}C_{\theta\omega}$ tem as mesmas simetrias que o tensor $\bar{\kappa}_{\alpha\mu\beta\nu}$. Para a renormalização dos campos de fundo a^{μ} e e^{μ} , obtém-se

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a_0^{\mu} \\ e_0^{\mu} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Z_{aa} & Z_{ae} \\ Z_{ea} & Z_{ee} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{\mu} \\ e^{\mu} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3e^2}{8\pi^2\epsilon}m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{\mu} \\ e^{\mu} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Para $h^{\nu\mu}$ e $d^{\nu\mu}$, temos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} h_0^{\nu\mu} \\ d_0^{\nu\mu} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (Z_{hh})^{\nu\mu\alpha\beta} & (Z_{hd})^{\nu\mu\alpha\beta} \\ (Z_{dh})^{\nu\mu\alpha\beta} & (Z_{dd})^{\nu\mu\alpha\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{\alpha\beta} \\ d_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1 + \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon})\eta^{\nu\alpha}\eta^{\mu\beta} & -m\frac{e^2}{4\pi^2\epsilon}\epsilon^{\nu\mu\alpha\beta} \\ 0 & \eta^{\nu\alpha}\eta^{\mu\beta} + \frac{e^2}{6\pi^2\epsilon}(\eta^{\nu\alpha}\eta^{\mu\beta} + \eta^{\nu\beta}\eta^{\mu\alpha}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{\alpha\beta} \\ d_{\alpha\beta} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Para b^μ , v^μ e $g^{\alpha\beta\gamma}$, temos a seguinte renormalização matricial

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} b_0^\mu \\ v_0^\mu \\ g_0^{\alpha\beta\gamma} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (Z_{bb})^\mu{}_\omega & (Z_{bv})^\mu{}_\omega & (Z_{bg})^\mu{}_{\lambda\rho\sigma} \\ (Z_{vb})^\mu{}_\omega & (Z_{vv})^\mu{}_\omega & (Z_{vg})^\mu{}_{\lambda\rho\sigma} \\ (Z_{gb})^{\alpha\beta\gamma}{}_\omega & (Z_{gv})^{\alpha\beta\gamma}{}_\omega & (Z_{gg})^{\alpha\beta\gamma}{}_{\lambda\rho\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^\omega \\ v^\omega \\ g^{\lambda\rho\sigma} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \delta_\omega^\mu & -\frac{3e^2}{8\pi^2\epsilon}\delta_\omega^\mu & m\frac{e^2}{16\pi^2\epsilon}\epsilon_{\lambda\rho\sigma}{}^\mu \\ 0 & (1 + \frac{e^2}{6\pi^2\epsilon})\delta_\omega^\mu & 0 \\ 0 & 0 & \delta_\lambda^\alpha\delta_\rho^\beta\delta_\sigma^\gamma + \frac{e^2}{8\pi^2\epsilon}(2\delta_\lambda^\alpha\delta_\rho^\beta\delta_\sigma^\gamma + S^{\alpha\beta\gamma}{}_{\lambda\rho\sigma}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^\omega \\ v^\omega \\ g^{\lambda\rho\sigma} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.40)$$

onde

$$S^{\alpha\beta\gamma}{}_{\lambda\rho\sigma} \equiv \delta_\lambda^\gamma\delta_\rho^\beta\delta_\sigma^\alpha - \delta_\lambda^\gamma\delta_\rho^\alpha\delta_\sigma^\beta + \delta_\lambda^\beta\eta_{\rho\sigma}\eta^{\alpha\gamma} - \delta_\lambda^\alpha\eta_{\rho\sigma}\eta^{\beta\gamma}. \quad (3.41)$$

A contração $S^{\alpha\beta\gamma}{}_{\lambda\rho\sigma}G^{\lambda\rho\sigma}$ tem as mesmas simetrias discretas de $G^{\alpha\beta\gamma}$. Para os tensores que não sofrem mistura quântica, f^μ e m_5 , temos os seguintes fatores de renormalização

$$\begin{aligned} Z_f &= 1, \\ Z_{m_5} &= 1 - \frac{3e^2}{8\pi^2\epsilon}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Como comentado na Sec. 3.1, embora o modelo aqui tratado viole simetrias discretas, estas ainda desempenham um papel importante. A partir de (3.21), (3.25) e (3.29), vemos que campos de fundo que se acoplam a operadores compostos vetoriais sofrem mistura quântica; o mesmo acontece para o caso de campos de fundo acoplados a operadores pseudovetoriais. Contudo, não se observa misturas entre os campos de fundo a^μ e b^μ . De fato, embora eles sejam congelados sob simetrias discretas, os operadores compostos aos quais eles estão acoplados indicam que eles são distinguíveis classicamente e também quanticamente.

3.3 Sobre a geração do termo tipo Chern-Simons

Analizemos agora, de forma mais detalhada possível, o cálculo do diagrama e da Fig. 7 considerando somente a contribuição do vetor de fundo b_μ : divergente e (ou) finita.

A partir das regras de Feynman, temos

$$i\Pi^{\alpha\beta}(k) = -(-ie)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma^\alpha \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} (-i\gamma_5 \not{b}) \frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2} \gamma^\beta \frac{i(\not{p} + \not{k} + m)}{(p+k)^2 - m^2} \right]. \quad (3.43)$$

Novamente, aplicando o procedimento de regularização dimensional, juntamente com a parametrização de Feynman, apresentado no Ap. D,

$$i\Pi^{\alpha\beta}(k) = -e^2 \mu^\epsilon \int_0^1 dx (1-x) \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \text{Tr} \left\{ \frac{\gamma^\alpha (\not{p} + m) \gamma_5 \not{b} (\not{p} + m) \gamma^\beta (\not{p} + \not{k} + m)}{[(p+k)^2 - m^2]x + (1-x)(p^2 - m^2)]^3} \right\}. \quad (3.44)$$

Dado o numerador de (3.44), ou seja,

$$N(p, k) = \text{Tr} [\gamma^\alpha (\not{p} + m) \gamma_5 \not{b} (\not{p} + m) \gamma^\beta (\not{p} + \not{k} + m)]. \quad (3.45)$$

Realizando a mudança $p \rightarrow p - kx$, e pela contagem de potências de momento p , a contribuição de (3.45) pode ser dividida em duas partes, uma divergente e outra finita¹⁴, *i.e.*,

$$\begin{aligned} N_{div}^{\alpha\beta}(p - kx, k) &= \frac{p^2}{d} [-2(1-x) + (1-x)(d-4) - 2x(2-d)] \text{Tr} \mathbb{1} i\epsilon^{\alpha\beta\mu\sigma} k_\sigma b_\mu, \\ N_{fin}^{\alpha\beta}(p - kx, k) &= [-2(x^2 - x^3)k^2 - 4m^2(1+x)] i\epsilon^{\alpha\beta\mu\sigma} k_\sigma b_\mu. \end{aligned} \quad (3.47)$$

O denominador de (3.44) é aquele mostrado em (3.19). Assim, a contribuição divergente, A , para (3.44), tem a forma (omitimos o fator global $e^2 i\epsilon^{\alpha\beta\mu\sigma} k_\sigma b_\mu$)

$$\begin{aligned} A &= -\frac{2}{d} \text{Tr} \mathbb{1} \int_0^1 dx (1-x) [-2(1-x) + (1-x)(d-4) - 2x(2-d)] \mu^\epsilon \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{p^2}{[p^2 - Q^2]^3} \\ &= -\frac{i}{32\pi^2} \text{Tr} \mathbb{1} \left[\left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma_E \right) \int_0^1 dx (-2 + 8x - 6x^2) - 2 \int_0^1 dx (1-x^2) + \right. \\ &\quad \left. - \int_0^1 dx (-2 + 8x - 6x^2) \ln \frac{-x(1-x)k^2 + m^2}{4\pi\mu^2} + \mathcal{O}(\epsilon) \right], \end{aligned} \quad (3.48)$$

onde usamos as relações (D.6), (D.10) e (D.11), mostradas no Ap. D. Desde que a primeira integral acima é nula, e, sem perda de generalidade, podemos tomar o momento do fóton

¹⁴ Usamos aqui a propriedade de que o traço sobre um número ímpar de matrizes- γ é nulo. Ainda, rearranjamos as matrizes dentro do traço somente usando a ciclicidade do mesmo. Isto independe da dimensão em que as matrizes são definidas. Por exemplo,

$$\text{Tr}(\gamma^\alpha \gamma^\lambda \gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma_\lambda) = \text{Tr}(\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma_\lambda \gamma^\alpha \gamma^\lambda) = (2-d) \text{Tr}(\gamma_5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\alpha) = -i(2-d) \epsilon^{\mu\nu\beta\alpha} \text{Tr} \mathbb{1} \quad (3.46)$$

Ademais, o traço sobre os termos que fornecem uma contribuição finita foi tomado em quatro dimensões.

na camada de massa¹⁵, *i.e.*, $k^2 = 0$, o único termo que pode contribuir é o segundo, que é finito. Assim, $\text{Tr}1$ pode ser tomado em quatro dimensões. Resultado,

$$A = \frac{i}{6\pi^2}. \quad (3.49)$$

A parte finita, B , de (3.44) tem a forma

$$\begin{aligned} B &= -2 \int_0^1 dx (1-x) [-2(x^2 - x^3)k^2 - 4m^2(1+x)] \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[p^2 - Q^2]^3} \\ &= \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx [-2(1-x)(x^2 - x^3)k^2 - 4m^2(1-x^2)] \frac{1}{-x(1-x)k^2 + m^2} \end{aligned} \quad (3.50)$$

onde usamos (D.6). Novamente, tomemos o momento do fóton na camada de massa e, assim, obtemos

$$B = -\frac{i}{6\pi^2}. \quad (3.51)$$

O resultado total da autoenergia (3.44) é

$$i\Pi^{\alpha\beta}(k) = (A + B)e^2 i\epsilon^{\alpha\beta\mu\sigma} k_\sigma b_\mu, \quad (3.52)$$

que claramente é nulo. Vemos, então, que o gráfico e da Fig. 7 não induz um termo tipo Chern-Simons. O mesmo resultado é obtido para o gráfico f da mesma figura. Conclusão: não há geração do termo tipo Chern-Simons, a 1-laço, através da regularização dimensional, na EDQ estendida.

3.4 Prescrição de regularização e ambiguidades a 1-laço: discussão

O cálculo da possível geração radiativa do termo tipo Chern-Simons, realizado na seção anterior, tem sido objeto de intensa discussão na literatura, sob os mais variados pontos de vista. De fato, como anteriormente comentado, o cálculo da correção quântica sobre operadores compostos que levam em conta a matriz γ_5 , como é o caso do operador composto acoplado a b^μ , não é uma questão trivial; sobre qual seria o esquema de regularização mais adequado nesse caso. Somado a essa dificuldade, há também a questão do cálculo através das abordagens não-perturbativa e perturbativa (a utilizada nesta tese).

¹⁵ Isto é possível desde que os fótons são estados assintóticos (ondas planas), não conectados a outros diagramas. Assim, se o diagrama e fosse um subdiagrama de outro diagrama, tal operação não seria permitida.

A questão central é se a 1-laço poderíamos ter

$$v^\mu = r(e^2)b^\mu, \quad (3.53)$$

onde $r(e^2)$ é um parâmetro dependente da constante de acoplamento eletromagnético. A discussão é se a correção acima é finita e determinada, finita e indeterminada ou mesmo nula. Note ainda que, embora não tenhamos simetria discreta, esse termo não está em desacordo com o que discutimos no final da Sec. 3.2, uma vez que esses campos estão acoplados a operadores de mesma natureza vetorial.

Através da abordagem não-perturbativa, os trabalhos [120, 121, 122, 123, 124] apontam que o termo tipo Chern-Simons é gerado por correções radiativas a partir do termo fermiônico de CPT-ímpar; e é determinado. Vale ressaltar que em [123], quando o método perturbativo é empregado, o termo tipo Chern-Simons é gerado, contudo ambíguo. Por exemplo, se é usado a regularização de Pauli-Villars, não há geração do termo tipo Chern-Simons [31]. Por outro lado, dificuldades surgem na regularização dimensional devido a extensão dimensional da matriz γ_5 . (No nosso caso, contudo, não esperamos ambiguidades, embora tenhamos usado a regularização dimensional, uma vez que as propriedades utilizadas são bem definidas em d dimensões [62].) Ainda, um termo ambíguo foi encontrado usando regularização diferencial e é advogado o uso de alguma condição física ou um princípio fundamental para fixar a ambiguidade [125]. Em vista disso, poder-se-ia concluir que a ambiguidade poderia ser uma patologia proveniente do esquema de regularização. Contudo, se considerarmos que diferentes esquemas de regularização são empregados se mantendo todas as simetrias da teoria clássica, nada mais natural que esperar os mesmos resultados nos diferentes esquemas de regularização. Caso isso não ocorra, a inconsistência pode ter sua origem no procedimento de cálculo, ou então a teoria clássica na verdade não possui um conjunto de simetrias bem definido, ou ainda, algum método de regularização seria o responsável por quebrar simetrias específicas da teoria.

Em [126], usando o método do tempo-próprio de Schwinger, obtém-se o mesmo resultado obtido através do método da expansão derivativa covariante [127] – que fornece um resultado não-ambíguo – mas difere dos resultados obtidos por outros esquemas de regularização. Contudo, o resultado obtido é ambíguo. Assim como em [128], é proposto que a ambiguidade deveria ser fixada por algum experimento. É importante chamar a atenção que em [127] não é usado nenhum esquema de regularização. Os autores argumentam que, para o cálculo de integrais não-divergentes, a aplicação de um método de regularização (o qual é usado normalmente em integrais divergentes) invariante de calibre forçaria que todos os termos anômalos da ação efetiva seriam evitados. De fato, é argumentado que se um processo não é proibido, a princípio, simetrias exatas são possíveis serem quebradas por correções radiativas; o uso de um método de regularização invariante

de calibre ficaria restrito à possibilidade de eliminar ambiguidades ou inconsistências na teoria. A Ref. [129] clama que a ambiguidade do termo tipo Chern-Simons persiste quando não é exigido nenhuma simetria. Muito longe desse ponto de vista, a Ref. [130] clama que o parâmetro $r(e^2)$ não pode ser determinado pela imposição da simetria de calibre. Chamando atenção para um fato frequentemente esquecido no programa de renormalização devido ao sucesso do esquema MS – regularização junto com as identidades de Ward e as condições de renormalização –, em [131, 132] é encontrado que o termo tipo Chern-Simons não é induzido por correções radiativas. Seguindo o método de renormalização algébrica, em [133] esse mesmo resultado é encontrado.

Retornaremos a discutir essa questão nos capítulos seguintes.

4 RENORMALIZABILIDADE DA EDQ ESTENDIDA EM TODAS AS ORDENS

Neste capítulo empregaremos a técnica de renormalização algébrica para mostrar a renormalizabilidade da EDQ com violação da simetria de Lorentz em todas as ordens em teoria de perturbações. Basicamente, controlamos os termos de quebra usando um conjunto sutil de fontes externas. Deste modo, com as simetrias restauradas, um tratamento perturbativo pode ser consistentemente empregado. Depois de mostrarmos a renormalizabilidade, as fontes externas serão postas nos seus valores físicos, que permite recuperar a ação de partida. Os resultados apresentados neste capítulo se encontram na Ref. [159].

4.1 Quantização de BRST da eletrodinâmica com violação da simetria de Lorentz

No capítulo anterior vimos que a eletrodinâmica quântica é renormalizável a 1-laço [110], *i.e.*, as divergências que surgem nessa dada ordem podem ser absorvidas pela redefinição dos campos, parâmetros e constante de acoplamento da teoria clássica; indicando que este modelo é estável¹⁶ quanticamente. Contudo, comentamos diversos trabalhos que discutem a controvérsia da geração do termo tipo Chern-Simons, enfatizando a questão do método de regularização utilizado e o possível papel do conjunto de simetrias da teoria clássica. Convém estar atento que um tratamento consistente dessas correções radiativas é necessário caso se queira estudar a estabilidade da teoria além de 1-laço, que é o que veremos neste capítulo; mais especificamente em todas as ordens em teoria de perturbações. A fim de contornar os problemas oriundos do esquema de renormalização, empregaremos a quantização de BRST da EDQ estendida dentro do formalismo da renormalização algébrica. Isto permite uma análise da renormalizabilidade do modelo em todas as ordens em teoria de perturbações através de um estudo de cohomologia [159].

Desde que a eletrodinâmica é uma teoria de calibre, sua quantização requer cuidado. De fato, a quantização funcional de sistemas de calibre requer um mecanismo que evite levar em conta infinitas configurações de campo de calibre equivalentes – as chamadas cópias de Gribov [160] – que estão presentes devido à simetria de calibre. O procedimento de quantização de Faddeev-Popov [161] introduz um determinante funcional no funcional

¹⁶ Embora na literatura existam duas situações distintas a cerca da estabilidade quântica, não é esperado confusão aqui neste capítulo, e seguintes, com a estabilidade descrita na Sec. 2.2.1.

gerador a fim de tratar esse problema. Contudo, esse determinante é um objeto não-local, que dificulta o estudo da renormalizabilidade da teoria – problema central desta tese. Uma forma de contornar essa situação é introduzir os chamados campos fantasma e antifantasma de Faddeev-Popov, c e \bar{c} , respectivamente, a fim de localizar o determinante funcional. Com esse procedimento, junto com um termo de fixação de calibre, as configurações de campo de calibre equivalentes são evitadas¹⁷. Contudo, a ação final perde a simetria de calibre fora da camada de massa. A quantização de BRST permite tratar as cópias de calibre e a perda da simetria de calibre de uma forma sistemática. De fato, por introduzir o campo de Lautrup-Nakanishi b (um multiplicador de Lagrange) e definindo a seguinte transformação de BRST atuando nos campos fundamentais

$$\begin{aligned}
sA_\mu &= -\partial_\mu c, \\
sc &= 0, \\
s\psi &= iec\psi, \\
s\bar{\psi} &= ie\bar{\psi}c, \\
s\bar{c} &= b, \\
sb &= 0,
\end{aligned} \tag{4.1}$$

onde s é o operador de BRST nilpotente, é possível tratar a quantização da eletrodinâmica com uma simetria de BRST fora da camada de massa. Assim, escolhendo o calibre de Landau, *i.e.*, $\partial_\mu A^\mu = 0$, a ação da eletrodinâmica com o calibre fixado é

$$S = S_{EDQ} + S_{gf}, \tag{4.2}$$

onde

$$S_{gf} = s \int d^4x \bar{c} \partial_\mu A^\mu = \int d^4x (b \partial_\mu A^\mu + \bar{c} \partial^2 c) \tag{4.3}$$

é ação de fixação de calibre impondo o calibre de Landau.

Os números quânticos dos campos e tensores de fundo estão dispostos na Tabela 1

¹⁷ É importante mencionar que esse problema é resolvido na teoria de Maxwell, que é uma teoria abeliana. Na teoria de Yang-Mills esse problema não é completamente resolvido – no setor perturbativo dessa teoria, sim. Existe importante progresso em tratar as cópias de calibre infinitesimais, mas o procedimento para eliminar cópias de calibre não-infinitesimais é ainda um problema aberto [163].

Tabela 1 - Números quânticos dos campos.

campos	A	b	c	\bar{c}	ψ	$\bar{\psi}$
Dimensão UV	1	2	0	2	3/2	3/2
Número fantasma	0	0	1	-1	0	0
Número espinorial	0	0	0	0	1	-1
Estatística	0	0	1	-1	1	-1

Tabela 2 - Números quânticos dos tensores de fundo.

tensores	v	κ	c	d	e	f	g	m_5	a	b	h
Dimensão UV	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
Número fantasma	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Número espinorial	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Estatística	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

e na Tabela 2, respectivamente¹⁸.

Como o leitor pode ver, os campos fantasmas não interagem com o campo de calibre. Assim, em princípio, eles podem ser negligenciados. Na verdade, na eletrodinâmica no calibre de Landau os campos fantasmas parecem não ser importantes; mas eles são, se o interesse for relacionado a um problema de cohomologia. Vejamos em mais detalhes: Na linguagem de fibrados, o campo de calibre A_μ é uma componente da 1-forma, $A = A_\mu dx^\mu$, que é uma conexão num fibrado principal; um espaço construído pelo produto entre espaço topológico do grupo de calibre e o espaço base. O transporte paralelo no espaço total é relacionado à derivada covariante e as transformações de calibre correspondem a mudar o espaço total com o espaço base fixo. O operador de BRST, s , é relacionado à derivada exterior no espaço de todas as configurações de calibre, equivalentes ou não, ao longo da fibra. O campo fantasma é a 1-forma de Maurer-Cartan no mesmo fibrado principal. Note, por outro lado, que no espaço base – aqui o espaço de Minkowski – o campo fantasma é

¹⁸ A estatística dos campos é definida como a soma do número fantasma com o número espinorial. A estatística do operador de BRST, s , é definida, em módulo, por $|s| = 1$. Aqui, dado dois campos genéricos (ou operadores compostos) Φ^i e Φ^j , de estatísticas $|\Phi^i|$ e $|\Phi^j|$, respectivamente, eles satisfazem a seguinte álgebra

$$\Phi^i \Phi^j = (-1)^{|\Phi^i| \cdot |\Phi^j|} \Phi^j \Phi^i . \quad (4.4)$$

Ademais, o operador de BRST é definido para atuar sobre produtos de campos de acordo com a regra de Leibniz, *i.e.*,

$$s(\Phi^i \Phi^j) = s\Phi^i \Phi^j + (-1)^{|\Phi^i|} \Phi^i s\Phi^j . \quad (4.5)$$

uma 0-forma, *i.e.*, um campo escalar. Por esta razão dizemos que o campo fantasma tem uma estatística errada (ver Tabela 1). O operador de BRST atuando em um campo ou operador composto aumenta o grau da forma (número fantasma) em uma unidade. Desde que o operador de BRST é nilpotente, as soluções da teoria quântica ficam restritas a um problema de cohomologia. De fato, esta propriedade é muito importante no estudo da unitariedade em teorias de calibre. Além disso, o estudo da estabilidade quântica e anomalias de calibre é feito por procurar as soluções mais gerais no espaço dos polinômios nos campos locais integrados de número fantasma zero e um, respectivamente. Além dessas propriedades, veremos que a introdução dos campos b , \bar{c} e c fornece um conjunto extra de identidades de Ward, que será útil para entender a propriedade de não-renormalização de certos operadores.

As correções quânticas sobre o setor de violação de Lorentz são analisadas da mesma forma que as correções sobre o vértice elétron-fóton usual, *i.e.*, através da introdução dos operadores compostos clássicos nas funções de Green. No setor de violação de Lorentz, contudo, introduzimos nas funções de Green tensores de fundo acoplados aos seus respectivos operadores compostos. Assim, a fim de proceder com a quantização de BRST desse setor, cuidados extras são necessários. De fato, a quantização de BRST requer que todos os objetos acoplados a operadores compostos invariantes de BRST devem também ser invariantes de BRST; por outro lado, objetos acoplados a operadores compostos não-invariantes de BRST devem ter uma contraparte de BRST, *i.e.*, eles devem pertencer a um dubleto de BRST a fim de garantir a simetria de BRST. Por exemplo, o vetor de fundo v^μ está acoplado a um operador não-invariante de BRST. Na verdade, esse acoplamento é invariante de BRST na camada de massa, ou seja, através da suposição que termos de superfície podem ser seguramente desprezados e também considerando que v^μ possui 4-divergência nula. No entanto, descartar termos de superfície requer que o integrando seja uma função suave de suporte compacto – nada disso pode ser dito sobre o referido vetor de fundo. Ainda, não é sempre verdade que uma simetria clássica na camada de massa é preservada no nível quântico, *i.e.*, sua extensão dentro do formalismo das funções de Green. Além disso, precisamos ser cuidadosos desde que queiramos trabalhar com a abordagem da renormalização algébrica e a quantização de BRST dentro da eletrodinâmica com violação da simetria de Lorentz.

No intuito de atender os requerimentos do PAQ (ver Sec. 1.4.2) – considerando o fato que aqui temos duas distintas transformações de Lorentz: transformações de Lorentz de observador e de partícula; com violação sob esta última – e tratar os pontos acima mencionados, usaremos o método das fontes externas de Symanzik. Este método foi primeiramente empregado por Symanzik [162] e foi vastamente empregado em teorias de calibre não-abelianas a fim de controlar a quebra suave da simetria de BRST, veja [163, 164, 165, 166, 167, 168], e também em teorias com violação da simetria de Lorentz [159, 169, 170]. Basicamente, esse método consiste em introduzir um conjunto sutil de

campos externos a fim de controlar a quebra de simetrias. Aqui, iremos emergir a ação de violação de Lorentz em uma teoria mais geral que respeita as simetrias de Lorentz e de CPT; e também a simetria de BRST. Nosso procedimento será tratar cada um dos tensores de fundo como uma fonte externa clássica. No entanto, existem duas situações devido às classes de operadores compostos. Seguindo as prescrições de quantização de BRST de operadores compostos: Fontes que estão acopladas a operadores compostos invariantes de BRST também devem ser invariantes de BRST. Por outro lado, fontes acopladas a operadores compostos não-invariantes de BRST devem pertencer a um dubleto de BRST, com sua contraparte de BRST a fim de garantir a simetria de BRST¹⁹. Desde que o termo bosônico de violação de Lorentz de CPT-par e todos os termos de quebra do setor fermiônico são invariantes de BRST, eles serão acoplados à fontes invariantes de BRST. Assim, definimos o seguinte conjunto de fontes invariantes

$$s\bar{\kappa}_{\alpha\beta\mu\nu} = sC^{\nu\mu} = sD^{\nu\mu} = sE^{\mu} = sF^{\mu} = sG^{\alpha\beta\mu} = sM_{\mathfrak{S}} = s\bar{A}^{\mu} = sB^{\mu} = sH^{\mu\nu} = 0 . \quad (4.6)$$

Por outro lado, precisamos de um dubleto de BRST para quantizar, dentro da prescrição de BRST, o setor bosônico de violação de Lorentz de CPT-ímpar

$$\begin{aligned} s\lambda_{\mu\nu\alpha} &= J_{\mu\nu\alpha} , \\ sJ_{\mu\nu\alpha} &= 0 . \end{aligned} \quad (4.7)$$

Eventualmente, a fim de reobter a ação de partida (3.1), essas fontes adquirirão os seguintes valores físicos

$$\begin{aligned} J_{\mu\nu\alpha} |_{fis} &= v^{\beta}\epsilon_{\beta\mu\nu\alpha} , \\ \lambda_{\mu\nu\alpha} |_{fis} &= 0 , \\ \bar{\kappa}_{\alpha\beta\mu\nu} |_{fis} &= \kappa_{\alpha\beta\mu\nu} , \\ C^{\nu\mu} |_{fis} &= c^{\nu\mu} , \\ D^{\nu\mu} |_{fis} &= d^{\nu\mu} , \\ E^{\mu} |_{fis} &= e^{\mu} , \\ F^{\mu} |_{fis} &= f^{\mu} , \\ G^{\alpha\beta\mu} |_{fis} &= g^{\alpha\beta\mu} , \end{aligned}$$

¹⁹ Na verdade poder-se-ia introduzir uma fonte invariante de BRST. Contudo, devido ao fato que tal acoplamento não seria invariante de BRST, dever-se-ia introduzir outra fonte invariante de BRST acoplado ao termo de quebra proveniente do operador composto. Continuar-se-ia com esse procedimento até encontrar uma ação invariante de BRST. Por questão de simplicidade introduz-se logo um dubleto de BRST.

$$\begin{aligned}
M_5 |_{fis} &= m_5 , \\
\bar{A}^\mu |_{fis} &= a^\mu , \\
B^\mu |_{fis} &= b^\mu , \\
H^{\mu\nu} |_{fis} &= h^{\mu\nu} .
\end{aligned} \tag{4.8}$$

A imersão do setor bosônico da EDQ estendida é

$$\begin{aligned}
S_B &= s \int d^4x \lambda_{\mu\nu\alpha} A^\mu \partial^\nu A^\alpha - \frac{1}{4} \int d^4x \bar{\kappa}_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} \\
&= \int d^4x (J_{\mu\nu\alpha} A^\mu \partial^\nu A^\alpha + \lambda_{\mu\nu\alpha} \partial^\mu c \partial^\nu A^\alpha) - \frac{1}{4} \int d^4x \bar{\kappa}_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} ,
\end{aligned} \tag{4.9}$$

e a imersão do setor fermiônico da EDQ estendida é dada por

$$\begin{aligned}
S_F &= \int d^4x \left[i (C^{\nu\mu} \bar{\psi} \gamma_\nu D_\mu \psi + D^{\nu\mu} \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\nu D_\mu \psi + E^\mu \bar{\psi} D_\mu \psi + i F^\mu \bar{\psi} \gamma_5 D_\mu \psi + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} G^{\alpha\beta\mu} \bar{\psi} \sigma_{\alpha\beta} D_\mu \psi) - \left(i M_5 \bar{\psi} \gamma_5 \psi + \bar{A}^\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi + B^\mu \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\mu \psi + \frac{1}{2} H^{\mu\nu} \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi \right) \right] .
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Além disso, a fim de controlar as transformações de BRST não-lineares dos campos originais, precisamos de um último conjunto de fontes externas invariantes de BRST, ou seja, \bar{Y} e Y , e introduzimos a seguinte ação

$$S_{ext} = \int d^4x (\bar{Y} s\psi - s\bar{\psi} Y) = \int d^4x (ie\bar{Y}c\psi - ie\bar{\psi}cY) . \tag{4.11}$$

Assim, a ação invariante de BRST mais completa é dada por

$$\Sigma = S + S_B + S_F + S_{ext} . \tag{4.12}$$

Explicitamente, tal ação é

$$\begin{aligned}
\Sigma &= \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \psi \right] + \int d^4x (b\partial_\mu A^\mu + \bar{c}\partial^2 c) + \\
&\quad + \int d^4x \left(J_{\mu\nu\alpha} A^\mu \partial^\nu A^\alpha + \lambda_{\mu\nu\alpha} \partial^\mu c \partial^\nu A^\alpha - \frac{1}{4} \bar{\kappa}_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} \right) + \\
&\quad + \int d^4x \left[i (C^{\nu\mu} \bar{\psi} \gamma_\nu D_\mu \psi + D^{\nu\mu} \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\nu D_\mu \psi + E^\mu \bar{\psi} D_\mu \psi + i F^\mu \bar{\psi} \gamma_5 D_\mu \psi + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} G^{\alpha\beta\mu} \bar{\psi} \sigma_{\alpha\beta} D_\mu \psi) - \left(i M_5 \bar{\psi} \gamma_5 \psi + \bar{A}^\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi + B^\mu \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\mu \psi + \frac{1}{2} H^{\mu\nu} \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi \right) \right] + \\
&\quad + \int d^4x (ie\bar{Y}c\psi - ie\bar{\psi}cY) .
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Na verdade, é fácil notar que um conjunto extra de combinações entre as fontes, incluindo a

Tabela 3 - Números quânticos das fontes.

fontes	Y	\bar{Y}	λ	J	$\bar{\kappa}$	C	D	E	F	G	M_5	\bar{A}	B	H
Dimensão UV	5/2	5/2	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
Número fantasma	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Número espinorial	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Estatística	0	-2	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

massa do elétron, é possível ser adicionado. No entanto, essas combinações não interferem na renormalização das fontes e serão renormalizadas também. Além disso, parâmetros extras adimensionais serão necessários para absorver possíveis divergências do vácuo. Para evitar uma análise complicada, omitimos esses termos de puro vácuo. Entretanto, por completeza, essa questão é discutida no Ap. E. Os números quânticos das fontes seguem os números quânticos dos tensores de fundo e são fornecidos na Tabela 3.

A ação Σ nos valores físicos das fontes (4.8) reduz-se a

$$\begin{aligned}
\Sigma_{fis} = & \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi \right] + \int d^4x (b\partial_\mu A^\mu + \bar{c}\partial^2 c) + \\
& + \int d^4x \left(\epsilon_{\beta\mu\nu\alpha} v^\beta A^\mu \partial^\nu A^\alpha - \frac{1}{4} \kappa_{\alpha\beta\mu\nu} F^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} \right) + \\
& + \int d^4x \left[i (c^{\nu\mu} \bar{\psi} \gamma_\nu D_\mu \psi + d^{\nu\mu} \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\nu D_\mu \psi + e^\mu \bar{\psi} D_\mu \psi + i f^\mu \bar{\psi} \gamma_5 D_\mu \psi + \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta\mu} \bar{\psi} \sigma_{\alpha\beta} D_\mu \psi) - \left(i m_5 \bar{\psi} \gamma_5 \psi + a^\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi + b^\mu \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\mu \psi + \frac{1}{2} h^{\mu\nu} \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi \right) \right].
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Alguns comentários são necessários: é importante notar que, uma vez que tenhamos usado as fontes de Symanzik, a ação apresentada em (4.12) não mais corresponde à ação física, ou seja, a EDQ estendida foi imersa em uma teoria mais geral. De fato, essa ação goza das simetrias de Lorentz, de CPT e de BRST, e será a ação submetida ao tratamento perturbativo; onde serão realizados os estudos da estabilidade quântica e anomalias de calibre a partir de métodos algébricos. Além disso, o setor que antes estava associado à violação de Lorentz de CPT-ímpar foi embebido como um dubleto de BRST; através da fonte $\lambda^{\mu\nu\alpha}$ e sua contraparte de BRST $J^{\mu\nu\alpha}$. Segue-se, de resultados gerais de cohomologia, que esse setor não corresponde a um setor físico, assim como a ação de fixação de calibre. De fato, como anteriormente mencionado, nesse estágio a teoria não corresponde à teoria física. Somente depois do estudo da estabilidade quântica que a teoria maior é contraída para a teoria de partida (3.1). Ainda, quando os valores físicos das fontes (4.8) são tomados, a simetria de BRST é quebrada explicitamente – isto pode ser facilmente entendido se olharmos os dois primeiros termos em (4.8), onde não mais

existe dubleto de BRST²⁰. Neste estágio pode-se estudar os efeitos do setor de violação de Lorentz de CPT-ímpar sobre a unitariedade da teoria [100, 102].

Vemos que o conteúdo cinético da teoria não é alterado no limite físico das fontes. Além disso, através da análise de contagem de potências, poder-se-ia adicionar à ação (4.12) um número infinito de termos do tipo $\bar{\kappa}_{\alpha\beta\rho\sigma}\bar{\kappa}^{\rho\sigma\mu\nu}F^{\alpha\beta}F_{\mu\nu}$, $\bar{\kappa}_{\alpha\beta\rho\sigma}\bar{\kappa}^{\rho\sigma\omega\delta}\bar{\kappa}_{\omega\delta\mu\nu}F^{\alpha\beta}F^{\mu\nu}$ e assim por diante. Contudo, todos esses termos podem ser rearranjados em um único termo acoplado ao operador $F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu}$. Essa série infinita pode ser redefinida em uma única ação. Dessa forma, a ação original é mantida.

4.1.1 Identidades de Ward

Uma vez estabelecida a ação clássica mais geral possível, respeitando as simetrias de Lorentz, de CPT e de BRST, podemos dispor esse conteúdo nas identidades de Ward da teoria, as quais são relações algébricas entre diferentes funções de Green. São elas:

- Identidade de Slavnov-Taylor

$$\mathcal{S}(\Sigma) \equiv \int d^4x \left(-\partial_\mu c \frac{\delta\Sigma}{\delta A_\mu} + \frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{Y}} \frac{\delta\Sigma}{\delta\psi} - \frac{\delta\Sigma}{\delta Y} \frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{\psi}} + b \frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{c}} + J_{\mu\nu\alpha} \frac{\delta\Sigma}{\delta\lambda_{\mu\nu\alpha}} \right) = 0. \quad (4.15)$$

- Fixação de calibre e a equação do campo antifantasma

$$\begin{aligned} \frac{\delta\Sigma}{\delta b} &= \partial_\mu A^\mu, \\ \frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{c}} &= \partial^2 c. \end{aligned} \quad (4.16)$$

- Equação do campo fantasma

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta c} = \Delta_{cl}, \quad (4.17)$$

²⁰ Embora o método de Symanzik não seja um método de regularização, ele pode ser entendido em analogia com, por exemplo, regularização dimensional. Como vimos, no intuito de regularizar as integrais de Feynman, a regularização dimensional consiste em calcular as integrais de Feynman, que antes eram divergentes no espaço-tempo usual 4-dimensional, em um espaço com uma dimensão complexa arbitrária, dita $d = 4 - \epsilon$. Somente depois que as divergências tiverem sido absorvidas, o limite para quatro dimensões é tomado, *i.e.*, $\epsilon \rightarrow 0$. Desde que essa regularização não viola as simetrias de calibre, problemas com a unitariedade são evitados. Contudo, não se fala sobre unitariedade na fase da teoria regularizada. De fato, não faz sentido contar os graus de liberdade do campo de calibre em um espaço de dimensão complexa contínua. Ainda, na regularização dimensional é introduzido um parâmetro de massa arbitrário, μ , a fim de manter a constante de acoplamento adimensional. Uma das consequências disso é que a teoria será independente do ponto de renormalização, levando ao grupo de renormalização. No método de Symanzik também podem aparecer efeitos do procedimento de controlar simetrias quebradas.

com

$$\Delta_{cl} = \partial^\mu (\lambda_{\mu\nu\alpha} \partial^\nu A^\alpha) - \partial^2 \bar{c} + ie\bar{Y}\psi + ie\bar{\psi}Y. \quad (4.18)$$

- Simetria rígida

$$\mathcal{W}_{rig}(\Sigma) = \int d^4x \left(e \frac{\delta\Sigma}{\delta\psi} \psi + e\bar{Y} \frac{\delta\Sigma}{\delta\bar{Y}} + e\bar{\psi} \frac{\delta\Sigma}{\delta\psi} - e \frac{\delta\Sigma}{\delta Y} Y \right) = 0. \quad (4.19)$$

Nas Eqs. (4.16) e (4.17), os termos de quebra são lineares nos campos. Assim, eles permanecerão no nível clássico [52]. De fato, sob o ponto de vista de inserção, tais quebras são vistas como inserções dos campos dentro das funções de Green. Contudo, como os campos são assumidos serem funções suaves de suporte compacto, termos lineares nos campos são bem comportados, mesmo dentro das funções de Green. Por outro lado, no caso de quebras não-lineares, como um exemplo, temos

$$\frac{\delta\Sigma}{\delta B^\mu(x)} = -\bar{\psi}(x)\gamma_5\gamma_\mu\psi(x). \quad (4.20)$$

Lembre que o lado direito de (4.20) é assumido como sendo uma inserção no valor esperado do vácuo. Tal quebra resulta numa função de Green que apresenta divergências ultravioletas, uma vez que os campos são avaliados no mesmo ponto. Isso significa que tal quebra será sujeita à renormalização. Por essa razão dizemos que quebras não-lineares não caracterizam identidades de Ward.

Embora a simetria rígida descreva a conservação da carga elétrica, ela não desenvolve um papel importante no estudo da estabilidade quântica da teoria. Na verdade a conservação da carga descrita pela invariância da ação (4.12) sob o operador \mathcal{W}_{rig} é no sentido global.

4.2 Estabilidade quântica

A fim de obter o contratermo mais geral que pode ser livremente adicionado à ação clássica Σ em qualquer ordem em teoria de perturbações, necessitamos encontrar o mais geral polinômio local integrado Σ^{ct} com dimensão limitada por quatro e número fantasma zero. Assim, impondo as identidades de Ward (4.15)-(4.19) à ação perturbada $\Sigma + \varepsilon\Sigma^{ct}$ – que nada mais é que dizer que não existem anomalias no nível quântico (ver Cap. 5) – onde ε é um parâmetro de perturbação pequeno, o contratermo deve obedecer

as seguintes restrições

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_\Sigma \Sigma^{ct} &= 0, \\
\frac{\delta \Sigma^{ct}}{\delta b} &= 0, \\
\frac{\delta \Sigma^{ct}}{\delta \bar{c}} &= 0, \\
\frac{\delta \Sigma^{ct}}{\delta c} &= 0, \\
\mathcal{W}_{rig} \Sigma^{ct} &= 0,
\end{aligned} \tag{4.21}$$

onde \mathcal{S}_Σ é o operador de Slavnov-Taylor linearizado nilpotente,

$$\mathcal{S}_\Sigma = \int d^4x \left(-\partial_\mu c \frac{\delta}{\delta A_\mu} + \frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{Y}} \frac{\delta}{\delta \psi} + \frac{\delta \Sigma}{\delta \psi} \frac{\delta}{\delta \bar{Y}} - \frac{\delta \Sigma}{\delta Y} \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}} - \frac{\delta \Sigma}{\delta \bar{\psi}} \frac{\delta}{\delta Y} + b \frac{\delta}{\delta \bar{c}} + J_{\mu\nu\alpha} \frac{\delta}{\delta \lambda_{\mu\nu\alpha}} \right). \tag{4.22}$$

A primeira restrição de (4.21) identifica o contratermo como um problema de cohomologia para o operador \mathcal{S}_Σ no espaço dos polinômios nos campos locais integrados de dimensão quatro e número fantasma zero. A partir de resultados gerais de cohomologia [52], segue-se que Σ^{ct} pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
\Sigma^{ct} &= -\frac{1}{4} \int d^4x a_0 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} \int d^4x \left(a_1 \bar{\kappa}_{\alpha\mu\beta\nu} + a_2 T_{\alpha\mu\beta\nu}{}^{\theta\omega} C_{\theta\omega} \right) F^{\alpha\mu} F^{\beta\nu} + \\
&+ \int d^4x \left\{ a_3 i \bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi - a_4 m \bar{\psi} \psi + i \left[(a_5 C^{\nu\mu} + a_6 C^{\mu\nu} + a_7 \eta_{\alpha\beta} \bar{\kappa}^{\alpha\mu\beta\nu}) \bar{\psi} \gamma_\nu D_\mu \psi + \right. \right. \\
&+ (a_8 D^{\nu\mu} + a_9 D^{\mu\nu}) \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\nu D_\mu \psi + a_{10} E^\mu \bar{\psi} D_\mu \psi + a_{11} i F^\mu \bar{\psi} \gamma_5 D_\mu \psi + \\
&+ \left. \frac{1}{2} \left(a_{12} G^{\alpha\beta\gamma} + a_{13} S^{\alpha\beta\gamma}{}_{\lambda\rho\sigma} G^{\lambda\rho\sigma} \right) \bar{\psi} \sigma_{\alpha\beta} D_\gamma \psi \right] - \left[a_{14} i M_5 \bar{\psi} \gamma_5 \psi + \right. \\
&+ (a_{15} \bar{A}^\mu + a_{16} m E^\mu) \bar{\psi} \gamma_\mu \psi + (a_{17} B^\mu + a_{18} m G_{\alpha\beta\gamma} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\mu}) \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\mu \psi + \\
&+ \left. \left. \frac{1}{2} (a_{19} H^{\mu\nu} + a_{20} m D_{\alpha\beta} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}) \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi \right] \right\} + \mathcal{S}_\Sigma \Delta^{(-1)}, \tag{4.23}
\end{aligned}$$

onde $\Delta^{(-1)}$ é o mais geral contratermo polinomial nos campos local integrado com dimensão limitada por quatro e número fantasma -1 , dado por²¹

$$\Delta^{(-1)} = \int d^4x \left(a_{21} \bar{Y} \psi + a_{22} \bar{\psi} Y + a_{23} \bar{c} \partial_\mu A^\mu + a_{24} \bar{c} b + a_{25} \lambda_{\mu\nu\alpha} A^\mu \partial^\nu A^\alpha + \right.$$

²¹ Claramente, ao contrário dos campos de fundo, as fontes externas não são “congeladas” com respeito às simetrias de CPT. Portanto, elas gozam de mapas discretos. Assim $\Delta^{(-1)}$ pode ser construído invariante de CPT, evitando muitos contratermos e parâmetros de renormalização. Ademais, todos eles, se incluídos, são também evitados pelas identidades de Ward do modelo.

$$\begin{aligned}
& + a_{26}\lambda_{\alpha\beta\gamma}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\mu}\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi + a_{27}\bar{c}\partial_\mu\bar{A}^\mu + a_{28}m\bar{c}\partial_\mu E^\mu + a_{29}\lambda_{\mu\nu\alpha}J^{\mu\nu\alpha}\bar{c}c + \\
& + a_{30}\lambda_{\mu\nu\alpha}J^{\mu\nu\alpha}A_\beta A^\beta + a_{31}\lambda_{\mu\alpha\beta}J^{\nu\alpha\beta}A^\mu A_\nu + \\
& + a_{32}\bar{\kappa}_{\alpha\beta\mu\nu}\lambda^{\alpha\beta\rho}J^{\mu\nu}{}_\rho A_\sigma A^\sigma + a_{33}T_{\alpha\beta\mu\nu}{}^{\theta\omega}C_{\theta\omega}\lambda^{\alpha\beta\rho}J^{\mu\nu}{}_\rho A_\sigma A^\sigma + \\
& + a_{34}\bar{\kappa}_{\alpha\beta\mu\nu}\lambda^{\beta\rho\sigma}J^\nu{}_{\rho\sigma}A^\alpha A^\mu + a_{35}T_{\alpha\beta\mu\nu}{}^{\theta\omega}C_{\theta\omega}\lambda^{\beta\rho\sigma}J^\nu{}_{\rho\sigma}A^\alpha A^\mu + \\
& + a_{36}\bar{\kappa}_{\alpha\rho\sigma\delta}\lambda^{\nu\rho\delta}J^{\mu\alpha\sigma}A_\mu A_\nu + a_{37}T_{\alpha\rho\sigma\delta}{}^{\theta\omega}C_{\theta\omega}\lambda^{\nu\rho\delta}J^{\mu\alpha\sigma}A_\mu A_\nu \Big) , \tag{4.24}
\end{aligned}$$

com a_i sendo coeficientes arbitrários. A partir da segunda equação em (4.21), segue-se que $a_{23} = a_{24} = a_{27} = a_{28} = a_{29} = 0$. Ainda, a partir da equação do campo fantasma, $a_{25} = a_{30} = a_{31} = a_{32} = a_{33} = a_{34} = a_{35} = a_{36} = a_{37} = 0$. Portanto, depois das seguintes redefinições,

$$\begin{aligned}
a_3 - a_{21} + a_{22} &\mapsto a_3 , & a_{12} - a_{21} + a_{22} &\mapsto a_{12} , \\
a_4 - a_{21} + a_{22} &\mapsto a_4 , & a_{14} - a_{21} + a_{22} &\mapsto a_{14} , \\
a_5 - a_{21} + a_{22} &\mapsto a_5 , & a_{15} - a_{21} + a_{22} &\mapsto a_{15} , \\
a_8 - a_{21} + a_{22} &\mapsto a_8 , & a_{17} - a_{21} + a_{22} &\mapsto a_{17} , \\
a_{10} - a_{21} + a_{22} &\mapsto a_{10} , & a_{19} - a_{21} + a_{22} &\mapsto a_{19} , \\
a_{11} - a_{21} + a_{22} &\mapsto a_{11} , & &
\end{aligned} \tag{4.25}$$

não é difícil verificar que a forma do contratermo mais geral permitido pelas identidades de Ward é dada por

$$\begin{aligned}
\Sigma^{ct} &= -\frac{1}{4}\int d^4x a_0 F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}\int d^4x \left(a_1\bar{\kappa}_{\alpha\mu\beta\nu} + a_2T_{\alpha\mu\beta\nu}{}^{\theta\omega}C_{\theta\omega} \right) F^{\alpha\mu}F^{\beta\nu} + \\
& + \int d^4x \left\{ a_3i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu\psi - a_4m\bar{\psi}\psi + i \left[(a_5C^{\nu\mu} + a_6C^{\mu\nu} + a_7\eta_{\alpha\beta}\bar{\kappa}^{\alpha\mu\beta\nu})\bar{\psi}\gamma_\nu D_\mu\psi + \right. \right. \\
& + (a_8D^{\nu\mu} + a_9D^{\mu\nu})\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\nu D_\mu\psi + a_{10}E^\mu\bar{\psi}D_\mu\psi + a_{11}iF^\mu\bar{\psi}\gamma_5D_\mu\psi + \\
& + \left. \frac{1}{2} \left(a_{12}G^{\alpha\beta\gamma} + a_{13}S^{\alpha\beta\gamma}{}_{\lambda\rho\sigma}G^{\lambda\rho\sigma} \right) \bar{\psi}\sigma_{\alpha\beta}D_\gamma\psi \right] - \left[a_{14}iM_5\bar{\psi}\gamma_5\psi + \right. \\
& + (a_{15}\bar{A}^\mu + a_{16}mE^\mu)\bar{\psi}\gamma_\mu\psi + (a_{17}B^\mu + a_{18}mG_{\alpha\beta\gamma}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\mu} - a_{26}J_{\alpha\beta\gamma}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\mu})\bar{\psi}\gamma_5\gamma_\mu\psi + \\
& + \left. \left. \frac{1}{2}(a_{19}H^{\mu\nu} + a_{20}mD_{\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu})\bar{\psi}\sigma_{\mu\nu}\psi \right] \right\} . \tag{4.26}
\end{aligned}$$

Resta-nos checar se a teoria é estável: se o contratermo Σ^{ct} pode ser absorvido pela ação original Σ por meio da redefinição multiplicativa dos campos, fontes e parâmetros da teoria, de acordo com

$$\Sigma[\Phi, J, \xi] + \varepsilon\Sigma^{ct}[\Phi, J, \xi] = \Sigma[\Phi_0, J_0, \xi_0] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) , \tag{4.27}$$

onde as quantidades não-renormalizadas são definidas por

$$\begin{aligned}\Phi_0 &= Z_\Phi^{1/2} \Phi, & \Phi &\in \{A, \bar{\psi}, \psi, b, \bar{c}, c\}, \\ J_0 &= Z_J J, & J &\in \{J, \lambda, C, D, E, F, G, M_5, \bar{A}, B, H\}, \\ \xi_0 &= Z_\xi \xi, & \xi &\in \{e, m\}.\end{aligned}\tag{4.28}$$

É possível checar que isso pode ser feito, provando a renormalizabilidade em todas as ordens em teoria de perturbações. Explicitamente, os fatores de renormalização são listados abaixo.

Para os fatores independentes do fóton, do elétron e da massa do elétron, temos

$$\begin{aligned}Z_A^{1/2} &= 1 + \frac{1}{2}\varepsilon a_0, \\ Z_\psi^{1/2} &= 1 + \frac{1}{2}\varepsilon a_3, \\ Z_m &= 1 + \varepsilon(a_4 - a_3).\end{aligned}\tag{4.29}$$

Os fatores de renormalização para os campos fantasmas, carga, campo de Lautrup-Nakanishi e fontes Y não são independentes, ou seja,

$$\begin{aligned}Z_c^{1/2} &= Z_{\bar{c}}^{1/2} = 1, \\ Z_b^{1/2} &= Z_e = Z_A^{-1/2}, \\ Z_Y &= Z_{\bar{Y}} = Z_A^{1/2} Z_\psi^{-1/2}.\end{aligned}\tag{4.30}$$

Assim, as propriedades de renormalização do setor usual da EDQ permanecem inalteradas.

Para o setor $\kappa_{\alpha\mu\beta\nu}$, devido aos números quânticos de $\bar{\kappa}$ e C , há uma mistura entre seus respectivos operadores compostos, *i.e.*, $F^{\alpha\mu}F^{\beta\nu}$ and $i\bar{\psi}\gamma^\nu D_\mu\psi$. Assim, a renormalização matricial (3.35) é requerida. Neste caso,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \bar{\kappa}_{0\alpha\mu\beta\nu} \\ C_{0\nu\mu} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (Z_{\bar{\kappa}\bar{\kappa}})_{\alpha\mu\beta\nu}^{\theta\rho\omega\delta} & (Z_{\bar{\kappa}C})_{\alpha\mu\beta\nu}^{\theta\omega} \\ (Z_{C\bar{\kappa}})_{\nu\mu}^{\theta\rho\omega\delta} & (Z_{CC})_{\nu\mu}^{\theta\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\kappa}_{\theta\rho\omega\delta} \\ C_{\theta\omega} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1 + \varepsilon(a_1 - a_0))\delta_\alpha^\theta \delta_\mu^\rho \delta_\beta^\omega \delta_\nu^\delta & \varepsilon a_2 T_{\alpha\mu\beta\nu}^{\theta\omega} \\ \varepsilon a_7 \eta^{\rho\delta} \delta_\nu^\theta \delta_\mu^\omega & \delta_\nu^\theta \delta_\mu^\omega + \varepsilon((a_5 - a_3)\delta_\nu^\theta \delta_\mu^\omega + a_6 \delta_\mu^\theta \delta_\nu^\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\kappa}_{\theta\rho\omega\delta} \\ C_{\theta\omega} \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{4.31}$$

Como é possível inferir a partir da Tabela 3, algumas fontes externas não têm exatamente os mesmos números quânticos, especificamente com respeito às suas dimensões de massa. Então, em princípio, elas não sofrem mistura quântica. Contudo, o modelo tem um parâmetro de massa, a massa do elétron, m . Assim, o parâmetro de massa irá permitir

algumas misturas extras entre as fontes [171]. Primeiramente,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \bar{A}_0^\mu \\ E_0^\mu \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Z_{\bar{A}\bar{A}} & Z_{\bar{A}E} \\ Z_{E\bar{A}} & Z_{EE} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{A}^\mu \\ E^\mu \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \varepsilon(a_{15} - a_3) & \varepsilon a_{16} m \\ 0 & 1 + \varepsilon(a_{10} - a_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{A}^\mu \\ E^\mu \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Ainda,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} H_0^{\nu\mu} \\ D_0^{\nu\mu} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (Z_{HH})^{\nu\mu\alpha\beta} & (Z_{HD})^{\nu\mu\alpha\beta} \\ (Z_{DH})^{\nu\mu\alpha\beta} & (Z_{DD})^{\nu\mu\alpha\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{\alpha\beta} \\ D_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1 + \varepsilon(a_{19} - a_3))\eta^{\nu\alpha}\eta^{\mu\beta} & \varepsilon a_{20} m \varepsilon^{\nu\mu\alpha\beta} \\ 0 & \eta^{\nu\alpha}\eta^{\mu\beta} + \varepsilon((a_8 - a_3)\eta^{\nu\alpha}\eta^{\mu\beta} + a_9\eta^{\nu\beta}\eta^{\mu\alpha}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{\alpha\beta} \\ D_{\alpha\beta} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

O último fator de renormalização matricial corresponde a uma mistura entre três fontes, ou seja,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} B_0^\mu \\ J_0^{\alpha\beta\gamma} \\ G_0^{\alpha\beta\gamma} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (Z_{BB})^\mu{}_\omega & (Z_{BJ})^\mu{}_{\lambda\rho\sigma} & (Z_{BG})^\mu{}_{\lambda\rho\sigma} \\ (Z_{JB})^{\alpha\beta\gamma}{}_\omega & (Z_{JJ})^{\alpha\beta\gamma}{}_{\lambda\rho\sigma} & (Z_{JG})^{\alpha\beta\gamma}{}_{\lambda\rho\sigma} \\ (Z_{GB})^{\alpha\beta\gamma}{}_\omega & (Z_{GJ})^{\alpha\beta\gamma}{}_{\lambda\rho\sigma} & (Z_{GG})^{\alpha\beta\gamma}{}_{\lambda\rho\sigma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B^\omega \\ J^{\lambda\rho\sigma} \\ G^{\lambda\rho\sigma} \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{Z}_4 \begin{pmatrix} B^\mu \\ J^{\alpha\beta\gamma} \\ G^{\alpha\beta\gamma} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

onde

$$\mathcal{Z}_4 = \begin{pmatrix} (1 + \varepsilon(a_{17} - a_3))\delta_\omega^\mu & -\varepsilon a_{26} \varepsilon_{\lambda\rho\sigma}{}^\mu & \varepsilon a_{18} m \varepsilon_{\lambda\rho\sigma}{}^\mu \\ 0 & (1 - \varepsilon a_0)\delta_\lambda^\alpha \delta_\rho^\beta \delta_\sigma^\gamma & 0 \\ 0 & 0 & \delta_\lambda^\alpha \delta_\rho^\beta \delta_\sigma^\gamma + \varepsilon((a_{12} - a_3)\delta_\lambda^\alpha \delta_\rho^\beta \delta_\sigma^\gamma + a_{13} S^{\alpha\beta\gamma}{}_{\lambda\rho\sigma}) \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

A renormalização para as fontes externas que não sofrem mistura é

$$\begin{aligned} Z_F &= 1 + \varepsilon(a_{11} - a_3), \\ Z_{M_5} &= 1 + \varepsilon(a_{14} - a_3). \end{aligned} \quad (4.36)$$

O setor bosônico associado ao vetor v^μ renormaliza-se através de Z_{JJ} . Isto já foi determinado em (4.33). Portanto, ele tem o seguinte vínculo de renormalização

$$Z_{JJ} = Z_\lambda^2 = Z_A^{-1}. \quad (4.37)$$

Terminamos, assim, a prova da renormalizabilidade multiplicativa da EDQ com violação de Lorentz. Mas alguns comentários são necessários: de (4.30), a equivalência entre as renormalizações do campo do fóton e a carga elétrica, *i.e.*, $Z_e = Z_A^{-1/2}$, é confirmada. Isto é confirmado a partir de cálculos explícitos a 1-laço, ver Eq. (3.34). Outro ponto interessante é a transversalidade do propagador do fóton. De fato, cálculos a 1-laço dispostos em (3.16) e (3.21) mostram essa propriedade. A partir da primeira identidade de Ward em (4.16), essa propriedade é garantida em todas as ordens em teoria de perturbações. Contudo, não fomos capazes de fixar, a partir da abordagem algébrica, uma relação entre os fatores de renormalização das fontes (campos de fundo) e os fatores de renormalização dos campos do fóton e do elétron. De fato, a partir de cálculos explícitos, é possível ver que, por exemplo, não é necessária renormalização para f^μ , pelo menos a 1-laço. Isto está estreitamente relacionado à renormalização do campo do elétron. Além disso, as duas abordagens – algébrica e analítica – mostram-nos que a mistura quântica entre os campos de fundo é inevitável. Desde que a abordagem algébrica não nos fornece todas as restrições sobre os parâmetros das fontes que aparecem nas relações analíticas, resta-nos estabelecer se isso é apenas um efeito a 1-laço que desaparece a altas ordens ou existem simetrias extras não consideradas no nosso conjunto de identidades de Ward.

Ademais, podemos tomar a ação (4.13) no valor físico das fontes (4.8) e explorar casos especiais. Por exemplo, considerando somente os termos da ação (4.13) que permanecem invariantes sob o mapa PT, *i.e.*, desconsiderando os termos dependentes de $h^{\mu\nu}$, $d^{\mu\nu}$, b^μ , $g^{\alpha\beta\mu}$ e v^μ , obtemos

$$\begin{aligned} \Sigma_{PT-inv}^c &= -\frac{1}{4} \int d^4x a_0 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} \int d^4x \left(a_1 \kappa_{\alpha\mu\beta\nu} + a_2 T_{\alpha\mu\beta\nu}^{\theta\omega} c_{\theta\omega} \right) F^{\alpha\mu} F^{\beta\nu} + \\ &+ \int d^4x \left\{ a_3 i \bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi - a_4 m \bar{\psi} \psi + i \left[(a_5 c^{\nu\mu} + a_6 c^{\mu\nu} + a_7 \eta_{\alpha\beta} \kappa^{\alpha\mu\beta\nu}) \bar{\psi} \gamma_\nu D_\mu \psi + \right. \right. \\ &+ \left. \left. a_{10} e^\mu \bar{\psi} D_\mu \psi + a_{11} i f^\mu \bar{\psi} \gamma_5 D_\mu \psi \right] - \left[a_{14} i m_5 \bar{\psi} \gamma_5 \psi + (a_{15} a^\mu + a_{16} m e^\mu) \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \right] \right\} . \end{aligned} \quad (4.38)$$

Não é difícil ver que a ação permanece estável, com treze parâmetros de renormalização. Por outro lado, se escolhermos invariância por C para o contratermo, obtemos

$$\begin{aligned} \Sigma_{C-inv}^c &= -\frac{1}{4} \int d^4x a_0 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} \int d^4x \left(a_1 \kappa_{\alpha\mu\beta\nu} + a_2 T_{\alpha\mu\beta\nu}^{\theta\omega} c_{\theta\omega} \right) F^{\alpha\mu} F^{\beta\nu} + \\ &+ \int d^4x \left\{ a_3 i \bar{\psi} \gamma^\mu D_\mu \psi - a_4 m \bar{\psi} \psi + i \left[(a_5 c^{\nu\mu} + a_6 c^{\mu\nu} + a_7 \eta_{\alpha\beta} \kappa^{\alpha\mu\beta\nu}) \bar{\psi} \gamma_\nu D_\mu \psi + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{1}{2} \left(a_{12} g^{\alpha\beta\gamma} + a_{13} S^{\alpha\beta\gamma}_{\lambda\rho\sigma} g^{\lambda\rho\sigma} \right) \bar{\psi} \sigma_{\alpha\beta} D_\gamma \psi \right] - \left[a_{14} i m_5 \bar{\psi} \gamma_5 \psi + \right. \right. \\ &+ \left. \left. (a_{17} b^\mu + a_{18} m g_{\alpha\beta\gamma} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\mu} + 6 a_{26} v^\mu) \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\mu \psi \right] \right\} . \end{aligned} \quad (4.39)$$

Esta ação também é estável sob renormalização matricial com quatorze parâmetros inde-

pendentes.

4.3 Discussão

Mostramos neste capítulo a renormalizabilidade multiplicativa da EDQ com violação da simetria de Lorentz, pelo menos em todas as ordens em teoria de perturbações; onde empregamos a técnica de renormalização algébrica dentro do formalismo de BRST em combinação com um conjunto de fontes externas que controlam os termos de quebra. Com essa abordagem encontramos os seguintes resultados:

- As características da renormalizabilidade da EDQ usual são mantidas inalteradas, veja (4.29) e (4.30). Neste caso, existem somente três parâmetros de renormalização independentes. Eis: a_0 , a_3 e a_4 .
- Encontramos um total de vinte e dois parâmetros de renormalização para a ação que respeita as simetrias de Lorentz, de CPT e de BRST. Quando colocamos as fontes externas nos seus valores físicos (4.8) e, por exemplo, escolhemos invariância por PT (ver a ação (4.38)), encontramos treze parâmetros, ao invés de nove parâmetros encontrados em [111]. Essa discrepância entre esses resultados é devida à renormalização matricial empregada. Ressaltamos que a renormalização matricial não é uma escolha, mas uma necessidade devida à mistura entre as fontes. Esses resultados estão consistentes com os cálculos a 1-laço desenvolvidos na Sec. 3.2.
- O termo de Carroll-Field-Jackiw $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} v^\mu A^\nu \partial^\alpha A^\beta$ não se renormaliza. Além disso, isso é confirmado por cálculos explícitos a 1-laço. De fato, isso é uma consequência direta da identidade de Ward do campo fantasma (4.17).
- Diferentemente de [138, 139], termos tipo Proca não são gerados pelos coeficientes de violação de Lorentz. Isto é uma consequência da identidade de Ward do campo fantasma: ela é uma identidade não-integrada, fazendo-a mais poderosa que sua versão não-abeliana.
- Embora os coeficientes de violação de Lorentz sejam fenomenologicamente muito pequenos, encontramos através de nossa abordagem que o vácuo do modelo é modificado. De fato, os termos de vácuo não são evitados pelas identidades de Ward. De qualquer forma, desde que esses são termos de pura fonte, o conteúdo dinâmico da teoria não é modificado. Assim, atributos como causalidade e unitariedade são também preservados [100]. No entanto, é importante mencionar algumas palavras sobre esses termos. Tipicamente, termos de vácuo são associados a condensados,

a partir de mecanismos de quebra espontânea de simetria [25, 28], efeitos de condensação dinâmica [168, 172, 173, 174, 175], e outros. Aqui, um efeito levemente diferente ocorre, que é similar aos termos de vácuo de Gribov-Zwanziger [164, 165, 176], *i.e.*, esses termos vêm de termos de pura fonte permitidos por contagem de potências e sobrevivem depois do limite físico. Podemos interpretar esses termos como segue: devido a teoria ser embebida em uma teoria maior, a contração para os valores físicos deixa uma “memória” da ação maior. Isto pode, portanto, ser entendido como uma condensação do conjunto de campos clássicos quando o limite físico é tomado, *i.e.*, o limite físico é um congelamento não-trivial desses campos auxiliares. Podemos também observar que a ação de Gribov-Zwanziger pode ser interpretada como uma ação de quebra espontânea de simetria [177]; talvez uma interpretação similar seja possível para a presente abordagem.

- Finalmente, encontramos que não há geração radiativa do termo tipo Chern-Simons, $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} b^\mu A^\nu \partial^\alpha A^\beta$ [123, 124, 131]. Mostramos que essa propriedade é uma consequência direta das classes de fontes BRST empregadas na nossa abordagem: a fim de controlar as quebras de Lorentz e de CPT (também de BRST), o campo de fundo b^μ foi promovido à fonte externa B^μ . Desde que esta fonte acopla-se a um operador composto invariante de BRST, ela é fechada de BRST. Por outro lado, o campo de fundo v^μ foi promovido à fonte externa $J^{\mu\nu\alpha}$. Esta fonte, contudo, é acoplada a um operador não-invariante de BRST. Portanto, ela deve ser exata de BRST, com $\lambda^{\mu\nu\alpha}$ sendo sua contraparte de BRST em um duplete de BRST. Como fontes (operadores) exatas (os) de BRST não podem receber contribuição de fontes (operadores) fechadas (os) de BRST [178, 179, 180], a fonte $J^{\mu\nu\alpha}$ nunca receberá contribuição da fonte B^μ – por outro lado, a outra forma é possível. Ainda, desde que a renormalização algébrica é um método recursivo e independente do esquema de renormalização, essa propriedade é garantida em todas as ordens em teoria de perturbações. Este resultado também foi encontrado em [133] através de métodos algébricos. Contudo, encontramos aqui uma interpretação cohomológica.

Convém chamar atenção para as diferenças na forma como a simetria de Lorentz é restaurada em [170] e a aqui realizada. Naquele caso, dada uma ação com um termo de quebra de Lorentz, é introduzido outro termo semelhante, com uma fonte externa, e a transformação da fonte externa sob transformações de Lorentz é escolhida de modo a restaurar a simetria de Lorentz da teoria – compensando o termo de quebra. Em síntese, a teoria permanece com um setor de quebra. Contudo, o conjunto de transformações dos campos e fontes externas são definidos de tal modo que a teoria seja invariante. No nosso caso, entretanto, ao invés de introduzir uma fonte externa em adição ao termo de quebra, os termos de quebra são tratados já com fontes externas com transformações específicas, e a teoria não apresenta nenhum setor de quebra que é compensado com termo

sem quebra. Em suma, ressaltando novamente, a teoria aqui é imersa em uma teoria mais geral, preservando os mesmos acoplamentos originais, com as simetrias restauradas.

Vale ainda comentar alguns aforismos dispostos na Ref. [170]: “[...]whether you like it or not, you have to include in the initial lagrangian all terms that violate the Lorentz symmetry consistent with locality and power-counting, unless otherwise constrained by a break control!” e “Whether you like it or not, you have to include in the lagrangian all counter terms consistent with locality and power-counting, unless otherwise constrained by Ward identities.” – este ultimo é atribuído a Symanzik. Embora o primeiro refira-se à lagrangiana inicial e o segundo ao contratermo, ambos estão relacionados à questão da estabilidade quântica. Para deixarmos isso mais claro, sob o ponto de vista da estabilidade quântica, e através dos resultados acima obtidos, podemos tomar dois distintos modelos de EDQ com violação da simetria de Lorentz. Se considerarmos os seguintes modelos

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= S_{EDQ} + S_1 + S_2 , \\ \Sigma_2 &= S_{EDQ} + S_1 ,\end{aligned}\tag{4.40}$$

onde

$$\begin{aligned}S_1 &= \int d^4x (\epsilon_{\beta\mu\nu\alpha} v^\beta A^\mu \partial^\nu A^\alpha - e^\mu \bar{\psi} D_\mu \psi) , \\ S_2 &= - \int d^4x (a^\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi + b^\mu \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\mu \psi) ,\end{aligned}\tag{4.41}$$

vemos de (4.32), (4.34) e do último tópico acima que o modelo descrito pela ação Σ_1 é consistente quanticamente. Por outro lado, se tomarmos um modelo do tipo Σ_2 teríamos um contratermo infinito do tipo S_2 gerado por correções quânticas advindas da ação S_1 , e o modelo não teria estabilidade quântica²².

Nas Refs. [133, 170] os autores argumentam que, se termos de quebra de Lorentz são controlados pelas fontes externas, não há necessidade de introduzir, devido à questão da estabilidade quântica, todos os termos de quebra na ação inicial. Nesses trabalhos, por exemplo, é mostrado que um termo tipo Chern-Simons não é gerado por correções radiativas, e, portanto, não há necessidade de introduzir um termo de quebra de Lorentz tipo Chern-Simons desde o início, de acordo com o argumento prévio; como também discutimos

²² Um clássico exemplo da importância da estabilidade quântica é o caso de uma teoria de um campo escalar neutro em interação com férmions. Neste caso, a teoria apresenta as mesmas potenciais divergências da EDQ (ver Fig. 5), com as linhas de fótons substituídas por linhas de campos escalares. Neste caso o gráfico tipo e tem também contribuição nula de acordo com o teorema de Furry. Contudo, na ausência de uma identidade de Ward – tipo [154] para a EDQ – o gráfico d não fornece uma contribuição finita. Assim um termo divergente tipo ϕ^4 surge a 1-laço. Então deve ser introduzido à ação clássica um termo tipo $\lambda\phi^4$ para absorver essa divergência. Veja, por exemplo, [181] para mais detalhes nesse assunto.

acima para os dois modelos Σ_1 e Σ_2 . Por outro lado, ainda em [170] e também em [111] os autores argumentam que se a completa teoria com quebra de Lorentz, compatível com o critério de localidade e contagem de potências, é considerada, não é necessário introduzir nenhum controlador de quebra de Lorentz. Contudo, em [111] os autores estudam a completa EDQ estendida sem controlar a quebra de Lorentz. Todavia, ao estudar a estabilidade quântica os autores escolhem, por exemplo, um setor da teoria que é invariante por PT. No entanto, o contratermo proposto não é o mais geral possível – o que é difícil de entender, já que os próprios autores abrem o trabalho [170] com o segundo aforismo acima. Isto, de fato, está em desacordo com o que é sabido de teoria de renormalização [181].

No nosso caso, no intuito de aplicar seguramente o PAQ, restauramos a simetria de Lorentz – além de CPT e de BRST – da EDQ estendida completa. No estudo da estabilidade quântica propomos o contratermo mais geral possível compatível com as simetrias da teoria. E isso deve ser feito tanto em teorias com ou sem simetria de Lorentz.

Embora a EDQ estendida é suposta conter efeitos de baixas energias de teorias mais fundamentais, com coeficientes de violação provenientes, *e.g.*, de quebra espontânea de simetria, o único argumento fenomenológico usado no estudo da renormalizabilidade da teoria a “baixas energias” é que tais coeficientes de violação de Lorentz sejam Planck-suprimidos. Assim, a imersão de tal teoria em uma mais geral através das fontes de Symanzik não é um procedimento espúrio, uma vez que não se está supostamente considerando todos os graus de liberdade da teoria; como os modos de Nambu-Goldstone.

5 ANOMALIAS DE CALIBRE NA EDQ ESTENDIDA

Neste capítulo estudaremos a questão das anomalias de calibre na EDQ com violação da simetria de Lorentz. Seguindo o método algébrico e os resultados da quantização de BRST do capítulo anterior, limitaremos nosso estudo a um problema de cohomologia. Desde que a abordagem a ser empregada é independente do esquema de renormalização (regularização, prescrição de subtração e condições de renormalização), os resultados aqui obtidos são esperados serem gerais. Apresentamos esse estudo na Ref. [182].

5.1 Anomalias de calibre e renormalizabilidade

No capítulo anterior discorremos sobre a renormalizabilidade em todas as ordens em teoria de perturbações da EDQ com violação da simetria de Lorentz: especificamente, mostramos que esse modelo é estável no nível quântico. Contudo, como enfatizado na Sec. 1.3 desta tese, um dos requisitos para a renormalizabilidade de uma teoria é que a teoria seja livre de anomalias no nível quântico – especificamente anomalias de calibre, se a teoria em estudo for uma teoria de calibre. Pretendemos aqui neste capítulo dar uma resposta definitiva sobre o problema das anomalias de calibre na EDQ estendida [182]. Além do estudo desenvolvido no capítulo anterior, existem outras incursões nesse sentido. De fato, na Ref. [111] os autores clamam uma prova da renormalizabilidade da EDQ estendida em todas as ordens em teoria de perturbações. Contudo, eles escolhem separadamente a simetria por C e (ou) PT a fim de garantir a ausência de anomalias de calibre no nível quântico, ao invés de levar em conta a completa EDQ estendida. Além disso, um passo além das Refs. [110, 111] é apresentado na Ref. [183], onde o cálculo das integrais de Feynman relacionadas ao tri-vértice do fóton é feito. Nesse trabalho é mostrado que a contribuição que vem do tri-vértice do fóton é livre de anomalias de calibre a 1-laço e apontam a conjectura que essa propriedade permanece em todas as ordens em teoria de perturbações. Essencialmente, eles fixam a ambiguidade na circulação do momento interno dos diagramas requerendo a invariância de calibre da teoria, assim como apontam a importância desse resultado para uma prova completa da renormalizabilidade em todas as ordens da EDQ com violação da simetria de Lorentz. De fato, uma vez que o parâmetro da anomalia é feito nulo a 1-laço, um teorema de não renormalização seria necessário para garantir essa propriedade em todas as ordens em teoria de perturbações. Ainda nessa linha, em [184] é analisada as contribuições a 1-laço que vêm dos diagramas da polarização do vácuo e do tri-vértice do fóton. Nesse trabalho, além dos termos divergentes, as contribuições finitas dos diagramas mencionados são calculadas através da chamada regularização implícita, a fim de contornar o problema da ambiguidade em

definir a matriz γ_5 em d dimensões e sua álgebra. Ainda, é empregado a invariância da circulação do momento interno nos diagramas a fim de garantir a invariância de calibre da EDQ estendida. Embora [184] discorde do procedimento de cálculo empregado na Ref. [183], ambos trabalhos mostram, assim, que as identidades de Ward da EDQ com violação da simetria de Lorentz são válidas a 1-laço.

5.1.1 Interlúdio: sobre o conceito de anomalia

No intuito de entender melhor o conceito de anomalia de calibre, vale relembrar o resultado importante advindo do teorema de Noether, comentado na introdução desta tese: uma simetria global contínua de um sistema físico implica numa corrente conservada. Usualmente, a análise dessa propriedade é realizada no nível clássico. Contudo, se tal corrente não é conservada na teoria quântica, fala-se de uma *anomalia global*. Mas até aqui isso não é tão preocupante, pois nos referimos a uma simetria global, *i.e.*, a simetria não é calibrada. Contudo, a situação é problemática se essa corrente não-conservada interage com campos de calibre de massa nula. Neste caso as identidades de Ward da teoria não mais serão válidas – o problema apontado acima para a EDQ estendida – e fala-se, portanto, de uma *anomalia de calibre*. Tal anomalia acarreta a violação da unitariedade [185], uma vez que somente dois modos transversos são esperados para os campos de calibre vetoriais.

Outra importante anomalia dentro do MP é a *anomalia quiral*. Analisá-la-emos em mais detalhes na sequência. Dada a ação de Dirac²³ e as seguintes correntes vetorial, quiral (ou axial) e pseudoescalar,

$$J^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) , \quad J_5^\mu(x) = \bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x) , \quad P(x) = \bar{\psi}(x)\gamma_5\psi(x) , \quad (5.1)$$

respectivamente, decorre, classicamente, das equações de movimento, as seguintes relações

$$\partial_\mu J^\mu(x) = 0 , \quad \partial_\mu J_5^\mu(x) = 2imP(x) . \quad (5.2)$$

Nota-se que a corrente vetorial é conservada, que é bem-vindo, desde que essa corrente que se acopla ao campo de calibre. Por outro lado, a corrente quiral é parcialmente conservada (PCAC)²⁴, e só é conservada no limite de massa nula, $m = 0$.

Pode-se estabelecer as identidades de Ward para as relações apresentadas em (5.2)

²³ O setor exclusivamente fermiônico da ação da EDQ, S_{EDQ} . Nesta discussão a ação de Maxwell é desconsiderada, e o campo do fóton é tratado como um campo externo.

²⁴ N.T.: Sigla do inglês *Partially Conserved Axial Current*.

e verificá-las ordem a ordem em teoria de perturbações. Como é usual, parte-se do nível árvore. Assim, podemos tomar a seguinte identidade

$$\begin{aligned}
q^\lambda T_{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2, q) &= i \int d^4x d^4y d^4z e^{ik_1 + ik_2 - iqz} \partial_z^\lambda \langle 0 | T J_\mu(x) J_\nu(y) J_\lambda^5(z) | 0 \rangle \\
&= 2mi \int d^4x d^4y d^4z e^{ik_1 + ik_2 - iqz} \langle 0 | T J_\mu(x) J_\nu(y) P(z) | 0 \rangle \\
&= 2m T_{\mu\nu} .
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Nessa derivação foram desprezados os termos de Schwinger e usada a segunda identidade clássica de (5.2), ou seja, essa última identidade é válida no nível árvore. A identidade para conservação da corrente vetorial é

$$k_1^\mu T_{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2, q) = k_2^\nu T_{\mu\nu\lambda}(k_1, k_2, q) = 0 , \tag{5.4}$$

indicando a conservação da corrente vetorial.

Cálculos a 1-laço, se realizados ingenuamente, apontam que a identidade (5.3) é satisfeita. Ingenuamente porque tal validade é verificada através da mudança na variável de integração, *i.e.*, no momento interno. Tal operação é inválida, uma vez que a amplitude $T_{\mu\nu\lambda}$ é linearmente divergente. No caso em que tal amplitude é regularizada, a mudança de variável é permitida. Contudo, o resultado da amplitude $T_{\mu\nu\lambda}$ depende de como é realizado a mudança de variável no momento interno entre suas duas possíveis contribuições. Caso contrário, a identidade (5.4) poderia ser violada, o que não é bom. De modo geral, pode-se definir a mudança de variável no momento interno em termos dos momentos externos. Cálculos detalhados [29] apontam as seguintes modificações nas identidades de Ward (5.3) e (5.4):

$$\begin{aligned}
q^\lambda T_{\mu\nu\lambda}^{(1)}(k_1, k_2, q) &= 2m T_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1-\beta}{4\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k_1^\alpha k_2^\beta , \\
k_1^\mu T_{\mu\nu\lambda}^{(1)}(k_1, k_2, q) &= \frac{1+\beta}{8\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k_1^\alpha k_2^\beta .
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Desta relação vemos que as identidades de Ward vetorial e quiral não podem ser satisfeitas simultaneamente. Entretanto, desde que, aqui, somente a corrente vetorial interage com o campo do fóton, é preferível que a identidade de Ward quiral seja escolhida ser anômala, ao invés da identidade de Ward vetorial. Assim, podemos escolher $\beta = -1$; que nada mais é que fixar a ambiguidade na circulação do momento interno por exigir que a simetria de calibre da teoria seja preservada no nível quântico. Deste modo, a não conservação da corrente quiral é modificada, *i.e.*,

$$\partial_\mu J_5^\mu = 2miP + \mathcal{A} , \tag{5.6}$$

onde

$$\mathcal{A} = \frac{e^2}{16\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} \quad (5.7)$$

é a chamada anomalia de Adler-Bell-Jackiw (ABJ) [186, 187]. Note que essa anomalia independe da massa do férmion que circula no laço.

Quando a amplitude $T_{\mu\nu\lambda}^{(1)}$ é calculada através da regularização de Pauli-Villars ou regularização dimensional, a identidade de Ward vetorial é imediatamente satisfeita, ao contrário da quiral, fornecendo o mesmo resultado acima exposto. Associar-se-ia, então, à anomalia quiral, quando se considera uma teoria com férmions de massa zero, uma patologia do esquema de regularização utilizado; no sentido de que embora a anomalia não dependa do regulador, seu efeito seria uma consequência do procedimento de regularização. De fato, desde que a regularização de Pauli-Villars introduz um parâmetro de massa, a simetria quiral seria imediatamente quebrada, e isso poderia indicar a origem da anomalia quiral. Ademais, na regularização dimensional, a extensão dimensional da matriz γ_5 é responsável pelo surgimento do termo da anomalia. Contudo, todos os procedimentos de regularização, incluindo o *point splinting method*, além do método funcional de Fujikawa, concordam quanto ao resultado da anomalia de ABJ. Embora anomalias, como acabamos de ver – um exemplo da anomalia quiral –, sejam fenômenos genuinamente quânticos, não se pode interpretá-las como um problema relacionado ao esquema de regularização, seja este um controlador de divergências ultravioletas ou infravermelhas; mesmo considerando o fato que tais divergências são, também, consequências oriundas da quantização de sistemas de infinitos graus de liberdade. O fato de diferentes esquemas de regularização fornecerem o mesmo resultado para a anomalia (quiral) indica que esta é uma propriedade genuína dos sistemas físicos estudados. Pode-se, assim, associar essa anomalia a algum efeito físico, caracterizando-a como uma anomalia relevante.

O conceito de anomalia quiral para o MP tornou-se claro quando aquele foi usado para descrever o decaimento do pión neutro em dois fótons, $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$. De acordo com Sutherland e Veltman, tal decaimento é proibido – em desacordo com resultados experimentais. De fato, se é usado a PCAC para calcular a taxa de decaimento desse processo, *i.e.*, tomar o elemento de matriz de (5.2) entre dois fótons, no limite em que o momento do pión é suave, obtém-se um resultado nulo para tal taxa. Bell e Jackiw mostraram que tal decaimento é possível se a equação da PCAC for modificada, ou seja, se se usa a Eq. (5.6). Adler mostrou em um trabalho seminal que tal decaimento era proibido teoricamente pelo uso indevido da identidade (5.2) dentro da matriz de elementos; calculando-se diretamente a 4-divergência da corrente quiral através de métodos perturbativos (ver Eq. (5.5)) obtém-se a anomalia quiral (5.7), que é exatamente a modificação da PCAC. Este resultado mostra a profunda relação entre a anomalia quiral e o decaimento $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$. Este decaimento pode ser descrito pela amplitude $T_{\mu\nu\lambda}^{(1)}$, utilizando a fórmula de LSZ, onde os estados as-

sintóticos seriam o pión neutro acoplado à corrente quiral, e os fótons às demais correntes vetoriais. Note que isso não é inconsistente sob o ponto de vista da renormalizabilidade e unitariedade perturbativas, pois o campo que se acopla à corrente quiral não é um campo de calibre.

No Modelo Eletrofraco, entretanto, campos de calibre interagem com correntes quirais, e, assim, a anomalia quiral de ABJ, agora generalizada – por Bardeen [188] – para incluir campos de calibre não-abelianos, é permitida. Contudo, os férmions são construídos em representações do grupo $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, de modo que, se somado as contribuições para a anomalia de ABBJ de todos os férmions de uma mesma família, tal anomalia pode ser eliminada.

Outro resultado importante mostrado por Adler e Bardeen [189] é que a anomalia (5.7) é exata a 1-laço e não recebe correções em altas ordens em teoria de perturbações. Este resultado é conhecido como teorema de não-renormalização de Adler-Bardeen. Convém chamar atenção para duas consequências, bem explícitas em [190], desse teorema: (i) a anomalia quiral é exata a 1-laço; (ii) existe um esquema de subtração tal que, se anomalia de calibre é nula a 1-laço, ela será também nula em todas as ordens em teoria de perturbações.

O item (i) é o resultado original de Adler e Bardeen. O tópico (ii) pode ser entendido a partir da Eq. (5.5). Naquela situação, a fim de cancelar a anomalia de calibre, escolhemos $\beta = -1$. Isso significa introduzir na função vértice no nível árvore (ação clássica) o contratérmo $1/8\pi^2 \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k_1^\alpha k_2^\beta$.

Em suma, temos as seguintes conclusões: anomalias relevantes (que podem ter implicações físicas) são independentes de qualquer esquema de regularização empregado para calculá-las, ao contrário das anomalias irrelevantes. As anomalias de ABBJ referem-se às anomalias quirais e não necessariamente estão relacionadas às anomalias de calibre, exceto no caso em que os campos de calibre acoplam-se às correntes quirais. Anomalias quirais não são problemáticas, mesmo quando não puderem ser canceladas, se as correntes quirais não interagem com bósons de calibre. (Exemplos: lagrangiana da EDQ com acoplamento de Yukawa entre férmions de Dirac e mésons pseudoescalares, não conservação da corrente bariônica.) A versão original do teorema de não-renormalização de Adler-Bardeen refere-se à anomalia quiral.

5.1.2 Cohomologia e anomalia

De maneira totalmente independente do cálculo das integrais de Feynman, as anomalias de calibre podem ser caracterizadas pelo estudo da cohomologia dos operadores nilpotentes definidos na teoria em questão. Em teorias de calibre não-abelianas as anomalias podem ser caracterizadas através das equações de descida. Contudo, tais equações

forneem as chamadas anomalias covariantes, que não necessariamente correspondem às anomalias consistentes da teoria, *i.e.*, aquelas anomalias que satisfazem as condições de consistência de Wess-Zumino [191]. Contudo, existe um mapa entre tais anomalias. No caso abeliano, por outro lado, as anomalias obtidas do estudo da cohomologia já satisfazem diretamente a condição de consistência de Wess-Zumino.

Do ponto de vista da cohomologia, anomalias relevantes são aquelas que pertencem ao setor não-trivial da cohomologia. Em caso contrário, há as anomalias irrelevantes, que são aquelas que pertencem ao setor trivial da cohomologia.

De posse dessas propriedades, podemos verificar se o modelo aqui tratado apresenta anomalias de calibre. Assim, para vermos se a EDQ estendida é livre de anomalias de calibre no nível quântico, precisamos verificar se a solução do operador de Slavnov-Taylor (4.22) (forma funcional do operador de BRST) no setor não-trivial da cohomologia é vazia. Isto é verificado através da extensão do operador de Slavnov-Taylor ao nível quântico seguindo as prescrições do PAQ [51], e através da álgebra obedecida pelo operador de Slavnov-Taylor e um conjunto extra de identidades de Ward.

A fim de obtermos importantes relações algébricas entre as identidades de Ward, definamos um funcional geral \mathcal{F} com número fantasma par. O operador de Slavnov Taylor atuando sobre \mathcal{F} é definido como

$$\mathcal{S}(\mathcal{F}) \equiv \int d^4x \left(-\partial_\mu c \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta A_\mu} + \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \bar{Y}} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \psi} - \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta Y} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \bar{\psi}} + b \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \bar{c}} + J_{\mu\nu\alpha} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \lambda_{\mu\nu\alpha}} \right). \quad (5.8)$$

Ainda, podemos definir o seguinte operador de Slavnov-Taylor linearizado

$$\mathcal{S}_{\mathcal{F}} = \int d^4x \left(-\partial_\mu c \frac{\delta}{\delta A_\mu} + \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \bar{Y}} \frac{\delta}{\delta \psi} + \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \psi} \frac{\delta}{\delta \bar{Y}} - \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta Y} \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}} - \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \bar{\psi}} \frac{\delta}{\delta Y} + b \frac{\delta}{\delta \bar{c}} + J_{\mu\nu\alpha} \frac{\delta}{\delta \lambda_{\mu\nu\alpha}} \right). \quad (5.9)$$

Também, as seguintes identidades são satisfeitas

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\mathcal{F}} \mathcal{S}(\mathcal{F}) &= 0, \quad \forall \mathcal{F}, \\ \mathcal{S}_{\mathcal{F}} \mathcal{S}_{\mathcal{F}} &= 0, \quad \text{se } \mathcal{S}(\mathcal{F}) = 0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Além disso, a equação de fixação de calibre, junto com o operador de Slavnov-Taylor, equação do campo fantasma, equação do campo antifantasma e operador rígido satisfazem

a seguinte álgebra

$$\begin{aligned}
\frac{\delta}{\delta b(x)} \mathcal{S}(\mathcal{F}) - \mathcal{S}_{\mathcal{F}} \left(\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta b(x)} - \partial_{\mu} A^{\mu}(x) \right) &= \left(\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \bar{c}(x)} - \partial^2 c(x) \right), \\
\frac{\delta}{\delta \bar{c}(x)} \mathcal{S}(\mathcal{F}) + \mathcal{S}_{\mathcal{F}} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \bar{c}(x)} &= 0, \\
\int d^4 x \frac{\delta}{\delta c(x)} \mathcal{S}(\mathcal{F}) + \mathcal{S}_{\mathcal{F}} \int d^4 x \left(\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta c(x)} - \Delta_{cl} \right) &= -i \mathcal{W}_{rig}(\mathcal{F}), \\
\mathcal{W}_{rig} \mathcal{S}(\mathcal{F}) - \mathcal{S}_{\mathcal{F}} \mathcal{W}_{rig}(\mathcal{F}) &= 0.
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Veremos que as Eqs. (5.10) e (5.11) serão muito úteis para o estudo das anomalias.

5.2 Identidades de Ward anômalas

No estudo da estabilidade quântica da EDQ estendida desenvolvido na Sec. 4.2, assumimos que as identidades de Ward (4.15)-(4.19) eram válidas no nível quântico: 1-laço. Por conveniência, mostremos primeiramente que as identidades (4.16)-(4.19) de fato não apresentam anomalias no nível quântico.

Como ponto de partida, tomemos a equação de fixação de calibre. Sabemos que o campo de Lautrup-Nakanishi obedece a seguinte álgebra

$$\left[\frac{\delta}{\delta b(x)}, \frac{\delta}{\delta b(y)} \right] = 0. \tag{5.12}$$

Seja a ação quântica, Γ , *i.e.*,

$$\Gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n \Gamma^{(n)} \quad \text{onde } \Gamma^{(0)} = \Sigma. \tag{5.13}$$

A partir do PAQ, podemos supor que a equação de fixação de calibre se mantém até a ordem \hbar^{n-1} em teoria de perturbações, ou seja,

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta b(x)} = \partial_{\mu} A^{\mu}(x) + \Delta \cdot \Gamma = \partial_{\mu} A^{\mu}(x) + \hbar^n \Delta(x) + \mathcal{O}(\hbar^{n+1}), \tag{5.14}$$

onde $\Delta(x)$ é uma inserção polinomial local nos campos e suas derivadas de dimensão dois e número fantasma zero. A forma mais geral para tal inserção é

$$\Delta(x) = F(A, \bar{c}, c, \mathcal{J})(x) + \xi b(x), \tag{5.15}$$

onde F é um polinômio local nos campos A , \bar{c} , c e fontes \mathcal{J} , e ξ é um parâmetro adimen-

sional constante. A partir da Eq. (5.12) obtemos a seguinte condição de consistência

$$\frac{\delta}{\delta b(y)}\Delta(x) - \frac{\delta}{\delta b(x)}\Delta(y) = 0. \quad (5.16)$$

A partir da Eq. (5.15) encontramos

$$\frac{\delta}{\delta b(y)}\Delta(x) = \frac{\delta}{\delta b(x)}(F(A, \bar{c}, c, \mathcal{J})(y) + \xi b(y)). \quad (5.17)$$

Integrando esta equação, obtemos

$$\Delta(x) = \frac{\delta}{\delta b(x)} \int d^4y \left(F(A, \bar{c}, c, \mathcal{J})(y)b(y) + \frac{\xi}{2}b(y)b(y) \right). \quad (5.18)$$

Assim, a equação de fixação de calibre (5.14) torna-se

$$\frac{\delta \bar{\Gamma}}{\delta b(x)} = \partial_\mu A^\mu(x) + \mathcal{O}(\hbar^{n+1}), \quad (5.19)$$

onde redefinimos a ação quântica como

$$\bar{\Gamma} = \Gamma - \hbar^n \int d^4y \left(F(A, \bar{c}, c, \mathcal{J})(y)b(y) + \frac{\xi}{2}b(y)b(y) \right). \quad (5.20)$$

Podemos repetir esse procedimento recursivamente e mostrar que a equação de fixação de calibre é válida em todas as ordens.

Investiguemos agora uma possível quebra quântica na equação do campo antifantasma. Novamente, aplicando o PAQ

$$\frac{\delta \bar{\Gamma}}{\delta \bar{c}(x)} = \partial^2 c(x) + \Delta \cdot \bar{\Gamma} = \partial^2 c(x) + \hbar^n \Delta(x) + \mathcal{O}(\hbar^{n+1}), \quad (5.21)$$

com $\Delta(x)$ sendo um polinômio local de dimensão dois e número fantasma +1. Sua forma geral é

$$\Delta(x) = G(A, c, \mathcal{J})(x) + f(c)\bar{c}(x), \quad (5.22)$$

onde $G(A, c, \mathcal{J})(x)$ não depende do campo b , desde que esta dependência já foi absorvida na ação efetiva $\bar{\Gamma}$. $f(c)$ é uma função dependente de c . Contudo, a partir da Tabela 1 vemos que é impossível construir uma função $f(c)$ de dimensão dois e número fantasma dois dependendo somente de c . Então, assumimos $f(c) = 0$. A partir da álgebra obedecida pela equação do campo antifantasma

$$\left\{ \frac{\delta}{\delta \bar{c}(x)}, \frac{\delta}{\delta \bar{c}(y)} \right\} = 0, \quad (5.23)$$

derivamos outra condição de consistência

$$\frac{\delta}{\delta \bar{c}(y)} \Delta(x) + \frac{\delta}{\delta \bar{c}(x)} \Delta(y) = 0. \quad (5.24)$$

A solução para (5.24) é

$$\Delta(x) = \frac{\delta}{\delta \bar{c}(x)} \int d^4 y \bar{c}(y) G(A, c, \mathcal{J})(y). \quad (5.25)$$

Reescrevendo a equação do campo antifantasma

$$\frac{\delta \tilde{\Gamma}}{\delta \bar{c}(x)} = \partial^2 c(x) + \mathcal{O}(\hbar^{n+1}), \quad (5.26)$$

com

$$\tilde{\Gamma} = \bar{\Gamma} - \hbar^n \int d^4 y \bar{c}(y) G(A, c, \mathcal{J})(y), \quad (5.27)$$

sendo a ação efetiva redefinida. Novamente, vemos que a equação do campo antifantasma é válida na ordem considerada.

Supondo agora que a equação do campo fantasma (4.17) quebra na ordem \hbar^n , *i.e.*,

$$\frac{\delta \tilde{\Gamma}}{\delta c(x)} = \Delta_{cl} + \Delta \cdot \tilde{\Gamma} = \Delta_{cl} + \hbar^n \Delta(x) + \mathcal{O}(\hbar^{n+1}), \quad (5.28)$$

onde Δ_{cl} corresponde à quebra clássica e $\Delta(x)$ é um polinômio local de dimensão quatro e número fantasma -1 . Sua forma mais geral é

$$\Delta(x) = \int d^4 x (a_1 \bar{Y} \psi + a_2 \bar{\psi} Y + L(A, \mathcal{J}, a_{i+2})(x)), \quad (5.29)$$

onde os a 's são parâmetros adimensionais arbitrários²⁵ e L é um polinômio local dependendo do campo A e fontes \mathcal{J} . Note que o campo antifantasma não pode entrar em L , uma vez que sua contribuição no nível quântico já foi absorvida em $\tilde{\Gamma}$. Assim, é trivial ver que

$$\Delta(x) = \frac{\delta}{\delta c(x)} \int d^4 y c(y) (a_1 \bar{Y} \psi + a_2 \bar{\psi} Y + L(A, \mathcal{J}, a_{i+2})(y)), \quad (5.30)$$

²⁵ Os parâmetros a_{i+2} (com $i = 1, 2, \dots$) indicando um diferente parâmetro para cada diferente combinação entre as fontes e o campo de calibre.

e

$$\frac{\delta \hat{\Gamma}}{\delta c(x)} = \Delta_c + \mathcal{O}(\hbar^{n+1}), \quad (5.31)$$

com

$$\hat{\Gamma} = \tilde{\Gamma} - \hbar^n \int d^4 y c(y) (a_1 \bar{Y} \psi + a_2 \bar{\psi} Y + L(A, \mathcal{J}, a_{i+2})(y)). \quad (5.32)$$

Mostramos que a equação do campo fantasma é satisfeita na ordem \hbar^n . A prova em todas as ordens segue trivialmente por indução. A prova que a simetria rígida é satisfeita na ordem \hbar^n segue por supor um funcional geral respeitando os critérios de contagem de potências, escalar de Lorentz e escalar no espaço espinorial com número fantasma zero.

5.3 Operador de Slavnov-Taylor anômalo

Uma das importantes questões em teoria de campos perturbativa é se as simetrias da teoria clássica podem ser implementadas no nível quântico, *i.e.*, se existem anomalias na teoria. Na seção anterior mostramos que as identidades de Ward apresentadas nas Eqs. (4.16)-(4.19) não são anômalas no nível quântico. De fato, essas simetrias permitem eliminar muitos parâmetros de renormalização da teoria. Resta-nos checar se o operador de Slavnov-Taylor é anômalo no nível quântico. De fato, essa é a identidade de Ward mais importante que temos. A fim de fazer isso, podemos supor que o operador de Slavnov-Taylor quebra na ordem \hbar^n em teoria de perturbações, *i.e.*,

$$\mathcal{S}(\Gamma) = \hbar^n \Delta^{(1)} + \mathcal{O}(\hbar^{n+1}), \quad (5.33)$$

onde $\Delta^{(1)}$ é um polinômio local integrado dependendo dos campos e fontes, de número fantasma um e dimensão limitada por quatro. Aplicando o operador de Slavnov-Taylor linearizado \mathcal{S}_Γ na equação (5.33) e usando a identidade (5.10), encontra-se

$$\mathcal{S}_\Gamma \Delta^{(1)} = 0. \quad (5.34)$$

A Eq. (5.34) é a condição de consistência de Wess-Zumino para a anomalia. Resolver a Eq. (5.34) é um problema de cohomologia no espaço dos polinômios nos campos locais integrados de número fantasma um e dimensão limitada por quatro. Se a cohomologia de \mathcal{S}_Γ é vazia, dizemos que o modelo é livre de anomalias e o operador de Slavnov-Taylor pode ser implementado no nível quântico. Por outro lado, se a cohomologia de \mathcal{S}_Γ não for

vazia, ou seja,

$$\Delta^{(1)} = r\mathcal{A} + \mathcal{S}_\Gamma \hat{\Delta}^{(0)}, \quad (5.35)$$

onde $\mathcal{A} \neq \mathcal{S}_\Gamma \hat{\mathcal{A}}$ com \mathcal{A} sendo um polinômio nos campos local e r um parâmetro arbitrário, temos uma anomalia. Assim, o operador de Slavnov-Taylor só pode ser implementado até a ordem \hbar^{n-1} em teoria de perturbações. Neste caso somente a parte trivial pode ser reabsorvida pela redefinição da ação efetiva. É importante mencionar que o parâmetro r é uma função da constante de acoplamento e não pode ser determinado a partir de métodos algébricos; é necessário um cálculo explícito dos diagramas de Feynman para determiná-lo. Contudo, os métodos algébricos podem determinar a forma do funcional \mathcal{A} somente através do estudo da condição de consistência para a anomalia e independente do esquema de renormalização utilizado, como veremos.

Além da restrição imposta pela condição de consistência de Wess-Zumino (5.34), a álgebra apresentada na Eq. (5.11) irá impor mais restrições sobre a anomalia – por hora consideremos uma quebra somente na ordem \hbar . De fato, a anomalia $\Delta^{(1)}$ ainda deve obedecer as seguintes restrições

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Delta^{(1)}}{\delta b} &= 0, \\ \frac{\delta \Delta^{(1)}}{\delta \bar{c}} &= 0, \\ \int d^4x \frac{\delta \Delta^{(1)}}{\delta c} &= 0, \\ \mathcal{W}_{rig} \Delta^{(1)} &= 0. \end{aligned} \quad (5.36)$$

A solução mais geral para a Eq. (5.36) é

$$\Delta^{(1)} = r \int d^4x \partial^\mu c \mathcal{A}_\mu, \quad (5.37)$$

onde \mathcal{A}_μ é um funcional local de dimensão três dependendo dos campos fundamentais – exceto b e \bar{c} – e fontes externas – com exceção das fontes $\lambda^{\mu\nu\alpha}$ e $J^{\mu\nu\alpha}$, que pertencem ao setor trivial da cohomologia. É importante notar que o operador de Slavnov-Taylor é apenas a forma funcional do operador de BRST²⁶, s . Assim, ele não muda o conteúdo discreto (comportamento sob CPT) da teoria quando atua no funcional Γ – lembrando que esta ação preserva CPT. Além disso, os acoplamentos permitidos no funcional $\Delta^{(1)}$ seguem os mesmos critérios da ação clássica. Isto não significa eliminar possíveis anomalias

²⁶ Embora dizemos que o operador de Slavnov-Taylor seja a forma funcional do operador de BRST, ambos operadores só coincidem quando atuam sobre funcionais dependentes dos campos A_μ e c .

de calibre por impor simetria discreta, mas que a teoria seleciona os acoplamentos de acordo com os operadores compostos e fontes. Isso, na verdade, significa distinguir os acoplamentos entre diferentes fontes e diferentes operadores.

Existem duas situações em que é possível eliminar anomalias de calibre, mas distintas: (i) suponha que o funcional \mathcal{A} satisfaz a condição de consistência de Wess-Zumino e não pertence ao setor trivial da cohomologia, enquanto o parâmetro r , a princípio, é não-nulo. Neste caso, se as contribuições para \mathcal{A} vêm de diferentes férmions em diferentes representações, tal parâmetro é escrito como $r = \sum_i^{n_f} r_i$, onde n_f é o número de férmions em uma dada família. Caso tal soma forneça $r = 0$, diz-se que a anomalia, embora não-trivial, pode ser eliminada. Ainda, desde que o parâmetro efetivo da anomalia é nulo a 1-laço, um teorema de não-renormalização tipo Adler-Bardeen [189] para a anomalia é necessário a fim de estabelecer o comportamento do parâmetro r sob correções quânticas, *i.e.*, se, de fato, r será nulo em todas as ordens; (ii) suponha agora que o funcional \mathcal{A} pertence ao setor trivial da cohomologia, ou seja, $\mathcal{A} = \mathcal{S}_\Gamma \hat{\mathcal{A}}$. Nesta situação a anomalia pode ser eliminada pela introdução do contratérmo não invariante $-\hat{\mathcal{A}}$ à ação clássica. Aqui, contudo, um teorema de não renormalização não é necessário. Embora inequivalentes, em ambas as situações – (i) e (ii) – a anomalia \mathcal{A} é permitida, embora possa ser eliminada. Mas, em todo caso, funcionais que pertencem à condição (ii) não são candidatos à anomalias, ao contrário de (i).

Vejamos na sequência as possíveis contribuições para a anomalia de calibre, respeitando os critérios acima mencionados e as condições mostradas nas Eqs. (5.34) e (5.37). Inicialmente, temos

$$\begin{aligned}
\Delta^{(1)} = & \int d^4x \left(r_1 D^\alpha{}_\mu \epsilon_{\nu\alpha\rho\sigma} \partial^\mu c A^\nu \partial^\rho A^\sigma + r_2 D^\alpha{}_\nu \epsilon_{\mu\alpha\rho\sigma} \partial^\mu c A^\nu \partial^\rho A^\sigma + r_3 D^{\beta\alpha} \epsilon_{\beta\alpha\mu\nu} \partial^\mu c A^\sigma \partial_\sigma A^\nu + \right. \\
& + r_4 D^{\beta\alpha} \epsilon_{\beta\alpha\mu\nu} \partial_\sigma c A^\mu \partial^\sigma A^\nu + r_5 D^{\beta\alpha} \epsilon_{\beta\alpha\mu\nu} \partial^\mu c A_\sigma \partial^\nu A^\sigma + r_6 D^{\beta\alpha} \epsilon_{\beta\alpha\mu\nu} \partial_\sigma c A^\mu \partial^\nu A^\sigma + \\
& + r_7 D^{\beta\alpha} \epsilon_{\beta\alpha\mu\nu} \partial_\sigma c A^\sigma \partial^\mu A^\nu + r_8 D^\lambda{}_\mu \epsilon_{\lambda\nu\rho\sigma} \partial^\rho c A^\sigma \partial^\mu A^\nu + r_9 D^{\kappa\lambda} \epsilon_{\kappa\lambda\mu\nu} \partial^\mu c A^\nu \partial_\rho A^\rho + \\
& + r_{10} \partial^\mu c \bar{A}_\mu A_\alpha A^\alpha + r_{11} \partial^\mu c A_\mu \bar{A}_\alpha A^\alpha + r_{12} C^{\mu\nu} \partial_\mu c A_\nu A_\alpha A^\alpha + \\
& + r_{13} C^{\mu\nu} \partial_\nu c A_\mu A_\alpha A^\alpha + r_{14} C^{\mu\nu} A_\mu A_\nu A^\alpha \partial_\alpha c + r_{15} C^{\mu\nu} \partial_\mu c \bar{\psi} \gamma_\nu \psi + r_{16} D^{\mu\nu} \partial_\mu c \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\nu \psi + \\
& + r_{17} E^\mu \partial_\mu c \bar{\psi} \psi + r_{18} F^\mu \partial_\mu c \bar{\psi} \gamma_5 \psi + r_{19} G^{\alpha\beta\mu} \partial_\mu c \bar{\psi} \sigma_{\alpha\beta} \psi + r_{20} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial^\mu c B^\nu \partial^\alpha A^\beta + \\
& \left. + r_{21} \partial^\mu c A_\mu A_\alpha A^\alpha + r_{22} \partial^\mu c \bar{\psi} \gamma_\mu \psi + r_{23} \partial^\mu c \partial^\nu F_{\mu\nu} \right) . \tag{5.38}
\end{aligned}$$

Desde que $\Delta_1^{(1)}$ deve satisfazer a condição de consistência (5.34), obtemos relações entre alguns parâmetros:

$$r_1 = r_2, \quad r_3 = r_4, \quad r_5 = r_6, \quad r_8 = r_9 = 0, \quad r_{10} = \frac{r_{11}}{2}, \quad r_{12} = r_{13} = \frac{r_{14}}{2}. \tag{5.39}$$

Assim, a Eq. (5.38) torna-se

$$\begin{aligned}
\Delta^{(1)} = & r_1 \int d^4x \{ [(\partial^\mu D^\alpha_\mu) \epsilon_{\alpha\nu\rho\sigma} - (\partial^\mu D^\alpha_\nu) \epsilon_{\mu\alpha\rho\sigma}] c A^\nu \partial^\rho A^\sigma + \\
& + \frac{1}{2} (D^\alpha_\mu \epsilon_{\alpha\nu\rho\sigma} - D^\alpha_\nu \epsilon_{\mu\alpha\rho\sigma} + D^\alpha_\rho \epsilon_{\mu\nu\alpha\sigma} - D^\alpha_\sigma \epsilon_{\mu\nu\rho\alpha}) c \partial^\mu A^\nu \partial^\rho A^\sigma + \\
& + D^\alpha_\rho \epsilon_{\sigma\alpha\mu\nu} c A^\mu \partial^\rho \partial^\sigma A^\nu \} + \\
& - \int d^4x \{ r_3 [(\partial^\mu D^{\beta\alpha}) \epsilon_{\beta\alpha\mu\nu} c A_\sigma \partial^\sigma A^\nu + (\partial^\sigma D^{\beta\alpha}) \epsilon_{\beta\alpha\mu\nu} c A^\mu \partial_\sigma A^\nu] + \\
& + r_5 [(\partial^\mu D^{\beta\alpha}) \epsilon_{\beta\alpha\mu\nu} c A_\sigma \partial^\nu A^\sigma + (\partial^\sigma D^{\beta\alpha}) \epsilon_{\beta\alpha\mu\nu} c A^\mu \partial^\nu A_\sigma] + r_7 (\partial^\sigma D^{\beta\alpha}) \epsilon_{\beta\alpha\mu\nu} c A_\sigma \partial^\mu A^\nu + \\
& + \frac{1}{2} D^{\beta\alpha} [r_7 (\epsilon_{\beta\alpha\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} + \epsilon_{\beta\alpha\rho\sigma} \eta_{\mu\nu}) + (r_3 - r_5) (\epsilon_{\beta\alpha\mu\sigma} \eta_{\rho\nu} + \epsilon_{\beta\alpha\rho\nu} \eta_{\sigma\mu})] c \partial^\mu A^\nu \partial^\rho A^\sigma + \\
& + D^{\beta\alpha} \epsilon_{\beta\alpha\mu\nu} c [r_3 A^\mu \partial^2 A^\nu + r_5 A^\mu \partial^\nu \partial_\sigma A^\sigma + (r_3 + r_7) A_\sigma \partial^\sigma \partial^\mu A^\nu] \} + \\
& + \int d^4x [r_{10} (\partial^\mu c \bar{A}_\mu A_\alpha A^\alpha + 2 \partial^\mu c A_\mu \bar{A}_\alpha A^\alpha) + r_{12} (C^{\mu\nu} \partial_\mu c A_\nu A_\alpha A^\alpha + \\
& + C^{\mu\nu} \partial_\nu c A_\mu A_\alpha A^\alpha + 2 C^{\mu\nu} A_\mu A_\nu A^\alpha \partial_\alpha c) + r_{15} C^{\mu\nu} \partial_\mu c \bar{\psi} \gamma_\nu \psi + r_{16} D^{\mu\nu} \partial_\mu c \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\nu \psi + \\
& + r_{17} E^\mu \partial_\mu c \bar{\psi} \psi + r_{18} F^\mu \partial_\mu c \bar{\psi} \gamma_5 \psi + r_{19} G^{\alpha\beta\mu} \partial_\mu c \bar{\psi} \sigma_{\alpha\beta} \psi + r_{20} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial^\mu c B^\nu \partial^\alpha A^\beta + \\
& + r_{21} \partial^\mu c A_\mu A^\alpha A^\alpha + r_{22} \partial^\mu c \bar{\psi} \gamma_\mu \psi + r_{23} \partial^\mu c \partial^\nu F_{\mu\nu}] . \tag{5.40}
\end{aligned}$$

Contudo, é possível mostrar que $\Delta^{(1)} = \mathcal{S}_\Sigma \hat{\Delta}^{(0)}$, onde²⁷

$$\begin{aligned}
\hat{\Delta}^{(0)} = & \frac{r_1}{2} \int d^4x (D^\alpha_\mu \epsilon_{\alpha\nu\rho\sigma} - D^\alpha_\nu \epsilon_{\mu\alpha\rho\sigma}) A^\mu A^\nu \partial^\rho A^\sigma + \\
& - \int d^4x D^{\beta\alpha} \epsilon_{\beta\alpha\mu\nu} \left(r_3 A^\mu A_\sigma \partial^\sigma A^\nu + r_5 A^\mu A_\sigma \partial^\nu A^\sigma + \frac{r_7}{2} A_\alpha A^\alpha \partial^\mu A^\nu \right) + \\
& - \int d^4x [r_{10} A^\mu \bar{A}_\mu A_\alpha A^\alpha + r_{12} C^{\mu\nu} A_\mu A_\nu A_\alpha A^\alpha + r_{15} C^{\mu\nu} A_\mu \bar{\psi} \gamma_\nu \psi + r_{16} D^{\mu\nu} A_\mu \bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\nu \psi + \\
& + r_{17} E^\mu A_\mu \bar{\psi} \psi + r_{18} F^\mu A_\mu \bar{\psi} \gamma_5 \psi + r_{19} G^{\alpha\beta\mu} A_\mu \bar{\psi} \sigma_{\alpha\beta} \psi + r_{20} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} B^\nu A^\mu \partial^\alpha A^\beta + \\
& + \frac{r_{21}}{4} A_\mu A^\mu A_\alpha A^\alpha + r_{22} A^\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi] . \tag{5.41}
\end{aligned}$$

Assim, $\Delta^{(1)}$ pertence ao setor trivial da cohomologia, não contribuindo para a anomalia. Desde que este termo pertence ao setor trivial da cohomologia, ele é um termo ambíguo, ele pode ser compensado pela introdução de um sutil contratermo não-invariante $-\hat{\Delta}^{(0)}$ à ação efetiva. Note, da Eq. (5.40), que o operador composto $c \partial^\mu A^\nu \tilde{F}_{\alpha\nu}$, que acopla-se à fonte D^α_μ , tem as mesmas simetrias discretas que o operador composto $\bar{\psi} \gamma_5 \gamma_\nu D_\mu \psi$. Por essa razão a fonte $C^{\mu\nu}$ não pode se acoplar a ele. Do contrário as fontes $C^{\mu\nu}$ e $D^{\mu\nu}$ seriam indistinguíveis no nível quântico, o que não faria sentido.

²⁷ Uma vez que estamos assumindo aqui que a identidade de Slavnov-Taylor quebra na ordem \hbar , o operador linearizado de Slavnov-Taylor está relacionado à ação clássica, *i.e.*, $\mathcal{S}_\Gamma \rightarrow \mathcal{S}_\Sigma$, com $\Gamma = \Sigma + \mathcal{O}(\hbar)$.

5.4 Discussão

A solução da cohomologia do operador de Slavnov-Taylor no espaço dos polinômios nos campos locais integrados de dimensão quatro e número fantasma um é vazia na ordem considerada, *i.e.*, $\Delta^{(1)} = 0$. Assim, as soluções existentes pertencem ao setor trivial da cohomologia e não é necessário um teorema de não renormalização. Desde que o método empregado é recursivo, concluímos que a EDQ com violação da simetria de Lorentz é livre de anomalias de calibre em todas as ordens em teoria de perturbações.

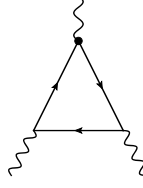
Além disso, como analisado no capítulo anterior, essa mesma teoria é estável no nível quântico. Concluímos, então, que essa teoria é de fato renormalizável em todas as ordens em teoria de perturbações.

Uma questão muito sutil a respeito das fontes externas pode levar a duas objeções extremamente opostas: a não restauração da simetria de Lorentz ou que os resultados obtidos são válidos somente para a teoria mais completa, sem violação da simetria de Lorentz, e, portanto, a análise aqui realizada não se aplica ao MPE mínimo.

Vimos que para o estudo da estabilidade quântica e das anomalias de calibre, tratamos, por exemplo, o campo de fundo b^μ como uma fonte externa $B^\mu(x)$. A primeira objeção especula que essa “renomeação” não restaura a simetria de Lorentz; os acoplamentos ainda são os mesmos (com exceção do termo tipo Chern-Simons) da ação (3.1), não havendo restauração da simetria Lorentz de fato. Mas isso é um engano, desde que a fonte $B^\mu(x)$ é assumida ser geral – função suave de suporte compacto, como a fonte J – nada impede que ela também sofra transformações de Lorentz (incluindo transformações discretas), pois não há mais campo de fundo para distinguirmos transformações de Lorentz de observador e de partícula. O ponto oposto é que esse procedimento é somente um truque matemático, pois no estágio em que as simetrias estão restauradas a teoria não corresponde à teoria física, e, portanto, os resultados aqui obtidos são inválidos. De fato, esse procedimento é um truque matemático no intuito de restaurar a simetria de Lorentz. Contudo, todos os acoplamentos da teoria inicial são preservados, o limite físico das fontes (4.8) não destrói nenhum acoplamento da teoria de partida. Para compreender como esse método é poderoso, note que todos os acoplamentos da ação (4.26), de acordo com a Tabela 6, preservam as simetrias de Lorentz, de CPT e de BRST, mas quando o limite físico é tomado, todos os contratermos (agora com quebra de Lorentz e de CPT) estão de acordo com o cálculo a 1-laço realizado na Sec. 3.2.

Outro ponto interessante pode ser notado se tomarmos o limite físico das fontes externas (4.8) no termo para a anomalia de calibre (5.40) – considerando somente os termos que dependem do campo de fundo $d^{\nu\mu}$ – e diferenciarmos em relação ao campo

Figura 9 - Tri-vértice do fóton na EDQ estendida.



fantasma, tal que²⁸

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}\Gamma &= r_1 \left[\frac{1}{2} (d^\alpha{}_\mu \epsilon_{\alpha\nu\rho\sigma} - d^\alpha{}_\nu \epsilon_{\mu\alpha\rho\sigma} + d^\alpha{}_\rho \epsilon_{\mu\nu\alpha\sigma} - d^\alpha{}_\sigma \epsilon_{\mu\nu\rho\alpha}) \partial^\mu A^\nu \partial^\rho A^\sigma + \right. \\
&+ d^\alpha{}_\rho \epsilon_{\sigma\alpha\mu\nu} A^\mu \partial^\rho \partial^\sigma A^\nu \left. + \right. \\
&- \left. \left\{ \frac{1}{2} d^{\beta\alpha} [r_7 (\epsilon_{\beta\alpha\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} + \epsilon_{\beta\alpha\rho\sigma} \eta_{\mu\nu}) + (r_3 - r_5) (\epsilon_{\beta\alpha\mu\sigma} \eta_{\rho\nu} + \epsilon_{\beta\alpha\rho\nu} \eta_{\sigma\mu})] \partial^\mu A^\nu \partial^\rho A^\sigma + \right. \right. \\
&+ \left. \left. d^{\beta\alpha} \epsilon_{\beta\alpha\mu\nu} [r_7 A^\mu \partial^2 A^\nu + r_5 A^\mu \partial^\nu \partial_\sigma A^\sigma + (r_3 + r_7) A_\sigma \partial^\sigma \partial^\mu A^\nu] \right\} \right]. \quad (5.43)
\end{aligned}$$

Se fixarmos os parâmetros r_1 , r_3 , r_5 e r_7 como

$$r_1 = r_7 = -\frac{ie^3}{18\pi^2}, \quad r_3 = -r_5 = \frac{ie^3}{36\pi^2}, \quad (5.44)$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}\Gamma &= -\frac{ie^3}{36\pi^2} \left[(d^\alpha{}_\mu \epsilon_{\alpha\nu\rho\sigma} - d^\alpha{}_\nu \epsilon_{\mu\alpha\rho\sigma} + d^\alpha{}_\rho \epsilon_{\mu\nu\alpha\sigma} - d^\alpha{}_\sigma \epsilon_{\mu\nu\rho\alpha}) \partial^\mu A^\nu \partial^\rho A^\sigma + \right. \\
&- d^{\beta\alpha} (\epsilon_{\beta\alpha\mu\nu} \eta_{\rho\sigma} + \epsilon_{\beta\alpha\rho\sigma} \eta_{\mu\nu} - \epsilon_{\beta\alpha\mu\sigma} \eta_{\rho\nu} - \epsilon_{\beta\alpha\rho\nu} \eta_{\sigma\mu}) \partial^\mu A^\nu \partial^\rho A^\sigma \left. + \right. \\
&- \frac{ie^3}{18\pi^2} d^\alpha{}_\rho \epsilon_{\sigma\alpha\mu\nu} A^\mu \partial^\rho \partial^\sigma A^\nu + \\
&- \left. \frac{ie^3}{36\pi^2} d^{\beta\alpha} \epsilon_{\beta\alpha\mu\nu} (A^\mu \partial^2 A^\nu - A^\mu \partial^\nu \partial_\sigma A^\sigma - A_\sigma \partial^\sigma \partial^\mu A^\nu) \right], \quad (5.45)
\end{aligned}$$

que coincide com o resultado para a anomalia de calibre obtido na Ref. [183], Eq. 25 (com o parâmetro $\beta = -1/3$ fixado), através de cálculos explícitos dos diagramas do tri-vértice do fóton na EDQ estendida (ver Fig. 9 + permutações).

Através da análise das propriedades da fonte $\bar{\kappa}_{\mu\nu\alpha\beta}$ sob simetrias discretas, concluimos que essa fonte não pode contribuir para a anomalia. De fato, é impossível encon-

²⁸ O operador \mathcal{W} é obtido através da diferenciação do operador de Slavnov-Taylor com respeito ao campo fantasma e tem a forma

$$\mathcal{W} = \partial_\mu \frac{\delta}{\delta A_\mu} + ie\psi \frac{\delta}{\delta \psi} - ie \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}} \bar{\psi}. \quad (5.42)$$

trar um operador composto que se acople à fonte $\bar{\kappa}_{\mu\nu\alpha\beta}$ que preserve CPT e a identidade de Wess-Zumino. Por argumentos gráficos vemos que o campo de fundo $\kappa_{\mu\nu\alpha\beta}$ não pode contribuir para a anomalia, pois ele é inserido numa linha do fóton, que não é o caso do tri-vértice do fóton mostrado na Fig. 9, onde as linhas internas são somente fermiônicas. Embora a fonte $\bar{\kappa}_{\mu\nu\alpha\beta}$ sofra mistura com a fonte $C^{\nu\mu}$, a única contribuição daquela fonte pertenceria necessariamente ao setor trivial da cohomologia, uma vez que $C^{\nu\mu}$ só contribui para o setor trivial da cohomologia.

Um ponto que merece mais esclarecimento é a geração do termo tipo Chern-Simons. A partir da Eq. (5.41) vemos que o fato do termo tipo Chern-Simons pertencer ao setor trivial da cohomologia do operador de Slavnov-Taylor no espaço dos polinômios locais integrados de dimensão limitada por quatro e número fantasma um, implica que o dado termo é ambíguo no setor dos polinômios de número fantasma zero. Isto significa que, sob o ponto de vista de cálculos dos diagramas de Feynman, ele pode ser eliminado por uma escolha sutil do esquema de renormalização. Contudo, convém notar que, no espaço dos polinômios de número fantasma zero, esse termo não é permitido.

Nota-se, também, dos resultados acima, que as fontes externas usadas para controlar a quebra da simetria de Lorentz só contribuem – quando permitidas por propriedades discretas – para o setor trivial da cohomologia no espaço dos funcionais de número fantasma um. De fato, é um resultado geral que a dependência da anomalia de calibre nas fontes externas é sempre trivial [192, 193].

Uma pergunta que poderia ficar implícita seria: onde se encaixa a anomalia de Adler-Bardeen-Bell-Jackiw, uma vez que a EDQ estendida apresenta vários acoplamentos semelhantes a acoplamentos presentes em teorias quirais? De fato, poder-se-ia ingenuamente tomar a identidade (5.37) e propor uma possível anomalia de calibre

$$\begin{aligned}\Delta^{(1)} &= r \int d^4x \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \partial^\mu c A^\nu \partial^\alpha A^\beta \\ &= -\frac{r}{4} \int d^4x \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} c F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta},\end{aligned}\tag{5.46}$$

que deveras não pertence ao setor trivial da cohomologia. Contudo, através da Tabela 7, nota-se que esse termo, embora CPT invariante, não é C invariante, não sendo compatível com as simetrias discretas do operador de Slavnov-Taylor linearizado, e, portanto, não pode contribuir para a anomalia. Note, então, que isso não significa eliminar anomalia – como discutido anteriormente – mas que essa anomalia é proibida por simetrias discretas. Poder-se-ia objetar, pois estamos analisando uma teoria que viola C e que, portanto, essa anomalia é de fato permitida. Vale lembrar que nesse estágio as simetrias discretas estão restauradas separadamente. Para entendermos isso melhor, suponhamos a seguinte

lagrangiana de um campo de calibre interagindo com um único férmion quirral, *i.e.*,

$$\Sigma_{\text{quiral}} = -\frac{1}{4} \int d^4x F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \int d^4x \bar{\psi}_L i\gamma^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) \psi_L, \quad (5.47)$$

onde

$$\psi_L = \frac{1}{2} (\mathbb{1} + \gamma_5) \psi. \quad (5.48)$$

Da Tabela 7 vemos que o acoplamento acima viola C. Sendo, assim, impossível, através das fontes de Symanzik, tornar esse acoplamento, como fizemos, *e.g.*, para o acoplamento $a^\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$, C invariante. De fato, o campo A_μ já tem suas simetrias discretas bem estabelecidas a partir da eletrodinâmica usual. Assim a ação quirral (5.47) poderia contribuir com uma anomalia²⁹ do tipo (5.46), que não é nosso caso. Por outro lado, o campo de fundo a^μ pode ser tratado como uma fonte externa e, assim, o acoplamento $a^\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$ pode ser feito C invariante (e também CPT invariante), como em (4.10). Chamando à atenção novamente, embora tenhamos aqui um campo acoplado à corrente quirral, *i.e.*, B^μ , não há a possibilidade de anomalia de calibre, uma vez que tal campo é somente um campo externo, e não um campo de calibre.

Na EDQ usual o teorema de Furry proíbe uma contribuição vinda da função Green de 3 pontos $\langle 0 | T J^\mu J^\nu J^\alpha | 0 \rangle$ (ver gráfico *e*, Fig. 5). Além disso, uma 4-divergência sobre qualquer uma das respectivas correntes ainda indicaria que a identidade de Slavnov-Taylor é preservada na EDQ usual. Na EDQ estendida, contudo, o teorema de Furry usual não pode ser aplicado, uma vez que a simetria por C é violada. Contudo, na EDQ estendida o teorema de Furry é generalizado [110]. Interessante que a análise das anomalias de calibre na fase em que todas as simetrias discretas estão restauradas não invalida em nada o método. De fato, na fase em que a teoria apresenta quebra da simetria de Lorentz, através da análise do teorema de Furry generalizado, propriedades do traço das matrizes- γ , propriedades das integrais de Feynman etc., nota-se que o único termo de violação de Lorentz que poderia contribuir para a anomalia de calibre a 1-laço é $d^{\nu\mu}$ [110, 183]. Aqui, através do método de Symanzik, vimos que esse termo pode contribuir para a anomalia; contudo, sua contribuição é trivial.

²⁹ Isso significa que a EDQ com um único férmion quirral seria não-renormalizável e não-unitária.

6 RENORMALIZABILIDADE DA TEORIA DE YANG-MILLS COM VIOLAÇÃO DA SIMETRIA DE LORENTZ

Neste capítulo, como um passo além da EDQ estendida, estudaremos a renormalizabilidade em todas as ordens em teoria de perturbações da teoria de Yang-Mills pura com violação da simetria de Lorentz. Com a experiência adquirida em capítulos anteriores, usaremos o mesmo formalismo empregado no estudo da renormalizabilidade da EDQ estendida. Contudo, algumas sutilezas aparecem na teoria não-abeliana. Toda a análise será realizada no calibre de Landau. Por questão de conveniência, trabalharemos aqui em um espaço euclidiano. Publicamos essa análise na Ref. [169].

6.1 Teoria de Yang-Mills com violação da simetria de Lorentz

Consideraremos aqui uma teoria de Yang-Mills pura para o grupo de simetria $SU(N)$ com violação da simetria de Lorentz, seguindo os requerimentos do MPE mínimo. Os campos de calibre são valorados na álgebra $A_\mu = A_\mu^a T^a$, onde T^a são os geradores da álgebra de $SU(N)$. Eles são escolhidos a ser anti-hermitianos e têm traço nulo. A álgebra de Lie típica é dada por $[T^a, T^b] = f^{abc} T^c$, onde f^{abc} são as constantes de estrutura antisimétricas. Os índices latinos correm como $\{a, b, c, \dots\} \in \{1, 2, \dots, N^2 - 1\}$. Ainda, as constantes de estrutura obedecem a identidade de Jacobi:

$$f^{abd} f^{dce} + f^{cad} f^{dbe} + f^{bcd} f^{dae} = 0. \quad (6.1)$$

O modelo é descrito pela seguinte ação³⁰[117]

$$\Xi_{YMVL} = \Xi_{YM} + \Xi_{VLP} + \Xi_{VLI}, \quad (6.2)$$

onde

$$\Xi_{YM} = \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a \quad (6.3)$$

é a ação clássica de Yang-Mills – um invariante no espaço interno (de calibre) e no espaço euclidiano. O tensor intensidade de campo é definido como $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a +$

³⁰ Não é esperado confusão com o caso abeliano.

$gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c$. O setor de violação de Lorentz de CPT-par é

$$\Xi_{VLP} = \frac{1}{4} \int d^4x \kappa_{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta}^a F_{\mu\nu}^a, \quad (6.4)$$

e o setor de violação de Lorentz de CPT-ímpar é

$$\Xi_{VLI} = \int d^4x \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} v_\mu \left(A_\nu^a \partial_\alpha A_\beta^a + \frac{g}{3} f^{abc} A_\nu^a A_\alpha^b A_\beta^c \right). \quad (6.5)$$

A violação de Lorentz é caracterizada pelos campos de fundo v_μ , com dimensão de massa 1, e $\kappa_{\alpha\beta\mu\nu}$, que é adimensional. Esses tensores têm as mesmas propriedades de simetria daquelas descritas na Sec. 3.1 para o caso abeliano.

6.2 Quantização de BRST e a restauração da simetria de Lorentz

Desde que a teoria de Yang-Mills pura com violação da simetria de Lorentz é uma teoria de calibre, uma fixação de calibre, como explicado na Sec. 4.1, é requerida para quantizá-la. Aqui, empregaremos também a quantização de BRST na condição de calibre de Landau $\partial_\mu A_\mu^a = 0$. Assim, além do campo do campo de calibre, também precisamos do campo de Lautrup-Nakanishi b^a e dos campos fantasmas e antifantasmas de Faddeev-Popov, ou seja, c^a e \bar{c}^a , respectivamente. As transformações de BRST dos campos são

$$\begin{aligned} sA_\mu^a &= -D_\mu^{ab} c^b, \\ sc^a &= \frac{g}{2} f^{abc} c^b c^c, \\ s\bar{c}^a &= b^a, \\ sb^a &= 0, \end{aligned} \quad (6.6)$$

onde $D_\mu^{ab} = \delta^{ab} \partial_\mu - gf^{abc} A_\mu^c$ é a derivada covariante na representação adjunta, e g é a constante de acoplamento do campo de calibre. Quantizando primeiramente o setor de Yang-Mills puro sem violação de Lorentz, temos a ação com o calibre de Landau fixado

$$\Xi_0 = \Xi_{YM} + \Xi_{gf}, \quad (6.7)$$

onde

$$\Xi_{gf} = s \int d^4x \bar{c}^a \partial_\mu A_\mu^a = \int d^4x (b^a \partial_\mu A_\mu^a + \bar{c}^a \partial_\mu D_\mu^{ab} c^b) \quad (6.8)$$

é a ação de fixação de calibre com o calibre de Landau imposto. O calibre de Landau é escolhido pelas mesmas razões do caso abeliano³¹. Não é difícil ver que a ação (6.7) satisfaz

$$s\bar{\Xi}_0 = 0. \quad (6.9)$$

Para estender a quantização de BRST para o setor de violação da simetria de Lorentz, procederemos da mesma forma como na Sec. 4.1, ou seja, substituiremos cada campo de fundo como uma fonte externa e, possivelmente, sua contraparte de BRST. Contudo, o caso não-abeliano é um pouco mais sutil que o caso abeliano. Por exemplo, vamos tomar o termo tipo Chern-Simons: para garantir a renormalizabilidade do modelo precisamos de dois dubletos de BRST, um acoplado ao termo bilinear e outro ao termo trilinear no campo de calibre – ambos de dimensão três. Ambos os termos têm de ser tratados separadamente pois eles são operadores compostos independentes (no caso abeliano o termo tipo Chern-Simons tem somente um operador composto), veja (6.12) abaixo. (Note que esse operador composto é diferente dos operadores compostos do setor fermiônico de violação de Lorentz na EDQ estendida. De fato, neste caso todos os operadores compostos deste setor são invariantes de calibre e não faz sentido decompô-los em duas partes distintas como naquele caso do operador composto de Chern-Simons, que não é invariante de calibre.) O conjunto de fontes é caracterizado por

$$\begin{aligned} s\bar{\kappa}_{\alpha\beta\mu\nu} &= 0, \\ s\lambda_{\mu\nu\alpha} &= J_{\mu\nu\alpha}, \\ sJ_{\mu\nu\alpha} &= 0, \\ s\eta_{\mu\nu\alpha} &= \tau_{\mu\nu\alpha}, \\ s\tau_{\mu\nu\alpha} &= 0. \end{aligned} \quad (6.10)$$

³¹ No entanto, a renormalizabilidade da teoria de Yang-Mills com violação de Lorentz poderia também ser analisada em outros calibres renormalizáveis, *e.g.*, os calibres lineares covariantes ξ , o calibre abeliano maximal, e o calibre de Curci-Ferrari. Todos eles são muito importantes no estudo do setor não-perturbativo da CDQ. Contudo, nos dois últimos casos, eles consistem em calibres não-lineares, um fato que demanda a introdução de um termo de interação quártico entre os campos fantasmas para a renormalizabilidade, e gera uma grande quantidade extra de contratermos, tornando a análise completa muito menos interessante e muito mais técnica. Os calibres lineares covariantes poderiam ser facilmente implementados, embora termos extras dependendo do parâmetro de calibre apareceriam. Contudo, como mencionado acima, o calibre de Landau é um ponto fixo natural dos calibres lineares covariantes, fazendo-os equivalentes em algum nível.

Tabela 4 - Números quânticos das fontes.

fontes	Ω	L	λ	J	η	τ	$\bar{\kappa}$
Dimensão UV	3	4	1	1	1	1	0
Número fantasma	-1	-2	-1	0	-1	0	0

Eventualmente, essas fontes atingirão os seguintes valores físicos

$$\begin{aligned}
J_{\mu\nu\alpha} |_{fis} &= \tau_{\mu\nu\alpha} |_{fis} = v_{\beta} \epsilon^{\beta\mu\nu\alpha} , \\
\lambda_{\mu\nu\alpha} |_{fis} &= \eta_{\mu\nu\alpha} |_{fis} = 0 , \\
\bar{\kappa}_{\alpha\beta\mu\nu} |_{fis} &= \kappa_{\alpha\beta\mu\nu} .
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Assim, substituiremos as ações (6.4) e (6.5) por³²

$$\begin{aligned}
\Xi_{LP} &= \frac{1}{4} \int d^4x \bar{\kappa}_{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta}^a F_{\mu\nu}^a , \\
\Xi_{LI} &= s \int d^4x \left(\lambda_{\mu\nu\alpha} A_{\mu}^a \partial_{\nu} A_{\alpha}^a + \frac{g}{3} \eta_{\mu\nu\alpha} f^{abc} A_{\mu}^a A_{\nu}^b A_{\alpha}^c \right) \\
&= \int d^4x \left[J_{\mu\nu\alpha} A_{\mu}^a \partial_{\nu} A_{\alpha}^a + \frac{g}{3} \tau_{\mu\nu\alpha} f^{abc} A_{\mu}^a A_{\nu}^b A_{\alpha}^c + \lambda_{\mu\nu\alpha} \partial_{\mu} c^a \partial_{\nu} A_{\alpha}^a + \right. \\
&\quad \left. + g(\eta_{\mu\nu\alpha} - \lambda_{\mu\nu\alpha}) f^{abc} A_{\mu}^a A_{\nu}^b \partial_{\alpha} c^c \right] ,
\end{aligned} \tag{6.12}$$

respectivamente. A ação (6.12) corresponde à imersão do setor de violação de Lorentz da teoria de Yang-Mills pura com violação da simetria de Lorentz em uma teoria sem quebra. Os números quânticos das fontes auxiliares seguem os números quânticos dos campos de fundo, como disposto na Tabela 4.

Para tratar a questão da renormalizabilidade do modelo, precisamos de um último conjunto de fontes externas invariantes de BRST, ou seja, Ω e L , a fim de controlar as transformações de BRST não-lineares dos campos originais,

$$\begin{aligned}
\Xi_{ext} &= \int d^4x \left(\Omega_{\mu}^a s A_{\mu}^a + L^a s c^a \right) \\
&= \int d^4x \left(-\Omega_{\mu}^a D_{\mu}^{ab} c^b + \frac{g}{2} f^{abc} L^a c^b c^c \right) .
\end{aligned} \tag{6.13}$$

Ainda, a partir da análise de contagem de potências e a partir da simetria de BRST, termos extras bilineares no campo de calibre – ação de operadores compostos locais –

³² Desde que a quebra de Lorentz foi controlada pelas fontes externas, renomeamos as ações originais sem o “V”, de violação.

acoplados às fontes auxiliares, são permitidos ser adicionados à ação, ou seja,

$$\begin{aligned}
\Xi_{OCL} &= s \int d^4x \left\{ (\alpha_1 \lambda_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\nu\alpha} + \alpha_2 \lambda_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\nu\alpha} + \alpha_3 \eta_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\nu\alpha} + \alpha_4 \eta_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\nu\alpha}) \frac{1}{2} A_\beta^a A_\beta^a + \right. \\
&+ (\beta_1 \lambda_{\mu\alpha\beta} J_{\nu\alpha\beta} + \beta_2 \lambda_{\mu\alpha\beta} \tau_{\nu\alpha\beta} + \beta_3 \eta_{\mu\alpha\beta} J_{\nu\alpha\beta} + \beta_4 \eta_{\mu\alpha\beta} \tau_{\nu\alpha\beta}) A_\mu^a A_\nu^a + \\
&+ \bar{\kappa}_{\alpha\beta\mu\nu} (\gamma_1 \lambda_{\alpha\beta\rho} J_{\mu\nu\rho} + \gamma_2 \lambda_{\alpha\beta\rho} \tau_{\mu\nu\rho} + \gamma_3 \eta_{\alpha\beta\rho} J_{\mu\nu\rho} + \gamma_4 \eta_{\alpha\beta\rho} \tau_{\mu\nu\rho}) \frac{1}{2} A_\sigma^a A_\sigma^a + \\
&+ \bar{\kappa}_{\alpha\beta\mu\nu} (\chi_1 \lambda_{\beta\rho\sigma} J_{\nu\rho\sigma} + \chi_2 \lambda_{\beta\rho\sigma} \tau_{\nu\rho\sigma} + \chi_3 \eta_{\beta\rho\sigma} J_{\nu\rho\sigma} + \chi_4 \eta_{\beta\rho\sigma} \tau_{\nu\rho\sigma}) A_\alpha^a A_\mu^a + \\
&+ \bar{\kappa}_{\alpha\rho\sigma\delta} (\varrho_1 \lambda_{\nu\rho\delta} J_{\mu\alpha\sigma} + \varrho_2 \lambda_{\nu\rho\delta} \tau_{\mu\alpha\sigma} + \varrho_3 \eta_{\nu\rho\delta} J_{\mu\alpha\sigma} + \varrho_4 \eta_{\nu\rho\delta} \tau_{\mu\alpha\sigma}) A_\mu^a A_\nu^a \left. \right\} \\
&= \int d^4x \left\{ (\alpha_1 J_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\nu\alpha} + \alpha_2 J_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\nu\alpha} + \alpha_3 \tau_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\nu\alpha} + \alpha_4 \tau_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\nu\alpha}) \frac{1}{2} A_\beta^a A_\beta^a + \right. \\
&+ (\beta_1 J_{\mu\alpha\beta} J_{\nu\alpha\beta} + \beta_2 J_{\mu\alpha\beta} \tau_{\nu\alpha\beta} + \beta_3 \tau_{\mu\alpha\beta} J_{\nu\alpha\beta} + \beta_4 \tau_{\mu\alpha\beta} \tau_{\nu\alpha\beta}) A_\mu^a A_\nu^a + \\
&+ \bar{\kappa}_{\alpha\beta\mu\nu} (\gamma_1 J_{\alpha\beta\rho} J_{\mu\nu\rho} + \gamma_2 J_{\alpha\beta\rho} \tau_{\mu\nu\rho} + \gamma_3 \tau_{\alpha\beta\rho} J_{\mu\nu\rho} + \gamma_4 \tau_{\alpha\beta\rho} \tau_{\mu\nu\rho}) \frac{1}{2} A_\sigma^a A_\sigma^a + \\
&+ \bar{\kappa}_{\alpha\beta\mu\nu} (\chi_1 J_{\beta\rho\sigma} J_{\nu\rho\sigma} + \chi_2 J_{\beta\rho\sigma} \tau_{\nu\rho\sigma} + \chi_3 \tau_{\beta\rho\sigma} J_{\nu\rho\sigma} + \chi_4 \tau_{\beta\rho\sigma} \tau_{\nu\rho\sigma}) A_\alpha^a A_\mu^a + \\
&+ \bar{\kappa}_{\alpha\rho\sigma\delta} (\varrho_1 J_{\nu\rho\delta} J_{\mu\alpha\sigma} + \varrho_2 J_{\nu\rho\delta} \tau_{\mu\alpha\sigma} + \varrho_3 \tau_{\nu\rho\delta} J_{\mu\alpha\sigma} + \varrho_4 \tau_{\nu\rho\delta} \tau_{\mu\alpha\sigma}) A_\mu^a A_\nu^a + \\
&+ (\alpha_1 \lambda_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\nu\alpha} + \alpha_2 \lambda_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\nu\alpha} + \alpha_3 \eta_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\nu\alpha} + \alpha_4 \eta_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\nu\alpha}) A_\beta^a \partial_\beta c^a + \\
&+ (\beta_1 \lambda_{\mu\alpha\beta} J_{\nu\alpha\beta} + \beta_2 \lambda_{\mu\alpha\beta} \tau_{\nu\alpha\beta} + \beta_3 \eta_{\mu\alpha\beta} J_{\nu\alpha\beta} + \beta_4 \eta_{\mu\alpha\beta} \tau_{\nu\alpha\beta}) (A_\mu^a \partial_\nu c^a + \partial_\mu c^a A_\nu^a) + \\
&+ \bar{\kappa}_{\alpha\beta\mu\nu} (\gamma_1 \lambda_{\alpha\beta\rho} J_{\mu\nu\rho} + \gamma_2 \lambda_{\alpha\beta\rho} \tau_{\mu\nu\rho} + \gamma_3 \eta_{\alpha\beta\rho} J_{\mu\nu\rho} + \gamma_4 \eta_{\alpha\beta\rho} \tau_{\mu\nu\rho}) A_\sigma^a \partial_\sigma c^a + \\
&+ \bar{\kappa}_{\alpha\beta\mu\nu} (\chi_1 \lambda_{\beta\rho\sigma} J_{\nu\rho\sigma} + \chi_2 \lambda_{\beta\rho\sigma} \tau_{\nu\rho\sigma} + \chi_3 \eta_{\beta\rho\sigma} J_{\nu\rho\sigma} + \chi_4 \eta_{\beta\rho\sigma} \tau_{\nu\rho\sigma}) (A_\alpha^a \partial_\mu c^a + \partial_\alpha c^a A_\mu^a) + \\
&+ \bar{\kappa}_{\alpha\rho\sigma\delta} (\varrho_1 \lambda_{\nu\rho\delta} J_{\mu\alpha\sigma} + \varrho_2 \lambda_{\nu\rho\delta} \tau_{\mu\alpha\sigma} + \varrho_3 \eta_{\nu\rho\delta} J_{\mu\alpha\sigma} + \varrho_4 \eta_{\nu\rho\delta} \tau_{\mu\alpha\sigma}) (A_\mu^a \partial_\nu c^a + \partial_\mu c^a A_\nu^a) \left. \right\} .
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Claramente, um termo desse tipo não surge no modelo abeliano. Esta propriedade é devido ao fato de que a equação do campo fantasma é uma equação não-integrada, fazendo-a mais forte que sua versão não-abeliana (discutiremos essa questão depois de definirmos a ação física (6.17)). Como no caso abeliano, uma ação de vácuo, *i.e.*, um termo que depende somente das fontes externas, é também permitida, tal que

$$\begin{aligned}
\Xi_V &= s \int d^4x [\zeta_1 \lambda_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\beta\gamma} J_{\nu\beta\kappa} J_{\gamma\kappa\alpha} + \zeta_2 \lambda_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\beta\gamma} J_{\nu\beta\kappa} \tau_{\gamma\kappa\alpha} + \zeta_3 \lambda_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\beta\gamma} \tau_{\nu\beta\kappa} J_{\gamma\kappa\alpha} + \\
&+ \zeta_4 \lambda_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\beta\gamma} \tau_{\nu\beta\kappa} \tau_{\gamma\kappa\alpha} + \zeta_5 \lambda_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\beta\gamma} J_{\nu\beta\kappa} J_{\gamma\kappa\alpha} + \zeta_6 \lambda_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\beta\gamma} J_{\nu\beta\kappa} \tau_{\gamma\kappa\alpha} + \\
&+ \zeta_7 \lambda_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\beta\gamma} \tau_{\nu\beta\kappa} J_{\gamma\kappa\alpha} + \zeta_8 \lambda_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\beta\gamma} \tau_{\nu\beta\kappa} \tau_{\gamma\kappa\alpha} + \zeta_9 \eta_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\beta\gamma} J_{\nu\beta\kappa} J_{\gamma\kappa\alpha} + \\
&+ \zeta_{10} \eta_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\beta\gamma} J_{\nu\beta\kappa} \tau_{\gamma\kappa\alpha} + \zeta_{11} \eta_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\beta\gamma} \tau_{\nu\beta\kappa} J_{\gamma\kappa\alpha} + \zeta_{12} \eta_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\beta\gamma} \tau_{\nu\beta\kappa} \tau_{\gamma\kappa\alpha} + \\
&+ \zeta_{13} \eta_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\beta\gamma} J_{\nu\beta\kappa} J_{\gamma\kappa\alpha} + \zeta_{14} \eta_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\beta\gamma} J_{\nu\beta\kappa} \tau_{\gamma\kappa\alpha} + \zeta_{15} \eta_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\beta\gamma} \tau_{\nu\beta\kappa} J_{\gamma\kappa\alpha} + \\
&+ \zeta_{16} \eta_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\beta\gamma} \tau_{\nu\beta\kappa} \tau_{\gamma\kappa\alpha} + \bar{\kappa}_{\mu\nu\alpha\beta} (\vartheta_1 \lambda_{\mu\rho\omega} J_{\nu\rho\sigma} J_{\alpha\omega\delta} J_{\beta\sigma\delta} + \vartheta_2 \lambda_{\mu\rho\omega} J_{\nu\rho\sigma} J_{\alpha\omega\delta} \tau_{\beta\sigma\delta} + \\
&+ \vartheta_3 \lambda_{\mu\rho\omega} J_{\nu\rho\sigma} \tau_{\alpha\omega\delta} J_{\beta\sigma\delta} + \vartheta_4 \lambda_{\mu\rho\omega} J_{\nu\rho\sigma} \tau_{\alpha\omega\delta} \tau_{\beta\sigma\delta} + \vartheta_5 \lambda_{\mu\rho\omega} \tau_{\nu\rho\sigma} J_{\alpha\omega\delta} J_{\beta\sigma\delta} + \\
&+ \vartheta_6 \lambda_{\mu\rho\omega} \tau_{\nu\rho\sigma} J_{\alpha\omega\delta} \tau_{\beta\sigma\delta} + \vartheta_7 \lambda_{\mu\rho\omega} \tau_{\nu\rho\sigma} \tau_{\alpha\omega\delta} J_{\beta\sigma\delta} + \vartheta_8 \lambda_{\mu\rho\omega} \tau_{\nu\rho\sigma} \tau_{\alpha\omega\delta} \tau_{\beta\sigma\delta} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \vartheta_9 \eta_{\mu\rho\omega} J_{\nu\rho\sigma} J_{\alpha\omega\delta} J_{\beta\sigma\delta} + \vartheta_{10} \eta_{\mu\rho\omega} J_{\nu\rho\sigma} J_{\alpha\omega\delta} \tau_{\beta\sigma\delta} + \vartheta_{11} \eta_{\mu\rho\omega} J_{\nu\rho\sigma} \tau_{\alpha\omega\delta} J_{\beta\sigma\delta} + \\
& + \vartheta_{12} \eta_{\mu\rho\omega} J_{\nu\rho\sigma} \tau_{\alpha\omega\delta} \tau_{\beta\sigma\delta} + \vartheta_{13} \eta_{\mu\rho\omega} \tau_{\nu\rho\sigma} J_{\alpha\omega\delta} J_{\beta\sigma\delta} + \vartheta_{14} \eta_{\mu\rho\omega} \tau_{\nu\rho\sigma} J_{\alpha\omega\delta} \tau_{\beta\sigma\delta} + \\
& + \vartheta_{15} \eta_{\mu\rho\omega} \tau_{\nu\rho\sigma} \tau_{\alpha\omega\delta} J_{\beta\sigma\delta} + \vartheta_{16} \eta_{\mu\rho\omega} \tau_{\nu\rho\sigma} \tau_{\alpha\omega\delta} \tau_{\beta\sigma\delta} \Big] \\
& = \int d^4x \Big[\zeta_1 J_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\beta\gamma} J_{\nu\beta\kappa} J_{\gamma\kappa\alpha} + \zeta_2 J_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\beta\gamma} J_{\nu\beta\kappa} \tau_{\gamma\kappa\alpha} + \zeta_3 J_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\beta\gamma} \tau_{\nu\beta\kappa} J_{\gamma\kappa\alpha} + \\
& + \zeta_4 J_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\beta\gamma} \tau_{\nu\beta\kappa} \tau_{\gamma\kappa\alpha} + \zeta_5 J_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\beta\gamma} J_{\nu\beta\kappa} J_{\gamma\kappa\alpha} + \zeta_6 J_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\beta\gamma} J_{\nu\beta\kappa} \tau_{\gamma\kappa\alpha} + \\
& + \zeta_7 J_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\beta\gamma} \tau_{\nu\beta\kappa} J_{\gamma\kappa\alpha} + \zeta_8 J_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\beta\gamma} \tau_{\nu\beta\kappa} \tau_{\gamma\kappa\alpha} + \zeta_9 \tau_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\beta\gamma} J_{\nu\beta\kappa} J_{\gamma\kappa\alpha} + \\
& + \zeta_{10} \tau_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\beta\gamma} J_{\nu\beta\kappa} \tau_{\gamma\kappa\alpha} + \zeta_{11} \tau_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\beta\gamma} \tau_{\nu\beta\kappa} J_{\gamma\kappa\alpha} + \zeta_{12} \tau_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\beta\gamma} \tau_{\nu\beta\kappa} \tau_{\gamma\kappa\alpha} + \\
& + \zeta_{13} \tau_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\beta\gamma} J_{\nu\beta\kappa} J_{\gamma\kappa\alpha} + \zeta_{14} \tau_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\beta\gamma} J_{\nu\beta\kappa} \tau_{\gamma\kappa\alpha} + \zeta_{15} \tau_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\beta\gamma} \tau_{\nu\beta\kappa} J_{\gamma\kappa\alpha} + \\
& + \zeta_{16} \tau_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\beta\gamma} \tau_{\nu\beta\kappa} \tau_{\gamma\kappa\alpha} + \bar{\kappa}_{\mu\nu\alpha\beta} (\vartheta_1 J_{\mu\rho\omega} J_{\nu\rho\sigma} J_{\alpha\omega\delta} J_{\beta\sigma\delta} + \vartheta_2 J_{\mu\rho\omega} J_{\nu\rho\sigma} J_{\alpha\omega\delta} \tau_{\beta\sigma\delta} + \\
& + \vartheta_3 J_{\mu\rho\omega} J_{\nu\rho\sigma} \tau_{\alpha\omega\delta} J_{\beta\sigma\delta} + \vartheta_4 J_{\mu\rho\omega} J_{\nu\rho\sigma} \tau_{\alpha\omega\delta} \tau_{\beta\sigma\delta} + \vartheta_5 J_{\mu\rho\omega} \tau_{\nu\rho\sigma} J_{\alpha\omega\delta} J_{\beta\sigma\delta} + \\
& + \vartheta_6 J_{\mu\rho\omega} \tau_{\nu\rho\sigma} J_{\alpha\omega\delta} \tau_{\beta\sigma\delta} + \vartheta_7 J_{\mu\rho\omega} \tau_{\nu\rho\sigma} \tau_{\alpha\omega\delta} J_{\beta\sigma\delta} + \vartheta_8 J_{\mu\rho\omega} \tau_{\nu\rho\sigma} \tau_{\alpha\omega\delta} \tau_{\beta\sigma\delta} + \\
& + \vartheta_9 \tau_{\mu\rho\omega} J_{\nu\rho\sigma} J_{\alpha\omega\delta} J_{\beta\sigma\delta} + \vartheta_{10} \tau_{\mu\rho\omega} J_{\nu\rho\sigma} J_{\alpha\omega\delta} \tau_{\beta\sigma\delta} + \vartheta_{11} \tau_{\mu\rho\omega} J_{\nu\rho\sigma} \tau_{\alpha\omega\delta} J_{\beta\sigma\delta} + \\
& + \vartheta_{12} \tau_{\mu\rho\omega} J_{\nu\rho\sigma} \tau_{\alpha\omega\delta} \tau_{\beta\sigma\delta} + \vartheta_{13} \tau_{\mu\rho\omega} \tau_{\nu\rho\sigma} J_{\alpha\omega\delta} J_{\beta\sigma\delta} + \vartheta_{14} \tau_{\mu\rho\omega} \tau_{\nu\rho\sigma} J_{\alpha\omega\delta} \tau_{\beta\sigma\delta} + \\
& + \vartheta_{15} \tau_{\mu\rho\omega} \tau_{\nu\rho\sigma} \tau_{\alpha\omega\delta} J_{\beta\sigma\delta} + \vartheta_{16} \tau_{\mu\rho\omega} \tau_{\nu\rho\sigma} \tau_{\alpha\omega\delta} \tau_{\beta\sigma\delta} \Big] . \tag{6.15}
\end{aligned}$$

No entanto, essa ação é maior que ação abeliana devido ao termo das fontes auxiliares e seus números quânticos (ver Tabela 3). Os parâmetros adimensionais α_i , β_i , γ_i , χ_i , ϱ_i , com $i = \{1, \dots, 4\}$ e ζ_j e ϑ_j com $j = \{1, \dots, 16\}$ são requeridos a fim de absorver possíveis divergências do vácuo. Esse termo extra é inevitável devido ao número quântico das fontes e das simetrias da ação completa (ver Sec. 6.3). Além disso, alguns termos extras que aparecem nas ações (6.14) e (6.15), como veremos, sempre sobrevivem no limite físico das fontes. Assim, o vácuo do modelo é diretamente afetado. Assim como no caso abeliano, todas as potências infinitas na fonte adimensional podem ser rearranjadas e redefinidas como os mesmos termos originais. A ação completa é, então,

$$\Xi = \Xi_0 + \Xi_{LP} + \Xi_{LI} + \Xi_{ext} + \Xi_{OCL} + \Xi_V . \tag{6.16}$$

Nos valores físicos das fontes (6.11), a ação (6.16) se reduz a

$$\begin{aligned}
\Xi_{fis} & = \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \frac{1}{4} \int d^4x \kappa_{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta}^a F_{\mu\nu}^a + \int d^4x v_\beta \epsilon_{\beta\mu\nu\alpha} \left(A_\mu^a \partial_\nu A_\alpha^a + \frac{g}{3} f^{abc} A_\mu^a A_\nu^b A_\alpha^c \right) + \\
& + \int d^4x \left(b^a \partial_\mu A_\mu^a + \bar{c}^a \partial_\mu D_\mu^{ab} c^b \right) + \int d^4x \left\{ ((3\alpha + 2\beta)v^2 - 2(\gamma + \varrho)\kappa_{\alpha\rho\sigma\alpha} v_\alpha v_\rho) A_\mu^a A_\mu^a + \right. \\
& - 2(\beta v_\mu v_\nu + (\chi - \varrho)\kappa_{\sigma\mu\beta\nu} v_\sigma v_\beta - (\chi - \varrho)\kappa_{\mu\alpha\nu\alpha} v^2 - 2\varrho\kappa_{\rho\alpha\nu\alpha} v_\rho v_\mu) A_\mu^a A_\nu^a + 6\zeta v^4 + \\
& \left. - 2\vartheta\kappa_{\alpha\mu\sigma\mu} v_\alpha v_\sigma v^2 \right\} , \tag{6.17}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha &= \sum_{i=1}^4 \alpha_i, & \beta &= \sum_{i=1}^4 \beta_i, & \chi &= \sum_{i=1}^4 \chi_i, & \gamma &= \sum_{i=1}^4 \gamma_i, \\ \varrho &= \sum_{i=1}^4 \varrho_i, & \zeta &= \sum_{j=1}^{16} \zeta_j, & \vartheta &= \sum_{j=1}^{16} \vartheta_j, \end{aligned} \quad (6.18)$$

a partir do qual é evidente que o vácuo é modificado. Ainda, um termo tipo Proca é também gerado, assim como um termo quadrático no campo de calibre com índices mistos. Esses dois termos quadráticos irão alterar o propagador do campo de calibre no nível árvore de uma forma mais drástica que os modelos de Yang-Mills com violação de Lorentz usuais. É importante mencionar aqui que, ao contrário do caso abeliano, o conteúdo físico do campo de calibre mudará drasticamente quando o limite físico das fontes é tomado. A única similaridade com o caso abeliano é o surgimento de um termo de vácuo. Mais especificamente, por deformar a teoria em uma teoria mais geral e contraindo-a de volta, a teoria retorna com termos extras (termos de massa) que não estavam presentes antes. Interpretamos isso como um tipo de geração de massa (parâmetro). Então, as equações de campo são na verdade alteradas. O segundo ponto é que o termo de pura fonte, Ξ_V , também gera termos extras no limite físico. Esses termos são constantes e não têm dependência nos campos quânticos. Eles são termos de puro vácuo, *i.e.*, eles não afetam as equações de campo, mas afetam o vácuo da teoria.

É importante enfatizar uma vez mais o fato que os termos de massa não necessariamente definem uma massa *per se*. Referimo-nos a esses termos como “termos de massa” somente porque eles aparecem como típicos termos de teoria massiva. Contudo, para determinar se esses termos de massa são realmente polos físicos do modelo, é necessário um estudo detalhado – a ser realizado no Cap. 7. Estritamente falando, aqueles termos são relacionados a parâmetros de massa e não a atuais massas do espectro físico. Em outras palavras, se esses termos de massa correspondem, ou não, a propagação de modos massivos físicos, *i.e.*, se eles não são táquions nem fantasmas. Em CDQ é bastante típico o surgimento de uma abundância de parâmetros de massa, contudo, eles não necessariamente descrevem polos físicos do propagador do campo do glúon, veja, por exemplo, [165, 168].

6.3 Renormalizabilidade

6.3.1 Identities de Ward

A fim de provar a renormalizabilidade do modelo, iniciamos dispondo o conjunto completo de identidades de Ward que a ação (6.16) satisfaz.

- Identidade de Slavnov-Taylor

$$\mathcal{S}(\Xi) \equiv \int d^4x \left(\frac{\delta \Xi}{\delta \Omega_\mu^a} \frac{\delta \Xi}{\delta A_\mu^a} + \frac{\delta \Xi}{\delta L^a} \frac{\delta \Xi}{\delta c^a} + b^a \frac{\delta \Xi}{\delta \bar{c}^a} + J_{\mu\nu\alpha} \frac{\delta \Xi}{\delta \lambda_{\mu\nu\alpha}} + \tau_{\mu\nu\alpha} \frac{\delta \Xi}{\delta \eta_{\mu\nu\alpha}} \right) = 0. \quad (6.19)$$

- Fixação de calibre e equação dos campos antifantasma

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Xi}{\delta b^a} &= \partial_\mu A_\mu^a, \\ \frac{\delta \Xi}{\delta \bar{c}^a} + \partial_\mu \frac{\delta \Xi}{\delta \Omega_\mu^a} &= 0. \end{aligned} \quad (6.20)$$

- Equação dos campos fantasmas

$$\mathcal{G}^a \Xi = \Delta_{cl}^a, \quad (6.21)$$

com

$$\mathcal{G}^a = \int d^4x \left(\frac{\delta}{\delta c^a} + g f^{abc} \bar{c}^b \frac{\delta}{\delta b^c} \right), \quad (6.22)$$

e

$$\Delta_{cl}^a = \int d^4x g f^{abc} (\Omega_\mu^b A_\mu^c - L^b c^c). \quad (6.23)$$

Nas Eqs. (6.20) e (6.21) – como em (4.16) e (4.17) – os termos de quebra são lineares nos campos. Assim, eles permanecerão no nível clássico [52].

6.3.2 Contratermo mais geral

Para obtermos o contratermo mais geral possível que pode ser adicionado à ação clássica Ξ a qualquer ordem em teoria de perturbações, procedemos da mesma maneira que na Sec. 4.2, *i.e.*, precisamos encontrar o mais geral polinômio local integrado Ξ^{ct} com dimensão limitada por quatro e número fantasma zero. Como usual, impomos as

identidades de Ward (6.19)-(6.21) à ação perturbada $\Xi + \varepsilon \Xi^{ct}$. É simples encontrar que o contratermo deve obedecer as seguintes restrições:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\Xi \Xi^{ct} &= 0, \\ \frac{\delta \Xi^{ct}}{\delta b^a} &= 0, \\ \left(\frac{\delta}{\delta \bar{c}^a} + \partial_\mu \frac{\delta}{\delta \Omega_\mu^a} \right) \Xi^{ct} &= 0, \\ \mathcal{G}^a \Xi^{ct} &= 0, \end{aligned} \quad (6.24)$$

onde \mathcal{S}_Ξ é o operador de Slavnov-Taylor linearizado nilpotente,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\Xi &= \int d^4x \left(\frac{\delta \Xi}{\delta \Omega_\mu^a} \frac{\delta}{\delta A_\mu^a} + \frac{\delta \Xi}{\delta A_\mu^a} \frac{\delta}{\delta \Omega_\mu^a} + \frac{\delta \Xi}{\delta L^a} \frac{\delta}{\delta c^a} + \frac{\delta \Xi}{\delta c^a} \frac{\delta}{\delta L^a} + b^a \frac{\delta}{\delta \bar{c}^a} + \right. \\ &\quad \left. + J_{\mu\nu\alpha} \frac{\delta}{\delta \lambda_{\mu\nu\alpha}} + \tau_{\mu\nu\alpha} \frac{\delta}{\delta \eta_{\mu\nu\alpha}} \right). \end{aligned} \quad (6.25)$$

Utilizando os métodos usuais de renormalização algébrica empregados na Sec. 4.2, segue-se que a solução para Ξ^{ct} pode ser escrita como

$$\Xi^{ct} = \frac{1}{4} \int d^4x a_0 F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a + \frac{1}{4} \int d^4x a_1 \bar{\kappa}_{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta}^a F_{\mu\nu}^a + \mathcal{S}_\Xi \Delta^{(-1)}, \quad (6.26)$$

onde $\Delta^{(-1)}$ é o mais geral contratermo polinomial local com dimensão limitada por quatro e número fantasma -1 , dado por

$$\begin{aligned} \Delta^{(-1)} &= \int d^4x \left\{ a_2 \Omega_\mu^a A_\mu^a + a_3 \partial_\mu \bar{c}^a A_\mu^a + a_4 L^a c^a + a_5 \frac{1}{2} \bar{c}^a b^a + a_6 \frac{g}{2} f^{abc} \bar{c}^b c^c + \right. \\ &\quad + (a_7 \lambda_{\mu\nu\alpha} + a_8 \eta_{\mu\nu\alpha}) A_\mu^a \partial_\nu A_\alpha^a + \frac{g}{3} (a_9 \lambda_{\mu\nu\alpha} + a_{10} \eta_{\mu\nu\alpha}) f^{abc} A_\mu^a A_\nu^b A_\alpha^c + \\ &\quad + (a_{11} \alpha_1 \lambda_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\nu\alpha} + a_{12} \alpha_2 \lambda_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\nu\alpha} + a_{13} \alpha_3 \eta_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\nu\alpha} + a_{14} \alpha_4 \eta_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\nu\alpha}) \frac{1}{2} A_\beta^a A_\beta^a + \\ &\quad + (a_{15} \beta_1 \lambda_{\mu\alpha\beta} J_{\nu\alpha\beta} + a_{16} \beta_2 \lambda_{\mu\alpha\beta} \tau_{\nu\alpha\beta} + a_{17} \beta_3 \eta_{\mu\alpha\beta} J_{\nu\alpha\beta} + a_{18} \beta_4 \eta_{\mu\alpha\beta} \tau_{\nu\alpha\beta}) A_\mu^a A_\nu^a + \\ &\quad + \bar{\kappa}_{\alpha\beta\mu\nu} (a_{19} \gamma_1 \lambda_{\alpha\beta\rho} J_{\mu\nu\rho} + a_{20} \gamma_2 \lambda_{\alpha\beta\rho} \tau_{\mu\nu\rho} + a_{21} \gamma_3 \eta_{\alpha\beta\rho} J_{\mu\nu\rho} + a_{22} \gamma_4 \eta_{\alpha\beta\rho} \tau_{\mu\nu\rho}) \frac{1}{2} A_\sigma^a A_\sigma^a + \\ &\quad + \bar{\kappa}_{\alpha\beta\mu\nu} (a_{23} \chi_1 \lambda_{\beta\rho\sigma} J_{\nu\rho\sigma} + a_{24} \chi_2 \lambda_{\beta\rho\sigma} \tau_{\nu\rho\sigma} + a_{25} \chi_3 \eta_{\beta\rho\sigma} J_{\nu\rho\sigma} + a_{26} \chi_4 \eta_{\beta\rho\sigma} \tau_{\nu\rho\sigma}) A_\alpha^a A_\mu^a + \\ &\quad + \bar{\kappa}_{\alpha\rho\sigma\delta} (a_{27} \varrho_1 \lambda_{\nu\rho\delta} J_{\mu\alpha\sigma} + a_{28} \varrho_2 \lambda_{\nu\rho\delta} \tau_{\mu\alpha\sigma} + a_{29} \varrho_3 \eta_{\nu\rho\delta} \tau_{\mu\alpha\sigma} + a_{30} \varrho_4 \eta_{\nu\rho\delta} \tau_{\mu\alpha\sigma}) A_\mu^a A_\nu^a + \\ &\quad + a_{31} \zeta_1 \lambda_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\beta\gamma} J_{\nu\beta\kappa} J_{\gamma\kappa\alpha} + a_{32} \zeta_2 \lambda_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\beta\gamma} J_{\nu\beta\kappa} \tau_{\gamma\kappa\alpha} + a_{33} \zeta_3 \lambda_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\beta\gamma} \tau_{\nu\beta\kappa} J_{\gamma\kappa\alpha} + \\ &\quad + a_{34} \zeta_4 \lambda_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\beta\gamma} \tau_{\nu\beta\kappa} \tau_{\gamma\kappa\alpha} + a_{35} \zeta_5 \lambda_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\beta\gamma} J_{\nu\beta\kappa} J_{\gamma\kappa\alpha} + a_{36} \zeta_6 \lambda_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\beta\gamma} J_{\nu\beta\kappa} \tau_{\gamma\kappa\alpha} + \\ &\quad + a_{37} \zeta_7 \lambda_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\beta\gamma} \tau_{\nu\beta\kappa} J_{\gamma\kappa\alpha} + a_{38} \zeta_8 \lambda_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\beta\gamma} \tau_{\nu\beta\kappa} \tau_{\gamma\kappa\alpha} + a_{39} \zeta_9 \eta_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\beta\gamma} J_{\nu\beta\kappa} J_{\gamma\kappa\alpha} + \\ &\quad + a_{40} \zeta_{10} \eta_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\beta\gamma} J_{\nu\beta\kappa} \tau_{\gamma\kappa\alpha} + a_{41} \zeta_{11} \eta_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\beta\gamma} \tau_{\nu\beta\kappa} J_{\gamma\kappa\alpha} + a_{42} \zeta_{12} \eta_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\beta\gamma} \tau_{\nu\beta\kappa} \tau_{\gamma\kappa\alpha} + \\ &\quad + a_{43} \zeta_{13} \eta_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\beta\gamma} J_{\nu\beta\kappa} J_{\gamma\kappa\alpha} + a_{44} \zeta_{14} \eta_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\beta\gamma} J_{\nu\beta\kappa} \tau_{\gamma\kappa\alpha} + a_{45} \zeta_{15} \eta_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\beta\gamma} \tau_{\nu\beta\kappa} J_{\gamma\kappa\alpha} + \\ &\quad \left. + a_{46} \zeta_{16} \eta_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\beta\gamma} \tau_{\nu\beta\kappa} \tau_{\gamma\kappa\alpha} + \bar{\kappa}_{\mu\nu\alpha\beta} (a_{47} \vartheta_1 \lambda_{\mu\rho\omega} J_{\nu\rho\sigma} J_{\alpha\omega\delta} J_{\beta\sigma\delta} + a_{48} \vartheta_2 \lambda_{\mu\rho\omega} J_{\nu\rho\sigma} J_{\alpha\omega\delta} \tau_{\beta\sigma\delta} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + a_{49}\vartheta_3\lambda_{\mu\rho\omega}J_{\nu\rho\sigma}\tau_{\alpha\omega\delta}J_{\beta\sigma\delta} + a_{50}\vartheta_4\lambda_{\mu\rho\omega}J_{\nu\rho\sigma}\tau_{\alpha\omega\delta}\tau_{\beta\sigma\delta} + a_{51}\vartheta_5\lambda_{\mu\rho\omega}\tau_{\nu\rho\sigma}J_{\alpha\omega\delta}J_{\beta\sigma\delta} + \\
& + a_{52}\vartheta_6\lambda_{\mu\rho\omega}\tau_{\nu\rho\sigma}J_{\alpha\omega\delta}\tau_{\beta\sigma\delta} + a_{53}\vartheta_7\lambda_{\mu\rho\omega}\tau_{\nu\rho\sigma}\tau_{\alpha\omega\delta}J_{\beta\sigma\delta} + a_{54}\vartheta_8\lambda_{\mu\rho\omega}\tau_{\nu\rho\sigma}\tau_{\alpha\omega\delta}\tau_{\beta\sigma\delta} + \\
& + a_{55}\vartheta_9\eta_{\mu\rho\omega}J_{\nu\rho\sigma}J_{\alpha\omega\delta}J_{\beta\sigma\delta} + a_{56}\vartheta_{10}\eta_{\mu\rho\omega}J_{\nu\rho\sigma}J_{\alpha\omega\delta}\tau_{\beta\sigma\delta} + a_{57}\vartheta_{11}\eta_{\mu\rho\omega}J_{\nu\rho\sigma}\tau_{\alpha\omega\delta}J_{\beta\sigma\delta} + \\
& + a_{58}\vartheta_{12}\eta_{\mu\rho\omega}J_{\nu\rho\sigma}\tau_{\alpha\omega\delta}\tau_{\beta\sigma\delta} + a_{59}\vartheta_{13}\eta_{\mu\rho\omega}\tau_{\nu\rho\sigma}J_{\alpha\omega\delta}J_{\beta\sigma\delta} + a_{60}\vartheta_{14}\eta_{\mu\rho\omega}\tau_{\nu\rho\sigma}J_{\alpha\omega\delta}\tau_{\beta\sigma\delta} + \\
& + a_{61}\vartheta_{15}\eta_{\mu\rho\omega}\tau_{\nu\rho\sigma}\tau_{\alpha\omega\delta}J_{\beta\sigma\delta} + a_{62}\vartheta_{16}\eta_{\mu\rho\omega}\tau_{\nu\rho\sigma}\tau_{\alpha\omega\delta}\tau_{\beta\sigma\delta} \} , \tag{6.27}
\end{aligned}$$

onde os parâmetros a_i são coeficientes livres. A equação dos campos fantasmas implica que $a_4 = 0$. Ainda, a partir da segunda ou terceira equação em (6.24), segue-se que $a_2 = a_3$. Ademais, a partir da segunda equação em (6.24) encontra-se que $a_5 = a_6 = 0$. Então, é possível verificar que a forma explícita do contratérmo mais geral permitido pelas identidades de Ward é dada por

$$\begin{aligned}
\Xi^{ct} = & a_0\Xi_{YM} + a_1\Xi_{LP} + a_2 \int d^4x \left[\frac{\delta\Xi_{YM}}{\delta A_\mu^a} A_\mu^a + \frac{\delta\Xi_{LP}}{\delta A_\mu^a} A_\mu^a + \frac{\delta\Xi_{LI}}{\delta A_\mu^a} A_\mu^a + (\Omega_\mu^a + \partial_\mu \bar{c}^a) \partial_\mu c^a + \right. \\
& + (\alpha_1 J_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\nu\alpha} + \alpha_2 J_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\nu\alpha} + \alpha_3 \tau_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\nu\alpha} + \alpha_4 \tau_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\nu\alpha}) A_\beta^a A_\beta^a + \\
& + 2(\beta_1 J_{\mu\alpha\beta} J_{\nu\alpha\beta} + \beta_2 J_{\mu\alpha\beta} \tau_{\nu\alpha\beta} + \beta_3 \tau_{\mu\alpha\beta} J_{\nu\alpha\beta} + \beta_4 \tau_{\mu\alpha\beta} \tau_{\nu\alpha\beta}) A_\mu^a A_\nu^a + \\
& + \bar{\kappa}_{\alpha\beta\mu\nu} (\gamma_1 J_{\alpha\beta\rho} J_{\mu\nu\rho} + \gamma_2 J_{\alpha\beta\rho} \tau_{\mu\nu\rho} + \gamma_3 \tau_{\alpha\beta\rho} J_{\mu\nu\rho} + \gamma_4 \tau_{\alpha\beta\rho} \tau_{\mu\nu\rho}) A_\sigma^a A_\sigma^a + \\
& + 2\bar{\kappa}_{\alpha\beta\mu\nu} (\chi_1 J_{\beta\rho\sigma} J_{\nu\rho\sigma} + \chi_2 J_{\beta\rho\sigma} \tau_{\nu\rho\sigma} + \chi_3 \tau_{\beta\rho\sigma} J_{\nu\rho\sigma} + \chi_4 \tau_{\beta\rho\sigma} \tau_{\nu\rho\sigma}) A_\alpha^a A_\mu^a + \\
& + 2\bar{\kappa}_{\alpha\rho\sigma\delta} (\varrho_1 J_{\nu\rho\delta} J_{\mu\alpha\sigma} + \varrho_2 J_{\nu\rho\delta} \tau_{\mu\alpha\sigma} + \varrho_3 \tau_{\nu\rho\delta} J_{\mu\alpha\sigma} + \varrho_4 \tau_{\nu\rho\delta} \tau_{\mu\alpha\sigma}) A_\mu^a A_\nu^a + \\
& + (\alpha_1 \lambda_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\nu\alpha} + \alpha_2 \lambda_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\nu\alpha} + \alpha_3 \eta_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\nu\alpha} + \alpha_4 \eta_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\nu\alpha}) A_\beta^a \partial_\beta c^a + \\
& + (\beta_1 \lambda_{\mu\alpha\beta} J_{\nu\alpha\beta} + \beta_2 \lambda_{\mu\alpha\beta} \tau_{\nu\alpha\beta} + \beta_3 \eta_{\mu\alpha\beta} J_{\nu\alpha\beta} + \beta_4 \eta_{\mu\alpha\beta} \tau_{\nu\alpha\beta}) (A_\mu^a \partial_\nu c^a + \partial_\mu c^a A_\nu^a) + \\
& + \bar{\kappa}_{\alpha\beta\mu\nu} (\gamma_1 \lambda_{\alpha\beta\rho} J_{\mu\nu\rho} + \gamma_2 \lambda_{\alpha\beta\rho} \tau_{\mu\nu\rho} + \gamma_3 \eta_{\alpha\beta\rho} J_{\mu\nu\rho} + \gamma_4 \eta_{\alpha\beta\rho} \tau_{\mu\nu\rho}) A_\sigma^a \partial_\sigma c^a + \\
& + \bar{\kappa}_{\alpha\beta\mu\nu} (\chi_1 \lambda_{\beta\rho\sigma} J_{\nu\rho\sigma} + \chi_2 \lambda_{\beta\rho\sigma} \tau_{\nu\rho\sigma} + \chi_3 \eta_{\beta\rho\sigma} J_{\nu\rho\sigma} + \chi_4 \eta_{\beta\rho\sigma} \tau_{\nu\rho\sigma}) (A_\alpha^a \partial_\mu c^a + \partial_\alpha c^a A_\mu^a) + \\
& + \bar{\kappa}_{\alpha\rho\sigma\delta} (\varrho_1 \lambda_{\nu\rho\delta} J_{\mu\alpha\sigma} + \varrho_2 \lambda_{\nu\rho\delta} \tau_{\mu\alpha\sigma} + \varrho_3 \eta_{\nu\rho\delta} J_{\mu\alpha\sigma} + \varrho_4 \eta_{\nu\rho\delta} \tau_{\mu\alpha\sigma}) (A_\mu^a \partial_\nu c^a + \partial_\mu c^a A_\nu^a) \Big] + \\
& + \int d^4x \left[J_{\mu\nu\alpha} \left(a_7 A_\mu^a \partial_\nu A_\alpha^a + a_9 \frac{g}{3} f^{abc} A_\mu^a A_\nu^b A_\alpha^c \right) + a_7 \lambda_{\mu\nu\alpha} \partial_\mu c^a \partial_\nu A_\alpha^a + \right. \\
& + (a_9 - a_7) g \lambda_{\mu\nu\alpha} f^{abc} A_\mu^a A_\alpha^c \partial_\nu c^b + \tau_{\mu\nu\alpha} \left(a_8 A_\mu^a \partial_\nu A_\alpha^a + a_{10} \frac{g}{3} f^{abc} A_\mu^a A_\nu^b A_\alpha^c \right) + \\
& + a_8 \eta_{\mu\nu\alpha} \partial_\mu c^a \partial_\nu A_\alpha^a + (a_{10} - a_8) g \eta_{\mu\nu\alpha} f^{abc} A_\mu^a A_\alpha^c \partial_\nu c^b + \\
& + (a_{11} \alpha_1 J_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\nu\alpha} + a_{12} \alpha_2 J_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\nu\alpha} + a_{13} \alpha_3 \tau_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\nu\alpha} + a_{14} \alpha_4 \tau_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\nu\alpha}) \frac{1}{2} A_\beta^a A_\beta^a + \\
& + (a_{11} \alpha_1 \lambda_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\nu\alpha} + a_{12} \alpha_2 \lambda_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\nu\alpha} + a_{13} \alpha_3 \eta_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\nu\alpha} + a_{14} \alpha_4 \eta_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\nu\alpha}) A_\beta^a \partial_\beta c^a + \\
& + (a_{15} \beta_1 J_{\mu\alpha\beta} J_{\nu\alpha\beta} + a_{16} \beta_2 J_{\mu\alpha\beta} \tau_{\nu\alpha\beta} + a_{17} \beta_3 \tau_{\mu\alpha\beta} J_{\nu\alpha\beta} + a_{18} \beta_4 \tau_{\mu\alpha\beta} \tau_{\nu\alpha\beta}) A_\mu^a A_\nu^a + \\
& + (a_{15} \beta_1 \lambda_{\mu\alpha\beta} J_{\nu\alpha\beta} + a_{16} \beta_2 \lambda_{\mu\alpha\beta} \tau_{\nu\alpha\beta} + a_{17} \beta_3 \eta_{\mu\alpha\beta} J_{\nu\alpha\beta} + a_{18} \beta_4 \eta_{\mu\alpha\beta} \tau_{\nu\alpha\beta}) (A_\mu^a \partial_\nu c^a + \partial_\mu c^a A_\nu^a) + \\
& + \bar{\kappa}_{\alpha\beta\mu\nu} (a_{19} \gamma_1 J_{\alpha\beta\rho} J_{\mu\nu\rho} + a_{20} \gamma_2 J_{\alpha\beta\rho} \tau_{\mu\nu\rho} + a_{21} \gamma_3 \tau_{\alpha\beta\rho} J_{\mu\nu\rho} + a_{22} \gamma_4 \tau_{\alpha\beta\rho} \tau_{\mu\nu\rho}) \frac{1}{2} A_\sigma^a A_\sigma^a + \\
& + \bar{\kappa}_{\alpha\beta\mu\nu} (a_{19} \gamma_1 \lambda_{\alpha\beta\rho} J_{\mu\nu\rho} + a_{20} \gamma_2 \lambda_{\alpha\beta\rho} \tau_{\mu\nu\rho} + a_{21} \gamma_3 \eta_{\alpha\beta\rho} J_{\mu\nu\rho} + a_{22} \gamma_4 \eta_{\alpha\beta\rho} \tau_{\mu\nu\rho}) A_\sigma^a \partial_\sigma c^a + \\
& + \bar{\kappa}_{\alpha\beta\mu\nu} (a_{23} \chi_1 J_{\beta\rho\sigma} J_{\nu\rho\sigma} + a_{24} \chi_2 J_{\beta\rho\sigma} \tau_{\nu\rho\sigma} + a_{25} \chi_3 \tau_{\beta\rho\sigma} J_{\nu\rho\sigma} + a_{26} \chi_4 \tau_{\beta\rho\sigma} \tau_{\nu\rho\sigma}) A_\alpha^a A_\mu^a +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \bar{\kappa}_{\alpha\beta\mu\nu} (a_{23}\chi_1\lambda_{\beta\rho\sigma}J_{\nu\rho\sigma} + a_{24}\chi_2\lambda_{\beta\rho\sigma}\tau_{\nu\rho\sigma} + a_{25}\chi_3\eta_{\beta\rho\sigma}J_{\nu\rho\sigma} + a_{26}\chi_4\eta_{\beta\rho\sigma}\tau_{\nu\rho\sigma}) (A_\alpha^a\partial_\mu c^a + \partial_\mu c^a A_\alpha^a) + \\
& + \bar{\kappa}_{\alpha\rho\sigma\delta} (a_{27}\varrho_1 J_{\nu\rho\delta} J_{\mu\alpha\sigma} + a_{28}\varrho_2 J_{\nu\rho\delta} \tau_{\mu\alpha\sigma} + a_{29}\varrho_3 \tau_{\nu\rho\delta} \tau_{\mu\alpha\sigma} + a_{30}\varrho_4 \tau_{\nu\rho\delta} \tau_{\mu\alpha\sigma}) A_\mu^a A_\nu^a + \\
& + \bar{\kappa}_{\alpha\rho\sigma\delta} (a_{27}\varrho_1 \lambda_{\nu\rho\delta} J_{\mu\alpha\sigma} + a_{28}\varrho_2 \lambda_{\nu\rho\delta} \tau_{\mu\alpha\sigma} + a_{29}\varrho_3 \eta_{\nu\rho\delta} \tau_{\mu\alpha\sigma} + a_{30}\varrho_4 \eta_{\nu\rho\delta} \tau_{\mu\alpha\sigma}) (A_\mu^a \partial_\nu c^a + \partial_\nu c^a A_\mu^a) + \\
& + a_{31}\zeta_1 J_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\beta\gamma} J_{\nu\beta\kappa} J_{\gamma\kappa\alpha} + a_{32}\zeta_2 J_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\beta\gamma} J_{\nu\beta\kappa} \tau_{\gamma\kappa\alpha} + a_{33}\zeta_3 J_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\beta\gamma} \tau_{\nu\beta\kappa} J_{\gamma\kappa\alpha} + \\
& + a_{34}\zeta_4 J_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\beta\gamma} \tau_{\nu\beta\kappa} \tau_{\gamma\kappa\alpha} + a_{35}\zeta_5 J_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\beta\gamma} J_{\nu\beta\kappa} J_{\gamma\kappa\alpha} + a_{36}\zeta_6 J_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\beta\gamma} J_{\nu\beta\kappa} \tau_{\gamma\kappa\alpha} + \\
& + a_{37}\zeta_7 J_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\beta\gamma} \tau_{\nu\beta\kappa} J_{\gamma\kappa\alpha} + a_{38}\zeta_8 J_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\beta\gamma} \tau_{\nu\beta\kappa} \tau_{\gamma\kappa\alpha} + a_{39}\zeta_9 \tau_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\beta\gamma} J_{\nu\beta\kappa} J_{\gamma\kappa\alpha} + \\
& + a_{40}\zeta_{10} \tau_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\beta\gamma} J_{\nu\beta\kappa} \tau_{\gamma\kappa\alpha} + a_{41}\zeta_{11} \tau_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\beta\gamma} \tau_{\nu\beta\kappa} J_{\gamma\kappa\alpha} + a_{42}\zeta_{12} \tau_{\mu\nu\alpha} J_{\mu\beta\gamma} \tau_{\nu\beta\kappa} \tau_{\gamma\kappa\alpha} + \\
& + a_{43}\zeta_{13} \tau_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\beta\gamma} J_{\nu\beta\kappa} J_{\gamma\kappa\alpha} + a_{44}\zeta_{14} \tau_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\beta\gamma} J_{\nu\beta\kappa} \tau_{\gamma\kappa\alpha} + a_{45}\zeta_{15} \tau_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\beta\gamma} \tau_{\nu\beta\kappa} J_{\gamma\kappa\alpha} + \\
& + a_{46}\zeta_{16} \tau_{\mu\nu\alpha} \tau_{\mu\beta\gamma} \tau_{\nu\beta\kappa} \tau_{\gamma\kappa\alpha} + \bar{\kappa}_{\mu\nu\alpha\beta} (a_{47}\vartheta_1 J_{\mu\rho\omega} J_{\nu\rho\sigma} J_{\alpha\omega\delta} J_{\beta\sigma\delta} + a_{48}\vartheta_2 J_{\mu\rho\omega} J_{\nu\rho\sigma} J_{\alpha\omega\delta} \tau_{\beta\sigma\delta} + \\
& + a_{49}\vartheta_3 J_{\mu\rho\omega} J_{\nu\rho\sigma} \tau_{\alpha\omega\delta} J_{\beta\sigma\delta} + a_{50}\vartheta_4 J_{\mu\rho\omega} J_{\nu\rho\sigma} \tau_{\alpha\omega\delta} \tau_{\beta\sigma\delta} + a_{51}\vartheta_5 J_{\mu\rho\omega} \tau_{\nu\rho\sigma} J_{\alpha\omega\delta} J_{\beta\sigma\delta} + \\
& + a_{52}\vartheta_6 J_{\mu\rho\omega} \tau_{\nu\rho\sigma} J_{\alpha\omega\delta} \tau_{\beta\sigma\delta} + a_{53}\vartheta_7 J_{\mu\rho\omega} \tau_{\nu\rho\sigma} \tau_{\alpha\omega\delta} J_{\beta\sigma\delta} + a_{54}\vartheta_8 J_{\mu\rho\omega} \tau_{\nu\rho\sigma} \tau_{\alpha\omega\delta} \tau_{\beta\sigma\delta} + \\
& + a_{55}\vartheta_9 \tau_{\mu\rho\omega} J_{\nu\rho\sigma} J_{\alpha\omega\delta} J_{\beta\sigma\delta} + a_{56}\vartheta_{10} \tau_{\mu\rho\omega} J_{\nu\rho\sigma} J_{\alpha\omega\delta} \tau_{\beta\sigma\delta} + a_{57}\vartheta_{11} \tau_{\mu\rho\omega} J_{\nu\rho\sigma} \tau_{\alpha\omega\delta} J_{\beta\sigma\delta} + \\
& + a_{58}\vartheta_{12} \tau_{\mu\rho\omega} J_{\nu\rho\sigma} \tau_{\alpha\omega\delta} \tau_{\beta\sigma\delta} + a_{59}\vartheta_{13} \tau_{\mu\rho\omega} \tau_{\nu\rho\sigma} J_{\alpha\omega\delta} J_{\beta\sigma\delta} + a_{60}\vartheta_{14} \tau_{\mu\rho\omega} \tau_{\nu\rho\sigma} J_{\alpha\omega\delta} \tau_{\beta\sigma\delta} + \\
& + a_{61}\vartheta_{15} \tau_{\mu\rho\omega} \tau_{\nu\rho\sigma} \tau_{\alpha\omega\delta} J_{\beta\sigma\delta} + a_{62}\vartheta_{16} \tau_{\mu\rho\omega} \tau_{\nu\rho\sigma} \tau_{\alpha\omega\delta} \tau_{\beta\sigma\delta}) . \tag{6.28}
\end{aligned}$$

6.3.3 Estabilidade quântica da teoria de Yang-Mills com violação de Lorentz

Como um exercício usual para checar a estabilidade quântica de uma teoria – e consequentemente renormalizabilidade – precisamos mostrar que o contratérmo Ξ^{ct} pode ser reabsorvido pela ação original Ξ por meio da redefinição dos campos, fontes e parâmetros da teoria. Assim,

$$\Xi[\Phi, J, \xi] + \varepsilon \Xi^{ct}[\Phi, J, \xi] = \Xi[\Phi_0, J_0, \xi_0] + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \tag{6.29}$$

onde os campos, fontes e parâmetros não-renormalizados são definidos por

$$\begin{aligned}
\Phi_0 &= Z_\Phi^{1/2} \Phi, & \Phi &\in \{A, b, \bar{c}, c\}, \\
J_0 &= Z_J J, & J &\in \{J, \lambda, \tau, \eta, \bar{\kappa}, \Omega, L\}, \\
\xi_0 &= Z_\xi \xi, & \xi &\in \{g, \alpha_i, \beta_i, \chi_i, \gamma_i, \varrho_i, \zeta_j, \vartheta_j\}. \tag{6.30}
\end{aligned}$$

De fato, é possível checar que o modelo aqui estudado é estável quanticamente e os fatores de renormalização são dispostos na sequência.

Primeiramente, para os fatores de renormalização independentes do glúon e da

constante de acoplamento, temos

$$\begin{aligned} Z_A^{1/2} &= 1 + \varepsilon \left(\frac{a_0}{2} + a_2 \right), \\ Z_g &= 1 - \varepsilon \frac{a_0}{2}, \end{aligned} \quad (6.31)$$

enquanto que os fatores de renormalização dos campos fastasmas, do campo de Lautrup-Nakanishi, das fontes Ω e L não são independentes,

$$\begin{aligned} Z_c &= Z_{\bar{c}} = Z_A^{-1/2} Z_g^{-1}, \\ Z_\Omega &= Z_A^{-1/4} Z_g^{-1/2}, \\ Z_L &= Z_b^{-1/2} = Z_A^{1/2}. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Assim, a renormalização do setor de Yang-Mills padrão permanece inalterada.

Para o setor associado ao vetor v_μ , *i.e.*, o termo de quebra de CPT-ímpar, devido aos números quânticos das fontes $J_{\mu\nu\alpha}$ e $\tau_{\mu\nu\alpha}$, há uma mistura entre seus respectivos operadores compostos, *i.e.*, $A_\mu^a \partial_\nu A_\alpha^a$ e $gf^{abc} A_\mu^a A_\nu^b A_\alpha^c$. Assim, renormalização matricial é requerida, ou seja,

$$\mathcal{J}_0 = \mathcal{Z}_{\mathcal{J}} \mathcal{J}, \quad (6.33)$$

onde \mathcal{J} é uma matriz coluna das fontes que compartilham os mesmos números quânticos. A quantidade $\mathcal{Z}_{\mathcal{J}}$ é uma matriz quadrada com os associados fatores de renormalização. Neste caso,

$$\mathcal{J}_1 = \begin{pmatrix} J_{\mu\nu\alpha} \\ \tau_{\mu\nu\alpha} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{Z}_1 = \begin{pmatrix} Z_{JJ} & Z_{J\tau} \\ Z_{\tau J} & Z_{\tau\tau} \end{pmatrix} = \mathbb{1} + \varepsilon \mathbb{A}, \quad (6.34)$$

onde \mathbb{A} é uma matriz dependente de a_i . É encontrado que

$$\mathcal{Z}_1 = \mathbb{1} + \varepsilon \begin{pmatrix} a_7 - a_0 & a_8 \\ a_9 & a_{10} - a_0 \end{pmatrix}. \quad (6.35)$$

A mesma regra será usada para as fontes $\lambda_{\mu\nu\alpha}$ e $\eta_{\mu\nu\alpha}$, ou seja,

$$\mathcal{J}_2 = \begin{pmatrix} \lambda_{\mu\nu\alpha} \\ \eta_{\mu\nu\alpha} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{Z}_2 = \begin{pmatrix} Z_{\lambda\lambda} & Z_{\lambda\eta} \\ Z_{\eta\lambda} & Z_{\eta\eta} \end{pmatrix} = \mathbb{1} + \varepsilon \mathbb{A}, \quad (6.36)$$

onde encontramos

$$\mathcal{Z}_2 = \mathbb{1} + \varepsilon \begin{pmatrix} \frac{a_2}{2} - \frac{a_0}{2} + a_7 & a_8 \\ a_9 & \frac{a_2}{2} - \frac{a_0}{2} + a_{10} \end{pmatrix}. \quad (6.37)$$

Para o setor de quebra de CPT-par, o tensor $\kappa_{\mu\nu\alpha\beta}$ se renormaliza através do fator

$$Z_{\bar{\kappa}} = 1 + \varepsilon (a_1 - a_0) . \quad (6.38)$$

Os fatores de renormalização dos parâmetros adimensionais são:

$$\begin{aligned} Z_{\alpha_1} &= 1 + \varepsilon \left(a_{11} - 2a_7 + a_0 - \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\alpha_1} a_9 \right) , \\ Z_{\alpha_2} &= 1 + \varepsilon \left(a_{12} - a_7 - a_{10} + a_0 - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} a_8 + \frac{\alpha_4}{\alpha_2} a_9 \right) \right) , \\ Z_{\alpha_3} &= 1 + \varepsilon \left(a_{13} - a_7 - a_{10} + a_0 - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_3} a_8 + \frac{\alpha_4}{\alpha_3} a_9 \right) \right) , \\ Z_{\alpha_4} &= 1 + \varepsilon \left(a_{14} - 2a_{10} + a_0 - \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{\alpha_4} a_8 \right) , \\ Z_{\beta_1} &= 1 + \varepsilon \left(a_{15} - 2a_7 + a_0 - \frac{\beta_2 + \beta_3}{\beta_1} a_9 \right) , \\ Z_{\beta_2} &= 1 + \varepsilon \left(a_{16} - a_7 - a_{10} + a_0 - \left(\frac{\beta_1}{\beta_2} a_8 + \frac{\beta_4}{\beta_2} a_9 \right) \right) , \\ Z_{\beta_3} &= 1 + \varepsilon \left(a_{17} - a_7 - a_{10} + a_0 - \left(\frac{\beta_1}{\beta_3} a_8 + \frac{\beta_4}{\beta_3} a_9 \right) \right) , \\ Z_{\beta_4} &= 1 + \varepsilon \left(a_{18} - 2a_{10} + a_0 - \frac{\beta_2 + \beta_3}{\beta_4} a_8 \right) , \\ Z_{\gamma_1} &= 1 + \varepsilon \left(a_{19} - a_1 - 2a_7 + 2a_0 - \frac{\gamma_2 + \gamma_3}{\gamma_1} a_9 \right) , \\ Z_{\gamma_2} &= 1 + \varepsilon \left(a_{20} - a_1 - a_7 - a_{10} + 2a_0 - \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_2} a_8 + \frac{\gamma_4}{\gamma_2} a_9 \right) \right) , \\ Z_{\gamma_3} &= 1 + \varepsilon \left(a_{21} - a_1 - a_7 - a_{10} + 2a_0 - \left(\frac{\gamma_1}{\gamma_3} a_8 + \frac{\gamma_4}{\gamma_3} a_9 \right) \right) , \\ Z_{\gamma_4} &= 1 + \varepsilon \left(a_{22} - a_1 - 2a_{10} + 2a_0 - \frac{\gamma_2 + \gamma_3}{\gamma_4} a_8 \right) , \\ Z_{\chi_1} &= 1 + \varepsilon \left(a_{23} - a_1 - 2a_7 + 2a_0 - \frac{\chi_2 + \chi_3}{\chi_1} a_9 \right) , \\ Z_{\chi_2} &= 1 + \varepsilon \left(a_{24} - a_1 - a_7 - a_{10} + 2a_0 - \left(\frac{\chi_1}{\chi_2} a_8 + \frac{\chi_4}{\chi_2} a_9 \right) \right) , \\ Z_{\chi_3} &= 1 + \varepsilon \left(a_{25} - a_1 - a_7 - a_{10} + 2a_0 - \left(\frac{\chi_1}{\chi_3} a_8 + \frac{\chi_4}{\chi_3} a_9 \right) \right) , \\ Z_{\chi_4} &= 1 + \varepsilon \left(a_{26} - a_1 - 2a_{10} + 2a_0 - \frac{\chi_2 + \chi_3}{\chi_4} a_8 \right) , \\ Z_{\varrho_1} &= 1 + \varepsilon \left(a_{27} - a_1 - 2a_7 + 2a_0 - \frac{\varrho_2 + \varrho_3}{\varrho_1} a_9 \right) , \\ Z_{\varrho_2} &= 1 + \varepsilon \left(a_{28} - a_1 - a_7 - a_{10} + 2a_0 - \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_2} a_8 + \frac{\varrho_4}{\varrho_2} a_9 \right) \right) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_{\varrho_3} &= 1 + \varepsilon \left(a_{29} - a_1 - a_7 - a_{10} + 2a_0 - \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_3} a_8 + \frac{\varrho_4}{\varrho_3} a_9 \right) \right), \\
Z_{\varrho_4} &= 1 + \varepsilon \left(a_{30} - a_1 - 2a_{10} + 2a_0 - \frac{\varrho_2 + \varrho_3}{\varrho_4} a_8 \right), \\
Z_{\zeta_1} &= 1 + \varepsilon \left(a_{31} - 4a_7 + 4a_0 - \frac{\zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_5 + \zeta_9}{\zeta_1} a_9 \right), \\
Z_{\zeta_2} &= 1 + \varepsilon \left(a_{32} - 3a_7 - a_{10} + 4a_0 - \left(\frac{\zeta_1}{\zeta_2} a_8 + \frac{\zeta_4 + \zeta_6 + \zeta_{10}}{\zeta_2} a_9 \right) \right), \\
Z_{\zeta_3} &= 1 + \varepsilon \left(a_{33} - 3a_7 - a_{10} + 4a_0 - \left(\frac{\zeta_1}{\zeta_3} a_8 + \frac{\zeta_4 + \zeta_7 + \zeta_{11}}{\zeta_3} a_9 \right) \right), \\
Z_{\zeta_4} &= 1 + \varepsilon \left(a_{34} - 2a_7 - 2a_{10} + 4a_0 - \left(\frac{\zeta_2 + \zeta_3}{\zeta_4} a_8 + \frac{\zeta_8 + \zeta_{12}}{\zeta_4} a_9 \right) \right), \\
Z_{\zeta_5} &= 1 + \varepsilon \left(a_{35} - 2a_7 - 2a_{10} + 4a_0 - \left(\frac{\zeta_1}{\zeta_5} a_8 + \frac{\zeta_6 + \zeta_7 + \zeta_{13}}{\zeta_5} a_9 \right) \right), \\
Z_{\zeta_6} &= 1 + \varepsilon \left(a_{36} - 2a_7 - 2a_{10} + 4a_0 - \left(\frac{\zeta_2 + \zeta_5}{\zeta_6} a_8 + \frac{\zeta_8 + \zeta_{14}}{\zeta_6} a_9 \right) \right), \\
Z_{\zeta_7} &= 1 + \varepsilon \left(a_{37} - 2a_7 - 2a_{10} + 4a_0 - \left(\frac{\zeta_3 + \zeta_5}{\zeta_7} a_8 + \frac{\zeta_8 + \zeta_{15}}{\zeta_7} a_9 \right) \right), \\
Z_{\zeta_8} &= 1 + \varepsilon \left(a_{38} - a_7 - 3a_{10} + 4a_0 - \left(\frac{\zeta_4 + \zeta_6 + \zeta_7}{\zeta_8} a_8 + \frac{\zeta_{16}}{\zeta_8} a_9 \right) \right), \\
Z_{\zeta_9} &= 1 + \varepsilon \left(a_{39} - 3a_7 - a_{10} + 4a_0 - \left(\frac{\zeta_1}{\zeta_9} a_8 + \frac{\zeta_{10} + \zeta_{11} + \zeta_{13}}{\zeta_9} a_9 \right) \right), \\
Z_{\zeta_{10}} &= 1 + \varepsilon \left(a_{40} - 2a_7 - 2a_{10} + 4a_0 - \left(\frac{\zeta_2 + \zeta_9}{\zeta_{10}} a_8 + \frac{\zeta_{12} + \zeta_{14}}{\zeta_{10}} a_9 \right) \right), \\
Z_{\zeta_{11}} &= 1 + \varepsilon \left(a_{41} - 2a_7 - 2a_{10} + 4a_0 - \left(\frac{\zeta_3 + \zeta_9}{\zeta_{11}} a_8 + \frac{\zeta_{12} + \zeta_{15}}{\zeta_{11}} a_9 \right) \right), \\
Z_{\zeta_{12}} &= 1 + \varepsilon \left(a_{42} - a_7 - 3a_{10} + 4a_0 - \left(\frac{\zeta_{14} + \zeta_{10} + \zeta_{11}}{\zeta_{12}} a_8 + \frac{\zeta_{16}}{\zeta_{12}} a_9 \right) \right), \\
Z_{\zeta_{13}} &= 1 + \varepsilon \left(a_{43} - 2a_7 - 2a_{10} + 4a_0 - \left(\frac{\zeta_5 + \zeta_9}{\zeta_{13}} a_8 + \frac{\zeta_{14} + \zeta_{15}}{\zeta_{13}} a_9 \right) \right), \\
Z_{\zeta_{14}} &= 1 + \varepsilon \left(a_{44} - a_7 - 3a_{10} + 4a_0 - \left(\frac{\zeta_6 + \zeta_{10} + \zeta_{13}}{\zeta_{14}} a_8 + \frac{\zeta_{16}}{\zeta_{14}} a_9 \right) \right), \\
Z_{\zeta_{15}} &= 1 + \varepsilon \left(a_{45} - a_7 - 3a_{10} + 4a_0 - \left(\frac{\zeta_7 + \zeta_{11} + \zeta_{13}}{\zeta_{15}} a_8 + \frac{\zeta_{16}}{\zeta_{15}} a_9 \right) \right), \\
Z_{\zeta_{16}} &= 1 + \varepsilon \left(a_{46} - 4a_{10} + 4a_0 - \frac{\zeta_8 + \zeta_{12} + \zeta_{14} + \zeta_{15}}{\zeta_{16}} a_8 \right), \\
Z_{\vartheta_1} &= 1 + \varepsilon \left(a_{47} - a_1 - 4a_7 + 5a_0 - \frac{\vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_5 + \vartheta_9}{\vartheta_1} a_9 \right), \\
Z_{\vartheta_2} &= 1 + \varepsilon \left(a_{48} - a_1 - 3a_7 - a_{10} + 5a_0 - \left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} a_8 + \frac{\vartheta_4 + \vartheta_6 + \vartheta_{10}}{\vartheta_2} a_9 \right) \right), \\
Z_{\vartheta_3} &= 1 + \varepsilon \left(a_{49} - a_1 - 3a_7 - a_{10} + 5a_0 - \left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_3} a_8 + \frac{\vartheta_4 + \vartheta_7 + \vartheta_{11}}{\vartheta_3} a_9 \right) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_{\vartheta_4} &= 1 + \varepsilon \left(a_{50} - a_1 - 2a_7 - 2a_{10} + 5a_0 - \left(\frac{\vartheta_2 + \vartheta_3}{\vartheta_4} a_8 + \frac{\vartheta_8 + \vartheta_{12}}{\vartheta_4} a_9 \right) \right), \\
Z_{\vartheta_5} &= 1 + \varepsilon \left(a_{51} - a_1 - 2a_7 - 2a_{10} + 5a_0 - \left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_5} a_8 + \frac{\vartheta_6 + \vartheta_7 + \vartheta_{13}}{\vartheta_5} a_9 \right) \right), \\
Z_{\vartheta_6} &= 1 + \varepsilon \left(a_{52} - a_1 - 2a_7 - 2a_{10} + 5a_0 - \left(\frac{\vartheta_2 + \vartheta_5}{\vartheta_6} a_8 + \frac{\vartheta_8 + \vartheta_{14}}{\vartheta_6} a_9 \right) \right), \\
Z_{\vartheta_7} &= 1 + \varepsilon \left(a_{53} - a_1 - 2a_7 - 2a_{10} + 5a_0 - \left(\frac{\vartheta_3 + \vartheta_5}{\vartheta_7} a_8 + \frac{\vartheta_8 + \vartheta_{15}}{\vartheta_7} a_9 \right) \right), \\
Z_{\vartheta_8} &= 1 + \varepsilon \left(a_{54} - a_1 - a_7 - 3a_{10} + 5a_0 - \left(\frac{\vartheta_4 + \vartheta_6 + \vartheta_7}{\vartheta_8} a_8 + \frac{\vartheta_{16}}{\vartheta_8} a_9 \right) \right), \\
Z_{\vartheta_9} &= 1 + \varepsilon \left(a_{55} - a_1 - 3a_7 - a_{10} + 5a_0 - \left(\frac{\vartheta_1}{\vartheta_9} a_8 + \frac{\vartheta_{10} + \vartheta_{11} + \vartheta_{13}}{\vartheta_9} a_9 \right) \right), \\
Z_{\vartheta_{10}} &= 1 + \varepsilon \left(a_{56} - a_1 - 2a_7 - 2a_{10} + 5a_0 - \left(\frac{\vartheta_2 + \vartheta_9}{\vartheta_{10}} a_8 + \frac{\vartheta_{12} + \vartheta_{14}}{\vartheta_{10}} a_9 \right) \right), \\
Z_{\vartheta_{11}} &= 1 + \varepsilon \left(a_{57} - a_1 - 2a_7 - 2a_{10} + 5a_0 - \left(\frac{\vartheta_3 + \vartheta_9}{\zeta_{11}} a_8 + \frac{\vartheta_{12} + \vartheta_{15}}{\vartheta_{11}} a_9 \right) \right), \\
Z_{\vartheta_{12}} &= 1 + \varepsilon \left(a_{58} - a_1 - a_7 - 3a_{10} + 5a_0 - \left(\frac{\vartheta_{14} + \vartheta_{10} + \vartheta_{11}}{\vartheta_{12}} a_8 + \frac{\vartheta_{16}}{\vartheta_{12}} a_9 \right) \right), \\
Z_{\vartheta_{13}} &= 1 + \varepsilon \left(a_{59} - a_1 - 2a_7 - 2a_{10} + 5a_0 - \left(\frac{\vartheta_5 + \vartheta_9}{\vartheta_{13}} a_8 + \frac{\vartheta_{14} + \vartheta_{15}}{\vartheta_{13}} a_9 \right) \right), \\
Z_{\vartheta_{14}} &= 1 + \varepsilon \left(a_{60} - a_1 - a_7 - 3a_{10} + 5a_0 - \left(\frac{\vartheta_6 + \vartheta_{10} + \vartheta_{13}}{\vartheta_{14}} a_8 + \frac{\vartheta_{16}}{\vartheta_{14}} a_9 \right) \right), \\
Z_{\vartheta_{15}} &= 1 + \varepsilon \left(a_{61} - a_1 - a_7 - 3a_{10} + 5a_0 - \left(\frac{\vartheta_7 + \vartheta_{11} + \vartheta_{13}}{\vartheta_{15}} a_8 + \frac{\vartheta_{16}}{\vartheta_{15}} a_9 \right) \right), \\
Z_{\vartheta_{16}} &= 1 + \varepsilon \left(a_{62} - a_1 - 4a_{10} + 5a_0 - \frac{\vartheta_8 + \vartheta_{12} + \vartheta_{14} + \vartheta_{15}}{\vartheta_{16}} a_8 \right). \tag{6.39}
\end{aligned}$$

Isto termina a prova da renormalizabilidade multiplicativa da teoria de Yang-Mills pura com violação da simetria de Lorentz. Uma forma alternativa, mas equivalente, de apresentar os coeficientes de renormalização dos parâmetros adimensionais é brevemente discutida no Ap. F.

6.4 Discussão: renormalizabilidade e anomalias de calibre

Neste capítulo mostramos a renormalizabilidade multiplicativa da teoria de Yang-Mills pura com violação da simetria de Lorentz em todas as ordens em teoria de perturbações. Em [117], através da abordagem analítica, *i.e.*, cálculos explícitos a 1-laço dos fatores de renormalização, os autores discutiram a renormalizabilidade da teoria não-abeliana. Na nossa prescrição empregamos somente métodos algébricos [52]. Extraordinariamente, encontramos que o termo de CPT-ímpar induz termos de massa para o campo de calibre não-abeliano – diferentemente do caso abeliano, onde não é gerado massa para

o fóton. É sabido que termos de massa já estão presentes devido ao campo de fundo v_μ . No entanto, os parâmetros de massa induzidos vêm a partir de termos de massa típicos na ação, ou seja, $M^2 A_\mu^a A_\mu^a$, e o termo de mistura $V_{\mu\nu} A_\mu^a A_\nu^a$, onde $V_{\mu\nu}$ é um tensor constante (veja (6.17)). Além disso, é encontrado que as propriedades de renormalização dessa teoria são mantidas inalteradas – semelhantes ao caso abeliano.

Ao contrário do caso abeliano, o termo tipo Chern-Simons não-abeliano se renormaliza. Encontramos 59 parâmetros de renormalização independentes. Além dos dois parâmetros de renormalização típicos, a teoria apresenta 5 parâmetros de renormalização para os termos de violação ímpar e par, e 32 parâmetros associados ao termo de puro vácuo. É exatamente o parâmetro do setor de CPT-ímpar que induz termos de massa que também se renormalizam independentemente com mais 20 parâmetros.

Em [194] os autores argumentam que as correções quânticas na EDQ com violação da simetria de Lorentz e de CPT em uma variedade curva pode induzir, de uma forma natural, uma ação efetiva para a gravidade; além disso, como mostrado em [195], o vácuo do modelo é também afetado. É importante mencionar que, neste último, o caso não abeliano é incluído. Contudo, existem algumas diferenças entre os trabalhos [194, 195] e o que foi apresentado aqui: a principal é que trabalhamos em uma variedade plana, *i.e.*, espaço euclidiano. Ademais, além do fato de que os coeficientes de violação de Lorentz terem sido tratados aqui como fontes locais, seus valores físicos são simples coeficientes constantes, em contraste com [194, 195]. Ainda, o coeficiente de violação de Lorentz de CPT-par poderia trazer importantes consequências no modelo não-abeliano, como por exemplo, a presença de operadores compostos de dimensão quatro [196], e poderia trazer importantes consequências para o setor fantasma do modelo. Uma suposição em comum entre nossa abordagem e os trabalhos [112, 194, 195] foi que altas ordens nos parâmetros adimensionais (fontes) são suprimidos assumindo seus valores clássicos. No nosso caso, contudo, nada pode ser dito sobre se os termos de vácuo apresentados aqui poderiam trazer efeitos cosmológicos, pelo menos numa forma fenomenológica, ao contrário do que foi discutido em [194, 195].

A teoria de Yang-Mills pura com violação de Lorentz também é livre de anomalias de calibre. Isto pode ser entendido pelas seguintes razões: (i) a teoria de Yang-Mills pura usual, sem férmions quirais – evitando a contribuição do tensor de Levi-Civita – não tem propriedades discretas que possibilite o surgimento da anomalia de ABBJ não-abeliana; (ii) com o método de Symanzik, os termos que contêm tal tensor de fundo – implicitamente, e que só deve ser levado em conta no limite físico – pertencem ao setor trivial da cohomologia, *i.e.*, os pares de dubletos $(\lambda_{\mu\nu\alpha}, J_{\mu\nu\alpha})$ e $(\eta_{\mu\nu\alpha}, \tau_{\mu\nu\alpha})$, e não contribuem para a anomalia; (iii) além de não ser compatível com respeito a simetrias discretas, um termo que dependesse do tensor de fundo $\bar{\kappa}_{\mu\nu\alpha\beta}$ violaria a condição de Wess-Zumino [191] para o caso não-abeliano, *i.e.*, $s\Delta^{(1)}[A, c, \bar{\kappa}] \neq 0$. Aqui, como na teoria de Yang-Mills usual, a anomalia não depende das fontes externas Ω_μ^a e L , ver [52].

7 ESPECTRO DO CAMPO DE CALIBRE NA TEORIA DE YANG-MILLS MASSIVA COM VIOLAÇÃO DE LORENTZ

O estudo da causalidade e estados físicos do setor do campo de calibre da teoria de Yang-Mills com violação de Lorentz é feito, pelo menos no nível árvore. Basicamente, a existência de estados físicos é analisada pela saturação com fontes externas do propagador do campo de calibre modificado. Esta modificação é devido a termos de massa gerados pela exigência da renormalizabilidade multiplicativa do modelo em todas as ordens em teoria de perturbações. Neste capítulo, focamos nosso estudo somente nos termos originados a partir do coeficiente de violação de CPT-ímpar. A causalidade é estudada através dos conceitos de velocidade de grupo e de velocidade de frente. Esta análise se encontra na Ref. [197].

7.1 Termos de massa e a quantização de BRST

Vimos no capítulo anterior que o método de Symanzik junto com a quantização de BRST induz, de uma forma natural, termos de vácuo e termos extras tipo condensado $M^2 A^{a\mu} A_\mu^a$. Além disso, termos do tipo $V^{\mu\nu} A_\mu^a A_\nu^a$ também estão presentes. Esses termos, além de levarem em conta termos dependentes do vetor de CPT-ímpar, levam em conta termos de mistura entre os tensores de CPT-ímpar e CPT-par. Esse termo tipo condensado e esse termo de mistura são responsáveis pelo surgimento de termos de massa e parâmetros adimensionais extras no modelo. Veremos adiante que esses termos de massa irão modificar drasticamente o propagador do campo de calibre de Yang-Mills. Assim, uma análise detalhada – causalidade e estados físicos – do propagador do campo de calibre é necessária. Desde que a análise do puro setor de CPT-ímpar já é não-trivial, a mistura entre os setores de CPT-ímpar e CPT-par traria dificuldades adicionais. Por essa razão, todos os termos dependentes do tensor de CPT-par serão negligenciados neste capítulo. É importante mencionar que desde que a simetria de BRST da teoria de Yang-Mills pura com violação da simetria de Lorentz é bem estabelecida – depois do método de Symanzik – o setor quântico é esperado ser livre de modos não-físicos [21]. Contudo, uma vez que as fontes de Symanzik atingem seus valores físicos, a simetria de BRST da teoria é explicitamente quebrada e a teoria entra em uma nova fase, e o propagador usual do campo de calibre é modificado. Vale ressaltar que essa quebra explícita da simetria de BRST pode ser interpretada como uma quebra espontânea da simetria de BRST [177].

No presente capítulo focaremos nossa análise sobre a quantização consistente da teoria de Yang-Mills pura com violação da simetria de Lorentz no estágio em que o propagador do campo de calibre é modificado [197]. Em particular, a causalidade e a

existência de estados físicos do modelo são analisadas, *i.e.*, se não existe propagação de modos de táquions e fantasmas. Essencialmente, a análise é realizada no nível semiclássico, ou seja, os polos do propagador são analisados no nível árvore; uma abordagem canônica não será realizada aqui. A análise da existência de estados físicos consiste em checar a positividade dos autovalores da matriz de resíduo em cada polo simples do propagador do campo de calibre. No entanto, a consistência física dependerá da natureza do vetor de fundo de CPT-ímpar presente no modelo. Aqui, analisaremos os casos em que ele é tipo espaço e tipo tempo. Convém mencionar que o estudo da unitariedade a ser realizado neste capítulo não é um estudo completo, ou seja, estamos desconsiderando o setor dos campos fantasmas de Faddeev-Popov, que é de suma importância nesse estudo. Assim, quando referirmo-nos ao estudo de unitariedade, estamos interessados na condição necessária para a existência de estados físicos para o campo de calibre.

No intuito de executar a tarefa acima mencionada, precisamos obter o propagador modificado do campo de calibre. Isto pode ser feito se tomarmos somente os termos quadráticos da ação (6.17), e, como comentado acima, desprezaremos todos os termos que dependem do campo de fundo de CPT-par. Também, fixaremos o calibre sem a introdução do campo de Lautrup-Nakanishi b^a e sem o campo antifantasma \bar{c}^a . Assim, a ação quadrática que satisfaz esses requerimentos é³³

$$\begin{aligned} \Xi_Q &= -\frac{1}{2} \int d^4x (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) \partial^\mu A^{a\nu} - \frac{\mu}{2} \int d^4x \epsilon^{\beta\mu\nu\alpha} v_\beta A_\mu^a \partial_\nu A_\alpha^a + \\ &- \int d^4x [\mu^2 (3\alpha + 2\beta) v^2 A_\mu^a A^{\mu a} - 2\mu^2 \beta v^\mu v^\nu A_\mu^a A_\nu^a] - \frac{1}{2\xi} \int d^4x (\partial_\mu A^{a\mu})^2. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Esta ação no espaço dos momentos tem a forma

$$\Xi_Q = \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} A_a^\mu(k) \mathcal{O}_{\mu\nu}^{ab} A_b^\nu(-k), \quad (7.2)$$

onde

$$\mathcal{O}_{\mu\nu}^{ab} = \delta^{ab} \left[- (k^2 - \mu^2 \Delta v^2) \theta_{\mu\nu} - \left(\frac{k^2}{\xi} - \mu^2 \Delta v^2 \right) \omega_{\mu\nu} + \mu S_{\mu\nu} + \mu^2 \Omega \Lambda_{\mu\nu} \right] \quad (7.3)$$

é o operador de onda e $\Delta = -6\alpha - 4\beta$ e $\Omega = 4\beta$ são parâmetros livres. Os operadores θ

³³ Neste capítulo retornamos a trabalhar no espaço de Minkowski. Por questão de conveniência, introduzimos um fator 1/2 no termo tipo Chern-Simons e o campo de fundo v^μ , com dimensão de massa 1, foi reescalado como $v^\mu \rightarrow \mu v^\mu$, onde μ é um parâmetro de massa – não confundir com escala de renormalização. Assim v^μ será um campo de fundo de comprimento unitário. Não é esperado confusão.

Tabela 5 - Tabela multiplicativa satisfeita por θ , ω , S , Σ e Λ . O produto obedece a ordem “linha vezes coluna”.

	θ_ν^α	ω_ν^α	S_ν^α	Λ_ν^α	Σ_ν^α	Σ_ν^α
$\theta_{\mu\alpha}$	$\theta_{\mu\nu}$	0	$S_{\mu\nu}$	$\Lambda_{\mu\nu} - \frac{\lambda}{k^2}\Sigma_{\nu\mu}$	$\Sigma_{\mu\nu} - \lambda\omega_{\mu\nu}$	0
$\omega_{\mu\alpha}$	0	$\omega_{\mu\nu}$	0	$\frac{\lambda}{k^2}\Sigma_{\nu\mu}$	$\lambda\omega_{\mu\nu}$	$\Sigma_{\nu\mu}$
$S_{\mu\alpha}$	$S_{\mu\nu}$	0	$-f_{\mu\nu}$	0	0	0
$\Lambda_{\mu\alpha}$	$\Lambda_{\mu\nu} - \frac{\lambda}{k^2}\Sigma_{\mu\nu}$	$\frac{\lambda}{k^2}\Sigma_{\mu\nu}$	0	$v^2\Lambda_{\mu\nu}$	$v^2\Sigma_{\mu\nu}$	$\lambda\Lambda_{\mu\nu}$
$\Sigma_{\mu\alpha}$	0	$\Sigma_{\mu\nu}$	0	$\lambda\Lambda_{\mu\nu}$	$\lambda\Sigma_{\mu\nu}$	$k^2\Lambda_{\mu\nu}$
$\Sigma_{\alpha\mu}$	$\Sigma_{\nu\mu} - \lambda\omega_{\mu\nu}$	$\lambda\omega_{\mu\nu}$	0	$v^2\Sigma_{\nu\mu}$	$v^2k^2\omega_{\mu\nu}$	$\lambda\Sigma_{\nu\mu}$

e ω são os projetores de spin, transverso e longitudinal, respectivamente, *i.e.*,

$$\begin{aligned}\theta_{\mu\nu} &= \eta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}, \\ \omega_{\mu\nu} &= \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}.\end{aligned}\tag{7.4}$$

Os operadores $S_{\mu\nu}$ e $\Lambda_{\mu\nu}$ são definidos como

$$\begin{aligned}S_{\mu\nu} &= i\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}v^\alpha k^\beta, \\ \Lambda_{\mu\nu} &= v_\mu v_\nu,\end{aligned}\tag{7.5}$$

A fim de calcular a inversa do operador de onda – seguindo [102] – definimos o seguinte operador

$$\Sigma_{\mu\nu} = v_\mu k_\nu,\tag{7.6}$$

que, junto com os operadores mostrados nas Eqs. (7.4) e (7.5), formam uma álgebra fechada. A álgebra dos operadores é disposta na Tabela 5, onde

$$f_{\mu\nu} \equiv (v^2k^2 - \lambda^2)\theta_{\mu\nu} - \lambda^2\omega_{\mu\nu} - k^2\Lambda_{\mu\nu} + \lambda(\Sigma_{\mu\nu} + \Sigma_{\nu\mu}),\tag{7.7}$$

e

$$\lambda = \Sigma_\mu{}^\mu = v_\mu k^\mu.\tag{7.8}$$

Estamos agora prontos para calcular o propagador do campo de calibre, *i.e.*, a inversa do operador de onda,

$$D_{\mu\nu}^{ab}(k) = i(\mathcal{O}^{-1})_{\mu\nu}^{ab}.\tag{7.9}$$

O operador $(\mathcal{O}^{-1})_{\mu\nu}^{ab}$ satisfaz a relação

$$\mathcal{O}_{\mu\alpha}^{ac}(\mathcal{O}^{-1})_c^{\beta\alpha}{}_{\nu} = \delta^{ab}(\theta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}) . \quad (7.10)$$

De fato, para o propagador no calibre de Landau ($\xi = 0$), um cálculo elaborado leva a

$$D_{\mu\nu}^{ab}(k) = \frac{i\delta^{ab}}{Q(k)} \left\{ -(k^2 - \mu^2\Delta v^2)\theta_{\mu\nu} - \frac{\mu^2(v_\alpha k^\alpha)^2[\Omega(k^2 - \mu^2\Delta v^2) + k^2]}{P(k)}\omega_{\mu\nu} - \mu S_{\mu\nu} + \right. \\ \left. + \frac{\mu^2(v_\alpha k^\alpha)[\Omega(k^2 - \mu^2\Delta v^2) + k^2]}{P(k)}(\Sigma_{\mu\nu} + \Sigma_{\nu\mu}) - \frac{\mu^2 k^2[\Omega(k^2 - \mu^2\Delta v^2) + k^2]}{P(k)}\Lambda_{\mu\nu} \right\} , \quad (7.11)$$

onde

$$Q(k) = (k^2 - \mu^2\Delta v^2)^2 + \mu^2[v^2 k^2 - (v_\alpha k^\alpha)^2] , \\ P(k) = k^2(k^2 - \mu^2\Delta v^2) - \Omega\mu^2[v^2 k^2 - (v_\alpha k^\alpha)^2] . \quad (7.12)$$

Embora tenhamos escolhido estudar o propagador (7.11) no calibre de Landau, essa escolha não é espúria. De fato, os termos de massa apresentados na ação (7.1) são oriundos da exigência da renormalizabilidade multiplicativa da teoria de Yang-Mills com violação da simetria de Lorentz. Como apresentado no Cap. 6, tal análise foi realizada no calibre de Landau. Deste modo, não faria sentido estudar o propagador 7.11 em um calibre diferente do de Landau.

7.2 Causalidade e estados físicos

Estamos agora prontos para analisar o espectro físico do modelo. Primeiramente faremos uma análise geral nos polos e na matriz de resíduo do propagador, *i.e.*, as condições sobre os coeficientes α e β para evitar modos de táquions e fantasmas. A natureza do campo de fundo v_μ , ou seja, tipo espaço e tipo tempo, será importante nessa análise.

Para garantir que não exista propagação de modos de táquions devemos ter $m^2 > 0$ para cada polo simples do propagador ($k^2 = m^2$), onde m é a massa da partícula. Uma forma alternativa de ver se existe táquion no modelo é a partir da velocidade de grupo e da velocidade de frente [10]. De fato, esse último procedimento é mais seguro. Seja a velocidade de grupo

$$v_g = \frac{dk^0}{d|\mathbf{k}|} , \quad (7.13)$$

com $k^\mu = (k^0, \mathbf{k})$, devemos ter $v_g \leq 1$. E, seja a velocidade de frente

$$v_f = \lim_{|\mathbf{k}| \rightarrow \infty} \frac{k^0}{|\mathbf{k}|}, \quad (7.14)$$

devemos ter $v_f \leq 1$.

A existência de estados físicos no modelo será analisada aqui no nível árvore, por meio da saturação do propagador livre com fontes externas [37]. O propagador saturado é

$$\Pi = J_a^{*\mu} \text{Res} D_{\mu\nu}^{ab}(k) J_b^\nu, \quad (7.15)$$

onde $\text{Res} D_{\mu\nu}^{ab}(k)$ é o resíduo do propagador calculado em cada polo simples, e $J^{a\mu}$ é uma fonte externa, satisfazendo a condição de conservação, *i.e.*, a restrição $k_\mu J^{a\mu} = 0$. Estados físicos existem sempre que a parte imaginária do propagador saturado é positiva, ou seja, deve satisfazer a relação (1.10). Em resumo, podemos calcular os autovalores da matriz de resíduo em cada polo e, sempre que os autovalores são positivos, existem estados físicos.

No modelo aqui tratado, temos que atender

$$\bigcap_{i=1}^n m_i^2 > 0, \quad \bigcap_{i=1}^n v_{g_i} \leq 1, \quad \bigcap_{i=1}^n v_{f_i} \leq 1, \quad (7.16)$$

onde n depende da quantidade de polos em cada caso. Estados físicos existem quanto os autovalores satisfazem

$$\bigcap_{i=1}^4 \lambda_i \geq 0. \quad (7.17)$$

Onde o igual inclui a condição para partículas de massa nula.

Como já comentado, analisaremos as situações sobre os polos $Q(k) = 0$ e $P(k) = 0$ quando o vetor de fundo v^μ é tipo espaço e tipo tempo. Desconsideraremos o caso em que tal vetor é tipo luz, *i.e.*, $v^2 = 0$, uma vez que isso eliminaria os termos de massa em tais polos.

7.2.1 Caso tipo espaço

Vamos considerar primeiramente o caso no qual v^μ é tipo espaço, *i.e.*, $v^\mu = (0, 0, 0, 1)$ e, sem perda de generalidade, escolhemos $k^\mu = (k^0, 0, 0, k^3)$. Nos polos $Q(k) = 0$ e $P(k) = 0$, temos quatro raízes. No primeiro polo temos duas raízes. Fixamos $k_0^2 = m_1^2$ para obter

$$m_1^2 = k_3^2 + (6\alpha + 4\beta)\mu^2 + \frac{\mu^2}{2} + \frac{\mu}{2} \sqrt{\mu^2 + 4[k_3^2 + (6\alpha + 4\beta)\mu^2]}. \quad (7.18)$$

A matriz de resíduo neste polo é a seguinte

$$R_1 = r_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_1^2 - k_3^2 - (6\alpha + 4\beta)\mu^2 & -i\mu m_1 & 0 \\ 0 & i\mu m_1 & m_1^2 - k_3^2 - (6\alpha + 4\beta)\mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.19)$$

onde

$$r_1 = \frac{1}{\mu\sqrt{\mu^2 + 4[k_3^2 + (6\alpha + 4\beta)\mu^2]}}. \quad (7.20)$$

A matriz de resíduo (7.19) possui um autovalor não-nulo,

$$\lambda_1 = 1 + \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{k_3}{\mu}\right)^2 + 6\alpha + 4\beta}}. \quad (7.21)$$

A segunda raiz de $Q(k_0^2 = m_2^2)$ é

$$m_2^2 = k_3^2 + (6\alpha + 4\beta)\mu^2 + \frac{\mu^2}{2} - \frac{\mu}{2}\sqrt{\mu^2 + 4[k_3^2 + (6\alpha + 4\beta)\mu^2]}, \quad (7.22)$$

e sua matriz de resíduo é

$$R_2 = r_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2^2 - k_3^2 - (6\alpha + 4\beta)\mu^2 & -i\mu m_2 & 0 \\ 0 & i\mu m_2 & m_2^2 - k_3^2 - (6\alpha + 4\beta)\mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.23)$$

onde

$$r_2 = -\frac{1}{\mu\sqrt{\mu^2 + 4[k_3^2 + (6\alpha + 4\beta)\mu^2]}}. \quad (7.24)$$

A matriz (7.23) também possui somente um autovalor não-nulo

$$\lambda_2 = 1 - \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{k_3}{\mu}\right)^2 + 6\alpha + 4\beta}}. \quad (7.25)$$

Vamos agora analisar as raízes do polo $P(k)$. A primeira é

$$m_3^2 = k_3^2 + 3\alpha\mu^2 + \frac{\mu}{2}\sqrt{36\alpha^2\mu^2 - 16\beta k_3^2}, \quad (7.26)$$

com matriz de resíduo

$$R_3 = \frac{1}{\mu\sqrt{36\alpha^2\mu^2 - 16\beta k_3^2}} \begin{pmatrix} k_3^2 & 0 & 0 & -m_3|k_3| \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m_3|k_3| & 0 & 0 & m_3^2 \end{pmatrix}. \quad (7.27)$$

O único autovalor não-nulo é

$$\lambda_3 = \frac{k_3^2 + m_3^2}{\mu\sqrt{36\alpha^2\mu^2 - 16\beta k_3^2}}, \quad (7.28)$$

A segunda raiz de $P(k)$ é

$$m_4^2 = k_3^2 + 3\alpha\mu^2 - \frac{\mu}{2}\sqrt{36\alpha^2\mu^2 - 16\beta k_3^2}, \quad (7.29)$$

com matriz de resíduo

$$R_4 = -\frac{1}{\mu\sqrt{36\alpha^2\mu^2 - 16\beta k_3^2}} \begin{pmatrix} k_3^2 & 0 & 0 & -m_4|k_3| \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m_4|k_3| & 0 & 0 & m_4^2 \end{pmatrix}, \quad (7.30)$$

que também apresenta um autovalor não-nulo

$$\lambda_4 = -\frac{k_3^2 + m_4^2}{\mu\sqrt{36\alpha^2\mu^2 - 16\beta k_3^2}}. \quad (7.31)$$

As velocidades de grupo associadas aos modos de massa m_1^2 e m_2^2 são as mesmas:

$$v_{g_1} = v_{g_2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{\mu}{k_3}\right)^2 [1 + 4(6\alpha + 4\beta)]}}, \quad (7.32)$$

e para m_3^2 e m_4^2 são:

$$\begin{aligned} v_{g_3} &= \frac{|k_3|}{\sqrt{k_3^2 + 3\alpha\mu^2 + \mu\sqrt{9\alpha^2\mu^2 - 4\beta k_3^2}}} \left(1 - \frac{2\beta\mu}{\sqrt{9\alpha^2\mu^2 - 4\beta k_3^2}}\right), \\ v_{g_4} &= \frac{|k_3|}{\sqrt{k_3^2 + 3\alpha\mu^2 - \mu\sqrt{9\alpha^2\mu^2 - 4\beta k_3^2}}} \left(1 + \frac{2\beta\mu}{\sqrt{9\alpha^2\mu^2 - 4\beta k_3^2}}\right), \end{aligned} \quad (7.33)$$

respectivamente.

Na sequência, analisamos as condições para termos um modelo causal e que apre-

sente estados físicos enquanto $|k_3|$ está com limites e valores assim como os parâmetros α e β . Em todas as situações, a causalidade e a existência de estados físicos são encontradas sob (7.16), (7.13), (7.14) e (7.17). Dividimos a análise em duas partes: primeiro, analisamos casos especiais para os parâmetros α e β . Essa análise nos permite ver as consequências sobre os graus de liberdade físicos quando apenas um dos parâmetros é levado em conta e identificamos qual pode ser problemático ou não. Segundo, exploramos o caso geral. Veremos que, neste caso, alguns comportamentos problemáticos que podem surgir nas relações de dispersão, quando apenas um parâmetro é considerado, podem ser compensados quando os dois são tratados simultaneamente.

7.2.1.1 Parte I: Casos especiais

(i) $\alpha = 0$

Outra situação com uma sutil mudança nos polos e matrizes de resíduo. Antes de avançarmos para estudar os intervalos para os quais possam existir modos causal e unitário, listamos os novos polos como seguem:

$$\begin{aligned}
 m_1^2 &= k_3^2 + 4\beta\mu^2 + \frac{\mu^2}{2} + \mu\sqrt{\frac{\mu^2}{4} + k_3^2 + 4\beta\mu^2} , \\
 m_2^2 &= k_3^2 + 4\beta\mu^2 + \frac{\mu^2}{2} - \mu\sqrt{\frac{\mu^2}{4} + k_3^2 + 4\beta\mu^2} , \\
 m_3^2 &= k_3^2 + 2\mu|k_3|\sqrt{-\beta} , \\
 m_4^2 &= k_3^2 - 2\mu|k_3|\sqrt{-\beta} .
 \end{aligned} \tag{7.34}$$

As matrizes de resíduo (7.19), (7.23), (7.27) e (7.30) sofrem uma pequena modificação no caso $\alpha = 0$. Ao invés de $\Delta\mu^2$ temos $\beta\mu^2$. O mesmo ocorre com os autovalores (7.21), (7.25), (7.28) e (7.33), que são listados abaixo por questão de clareza

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= 1 + \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{k_3}{\mu}\right)^2 + 4\beta}} , \\
 \lambda_2 &= 1 - \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{k_3}{\mu}\right)^2 + 4\beta}} , \\
 \lambda_3 &= \frac{(m_3^2 + k_3^2)}{4\mu|k_3|\sqrt{-\beta}} , \\
 \lambda_4 &= -\frac{(m_4^2 + k_3^2)}{4\mu|k_3|\sqrt{-\beta}} .
 \end{aligned} \tag{7.35}$$

As velocidades de grupo para $\alpha = 0$ são

$$\begin{aligned}
 v_{g_1} = v_{g_2} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu}{k_3}\right)^2 \left(\frac{1}{4} + 4\beta\right)}}, \\
 v_{g_3} &= \frac{1}{\sqrt{1 + 2\frac{\mu}{|k_3|}\sqrt{-\beta}}} \left(1 + \frac{\mu}{|k_3|}\sqrt{-\beta}\right), \\
 v_{g_4} &= \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{\mu}{|k_3|}\sqrt{-\beta}}} \left(1 - \frac{\mu}{|k_3|}\sqrt{-\beta}\right).
 \end{aligned} \tag{7.36}$$

(i.1) *Causalidade*

Para atender o critérios (7.16), temos

$$\begin{aligned}
 \beta &\geq -\frac{1}{16} \left[1 + 4 \left(\frac{k_3}{\mu}\right)^2\right] \Rightarrow m_1^2 > 0, \\
 \beta &\geq -\frac{1}{16} \left[1 + 4 \left(\frac{k_3}{\mu}\right)^2\right] \cap \beta \neq -\frac{1}{4} \left(\frac{k_3}{\mu}\right)^2 \Rightarrow m_2^2 > 0, \\
 \beta &\leq 0 \Rightarrow m_3^2 > 0, \\
 -\frac{1}{4} \left(\frac{k_3}{\mu}\right)^2 &< \beta \leq 0 \Rightarrow m_4^2 > 0.
 \end{aligned} \tag{7.37}$$

Para os dois primeiros polos empregamos a desigualdade triangular. Na sequência, intersectamos todas as desigualdades em (7.37), para obter

$$-\frac{1}{4} \left(\frac{k_3}{\mu}\right)^2 < \beta \leq 0. \tag{7.38}$$

As condições (7.13) sobre as velocidades de grupo para os modos com diferentes massas são satisfeitas como seguem

$$\beta \geq -\frac{1}{16} \Rightarrow v_{g_1} \leq 1 \cap v_{g_2} \leq 1. \tag{7.39}$$

A única forma de termos $v_{g_3} \leq 1$ e $v_{g_4} \leq 1$ é se $\beta > 0$, o que é impossível por restrições prévias. Resultado, a causalidade é violada no polo $P(k) = 0$.

(i.2) *Estados físicos*

É possível encontrar restrições tal que cada um dos autovalores satisfaz a condição de

unitariedade, ou seja,

$$\begin{aligned}
 \beta &\geq -\frac{1}{16} \left[1 + 4 \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 \right] \Rightarrow \lambda_1 > 0 , \\
 \beta &> -\frac{1}{4} \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 \Rightarrow \lambda_2 > 0 , \\
 \beta &< 0 &\Rightarrow \lambda_3 > 0 , \\
 \beta &< -\left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 \Rightarrow \lambda_4 > 0 .
 \end{aligned} \tag{7.40}$$

Contudo, não encontramos uma interseção das desigualdades (7.40). Portanto, temos modos fantasmas neste caso. Note que o modo que viola a condição de unitariedade é o modo associado ao quarto polo.

(i.3) *Causalidade e estados físicos*

De acordo com (7.39) e (7.40), causalidade e unitariedade são violadas simultaneamente para $\alpha = 0$.

(ii) $\beta = 0$

Quando levamos β a zero, ocorre uma modificação notória nos polos e na matriz de resíduo. Os novos polos na 0-componente do 4-momento são os seguintes:

$$\begin{aligned}
 m_1^2 &= k_3^2 + 6\alpha\mu^2 + \frac{\mu^2}{2} + \mu^2 \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 + 6\alpha} , \\
 m_2^2 &= k_3^2 + 6\alpha\mu^2 + \frac{\mu^2}{2} - \mu^2 \sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 + 6\alpha} , \\
 m_3^2 &= k_3^2 + 6\alpha\mu^2 , \\
 m_4^2 &= k_3^2 .
 \end{aligned} \tag{7.41}$$

Os novos autovalores são

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= 1 + \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 + 6\alpha}} , \\
 \lambda_2 &= 1 - \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4} + \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 + 6\alpha}} , \\
 \lambda_3 &= 1 + \frac{1}{3\alpha} \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 ,
 \end{aligned}$$

$$\lambda_4 = -\frac{1}{3\alpha} \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 . \quad (7.42)$$

E as novas velocidades de grupo associadas a m_1^2 , m_2^2 , m_3^2 e m_4^2 são:

$$\begin{aligned} v_{g_1} = v_{g_2} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\mu}{k_3} \right)^2 (1 + 24\alpha)}} , \\ v_{g_3} &= \frac{1}{\sqrt{1 + 6\alpha \left(\frac{\mu}{k_3} \right)^2}} , \\ v_{g_4} &= 1 , \end{aligned} \quad (7.43)$$

respectivamente.

(ii.1) Causalidade

Na sequência, apresentamos as condições sobre o parâmetro α a fim de garantir a positividade das massas:

$$\begin{aligned} \alpha \geq -\frac{1}{24} \left[1 + 4 \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 \right] \cap \alpha \neq -\frac{1}{6} \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 &\Rightarrow m_1^2 > 0 \cap m_2^2 > 0 , \\ \alpha > -\frac{1}{6} \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 &\Rightarrow m_3^2 > 0 , \\ \forall \alpha &\Rightarrow m_4^2 > 0 . \end{aligned} \quad (7.44)$$

Como antes, para os dois primeiros polos empregamos a desigualdade triangular. Para atender as condições (7.16) devemos ter simplesmente

$$\alpha > -\frac{1}{6} \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 . \quad (7.45)$$

As restrições para o parâmetro α a partir das velocidades de grupo são as seguintes

$$\begin{aligned} \alpha \geq -\frac{1}{24} &\Rightarrow v_{g_1} \leq 1 \cap v_{g_2} \leq 1 , \\ \alpha \geq 0 &\Rightarrow v_{g_3} \leq 1 , \\ \forall \alpha &\Rightarrow v_{g_4} = 1 . \end{aligned} \quad (7.46)$$

A interseção das soluções acima leva em

$$\alpha \geq 0 . \quad (7.47)$$

Embora a solução para α a partir da positividade da massa dependa da escala de energia, sua solução a partir da velocidade de grupo é mais restritiva que a anterior e independente da escala de energia. Falta checar se o intervalo para as velocidades de frente satisfazem as condições de causalidade. De fato, as condições (7.14) sobre as velocidades de frente para cada massa já é satisfeita como segue:

$$v_{f_1} = v_{f_2} = v_{f_3} = v_{f_4} = 1 . \quad (7.48)$$

Aqui, assumimos que $|k_3|$ vai a infinito mais rápido que o parâmetro α . Isso é uma suposição razoável, desde que podemos escolher algum α finito que satisfaz (7.47). Portanto, o intervalo $\alpha \geq 0$ garante a causalidade do modelo no caso em que β é nulo.

(ii.2) Estados físicos

A fim de satisfazer a condição (7.17), devemos ter

$$\begin{aligned} \alpha &> -\frac{1}{24} \left[1 + 4 \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 \right] \Rightarrow \lambda_1 > 0 , \\ \alpha &> -\frac{1}{6} \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 \Rightarrow \lambda_2 > 0 , \\ \alpha &< -\frac{1}{3} \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 \cup \alpha > 0 \Rightarrow \lambda_3 > 0 , \\ \alpha &< 0 \Rightarrow \lambda_4 > 0 . \end{aligned} \quad (7.49)$$

Contudo, nesse caso, depois das restrições apresentadas em (7.49), encontramos modos fantasmas. Na verdade, esse modo fantasma está associado ao quarto polo – não-massivo – de (7.41).

(ii.3) Causalidade e estados físicos

Podemos observar que, a fim de garantir causalidade e a existência de estados físicos simultaneamente, a interseção das condições (7.16) e (7.17) não deve ser vazia. Contudo, a partir de (7.47) e (7.49), vemos que isso não acontece. Temos causalidade, mas não unitariedade. Note que essa discrepância está explícita no autovalor λ_4 de (7.17), que está em desacordo com a condição de causalidade (7.47). Podemos dizer que o modo fantasma se encontra nesse polo.

Destacamos que, entre os dois casos especiais, o mais perigoso é o caso que $\alpha = 0$, onde somente o parâmetro β contribui para que existam termos de massa no modelo. Nesse caso, causalidade e unitariedade são violadas simultaneamente, assolando o modelo com modos não físicos. No caso contrário, quando $\beta = 0$, podemos ter intervalos que preservam

causalidade e violam unitariedade. Este não é mais perigoso que o caso anterior, uma vez que estamos analisando somente o setor de glúons. Desde que estamos trabalhando no modelo não-abeliano e os campos fantasmas interagem com os campos de calibre, contribuições do setor fantasma poderiam contribuir para eliminar graus de liberdades não-físicos daquele setor. Contudo, somente cálculos a 1-laço poderiam julgar se de fato esses graus de liberdade não-físicos desacoplam do modelo. Outra possibilidade seria realizar um estudo do modelo *via* formalismo de BRST, mas no limite em que os valores físicos das fontes de Symanzik tiverem sido tomados e com os termos de massa incluídos. Contudo, todas essas análises estão fora do escopo desta tese. A partir de (7.1), vemos que, embora o termo de massa proporcional a α dependa do coeficiente de violação de Lorentz, ele não viola a simetria de Lorentz, ao contrário do termo proporcional a β dependendo do coeficiente de violação de Lorentz, que não é invariante sob transformação de Lorentz de partícula. De fato, o termo de massa proporcional a α comporta-se como um termo de Proca usual. Por outro lado, a contribuição que vem de β traz um termo adicional como $V^{\mu\nu} A_\mu^a A_\nu^a$, que é a origem do problema.

7.2.1.2 Parte II: Caso geral

Neste último tópico analisamos os intervalos nos quais os parâmetros α e β assumem valores reais de modo que o modelo apresente modos causais e (ou) unitários. Apesar disso, $|k_3|$ e μ já têm valores positivos.

(i) Causalidade

Listamos abaixo as condições individuais para energias positivas:

$$\begin{aligned} \beta &\geq -\frac{1}{16} \left[1 + 4 \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 + 24\alpha \right] \Rightarrow m_1^2 > 0 , \\ \beta &\geq -\frac{1}{16} \left[1 + 4 \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 + 24\alpha \right] \cap \beta \neq -\frac{1}{4} \left[\left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 + 6\alpha \right] \Rightarrow m_2^2 > 0 , \\ &\left\{ \alpha \leq -\frac{1}{3} \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 \cap \beta < -\frac{1}{4} \left[\left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 + 6\alpha \right] \right\} \cup \\ &\left[\alpha > -\frac{1}{3} \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 \cap \beta \leq \frac{9\alpha^2}{4 \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2} \right] \Rightarrow m_3^2 > 0 , \\ \alpha &> -\frac{1}{3} \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 \cap -\frac{1}{4} \left[\left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 + 6\alpha \right] < \beta \leq \frac{9\alpha^2}{4 \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2} \Rightarrow m_4^2 > 0 . \end{aligned}$$

(7.50)

Portanto, a interseção das desigualdades acima é

$$\alpha > -\frac{1}{3} \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 \cap -\frac{1}{4} \left[\left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 + 6\alpha \right] < \beta \leq \frac{9\alpha^2}{4 \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2}, \quad (7.51)$$

o qual é o único intervalo que obedece a condição em (7.16).

Na sequência, os intervalos para as velocidades de grupo são

$$\begin{aligned} \beta &\geq -\frac{1}{16} (1 + 24\alpha) \Rightarrow v_{g_1} \leq 1 \cap v_{g_2} \leq 1, \\ \beta &= -\frac{3}{2}\alpha \cap \alpha > 0 \Rightarrow v_{g_3} \leq 1 \cap v_{g_4} \leq 1. \end{aligned} \quad (7.52)$$

A solução para as velocidades de grupo v_{g_3} e v_{g_4} é uma solução analítica simples possível. De fato, um conjunto mais completo de soluções é possível ser encontrado³⁴. Uma interseção das soluções apresentadas em (7.52) lê-se

$$\beta = -\frac{3}{2}\alpha \cap \alpha > 0. \quad (7.53)$$

As velocidades de frente para cada massa são

$$v_{f_1} = v_{f_2} = v_{f_3} = v_{f_4} = 1, \quad (7.54)$$

e elas satisfazem as condições listadas em (7.14). Novamente, estamos assumindo que o parâmetro α mantém-se finito para $|k_3|$ tendendo ao infinito.

(ii) *Estados físicos*

Temos modos não-fantasma para os polos enquanto

$$\begin{aligned} \beta &> -\frac{1}{16} \left[1 + 4 \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 + 24\alpha \right] \Rightarrow \lambda_1 > 0, \\ \beta &> -\frac{1}{4} \left[\left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 + 6\alpha \right] \Rightarrow \lambda_2 > 0, \end{aligned}$$

³⁴ Ver Ap. G para detalhes.

$$\left\{ \alpha \leq -\frac{2}{3} \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 \cap \beta < - \left[\left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 + 3\alpha \right] \right\} \cup \left[\alpha > -\frac{2}{3} \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 \cap \beta < \frac{9\alpha^2}{4 \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2} \right] \Rightarrow \lambda_3 > 0 ,$$

$$\left[\alpha \leq -\frac{2}{3} \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 \cap \beta < \frac{9\alpha^2}{4 \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2} \right] \cup \left\{ \alpha > -\frac{2}{3} \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 \cap \beta < - \left[\left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 + 3\alpha \right] \right\} \Rightarrow \lambda_4 > 0 .$$

(7.55)

A interseção de todas as desigualdades em (7.55) é

$$\alpha < -\frac{1}{2} \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 \cap -\frac{1}{4} \left[\left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 + 6\alpha \right] < \beta < - \left[\left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 + 3\alpha \right] . \quad (7.56)$$

(iii) *Causalidade e estados físicos*

Não há uma única condição para uma teoria causal e unitária. Isso pode ser notado quando intersectamos as desigualdades listadas em (7.53) e (7.55).

7.2.2 Caso tipo tempo

Nesta seção iremos estudar a causalidade e a unitariedade da teoria para um vetor de fundo tipo tempo, *i.e.*, $v^\mu = (1, 0, 0, 0)$. Na sequência apresentamos as quatro raízes para os dois polos $Q(k) = 0$ e $P(k) = 0$:

$$\begin{aligned} m_1^2 &= k_3^2 - (6\alpha + 4\beta)\mu^2 + \mu|k_3| , \\ m_2^2 &= k_3^2 - (6\alpha + 4\beta)\mu^2 - \mu|k_3| , \\ m_3^2 &= k_3^2 - (3\alpha + 2\beta)\mu^2 + \mu\sqrt{\mu^2(3\alpha + 2\beta)^2 - 4\beta k_3^2} , \\ m_4^2 &= k_3^2 - (3\alpha + 2\beta)\mu^2 - \mu\sqrt{\mu^2(3\alpha + 2\beta)^2 - 4\beta k_3^2} , \end{aligned} \quad (7.57)$$

onde as raízes m_1^2 e m_2^2 correspondem ao polo $Q(k) = 0$ e as raízes m_3^2 e m_4^2 são relacionadas ao polo $P(k) = 0$. Assim, podemos calcular as matrizes de resíduo do propagador (7.11) quando k_3^2 assume os valores m_1^2 , m_2^2 , m_3^2 e m_4^2 :

$$R_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad \lambda_1 = 1 . \quad (7.58)$$

$$R_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = 1. \quad (7.59)$$

$$R_3 = \frac{1}{\mu\sqrt{\mu^2(6\alpha + 4\beta)^2 - 16\beta k_3^2}} \begin{pmatrix} k_3^2 & 0 & 0 & -m_3|k_3| \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m_3|k_3| & 0 & 0 & m_3^2 \end{pmatrix}, \quad (7.60)$$

O único autovalor não-nulo é

$$\lambda_3 = \frac{k_3^2 + m_3^2}{\mu\sqrt{\mu^2(6\alpha + 4\beta)^2 - 16\beta k_3^2}}. \quad (7.61)$$

A última matriz de resíduo tem a seguinte forma

$$R_4 = -\frac{1}{\mu\sqrt{\mu^2(6\alpha + 4\beta)^2 - 16\beta k_3^2}} \begin{pmatrix} k_3^2 & 0 & 0 & -m_4|k_3| \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m_4|k_3| & 0 & 0 & m_4^2 \end{pmatrix}. \quad (7.62)$$

Seu único autovalor não-nulo é

$$\lambda_4 = -\frac{k_3^2 + m_4^2}{\mu\sqrt{\mu^2(6\alpha + 4\beta)^2 - 16\beta k_3^2}}. \quad (7.63)$$

Ademais, apresentamos abaixo as velocidades de grupo associadas às massas m_1^2 , m_2^2 , m_3^2 e m_4^2 :

$$\begin{aligned} v_{g_1} &= \left(|k_3| + \frac{\mu}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{k_3^2 - (6\alpha + 4\beta)\mu^2 + \mu|k_3|}}, \\ v_{g_2} &= \left(|k_3| - \frac{\mu}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{k_3^2 - (6\alpha + 4\beta)\mu^2 - \mu|k_3|}}, \\ v_{g_3} &= \left(1 - \frac{2\beta\mu}{\sqrt{\mu^2(3\alpha + 2\beta)^2 - 4\beta k_3^2}}\right) \frac{|k_3|}{\sqrt{k_3^2 - (3\alpha + 2\beta)\mu^2 + \mu\sqrt{\mu^2(3\alpha + 2\beta)^2 - 4\beta k_3^2}}}, \\ v_{g_4} &= \left(1 + \frac{2\beta\mu}{\sqrt{\mu^2(3\alpha + 2\beta)^2 - 4\beta k_3^2}}\right) \frac{|k_3|}{\sqrt{k_3^2 - (3\alpha + 2\beta)\mu^2 - \mu\sqrt{\mu^2(3\alpha + 2\beta)^2 - 4\beta k_3^2}}}. \end{aligned} \quad (7.64)$$

Na sequência veremos as restrições sobre os parâmetros α e β de modo que o modelo apresente modos físicos no caso em que o vetor de fundo é tipo tempo.

(i) *Causalidade*

As condições individuais de modo a termos energias positivas são as que seguem:

$$\begin{aligned}
\beta &< \frac{1}{4} \left[\left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 + \frac{|k_3|}{\mu} - 6\alpha \right] \Rightarrow m_1^2 > 0, \\
\beta &< \frac{1}{4} \left[\left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 - \frac{|k_3|}{\mu} - 6\alpha \right] \Rightarrow m_2^2 > 0, \\
\left\{ \alpha < \frac{1}{6} \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 \cap \beta \leq \frac{1}{2} \left[\left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 - 3\alpha \right] - \frac{1}{2} \frac{|k_3|}{\mu} \sqrt{\left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 - 6\alpha} \right\} \cup \\
\left\{ \alpha = \frac{1}{6} \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 \cap \beta < \frac{1}{2} \left[\left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 - 3\alpha \right] - \frac{1}{2} \frac{|k_3|}{\mu} \sqrt{\left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 - 6\alpha} \right\} \cup \\
\left\{ \alpha > \frac{1}{6} \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 \cap \forall \beta \right\} &\Rightarrow m_3^2 > 0, \\
\alpha < \frac{1}{6} \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 \cap \beta \leq \frac{1}{2} \left[\left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 - 3\alpha \right] - \frac{1}{2} \frac{|k_3|}{\mu} \sqrt{\left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 - 6\alpha} &\Rightarrow m_4^2 > 0.
\end{aligned} \tag{7.65}$$

Resolvemos a intersecção das desigualdades em (7.65) enquanto

$$0 < \frac{|k_3|}{\mu} < 1 \cup \frac{|k_3|}{\mu} > 1,$$

então

$$\begin{aligned}
&\left\{ \alpha < -\frac{1}{24} \left[1 + 2\frac{|k_3|}{\mu} - 3 \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 \right] \cap \beta \leq \frac{1}{2} \left[\left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 - 3\alpha \right] - \frac{1}{2} \frac{|k_3|}{\mu} \sqrt{\left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 - 6\alpha} \right\} \\
&\cup \left\{ \alpha = -\frac{1}{24} \left[1 + 2\frac{|k_3|}{\mu} - 3 \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 \right] \cap \beta < \frac{1}{2} \left[\left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 - 3\alpha \right] - \frac{1}{2} \frac{|k_3|}{\mu} \sqrt{\left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 - 6\alpha} \right\} \\
&\cup \left\{ -\frac{1}{24} \left[1 + 2\frac{|k_3|}{\mu} - 3 \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 \right] < \alpha < \frac{1}{6} \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 \cap \beta < \frac{1}{4} \left[-\frac{|k_3|}{\mu} + \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 - 6\alpha \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{7.66}$$

Ou, enquanto $|k_3|/\mu = 1$, então

$$\left\{ \alpha < 0 \cap \beta \leq \frac{1}{2} (1 - 3\alpha) - \frac{1}{2} \sqrt{1 - 6\alpha} \right\} \cup \left\{ 0 \leq \alpha < \frac{1}{6} \cap \beta < -\frac{3\alpha}{2} \right\}. \tag{7.67}$$

Na sequência, os intervalos causais para as velocidades de grupo são

$$\begin{aligned} \beta \leq -\frac{1}{16}(1+24\alpha) &\Rightarrow v_{g_1} \leq 1 \cap v_{g_2} \leq 1, \\ &\quad \{\alpha \leq 0 \cap \beta \leq 0\} \cup \\ \left\{ 0 < \alpha < \frac{1}{6} \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 \cap \beta \leq \frac{1}{\mathcal{Y}} \left\{ \mathcal{W} \left[1 + \frac{\alpha}{\mathcal{Z}} \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 \right] + \mathcal{Z} \right\} \right\} &\Rightarrow v_{g_3} \leq 1 \cap v_{g_4} \leq 1, \end{aligned} \quad (7.68)$$

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{Y} \equiv \mathcal{Y}(k_3, \mu, \alpha) &= 2 \left[\left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 - 6\alpha \right], \\ \mathcal{W} \equiv \mathcal{W}(k_3, \mu, \alpha) &= 2\alpha \left[2 \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 - 9\alpha \right], \\ \mathcal{Z} \equiv \mathcal{Z}(k_3, \mu, \alpha) &= \left\{ -8\alpha^3 \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^6 + 135\alpha \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^4 - 486\alpha^5 \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + 9 \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 \sqrt{\alpha^7 \left[81\alpha - 16 \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 \right] \left[\left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 - 6\alpha \right]^2} \right\}^{1/3}. \end{aligned} \quad (7.69)$$

Depois de termos calculado a intersecção de todas as desigualdades em (7.69), encontramos

$$\begin{aligned} &\left\{ \alpha \leq -\frac{1}{24} \cap \beta \leq 0 \right\} \cup \\ &\quad \left\{ -\frac{1}{24} < \alpha \leq 0 \cap \beta \leq -\frac{1}{16}(1+24\alpha) \right\} \cup \\ &\quad \left\{ 0 < \alpha < \frac{1}{24} \cap \left[\beta \leq -\frac{1}{16}(1+24\alpha) \cap \frac{|k_3|}{\mu} \geq \sqrt{\frac{3\alpha}{4\beta}(3\alpha+2\beta)} \right] \right\} \cup \\ &\quad \left\{ \alpha \geq \frac{1}{24} \cap \beta < -3\alpha \cap \frac{|k_3|}{\mu} \geq \sqrt{\frac{3\alpha}{4\beta}(3\alpha+2\beta)} \right\}. \end{aligned} \quad (7.70)$$

As velocidades de frente para cada caso são

$$v_{f_1} = v_{f_2} = v_{f_3} = v_{f_4} = 1. \quad (7.71)$$

e elas satisfazem as condições listadas em (7.14).

(ii) *Estados físicos*

Há ausência de modos fantasmas para o terceiro polo quando

$$\begin{aligned}
& \left\{ \alpha \leq 0 \cap \left\{ \beta < \frac{1}{2} \left[\left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 - 3\alpha - \sqrt{\left(\frac{k_3}{\mu} \right)^4 - 6\alpha \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2} \right] \cup \beta > \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 - 3\alpha \right\} \right\} \cup \\
& \left\{ 0 < \alpha < \frac{1}{6} \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 \cap \left\{ \beta < \frac{1}{2} \left[\left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 - 3\alpha - \sqrt{\left(\frac{k_3}{\mu} \right)^4 - 6 \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 \alpha} \right] \cup \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \beta > \frac{1}{2} \left[\left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 - 3\alpha + \sqrt{\left(\frac{k_3}{\mu} \right)^4 - 6 \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 \alpha} \right] \right\} \right\} \cup \\
& \left\{ \alpha = \frac{1}{6} \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 \cap \beta < \frac{1}{2} \left[\left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 - 3\alpha - \sqrt{\left(\frac{k_3}{\mu} \right)^4 - 6 \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 \alpha} \right] \cup \right. \\
& \quad \left. \beta > \frac{1}{2} \left[\left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 - 3\alpha - \sqrt{\left(\frac{k_3}{\mu} \right)^4 - 6 \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 \alpha} \right] \right\} \cup \\
& \quad \left\{ \alpha > \frac{1}{6} \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 \cap \forall \beta \right\} \Rightarrow \lambda_3 > 0 , \\
\end{aligned} \tag{7.72}$$

e, para o quarto polo devemos ter

$$\begin{aligned}
& \left\{ \alpha \leq 0 \cap \beta < \frac{1}{2} \left[\left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 - 3\alpha + \sqrt{\left(\frac{k_3}{\mu} \right)^4 - 6\alpha \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2} \right] \right\} \cup \\
& \quad \left\{ \alpha > 0 \cap \beta > \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 - 3\alpha \right\} \Rightarrow \lambda_4 > 0 . \tag{7.73}
\end{aligned}$$

A interseção entre (7.72) e (7.73) é

$$\beta > \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 - 3\alpha , \tag{7.74}$$

e leva a ausência de modos fantasmas em todos os polos.

(iii) Causalidade e estados físicos

Desde que não há solução quando intersectamos as condições listadas em (7.70) e (7.74), então não temos causalidade e unitariedade simultaneamente.

Vale ressaltar que, embora esses dois casos – tipo espaço e tipo tempo – tenham resultados similares, o caso tipo tempo é mais perigoso. De fato, olhando as soluções para a positividade da massa (7.66) e (7.67), vemos que o raio $|k_3|/\mu$ é altamente restritivo,

junto com os parâmetros α e β . Por exemplo, no caso tipo espaço, embora os parâmetros α e β sejam restritos, a fim de garantir a positividade da massa, o raio $|k_3|/\mu$ é livre. Essa diferença também pode ser notada comparando as soluções para as velocidades de grupo para os casos tipo espaço e tipo tempo, (7.53) e (7.70), respectivamente.

7.3 Discutindo causalidade e a existência de estados físicos

Neste capítulo estudamos a causalidade e a unitariedade da teoria de Yang-Mills pura com violação da simetria de Lorentz. Aqui, o propagador do campo de calibre é modificado devido a termos de massa originados a partir do método de Symanzik junto com a quantização de BRST da teoria. Assim, uma vez que o propagador do campo de calibre é modificado, um estudo detalhado se torna necessário. Resultado, uma vez que os parâmetros de massa do campo de calibre dependem dos parâmetros α e β , deve ser analisado se existem restrições sobre esses parâmetros de modo que o modelo seja consistente fisicamente. Assim, esses parâmetros não são tão livres. Analisamos e perscrutamos como o espectro físico da teoria de Yang-Mills pura com violação de Lorentz se comporta quando modificamos os parâmetros α e β nos cenários nos quais o vetor de fundo é tipo espaço e tipo tempo. Por exemplo, para o caso tipo espaço, casos especiais foram abertos para clarificar as consequências da violação de Lorentz sobre o espectro físico da teoria.

Os principais resultados aqui encontrados são: para o caso tipo espaço analisamos três situações distintas: na primeira, para $\alpha = 0$, encontramos que causalidade e unitariedade são violadas simultaneamente. De fato, esse caso além de levar em conta um termo tipo Proca, leva em conta um termo de mistura não usual. Por outro lado, quando levamos $\beta = 0$, o modelo mantém causalidade, mas apresenta um estado fantasma. Aqui, embora o modelo lembre um pouco um modelo originado do mecanismo de Higgs [102], a situação é um pouco diferente. De fato, o termo de massa originado para o campo do fóton em [102] vem do mecanismo de Higgs, sem qualquer relação com a escala de violação de Lorentz, μ , e os modos que seriam os modos de Nambu-Goldstone são absorvidos pelo fóton de uma tal forma que a causalidade e a unitariedade do modelo são preservadas. O mesmo acontece para a teoria não-abeliana com grupo de simetria $SO(3)$ com campo de Higgs [109]. No nosso caso, contudo, pode-se dizer que o termo de massa é gerado dinamicamente e depende da escala de violação de Lorentz, μ . Além disso, estamos analisando um modelo não-abeliano, onde os campos fantasmas desenvolvem um papel importante. Assim, somente cálculos a 1-laço ou um estudo através do formalismo de BRST poderiam julgar se o modo que viola unitariedade nesse caso se desacoplaria do modelo. Ainda, comparando as situações prévias distintas, podemos ver que a origem da violação de causalidade está relacionada ao termo de mistura. Ademais, analisando a situação geral, onde os parâmetros α e β não são nulos, encontramos que a causalidade é

garantida, mas a unitariedade é violada. Aqui, também, restrições sobre os parâmetros α e β são encontradas.

Analisando o caso tipo tempo, vemos que, assim como no caso tipo espaço, a causalidade do modelo é preservada, mas a unitariedade não. Contudo, como previamente mencionado, as restrições entre os parâmetros α e β podem mudar drasticamente com a escala de energia. No caso tipo espaço, no entanto, essas restrições são as mesmas em toda escala de energia $|k_3|/\mu$.

No capítulo anterior e neste capítulo analisamos o propagador do campo de calibre no calibre de Landau. Contudo, na forma como o propagador (7.11) se encontra, sua transversalidade não é evidente. A transversalidade do propagador pode ser facilmente notada se reescrevemo-lo como

$$D_{\mu\nu}^{ab}(k) = \frac{i\delta^{ab}}{Q(k)} \left\{ -(k^2 - \mu^2 \Delta v^2) \theta_{\mu\nu} - \frac{\mu^2 k^2 [\Omega(k^2 - \mu^2 \Delta v^2) + k^2]}{P(k)} \theta_{\mu\alpha} \Lambda^{\alpha\beta} \theta_{\beta\nu} - \mu S_{\mu\nu} \right\}. \quad (7.75)$$

É simples mostrar que

$$k^\mu D_{\mu\nu}^{ab}(k) = k^\nu D_{\mu\nu}^{ab}(k) = 0. \quad (7.76)$$

Essa condição também se aplica na teoria abeliana com violação de Lorentz no calibre de Landau. Em [110] é mostrado que o propagador permanece transverso a 1-laço em teoria de perturbações. A prova a todas as ordens vimos no Cap. 5.

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

O MPE estendido tem sido objeto de extensa análise nas últimas décadas, tanto do ponto de vista experimental e fenomenológico quanto teórico. Até a presente data, entretanto, não se verificou experimentalmente a violação da simetria de Lorentz e de CPT na Natureza. Sob o ponto de vista teórico, tal modelo tem sido também vastamente estudado. Como comentado na Sec. 2.2, a violação de tais simetrias não implica necessariamente na violação dos principais atributos do MP – estabilidade, causalidade, unitariedade e renormalizabilidade; claro que alguns desses atributos são possíveis somente no MPE mínimo.

Nesta tese discorreremos principalmente sobre aspectos teóricos do setor mínimo do MPE, especificamente a EDQ e a Teoria de Yang-Mills pura o grupo $SU(N)$ – mas válida para qualquer grupo simples – com violação da simetria de Lorentz. Focamos nossa atenção no estudo da renormalizabilidade dessas teorias, com incursões sobre aspectos de causalidade e unitariedade desta última.

O estudo da renormalizabilidade foi executado seguindo um princípio rigoroso de teoria quântica de campos perturbativa, o PAQ. Tal princípio, como vimos, é demonstrado em diversos esquemas de renormalização. Tal propriedade permite afirmar que, se tal princípio é devidamente aplicado, os resultados obtidos são esperados serem gerais. Além disso, esse é o princípio fundamental da abordagem de renormalização algébrica, um método de renormalização também independente do esquema de renormalização e sem a necessidade do cálculo explícito dos diagramas de Feynman da teoria em estudo, que foi vastamente utilizado nesta tese. Além da renormalização algébrica e pelo fato das teorias aqui estudadas serem de calibre, usamos a quantização de BRST. Isso permitiu estudar as teorias aqui tratadas com uma simetria fora da camada de massa. A qual é a mais segura sob o ponto de vista quântico.

Embora tenhamos estudado aqui modelos que apresentam violação da simetria de Lorentz, é prudente assumir que não devemos desprezar os resultados consistentes obtidos em teoria quântica de campos perturbativa para analisar os aspectos quânticos, também sob o ponto de vista perturbativo, dos modelos aqui estudados. Desde que o PAQ é bem estabelecido em teorias com simetria de Lorentz, cuidados adicionais devem ser tomados a fim de aplicá-lo em modelos com violação da simetria de Lorentz. Contudo, o método das fontes externas de Symanzik permite estudar teorias que apresentem quebras de simetrias. De fato, no intuito de termos controle do tratamento perturbativo de teoria com quebras, é conveniente restaurar tais quebras, com fontes externas apropriadas, de modo a evitar patologias na teoria que possam ser desprovidas de sentido físico, mesmo que a teoria clássica seja uma teoria com quebras genuinamente físicas – pelo menos sob o ponto de vista teórico.

No Cap. 3 desta tese, contudo, a EDQ estendida foi estudada através da diagramática de Feynman. A renormalização da teoria foi verificada aplicando o método de regularização dimensional para tratar os diagramas com divergências genuínas a 1-laço. Neste estágio, não é ilícito usar a álgebra usual (3.14), pois estávamos interessados somente em termos divergentes. Aqui, além dos cálculos realizados em outras referências, o único termo adicional é aquele do acoplamento pseudoescalar. Vimos que o termo de Carroll-Field-Jackiw (ou termo tipo Chern-Simons) não se renormaliza. Rediscutimos ainda a controvérsia da geração do termo tipo Chern-Simons também sob o ponto de vista da regularização dimensional. Aqui, contudo, procuramos realizar o cálculo das duas contribuições inequivalentes separadamente – gráficos e e f da Fig. 6 – e não usamos a álgebra usual (3.14) em quatro dimensões, mas somente a ciclicidade do traço. Obtemos que o termo tipo Chern-Simons não é gerado em correções quânticas. Embora aparentemente semelhante, não confundir não-renormalização do termo tipo Chern-Simons com não geração radiativa desse mesmo termo. Usualmente objetam-se com o uso da regularização dimensional do termo tipo Chern-Simons, pois esse é um método de regularização invariante calibre. O método de Pauli-Villars também fornece um resultado de não geração radiativa de tal termo. De fato, é sempre conveniente usar um método de regularização que preserve invariância de calibre. Do contrário, resultados espúrios podem ser uma consequência de não tratar essa simetria devidamente.

Apesar de termos usado um esquema de regularização invariante de calibre para tratar a renormalização da EDQ estendida, muito debate tem sido feito nesse assunto sobre outros esquemas de regularização, e principalmente sobre a geração do termo tipo Chern-Simons. Desde que a renormalização algébrica é independente do esquema de renormalização e é um procedimento recursivo, *i.e.*, estendível em todas as ordens em teoria de perturbações, aplicamos esse procedimento na análise da renormalizabilidade da EDQ estendida em todas as ordens em teoria de perturbações, como apresentado no Cap. 4. Aplicamos ainda o método das fontes externas de Symanzik e a quantização de BRST. Deste modo, com as simetrias de Lorentz, de CPT e de BRST (calibre – neste caso da EDQ – fora da camada de massa) bem estabelecidas no nível clássico, a extensão da teoria poderia ser seguramente executada. Com esses procedimentos, vimos, em resumo, que a EDQ com violação da simetria de Lorentz é renormalizável em todas as ordens em teoria de perturbações e não há geração do termo tipo Chern-Simons. Em acordo com os resultados obtidos a 1-laço no Cap. 3. Através da renormalização algébrica, nota-se que o termo tipo Chern-Simons não é gerado mesmo em ordens mais altas em teoria de perturbações. Assim, em comparação com o que foi comentado na Sec. 3.3, um termo tipo Chern-Simons não é gerado mesmo se o momento do fóton não estiver na camada de massa, ou seja, no caso de subdiagramas, em ordens além de 1-laço.

No Cap. 5 analisamos as anomalias de calibre na EDQ estendida por meio do estudo da cohomologia do operador de Slavnov-Taylor linearizado. Através do PAQ estendemos

as identidades de Ward dessa teoria ao nível quântico. Vimos que a equação de fixação de calibre, a equação do campo fantasma e a equação do campo antifantasma não são anômalas. As quebras que surgem na identidade de Slavnov-Taylor que satisfazem a condição de consistência de Wess-Zumino pertencem ao setor trivial da cohomologia, e podem ser compensadas pela introdução de sutis contratermos. Resultado: a identidade de Slavnov-Taylor não quebra no nível quântico, pois não há soluções para a anomalia pertencentes ao setor não-trivial da cohomologia.

Aplicamos o mesmo formalismo usado no Cap. 4, para a EDQ estendida, e vimos que a Teoria de Yang-Mills pura com violação da simetria de Lorentz é renormalizável em todas as ordens em teoria de perturbações. Diferentemente da EDQ estendida, o termo tipo Chern-Simons não-abeliano se renormaliza – através da renormalização matricial. Isto é uma consequência da equação do campo fantasma, que é integrada, fazendo-a mais fraca que sua versão abeliana. Além disso, vimos que termos de massa são induzidos devido ao vetor de violação de Lorentz de CPT-ímpar, v^μ ; uma consequência da estabilidade quântica.

Devido à geração de termos de massa, o propagador do campo de Yang-Mills é modificado mais drasticamente do que no caso usual – sob o ponto de vista não-perturbativo comentado nesta tese –, e assim, tal propagador deveria ser estudado. Uma análise somente do setor do campo de calibre mostra que para o caso do vetor de fundo tipo espaço a unitariedade é violada. Para certas condições sobre os parâmetros adimensionais a causalidade também é violada. No caso em que tal vetor de fundo é tipo tempo a unitariedade é violada. A causalidade é mantida, porém, com condições muito mais restritas do que no caso tipo espaço.

Esta tese deixa em aberto alguns problemas: o estudo da renormalizabilidade da teoria de Yang-Mills com violação da simetria de Lorentz na presença de férmions, analisando também a possível geração de um termo tipo Chern-Simons; a análise da renormalizabilidade em todas as ordens em teoria de perturbações – muito difícil, em princípio – do setor eletrofraco com violação de Lorentz; a análise a 1-laço da possível desestabilização do propagador do campo de calibre advinda dos coeficientes de violação de Lorentz; a análise da unitariedade da Teoria de Yang-Mills incluindo o setor de fantasmas. Isto poderia ser feito através da quantização de BRST.

APÊNDICE A – Notações e convenções

Nesta tese trabalharemos no espaço de Minkowski $M^{(1,3)}$ (do contrário avisaremos quando estivermos no espaço euclidiano), com tensor métrico de assinatura

$$\eta = \text{diag}(+1, -1, -1, -1) , \quad (\text{A.1})$$

e o tensor Levi-Civita completamente antissimétrico em seus índices $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ é normalizado como $\epsilon^{0123} = +1$. Deste modo, as coordenadas serão decompostas da seguinte forma

$$x^\mu \equiv (t, \mathbf{x}) , \quad (\text{A.2})$$

e o 4-momento

$$p^\mu \equiv (p^0, \mathbf{p}) . \quad (\text{A.3})$$

Para o tratamento de férmions será útil as seguintes relações das matrizes- γ de Dirac.

Da álgebra de Clifford

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1} . \quad (\text{A.4})$$

Ainda

$$\begin{aligned} \gamma^5 &= \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\frac{i}{4!}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\beta , \\ \sigma^{\mu\nu} &= \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] . \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Para mais convenções das matrizes- γ ver Ref. [34]. Usamos aqui as unidades naturais $c = \hbar = 1$. A menos que o contrário seja dito retornaremos a trabalhar com \hbar .

APÊNDICE B – Interlúdio matemático

B.1 1º movimento

Mostremos, então, que $\langle 0|T\phi(x)\partial_\mu^y\phi(y)|0\rangle = \partial_\mu^y\langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle$. Considerando que a fonte externa $J(x)$ pode ser decomposta como $J(x) = J_1(x) - \partial_\nu J_2^\nu(x)$. Então,

$$\int d^4x J(x)\phi(x) = \int d^4x J_1(x)\phi(x) + \int d^4x J_2^\nu(x)\partial_\nu\phi(x), \quad (\text{B.1})$$

onde integramos por partes e consideramos o fato de $J(x)$ ser uma função suave de suporte compacto. A partir da definição da função de Green e de funcional gerador, temos

$$\begin{aligned} \langle 0|T\phi(x)\partial_\mu^y\phi(y)|0\rangle &= (-i\hbar)^2 \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J_1(x)\delta J_2^\mu(y)} \\ &= (-i\hbar)^2 \int d^4w \frac{\delta J(w)}{\delta J_1(x)} \frac{\delta}{\delta J(w)} \int d^4z \frac{\delta J(z)}{\delta J_2^\mu(y)} \frac{\delta}{\delta J(z)} Z[J] \\ &= -(-i\hbar)^2 \int d^4z \partial_\mu^z \delta^4(z-y) \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x)\delta J(z)} = (-i\hbar)^2 \partial_\mu^y \frac{\delta^2 Z[J]}{\delta J(x)\delta J(y)} \\ &= \partial_\mu^y \langle 0|T\phi(x)\phi(y)|0\rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

onde usamos a regra da cadeia funcional e integração por partes.

APÊNDICE C – Simetrias discretas

As propriedades dos campos e fontes espinoriais sob mapas discretos são as seguintes (veja [198]):

C.1 Conjugação da carga

De forma sucinta, a operação de conjugação de carga consiste em um mapa de um estado de uma partícula de carga q para um estado de carga $-q$ ³⁵. Sobre os campos de Dirac (juntamente com fontes externas usadas no Cap. 4), tal operação consiste em uma conjugação sobre os dados campos, de modo que

$$\psi^c = C\bar{\psi}^T, \quad \bar{\psi}^c = -\psi^T C^{-1}, \quad Y^c = C\bar{Y}^T, \quad \bar{Y}^c = -Y^T C^{-1}, \quad (\text{C.1})$$

onde a matriz C é a matriz de conjugação de carga, definida por $C = i\gamma^0\gamma^2$ e T indica a operação de transposição. A matriz C tem as seguintes propriedades

$$C^\dagger = C^{-1} = C^T = -C, \quad C^{-1}C = \mathbb{1}, \quad (\text{C.2})$$

e satisfaz a seguinte álgebra

$$\begin{aligned} C(\gamma_\mu)^T C^{-1} &= -\gamma_\mu, \\ C(\gamma_5)^T C^{-1} &= \gamma_5, \\ C(\gamma_\mu\gamma_5)^T C^{-1} &= \gamma_\mu\gamma_5, \\ C(\sigma_{\mu\nu})^T C^{-1} &= -\sigma_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

³⁵ Não confundir conjugação de carga, que é uma mudança de sinal na 4-corrente J^μ , ver, por exemplo, a Tabela 8, com a mudança de sinal de e , que é a constante de acoplamento eletromagnético, que nada mais é que uma operação errada. De fato, dado um autoestado da 0-componente, Q , da 4-corrente, *i.e.*, $|n, Q\rangle$, onde n representa outros possíveis números quânticos, a operação de conjugação de carga implica que $|n, Q\rangle^c = f|n, -Q\rangle$, onde f é um fator de fase.

Tabela 6 - Mapa discreto das fontes.

fontes	C	P	T	CP	CT	PT	CPT
$C_{00}, \bar{K}_{0i0j}, C_{ij}, \bar{K}_{ijkl}$	+	+	+	+	+	+	+
$M_5, C_{0i}, C_{i0}, \bar{K}_{0ijk}$	+	-	-	-	-	+	+
$B_i, G_{i0j}, G_{ij0}, J_{0ij}, \lambda_{0ij}$	+	+	-	+	-	-	-
$B_0, G_{i00}, G_{ijk}, J_{ijk}, \lambda_{ijk}$	+	-	+	-	+	-	-
\bar{A}_0, E_0, F_i	-	+	+	-	-	+	-
\bar{A}_i, E_i, F_0	-	-	-	+	+	+	-
H_{ij}, D_{0i}, D_{i0}	-	+	-	-	+	-	+
H_{0i}, D_{00}, D_{ij}	-	-	+	+	-	-	+

C.2 Paridade

A paridade consiste em uma operação de reflexão nas coordenadas espaciais, e mantém a coordenada temporal inalterada, tal que

$$(t, \mathbf{x}) \xrightarrow{\mathcal{P}} (t, -\mathbf{x}) . \quad (\text{C.4})$$

Sobre os campos de Dirac e fontes externas essa operação atua como

$$\begin{aligned} \psi^{\mathcal{P}}(t, \mathbf{x}) &= \eta_p \gamma^0 \psi(t, -\mathbf{x}) , & \bar{\psi}^{\mathcal{P}}(t, \mathbf{x}) &= \eta_p^* \bar{\psi}(t, -\mathbf{x}) \gamma^0 , \\ Y^{\mathcal{P}}(t, \mathbf{x}) &= \eta_p \gamma^0 Y(t, -\mathbf{x}) , & \bar{Y}^{\mathcal{P}}(t, \mathbf{x}) &= \eta_p^* \bar{Y}(t, -\mathbf{x}) \gamma^0 , \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

com $|\eta_p| = 1$.

C.3 Reversão temporal

A operação de reversão temporal reverte o sentido do tempo e mantém as coordenadas espaciais intactas. Deste modo, temos

$$(t, \mathbf{x}) \xrightarrow{\mathcal{T}} (-t, \mathbf{x}) . \quad (\text{C.6})$$

Tal operação sobre os campos de Dirac e fontes externas tem a forma

$$\begin{aligned} \psi^{\mathcal{T}}(t, \mathbf{x}) &= \eta_t \gamma^0 A \bar{\psi}^{\mathcal{T}}(-t, \mathbf{x}) , & \bar{\psi}^{\mathcal{T}}(t, \mathbf{x}) &= \eta_t^* \psi^{\mathcal{T}}(-t, \mathbf{x}) A^{-1} \gamma^0 , \\ Y^{\mathcal{T}}(t, \mathbf{x}) &= \eta_t \gamma^0 A \bar{Y}^{\mathcal{T}}(-t, \mathbf{x}) , & \bar{Y}^{\mathcal{T}}(t, \mathbf{x}) &= \eta_t^* Y^{\mathcal{T}}(-t, \mathbf{x}) A^{-1} \gamma^0 , \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

onde a matriz de reversão temporal é definida por $A = i\gamma^1\gamma^3$ e $|\eta_t|^2 = 1$.

Para ficar claro a questão das simetrias discretas, e como se dá o mecanismo de

Tabela 7 - Mapa discreto dos campos.

campos	C	P	T	CP	CT	PT	CPT
A_0	-	+	+	-	-	+	-
A_i	-	-	-	+	+	+	-
\mathbf{E}	-	-	+	+	-	-	+
\mathbf{B}	-	+	-	-	+	-	+
b	-	+	-	-	+	-	+
\bar{c}	-	+	-	-	+	-	+
c	-	+	-	-	+	-	+

Tabela 8 - Mapa discreto dos bilineares de Dirac.

C	P	T
$S(x)$	$S(x_P)$	$S(x_T)$
$P(x)$	$-P(x_P)$	$-P(x_T)$
$-J^\mu(x)$	$J_\mu(x_P)$	$J_\mu(x_T)$
$J_5^\mu(x)$	$-J_{5\mu}(x_P)$	$J_{5\mu}(x_T)$
$-T^{\mu\nu}(x)$	$T_{\mu\nu}(x_P)$	$-T_{\mu\nu}(x_T)$

restauração da simetria de Lorentz, estudemos na sequência as propriedades sob simetrias discretas – C, P e T – para um acoplamento específico. Mas antes de avançarmos, definamos o seguinte comutador [199]

$$\begin{aligned}
[\bar{\psi}(x), \gamma^\mu \psi(x)] &= \bar{\psi}_\alpha(x) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \psi_\beta(x) - \psi_\beta(x) (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} \bar{\psi}_\alpha(x) \\
&= \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) - \psi^T(x) \gamma^{\mu T} \bar{\psi}^T(x),
\end{aligned} \tag{C.8}$$

onde α e β são índices no espaço espinorial. É possível mostrar que

$$\frac{1}{2} [\bar{\psi}(x), \gamma^\mu \psi(x)] = : \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) : = J^\mu(x), \tag{C.9}$$

onde $:$ refere-se ao produto normal ordenado. A definição acima é importante no estudo das simetrias discretas das teorias aqui tratadas. Como um exemplo, tomemos a seguinte lagrangiana

$$\mathcal{L} = e^\mu Q_\mu = e^\mu i \bar{\psi} D_\mu \psi. \tag{C.10}$$

Por questão de simplicidade, podemos definir tal lagrangiana de forma hermitiana³⁶, tal que

$$\mathcal{L} = e^\mu \left[\frac{i}{2} (\bar{\psi} \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi} \psi) - e \bar{\psi} \psi A_\mu \right]. \quad (\text{C.11})$$

Ainda, estudemos o comportamento do operador composto \mathcal{Q}_μ invariante de calibre. Primeiramente, sob conjugação de carga, dividimo-lo em três diferentes partes, isto é,

$$i\bar{\psi} \partial_\mu \psi = \frac{i}{2} (\bar{\psi}_\alpha \delta_{\alpha\beta} \partial_\mu \psi_\beta - \partial_\mu \psi_\beta \delta_{\alpha\beta} \bar{\psi}_\alpha) = \frac{i}{2} (\bar{\psi} \partial_\mu \psi - \partial_\mu \psi^T \bar{\psi}^T), \quad (\text{C.12})$$

onde usamos (C.8). A partir de (C.1), obtemos

$$\begin{aligned} i\bar{\psi}^c \partial_\mu \psi^c &= \frac{i}{2} (\bar{\psi}^c \partial_\mu \psi^c - \partial_\mu (\psi^c)^T (\bar{\psi}^c)^T) \\ &= \frac{i}{2} (-\psi^T C^{-1} C \partial_\mu \bar{\psi}^T - \partial_\mu (C \bar{\psi}^T)^T (-\psi^T C^{-1})^T) \\ &= \frac{i}{2} (-\psi^T \partial_\mu \bar{\psi}^T + \partial_\mu \bar{\psi} \psi), \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

onde usamos (C.2). Ainda

$$i\partial_\mu \bar{\psi} \psi = \frac{i}{2} (\partial_\mu \bar{\psi}_\alpha \delta_{\alpha\beta} \psi_\beta - \psi_\beta \delta_{\alpha\beta} \partial_\mu \bar{\psi}_\alpha) = \frac{i}{2} (\partial_\mu \bar{\psi} \psi - \psi^T \partial_\mu \bar{\psi}^T). \quad (\text{C.14})$$

De (C.1),

$$\begin{aligned} i\partial_\mu \bar{\psi}^c \psi^c &= \frac{i}{2} (\partial_\mu \bar{\psi}^c \psi^c - (\psi^c)^T \partial_\mu (\bar{\psi}^c)^T) \\ &= \frac{i}{2} (-\partial_\mu \psi^T C^{-1} C \bar{\psi}^T - (C \bar{\psi}^T)^T \partial_\mu (-\psi^T C^{-1})^T) \\ &= \frac{i}{2} (-\partial_\mu \psi^T \bar{\psi}^T + \bar{\psi} \partial_\mu \psi). \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Ademais

$$\bar{\psi} \psi = \frac{1}{2} (\bar{\psi}_\alpha \delta_{\alpha\beta} \psi_\beta - \psi_\beta \delta_{\alpha\beta} \bar{\psi}_\alpha) = \frac{1}{2} (\bar{\psi} \psi - \psi^T \bar{\psi}^T), \quad (\text{C.16})$$

³⁶ Isto facilita o estudo da teoria sob as simetrias discretas de C e T. Sob P não é necessário tomarmos a lagrangiana hermitiana. Essas escolhas são só por questão de conveniência.

onde usamos (C.8). A partir de (C.1), obtemos

$$\begin{aligned}\bar{\psi}^c \psi^c &= \frac{1}{2} \left(\bar{\psi}^c \psi^c - (\psi^c)^T (\bar{\psi}^c)^T \right) = \frac{1}{2} \left(-\psi^T C^{-1} C \bar{\psi}^T - (C \bar{\psi}^T)^T (-\psi^T C^{-1})^T \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-\psi^T \bar{\psi}^T + \bar{\psi} \psi \right),\end{aligned}\quad (\text{C.17})$$

onde usamos (C.2). Comparando as Eqs. (C.12), (C.14) e (C.16) com as Eqs. (C.13), (C.15) e (C.17), e usando a propriedade $A_\mu^c = -A_\mu$, concluimos que

$$\mathcal{Q}_\mu^c = -\mathcal{Q}_\mu. \quad (\text{C.18})$$

Vejamos agora o comportamento de \mathcal{Q}_μ sob paridade, ou seja,

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_\mu^P(t, \mathbf{x}) &= i\bar{\psi}^P(t, \mathbf{x}) \partial_\mu^P \psi^P(t, \mathbf{x}) - e\bar{\psi}^P(t, \mathbf{x}) \psi^P(t, \mathbf{x}) A_\mu^P(t, \mathbf{x}) \\ &= |\eta_p|^2 \bar{\psi}(t, -\mathbf{x}) \gamma^0 \gamma^0 \partial_\mu^P \psi(t, -\mathbf{x}) - e|\eta_p|^2 \bar{\psi}(t, -\mathbf{x}) \gamma^0 \gamma^0 \psi(t, -\mathbf{x}) A_\mu^P(t, \mathbf{x}),\end{aligned}\quad (\text{C.19})$$

onde usamos (C.5). Assim

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_0^P(t, \mathbf{x}) &= i\bar{\psi}(t, -\mathbf{x}) \partial_0 \psi(t, -\mathbf{x}) - e\bar{\psi}(t, -\mathbf{x}) \psi(t, -\mathbf{x}) A_0(t, -\mathbf{x}) = \mathcal{Q}_0(t, -\mathbf{x}), \\ \mathcal{Q}_i^P(t, \mathbf{x}) &= -i\bar{\psi}(t, -\mathbf{x}) \partial_i \psi(t, -\mathbf{x}) + e\bar{\psi}(t, -\mathbf{x}) \psi(t, -\mathbf{x}) A_i(t, -\mathbf{x}) = -\mathcal{Q}_i(t, -\mathbf{x}),\end{aligned}\quad (\text{C.20})$$

onde usamos as propriedades do campo A_μ sob paridade dispostas na Tabela 7. Agora, sob reversão temporal, isto é,

$$\mathcal{Q}_\mu^T(t, \mathbf{x}) = \frac{i}{2} \bar{\psi}^T(t, \mathbf{x}) \partial_\mu^T \psi^T(t, \mathbf{x}) - \frac{i}{2} \partial_\mu^T \bar{\psi}^T(t, \mathbf{x}) \psi^T(t, \mathbf{x}) - e\bar{\psi}^T(t, \mathbf{x}) \psi^T(t, \mathbf{x}) A_\mu^T(t, \mathbf{x}). \quad (\text{C.21})$$

A partir de (C.7), temos

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_0^T(t, \mathbf{x}) &= -\frac{i}{2} \psi^T(-t, \mathbf{x}) A^{-1} \gamma^0 \gamma^0 A \partial_0 \bar{\psi}^T(-t, \mathbf{x}) + \frac{i}{2} \partial_0 \psi^T(-t, \mathbf{x}) A^{-1} \gamma^0 \gamma^0 A \bar{\psi}^T(-t, \mathbf{x}) + \\ &\quad - e \psi^T(-t, \mathbf{x}) A^{-1} \gamma^0 \gamma^0 A \bar{\psi}^T(-t, \mathbf{x}) A_0(-t, \mathbf{x}) \\ &= -\frac{i}{2} (\partial_0 \bar{\psi}(-t, \mathbf{x}) \psi(-t, \mathbf{x}))^T + \frac{i}{2} (\bar{\psi}(-t, \mathbf{x}) \partial_0 \psi(-t, \mathbf{x}))^T + \\ &\quad - e (\bar{\psi}(-t, \mathbf{x}) \psi(-t, \mathbf{x}))^T A_0(-t, \mathbf{x}) = \mathcal{Q}_0(-t, \mathbf{x}), \\ \mathcal{Q}_i^T(t, \mathbf{x}) &= \frac{i}{2} \psi^T(-t, \mathbf{x}) A^{-1} \gamma^0 \gamma^0 A \partial_i \bar{\psi}^T(-t, \mathbf{x}) - \frac{i}{2} \partial_i \psi^T(-t, \mathbf{x}) A^{-1} \gamma^0 \gamma^0 A \bar{\psi}^T(-t, \mathbf{x}) + \\ &\quad + e \psi^T(-t, \mathbf{x}) A^{-1} \gamma^0 \gamma^0 A \bar{\psi}^T(-t, \mathbf{x}) A_i(-t, \mathbf{x}) \\ &= \frac{i}{2} (\partial_i \bar{\psi}(-t, \mathbf{x}) \psi(-t, \mathbf{x}))^T - \frac{i}{2} (\bar{\psi}(-t, \mathbf{x}) \partial_i \psi(-t, \mathbf{x}))^T +\end{aligned}$$

$$+ e (\bar{\psi}(-t, \mathbf{x})\psi(-t, \mathbf{x}))^T A_i(-t, \mathbf{x}) = -\mathcal{Q}_i(-t, \mathbf{x}) . \quad (\text{C.22})$$

Aqui usamos a propriedade $(\bar{\psi}O\psi)^T = \bar{\psi}O\psi$, ou seja, $\bar{\psi}O\psi$ é apenas um escalar no espaço espinorial. O é um operador arbitrário, podendo depender das matrizes- γ .

A partir das relações (C.18), (C.20) e (C.22), vemos que o operador composto \mathcal{Q}_μ viola C e é invariante por PT. Portanto, viola CPT. Resultado, a lagrangiana (C.11) viola CPT, uma vez que o campo de fundo e^μ é par sob C, P e T. A promoção do campo de fundo e^μ à fonte externa $E^\mu(x)$ – onde o argumento “ x ” não só indica uma dependência no sistema de coordenadas, mas também dependência em cada ponto do espaço-tempo – permite definirmos as seguintes transformações discretas para a fonte $E^\mu(x)$, *i.e.*,

$$\begin{aligned} E_\mu^C(x) &= -E_\mu(x) , \\ E_0^P(t, \mathbf{x}) &= E_0(t, -\mathbf{x}) , & E_i^P(t, \mathbf{x}) &= -E_i(t, -\mathbf{x}) , \\ E_0^T(t, \mathbf{x}) &= E_0(-t, \mathbf{x}) , & E_i^T(t, \mathbf{x}) &= -E_i(-t, \mathbf{x}) . \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

Com esses mapas discretos a lagrangiana (C.11) é posta em uma forma invariante sob C, P e T, e também invariante de Lorentz. Esse procedimento usado para a lagrangiana (C.11), quando usado para as ações (3.3), (6.3) e (6.4), restaura as simetrias de Lorentz e de CPT.

APÊNDICE D – Alguns resultados em regularização dimensional

D.1 Regularização dimensional

Por questão de completeza, na sequência, apresentamos alguns resultados da regularização dimensional empregados nesta tese. Como já comentado, essa regularização consiste em realizar as integrais de Feynman em uma dimensão diferente da qual a teoria é definida. No nosso caso, temos

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \rightarrow \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} . \quad (\text{D.1})$$

Além disso, tal modificação implica que a dimensão canônica de massa dos campos é alterada – uma vez que queremos manter a ação adimensional – ou seja, o campo de calibre e o campo de Dirac têm, em d dimensões, dimensões de massa $(d-2)/2$ e $(d-1)/2$, respectivamente. Isso implica que a constante de acoplamento eletromagnético, e , passa a ter dimensão de massa $(4-d)/2$. Para evitar mudança na contagem de potências, a constante de acoplamento é reescalada como $e \rightarrow e\mu^{(4-d)/2}$, onde μ é um parâmetro de dimensão de massa 1 (uma escala de energia).

Ademais, o traço simetrizado sobre o produto dos momentos em d dimensões é definido como

$$\begin{aligned} p^\mu p^\nu &\rightarrow \frac{1}{d} \eta^{\mu\nu} p^2 , \\ p^\mu p^\nu p^\alpha p^\beta &\rightarrow \frac{1}{d(d+2)} (\eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} + \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta} \eta^{\nu\alpha}) (p^2)^2 . \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Contudo, a integração no espectro dos momentos dos propagadores é feita sobre o espectro de massa complexa – ou momentos – no intuito de contornar os polos quando o propagador é colocado na camada de massa. Devido a dificuldade em realizar as integrais de Feynman no espaço de Minkowski, realiza-se uma rotação de Wick na 0-componente do 4-momento, e, assim, ao invés realizar as integrais no espaço de Minkowski, realiza-as em um espaço euclidiano, *i.e.*, $p_0 = ip_{0E}$, onde p_{0E} é a 0-componente do 4-momento em um espaço euclidiano (nas componentes espaciais temos $\mathbf{p} = \mathbf{p}_E$). Assim,

$$\begin{aligned} p^2 - Q^2 + i\varepsilon &= p_0^2 - \mathbf{p}^2 - Q^2 + i\varepsilon = -p_{0E}^2 - \mathbf{p}_E^2 - Q^2 = -(p_E^2 + Q^2) . \\ \int d^d p &= \int dp_0 d^{d-1} \mathbf{p} = \int (idp_{0E}) d^{d-1} \mathbf{p}_E = i \int d^d p_E , \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

onde Q é alguma função nas massas das partículas que circulam no laço e nos momentos externos. De modo geral, as integrais de Feynman, em d dimensões, de diagramas a 1-laço,

são do tipo

$$I_{m,n} = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{p^{2m}}{(p^2 - Q^2 + i\varepsilon)^n} = i(-1)^{m-n} \int \frac{d^d p_E}{(2\pi)^d} \frac{p_E^{2m}}{(p_E^2 + Q^2)^n} = i(-1)^{m-n} I_{m,n}^E. \quad (\text{D.4})$$

A solução de $I_{m,n}^E$ é a seguinte

$$I_{m,n}^E = \frac{1}{\Gamma(n)} \frac{1}{(4\pi)^{d/2}} \left[\frac{1}{2^m} \prod_{j=0}^{m-1} (d+2j) \right] (Q^2)^{(-n+\frac{d}{2}+m)} \Gamma\left(n - \frac{d}{2} - m\right). \quad (\text{D.5})$$

Assim, de (D.5) em (D.4), seguem os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} I_{0,n} &= \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p^2 - Q^2 + i\varepsilon)^n} = \frac{(-1)^n i \Gamma\left(n - \frac{d}{2}\right)}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(n)} (Q^2)^{(-n+\frac{d}{2})}, \\ I_{1,n} &= \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{p^2}{(p^2 - Q^2 + i\varepsilon)^n} = \frac{(-1)^{n-1} i d \Gamma\left(n - \frac{d}{2} - 1\right)}{(4\pi)^{d/2} 2 \Gamma(n)} (Q^2)^{(-n+\frac{d}{2}+1)}, \\ I_{2,n} &= \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{p^4}{(p^2 - Q^2 + i\varepsilon)^n} = \frac{(-1)^n i d(d+2) \Gamma\left(n - \frac{d}{2} - 2\right)}{(4\pi)^{d/2} 4 \Gamma(n)} (Q^2)^{(-n+\frac{d}{2}+2)}. \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

A partir de (D.2) e (D.6), decorre que

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{p^\mu p^\nu}{(p^2 - Q^2 + i\varepsilon)^n} &= \frac{\eta^{\mu\nu} (-1)^{n-1} i \Gamma\left(n - \frac{d}{2} - 1\right)}{2 (4\pi)^{d/2} \Gamma(n)} (Q^2)^{(-n+\frac{d}{2}+1)}, \\ \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{p^\mu p^\nu p^\alpha p^\beta}{(p^2 - Q^2 + i\varepsilon)^n} &= \frac{\eta^{\mu\nu} \eta^{\alpha\beta} + \eta^{\mu\alpha} \eta^{\nu\beta} + \eta^{\mu\beta} \eta^{\nu\alpha}}{4} \frac{(-1)^n i \Gamma\left(n - \frac{d}{2} - 2\right)}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(n)} (Q^2)^{(-n+\frac{d}{2}+2)}. \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

Para manipular denominadores nas integrais de Feynman, usa-se a denominada parametrização de Feynman, que, de modo geral, tem a forma

$$\prod_i \frac{1}{A_i^{\alpha_i}} = \frac{\Gamma(\sum_i \alpha_i)}{\prod_i \Gamma(\alpha_i)} \int_0^1 \prod_i (dx_i x_i^{\alpha_i-1}) \frac{\delta(1 - \sum_i x_i)}{(\sum_i x_i A_i)^{\sum_i \alpha_i}}. \quad (\text{D.8})$$

Desta expressão seguem-se as seguintes fórmulas mais específicas

$$\begin{aligned} \frac{1}{AB} &= \int_0^1 dx \frac{1}{[xA + (1-x)B]^2}, \\ \frac{1}{ABC} &= 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{1}{[xA + yB + (1-x-y)C]^3}. \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

A seguinte relação é universal nos cálculos dos diagramas de Feynman por regularização

dimensional

$$\mu^{4-d} \frac{(Q^2)^{(-n+\frac{d}{2}+m)}}{(4\pi)^{d/2}} = \frac{(Q^2)^{(-n+2+m)}}{(4\pi)^2} \left[1 - \frac{\epsilon}{2} \ln \frac{Q^2}{4\pi\mu^2} \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (\text{D.10})$$

onde usamos³⁷ $d = 4 - \epsilon$.

A expansão de Taylor da função Γ em torno de $\epsilon \rightarrow 0$, tem a forma [200]:

$$\begin{aligned} \Gamma\left(n+1+\frac{\epsilon}{2}\right) &= n! \left\{ 1 + \frac{\epsilon}{2} \psi(n+1) + \frac{\epsilon^2}{8} [\psi'(n+1) + \psi(n+1)^2] + \mathcal{O}(\epsilon^3) \right\}, \\ \Gamma\left(-n+\frac{\epsilon}{2}\right) &= \frac{(-1)^n}{n!} \left\{ \frac{2}{\epsilon} + \psi(n+1) + \frac{\epsilon}{4} \left[\frac{\pi^2}{3} + \psi(n+1)^2 - \psi'(n+1) \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

onde

$$\psi(n) = -\gamma_E + \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{l}, \quad \psi'(n) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{l^2}. \quad (\text{D.12})$$

D.2 Matrizes- γ : propriedades algébricas em d dimensões

Seguem algumas propriedades algébricas das matrizes- γ utilizadas nesta tese:

$$\begin{aligned} \gamma_\rho \gamma^\alpha \gamma^\rho &= (2-d) \gamma^\alpha, \\ \gamma_\rho \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\rho &= 2\gamma^\beta \gamma^\alpha - (2-d) \gamma^\alpha \gamma^\beta, \\ \gamma_\rho \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\lambda \gamma^\rho &= -2\gamma^\lambda \gamma^\beta \gamma^\alpha - (d-4) \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\lambda, \\ \gamma_\rho \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma^\rho &= 2(\gamma^\sigma \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\lambda + \gamma^\lambda \gamma^\beta \gamma^\alpha \gamma^\sigma) - (d-4) \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\lambda \gamma^\sigma. \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

³⁷ Usamos também a relação $a^x = e^{x \ln a} = 1 + x \ln a + \dots$

APÊNDICE E – Termos de vácuo: EDQ estendida

Iremos agora discutir a ação de vácuo da EDQ estendida, *i.e.*, a ação que leva em conta somente os termos dependentes das fontes. Desde que essa ação não interfere na renormalização das fontes, ou no conteúdo dinâmico do modelo, essa discussão não influencia nos resultados obtidos até agora. Contudo, não descreveremos aqui todos os termos de vácuo. Apresentaremos aqui somente os termos mais sutis que demandam uma análise cuidadosa. Assim, para a ação de vácuo, temos

$$\begin{aligned}
\Sigma_V &= \int d^4x \left(\alpha_1 \bar{A}_\mu \bar{A}^\mu \bar{A}_\nu \bar{A}^\nu + \alpha_2 m \bar{A}_\mu \bar{A}^\mu \bar{A}_\nu E^\nu + \alpha_3 m^2 \bar{A}_\mu \bar{A}^\mu E_\mu E^\mu + \alpha_4 m^2 \bar{A}_\mu \bar{A}_\nu E^\mu E^\nu + \right. \\
&+ \alpha_5 m^3 \bar{A}_\mu E^\mu E_\nu E^\nu + \alpha_6 m^4 E_\mu E^\mu E_\nu E^\nu \left. \right) + s \int d^4x \left(\zeta \lambda_{\mu\nu\alpha} J^{\mu\beta\gamma} J^\nu_{\beta\kappa} J_\gamma^{\kappa\alpha} + \right. \\
&+ \vartheta_1 \bar{\kappa}_{\mu\nu\alpha\beta} \lambda^{\mu\rho\omega} J^\nu_{\rho\sigma} J^\alpha_{\omega\delta} J^{\beta\sigma\delta} + \vartheta_2 T_{\mu\nu\alpha\beta}{}^{\theta\gamma} C_{\theta\gamma} \lambda^{\mu\rho\omega} J^\nu_{\rho\sigma} J^\alpha_{\omega\delta} J^{\beta\sigma\delta} + \\
&+ \left. \vartheta_3 T_{\mu\nu\alpha\beta}{}^{\tau\zeta} \eta^{\gamma\xi} \bar{\kappa}_{\tau\gamma\zeta\xi} \lambda^{\mu\rho\omega} J^\nu_{\rho\sigma} J^\alpha_{\omega\delta} J^{\beta\sigma\delta} \right) , \\
&= \int d^4x \left(\alpha_1 \bar{A}_\mu \bar{A}^\mu \bar{A}_\nu \bar{A}^\nu + \alpha_2 m \bar{A}_\mu \bar{A}^\mu \bar{A}_\nu E^\nu + \alpha_3 m^2 \bar{A}_\mu \bar{A}^\mu E_\mu E^\mu + \alpha_4 m^2 \bar{A}_\mu \bar{A}_\nu E^\mu E^\nu + \right. \\
&+ \alpha_5 m^3 \bar{A}_\mu E^\mu E_\nu E^\nu + \alpha_6 m^4 E_\mu E^\mu E_\nu E^\nu \left. \right) + \int d^4x \left(\zeta J_{\mu\nu\alpha} J^{\mu\beta\gamma} J^\nu_{\beta\kappa} J_\gamma^{\kappa\alpha} + \right. \\
&+ \vartheta_1 \bar{\kappa}_{\mu\nu\alpha\beta} J^{\mu\rho\omega} J^\nu_{\rho\sigma} J^\alpha_{\omega\delta} J^{\beta\sigma\delta} + \vartheta_2 T_{\mu\nu\alpha\beta}{}^{\theta\gamma} C_{\theta\gamma} J^{\mu\rho\omega} J^\nu_{\rho\sigma} J^\alpha_{\omega\delta} J^{\beta\sigma\delta} + \\
&+ \left. \vartheta_3 T_{\mu\nu\alpha\beta}{}^{\tau\zeta} \eta^{\gamma\xi} \bar{\kappa}_{\tau\gamma\zeta\xi} J^{\mu\rho\omega} J^\nu_{\rho\sigma} J^\alpha_{\omega\delta} J^{\beta\sigma\delta} \right) . \tag{E.1}
\end{aligned}$$

Os termos que dependem da massa do elétron são introduzidos a fim de garantir a estabilidade quântica do vácuo. Isto pode ser facilmente entendido pelo fato de que as fontes \bar{A}^μ e E^μ sofrem mistura sob correções quânticas. O mesmo pode ser dito sobre as fontes $\bar{\kappa}_{\mu\nu\alpha\beta}$ e $C_{\nu\mu}$.

No limite físico das fontes (4.8), a ação (E.1) reduz-se a

$$\begin{aligned}
\Sigma_{Vfis} &= \int d^4x \left(\alpha_1 a_\mu a^\mu a_\nu a^\nu + \alpha_2 m a_\mu a^\mu a_\nu e^\nu + \alpha_3 m^2 a_\mu a^\mu e_\mu e^\mu + \alpha_4 m^2 a_\mu a_\nu e^\mu e^\nu + \right. \\
&+ \alpha_5 m^3 a_\mu e^\mu e_\nu e^\nu + \alpha_6 m^4 e_\mu e^\mu e_\nu e^\nu + 6\zeta v^4 + (8\vartheta_3 - 2\vartheta_1) \kappa^{\alpha\mu\sigma} v_\alpha v_\sigma v^2 + \\
&+ \left. 8\vartheta_2 c^{\alpha\sigma} v_\alpha v_\sigma v^2 \right) , \tag{E.2}
\end{aligned}$$

que mostra o vácuo não-trivial do modelo. Agora podemos proceder como na Sec. 4.2 e procurar o contratermo mais geral compatível com as identidades de Ward mostradas em (4.21)

$$\begin{aligned}
\Sigma_V^{ct} &= \int d^4x \left(b_1 \alpha_1 \bar{A}_\mu \bar{A}^\mu \bar{A}_\nu \bar{A}^\nu + b_2 \alpha_2 m \bar{A}_\mu \bar{A}^\mu \bar{A}_\nu E^\nu + b_3 \alpha_3 m^2 \bar{A}_\mu \bar{A}^\mu E_\mu E^\mu + \right. \\
&+ \left. b_4 \alpha_4 m^2 \bar{A}_\mu \bar{A}_\nu E^\mu E^\nu + b_5 \alpha_5 m^3 \bar{A}_\mu E^\mu E_\nu E^\nu + b_6 \alpha_6 m^4 E_\mu E^\mu E_\nu E^\nu \right) + \mathcal{S}_\Sigma \tilde{\Delta}^{(-1)} . \tag{E.3}
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}^{(-1)} &= \int d^4x \left(b_7 \zeta \lambda_{\mu\nu\alpha} J^{\mu\beta\gamma} J^\nu_{\beta\kappa} J_\gamma^{\kappa\alpha} + b_8 \vartheta_1 \bar{\kappa}_{\mu\nu\alpha\beta} \lambda^{\mu\rho\omega} J^\nu_{\rho\sigma} J^\alpha_{\omega\delta} J^{\beta\sigma\delta} + \right. \\ &+ \left. b_9 \vartheta_2 T_{\mu\nu\alpha\beta}^{\theta\gamma} C_{\theta\gamma} \lambda^{\mu\rho\omega} J^\nu_{\rho\sigma} J^\alpha_{\omega\delta} J^{\beta\sigma\delta} + b_{10} \vartheta_3 T_{\mu\nu\alpha\beta}^{\tau\zeta} \eta^{\gamma\xi} \bar{\kappa}_{\tau\gamma\zeta\xi} \lambda^{\mu\rho\omega} J^\nu_{\rho\sigma} J^\alpha_{\omega\delta} J^{\beta\sigma\delta} \right). \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

É simples mostrar que o contratermo mais geral é

$$\begin{aligned} \Sigma_V^{ct} &= \int d^4x \left(b_1 \alpha_1 \bar{A}_\mu \bar{A}^\mu \bar{A}_\nu \bar{A}^\nu + b_2 \alpha_2 m \bar{A}_\mu \bar{A}^\mu \bar{A}_\nu E^\nu + b_3 \alpha_3 m^2 \bar{A}_\mu \bar{A}^\mu E_\mu E^\mu + \right. \\ &+ b_4 \alpha_4 m^2 \bar{A}_\mu \bar{A}_\nu E^\mu E^\nu + b_5 \alpha_5 m^3 \bar{A}_\mu E^\mu E_\nu E^\nu + b_6 \alpha_6 m^4 E_\mu E^\mu E_\nu E^\nu + \\ &+ b_7 \zeta J_{\mu\nu\alpha} J^{\mu\beta\gamma} J^\nu_{\beta\kappa} J_\gamma^{\kappa\alpha} + b_8 \vartheta_1 \bar{\kappa}_{\mu\nu\alpha\beta} J^{\mu\rho\omega} J^\nu_{\rho\sigma} J^\alpha_{\omega\delta} J^{\beta\sigma\delta} + \\ &+ \left. b_9 \vartheta_2 T_{\mu\nu\alpha\beta}^{\theta\gamma} C_{\theta\gamma} J^{\mu\rho\omega} J^\nu_{\rho\sigma} J^\alpha_{\omega\delta} J^{\beta\sigma\delta} + b_{10} \vartheta_3 T_{\mu\nu\alpha\beta}^{\tau\zeta} \eta^{\gamma\xi} \bar{\kappa}_{\tau\gamma\zeta\xi} J^{\mu\rho\omega} J^\nu_{\rho\sigma} J^\alpha_{\omega\delta} J^{\beta\sigma\delta} \right). \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

Para finalizar a renormalizabilidade do termo de vácuo, é necessário checar a estabilidade quântica do vácuo. Assim, temos que mostrar que a seguinte relação é possível

$$\Sigma_V[J, \xi] + \varepsilon \Sigma_V^{ct}[J, \xi] = \Sigma_V^0[J_0, \xi_0] + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \quad (\text{E.6})$$

onde os parâmetros não-renormalizados são definidos como

$$\xi_0 = Z_\xi \xi, \quad \xi \in \{\zeta, \alpha_i, \vartheta_j\}. \quad (\text{E.7})$$

Encontra-se, assim, as seguintes expressões para os fatores de renormalização:

$$\begin{aligned} Z_{\alpha_1} &= 1 + \varepsilon (b_1 - 4a_{15} + 4a_3), \\ Z_{\alpha_2} &= 1 + \varepsilon \left(b_2 - a_4 - 3a_{15} - a_{10} + 5a_3 - 4a_{16} \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right), \\ Z_{\alpha_3} &= 1 + \varepsilon \left(b_3 - 2a_4 - 2a_{15} - 2a_{10} + 6a_3 - a_{16} \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \right), \\ Z_{\alpha_4} &= 1 + \varepsilon \left(b_4 - 2a_4 - 2a_{15} - 2a_{10} + 6a_3 - 2a_{16} \frac{\alpha_2}{\alpha_4} \right), \\ Z_{\alpha_5} &= 1 + \varepsilon \left(b_5 - 3a_4 - a_{15} - 3a_{10} + 7a_3 - 2a_{16} \left(\frac{\alpha_3 + \alpha_4}{\alpha_5} \right) \right), \\ Z_{\alpha_6} &= 1 + \varepsilon \left(b_6 - 4a_4 + 4a_3 - a_{16} \frac{\alpha_5}{\alpha_6} \right), \\ Z_\zeta &= 1 + \varepsilon (b_7 + 4a_0), \\ Z_{\vartheta_1} &= 1 + \varepsilon (b_8 - a_1 + 5a_0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Z_{\vartheta_2} &= 1 + \varepsilon \left(b_9 - a_5 - a_6 + a_3 + 4a_0 - a_2 \left(\frac{\vartheta_1 - 4\vartheta_3}{\vartheta_2} \right) \right), \\
Z_{\vartheta_3} &= 1 + \varepsilon \left(b_{10} - a_1 + 5a_0 - a_{10} \frac{\alpha_2}{\alpha_3} \right).
\end{aligned} \tag{E.8}$$

A prova da renormalizabilidade de todos os possíveis termos de vácuo segue de forma análoga.

APÊNDICE F – Renormalização alternativa dos parâmetros

Foi apresentado na Sec. 6.3.3 a renormalização dos parâmetros relacionados aos termos de massa, vértices e termos de vácuo. Uma forma alternativa, mas equivalente, de apresentar a renormalização dos parâmetros adimensionais pode ser feita usando renormalização matricial. Isto acontece devido ao fato de que os termos de mistura entre as fontes induz, de uma forma natural, uma mistura entre seus respectivos parâmetros. Assim, podemos escrever

$$\begin{pmatrix} \alpha_{01} \\ \alpha_{02} \\ \alpha_{03} \\ \alpha_{04} \\ \alpha_{05} \end{pmatrix} = \mathcal{Z}_\alpha \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{pmatrix}. \quad (\text{F.1})$$

É encontrado que

$$\mathcal{Z}_\alpha = \mathbb{1} + \varepsilon \begin{pmatrix} a_{11} - 2a_7 + a_0 & -a_9 & -a_9 & 0 \\ -a_8 & a_{12} - a_7 - a_{10} + a_0 & 0 & -a_9 \\ -a_8 & 0 & a_{13} - a_7 - a_{10} + a_0 & -a_9 \\ 0 & -a_8 & -a_8 & a_{14} - 2a_{10} + a_0 \end{pmatrix}. \quad (\text{F.2})$$

E é possível generalizar esse método para as outras classes de parâmetros.

APÊNDICE G – Alguns resultados completos

No caso geral para um vetor de fundo tipo espaço, a terceira velocidade de grupo deve satisfazer a condição de causalidade quando $\beta > 0$ e

$$\begin{aligned} \alpha &\leq -\frac{1}{18} \left[3\beta + \sqrt{3} \left(\sqrt{\mathcal{A} + \mathcal{C}} + \sqrt{2\mathcal{A} - \mathcal{C} + \mathcal{D}} \right) \right] \cup \\ \alpha &\geq -\frac{1}{18} \left[3\beta + \sqrt{3} \left(\sqrt{\mathcal{A} + \mathcal{C}} - \sqrt{2\mathcal{A} - \mathcal{C} + \mathcal{D}} \right) \right] . \end{aligned} \quad (\text{G.1})$$

Ou, se $\beta < 0$, então

$$\alpha \geq -\frac{1}{18} \left[3\beta + \sqrt{3} \left(\sqrt{\mathcal{A} + \mathcal{C}} + \sqrt{2\mathcal{A} - \mathcal{C} + \mathcal{D}} \right) \right] , \quad (\text{G.2})$$

desde que

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \equiv \mathcal{A}(\beta, k_3, \mu) &= 8 \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 + 3\beta^2 , \\ \mathcal{B} \equiv \mathcal{B}(\beta, k_3, \mu) &= - \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 \beta^3 \left[8 \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^4 + 27\beta^2 - 3\sqrt{3}\beta \sqrt{16 \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^4 + 27\beta^2} \right] , \\ \mathcal{C} \equiv \mathcal{C}(\beta, k_3, \mu) &= 2 \left[\frac{4\beta^2}{\mathcal{B}(\beta, k_3, \mu)} \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 + \mathcal{B}(\beta, k_3, \mu) \right] , \\ \mathcal{D} \equiv \mathcal{D}(\beta, k_3, \mu) &= \frac{6\sqrt{3} \left[4 \left(\frac{k_3}{\mu} \right)^2 - \beta \right] \beta^2}{\sqrt{\mathcal{A}(\beta, k_3, \mu) + \mathcal{B}(\beta, k_3, \mu)}} . \end{aligned} \quad (\text{G.3})$$

Devido ao intervalo extensivo, optamos tornar a análise mais fácil quando escolhemos a condição $\beta = -3\alpha/2$ com $\alpha > 0$.

Para a quarta velocidade de grupo os parâmetros devem simplesmente satisfazer

$$\beta < 0 \cap \alpha \geq -\frac{1}{18} \left[3\beta + \sqrt{3} \left(\sqrt{\mathcal{A} + \mathcal{C}} - \sqrt{2\mathcal{A} - \mathcal{C} + \mathcal{D}} \right) \right] . \quad (\text{G.4})$$

Um intervalo mais completo para a quarta velocidade de grupo satisfazendo aquela condição de causalidade pode ser resumido na interseção das desigualdades (G.1), (G.2) e (G.4), *i.e.*,

$$-\frac{1}{16} (1 + 24\alpha) \leq \beta < 0 \cap \alpha \geq -\frac{1}{18} \left[3\beta + \sqrt{3} \left(\sqrt{\mathcal{A} + \mathcal{C}} - \sqrt{2\mathcal{A} - \mathcal{C} + \mathcal{D}} \right) \right] . \quad (\text{G.5})$$

REFERÊNCIAS

- [1] C. Quigg, “Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions: Second Edition,”
- [2] H. K. Quang and X. Y. Pham, “Elementary particles and their interactions: concepts and phenomena,” Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1998. 661 p.
- [3] S. Weinberg, “A Model of Leptons,” *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1264 (1967).
- [4] S. L. Glashow, J. Iliopoulos and L. Maiani, “Weak Interactions with Lepton-Hadron Symmetry,” *Phys. Rev. D* **2**, 1285 (1970).
- [5] J. S. Schwinger, “Quantum electrodynamics. I A covariant formulation,” *Phys. Rev.* **74**, 1439 (1948).
- [6] R. P. Feynman, “The Theory of positrons,” *Phys. Rev.* **76**, 749 (1949).
- [7] R. P. Feynman, “Mathematical formulation of the quantum theory of electromagnetic interaction,” *Phys. Rev.* **80**, 440 (1950).
- [8] D. J. Gross and F. Wilczek, “Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories,” *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1343 (1973).
- [9] H. D. Politzer, “Reliable Perturbative Results for Strong Interactions?,” *Phys. Rev. Lett.* **30**, 1346 (1973).
- [10] R. U. Sexl and H. K. Urbantke, “Relativity Groups, Particles. Special Theory of Relativity as the Basis of Field and Elementary Particle Physics,” Wien 1976, 301p
- [11] V. De Sabbata and M. Gasperini, “Introduction To Gravity,” Singapore, Singapore: World Scientific (1985) 346p
- [12] E. Noether, “Invariant Variation Problems,” *Gott. Nachr.* **1918**, 235 (1918) [*Transp. Theory Statist. Phys.* **1**, 186 (1971)] [physics/0503066].
- [13] V. Bargmann, “Irreducible unitary representations of the Lorentz group,” *Annals Math.* **48**, 568 (1947).
- [14] V. Bargmann and E. P. Wigner, “Group Theoretical Discussion of Relativistic Wave Equations,” *Proc. Nat. Acad. Sci.* **34**, 211 (1948).
- [15] R. Jost, “A remark on the C.T.P. theorem,” *Helv. Phys. Acta* **30**, 409 (1957).

- [16] R. F. Streater and A. S. Wightman, “PCT, spin and statistics, and all that,” Princeton, USA: Princeton Univ. Pr. (2000) 207 p.
- [17] R. Haag, “Local quantum physics: Fields, particles, algebras,” Berlin, Germany: Springer (1992) 356 p. (Texts and monographs in physics)
- [18] O. W. Greenberg, “CPT violation implies violation of Lorentz invariance,” Phys. Rev. Lett. **89**, 231602 (2002) [hep-ph/0201258].
- [19] C. Becchi, A. Rouet and R. Stora, “Renormalization of Gauge Theories,” Annals Phys. **98**, 287 (1976).
- [20] I. V. Tyutin, “Gauge Invariance in Field Theory and Statistical Physics in Operator Formalism,” Lebedev Institute preprint No. 39 (1975). arXiv:0812.0580 [hep-th].
- [21] T. Kugo and I. Ojima, “Local Covariant Operator Formalism of Nonabelian Gauge Theories and Quark Confinement Problem,” Prog. Theor. Phys. Suppl. **66**, 1 (1979).
- [22] Y. Nambu, “Quasiparticles and Gauge Invariance in the Theory of Superconductivity,” Phys. Rev. **117**, 648 (1960).
- [23] J. Goldstone, “Field Theories with Superconductor Solutions,” Nuovo Cim. **19**, 154 (1961).
- [24] J. Goldstone, A. Salam and S. Weinberg, “Broken Symmetries,” Phys. Rev. **127**, 965 (1962).
- [25] P. W. Higgs, “Broken symmetries, massless particles and gauge fields,” Phys. Lett. **12**, 132 (1964).
- [26] P. W. Higgs, “Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons,” Phys. Rev. Lett. **13**, 508 (1964).
- [27] F. Englert and R. Brout, “Broken Symmetry and the Mass of Gauge Vector Mesons,” Phys. Rev. Lett. **13**, 321 (1964).
- [28] G. S. Guralnik, C. R. Hagen and T. W. B. Kibble, “Global Conservation Laws and Massless Particles,” Phys. Rev. Lett. **13**, 585 (1964).
- [29] R. A. Bertlmann, “Anomalies in quantum field theory,” Oxford, UK: Clarendon (1996) 566 p. (International series of monographs on physics: 91)
- [30] A. Browman, J. DeWire, B. Gittelmann, K. M. Hanson, D. Larson, E. Loh and R. Lewis, “The Decay Width of the Neutral pi Meson,” Phys. Rev. Lett. **33**, 1400 (1974).

- [31] D. Colladay and V. A. Kostelecky, “Lorentz violating extension of the standard model,” *Phys. Rev. D* **58**, 116002 (1998) [hep-ph/9809521].
- [32] V. A. Kostelecky and S. Samuel, “Spontaneous Breaking of Lorentz Symmetry in String Theory,” *Phys. Rev. D* **39**, 683 (1989).
- [33] H. Lehmann, K. Symanzik and W. Zimmermann, “On the formulation of quantized field theories,” *Nuovo Cim.* **1**, 205 (1955).
- [34] C. Itzykson and J. B. Zuber, “*Quantum Field Theory*,” New York, Usa: Mcgraw-hill (1980) 705 P.(International Series In Pure and Applied Physics)
- [35] R. E. Cutkosky, “Singularities and discontinuities of Feynman amplitudes,” *J. Math. Phys.* **1**, 429 (1960).
- [36] M. J. G. Veltman, “Unitarity and causality in a renormalizable field theory with unstable particles,” *Physica* **29**, 186 (1963).
- [37] M. Veltman, in *Methods in Field Theory*, edited by R. Bailian and J. Zinn-Justin (World Scientific, Singapore, 1981).
- [38] C. A. Hernaski, *Novos Cenários Efetivos para a Gravitação Quântica: Torção Dinâmica e Grávitons Massivos na Escala do LHC*, Tese de Doutorado (CBPF), (2011).
- [39] A. K. Das, “Field theory: A Path integral approach,” *World Sci. Lect. Notes Phys.* **52**, 1 (1993).
- [40] G. Källén, “On the magnitude of the renormalization constants in quantum electrodynamics,” *Kong. Dan. Vid. Sel. Mat. Fys. Med.* **27**, no. 12, 1 (1953).
- [41] H. Lehmann, “On the Properties of propagation functions and renormalization constants of quantized fields,” *Nuovo Cim.* **11**, 342 (1954).
- [42] S. Weinberg, “High-energy behavior in quantum field theory,” *Phys. Rev.* **118**, 838 (1960).
- [43] W. Pauli and F. Villars, “On the Invariant regularization in relativistic quantum theory,” *Rev. Mod. Phys.* **21**, 434 (1949).
- [44] C. G. Bollini and J. J. Giambiagi, “Lowest order divergent graphs in nu-dimensional space,” *Phys. Lett. B* **40**, 566 (1972).
- [45] G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, “Regularization and Renormalization of Gauge Fields,” *Nucl. Phys. B* **44** (1972) 189.

- [46] G. Bonneau, “Field Redefinition and On-shell Renormalization,” Nucl. Phys. B **221**, 178 (1983).
- [47] N. N. Bogoliubov and O. S. Parasiuk, “Über die Multiplikation der Kausalfunktionen in der Quantentheorie der Felder ,” Acta. Math. **185**, 227 (1957).
- [48] K. Hepp, “Proof of the Bogolyubov-Parasiuk theorem on renormalization,” Commun. Math. Phys. **2**, 301 (1966). doi:10.1007/BF01773358
- [49] W. Zimmermann, “Convergence of Bogolyubov’s method of renormalization in momentum space,” Commun. Math. Phys. **15**, 208 (1969) [Lect. Notes Phys. **558**, 217 (2000)].
- [50] J. H. Lowenstein and W. Zimmermann, “On the Formulation of Theories with Zero Mass Propagators,” Nucl. Phys. B **86**, 77 (1975).
- [51] O. Piguet and A. Rouet, “Symmetries in Perturbative Quantum Field Theory,” Phys. Rept. **76**, 1 (1981).
- [52] O. Piguet, S. P. Sorella and, *Algebraic renormalization: Perturbative renormalization, symmetries and anomalies*, (Springer, Berlin, 1995).
- [53] W. Zimmermann, “Composite operators in the perturbation theory of renormalizable interactions,” Annals Phys. **77**, 536 (1973) [Lect. Notes Phys. **558**, 244 (2000)].
- [54] L. H. Ryder, “Quantum Field Theory,” ISBN-9780521237642.
- [55] T. E. Clark and J. H. Lowenstein, “Generalization of Zimmermann’s Normal-Product Identity,” Nucl. Phys. B **113**, 109 (1976).
- [56] Y. M. P. Lam, “Equivalence theorem on Bogolyubov-Parasiuk-Hepp-Zimmermann renormalized Lagrangian field theories,” Phys. Rev. D **7**, 2943 (1973).
- [57] Y. M. P. Lam, “Perturbation Lagrangian theory for scalar fields: Ward-Takahasi identity and current algebra,” Phys. Rev. D **6**, 2145 (1972).
- [58] J. H. Lowenstein, “Differential vertex operations in Lagrangian field theory,” Commun. Math. Phys. **24**, 1 (1971).
- [59] E. R. Speer, “Renormalization and ward identities using complex space-time dimension,” J. Math. Phys. **15**, 1 (1974).
- [60] M. C. Bergere and Y. M. P. Lam, “Bogolyubov-Parasiuk Theorem in the alpha Parametric Representation,” J. Math. Phys. **17**, 1546 (1976).

- [61] P. Breitenlohner and D. Maison, “Dimensional Renormalization and the Action Principle,” *Commun. Math. Phys.* **52**, 11 (1977).
- [62] P. Breitenlohner and D. Maison, “Dimensionally Renormalized Green’s Functions for Theories with Massless Particles. 1.,” *Commun. Math. Phys.* **52**, 39 (1977).
- [63] P. Breitenlohner and D. Maison, “Dimensionally Renormalized Green’s Functions for Theories with Massless Particles. 2.,” *Commun. Math. Phys.* **52**, 55 (1977).
- [64] M. Duetsch and K. Fredenhagen, *Commun. Math. Phys.* **219**, 5 (2001) [hep-th/0001129].
- [65] P. A. Grassi, T. Hurth and M. Steinhauser, “Practical algebraic renormalization,” *Annals Phys.* **288**, 197 (2001) [hep-ph/9907426].
- [66] N. Vandersickel, “A Study of the Gribov-Zwanziger action: from propagators to glueballs,” arXiv:1104.1315 [hep-th].
- [67] D. Colladay and V. A. Kostelecky, “CPT violation and the standard model,” *Phys. Rev. D* **55**, 6760 (1997) [hep-ph/9703464].
- [68] V. A. Kostelecky and R. Potting, “CPT, strings, and meson factories,” *Phys. Rev. D* **51**, 3923 (1995) [hep-ph/9501341].
- [69] V. A. Kostelecky, “Gravity, Lorentz violation, and the standard model,” *Phys. Rev. D* **69**, 105009 (2004) [hep-th/0312310].
- [70] V. A. Kostelecky and R. Potting, “CPT and strings,” *Nucl. Phys. B* **359**, 545 (1991).
- [71] V. A. Kostelecky and S. Samuel, “Photon and Graviton Masses in String Theories,” *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1811 (1991).
- [72] V. A. Kostelecky and R. Potting, “Expectation values, Lorentz invariance, and CPT in the open bosonic string,” *Phys. Lett. B* **381**, 89 (1996) [hep-th/9605088].
- [73] V. A. Kostelecky and R. Potting, “Analytical construction of a nonperturbative vacuum for the open bosonic string,” *Phys. Rev. D* **63**, 046007 (2001) [hep-th/0008252].
- [74] Z. Guralnik, R. Jackiw, S. Y. Pi and A. P. Polychronakos, “Testing noncommutative QED, constructing noncommutative MHD,” *Phys. Lett. B* **517**, 450 (2001) [hep-th/0106044].
- [75] S. M. Carroll, J. A. Harvey, V. A. Kostelecky, C. D. Lane and T. Okamoto, “Non-commutative field theory and Lorentz violation,” *Phys. Rev. Lett.* **87**, 141601 (2001) [hep-th/0105082].

- [76] J. M. Carmona, J. L. Cortes, J. Gamboa and F. Mendez, “Noncommutativity in field space and Lorentz invariance violation,” *Phys. Lett. B* **565**, 222 (2003) [hep-th/0207158].
- [77] C. E. Carlson, C. D. Carone and R. F. Lebed, “Supersymmetric noncommutative QED and Lorentz violation,” *Phys. Lett. B* **549**, 337 (2002) [hep-ph/0209077].
- [78] M. M. Sheikh-Jabbari, “C, P, and T invariance of noncommutative gauge theories,” *Phys. Rev. Lett.* **84**, 5265 (2000) [hep-th/0001167].
- [79] J. Alfaro, M. Reyes, H. A. Morales-Tecotl and L. F. Urrutia, “On alternative approaches to Lorentz violation invariance in $\text{la}\tilde{\text{c}}\text{o}$ quantum gravity inspired models,” *Phys. Rev. D* **70**, 084002 (2004) [gr-qc/0404113].
- [80] M. S. Berger, “Superfield realizations of Lorentz and CPT violation,” *Phys. Rev. D* **68**, 115005 (2003) [hep-th/0308036].
- [81] M. S. Berger and V. A. Kostelecky, “Supersymmetry and Lorentz violation,” *Phys. Rev. D* **65**, 091701 (2002) [hep-th/0112243].
- [82] S. Groot Nibbelink and M. Pospelov, “Lorentz violation in supersymmetric field theories,” *Phys. Rev. Lett.* **94**, 081601 (2005) [hep-ph/0404271].
- [83] C. P. Burgess, J. M. Cline, E. Filotas, J. Matias and G. D. Moore, “Loop generated bounds on changes to the graviton dispersion relation,” *JHEP* **0203**, 043 (2002) [hep-ph/0201082].
- [84] J. D. Bjorken, “Cosmology and the standard model,” *Phys. Rev. D* **67**, 043508 (2003) [hep-th/0210202].
- [85] H. Belich, T. Costa-Soares, M. A. Santos and M. T. D. Orlando, “Violação da Simetria de Lorentz,” *Rev. Bras. Ensino Fís.*, São Paulo, v. 29, n. 1, p. 57-64, 2007.
- [86] J. D. Tasson, “What Do We Know About Lorentz Invariance?,” *Rept. Prog. Phys.* **77**, 062901 (2014) [arXiv:1403.7785 [hep-ph]].
- [87] C. N. Yang and R. L. Mills, “Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance,” *Phys. Rev.* **96**, 191 (1954).
- [88] R. Bluhm and V. A. Kostelecky, “Spontaneous Lorentz violation, Nambu-Goldstone modes, and gravity,” *Phys. Rev. D* **71**, 065008 (2005) [hep-th/0412320].
- [89] R. Bluhm, S. H. Fung and V. A. Kostelecky, “Spontaneous Lorentz and Diffeomorphism Violation, Massive Modes, and Gravity,” *Phys. Rev. D* **77**, 065020 (2008)

- [90] V. A. Kostelecky and R. Potting, “Gravity from local Lorentz violation,” *Gen. Rel. Grav.* **37**, 1675 (2005) [*Int. J. Mod. Phys. D* **14**, 2341 (2005)] [gr-qc/0510124].
- [91] V. A. Kostelecky and R. Potting, “Gravity from spontaneous Lorentz violation,” *Phys. Rev. D* **79**, 065018 (2009) [arXiv:0901.0662 [gr-qc]].
- [92] R. Lehnert, “Threshold analyses and Lorentz violation,” *Phys. Rev. D* **68**, 085003 (2003) [gr-qc/0304013].
- [93] R. Bluhm, “Overview of the SME: Implications and phenomenology of Lorentz violation,” *Lect. Notes Phys.* **702**, 191 (2006) [hep-ph/0506054].
- [94] V. A. Kostelecky and N. Russell, “Data Tables for Lorentz and CPT Violation,” *Rev. Mod. Phys.* **83**, 11 (2011) [arXiv:0801.0287 [hep-ph]].
- [95] D. Mattingly, “Modern tests of Lorentz invariance,” *Living Rev. Rel.* **8**, 5 (2005) [gr-qc/0502097].
- [96] S. Liberati and L. Maccione, “Lorentz Violation: Motivation and new constraints,” *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **59**, 245 (2009) [arXiv:0906.0681 [astro-ph.HE]].
- [97] S. Liberati, “Lorentz symmetry breaking: phenomenology and constraints,” *J. Phys. Conf. Ser.* **631**, no. 1, 012011 (2015).
- [98] V. A. Kostelecky and R. Lehnert, “Stability, causality, and Lorentz and CPT violation,” *Phys. Rev. D* **63**, 065008 (2001) [hep-th/0012060].
- [99] S. M. Carroll, G. B. Field and R. Jackiw, “Limits on a Lorentz and Parity Violating Modification of Electrodynamics,” *Phys. Rev. D* **41**, 1231 (1990).
- [100] C. Adam and F. R. Klinkhamer, “Causality and CPT violation from an Abelian Chern-Simons like term,” *Nucl. Phys. B* **607**, 247 (2001) [hep-ph/0101087].
- [101] C. Adam and F. R. Klinkhamer, “Causality and radiatively induced CPT violation,” *Phys. Lett. B* **513**, 245 (2001) [hep-th/0105037].
- [102] A. P. Baeta Scarpelli, H. Belich, J. L. Boldo and J. A. Helayel-Neto, “Aspects of causality and unitarity and comments on vortexlike configurations in an abelian model with a Lorentz breaking term,” *Phys. Rev. D* **67**, 085021 (2003).
- [103] V. A. Kostelecky and M. Mewes, “Signals for Lorentz violation in electrodynamics,” *Phys. Rev. D* **66**, 056005 (2002) [hep-ph/0205211].
- [104] R. Casana, M. M. Ferreira, Jr, A. R. Gomes and P. R. D. Pinheiro, “Gauge propagator and physical consistency of the CPT-even part of the Standard Model Extension,” *Phys. Rev. D* **80**, 125040 (2009) [arXiv:0909.0544 [hep-th]].

- [105] R. Casana, M. M. Ferreira, A. R. Gomes and F. E. P. dos Santos, “Feynman propagator for the nonbirefringent CPT-even electrodynamics of the Standard Model Extension,” *Phys. Rev. D* **82**, 125006 (2010) [arXiv:1010.2776 [hep-th]].
- [106] M. Schreck, “Analysis of the consistency of parity-odd nonbirefringent modified Maxwell theory,” *Phys. Rev. D* **86**, 065038 (2012) [arXiv:1111.4182 [hep-th]].
- [107] G. Gabadadze and L. Grisa, “Lorentz-violating massive gauge and gravitational fields,” *Phys. Lett. B* **617**, 124 (2005) [hep-th/0412332].
- [108] H. G. Fargnoli, L. C. T. Brito, A. P. B. Scarpelli and M. Sampaio, “Dual embedding of extended models with a Lorentz-breaking mass term,” *Phys. Rev. D* **90**, no. 8, 085016 (2014) [arXiv:1407.6904 [hep-th]].
- [109] A. P. Baeta Scarpelli and J. A. Helayel-Neto, “A Lorentz-violating SO(3) model: Discussing the unitarity, causality and the ’t Hooft-Polyakov monopoles,” *Phys. Rev. D* **73**, 105020 (2006) [hep-th/0601015].
- [110] V. A. Kostelecky, C. D. Lane and A. G. M. Pickering, “One loop renormalization of Lorentz violating electrodynamics,” *Phys. Rev. D* **65**, 056006 (2002)
- [111] O. M. Del Cima, D. H. T. Franco, A. H. Gomes, J. M. Fonseca and O. Piguet, “All orders renormalizability of a Lorentz and CPT violating quantum electrodynamics,” *Phys. Rev. D* **85**, 065023 (2012)
- [112] G. de Berredo-Peixoto and I. L. Shapiro, “On the renormalization of CPT/Lorentz violating QED in curved space,” *Phys. Lett. B* **642**, 153 (2006) [hep-th/0607109].
- [113] D. Anselmi and M. Halat, “Renormalization of Lorentz violating theories,” *Phys. Rev. D* **76**, 125011 (2007) [arXiv:0707.2480 [hep-th]].
- [114] D. Anselmi, “Weighted power counting and chiral dimensional regularization,” *Phys. Rev. D* **89**, no. 12, 125024 (2014) [arXiv:1405.3110 [hep-th]].
- [115] D. Anselmi and E. Ciuffoli, “Renormalization Of High-Energy Lorentz Violating Four Fermion Models,” *Phys. Rev. D* **81**, 085043 (2010) [arXiv:1002.2704 [hep-ph]].
- [116] D. Anselmi and M. Taiuti, “Renormalization Of High-Energy Lorentz Violating QED,” *Phys. Rev. D* **81**, 085042 (2010) [arXiv:0912.0113 [hep-ph]].
- [117] D. Colladay and P. McDonald, “One-Loop Renormalization of Pure Yang-Mills with Lorentz Violation,” *Phys. Rev. D* **75**, 105002 (2007)
- [118] D. Colladay and P. McDonald, “One-Loop Renormalization of the Electroweak Sector with Lorentz Violation,” *Phys. Rev. D* **79**, 125019 (2009)

- [119] D. Colladay and P. McDonald, “One-Loop Renormalization of QCD with Lorentz Violation,” *Phys. Rev. D* **77**, 085006 (2008)
- [120] J. M. Chung and P. Oh, “Lorentz and CPT violating Chern-Simons term in the derivative expansion of QED,” *Phys. Rev. D* **60**, 067702 (1999) [hep-th/9812132].
- [121] J. M. Chung, “Lorentz and CPT violating Chern-Simons term in the formulation of functional integral,” *Phys. Rev. D* **60**, 127901 (1999) [hep-th/9904037].
- [122] J. M. Chung, “Radiatively induced Lorentz and CPT violating Chern-Simons term in QED,” *Phys. Lett. B* **461**, 138 (1999) [hep-th/9905095].
- [123] R. Jackiw and V. A. Kostelecky, “Radiatively induced Lorentz and CPT violation in electrodynamics,” *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3572 (1999) [hep-ph/9901358].
- [124] M. Perez-Victoria, “Exact calculation of the radiatively induced Lorentz and CPT violation in QED,” *Phys. Rev. Lett.* **83**, 2518 (1999) [hep-th/9905061].
- [125] W. F. Chen, “Understanding radiatively induced Lorentz CPT violation in differential regularization,” *Phys. Rev. D* **60**, 085007 (1999) [hep-th/9903258].
- [126] M. Chaichian, W. F. Chen and R. Gonzalez Felipe, “Radiatively induced Lorentz and CPT violation in Schwinger constant field approximation,” *Phys. Lett. B* **503**, 215 (2001) [hep-th/0010129].
- [127] L. H. Chan, “Induced Lorentz violating Chern-Simons term in QED and anomalous contributions to effective action expansions,” hep-ph/9907349.
- [128] S. R. Coleman and S. L. Glashow, “High-energy tests of Lorentz invariance,” *Phys. Rev. D* **59**, 116008 (1999) [hep-ph/9812418].
- [129] R. Jackiw, “When radiative corrections are finite but undetermined,” *Int. J. Mod. Phys. B* **14**, 2011 (2000) [hep-th/9903044].
- [130] M. Perez-Victoria, “Physical (ir)relevance of ambiguities to Lorentz and CPT violation in QED,” *JHEP* **0104**, 032 (2001) [hep-th/0102021].
- [131] G. Bonneau, “Regularization: Many recipes, but a unique principle, Ward identities and normalization conditions: The Case of CPT violation in QED,” *Nucl. Phys. B* **593**, 398 (2001) [hep-th/0008210].
- [132] G. Bonneau, “Extended QED with CPT violation: Clarifying some controversies,” *Nucl. Phys. B* **764**, 83 (2007) [hep-th/0611009].

- [133] O. M. Del Cima, J. M. Fonseca, D. H. T. Franco and O. Piguet, “Lorentz and CPT violation in QED revisited: A Missing analysis,” *Phys. Lett. B* **688**, 258 (2010) [arXiv:0912.4392 [hep-th]].
- [134] A. P. Baeta Scarpelli, M. Sampaio, M. C. Nemes and B. Hiller, “Gauge invariance and the CPT and Lorentz violating induced Chern-Simons-like term in extended QED,” *Eur. Phys. J. C* **56**, 571 (2008) [arXiv:0804.3537 [hep-th]].
- [135] F. A. Brito, J. R. Nascimento, E. Passos and A. Y. Petrov, “The Ambiguity-free four-dimensional Lorentz-breaking Chern-Simons action,” *Phys. Lett. B* **664**, 112 (2008) [arXiv:0709.3090 [hep-th]].
- [136] O. A. Battistel and G. Dallabona, “Role of ambiguities and gauge invariance in the calculation of the radiatively induced Chern-Simons shift in extended QED,” *J. Phys. G* **27**, L53 (2001) [*Nucl. Phys. B* **610**, 316 (2001)] [hep-th/0012181].
- [137] W. F. Chen, “Issues on radiatively induced Lorentz and CPT violation in quantum electrodynamics,” *AIP Conf. Proc.* **601**, 242 (2001) [hep-th/0106035].
- [138] B. Altschul, “Failure of gauge invariance in the nonperturbative formulation of massless Lorentz violating QED,” *Phys. Rev. D* **69**, 125009 (2004) [hep-th/0311200].
- [139] B. Altschul, “Radiatively induced Lorentz-violating photon masses,” *Phys. Rev. D* **73**, 036005 (2006) [hep-th/0512090].
- [140] M. Gomes, J. R. Nascimento, E. Passos, A. Y. Petrov and A. J. da Silva, “On the induction of the four-dimensional Lorentz-breaking non-Abelian Chern-Simons action,” *Phys. Rev. D* **76**, 047701 (2007) [arXiv:0704.1104 [hep-th]].
- [141] J. B. Araujo, R. Casana and M. M. Ferreira, “Constraining CPT-even and Lorentz-violating nonminimal couplings with the electron magnetic and electric dipole moments,” *Phys. Rev. D* **92**, no. 2, 025049 (2015) [arXiv:1505.05592 [hep-ph]].
- [142] J. B. Araujo, R. Casana and M. M. Ferreira, “General CPT-even dimension-five nonminimal couplings between fermions and photons yielding EDM and MDM,” *Phys. Lett. B* **760**, 302 (2016) [arXiv:1604.03577 [hep-ph]].
- [143] J. B. Araujo, R. Casana and M. M. Ferreira, “General Electromagnetic Nonminimal Couplings in the Dirac Equation,” arXiv:1607.08546 [hep-ph].
- [144] R. Casana, M. M. Ferreira, Jr, E. O. Silva, E. Passos and F. E. P. dos Santos, “New CPT-even and Lorentz-violating nonminimal coupling in the Dirac equation,” *Phys. Rev. D* **87**, no. 4, 047701 (2013) [arXiv:1212.6361].

- [145] R. Casana, M. M. Ferreira, R. V. Maluf and F. E. P. dos Santos, “Effects of a CPT-even and Lorentz-violating nonminimal coupling on the electron-positron scattering,” *Phys. Rev. D* **86**, 125033 (2012) [arXiv:1212.6230 [hep-th]].
- [146] H. Belich, E. O. Silva, M. M. Ferreira and M. T. D. Orlando, “Aharonov-Bohm-Casher Problem with a nonminimal Lorentz-violating coupling,” *Phys. Rev. D* **83**, 125025 (2011) [arXiv:1106.0789 [hep-th]].
- [147] R. Casana, M. M. Ferreira, Jr and M. R. O. Silva, “Parity-odd and CPT-even electrodynamics of the SME at Finite Temperature,” *Phys. Rev. D* **81**, 105015 (2010) [arXiv:0910.3709 [hep-th]].
- [148] R. Casana, M. M. Ferreira, Jr, J. S. Rodrigues and M. R. O. Silva, “Finite Temperature CPT-even Electrodynamics of the Standard Model Extension,” *Phys. Rev. D* **80**, 085026 (2009) [arXiv:0907.1924 [hep-th]].
- [149] A. Celeste, T. Mariz, J. R. Nascimento and A. Y. Petrov, “Higher-derivative Lorentz-breaking terms in extended QED at the finite temperature,” *Phys. Rev. D* **93**, no. 6, 065012 (2016) [arXiv:1602.02570 [hep-th]].
- [150] H. Belich, T. Mariz, J. R. Nascimento and A. Y. Petrov, “On one-loop corrections in the CPT-even extension of QED,” arXiv:1601.03600 [hep-th].
- [151] J. Leite, T. Mariz and W. Serafim, “The induced higher derivative Lorentz-violating Chern-Simons term at finite temperature,” *J. Phys. G* **40**, 075003 (2013).
- [152] J. Leite and T. Mariz, “Induced Lorentz-violating terms at finite temperature,” *Europhys. Lett.* **99**, 21003 (2012) [arXiv:1110.2127 [hep-th]].
- [153] T. Mariz, “Radiatively induced Lorentz-violating operator of mass dimension five in QED,” *Phys. Rev. D* **83**, 045018 (2011) [arXiv:1010.5013 [hep-th]].
- [154] J. C. Ward, “The scattering of light by light,” *Phys. Rev.* **77**, 293 (1950).
- [155] J. C. Ward, “An Identity in Quantum Electrodynamics,” *Phys. Rev.* **78**, 182 (1950).
- [156] Y. Takahashi, “On the generalized Ward identity,” *Nuovo Cim.* **6**, 371 (1957).
- [157] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, “An Introduction to quantum field theory,” Reading, USA: Addison-Wesley (1995) 842 p
- [158] W. H. Furry, “On Bound States and Scattering in Positron Theory,” *Phys. Rev.* **81**, 115 (1951).

- [159] T. R. S. Santos and R. F. Sobreiro, “Remarks on the renormalization properties of Lorentz and CPT violating quantum electrodynamics,” *Braz. J. Phys.* **46**, no. 4, 437 (2016) [arXiv:1502.06881 [hep-th]].
- [160] V. N. Gribov, “Quantization of Nonabelian Gauge Theories,” *Nucl. Phys. B* **139**, 1 (1978).
- [161] L. D. Faddeev and V. N. Popov, “Feynman Diagrams for the Yang-Mills Field,” *Phys. Lett. B* **25**, 29 (1967).
- [162] K. Symanzik, “Renormalizable models with simple symmetry breaking. 1. Symmetry breaking by a source term,” *Commun. Math. Phys.* **16**, 48 (1970).
- [163] A. D. Pereira and R. F. Sobreiro, “On the elimination of infinitesimal Gribov ambiguities in non-Abelian gauge theories,” *Eur. Phys. J. C* **73**, 2584 (2013)
- [164] D. Zwanziger, “Renormalizability of the critical limit of lattice gauge theory by BRS invariance,” *Nucl. Phys. B* **399**, 477 (1993).
- [165] D. Dudal, R. F. Sobreiro, S. P. Sorella and H. Verschelde, “The Gribov parameter and the dimension two gluon condensate in Euclidean Yang-Mills theories in the Landau gauge,” *Phys. Rev. D* **72**, 014016 (2005) [hep-th/0502183].
- [166] L. Baulieu and S. P. Sorella, “Soft breaking of BRST invariance for introducing non-perturbative infrared effects in a local and renormalizable way,” *Phys. Lett. B* **671**, 481 (2009) [arXiv:0808.1356 [hep-th]].
- [167] L. Baulieu, M. A. L. Capri, A. J. Gomez, V. E. R. Lemes, R. F. Sobreiro and S. P. Sorella, “Renormalizability of a quark-gluon model with soft BRST breaking in the infrared region,” *Eur. Phys. J. C* **66**, 451 (2010) [arXiv:0901.3158 [hep-th]].
- [168] D. Dudal, S. P. Sorella and N. Vandersickel, “The dynamical origin of the refinement of the Gribov-Zwanziger theory,” *Phys. Rev. D* **84**, 065039 (2011)
- [169] T. R. S. Santos and R. F. Sobreiro, “Renormalizability of Yang-Mills theory with Lorentz violation and gluon mass generation,” *Phys. Rev. D* **91**, no. 2, 025008 (2015) [arXiv:1404.4846 [hep-th]].
- [170] O. M. Del Cima, D. H. T. Franco and O. Piguet, “Symanzik-Becchi-Rouet-Stora lessons on renormalizable models with broken symmetry: the case of Lorentz violation,” arXiv:1602.09091 [hep-th].
- [171] J. C. Collins, “Renormalization. An Introduction To Renormalization, The Renormalization Group, And The Operator Product Expansion,” Cambridge, Uk: Univ. Pr. (1984) 380p

- [172] R. Fukuda and T. Kugo, “Theory of Yang-Mills Field. 1. Instability of the Vacuum and Singlet Pair Condensation,” *Prog. Theor. Phys.* **60**, 565 (1978).
- [173] V. P. Gusynin and V. A. Miransky, “On the Vacuum Rearrangement in Massless Chromodynamics,” *Phys. Lett. B* **76**, 585 (1978).
- [174] J. M. Cornwall, “Dynamical Mass Generation in Continuum QCD,” *Phys. Rev. D* **26**, 1453 (1982).
- [175] H. Verschelde, K. Knecht, K. Van Acoleyen and M. Vanderkelen, “The Nonperturbative groundstate of QCD and the local composite operator $A(\mu)^{**2}$,” *Phys. Lett. B* **516**, 307 (2001) [hep-th/0105018].
- [176] N. Maggiore and M. Schaden, “Landau gauge within the Gribov horizon,” *Phys. Rev. D* **50**, 6616 (1994) [hep-th/9310111].
- [177] D. Dudal and S. P. Sorella, “The Gribov horizon and spontaneous BRST symmetry breaking,” *Phys. Rev. D* **86**, 045005 (2012) [arXiv:1205.3934 [hep-th]].
- [178] S. D. Joglekar and B. W. Lee, “General Theory of Renormalization of Gauge Invariant Operators,” *Annals Phys.* **97**, 160 (1976).
- [179] M. Henneaux, “Remarks on the renormalization of gauge invariant operators in Yang-Mills theory,” *Phys. Lett. B* **313**, 35 (1993) [Erratum-ibid. *B* **316**, 633 (1993)].
- [180] J. C. Collins and R. J. Scalise, “The Renormalization of composite operators in Yang-Mills theories using general covariant gauge,” *Phys. Rev. D* **50**, 4117 (1994).
- [181] P. T. Matthews and A. Salam, “The Renormalization of meson theories,” *Rev. Mod. Phys.* **23**, 311 (1951).
- [182] T. R. S. Santos and R. F. Sobreiro, “Gauge anomalies in Lorentz-violating QED,” arXiv:1607.07413 [hep-th].
- [183] D. H. T. Franco and A. H. Gomes, “No one-loop gauge anomalies for a Lorentz-violating quantum electrodynamics: Evaluation of the three-photon vertex,” *J. Phys. A* **46**, 045401 (2013).
- [184] A. R. Vieira, A. L. Cherchiglia and M. Sampaio, “Momentum Routing Invariance in Extended QED: Assuring Gauge Invariance Beyond Tree Level,” *Phys. Rev. D* **93**, no. 2, 025029 (2016) [arXiv:1510.05927 [hep-th]].
- [185] D. J. Gross and R. Jackiw, “Effect of anomalies on quasirenormalizable theories,” *Phys. Rev. D* **6**, 477 (1972).

- [186] J. S. Bell and R. Jackiw, “A PCAC puzzle: $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ in the sigma model,” *Nuovo Cim. A* **60**, 47 (1969).
- [187] S. L. Adler, “Axial vector vertex in spinor electrodynamics,” *Phys. Rev.* **177**, 2426 (1969).
- [188] W. A. Bardeen, “Anomalous Ward identities in spinor field theories,” *Phys. Rev.* **184**, 1848 (1969).
- [189] S. L. Adler and W. A. Bardeen, “Absence of higher order corrections in the anomalous axial vector divergence equation,” *Phys. Rev.* **182**, 1517 (1969).
- [190] D. Anselmi, “Adler-Bardeen theorem and manifest anomaly cancellation to all orders in gauge theories,” *Eur. Phys. J. C* **74**, no. 10, 3083 (2014)
- [191] J. Wess and B. Zumino, “Consequences of anomalous Ward identities,” *Phys. Lett. B* **37**, 95 (1971).
- [192] G. Barnich and M. Henneaux, “Renormalization of gauge invariant operators and anomalies in Yang-Mills theory,” *Phys. Rev. Lett.* **72**, 1588 (1994) [hep-th/9312206].
- [193] G. Barnich, F. Brandt and M. Henneaux, “Local BRST cohomology in the antifield formalism. 1. General theorems,” *Commun. Math. Phys.* **174**, 57 (1995)
- [194] T. de Paula Netto and I. L. Shapiro, “Vacuum contribution of photons in the theory with Lorentz and CPT-violating terms,” *Phys. Rev. D* **89**, 104037 (2014)
- [195] I. L. Shapiro, “Renormalization in QED and QFT with a Lorentz- and CPT-violating backgrounds,” in *6th Meeting on CPT and Lorentz Symmetry (CPT 13)*, 17-21 Jun 2013. Bloomington, Indiana, USA, arXiv:1309.4190 [hep-ph].
- [196] D. Dudal, S. P. Sorella, N. Vandersickel and H. Verschelde, “A Purely algebraic construction of a gauge and renormalization group invariant scalar glueball operator,” *Eur. Phys. J. C* **64**, 147 (2009) [arXiv:0812.2401 [hep-th]].
- [197] T. R. S. Santos, R. F. Sobreiro and A. A. Tomaz, “Gauge field spectrum in massive Yang-Mills theory with Lorentz violation,” arXiv:1607.05261 [hep-th].
- [198] A. Das, “Lectures on quantum field theory,” Hackensack, USA: World Scientific (2008) 775 p
- [199] A. Z. Capri, “Relativistic quantum mechanics and introduction to quantum field theory,” River Edge, USA: World Scientific (2002) 179 p
- [200] H. Kleinert and V. Schulte-Frohlinde, “Critical Properties of ϕ^4 -Theories,” Freie Universität Berlin.