



INSTITUTO DE FÍSICA

Universidade Federal Fluminense

Wagner Tavares Buono

Soma de Momento Angular Orbital da Luz
na Geração de Segundo Harmônico

Niterói
Agosto 2015

B944 Bueno, Wagner Tavares.
Soma de momento angular orbital da luz na geração de
segunda harmônico / Wagner Tavares Bueno ; orientador:
Antonio Zelaquett Khoury -- Niterói, 2015.
48 p. : il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Fluminense,
Instituto de Física, 2015.
Bibliografia: p. 46-48.

1.ÓTICA QUÂNTICA. 2.ÓTICA NÃO LINEAR. 3.MOMENTO ANGULAR
ORBITAL DA LUZ. I.Khoury, Antonio Zelaquett, Orientador.
II.Universidade Federal Fluminense. Instituto de Física,
Instituição responsável. III.Título.

CDD 535.15

Wagner Tavares Buono

Soma de Momento Angular Orbital da Luz
na Geração de Segundo Harmônico

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Física da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre em Física.

Orientador: Antonio Zelaquett
Khoury

Niterói
Agosto 2015

Aluno, Wagner Tavares Buono.

Soma de Momento Angular Orbital da Luz na Geração de Segundo Harmônico

49 páginas

Dissertação (Mestrado) - Instituto de Física da Universidade Federal Fluminense.

1. Óptica Quântica
2. Momento Angular Orbital

I. Universidade Federal Fluminense. Instituto de Física.

Comissão Julgadora:

Prof. Dr. Kaled Dechoum

Prof. Dr. Daniel Schneider Tasca

Prof. Dr. Antonio Zelaquett Khoury

Resumo

Trabalhos anteriores já mostraram o dobramento do momento angular orbital de feixes após a geração de segundo harmônico em meios não lineares. Nesse trabalho pretendemos usar a polarização como parâmetro auxiliar para poder incidir em um cristal não linear dois feixes colineares com momentos angulares orbitais diferentes e obter na geração de seu segundo harmônico a soma de seus momentos angulares orbitais e verificar este resultado experimentalmente.

Palavras-chave: Óptica Não Linear, Óptica Quântica, Momento Angular Orbital

Abstract

Previous work have already shown the orbital angular momentum doubling after second harmonic generation in non-linear media. In this work we intend to use the polarization as an auxiliary parameter to focus in a non-linear crystal two colinear beams with different orbital angular momentum and obtain in its second harmonic generation the sum of their orbital angular momentum and to verify it exeperimentally.

Keywords: Quantum Optics, Non-Linear Optics, Orbital Angular Momentum

Sumário

Lista de Figuras	ix
1 Introdução	1
2 Momento Angular Orbital da Luz	5
2.1 Momento Angular da Luz	5
2.2 Equação de Onda Paraxial	7
2.3 Soluções	9
2.3.1 Modos Paraxiais: Gaussiano	9
2.3.2 Modos Paraxiais: Hermite-Gaussiano	10
2.3.3 Modos Paraxiais: Laguerre-Gaussiano	11
2.4 Geração e transformação de feixes com MAO	13
2.4.1 Esfera de Poincaré para os Modos Transversos	13
2.4.2 Método das Lâminas de onda Espirais	15
2.4.3 Método Holográfico	17
2.4.4 Conversor de modos por Astigmatismo	19
2.4.5 Método da lente Oblíqua	19
3 Introdução à Óptica não linear	24
3.1 Meios não lineares	25
3.2 Processos não lineares de segunda ordem	29
3.2.1 Mistura de Ondas	29
3.2.2 Geração de Segundo Harmônico	31

4	Geração de Segundo Harmônico com Vórtices	33
4.1	Equação Paraxial em Meios não lineares	33
4.2	Conservação do momento angular	36
5	Experimento	37
5.1	Medida da Cintura do Feixe	37
5.1.1	Feixes Gaussianos	38
5.2	Montagem	40
5.3	Resultados	42
6	Conclusão	45
	Referências Bibliográficas	47

Lista de Figuras

2.1	Plano focal de um feixe gaussiano[14].	10
2.2	Perfil de Intensidade de cada modo hermite gaussiano até a segunda ordem.	11
2.3	Perfil de Intensidade de cada modo laguerre gaussiano até a Segunda ordem.	12
2.4	Frentes de onda com seus vetores de onda.	13
2.5	Esfera de Poincaré para os Modos Transversos.	16
2.6	Lâmina de onda espiral gerando um feixe laguerre gaussiano a partir de um gaussiano. Neste caso, $l = 0 \rightarrow l = 2$ [34].	16
2.7	Padrões de interferência entre feixes laguerre gaussianos de $l = -1, 0, 1$ e 2 e TEM00 simulados no software WOLFRAM MATHEMATICA	17
2.8	Esquema de Montagem do LCOS-SLM da Hamamatsu [®] fornecido dentro do manual de operação.	18
2.9	Representação de raios paraxiais.	20
2.10	Método da Lente Obliquamente Inclinada	22
3.1	Processos Não Lineares.	30
3.2	Geração de Segundo Harmônico com um cristal não linear de casamento de fase tipo II.	32
5.1	Método da Faca.	38
5.2	Ajuste da função $w(z)$ para o modo fundamental TEM00. Neste ajuste, obteve-se $w_0 = 0,21 \pm 0,05$ mm.	39
5.3	Caminho percorrido pelo feixe que incide no SLM.	40
5.4	Caminho percorrido pelo feixe que incide na máscara holográfica.	41
5.5	Montagem experimental completa.	42

5.6	Modos Hermite-Gaussianos convertidos após a geração de segundo harmônico, usando apenas a polarização para controlar o feixe de entrada no cristal.	43
5.7	Modos Hermite-Gaussianos obtidos após a conversão do feixe gerado no cristal.	43

1 Introdução

Em 20 de dezembro de 2013, a 68^a seção da assembléia geral das Nações Unidas proclamou 2015 como o Ano Internacional da Luz e das Tecnologias Baseadas na Luz (International Year of Light, ou IYL 2015)[2]. Ao fazer isso, as nações unidas reconheceram a importância de cultivar uma consciência global sobre como tecnologias baseadas na luz podem promover desenvolvimento sustentável e soluções para desafios da ciência em várias áreas.

Desde seu uso na fotossíntese pelas plantas até a descoberta de outras fontes, como o fogo, a luz sempre teve um papel fundamental para a vida dos seres humanos. Na tentativa de entender a natureza ao seu redor, filósofos lutaram através das eras para explicar exatamente o que é a luz e o porquê de seu comportamento. [3]

Na Grécia antiga, filósofos da mesma época de Pitágoras (c. 582 A.C.-c. 497 A.C.) acreditavam que a luz vinha das coisas visíveis e que nossos olhos recebiam as pequenas partículas de luz. O estadista e filósofo Empedocles acreditava que a luz vinha de objetos luminosos mas que raios de luz também saíam de nossos olhos. Além disso, propôs que a luz viaja a uma velocidade finita. Também se acredita que o matemático grego Euclides(c. 325A.C.-c. 265 A.C.) pensava que os olhos emitiam raios de luz e que isso dava a sensação de visão.

Ibn Al-Haitham (965-1040) não aceitava essa teoria e estudou a passagem da luz através de vários meios e fez experimentos com a refração da luz ao atravessar a fronteira entre dois meios. Ele foi o primeiro a dar uma explicação científica para o processo de visão, baseado em experimentos ao invés de dogmatismos. René Descartes (1596-1650) considerava a luz como um tipo de variação de pressão num meio elástico chamado éter, que preencheria todo o espaço.

Galileo Galilei (1564-1642) desenvolveu o método científico e assim tornou possível uma investigação própria das propriedades da luz. A *lei da reflexão* já era conhecida na

Grécia antiga, mas a *lei da refração* só foi descoberta em 1621 pelo matemático holandês Willebrord Snell(1580-1626).

Em 1666, Isaac Newton mostrou que a luz branca é feita de um espectro contínuo de cores passando um feixe de luz do sol por um prisma, decompondo-o nas suas cores constituintes. Depois foi capaz de obter luz branca novamente reunindo essas cores com outro prisma. Embora acreditasse firmemente que a luz fosse formada por partículas, foi a primeira pessoa a observar o que ficou conhecido como "anéis de Newton", que são explicados pela teoria ondulatória da luz.

O matemático Olaus Römer (1644-1710) descobriu que os eclipses das luas de Júpiter não ocorrem nos tempos previstos pela mecânica Newtoniana, concluindo que a discrepância de 22 minutos seria devido ao tempo que a luz levaria para atravessar essa grande distância e com isso obteve um valor para a velocidade da luz de $2.14 \times 10^8 m/s$. O inventor da fenda dupla, Thomas Young, mostrou em 1802 que dois feixes de luz passando por fendas finas próximas podem ser mutuamente excludentes em certos pontos, um fenômeno característico de ondas.

Outra evidência que apoia a teoria ondulatória da luz veio do trabalho teórico de James Clerk Maxwell (1831-1879). Ele juntou os trabalhos de Karl Gauss (1777-1855), André Ampère (1775-1836) e Michael Faraday (1791-1867), que eram considerados separados e independentes, unificando os fenômenos da eletrostática, magnetismo e corrente de eletricidade na forma de quatro equações diferenciais, conhecidas como equações de Maxwell. No seu trabalho era previsto que uma carga elétrica acelerada geraria uma onda eletromagnética atravessando o espaço com uma velocidade fixa. Ao calcular essa velocidade, foi obtido um valor praticamente igual ao da velocidade da luz medida na época. Como o próprio Maxwell disse [16]: "Nós provavelmente não podemos fugir da inferência de que a luz consiste nas ondulações transversas do mesmo meio, o que é a causa dos fenômenos elétricos e magnéticos."

Em 1900, Max Planck (1858-1947) fez uma descoberta que pareceu ser incompatível com a teoria ondulatória da luz. Ao analisar a radiação de corpo negro, ele propôs que as cargas elétricas oscilantes tivessem energias discretas múltiplas de hf , onde h é uma

constante universal e f a frequência de oscilação. Essa idéia de *quantização*, contrária a Física clássica, era difícil de se aceitar. Albert Einstein em 1905 explicou o efeito fotoelétrico estendendo esse conceito à própria luz, dizendo que fótons carregando energia hf se comportam como partículas e podem retirar elétrons de uma superfície metálica, algo que uma onda não pode fazer.

Essa dualidade de comportamento levou Luis de Broglie(1892-1987) em 1924 a propor em sua tese de doutorado a ideia dramática de que a matéria também teria propriedades de ondas e partículas, não só a luz. Ele propôs a relação entre o momento da partícula e seu comprimento de onda associado, envolvendo a constante de Planck. Dentro de um ano depois, C.J. Davidson e L.Germer mostraram que um feixe de elétrons, se passado por um cristal, formava um padrão exatamente como o padrão da difração de ondas de luz.

Fundado em 1921 por Niels Bohr (1885-1962), o Instituto de Física Teórica em Copenhagem foi frequentado pelos mais importantes físicos de todo o mundo e o resultado dessa colaboração ficou conhecido como a *interpretação de Copenhagem da Mecânica Quântica*, na qual ficou convencionado que a luz e as partículas sub-atômicas ficam em uma *superposição de estados* até que sejam observados.

O primeiro trabalho a reportar uma medida experimental do momento angular da luz foi feito por Richard A. Beth [12] em 1936.

O entendimento da interação entre luz e matéria seguindo esses acontecimentos não só formou a base da óptica quântica como foi crucial para o desenvolvimento da mecânica quântica como um todo. Porém, até então, os efeitos dessa interação eram estudados principalmente na matéria. Isso mudou com a invenção do Maser em 1953 e do Laser em 1960. Com o aprimoramento das técnicas de construção dos ressoadores ópticos, para a construção de cavidades ópticas para os lasers, foi possível gerar luz que também possuía momento angular orbital. Seguindo o trabalho de Dirac na Teoria Quântica de Campos, a eletrodinâmica quântica permitiu um entendimento maior sobre outras propriedades da luz e deu origem a teorias sobre estatística de fótons, ao estudo e à produção de estados comprimidos e ao estudo do ruído quântico . Isso levou à introdução do conceito de

estados coerentes e de que nem todos os estados da luz podem ser explicados pela teoria ondulatória. Em 1977 H. Jeff Kimble (1949) demonstrou a primeira fonte de luz que precisaria de uma descrição quântica: um único átomo que emitia um único fóton por vez[1].

No final do século XX, histórias de ficção científica passaram a ser encaradas como possibilidades reais pois a óptica quântica junto com outras áreas da Física revolucionaram e estenderam a teoria de Informação e a Computação, tornando coisas como o teletransporte e o computador quântico plausíveis de realização.

Esta dissertação será sobre o trabalho feito pelos membros do Laboratório de Óptica Quântica da Universidade Federal Fluminense publicado em Setembro de 2014 [36]. Neste artigo foi investigada uma propriedade dos vórtices ópticos no processo de geração de segundo harmônico em um cristal não linear que permite a soma arbitrária do momento angular orbital desses feixes.

Neste experimento, um cristal não linear de fosfato de potássio e titanilo (KTP) com casamento de fase de tipo II é iluminado com dois feixes com comprimento de onda de 1064nm (infravermelho). Um deles tem polarização horizontal e, depois de difratar por uma máscara holográfica, adquire momento angular orbital $l = 1$. O outro tem polarização vertical e, depois de refletir em um modulador espacial de luz (SLM), adquire um momento angular arbitrário controlado por software. A geração de segundo harmônico de cada feixe individualmente mostra o resultado bem conhecido de dobramento da carga topológica quando o feixe incidente é polarizado a 45°. O processo com os dois feixes juntos com polarizações ortogonais mostra a soma da carga topológica.

No capítulo 2 serão apresentados a teoria do momento angular da luz, os vórtices ópticos, os procedimentos experimentais para manipulá-los e suas propriedades. Depois, no capítulo 3, será feita uma introdução à óptica não-linear, falando sobre mistura de ondas e geração de segundo harmônico. Finalmente, no capítulo 4, serão mostrados os efeitos do meio não-linear nos vórtices ópticos. Por final, nos capítulos 5 e 6, com toda a descrição teórica coberta, será discutido o experimento realizado, bem como seus resultados e a discussão sobre eles.

2 Momento Angular Orbital da Luz

2.1 Momento Angular da Luz

Tendo sua primeira medida experimental sido feita em 1936 [12], a teoria eletromagnética de Maxwell já podia prever a sua existência. Dela podemos dizer que a radiação eletromagnética transporta energia e momento. O vetor de Poynting [6], nomeado assim devido a John Henry Poynting(1852-1914), simboliza o fluxo de energia por unidade de área por unidade de tempo. No sistema de unidade internacional (SI), ele tem a forma

$$\vec{S}(\vec{r},t) = c^2 \varepsilon_0 [\vec{E}(\vec{r},t) \times \vec{B}(\vec{r},t)]. \quad (2.1)$$

Além disso, a densidade de momento linear \vec{p} do campo eletromagnético em meios isotrópicos é proporcional a ele [7]:

$$\vec{p}(\vec{r},t) = \frac{\vec{S}(\vec{r},t)}{c^2} = \varepsilon_0 [\vec{E}(\vec{r},t) \times \vec{B}(\vec{r},t)]. \quad (2.2)$$

É possível obter o momento linear total do campo integrando sua densidade sobre todo o espaço

$$\vec{P}(\vec{r},t) = \varepsilon_0 \int_V [\vec{E}(\vec{r},t) \times \vec{B}(\vec{r},t)] dv. \quad (2.3)$$

Assim como na mecânica clássica, podemos definir a densidade de momento angular do campo eletromagnético como

$$\vec{l}(\vec{r},t) = \vec{r} \times \vec{p}(\vec{r},t) = \vec{r} \times \varepsilon_0 [\vec{E}(\vec{r},t) \times \vec{B}(\vec{r},t)] \quad (2.4)$$

e obter o momento angular total integrando o vetor \vec{l} sobre todo o espaço

$$\vec{L} = \varepsilon_0 \int_V \vec{r} \times [\vec{E}(\vec{r},t) \times \vec{B}(\vec{r},t)] dv. \quad (2.5)$$

Já está bem estabelecido, teórica e experimentalmente, que a luz carrega momento angular orbital e de spin [8] [9] [10] [11]. Considerando campos transversos, localizados e no calibre de Coulomb, sua separação pode ser feita fazendo uso do potencial vetor $\vec{A}(\vec{r},t)$ e a expressão para o momento angular total se torna

$$\vec{L} = \varepsilon_0 \int_V \vec{r} \times [\vec{E}(\vec{r},t) \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}(\vec{r},t))] dv. \quad (2.6)$$

Usando a notação de índices com somatórios implícitos para índices repetidos, a p-ésima componente do resultado dessa cadeia de produtos vetoriais pode ser escrita como

$$\left[\vec{r} \times \vec{E} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} \right]_p = -\epsilon_{pqi} r_q E_j (\partial_j A_i) + \epsilon_{pqi} E_j r_q \partial_i A_j.$$

O primeiro termo pode ser substituído usando a regra do produto e, notando-se que $\partial_i E_i = 0$ e que $\partial_j r_i = \delta_i^j$, obtém-se

$$\begin{aligned} \epsilon_{pqi} r_q E_j (\partial_j A_i) &= \epsilon_{pqi} \partial_j (r_q E_j A_i) - \epsilon_{pqi} r_q (\partial_j E_j) A_i - \epsilon_{pqi} (\partial_j r_q) E_j A_i \\ &= \epsilon_{pqi} \partial_j (r_q E_j A_i) - \epsilon_{pqi} E_q A_i. \end{aligned}$$

A equação (2.6) então pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \epsilon_0 \int_V \left[(\vec{E} \times \vec{A}) - \vec{\nabla} \cdot \vec{E} (\vec{r} \times \vec{A}) + E_i (\vec{r} \times \vec{\nabla}) A_i \right] dv \\ &= \epsilon_0 \int_V \left[(\vec{E} \times \vec{A}) + E_i (\vec{r} \times \vec{\nabla}) A_i \right] dv - \oint_S \vec{E} (\vec{r} \times \vec{A}) \cdot d\vec{s} \end{aligned}$$

na qual foi usado o teorema de Gauss para transformar a segunda integral de volume em uma integral de superfície sobre a "caixa de normalização" de lado L. No limite de L suficientemente grande, e para campos eletromagnéticos que são bem localizados dentro da caixa, o termo de superfície é comumente descartado, e o momento angular orbital pode ser dividido em duas partes, onde

$$\vec{L} = \vec{L}_s + \vec{L}_o, \quad (2.7a)$$

$$\vec{L}_s = \epsilon_0 \int_V \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{A}(\vec{r}, t) dv, \quad (2.7b)$$

$$\vec{L}_o = \epsilon_0 \int_V E_i(\vec{r}, t) \left[\vec{r} \times \vec{\nabla} \right] A_i(\vec{r}, t) dv. \quad (2.7c)$$

O primeiro termo, \vec{L}_s , por ser independente da escolha da origem do sistema de coordenadas ou de um ponto de referência, representa uma propriedade intrínseca do campo e é associado ao estado de polarização do fóton e ao seu spin[12]. O segundo termo, \vec{L}_o , é associado ao momento angular orbital devido ao aparecimento do operador momento angular orbital $L_{op} = (\vec{r} \times \vec{\nabla})$ e à dependência da origem do sistema de coordenadas escolhida. Ele está relacionado à circulação de energia causada pela configuração espacial macroscópica do campo.

A distinção entre momento angular orbital e de spin não deve ser confundida com a distinção entre momento angular intrínseco e extrínseco. Esta segunda pode ser feita ao

calcularmos o momento angular total referente a um ponto \vec{r}_0 no espaço. Das equações 2.6 e 2.3, temos

$$\begin{aligned}\vec{L}_0(\vec{r}_0) &= \varepsilon_0 \int_V (\vec{r} - \vec{r}_0) \times \vec{E} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} dv \\ &= \varepsilon_0 \int_V \vec{r} \times \vec{E} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} - \varepsilon_0 \vec{r}_0 \times \int_V \vec{E} \times \vec{A} dv \\ &= \vec{L}(0) - \vec{r}_0 \times \vec{P}.\end{aligned}\tag{2.8}$$

É fácil notar que o primeiro termo é o mesmo obtido anteriormente. Porém surge um segundo termo orbital, dependente explicitamente de \vec{r}_0 . De maneira análoga à dedução 2.8 pode-se calcular o momento angular total do campo referente a um outro ponto \vec{r}_1 e analisar sua variação

$$\Delta \vec{L} = \vec{L}(\vec{r}_1) - \vec{L}(\vec{r}_0) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \times \vec{P}.\tag{2.9}$$

Se o momento \vec{P} for definido como no eixo Z, uma rápida análise das componentes deste vetor mostra que $\Delta L_z = (\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \times \vec{P} \cdot \hat{z} = 0$. Isto quer dizer que se for considerada uma mudança de ponto de referência, não se alterará a componente do momento angular orbital ao longo da direção de \vec{P} . Por isso essa componente pode ser considerada intrínseca[13]. A decomposição do momento angular em intrínseco e extrínseco se torna

$$\vec{L} = \vec{L}_I + \vec{L}_e,\tag{2.10a}$$

com

$$\vec{L}_I = \vec{L}_s + \vec{L}_0 \cdot \hat{z}\tag{2.10b}$$

e

$$\vec{L}_e = \vec{L}_{xy} = \vec{L}_0 - \vec{L}_0 \cdot \hat{z}.\tag{2.10c}$$

É importante lembrar que as propriedades físicas não devem depender da escolha de calibre e toda essa demonstração de separação do momento angular foi feita no calibre de Coulomb. Uma dedução mais formal e independente da escolha de calibre da separação do momento angular em seu momento angular orbital e de spin pode ser encontrada em [19].

2.2 Equação de Onda Paraxial

A dinâmica da radiação eletromagnética é descrita pelas equações de Maxwell. Se forem consideradas em um meio isotrópico e uniforme, livre de cargas e correntes e no

S.I., têm a forma:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}, t) = 0; \quad (2.11a)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}; \quad (2.11b)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0; \quad (2.11c)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t}. \quad (2.11d)$$

Essas equações diferenciais parciais para os campos elétrico \vec{E} e indução magnética \vec{B} podem ser desacopladas ao se calcular o rotacional da equação 2.11b ou 2.11d, obtendo

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (2.12)$$

Usando as equações 2.11a e 2.11c, chega-se nas equações de onda

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (2.13a)$$

e

$$\nabla^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (2.13b)$$

Na tentativa de descrever um feixe de laser monocromático pouco divergente propagante na direção z , será usado o *ansatz*

$$\vec{E} = \psi(\vec{r}) e^{i(kz - \omega t)} \hat{u} \quad (2.14)$$

no qual \hat{u} é o vetor de polarização, $\psi(\vec{r}) e^{ikz}$ a amplitude da onda, $e^{-i\omega t}$ a fase temporal e $k = \omega/c$ é o módulo do vetor de onda. Abrindo a equação 2.13a, obtem-se

$$\begin{aligned} & \nabla^2 [\psi(\vec{r}) e^{i(kz - \omega t)}] - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(\vec{r}) e^{i(kz - \omega t)}}{\partial t^2} = 0 \\ & = \left(\nabla^2 [\psi(\vec{r})] + 2\vec{\nabla} [\psi(\vec{r})] \cdot \vec{\nabla} [e^{ikz}] + \psi(\vec{r}) \nabla^2 [e^{ikz}] \right) e^{-i\omega t} + k^2 \psi(\vec{r}) e^{i(kz - \omega t)} \\ & = \left(\nabla^2 [\psi(\vec{r})] + 2ik\hat{z} \cdot \nabla [\psi(\vec{r})] \right) e^{i(kz - \omega t)} \\ & = 0, \end{aligned}$$

de onde é possível inferir que

$$\nabla^2 [\psi(\vec{r})] + 2ik\hat{z} \cdot \vec{\nabla} [\psi(\vec{r})] = 0. \quad (2.15)$$

A separação da amplitude da onda em dois termos($\psi(\vec{r})$ e e^{ikz}) é conveniente pois o segundo termo, para um feixe bem colimado, tem uma variação espacial muito mais rápida que o primeiro, associado ao comprimento de onda $\lambda = 2\pi/k$ na direção z . O primeiro termo representa a estrutura transversa do feixe. Ele muda lentamente na direção de propagação devido à difração . Devido a essa diferença na taxa de variação no eixo de propagação, faremos a *aproximação paraxial*:

$$\left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right| \ll \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right| \quad \text{e} \quad 2k \left| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|. \quad (2.16)$$

Usando a aproximação paraxial, a equação 2.15 se torna a *equação de onda paraxial*:

$$\nabla_{\perp}^2 \psi + 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad (2.17)$$

sendo ∇_{\perp}^2 um operador Laplaciano que atua apenas nas coordenadas transversais à \hat{z} . Em coordenadas cartesianas:

$$\nabla_{\perp}^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}. \quad (2.18)$$

2.3 Soluções

2.3.1 Modos Paraxiais: Gaussiano

A equação 2.17 admite uma família infinita de soluções [17]. A mais simples e de menor ordem é dada por:

$$\psi_0(x,y,z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w(z)} \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} + ik \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} - i \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right) \right], \quad (2.19)$$

, onde $R(z)$ é o raio de curvatura do feixe dado por

$$R(z) = z \left(1 + \frac{z_R^2}{z^2} \right), \quad (2.20)$$

$w(z)$ é o diâmetro do feixe dado por

$$w(z) = w_0 \sqrt{\left(1 + \frac{z_R^2}{z^2} \right)}, \quad (2.21)$$

w_0 é o diâmetro mínimo, ou cintura do feixe, definida no plano $z = 0$. O último parâmetro z_R é a distância de Rayleigh, dada por

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}. \quad (2.22)$$

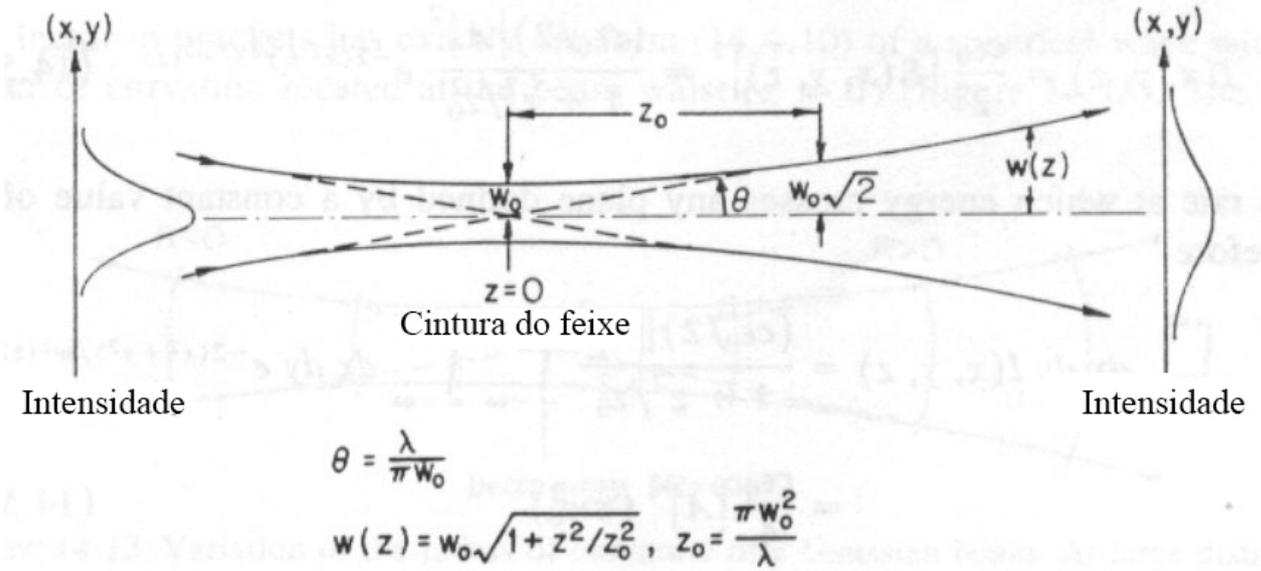


Figura 2.1: Plano focal de um feixe gaussiano[14].

Esses parâmetros, ilustrados na figura (??) são muito importantes para considerações sobre medidas experimentais. O diâmetro do feixe determina a distância onde a irradiância cai por um fator de $1/e^2$ do valor da irradiância máxima medida em um ponto z ao longo da direção de propagação. A cintura do feixe w_0 é sua largura mínima, correspondente ao foco físico. Neste ponto a frente de onda é plana e o raio de curvatura infinito. O parâmetro z_R fornece uma medida de divergência do feixe e a distância $2z_R$ é chamada de parâmetro confocal.

2.3.2 Modos Paraxiais: Hermite-Gaussiano

Se resolvida em coordenadas cartesianas, a equação paraxial produz os modos de Hermite-Gauss que são dados por:

$$\psi_{n,m}(x,y,z) = \frac{A_{mn}}{w(z)} H_n \left(\sqrt{2} \frac{x}{w(z)} \right) H_m \left(\sqrt{2} \frac{y}{w(z)} \right) \times \exp \left[-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} + ik \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} - i\phi_{mn}(z) \right]. \quad (2.23)$$

Nesta expressão A_{mn} é uma constante de normalização, H_m é o polinômio de Hermite de ordem m [18], $w(z)$ é dado pela equação (2.21), $R(z)$ pela equação (2.20) e $\phi_{mn}(z)$ é chamada de fase de Gouy, dada pela expressão

$$\phi_{mn}(z) = (m + n + 1) \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right). \quad (2.24)$$

Em 1890 Gouy mostrou que uma onda focalizada adquire uma fase axial em relação a onda plana quando é focalizada. Em [15] podem ser encontradas algumas referências sobre o assunto.

É definido $N = n + m$ como ordem do modo e nota-se que no caso em que $N = 0$, o modo Hermite-Gaussiano se torna o modo Gaussiano fundamental. As distribuições de intensidade das três primeiras ordens podem ser vistas na figura (??).

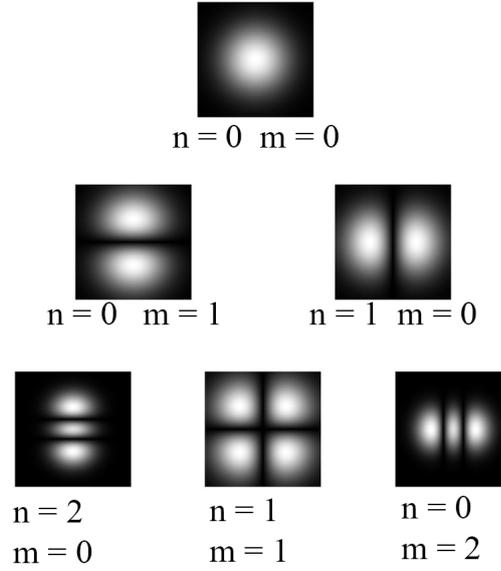


Figura 2.2: Perfil de Intensidade de cada modo hermite gaussiano até a segunda ordem.

2.3.3 Modos Paraxiais: Laguerre-Gaussiano

Quando resolvida em coordenadas cilíndricas, a equação 2.15 tem como família de soluções

$$\psi_p^l(\rho, \phi, z) = \frac{A_p^l}{w(z)} \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{w(z)} \right)^{|l|} L_p^{|l|} \left[\frac{2\rho^2}{w^2(z)} \right] \exp \left[-\frac{\rho^2}{w^2(z)} \right] \times \exp \left[ik \frac{\rho^2}{2R(z)} + il\phi - i\phi_{pl}(z) \right], \quad (2.25)$$

nas quais $L_p^{|l|}$ são os polinômios de Laguerre generalizados [20], $w(z)$ e $R(z)$ são dados pelas equações 2.21 e 2.20, A_p^l é um fator de normalização e $\phi_{pl}(z)$ é a fase de Gouy, neste caso dada pela equação:

$$\phi_{pl}(z) = (2p + |l| + 1) \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right). \quad (2.26)$$

Um modo paraxial laguerre-gaussiano é de ordem $N = 2p + |l|$. O parâmetro p é um número natural, chamado de índice radial e está associado ao número de anéis que aparecem na distribuição de intensidade. O índice l é o índice azimutal, também conhecido como *helicidade* ou *carga topológica*, sendo inteiro. Devido ao termo de fase $e^{il\phi}$, quando $l \neq 0$ o feixe apresenta uma frente de onda helicoidal, como pode ser visto na figura (??), e o sinal de l determina a direção de rotação, sugerindo que ele carrega momento angular proporcional a l . As distribuições de intensidade das três primeiras ordens podem ser vistas na figura (??).

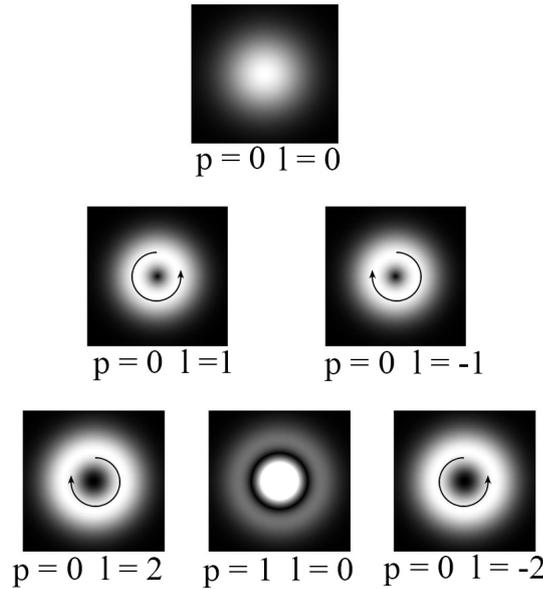


Figura 2.3: Perfil de Intensidade de cada modo laguerre gaussiano até a Segunda ordem.

É importante perceber que tanto os modos de Hermite-Gauss quanto os de Laguerre-Gauss formam a base de um espaço vetorial pois são ortonormais entre si e formam um conjunto completo de soluções da equação paraxial. Portanto qualquer combinação linear destes modos também é solução da equação paraxial e existe uma combinação de polinômios de Hermite que gera um polinômio de Laguerre [8].

$$\sum_{k=0}^{n+m} (2i)^k P_k^{n-k, m-k}(0) H_{n+m-k}(x) H_k(y) = 2^{n+m} \times \begin{cases} (-1)^m m! (x + iy)^{n-m} L_n^{n-m}(x^2 + y^2) & \text{para } n \geq m \\ (-1)^n n! (x - iy)^{m-n} L_n^{m-n}(x^2 + y^2) & \text{para } m > n, \end{cases} \quad (2.27)$$



(a) Frente de onda helicoidal e seu vetor de onda.

(b) Frente de onda de um feixe com $l = 4$.

Figura 2.4: Frentes de onda com seus vetores de onda.

onde

$$P_k^{n-k, m-k}(0) = \frac{(-1)^k}{2^k k!} \frac{d^k}{dt^k} [(1-t)^m (1+t)^n] |_{t=0} \quad (2.28)$$

são os polinômios de Jacobi.

2.4 Geração e transformação de feixes com MAO

2.4.1 Esfera de Poincaré para os Modos Transversos

Como descrito na seção 2.3.3, os modos de Laguerre-Gauss(LG) podem ser decompostos em modos de Hermite-Gauss(HG) com o auxílio dos polinômios de Jacobi. Para os modos de primeira ordem $N = m + n = 2p + |l| = 1$ essa relação é especialmente simples.

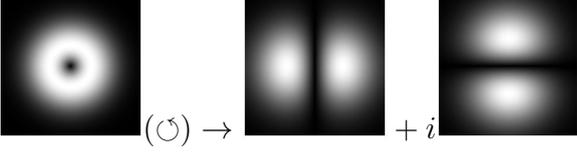
$$LG_0^{\pm 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(HG_{1,0} \pm iHG_{0,1}). \quad (2.29)$$

E também é possível descrever os modos de Hermite-Gauss de 1^a ordem rodados no plano transversal de um ângulo $\theta = 45^\circ$ ou 135° como combinação linear dos modos vertical e

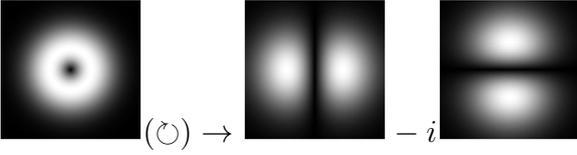
horizontal de 1^a ordem:

$$HG_{0,1}^{45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} (HG_{0,1} + HG_{1,0}) \quad (2.30a)$$

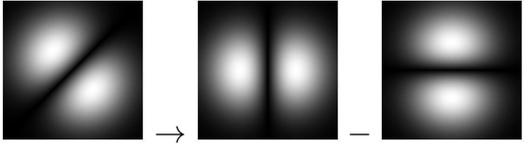
$$HG_{0,1}^{135^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} (HG_{0,1} - HG_{1,0}). \quad (2.30b)$$



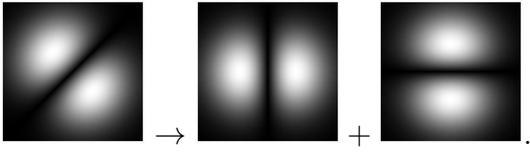
$$(O) \rightarrow \quad + i \quad (2.31a)$$



$$(O) \rightarrow \quad - i \quad (2.31b)$$



$$\rightarrow \quad - \quad (2.31c)$$



$$\rightarrow \quad + \quad (2.31d)$$

Estas relações simples permitem traçar um paralelo com a consagrada esfera de Poincaré cujos pontos são localizados pelos parâmetros de Stokes[22]. Os parâmetros de Stokes caracterizam totalmente o estado de polarização de um feixe monocromático, sendo eles

$$s_1 = \frac{I_{0^\circ} - I_{90^\circ}}{I_{0^\circ} + I_{90^\circ}}, \quad (2.32a)$$

$$s_2 = \frac{I_{45^\circ} - I_{135^\circ}}{I_{45^\circ} + I_{135^\circ}} \text{ e} \quad (2.32b)$$

$$s_3 = \frac{I_{\odot} - I_{\ominus}}{I_{\odot} + I_{\ominus}}. \quad (2.32c)$$

Os termos $I_{0^\circ}, I_{45^\circ}, I_{90^\circ}$ e I_{135° são as intensidades das componentes de polarização do feixe nas direções $\theta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ e 135° respectivamente, enquanto que os termos I_{\odot} e I_{\ominus} são as intensidades das componentes de polarização circular para a direita e para a esquerda, respectivamente. Os parâmetros de Stokes satisfazem

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1, \quad (2.33)$$

fazendo com que qualquer estado de polarização com polarização definida seja um ponto na superfície de uma esfera de raio unitário. Essa esfera é conhecida como esfera de

Poincaré. Em seus polos estão os estados associados ao momento angular de spin, ou seja, luz polarizada circularmente à direita e à esquerda, e no equador estão os estados da luz linearmente polarizada.

M. J. Padgett e J. Courtial fizeram na referência [23] uma associação entre os estados de polarização e os modos transversos de primeira ordem, dando origem a uma representação análoga à da polarização, ou seja, uma esfera de Poincaré para feixes contendo momento angular orbital. Para os modos de primeira ordem, os novos parâmetros de Stokes propostos, análogos aos anteriores, são

$$\sigma_1 = \frac{I(HG_{1,0}^{0^\circ}) - I(HG_{1,0}^{90^\circ})}{I(HG_{1,0}^{0^\circ}) + I(HG_{1,0}^{90^\circ})}, \quad (2.34a)$$

$$\sigma_2 = \frac{I(HG_{1,0}^{45^\circ}) - I(HG_{1,0}^{135^\circ})}{I(HG_{1,0}^{45^\circ}) + I(HG_{1,0}^{135^\circ})} \text{ e} \quad (2.34b)$$

$$\sigma_3 = \frac{I(LG_0^1) - I(LG_0^{-1})}{I(LG_0^1) + I(LG_0^{-1})}, \quad (2.34c)$$

com $I(HG_{m,n}^\alpha)$ sendo a intensidade de um modo Hermite-Gaussiano na orientação α de ordem $N = n + m$ e $I(LG_p^l)$ a intensidade de um modo Laguerre-Gaussiano de ordem $N = 2p + |l|$. Se o feixe puder ser decomposto apenas em componentes HG ou LG de primeira ordem, estes novos parâmetros de Stokes satisfazem

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 = 1. \quad (2.35)$$

Assim como no caso da polarização, esses parâmetros podem ser interpretados como coordenadas de um espaço que representa os modos de primeira ordem como pontos na superfície de uma esfera. Nos polos estão os modos Laguerre-Gaussianos e no equador os modos Hermite-Gaussianos em diferentes inclinações.

2.4.2 Método das Lâminas de onda Espirais

Talvez o método mais óbvio de se produzir feixes com frente de onda helicoidal, o método das lâminas de onda espirais consiste em passar o feixe por uma lâmina de onda cuja espessura óptica cresce com a posição azimutal, sendo ela $l\lambda\phi/2\pi(n-1)$ com n sendo o índice de refração do meio (Ver figura 2.6). Este método ilustra bem porquê um feixe de frente de onda helicoidal deve carregar momento angular orbital [25] [26].

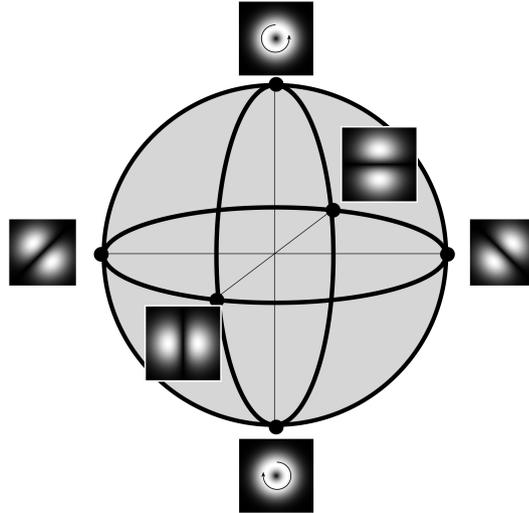


Figura 2.5: Esfera de Poincaré para os Modos Transversos.

Se for considerada luz incidindo sobre uma lâmina de onda espiral, ao sair desse componente óptico ela é refratada na direção azimutal com um ângulo α , como ilustrado na figura (??). Portanto, seu momento linear por fóton adquire uma componente azimutal $p_\phi = n\frac{h}{\lambda} \sin \alpha$. Em um dado raio r , o momento angular na direção Z de propagação pode ser expresso como $L = n\frac{h}{\lambda} r \sin \alpha$. Na aproximação de pequenos ângulos, é possível demonstrar que o momento angular por fóton é $L = l\hbar$ [24].

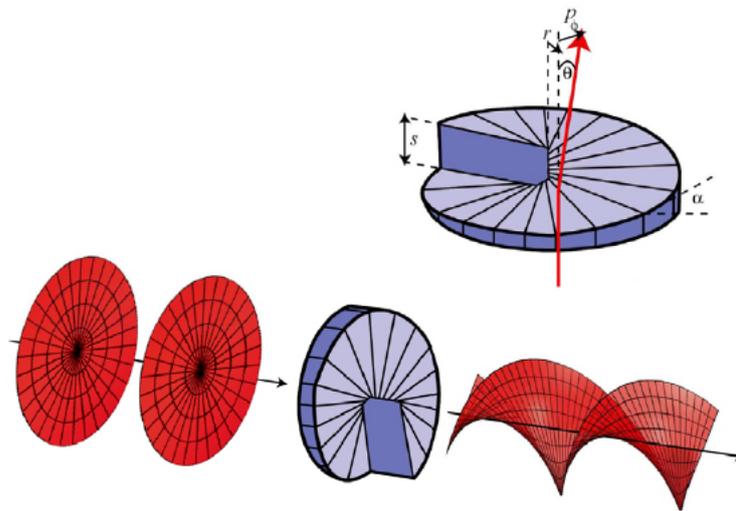


Figura 2.6: Lâmina de onda espiral gerando um feixe laguerre gaussiano a partir de um gaussiano. Neste caso, $l = 0 \rightarrow l = 2$ [34].

Embora seja uma ideia simples, em comprimentos de onda ópticos ela requer extrema precisão no comprimento dos degraus da superfície helicoidal. Outros métodos experimentalmente mais viáveis serão apresentados a seguir.

2.4.3 Método Holográfico

Uma onda eletromagnética monocromática pode ser descrita por dois aspectos: amplitude e fase. Uma fotografia normal guarda somente informação sobre o quadrado da amplitude da onda. Um holograma é um padrão de interferência entre duas ondas eletromagnéticas que carrega informação sobre a amplitude e sobre a fase dessas duas ondas, uma delas plana, chamada de referência, e a outra com distribuição arbitrária, chamada de objeto. Com isso, uma onda plana incidindo sobre este padrão de interferência terá, depois de passar pelo holograma, a mesma amplitude e fase da onda objeto e, portanto, será indistinguível da mesma. Mas primeiro é importante observar os padrões de interferên-

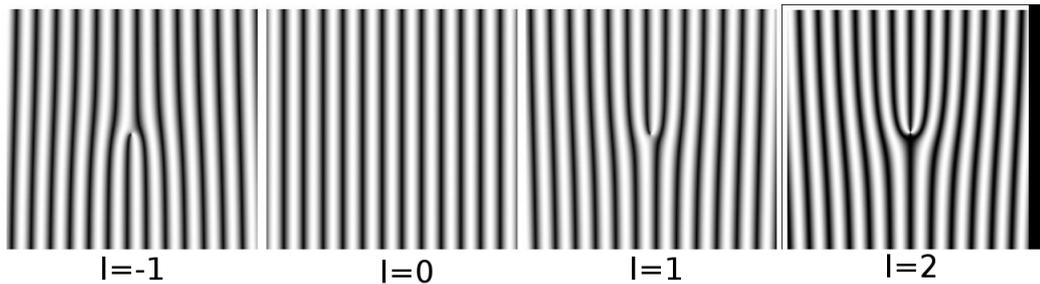


Figura 2.7: Padrões de interferência entre feixes laguerre gaussianos de $l = -1, 0, 1$ e 2 e TEM00 simulados no software WOLFRAM MATHEMATICA

cia dos modos laguerre-gaussianos com o modo fundamental. A figura (??) mostra esses padrões em um simulação computacional. Com esses padrões é possível gerar máscaras com hologramas de fase. Elas são placas transparentes com o relevo alterado no formato dos padrões de interferência. O processo experimental para a produção das mesmas não é tema dessa dissertação, mas pode ser encontrado detalhadamente descrito na referência [27].

Spatial Light Modulator (SLM)

Ainda utilizando o método holográfico, é possível substituir as máscaras de fase por moduladores espaciais de luz (SLM). Eles são equipamentos que impõem uma modulação

programável num feixe de luz. Embora sejam comumente associados à modulação da intensidade, o equipamento utilizado neste experimento modula a fase. Utilizamos nesta dissertação o Modulador Espacial de Luz de Cristal Líquido em Silício (LCOS-SLM), produzido pela empresa HAMAMATSU®.

O SLM é um modulador espacial de fase da luz, baseado em tecnologia de cristal líquido em Silício (LCOS). O cristal líquido (LC) é controlado por voltagem direta, e pode modular a frente de onda de um feixe laser. O LCOS-SLM é projetado para atingir alta eficiência na utilização da luz de vários pontos de vista, como reflexividade, raio de abertura e ruído de difração devido à estrutura dos pixels. [28]. Ele é controlado por computador e composto por duas partes. A primeira é o controlador, que é ligado a um

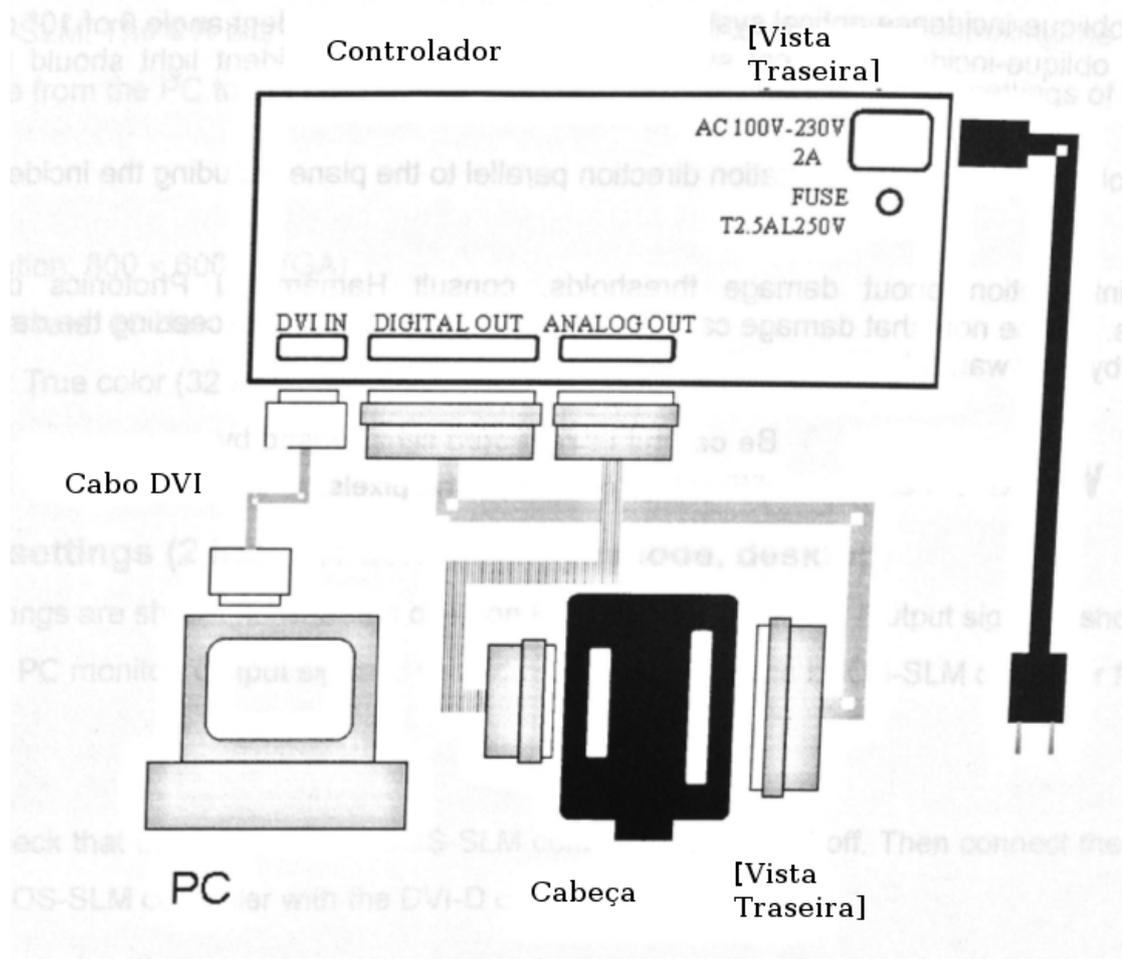


Figura 2.8: Esquema de Montagem do LCOS-SLM da Hamamatsu® fornecido dentro do manual de operação.

computador por um cabo DVI-D. Ele é usado para compensar eficientemente distorções no chip LCOS(Liquid Crystal on Silicon), como distorções na frente de onda e resposta

não-linear do cristal líquido. A segunda é a cabeça, contendo a estrutura de pixels onde o feixe de luz será modulado. A cabeça do SLM é conectada ao controlador por dois cabos, um analógico e outro digital. Na cabeça encontra-se o chip LCOS que possui uma camada de cristal líquido cujas moléculas alongadas são orientadas pela voltagem local aplicada em cada pixel. A modulação de fase muda de acordo com a orientação do cristal líquido.

2.4.4 Conversor de modos por Astigmatismo

A caracterização de um modo laguerre-gaussiano nem sempre é viável pelo método interferométrico. Em regimes de intensidade baixa, a interferometria se torna inviável, pois a intensidade final é de apenas metade do feixe a ser caracterizado. O perfil de intensidade de um feixe laguerre-gaussiano não dá informação imediata sobre seu número l , associado ao momento angular. Embora a intensidade cresça radialmente com potência $|l|$, usar essa distribuição para determinar l pode ser enganador, uma vez que devem ser levados em consideração fatores como ampliação e possível imprecisão experimental. Os modos hermite-gaussianos, por sua vez, não possuem essa indeterminação, pois seus números n e m são facilmente observáveis se contadas as linhas nodais dos modos. Para converter um modo laguerre-gaussiano em um hermite-gaussiano pode ser usado o conversor de lentes cilíndricas. A equação (2.27) mostra como os modos se relacionam e, para os modos de primeira ordem, a equação (2.29) também.

No conversor de lentes cilíndricas pode ser incidido um feixe Hermite-gaussiano inclinado em 45° e, ao ser decomposto em modos Hermite-gaussianos das duas componentes transversais a propagação, as componentes de uma dessas direções ganham uma fase relativa à outra. Essa fase adicionada é o motivo pelo qual o feixe deixa de ser um hermite gaussiano inclinado e passa a ser um modo laguerre gaussiano.

2.4.5 Método da lente Oblíqua

Uma maneira de se descrever a propagação paraxial de um feixe, seja propagação livre ou através de um instrumento óptico, é a integral de Huygens-Fresnel [17]:

$$E_2(x_2, y_2; z_2) = \iint dx_1 dy_1 E_1(x_1, y_1; z_1) G(x_1, y_1; z_1, x_2, y_2; z_2). \quad (2.36)$$

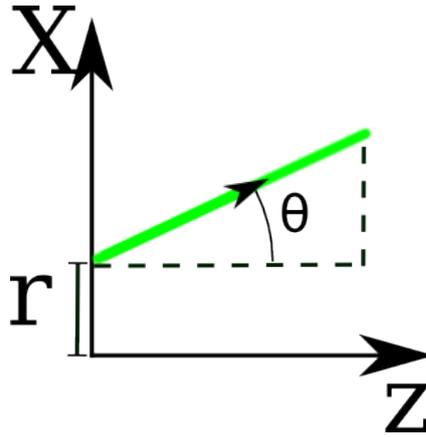


Figura 2.9: Representação de raios paraxiais.

Esta integral é a representação matemática do princípio de Fresnel-Huygens, de que todos os pontos de uma frente de onda podem ser interpretados como fontes de uma segunda onda a uma distância z na direção de propagação. A função $G(x_1, y_1; z_1, x_2, y_2; z_2)$ é chamada de propagador e nela está contida a dinâmica que os instrumentos ópticos introduzem no feixe.

Usando a representação de raios[21], que por definição são normais à frente de onda, é possível expressar a evolução de ondas complexas ao atravessar instrumentos ópticos de maneira simples, na forma

$$\begin{bmatrix} r_{out} \\ r'_{out} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} r_{in} \\ r'_{in} \end{bmatrix}, \quad \text{onde } M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

M é a matriz 2×2 que representa a evolução do raio, r_i a sua posição no plano de simetria e r'_i sua inclinação com relação ao eixo de propagação. Exemplos comuns de matrizes são

$$\text{Propagação Livre em Meio Homogêneo} = \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.38a)$$

$$\text{Lente Fina de Distância focal } f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{f} & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.38b)$$

$$\text{Espelho Esférico de Raio de curvatura } R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-2}{R} & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.38c)$$

$$\text{Interface Dielétrica: Índices de Refração } n_1 \text{ e } n_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}. \quad (2.38d)$$

$$(2.38e)$$

A evolução final de um raio é dada pelo produto de todas as matrizes M que representam cada etapa da sua evolução.

$$M_{total} = M_1 M_2 M_3 M_4 \dots \quad (2.39)$$

No caso bidimensional onde a simetria em torno do eixo de propagação não é válida, é possível decompor o raio em dois planos e tratá-los de forma independente. Isso faz com que a matriz M deixe de ser uma matriz 2×2 e se torne uma matriz 4×4 .

$$\begin{bmatrix} x_{out} \\ y_{out} \\ x'_{out} \\ y'_{out} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_{in} \\ y_{in} \\ x'_{in} \\ y'_{in} \end{bmatrix}. \quad (2.40)$$

O método da lente Oblíqua consiste em utilizar uma lente biconvexa e incliná-la, de forma a quebrar a simetria em torno do eixo de propagação e fazer com a distância focal em uma das direções seja menor que da outra. Assim, a lente inclinada oblíquamente de um ângulo θ pode ser descrita pela matriz

$$M_\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{f_x} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{f_y} & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.41)$$

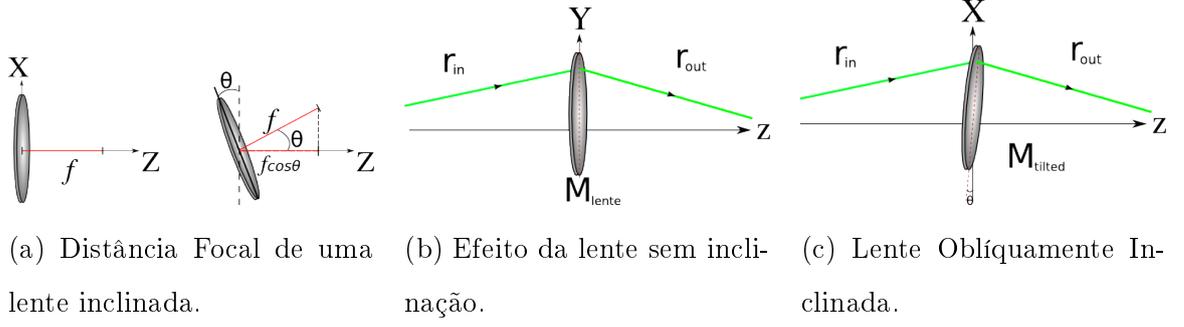


Figura 2.10: Método da Lente Obliquamente Inclinada

com $f_x = f \cos \theta$ e $f_y = f / \cos \theta$. Porém, para se descrever a situação real na qual o feixe se propaga livremente por uma distância z_0 , passa pela lente inclinada e depois se propaga livremente por uma distância z , a matriz M será

$$M_{tot} = M_z M_\theta M_{z_0} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & b_2 \\ c_1 & 0 & d_1 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - \frac{z \sec \theta}{f}) & 0 & (z + z_0(1 - \frac{z \sec \theta}{f})) & 0 \\ 0 & (1 - \frac{z \cos \theta}{f}) & 0 & (z + z_0(1 - \frac{z \cos \theta}{f})) \\ -(\frac{\sec \theta}{f}) & 0 & (1 - \frac{z_0 \sec \theta}{f}) & 0 \\ 0 & -(\frac{\cos \theta}{f}) & 0 & (1 - \frac{z_0 \cos \theta}{f}) \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

Seguindo de perto a referência [41], vemos que o campo de um vórtice óptico no plano de seu diâmetro mínimo em sua menor ordem radial ($p = 0$) é descrito por:

$$E_1(x_1, y_1) = (x_1 + i\epsilon y_1)^m \exp \left[- \left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{w_0^2} \right) \right], \quad \epsilon = \pm 1. \quad (2.43)$$

A expressão para o campo após passar pelo método das lentes Obliquas é dada pela integral de Fresnel-Huygens:

$$E_2(x_2, y_2; z_2) = \frac{i/\lambda}{|b_1 b_2|^{1/2}} \iint dx_1 dy_1 E_1(x_1, y_1; z_1) e^{-i(\pi/\lambda)\phi(x_1, y_1, x_2, y_2)}, \quad (2.44)$$

onde

$$\phi(x_1, y_1, x_2, y_2) = \frac{x_1^2 a_1}{b_1} + \frac{y_1^2 a_2}{b_2} + \frac{x_2^2 d_1}{b_1} + \frac{y_2^2 d_2}{b_2} - 2 \left(\frac{x_1 x_2}{b_1} + \frac{y_1 y_2}{b_2} \right). \quad (2.45)$$

Por final, obtêm-se:

$$E_2(x_2, y_2) = \frac{k w_1 w_2 (i/2)^m + 1}{b_1 b_2^{1/2}} \exp [-(\beta_1 x_2^2 + \beta_2 y_2^2)] \gamma^m H_m [\alpha_1 x_2 + i\epsilon \alpha_2 y_2 / \gamma], \quad (2.46)$$

onde

$$\frac{1}{w_j^2} = \frac{1}{w_0^2} + \frac{ka_j}{2b_j}, \quad \gamma = (w_1^2 - w_2^2)^{1/2},$$

$$a_j = \frac{kw_j^2}{2b_j} \quad \text{e} \quad \beta_j = \left(\frac{kw_j}{2b_j}\right)^2 + i\frac{kd_j}{2b_j}.$$

O campo resultante tem sua distribuição dada por um polinômio de Hermite de argumento complexo de ordem m . Isso quer dizer que um feixe que era inicialmente um feixe laguerre-gaussiano de ordem $|m|$, após passar pelo conversor de lentes oblíquas, se torna um feixe hermite-gaussiano de ordem m inclinado à 45° . O sentido de sua inclinação depende do sinal de m . Como a ordem de um polinômio de Hermite determina a quantidade de franjas escuras no perfil transversal do feixe, apenas pela distribuição de intensidade é possível determinar sua ordem.

3 Introdução à Óptica não linear

Óptica não linear é o estudo dos fenômenos que ocorrem como consequência da resposta não linear de um sistema material na presença de luz. Como esses fenômenos dependem da intensidade da luz incidente, somente em 1961 [29] eles começaram a ser estudados, graças à invenção do laser em 1960[30]. A geração de segundo harmônico, por exemplo, ocorre como resultado da contribuição quadrática da resposta do material ao campo óptico aplicado.

Materiais Dielétricos e Polarização

Do ponto de vista da resposta eletromagnética, existem dois tipos de materiais: condutores e dielétricos. Condutores são aqueles nos quais as cargas elétricas possuem mobilidade. Nos dielétricos, as cargas elétricas encontram-se ligadas a átomos ou moléculas e não possuem mobilidade, estando restritas a pequenos deslocamentos em torno de uma posição de equilíbrio. Esses deslocamentos podem ocorrer de várias maneiras. Se o material, por exemplo, for composto por átomos neutros, o campo elétrico induzirá um momento de dipolo em cada um deles, apontando na direção do campo. Se o material for composto por moléculas polares, cada dipolo permanente sofrerá um torque, tendendo a se alinhar com o campo.

Com isso, para descrever mais precisamente o conceito de não-linearidade óptica, é preciso definir o vetor polarização $\vec{P}(t)$, ou momento de dipolo por unidade de volume, de um sistema material, o qual depende da potência do campo aplicado $\vec{E}(t)$. Para isso, é possível expressar a componente i da polarização como:

$$\begin{aligned} P_i &= \varepsilon_0 \left(\chi_{ij}^{(1)} E_j + \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l + \dots \right) \\ &\equiv \varepsilon_0 \left(P_i^L + P_i^{\text{NL}} \right). \end{aligned} \tag{3.1}$$

Os termos $\chi^{(i)}$ são tensores de ordem $i+1$ conhecidos como susceptibilidades ópticas de ordem i . O primeiro termo $\chi^{(1)}$ é a susceptibilidade linear. A susceptibilidade de segunda ordem $\chi^{(2)}$ pode ser definida como um tensor contendo as componentes cartesianas rela-

cionando a polarização não linear com produtos das componentes dos campos, de acordo com

$$\vec{P}^{(2)}(t) = \vec{P}(\omega_n)e^{-i\omega_n t}, \quad (3.2)$$

e

$$P_i^{(2)}(\omega_n + \omega_m) = \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_n + \omega_m, \omega_n, \omega_m) E_j(\omega_n) E_k(\omega_m). \quad (3.3)$$

Assim como no capítulo anterior, ficou convencionada a soma implícita de índices repetidos. Aqui os índices ijk se referem às componentes cartesianas dos campos. É importante notar que quando feita a soma sobre n e m , a quantidade $(\omega_n + \omega_m)$ deve ser mantida fixa, mesmo que ω_n e ω_m possam variar. Como será mostrado na seção (3.1), os termos do lado direito da equação (3.1) podem ser interpretados como fontes de campos elétricos.

Com o campo de um laser de $15mW/cm^2$ de potência temos, tipicamente:

$$\chi^{(1)} E \approx 2,055 \frac{V}{m} \quad \text{e} \quad \chi^{(2)} E^2 \approx 1,072 \times 10^{-11} \frac{V}{m}. \quad (3.4)$$

Típicamente o valor de $\chi^{(1)}$ para matéria condensada é da ordem de um. O valor usado para $\chi^{(2)}$ foi calculado, a partir dos parâmetros do fabricante para o cristal KTP usado no experimento que será descrito na seção (5.3).

Como será mostrado nas seções posteriores, esses termos da polarização agem como fontes de campo elétrico. Esta diferença nas ordens de grandeza mostra porquê fenômenos não lineares requerem fontes de luz intensas como os lasers para serem observados.

3.1 Meios não lineares

Meios não-lineares são aqueles que apresentam na polarização uma resposta proporcional a potências do campo elétrico aplicado. Essa proporcionalidade é dada pelo tensor susceptibilidade óptica. O tensor susceptibilidade óptica é uma propriedade do meio material e, dependendo da sua geometria e dos elementos que o constituem, apresenta propriedades que podem amplificar ou diminuir efeitos, como a geração de soma de frequências, geração de diferença de frequências, amplificação paramétrica e geração de segundo harmônico. A forma dos tensores susceptibilidade óptica linear e não-linear é restringida pelas propriedades de simetria do meio óptico. O principal caso de interesse desta dissertação é o de segunda ordem ($\chi^{(2)}$). Ele contém uma série de simetrias que podem ser generalizadas

para os de ordem superior. Entre elas estão a simetria causada pela condição de realidade dos campos, que diz que

$$\chi_{ijk}^{(2)}(-\omega_n - \omega_m, -\omega_n, -\omega_m) = \chi_{ijk}^{(2)*}(\omega_n + \omega_m, \omega_n, \omega_m), \quad (3.5)$$

a simetria de permutação intrínseca :

$$\chi_{ijk}^{(2)}(\omega_n + \omega_m, \omega_n, \omega_m) = \chi_{ikj}^{(2)}(\omega_n + \omega_m, \omega_m, \omega_n), \quad (3.6)$$

a simetria de meios sem perda:

$$\begin{aligned} \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) &= \chi_{jki}^{(2)}(\omega_1 = -\omega_2 + \omega_3) \\ &= \chi_{kij}^{(2)}(\omega_2 = \omega_3 - \omega_1) \\ &= \chi_{jki}^{(2)}(-\omega_1 = \omega_2 - \omega_3) \quad \text{e} \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\chi_{ijk}^{(2)} \in \mathbb{R}, \quad (3.8)$$

e a simetria de Kleinman. Essa última é válida quando as frequências das ondas ópticas são muito menores que a menor frequência de ressonância do sistema material. Sob essa condição, a susceptibilidade não-linear é independente de frequência e responde quase que instantaneamente ao campo aplicado. Isso também permite interpretar o meio como livre de perdas, tornando a simetria (3.7) também válida. Por isso, para esses casos é possível inferir que

$$\begin{aligned} \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) &= \chi_{jki}^{(2)}(\omega_1 = -\omega_2 + \omega_3) = \chi_{kij}^{(2)}(\omega_2 = \omega_3 - \omega_1) \\ &= \chi_{ikj}^{(2)}(\omega_3 = \omega_2 + \omega_1) = \chi_{jik}^{(2)}(\omega_1 = \omega_3 - \omega_2) \\ &= \chi_{kij}^{(2)}(\omega_2 = -\omega_1 + \omega_3) \end{aligned} \quad (3.9)$$

e isso, sobre a condição de que $\chi^{(2)}$ não depende das frequências, leva ao seguinte resultado :

$$\begin{aligned} \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) &= \chi_{jki}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) = \chi_{kij}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) \\ &= \chi_{ikj}^{(2)}(\omega_3 = \omega_2 + \omega_1) = \chi_{jik}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2) \\ &= \chi_{kij}^{(2)}(\omega_3 = \omega_1 + \omega_2). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Esse resultado é conhecido como a simetria Kleinman e é válido sempre que a dispersão puder ser desprezada ou se tratar da geração de segundo harmônico.

Existe uma notação compacta muito usada quando a simetria Kleinman é válida. Usa-se o tensor geral

$$d_{ijk} = \frac{1}{2}\chi_{ijk}^{(2)}. \quad (3.11)$$

Sempre que a simetria de Kleinman for válida ou se tratar da geração de segundo harmônico, podemos assumir que d_{ijk} é simétrico nos dois últimos índices e, por isso, é possível simplificar essa notação introduzindo a matriz compacta d_{il} nas quais os índices se relacionam da seguinte forma:

$$\begin{array}{l} jk : \quad 11 \quad 22 \quad 33 \quad 23,32 \quad 31,13 \quad 12,21 \\ l : \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad . \end{array}$$

O tensor susceptibilidade óptica de segunda ordem pode então ser representado como uma matriz 3×6 .

$$d_{il} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

De maneira mais prática, para uma geometria fixa, é possível expressar a polarização não linear que origina a geração de soma de frequências através da relação escalar

$$P(\omega_3) = 4d_{eff}E(\omega_1)E(\omega_2), \quad (3.13)$$

e de forma análoga para a geração de segundo harmônico

$$P(2\omega) = 2d_{eff}E^2(\omega), \quad (3.14)$$

onde

$$E(\omega) = |\vec{E}(\omega)| = \left[\sum_j E_j^2(\omega) \right]^{1/2}.$$

Um método detalhado para se calcular d_{eff} pode ser encontrado em Midwinter e Warner[31].

Equação de Onda na matéria.

Em meios materiais as equações de Maxwell se transformam, e os campos elétrico e magnético podem ser substituídos pelos campos \vec{D} e \vec{H} . \vec{D} é o deslocamento elétrico. Em algumas literaturas \vec{H} é chamado de campo magnético e \vec{B} de indução magnética. Nesta dissertação \vec{B} será chamado de campo magnético e \vec{H} permanecerá sem nome. Assim, as

equações de Maxwell são

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho; \quad (3.15a)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0; \quad (3.15b)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; \quad (3.15c)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J}, \quad (3.15d)$$

sendo

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad e \quad (3.16a)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}. \quad (3.16b)$$

A princípio só interessam soluções para regiões do espaço sem cargas ou correntes livres, tais que

$$\rho = 0 \quad e \quad \vec{J} = \vec{0}. \quad (3.17)$$

Assumindo que o material seja não magnético,

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}. \quad (3.18)$$

Com isso é possível prosseguir como na seção (2.2), tomando-se o rotacional da equação (3.15c).

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{\nabla} \times \vec{B}}{\partial t}; \\ \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \vec{\nabla} \times \vec{H}}{\partial t}; \\ \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} &= -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2}; \end{aligned}$$

É importante ressaltar que o termo $\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})$ só é nulo quando tratamos de meios lineares, isotrópicos e sem cargas livres. Contudo, na óptica não linear esse termo é não-nulo até para meios isotrópicos. Felizmente ele pode ser desprezado para os casos de interesse. De forma mais geral, ele pode facilmente ser mostrado como pequeno, especialmente quando usada a aproximação de amplitude lentamente variável(4.10). Considerando isso e usando a relação (3.16a), obtêm-se que

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2}. \quad (3.19)$$

Separando a polarização em sua parte linear e não linear, como nas equações (3.1), se chega em:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{(1 + \chi^{(1)})}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{P}^{NL}}{\partial t^2}. \quad (3.20)$$

Se comparada com a equação (2.13a), vemos que essa equação tem a forma da equação de onda não homogênea. A resposta não-linear do meio age como uma fonte que aparece no lado direito desta equação. Uma das consequências disso é que aparecerão termos que serão interpretados como fontes de ondas com frequências diferentes das incidentes. Na ausência deste termo, a equação (3.20) admite soluções da forma de ondas livres se propagando com velocidade c/n , com $n = [\varepsilon^{(1)}]^{1/2}$ sendo o índice de refração linear e $\varepsilon^{(1)}(\omega_n) = (1 + \chi^{(1)}(\omega_n))$. É útil escrever o campo elétrico e a polarização como sendo formados pelo produto de dois termos, um deles representando a variação lenta e o outro a rápida. É possível também escrevê-los como superposição de vários campos, separados pela frequência de oscilação rápida, da forma

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_n \vec{E}'_n(\vec{r}) e^{-i\omega_n t} + c.c., \quad (3.21a)$$

$$\vec{P}^{NL}(\vec{r}, t) = \sum_n \vec{P}'^{NL}_n(\vec{r}) e^{-i\omega_n t} + c.c.. \quad (3.21b)$$

Com isso, ao usar as formas (3.21) a equação (3.20) se torna

$$\nabla^2 \vec{E}'_n(\vec{r}) + \frac{\omega_n^2}{c^2} \varepsilon^{(1)}(\omega_n) \cdot \vec{E}'_n(\vec{r}) = -\frac{\omega_n^2}{c^2} \vec{P}'^{NL}_n(\vec{r}). \quad (3.22)$$

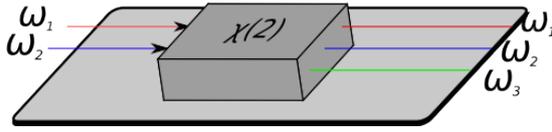
3.2 Processos não lineares de segunda ordem

Processos não lineares de segunda ordem são consequências da resposta quadrática do meio material ao campo elétrico aplicado. Como é possível observar na equação (3.3), essa resposta não acontece necessariamente na mesma direção em que o campo incidente está polarizado:

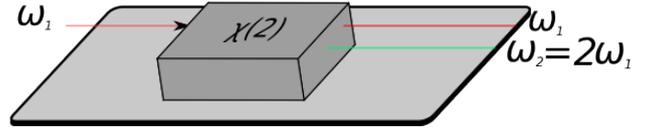
$$P_i^{(2)}(\omega_n + \omega_m) = \chi_{ijk}^{(2)}(\omega_n + \omega_m, \omega_n, \omega_m) E_j(\omega_n) E_k(\omega_m). \quad (3.3 \text{ revisitada})$$

3.2.1 Mistura de Ondas

De maneira ilustrativa, pode-se considerar o caso de dois feixes paraxiais bem colimados e monocromáticos de frequências ω_1 e ω_2 se propagando no eixo z incidindo normalmente



(a) Mistura de ondas feita por um cristal não linear.



(b) Geração de Segundo Harmônico.

Figura 3.1: Processos Não Lineares.

com polarizações ortogonais sobre um material não linear de casamento de fase de tipo II. Os campos elétricos dos feixes tem a forma

$$\vec{E}_1(t) = A_1 \exp(ik_1z - \omega_1t) \hat{e}_1 + c.c. \quad (3.23a)$$

$$\vec{E}_2(t) = A_2 \exp(ik_2z - \omega_2t) \hat{e}_2 + c.c., \quad (3.23b)$$

e o termo de segunda ordem da polarização

$$\begin{aligned} P_n^{(2)}/2 = & d_{n1}(|A_1|^2 + A_1^2 e^{i2k_1z} e^{-i2\omega_1t} + A_1^{*2} e^{-i2k_1z} e^{+i2\omega_1t}) \\ & + d_{n2}(|A_2|^2 + A_2^2 e^{i2k_2z} e^{-i2\omega_2t} + A_2^{*2} e^{-i2k_2z} e^{+i2\omega_2t}) \\ & + d_{n6}(A_1 A_2 e^{i(k_1+k_2)z} e^{-i(\omega_1+\omega_2)t} + A_1^* A_2 e^{i(-k_1+k_2)z} e^{-i(-\omega_1+\omega_2)t} \\ & + A_1 A_2^* e^{i(k_1-k_2)z} e^{-i(\omega_1-\omega_2)t} + A_1^* A_2^* e^{i(-k_1-k_2)z} e^{-i(-\omega_1-\omega_2)t}). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Existem na equação acima termos com frequências $2\omega_1$, $2\omega_2$, $\omega_1 + \omega_2$, $\omega_1 - \omega_2$, 0 e seus conjugados complexos. Eles são correspondentes a processos de mistura de ondas. Entre estes processos estão a *geração de segundo harmônico* (2ω), *geração de soma de frequências* ($\omega_1 + \omega_2$), *geração de diferença de frequências* ($\omega_1 - \omega_2$) e *retificação óptica* ($\omega = 0$).

Quando falamos de mistura de ondas, é comum definir o feixe de maior comprimento de onda como feixe *bombeio* e os outros dois como feixe *sinal* e *complementar*. No processo de geração de diferença de frequências, os feixes incidentes são o bombeio e o sinal e o gerado é o complementar. Já no processo de geração de soma de frequências, o feixe gerado é o bombeio e os incidentes são sinal e complementar. É importante notar que, no caso da geração de segundo harmônico, os feixes sinal e complementar tem o mesmo comprimento de onda.

Casamento de Fase

Quando $P^{(2)}$ é interpretado como fonte de um terceiro campo, a equação de onda para este terceiro campo levará ao aparecimento da quantidade Δk , como será mostrado no capítulo 4. Ela é chamada de casamento de fase e é definida como

$$\Delta \vec{k} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3, \quad (3.25)$$

	<i>Sinal</i>	<i>Complementar</i>	<i>Bombeio</i>	
$\Delta \vec{k}$	$= \vec{k}_1$	\vec{k}_2	\vec{k}_3	
Tipo I	\Rightarrow	\rightarrow	\uparrow	,
Tipo II	\Rightarrow	\uparrow	\uparrow	

com

$$|\vec{k}_i| = \frac{n_i(\omega_i)\omega_i}{c} \quad \text{e} \quad n_i = (\varepsilon^{(1)}(\omega_i))^{1/2}. \quad (3.26)$$

O casamento de fase depende da polarização, dos comprimentos de onda dos feixes envolvidos e do índice de refração linear do material. Casamento de fase tipo I é quando o feixe complementar tem mesma polarização que o feixe sinal. Casamento de fase tipo II é quando o feixe complementar tem polarização ortogonal à do sinal. Ele é um fator importante para a observação dos efeitos não lineares, pois quanto menor $|\Delta \vec{k}|$, maior é a amplitude da onda gerada. Esse foi um obstáculo que impediu efeitos não lineares de serem observados antes. Somente com o advento da produção de materiais birrefringentes, a diferença nos comprimentos de onda foi compensada de forma a minimizar $\Delta \vec{k}$.

A condição conhecida como *casamento de fase perfeito* é quando $\Delta \vec{k} = 0$. Quando ela é atingida, a amplitude da onda gerada é máxima. De um ponto de vista microscópico, seria como se os dipolos atômicos que constituem o material estivessem em fase de forma que o campo emitido por cada dipolo se somaria com o de outro de forma coerente na direção de propagação.

3.2.2 Geração de Segundo Harmônico

A geração de segundo harmônico é um caso particular da geração de soma de frequências na qual o feixe incidente no meio óptico não linear tem uma frequência ω_1 e é gerado um feixe com frequência $\omega_2 = 2\omega_1$. Este caso pode ser interpretado como se nas equações (3.23a) e (3.23b) os dois campos tivessem mesma frequência, vetor de onda e amplitude

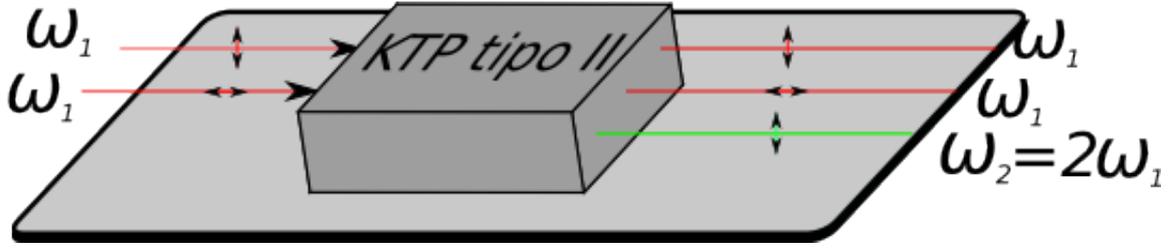


Figura 3.2: Geração de Segundo Harmônico com um cristal não linear de casamento de fase tipo II.

e dessem origem a um campo \vec{E}_3 com frequência $\omega_3 = 2\omega_1$ e vetor de onda \vec{k}_3 . No caso particular de um campo incidente com polarização linear e casamento de fase tipo I, os campos são dados pelas equações

$$\vec{E}_1(t) = A_1 \exp(ik_1z - \omega_1t) \hat{x} + c.c. \quad e \quad (3.27a)$$

$$\vec{E}_3(t) = A_3 \exp(ik_3z - \omega_3t) \hat{x} + c.c. \quad (3.27b)$$

De acordo com as equações (3.13) e (3.14), a polarização não linear para um meio óptico não linear pode ser escrita da forma

$$P^{NL} = P_1(z)e^{-i\omega_1t} + P_3(z)e^{-i\omega_3t}, \quad (3.28a)$$

$$P_1(z) = 4d_{eff}A_3A_1^*e^{i(k_3-k_1)z}, \quad (3.28b)$$

$$P_3(z) = 2d_{eff}A_1^2e^{2ik_1z}. \quad (3.28c)$$

Supondo que estes campos obedecem a equação de onda (3.22), se chega nas equações acopladas das amplitudes

$$\frac{dA_1}{dz} = \frac{8\pi i \omega_1^2 d_{eff}}{k_1 c^2} A_3 A_1^* e^{-i\Delta k z} \quad e \quad (3.29a)$$

$$\frac{dA_3}{dz} = \frac{4\pi i \omega_2^2 d_{eff}}{k_2 c^2} A_1^2 e^{i\Delta k z}, \quad (3.29b)$$

onde

$$\Delta k = 2k_1 - k_2. \quad (3.29c)$$

Essas equações podem ser resolvidas de forma exata em função das funções elípticas de Jacobi, porém isto não será feito nesta dissertação. Mais detalhes podem ser encontrados em [33] e na seção 2.6 da referência [35].

4 Geração de Segundo Harmônico com Vórtices

O trabalho apresentado surge então da união desses dois tópicos já apresentados. Então neste capítulo será feita bordagem teórica do fenômeno de geração de segundo harmônico com vórtices óticos. Uma vez que o dobramento do MAO na geração de segundo harmônico já foi verificado, a ideia central do trabalho é usar feixes com MAOs diferentes e depois verificar experimentalmente os resultados.

Assim como feito no capítulo anterior, a estrutura do cristal não linear bem como os efeitos causados nos vórtices por essa estrutura dentro do cristal serão ignorados, ou seja, serão analisados apenas os campos de entrada e saída, levando em conta a contribuição da resposta não linear do material.

4.1 Equação Paraxial em Meios não lineares

Como foi deduzido na seção (3.1), em meios não lineares os campos eletromagnéticos obedecem à equação (3.22).

$$\nabla^2 \vec{E}'_n(\vec{r}) + \frac{\omega_n^2}{c^2} \varepsilon^{(1)}(\omega_n) \cdot \vec{E}'_n(\vec{r}) = -\frac{\omega_n^2}{c^2} \vec{P}'_n{}^{NL}(\vec{r}). \quad (3.22 \text{ revisitada})$$

Se tratando da geração de segundo harmônico com vórtices óticos com casamento de fase do tipo II, os feixes de entrada têm mesma frequência ω e polarizações ortogonais. Os campos ficam então na forma:

$$\vec{E}_\mu = \vec{E}'_\mu \exp(-i\omega_\mu t) + c.c., \quad (4.1a)$$

$$\vec{E}'_\mu = \sum_{p,l} w^{pl}(\vec{r}) A_{(\mu)}^{pl}(z) \exp(ik_\mu z) \hat{\epsilon}_\mu, \quad (4.1b)$$

$$\mu = h\omega, v\omega, v2\omega. \quad (4.1c)$$

onde v e h são as direções de polarização, sendo

$$u_{(n)}^{pl}(\rho, \phi, z) = \sqrt{\frac{2p!}{\pi(p+|l|)!w_n^2(z)}} \left(\frac{\sqrt{2}\rho}{w_n(z)} \right)^{|l|} L_p^{|l|} \left[\frac{2\rho^2}{w_n^2(z)} \right] \exp \left[-\frac{\rho^2}{w_n^2(z)} \right] \times \\ \times \exp \left[ik_n \frac{\rho^2}{2R(z)} + il\phi - i\phi_{pl}(z) \right], \quad (4.2)$$

com as funções $w(z)$, $R(z)$ e ϕ_{pl} dadas pelas equações (2.21), (2.20) e (2.26) respectivamente. A função $A_{(n)}^{pl}(z)$ é chamada de Amplitude lentamente variável. Desta forma,

$$\int \int dx dy u^{*pl}(\vec{r}) u^{p'l'}(\vec{r}) = \delta_{pp'} \delta_{ll'}. \quad (4.3)$$

Com isso, obtemos:

$$\nabla^2 E'_{h\omega} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{h\omega} E'_{h\omega} = -\frac{\omega^2}{c^2} P'_{h\omega}{}^{NL}, \quad (4.4a)$$

$$\nabla^2 E'_{v\omega} + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_{v\omega} E'_{v\omega} = -\frac{\omega^2}{c^2} P'_{v\omega}{}^{NL}, \quad (4.4b)$$

$$\nabla^2 E'_{v2\omega} + \frac{4\omega^2}{c^2} \epsilon_{v2\omega} E'_{v2\omega} = -\frac{4\omega^2}{c^2} P'_{v2\omega}{}^{NL}. \quad (4.4c)$$

Como

$$N_\mu = (\varepsilon^{(1)}(\omega_\mu))^{1/2}, \quad (4.5a)$$

$$k_\mu^2 = \frac{N_\mu(\omega_\mu)\omega_\mu}{c}, \quad (4.5b)$$

e

$$\nabla^2 = \nabla_\perp^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (4.6)$$

a equação (3.22) se torna

$$(\nabla_\perp^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \left[\sum_{p,l} u^{pl}(\vec{r}) A_{(\mu)}^{pl}(z) \exp(ik_\mu z) \right] + k_\mu^2 [u^{pl}(\vec{r}) A_{(\mu)}^{pl}(z) \exp(ik_\mu z)] = -\frac{\omega_\mu^2}{c^2} P'_\mu{}^{NL}. \quad (4.7)$$

Expandindo o lado esquerdo dessa equação, obtem-se

$$(\nabla_\perp^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \left[\sum_{p,l} u^{pl}(\vec{r}) A_{(\mu)}^{pl}(z) \exp(ik_\mu z) \right] + k_\mu^2 [u^{pl}(\vec{r}) A_{(\mu)}^{pl}(z) \exp(ik_\mu z)] = \\ \exp(ik_\mu z) \left[[\nabla_\perp^2 u^{pl}(\vec{r})] A_{(\mu)}^{pl}(z) + u^{pl}(\vec{r}) \left(\frac{\partial^2 A_{(\mu)}^{pl}(z)}{\partial z^2} + 2ik_\mu \frac{\partial A_{(\mu)}^{pl}(z)}{\partial z} \right) \right] + \\ \exp(ik_\mu z) \left[A_{(\mu)}^{pl}(z) \left(\frac{\partial^2 u^{pl}(\vec{r})}{\partial z^2} + 2ik_\mu \frac{\partial u^{pl}(\vec{r})}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial u^{pl}(\vec{r})}{\partial z} \frac{\partial A_{(\mu)}^{pl}(z)}{\partial z} \right]. \quad (4.8)$$

É possível agora utilizar a aproximação paraxial e a aproximação de amplitude lentamente variável, sendo elas

$$\left| \frac{\partial^2 u^{pl}(\vec{r})}{\partial z^2} \right| \ll k_\mu \left| \frac{\partial u^{pl}(\vec{r})}{\partial z} \right| \quad (4.9)$$

e

$$\left| \frac{\partial^2 A_{(\mu)}^{pl}(z)}{\partial z^2} \right| \ll k_\mu \left| \frac{\partial A_{(\mu)}^{pl}(z)}{\partial z} \right| \quad (4.10)$$

respectivamente. Além disso, usaremos a seguinte aproximação:

$$\left| \frac{\partial A_{(\mu)}^{pl}(z)}{\partial z} \frac{\partial u^{pl}(\vec{r})}{\partial z} \right| \ll k_\mu \left| \frac{\partial A_{(\mu)}^{pl}(z)}{\partial z} \right| \text{ ou } k_\mu \left| \frac{\partial u^{pl}(\vec{r})}{\partial z} \right|. \quad (4.11)$$

Com isso, a equação (4.7) se torna

$$\exp(ik_\mu z) \left[A_{(\mu)}^{pl}(z) \left(\nabla_\perp^2 u^{pl}(\vec{r}) + 2ik_\mu \frac{\partial u^{pl}(\vec{r})}{\partial z} \right) + u^{pl}(\vec{r}) \left(2ik_\mu \frac{\partial A_{(\mu)}^{pl}(z)}{\partial z} \right) \right] = -\frac{\omega_n^2}{c^2} P_\mu'^{NL}. \quad (4.12)$$

Se for lembrado do Capítulo 2 que os modos Laguerre-Gaussianos são soluções da equação paraxial (2.17), isto é,

$$\nabla_\perp^2 u^{pl}(\vec{r}) + 2ik_\mu \frac{\partial u^{pl}(\vec{r})}{\partial z} = 0, \quad (4.13)$$

então da equação (4.12) obtemos

$$u^{pl}(\vec{r}) \left(2ik_\mu \frac{\partial A_{(\mu)}^{pl}(z)}{\partial z} \right) = -\frac{\omega_n^2}{c^2} P_\mu'^{NL}. \quad (4.14)$$

Da equação (3.3), tem-se que

$$P_{h\omega}'^{NL} = \chi^{(2)} E_{v\omega}'^* E'_{v2\omega} = \chi^{(2)} \sum_{p,l} \sum_{q,r} u^{qr}(\vec{r}) A_{(v\omega)}^{qr}(z) u^{pl}(\vec{r}) A_{(v2\omega)}^{pl}(z) \exp(i(k_{v2\omega} - k_{v\omega})z), \quad (4.15a)$$

$$P_{v\omega}'^{NL} = \chi^{(2)} E_{h\omega}'^* E'_{v2\omega} = \chi^{(2)} \sum_{p,l} \sum_{g,h} u^{gh}(\vec{r}) A_{(h\omega)}^{gh}(z) u^{pl}(\vec{r}) A_{(v2\omega)}^{pl}(z) \exp(i(k_{v2\omega} - k_{h\omega})z), \quad (4.15b)$$

$$P_{v2\omega}'^{NL} = \chi^{(2)} E'_{v\omega} E'_{h\omega} = \chi^{(2)} \sum_{q,r} \sum_{g,h} u^{qr}(\vec{r}) A_{(v\omega)}^{qr}(z) u^{pl}(\vec{r}) A_{(v2\omega)}^{pl}(z) \exp(i(k_{v2\omega} + k_{v\omega})z). \quad (4.15c)$$

Usando esse resultado na equação (4.14) e fazendo uso da propriedade (4.3), se obtém as equações acopladas das amplitudes:

$$\Lambda_{pqg}^{lrh}(z) = \int \int dx dy u_n^{pl}(\vec{r}) u_o^{*gh}(\vec{r}) u_m^{*qr}(\vec{r}), \quad (4.16a)$$

$$\frac{\partial A_{(v2\omega)}^{pl}(z)}{\partial z} = \frac{i2\omega}{2k_{v2\omega}c^2} (\Lambda_{pqg}^{lrh}(z))^* A_{(h\omega)}^{qr}(z) A_{(v\omega)}^{gh}(z) e^{i\Delta kz}, \quad (4.16b)$$

$$\frac{\partial A_{(h\omega)}^{qr}(z)}{\partial z} = \frac{i\omega}{2k_{h\omega}c^2} (\Lambda_{pqg}^{lrh}(z)) A_{(v2\omega)}^{pl}(z) A_{(v\omega)}^{*gh}(z) e^{-i\Delta kz}, \quad (4.16c)$$

$$\frac{\partial A_{(v\omega)}^{gh}(z)}{\partial z} = \frac{i\omega}{2k_{v\omega}c^2} (\Lambda_{pqg}^{lrh}(z)) A_{(v2\omega)}^{pl}(z) A_{(h\omega)}^{*qr}(z) e^{-i\Delta kz}, \quad (4.16d)$$

onde $\Lambda_{pqg}^{lrh}(z)$ é chamado de *integral de recobrimento*.

4.2 Conservação do momento angular

A integral de recobrimento contém um produto de modos Laguerre-Gaussianos. A integral na coordenada ϕ é da forma

$$\int_0^{2\pi} \exp[-i(l-r-h)\phi] d\phi \quad (4.17)$$

Para os casos em que $l \neq r+h$ esta integral será nula. Isto quer dizer que quaisquer valores de $l \neq r+h$ resultarão em um recobrimento nulo e, portanto, acoplamento nulo. Como consequência obtêm-se que, *para a geração de soma de frequências e de segundo harmônico feita com modos laguerre-gaussianos $u^{gh}(\vec{r})$ e $u^{qr}(\vec{r})$, o modo laguerre-gaussiano resultante $u^{pl}(\vec{r})$ terá $l = m + n$ ou terá amplitude nula*. Este resultado pode ser interpretado fisicamente como o princípio de conservação do momento angular.

Com isso vemos que, na geração de soma frequências com vórtices, além da onda gerada ter frequência igual à soma das frequências, ela também tem seu momento angular orbital igual à soma dos momentos angulares orbitais das duas ondas. A geração de segundo harmônico pode ser feita com uma única onda polarizada a 45° , mas o único efeito além do dobramento da frequência será o dobramento do momento angular orbital, como observado na referência [38]. Na referência [36] a geração de segundo harmônico é feita de forma que as duas ondas incidentes têm a mesma frequência, polarizações ortogonais e momentos angulares orbitais diferentes, verificando experimentalmente essa conservação.

5 Experimento

O experimento realizado no Laboratório de Óptica Quântica da Universidade Federal Fluminense, que culminou na publicação do artigo [36], teve como intuito verificar experimentalmente o resultado obtido no capítulo 4. O dobramento do momento angular da luz na geração de segundo harmônico já indicava a conservação do momento angular da luz[39]. Com isso foi conjecturado que seria possível realizar adição e subtração arbitrários do momento angular orbital da luz na geração de segundo harmônico.

A hipótese inicial é de que se forem incididos dois feixes coaxiais com momentos angulares orbitais r e h , polarizações ortogonais e mesma frequência num cristal não linear, o feixe resultante da geração de segundo harmônico terá o dobro da frequência e momento angular orbital $l = r + h$. Para isso, um feixe será dividido em dois, cada um dos feixes resultantes adquirirá momentos angulares orbitais diferentes e depois serão reunidos por um divisor de feixes polarizador (PBS, polarizing beam splitter). Eles então serão focalizados dentro de um cristal não linear KTP (fosfato de potássio e titânio, $KTiOPO_4$) em casamento de fase tipo II com o intuito de maximizar a potência e consequentemente, a eficiência da geração. Após a geração, os feixes de comprimento de onda $1064nm$ e $532nm$ são separados por um espelho dicróico. O feixe resultante da geração de segundo harmônico é então convertido por um conversor de lentes levemente inclinadas para um feixe hermite-gaussiano, a fim de determinar seu momento angular orbital. Isso pode ser feito contando o número de linhas nodais do modo hermite-gaussiano convertido. A montagem detalhada do experimento será descrita a seguir.

5.1 Medida da Cintura do Feixe

Com o intuito de caracterizar os feixes, foi necessário utilizar métodos experimentais para medir parâmetros como o diâmetro mínimo(cintura) e a distância de Rayleigh de cada feixe.

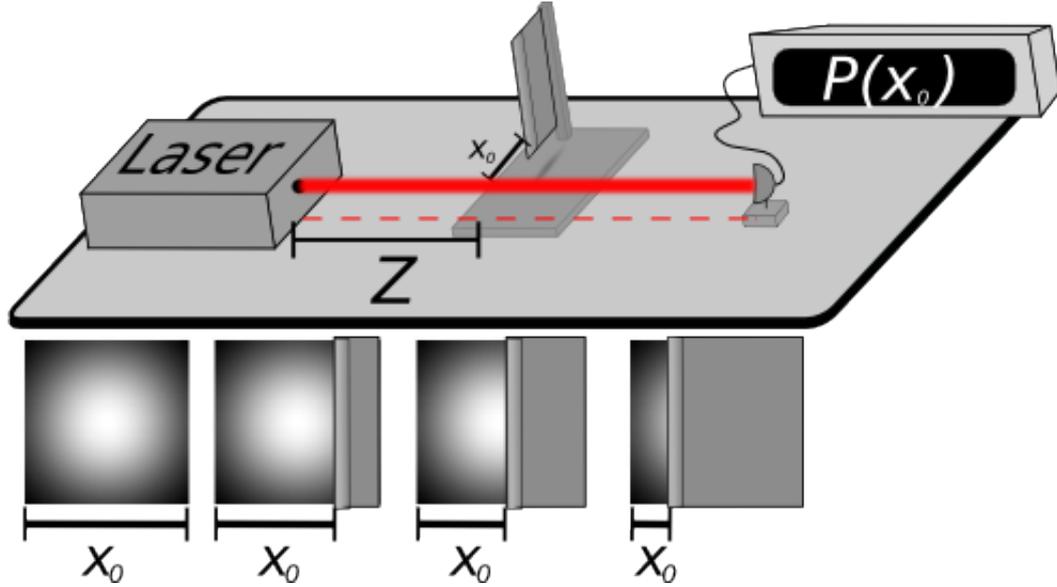


Figura 5.1: Método da Faca.

A irradiância de um feixe é calculada tomando o módulo ao quadrado do campo elétrico, sendo medida em W/m^2 . Ao se integrar esse valor sobre todos os pontos de um plano perpendicular ao plano de propagação, é possível se calcular matematicamente o valor obtido para a intensidade da luz medida por um detector,

$$P_{detector} = \int I dA . \quad (5.1)$$

O *Método da Faca*, como foi nomeado, consiste em, em algum ponto de sua trajetória no eixo z , bloquear parte do feixe com uma lâmina até uma distância arbitrária x_0 a fim de determinar o diâmetro do feixe.

5.1.1 Feixes Gaussianos

Para um modo gaussiano, podemos calcular a intensidade como

$$\begin{aligned} P_{det} &= \int I_{gaussiano} dA, \\ &= \frac{I_{Max}}{w^2(z)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{x_0} e^{-2x^2/w^2(z)} dx e^{-2y^2/w^2(z)} dy \\ &= \frac{I_{Max}}{w^2(z)} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-2\frac{y^2}{w^2(z)}} \int_{-\infty}^{x_0} dx e^{-2\frac{x^2}{w^2(z)}}. \end{aligned}$$

Com o auxílio da *função erro* (erf), cuja definição pode ser [40]

$$erf(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt, \quad (5.2)$$

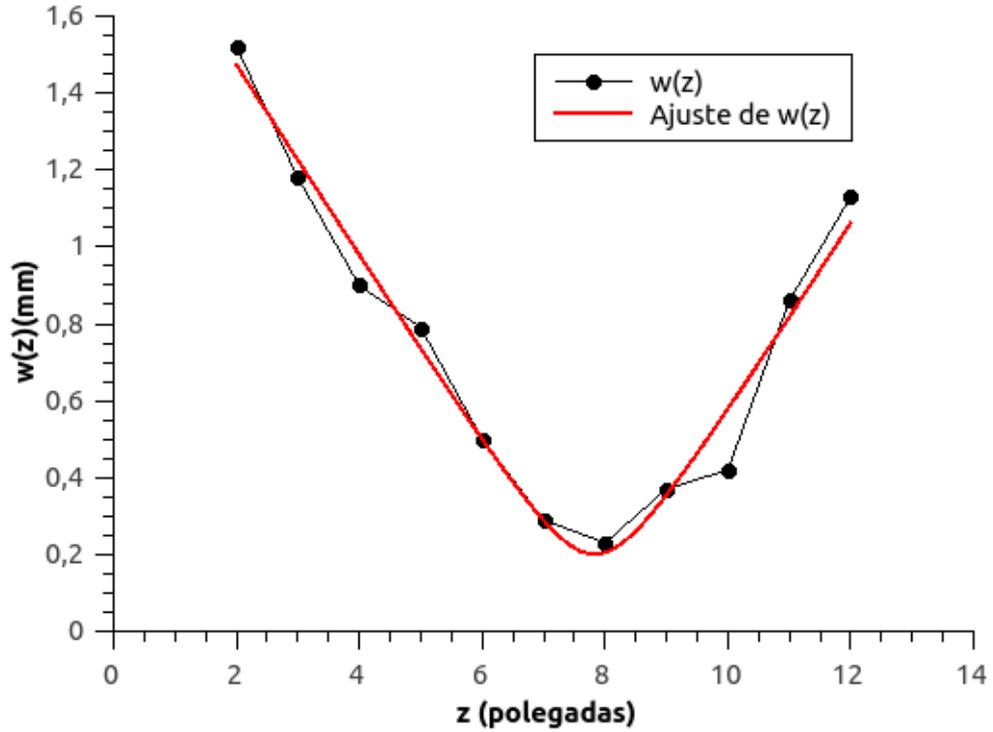


Figura 5.2: Ajuste da função $w(z)$ para o modo fundamental TEM00. Neste ajuste, obteve-se $w_0 = 0,21 \pm 0,05$ mm.

a intensidade detectada pode ser escrita como

$$P_{det} = \frac{I_{Max}}{2} \frac{[1 - erf(x_0 \frac{\sqrt{2}}{w(z)})]}{2} = P_0 \frac{[1 - erf(x_0 \frac{\sqrt{2}}{w(z)})]}{2}. \quad (5.3)$$

Com essa equação é possível varrer o eixo x no plano transversal à trajetória do feixe obtendo valores para a intensidade. Ao se fazer isso, existirão dois casos nos quais

$$P_{det} = \begin{cases} 0,98P_0 & \text{para } x_0 = w(z) \text{ e} \\ 0,02P_0 & \text{para } x_0 = -w(z). \end{cases} \quad (5.4)$$

Por isso, para obter o valor de w_0 usamos a lâmina para bloquear parte do feixe até medir $0,98P_0$ e $0,02P_0$ e anotamos os dois valores de x_0 . A distância que a lâmina percorre entre atingir estes dois valores é igual a $2w(z)$. Ao se fazer isso em diferentes posições do eixo de propagação é possível, através de uma interpolação polinomial, obter um ponto de mínimo para esta curva e, conseqüentemente, o valor de w_0 para aquele feixe.

5.2 Montagem

A montagem experimental foi resumida na figura (5.5). Um laser modelo Altechna ST-II-N-1064 nm emite um feixe de comprimento de onda de $1064nm$ no modo fundamental ψ_0 . Ele primeiro passa por um aparato controlador de intensidade constituído por uma lâmina de meia onda (HWP-1, half-wave plate) e um divisor de feixes polarizador (PBS, polarizing beam splitter) em seguida. Desta forma a intensidade que passa pelo PBS-1 é controlada pois ele transmite apenas a componente horizontal da polarização, que é controlada pela HWP-1. Depois de ter sua intensidade controlada, o feixe é dividido em dois "braços" por um divisor de feixes (BS, beam splitter) cada um com metade da intensidade.

O primeiro braço é direcionado para o modulador espacial de luz (SLM modelo Hamamatsu LCOS0500325) descrito na seção 2.4.3. Nele é programado um holograma "blazed" que permite gerar um modo laguerre-gaussiano com momento angular orbital l_{SLM} e intensidade máxima em sua primeira ordem. O valor de l_{SLM} , dentre outros parâmetros, é programável em tempo real, aceitando valores inteiros reais positivos ou negativos. Após isso a primeira ordem é selecionada com uma íris diafragma e recolimada por um conjunto de lentes (CL-1). O feixe então tem sua polarização alterada para uma direção arbitrária por uma lâmina de meia onda (HWP-2), com o propósito de controlar a intensidade que será refletida pelo divisor de feixes polarizador (PBS-2). Com isso, seu campo pode ser descrito como

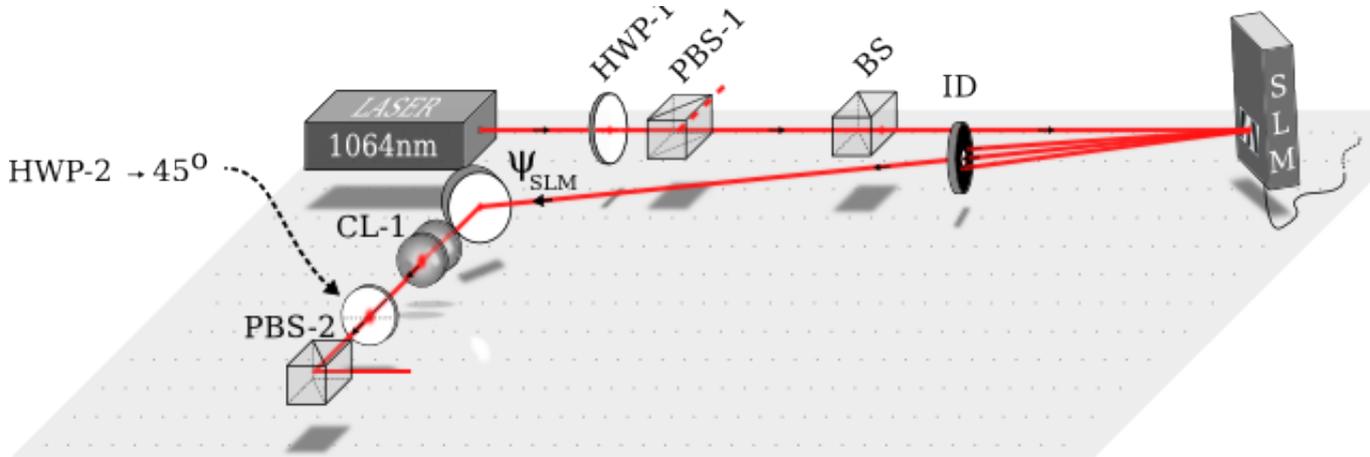


Figura 5.3: Caminho percorrido pelo feixe que incide no SLM.

$$\vec{E}_{SLM}(\vec{r}, t) = A_{(\mu)}^{0, l_{SLM}}(z) u^{0, l_{SLM}}(\vec{r}) e^{i(k_n z - \omega_n t)} \hat{e}_V. \quad (5.5)$$

No segundo braço, o feixe é incidido em uma máscara holográfica que produz um feixe laguerre-gaussiano com $l_{Mask} = 1$ em sua primeira ordem de difração. Somente a primeira ordem é selecionada com uma íris diafragma e depois recolimada por um conjunto de lentes (CL-2). Seu campo pode ser descrito como

$$\vec{E}_{Mask}(\vec{r}, t) = A_{(\mu)}^{0,1}(z) u^{0,1}(\vec{r}) e^{i(k_n z - \omega_n t)} \hat{e}_H. \quad (5.6)$$

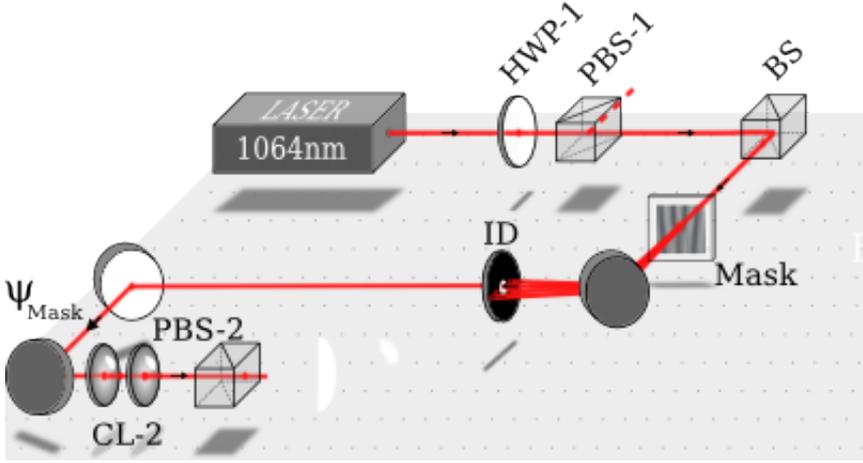


Figura 5.4: Caminho percorrido pelo feixe que incide na máscara holográfica.

Os dois feixes são reunidos no um divisor de feixes polarizador (PBS-2). Graças ao efeito "blazed" utilizado no primeiro braço, sua intensidade é maior. Para garantir que as duas intensidades sejam iguais foi colocada uma lâmina de meia onda (HWP-2), de forma que sua direção controla a polarização e, conseqüentemente, a componente vertical do campo que será refletida pelo divisor de feixes polarizador (PBS-2) e reunida com o feixe do segundo braço. O feixe de entrada então tem seu campo elétrico na forma

$$\vec{E}_T(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{I_0}{2}} [u^{0,1}(\vec{r}) \hat{e}_H + u^{0,l_{SLM}}(\vec{r}) \hat{e}_V] e^{i(k_n z - \omega_n t)}, \quad (5.7)$$

sendo $A_{\mu}^{0,1}(0) = A_{\mu}^{0,l_{SLM}}(0) = \sqrt{I_0/2}$ a condição inicial para a equação (4.16b).

Uma terceira lâmina de meia onda (HWP-3) foi colocada logo após o PBS-2 para controlar a polarização do campo de entrada no cristal. O feixe então é focalizado por uma lente de distância focal $f_1 = 20$ cm dentro de um cristal KTP (fosfato de potássio e titanilo, $KtiOPO_4$) de casamento de fase do tipo II. Após a interação não linear, os feixes de saída são recolimados por uma lente de distância focal $f_2 = 20$ cm e depois separados por um espelho dicróico.

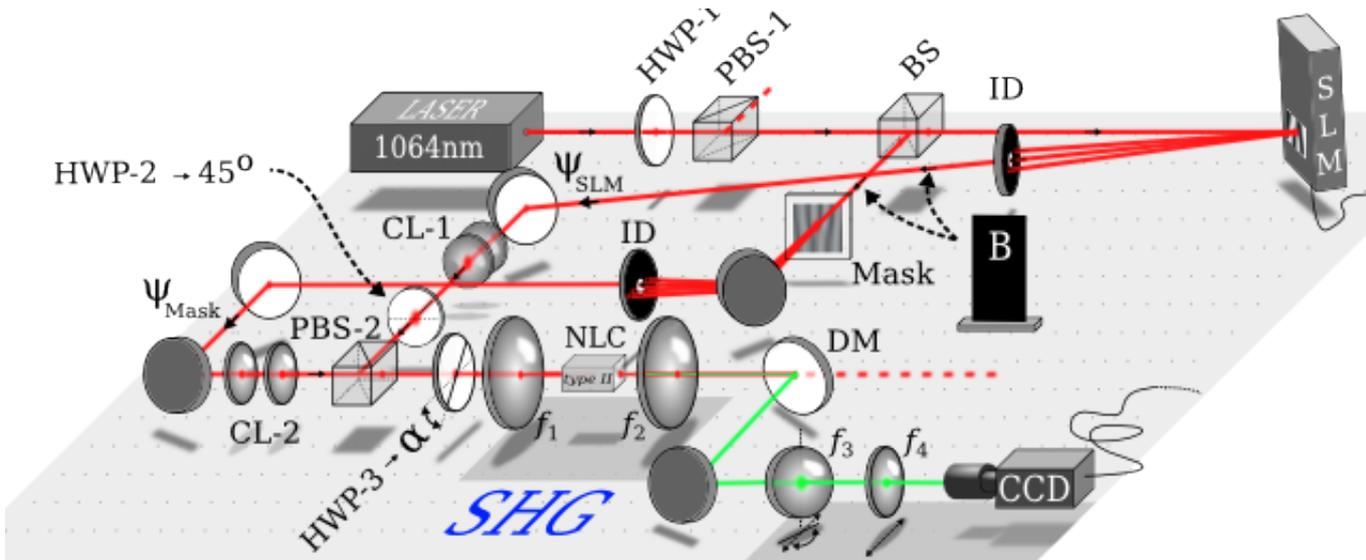


Figura 5.5: Montagem experimental completa.

Para ser convertido em um modo hermite gaussiano, o feixe gerado com comprimento de onda de 532 nm é passado por um conversor de lente oblíqua (??), composto por uma lente biconvexa de distância focal $f_3 = 20$ cm com uma inclinação de aproximadamente 19° . Uma outra lente de distância focal $f_4 = 5$ cm foi usada para ampliar a imagem formada no plano focal da lente oblíqua. Essa imagem foi capturada por um câmera CCD? (charged couple device).

5.3 Resultados

Em um primeiro momento foram obtidos resultados preliminares que comprovassem a obtenção de resultados já conhecidos, como o dobramento do momento angular orbital da luz.

Para verificar o dobramento do momento angular orbital do feixe do primeiro braço, que ao incidir no SLM se torna um feixe laguerre gaussiano com $l_{SLM} = 2$, foi bloqueado o feixe do segundo braço e a lâmina de onda HWP-3 foi girada de forma a rodar de 45° a polarização do feixe incidente. O feixe incidente deve conter componentes nas duas direções de polarização (h e v) pois o cristal usado tem casamento de fase de tipo II. Depois disso o feixe com comprimento de onda de 532 nm é separado e convertido em um modo hermite gaussiano.

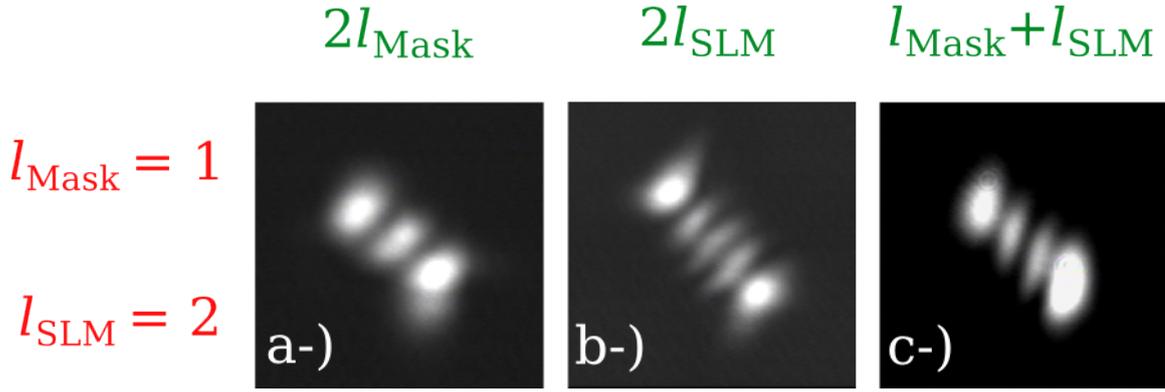


Figura 5.6: Modos Hermite-Gaussianos convertidos após a geração de segundo harmônico, usando apenas a polarização para controlar o feixe de entrada no cristal.

Depois, o feixe do primeiro braço foi bloqueado e o feixe do segundo braço, sendo um modo laguerre gaussiano com $l_{\text{Mask}} = 1$, tem sua polarização girada para 45° e incide sobre o cristal. O feixe resultante da geração de segundo harmônico foi convertido para um hermite gaussiano.

Uma vez que o dobramento da carga topológica foi comprovado, o próximo passo foi verificar a soma. Para tal, os feixes dos dois braços incidem no cristal com polarizações ortogonais, $l_{\text{SLM}} = 2$ e $l_{\text{Mask}} = 1$. Depois de separado, o feixe resultante da geração de segundo harmônico é convertido num feixe hermite gaussiano. Os resultados são apresentados na imagem abaixo.

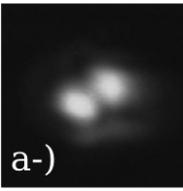
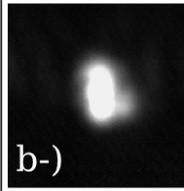
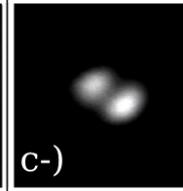
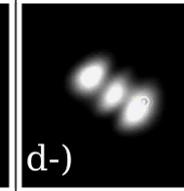
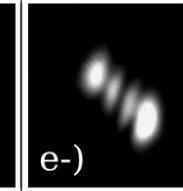
$l_{\text{SLM}} \backslash l_{\text{Mask}}$	-2	-1	0	1	2
1					
$l_{2\omega}$	-1	0	1	2	3

Figura 5.7: Modos Hermite-Gaussianos obtidos após a conversão do feixe gerado no cristal.

A distribuição de intensidade do feixe deixa clara a determinação do número p dos modos laguerre-gaussianos gerados. A conversão para modos hermite-gaussianos permite

saber a ordem total do modo através da contagem de linhas nodais. Quando feita a geração de segundo harmônico com o feixe que passa pela máscara, o feixe incidente tem $p = 0$ e $l = 1$, enquanto o feixe resultante tem $p = 0$. Com a conversão para modo hermite gaussiano é possível ver que $N = m + n = 2 = 2p + |l|$. Ou seja, $|l| = 2$. Como descrito na seção (2.4.5), a direção de inclinação do modo hermite gaussiano resultante da conversão nos dá o sinal de l . Uma vez medido seu diâmetro mínimo (cintura), o feixe está completamente caracterizado.

O mesmo pode ser feito com os feixes resultantes da geração de segundo harmônico do segundo braço e da superposição. É possível observar na imagem (??) que o modo laguerre gaussiano resultante da geração de segundo harmônico da superposição dos feixes do primeiro e do segundo braço tem $l = 3$. Isto quer dizer que o resultado esperado obtido na seção (4.2) é confirmado e, portanto, *devido à conservação do momento angular orbital da luz é possível fazer a soma de momento angular na geração de segundo harmônico.*

O resultado teórico obtido na seção (4.2) não restringe nenhum valor para l . Por isso, para confirmar o resultado, o SLM foi usado de forma que, apenas mudando os parâmetros do holograma, o feixe do primeiro braço se torne um feixe laguerre gaussiano com $l_{SLM} = -2, -1, 0, 1, 2$.

Para o caso em que $l_{SLM} = -2$, espera-se que o feixe resultante tenha $l = -1$, ou seja, quando convertido para um modo hermite gaussiano ele tenha o mesmo número de linhas nodais que um modo laguerre gaussiano com $l = 1$ convertido, porém com inclinação na outra direção. Para $l_{SLM} = -1$, o feixe gerado deve ter $l = 0$ e portanto espera-se que, depois da conversão, ele não apresente linhas nodais. Para $l_{SLM} = 1$, o resultado obtido deve ser semelhante ao esperado para o dobramento do feixe laguerre-gaussiano com $l_{Masc} = 1$.

6 Conclusão

A polarização foi utilizada como parâmetro auxiliar para combinar diferentes vórtices ópticos na geração de segundo harmônico e obter a soma de momento angular orbital da luz. Apenas girando das lâminas de onda HWP-2 e HWP-3 foi possível alternar entre o dobramento e a soma de momento angular orbital da luz.

É importante observar que, assim como um interferômetro, este experimento teve que respeitar o limite de coerência do laser. Uma vez que a diferença de caminho entre os dois braços é maior que a coerência do laser, a soma de momento angular orbital da luz não pode ser observada.

Como é possível notar na equação (4.16a), a integral de recobrimento depende do produtos dos modos transversos. Os modos devem ser ampliados ou diminuídos a fim de atingir o casamento de modos antes de incidir no cristal. Este cuidado é importante pois com o aumento do momento angular orbital de um feixe, o tamanho de sua singularidade aumenta. Os conjuntos de lentes CL-1 e CL-2 foram postos com este intuito de atingir o casamento de modos.

O método usado para verificação dos resultados (Método da Lente Oblíqua) foi fundamental pela sua praticidade. Depois de alinhado para converter o feixe resultante da geração de segundo harmônico com $l = l_{SLM} + l_{Masc}$, para pequenas mudanças no valor de l_{SLM} não foi necessário realinhar o aparato. O fato deste método aproveitar ao máximo a intensidade do feixe gerado foi sua principal vantagem sobre o método interferométrico, que só aproveita metade.

A figura (5.7) mostra experimentalmente o resultado previsto pela seção (4.2). Dos resultados obtidos foi possível concluir que, ao contrário do momento angular de spin, o momento angular orbital se conserva na geração de segundo harmônico, permitindo a soma ou subtração do mesmo. Isso pode ser útil para computação de ondas com variáveis discretas [42]. A escolha entre dobramento e soma pode ser feita apenas controlando as po-

larizações, o que gera uma vantagem sobre outros métodos pois é um parâmetro que pode ser bem controlado através de equipamentos eletro-mecânicos totalmente automatizados.

A verificação da conservação do momento angular orbital da luz na geração de segundo harmônico revela um fenômeno ainda não totalmente explorado da interação da radiação com a matéria. Neste trabalho foram usados apenas feixes de primeira ordem radial ($p = 0$). A possibilidade de usar feixes com outras ordens radiais e momentos angulares orbitais não inteiros da base para estudos futuros sobre este fenômeno e suas aplicações.

Referências Bibliográficas

- [1] <http://www.nature.com/nature/journal/v425/n6955/full/nature01974.html>
- [2] <http://www.light2015.org/Home/About/Resources.html>
- [3] Ann Breslin, Alex Montwill, *Let There Be Light*. Imperial College Press, 2^a Edição, 2013.
- [4] C.Swob, P.F. Cohadon, C.Fabre, M.A.M. Marte, H. Ritsch, A.Gath, L. Lugiato *Transverse effects and mode coupling in OPOS*. Appl. Phys. B 66, 685-699 1998
- [5] Alison M. Yao and Miles J. Padgett *Orbital Angular Momentum origins, behavior and applications.*, Advances in Optics and Photonics 2011
- [6] Hetch, Eugene, *Optics*. Addison-Wesley Longman, 3^a Edição, 1998.
- [7] Leonard Mandel and Emily Wolf, *Optical coherence and quantum optics*, Cambridge University Press, 1995.
- [8] Allen, L., Beijersbergen, M., Spreew, R. J. C. e Woerdman, J. P., *Orbital Angular Momentum and the transformation of Gauss-Laguerre Modes*, Phys. Rev. Lett. A 45, 8185-8189. 1992
- [9] Simpson, N. B., Dholakia, A., Allen, L. e Padgett *Mecanical equivalent of spin and orbital angular momentum of light: an optical spanner*, Optics Letters 22, 52-54. 1997
- [10] Friese, M. E. J., Rubinsztein-Dunlop, H., Heckenberg, N. R. e Enger, J., *Optical angular momentum transfer to trapped absorbing particles*, Phys. Rev. A 54, 1593-1596. 1996
- [11] Friese, M. E. J., Nieminem, T. A., Heckenberg, N. R. e Rubinsztein-Dunlop, H., *Controlled optical torque by elliptical polarization* Optics Letters 23, 1-3 1998
- [12] Beth, R. A., *Phys Rev*, **50**, 115 (1936)
- [13] Michael Berry, *Singular Optics*, páginas 6-11. SPIE 3487, 1998.

- [14] Peter W. Milonni e Joseph H. Eberly, *Laser Physics*, Wiley-Interscience, 1^a Edição, 1988.
- [15] A. B. Ruffin, J. V. Rudd, J. F. Whitaker, S. Feng, e H. G. Winful, *Direct Observation of the Gouy Phase Shift with Single-Cycle Terahertz Pulses*, **83**, 3410 (1999).
- [16] Ivan Tolstoy, *James Clerk Maxwell, A Biography*, Chicago: University of Chicago Press, 1983.
- [17] Anthony E. Siegman, *Lasers*, University Science Books, 1^a Edição, 1986.
- [18] E. Butkov, *Física Matemática*, ed LTC, 1988.
- [19] Iwo Bialynicki-Birula e Zofia Bialynicka-Birula, *Canonical separation of angular momentum of light into its orbital and spin parts*, Journal of Optics **13** (2011)
- [20] Frank W. J. Olver, Daniel W. Lozier, Ronald F. Boisvert, e Charles W. Clark, *NIST Handbook of Mathematical Functions* Cambridge University Press, 2010
- [21] Amnon Yariv, *Quantum Electronics*, 3ed. John Wiley & Sons (1989).
- [22] Max Born e Emil Wolf, *Principles of Optics: Eletromagnetic Theory of Propagation Interference and Diffraction of light*, 6ed. Pergamon Press (1985).
- [23] M. J. Padgett e J. Courtial, *Poincaré-sphere equivalent for light beams containing orbital angular momentum*, Opt. Lett. **24** 7 430 (1999).
- [24] G. A. Turnbull, D. A. ROberson, G. M. Smith, L. Allen, e M. J. Padgett, *The generation of free-space Laguerre-Gaussian modes at millimetre-wave frequencies by use of a spiral phaseplate*, Opt. Commun. **127**, 183-188 (1996).
- [25] M. W. Beijersbergen, R. P. C. Coerwinkel, M. Kristensen e J. P. Woerdman, *Helical-wavefront laser beams produced with a spiral phaseplate*, Opt. Commun. **112**, 321-327 (1994).
- [26] S. S. R. Oemrawsingh, J. A. W. van Houwelingen, E. R. Eliel, J. P. Woerdman, E. J. K. Verstegen, J. G. Kloosterboer, e G. W. 't Hooft, *Production and characterization of spiral phase plates for optical wavelengths*, App. Optics. **43**, 688-694 (2004).
- [27] C. E. R. Souza, *Aplicações do Momento Angular Orbital da Luz à Computação e Informação Quântica*, tese de doutorado, Instituto de Física UFF, (2010).

- [28] http://www.hamamatsu.com/resources/pdf/ssd/x10468_series_etc_kacc1172e.pdf
- [29] P. A. Franken, A. E. Hill, C. W. Peters, e G. Weinreich *Generation of Optical Harmonics*, Phys. Rev. Lett. **7**, 118 (1961).
- [30] T. H. Maiman, *Stimulated Optical Radiation in Ruby*, Nature **187**, 493-494 (1960).
- [31] J. E. Midwinter e J. Warner, • Brit. J. Appl. Phys. **16**, 732 (1965).
- [32] J. F. Nye, *The Physical Properties of Crystals*, Clarendon Press, Oxford, (1985).
- [33] J. A. Armstrong, N. Bloembergen, J. Ducuing, e P.S. Pershan, *Interactions between light waves in a nonlinear dielectric*, Pys. Rev. **127**, 1918 (1962).
- [34] Alison M. Yao e Miles J, Padgett, *Orbital angular momentum: origins, behavior and applications*, Advances in Optics and Photonics **3**, 2 161 (2011).
- [35] Robert W. Boyd, *Nonlinear Optics*, Academic Press, 2^a edição, (2003).
- [36] W.T. Buono, L.F.C. Moraes, J.A.O. Huguenin, C.E.R. Souza e A.Z. Khoury, *Arbitrary orbital angular momentum addition invsecond harmonic generation*, New Journal of Physics **16**, (2014)
- [37] C. Schwob, P.F. Cohadon, C. Fabre, M.A.M. Marte, H. Ritsch, A. Gatti e L. Lugiato, *Transverse effects and mode couplings in OPOS*, Appl. Phys. B **66**, 685-699 (1998).
- [38] K. Dholakia, N. B. Simpson, e M. J. Padgett, *Second-harmonic generation and the angular orbital moment of light*, Phys. Rev. A **54**, 3742-5, (1996).
- [39] Courtial J, Dholakia K, Allen L e Padgett M J, *Second-harmonic generation and the conservation of orbital angular momentum with high-order Laguerre-Gaussian modes*, Phys. Rev. A **56**, 4193-6 (1997).
- [40] Larry C. Andrews, *Special Functions of Mathematics for Engineers*, SPIE Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers, 2^a edição, (2005).
- [41] Pravin Vaity, J. Banerji e R. P. Singh, *Measuring the topological charge of an optical vortex by using a tilted convex lens*, Phys. Let. A, **377**, 1154-56, (2013).
- [42] Régis Marchiano e Jean-Louis Thomas, *Doing Arithmetic With Nonlinear Acoustic Vortices*, Phys Rev. Lett. **101**, 064301, (2008).