

Gabriel da Costa Santos Rosa

*Vórtices de Centro nas Teorias de Yang-Mills*

Niterói - Brasil, RJ

28 de fevereiro de 2013

Gabriel da Costa Santos Rosa

*Vórtices de Centro nas Teorias de Yang-Mills*

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Física pela Universidade Federal Fluminense.

Orientador:  
Luis Esteban Oxman

DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

Niterói - Brasil, RJ  
28 de fevereiro de 2013

Banca Examinadora:

---

Prof. Luis Esteban Oxman  
Orientador

---

Prof. Dr. Rodrigo Ferreira Sobreiro  
Universidade Federal Fluminense

---

Prof. Dr. Daniel Gustavo Barci  
Universidade Estadual do Rio de Janeiro

# *Agradecimentos*

Primeiramente, gostaria de agradecer a minha família, em especial, aos meus pais, Wainer e Reneida, e ao meu irmão, Eduardo. Eu não tenho dúvidas que, sem o esforço deles em me proporcionar as melhores condições para o desenvolvimento sócio-intelectual, não conseguiria estar aqui, realizando minha dissertação de mestrado na profissão de minha escolha.

Também não poderia deixar de agradecer a dois grandes mestres que conheci neste percurso. Adotando uma ordem cronológica, meu professor e fonte de inspiração, Antônio Marcelo, gostaria de deixar marcada toda a admiração que tenho por você e mostrar que tanto empenho em me ensinar o lado elegante da física rendeu frutos. Outro que sempre lembrarei com admiração, é meu orientador Luis E. Oxman. Toda a sua dedicação comigo, desde os tempos de iniciação científica, foram essenciais para que este momento chegasse, seja nas discussões de grupo, seja via skype ou até mesmo pelas mesas dos bares da cantareira.

De tantos que eu fiz ao longo da vida, não teria espaço em uma folha de papel para citar todos vocês. Definitivamente, foi a amizade de todos aqueles que acreditaram em mim, uma das razões mais importantes para continuar sempre em frente. Amigos que fiz no colégio, durante o curso de graduação, que só tive o prazer de conhecer no mestrado, que dividiram manhãs de visitas intermináveis na Casa da Descoberta, também não posso me esquecer dos *bad students* e dos *bad teachers* e nem do grupo projeto verão 2013. Todos vocês estavam dispostos a me fazer esquecer de tudo que aprendi com o simples objetivo de manter minha sanidade mental. Se foram bem sucedidos, apenas o tempo dirá, mas por favor, não desistam. Só vou citar cinco nomes, porque sem eles talvez eu não conseguisse estar de pé para apresentar a dissertação. Bárbara Paes, Bruno Inchausp, Camille Fróes, Ingrid Hammes, Vivian Mattos e todos os meus amigos, muito obrigado!

Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

# *Resumo*

Nesta dissertação, analisamos a correção a 1 *loop* da energia efetiva para vórtices de centro estáticos nas teorias de Yang-Mills. Utilizamos três procedimentos independentes para obtenção e ratificação do resultado, comparando-o com diferentes resultados previamente obtidos na literatura. A maior contribuição do nosso trabalho é confirmar como o acoplamento natural entre vórtices de centro e flutuações quânticas modificam concepções prévias sobre a estabilidade destes. Neste sentido, mostramos como a parte imaginária da energia efetiva poderia ser eliminada para certas configurações magnéticas.

# *Abstract*

In this work, we analyzed the effective energy up to one-loop for static center vortices in pure Yang-Mills theories. In order to obtain the result, and compare it with previous calculations, three independent procedures were considered. The most relevant contribution of our work is to confirm that previous conceptions about center vortex stability can be modified, when the natural coupling between center vortices and quantum fluctuations is considered. This comes about as the imaginary part of the effective energy could be absent for some magnetic configurations.

# Sumário

## Lista de Figuras

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	p. 9
<b>2</b>	<b>Teorias de Yang-Mills</b>	p. 11
2.1	Uma breve introdução abeliana . . . . .	p. 11
2.2	Teoria clássica de calibre não abeliana . . . . .	p. 12
2.3	Quantização de uma teoria de calibre não abeliana . . . . .	p. 15
2.3.1	Procedimento usual . . . . .	p. 15
2.3.2	Contornando a divergência . . . . .	p. 17
2.3.2.1	<i>Ansatz</i> de Faddeev-Popov . . . . .	p. 17
2.3.2.2	<i>Ghosts</i> de Faddeev-Popov . . . . .	p. 19
2.4	Efeitos não triviais . . . . .	p. 20
2.4.1	Liberdade Assintótica . . . . .	p. 20
2.4.2	Confinamento das cargas de cor . . . . .	p. 21
<b>3</b>	<b>Vórtices de Centro e Confinamento</b>	p. 23
3.1	Loop de Wilson . . . . .	p. 23
3.2	Vórtices finos . . . . .	p. 27
3.2.1	Vórtices finos como defeitos nas bases locais de cor . . . . .	p. 29
3.3	Vórtices grossos e deformação diagonal dos vórtices finos . . . . .	p. 30
3.4	Mecanismo de Confinamento . . . . .	p. 31

<b>4</b>	<b>Estabilidade dos vórtices de centro</b>	p. 33
4.1	Instabilidade de Savvidy-Nielsen-Olesen . . . . .	p. 33
4.2	Ação efetiva a 1 <i>loop</i> para vórtices de centro . . . . .	p. 36
4.2.1	Procedimento I: Propriedades do traço e teorema de Cayley-Hamilton	p. 40
4.2.2	Procedimento II: Decomposição em autovetores globais . . . . .	p. 42
4.2.3	Procedimento III: Interpretação como potenciais localizados sobre curva . . . . .	p. 45
4.3	A busca pelo vórtice de centro estável . . . . .	p. 49
4.3.1	Procedimento usual x procedimento diagonal . . . . .	p. 49
4.3.2	Vórtice-Antivórtice com simetria polar . . . . .	p. 51
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	p. 54
	<b>Anexo A – Potenciais Localizados sobre Curvas no <math>\mathcal{R}^3</math></b>	p. 56
A.1	Tratamento das Singularidades para as Diversas Classes de Curvas . . .	p. 57
A.1.1	Curvas de Comprimento Infinito . . . . .	p. 58
A.1.2	Curvas Fechadas . . . . .	p. 59
A.2	Absorção das Arbitrariedades Geradas . . . . .	p. 60
	<b>Referências</b>	p. 61

## *Lista de Figuras*

1	Representação da superfície fixadora de calibre . . . . .	p. 18
2	Decaimento de um méson em dois devido ao acúmulo de energia no tubo cromoelétrico . . . . .	p. 22
3	Curva $C$ sobre a qual deve ser calculado o <i>loop</i> de Wilson . . . . .	p. 25
4	Representação para vórtice fino como borda do vórtice ideal sendo enla- çado por diversos <i>loops</i> de Wilson . . . . .	p. 28
5	Persistência da direção de fluxo magnético sobre o plano de simetria . .	p. 47
6	Arranjo de ambos os vórtices no plano . . . . .	p. 52
7	Gráfico dos modos ligados de $K_-$ para diferentes razões entre os raios .	p. 53

# 1 *Introdução*

Com o estudo realizado por A. M. Polyakov, [26], no qual demonstrou a importância dos *instantons* em descrever uma fase confinante na QED<sub>3</sub> compacta, diversos pesquisadores motivaram-se a explicar os fenômenos da região infravermelha das teorias de Yang-Mills utilizando defeitos topológicos, como monopólos e vórtices de centro [13, 22, 23]. Como o título desta dissertação sugere, a estrutura escolhida para efetuarmos nosso estudo ao longo destes dois anos foram os vórtices. Obviamente, não estamos propondo explicar o confinamento, mas sim, mostrar a relação que poderia existir entre o fenômeno de confinamento e estes objetos.

No primeiro capítulo, faremos uma pequena introdução sobre as teorias de Yang-Mills, teorias de calibre cuja simetria, diferentemente do eletromagnetismo, obedecem uma regra de comutação entre geradores muito particular, denominada não-abeliana [2, 9]. As propriedades clássicas e sua quantização foram discutidas detalhadamente, com o objetivo de deixar claro a não trivialidade que acompanha um estudo realizado sobre os campos que a habitam. Dentre os muitos resultados conhecidos, nos dedicamos ao entendimento da interação existente na teoria pura, da necessidade de definir uma constante de acoplamento que se enfraquece a curtas distâncias e da catástrofe do infravermelho.

Uma vez entendidas as características básicas da teoria, discutiremos como introduzir os vórtices de centro. Iniciamos o segundo capítulo, apresentando aquele que é o invariante de calibre mais importante em nosso cenário de confinamento, o *loop* de Wilson [32]. Este observável, o qual está intimamente ligado com a descrição das diversas fases para uma teoria de calibre não abeliana, é necessário para a compreensão correta dos objetos singulares que desejamos estudar. O ponto alto deste capítulo encontra-se nas duas possíveis maneiras de acoplar os vórtices com as flutuações quânticas, definidas em [23] e [12], as quais, levam a grandes mudanças na procura por uma configuração estável.

A estabilidade dos vórtices de centro é o ponto central discutido nesta dissertação de mestrado, sendo desenvolvida no terceiro capítulo. Desde o resultado obtido por Nielsen e

---

Olesen [20], mostrando que configurações cromomagnéticas apresentam uma contribuição imaginária na energia efetiva para os campos de fundo, a proliferação dos vórtices de centro no regime não perturbativo ficou ameaçada. Sendo assim, o último capítulo foi dedicado a maior compreensão dos operadores de flutuação, os quais apresentam estruturas diferentes de acordo com a descrição dos vórtices de centro e o procedimento utilizado para acoplá-los às flutuações quânticas [10, 12, 23]. Ao final deste capítulo, foi realizada uma pequena busca pelo vórtice que, um dia, pode ser responsável por explicar o confinamento.

## 2 Teorias de Yang-Mills

### 2.1 Uma breve introdução abeliana

Desde o advento do eletromagnetismo, regido pelas equações de Maxwell,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, & \nabla \cdot \vec{B} &= 0, \\ \nabla \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0, & \nabla \times \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \mu_0 \vec{J}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

as transformações de calibre destacaram-se no estudo da Física. A partir das equações homogêneas, fica claro que os campos elétrico e magnético  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$  podem ser escritos em termos de outros campos,  $\phi$  e  $\vec{A}$ , denotados potenciais

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (2.2)$$

Como diversos destes campos são capazes de representar uma mesma configuração do campo eletromagnético, a simetria de calibre se faz presente. As transformações que irão manter os campos elétrico e magnético invariantes são

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \nabla\alpha, \quad \phi \rightarrow \phi - \frac{\partial\alpha}{\partial t}. \quad (2.3)$$

As equações de Maxwell passam a ser escritas em termos dos potenciais segundo

$$\begin{aligned} -\nabla^2\phi - \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{A}) &= \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ -\nabla^2\vec{A} + \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) + \mu_0\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) &= \mu_0 \vec{J}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

as quais serão respeitadas para todas as configurações que se relacionem através de uma transformação de calibre. Os potenciais não possuem significado físico, sendo assim, a determinação de apenas um dentre infinitos campos é o suficiente para descrever toda a física envolvida. A fim de realizarmos uma escolha de um único representante dos potenciais para cada configuração física do sistema, é utilizada uma técnica chamada

fixação de calibre. No contexto do eletromagnetismo, as mais comuns são

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0, \quad (2.5)$$

onde a primeira é conhecida como fixação de Coulomb e a segunda como fixação de Lorentz ou Landau. Apesar de mais complexo, o calibre de Landau exprime a simetria existente entre os potenciais e deixa claro que ambos os campos satisfazem uma equação da onda na presença de fontes externas.

De maneira covariante, as equações de Maxwell podem ser escritas a partir da densidade lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} + j_\mu A^\mu, \quad \text{onde, } \mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad A_\mu = \left( \frac{\phi}{c}, \vec{A} \right), \quad j_\mu = (\rho c, \vec{j}), \quad (2.6)$$

sendo  $c$  é a velocidade da luz, a qual possui uma simetria de calibre referente ao grupo abeliano  $U(1)$  e a fonte externa satisfaz a equação da continuidade  $\partial_\mu j^\mu = 0$ . Nesta notação as transformações de calibre são escritas como

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \alpha. \quad (2.7)$$

## 2.2 Teoria clássica de calibre não abeliana

Na primeira seção deste capítulo, fizemos uma pequena e simples introdução sobre teorias de calibre, utilizando como exemplo a mais conhecida e testada delas. Com o passar dos anos, o desenvolvimento de técnicas experimentais mais apuradas nos permitiu acessar níveis de energia cada vez mais altos e desafiar nossa compreensão dos fenômenos da natureza. Uma das primeiras descobertas está relacionada a existência da força nuclear fraca, responsável pelo decaimento do núcleo dos átomos. Assim como a força eletromagnética, essa nova força também apresentava bósons transportadores de informação, os chamados bósons vetoriais  $Z^0, W^+, W^-$ , e uma carga própria, o isospin. Apesar de todas essas semelhanças apontarem para uma descrição de calibre para essa teoria, as diferenças também eram evidentes, como uma estrutura de dupletos para os campos carregados e um número maior de transportadores. Essas evidências deixavam claras que a representação através de uma teoria de calibre para a interação fraca não poderia ser simples como a eletromagnética. Em 1954, C.N. Yang e R.L. Mills estudaram a conservação da carga de isospin mediante uma transformação local, o que originou uma nova

classe de teorias de calibre, as teorias de calibre associadas a simetrias com grupos não abelianos, as chamadas teorias de Yang-Mills [33]-[2].

Para entender a descrição dessa teoria, considere um grupo de Lie que possua  $M$  geradores  $T_a$ , ou seja, a álgebra desse grupo pode ser escrita da seguinte forma

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T^c, \quad (2.8)$$

onde  $f_{abc}$  são as constantes de estrutura do grupo. Um grupo é dito não abeliano se existem geradores que não apresentam a propriedade comutativa. Em geral, a lagrangiana de uma teoria depende dos campos e das derivadas destes campos, portanto é de nosso interesse estudar a transformação destas estruturas perante uma transformação local de calibre, pois a ação deve ser invariante de calibre. Dada uma representação do grupo, os campos carregados podem ser descritos como uma lista  $\Psi$  que se transforma como

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = U(\theta(x))\Psi(x) = e^{-iT_j\theta^j(x)}\Psi(x), \quad (2.9)$$

sendo  $\theta$  o parâmetro responsável por controlar a transformação. Uma transformação deste tipo deixaria um termo de massa  $|\Psi|^2$  invariante, entretanto as derivadas dos campos carregados não apresentariam a mesma característica,

$$\partial_\mu\Psi(x) \rightarrow \partial_\mu\Psi'(x) = \partial_\mu(U(\theta(x))\Psi(x)) = U(\theta(x))(\partial_\mu\Psi(x)) + (\partial_\mu U(\theta(x)))\Psi(x). \quad (2.10)$$

Portanto, para que exista uma simetria local, a lagrangiana não pode conter termos puramente formados por derivadas ordinárias, sendo necessário introduzir um novo tipo de derivada, uma que se transforme da mesma forma que os campos carregados, ou seja,

$$D_\mu\Psi(x) \rightarrow D'_\mu\Psi'(x) = U(\theta(x))D_\mu\Psi(x). \quad (2.11)$$

A  $D_\mu$  é dado o nome de derivada covariante. É essencial que esta nova derivada dependa da derivada ordinária, por razões óbvias, e do único campo local presente em teorias de calibre puras, de maneira que a sua transformação elimine qualquer contribuição indesejável, mantendo-se de acordo com (2.11). Podemos definir nossa derivada covariante da seguinte maneira

$$D_\mu\Psi(x) = (\partial_\mu + igA_\mu(x))\Psi(x), \quad (2.12)$$

onde  $g$  é a constante de acoplamento da teoria de Yang-Mills e  $A_\mu = A_\mu^a T_a$  é uma lista de  $M$  campos de calibre que se transformam na representação adjunta do grupo. De acordo

com (2.10) e (2.11), a lista de campos de calibre deverá se transformar da seguinte forma

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{g} U \partial_\mu U^{-1}. \quad (2.13)$$

Podemos perceber claramente que, assim como no caso abeliano, um campo de calibre  $A_\mu(x) = 0$  pode ser escrito de diversas formas equivalentes graças ao segundo termo de (2.13), também conhecido como termo de puro calibre. Uma vez definidas as estruturas capazes de formar invariantes de calibre que dependam dos campos massivos, só nos resta definir um termo equivalente ao tensor eletromagnético  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ , responsável por atribuir dinâmica aos campos de calibre. Devido ao fato dos campos de calibre não abelianos possuírem carga não nula, diferentemente dos fótons que são eletricamente neutros, o tensor que estamos procurando não pode ser escrito de maneira tão simples, pois ao realizarmos uma transformação infinitesimal sobre ele obtemos

$$\delta [\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a] = f^{abc} \theta_b (\partial_\mu A_{\nu c} - \partial_\nu A_{\mu c}) + f^{abc} [(\partial_\mu \theta_b) A_{\nu c} - (\partial_\nu \theta_b) A_{\mu c}], \quad (2.14)$$

Utilizando como inspiração a lagrangiana abeliana, a lagrangiana para uma teoria de calibre pura deveria ser escrita como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu}^a \mathcal{F}_a^{\mu\nu}, \quad (2.15)$$

onde  $\mathcal{F}_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a +$  “*termo que cancele a contribuição extra*”. Como já sabemos da literatura, veja [2] para uma explicação mais detalhada do surgimento deste último termo, a forma final do tensor é dada por

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) - g f^{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x), \quad (2.16)$$

ou em termos das derivadas covariantes,

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} \cdot \vec{T} = -\frac{i}{g} [D_\mu, D_\nu]. \quad (2.17)$$

A lagrangiana na equação (2.15), juntamente com a definição dada em (2.16), é conhecida como lagrangiana de Yang-Mills. Assim como no caso eletromagnético, não é possível introduzir um termo de massa para os glúons, preservando a simetria de calibre, pois qualquer fator proporcional a  $|A_\mu|^2$  não é invariante de calibre. Apesar de existirem muitas semelhanças entre os casos abeliano e não abeliano, duas diferenças merecem destaque:

- De acordo com (2.16), ao realizarmos uma transformação de calibre,  $\mathcal{F}_{\mu\nu}^a \mathcal{F}_a^{\mu\nu}$  continua invariante, porém  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$  não. O tensor para um grupo não abeliano é, na verdade, covariante de calibre.

- A teoria de Yang-Mills pura já apresenta interação devido ao fato dos glúons possuírem carga. Este ponto torna as soluções das equações de campos clássicas muito mais complicadas do que as soluções eletromagnéticas. Entretanto, esse efeito é de extrema importância para a existência de outras características que são inimagináveis quando estamos tratando de teorias abelianas, como veremos nas próximas seções.

## 2.3 Quantização de uma teoria de calibre não abeliana

Após discutir as características básicas das teorias não abelianas, chegou o momento de analisar o comportamento de sistemas quânticos perante esse grupo de simetrias. Para teorias abelianas, o processo de quantização canônica apresenta muitas dificuldades, como a necessidade de estudar o formalismo proposto por S.N. Gupta e K. Bleuler, ao invés de trabalhar diretamente com a ação de Maxwell que leva a aparição de estados não físicos. No formalismo de Gupta-Bleuler o nosso conhecimento das propriedades clássicas e quânticas do fóton servem como guia para estabelecer critérios que nos permitam eliminar estes modos. Por este motivo, o método de quantização escolhido para quantizar as teorias de Yang-Mills é a integração funcional, que apesar de também apresentar dificuldades, exige menos conhecimento prévio sobre a dinâmica dos mediadores da informação.

### 2.3.1 Procedimento usual

Como pode ser encontrado na literatura sobre teoria quântica de campos (TQC), ver por exemplo [9], o funcional gerador para a teoria de Yang-Mills é escrito como

$$Z[J] = \int [\mathcal{D}A_\mu] \exp \left\{ i \int d^4x [\mathcal{L}(x) + j_\mu A^\mu] \right\}, \quad (2.18)$$

onde  $j_\mu$  é uma corrente externa e  $\mathcal{L}(x)$  é definido de acordo com (2.15) e (2.16). Como foi dito no final da seção anterior, a teoria de Yang-Mills na ausência de campos massivos externos já apresenta interação. Portanto, para um estudo de todos os efeitos presentes nesta teoria, será necessária a utilização de técnicas mais apuradas do que simplesmente a integração gaussiana. Por este motivo, é interessante escrevermos o termo cinético da

ação de Yang-Mills como a soma de um termo livre e outro de interação,

$$\begin{aligned} Z[J] &= \int [\mathcal{D}A_\mu] \exp \left\{ i \int d^4x [\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int.} + j_\mu A^\mu] \right\}, \\ \mathcal{L}_0 &= -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a)(\partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu), \\ \mathcal{L}_{int.} &= gf^{abc}(\partial_\mu A_\nu^a)A_\mu^b A_\nu^c - \frac{g^2}{4}f^{abc}f^{ade}A_\mu^b A_\nu^c A_\mu^d A_\nu^e. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Em teoria de perturbações, os primeiros efeitos quânticos decorrem de  $\mathcal{L}_0$ . Para analisar a equação (2.19), é importante rescrevermos este termo de maneira mais conveniente. Isto é possível através de integrações por partes, que resultam na forma equivalente,

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}A_\mu^a(g^{\mu\nu}\partial^2 - \partial^\mu\partial^\nu)A_\nu^a = \frac{1}{2}A_\mu^a\mathcal{K}^{\mu\nu}A_\nu^a, \quad (2.20)$$

onde  $g_{\mu\nu}$  é a métrica do espaço no qual estamos trabalhando. Por se tratar de um operador de projeção transversal dos modos físicos do campo de calibre este operador não pode ser invertido. Como medida de demonstração desta afirmativa, assumamos que  $\mathcal{G}^{\nu\lambda}(x-y)$  seja a inversa de  $\mathcal{K}_{\mu\nu}$ ,

$$(g^{\mu\nu}\partial^2 - \partial^\mu\partial^\nu)\mathcal{G}^{\nu\lambda}(x-y) = g^{\mu\lambda}\delta(x-y). \quad (2.21)$$

Usando a transformada de Fourier,

$$\mathcal{G}^{\nu\lambda}(x) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik\cdot x} \tilde{\mathcal{G}}^{\nu\lambda}(k), \quad (2.22)$$

a equação (2.21) pode ser escrita como

$$(g^{\mu\nu}k^2 - k^\mu k^\nu)\tilde{\mathcal{G}}^{\nu\lambda}(k) = g^{\mu\lambda}. \quad (2.23)$$

A partir da decomposição invariante,

$$\tilde{\mathcal{G}}^{\nu\lambda}(k) = a(k^2)g^{\nu\lambda} + b(k^2)k^\nu k^\lambda, \quad (2.24)$$

fica claro que a igualdade (2.23) não é satisfeita e portanto,  $\det \mathcal{K} = 0$ .

Como sabemos, a resposta obtida para um funcional gerador de campos bosônicos que possua uma ação gaussiana é inversamente proporcional a raiz quadrada do determinante do operador responsável por descrever a propagação destes modos,

$$Z_0[J] \propto \frac{1}{\sqrt{\det \mathcal{K}}} \exp(j^\mu \mathcal{K}_{\mu\nu}^{-1} j^\nu). \quad (2.25)$$

Um resultado divergente para o funcional gerador não faz sentido. Do ponto de vista físico, a função de partição  $Z[J]$  é a amplitude de probabilidade do sistema que se encontrar no

vácuo em  $T \rightarrow -\infty$  permanecer neste estado em  $T \rightarrow \infty$ , sendo que uma fonte externa  $j$  permaneceu ligada por um tempo finito neste processo. Isto significa que existe uma limitação no resultado máximo que pode ser obtido para  $|Z[J]|^2$  que pode ser entendido como a inexistência de probabilidades maiores do que 1.

## 2.3.2 Contornando a divergência

A divergência proveniente de  $\det \mathcal{K} = 0$  na equação (2.25) pode ser entendida a partir do cálculo da integração funcional, que segundo R. Feynman deve ser feito através da soma sobre todas as histórias do sistema que satisfaçam as condições inicial e final. Entretanto, para uma teoria de calibre, cada história para o campo de calibre  $A_\mu$  seria somada infinitas vezes devido o fato de que transformações de calibre não modificam a história pela qual o sistema passou. Desta forma a solução para o nosso problema pode ser obtida se conseguirmos filtrar as diferentes configurações de maneira a contarmos cada uma delas apenas uma única vez. A maneira de realizar este processo é através da fixação de calibre, mas como já é sabido através do método de Gupta-Bleuler para a quantização do campo eletromagnético, será necessário um maior cuidado quando esta fixação for tratada a nível quântico. Para implementá-la corretamente, L. D. Faddeev e V. N. Popov propuseram um *ansatz* baseado em um resultado conhecido para integrais ordinárias.

### 2.3.2.1 Ansatz de Faddeev-Popov

Visando uma relação com o método de Faddeev-Popov, tratemos de uma integral ordinária em um espaço finito de  $n + m$  dimensões, onde  $n$  é número de variáveis  $x$  que não podem ser conectadas através de transformações "de calibre",  $m$ , o número de variáveis  $y$  que podem ser escritas como alguma transformação das coordenadas  $x$  e  $z$  é o conjunto das  $n + m$  variáveis. Dessa forma, para que o "funcional gerador" seja livre de divergências deve ser integrado apenas nas coordenadas  $x$ ,

$$Z[J] = N \int dx \exp [iS_J(z)], \quad (2.26)$$

onde  $N$  é uma constante de normalização que aparece simplesmente por uma questão de coerência com a definição da amplitude de transição. Porém, para que esse resultado possa ser comparado ao funcional gerador inicial, precisamos levar em consideração todas as variáveis de integração, sejam conectadas ou não por uma transformação "de calibre". Uma maneira simples de escrever o resultado acima é utilizando a distribuição delta de Dirac para definir uma superfície de integração nas coordenadas  $y$ , como por exemplo

$y = 0$

$$Z[J] = N \int dz \exp [iS_J(z)] \delta^{(m)}(y). \quad (2.27)$$

Apesar desse resultado estar correto, é de nosso interesse que a fixação escolhida possa ser a mais conveniente para cada problema, portanto ainda é necessário generalizar o resultado acima para a escolha de uma superfície qualquer  $F(z) = 0$ . Ao substituirmos a superfície  $y = 0$  pela superfície  $F(z) = 0$ , precisamos levar em conta a propriedade de composição do argumento da distribuição delta, que impõe um termo Jacobiano responsável por manter a unitariedade da integração sobre as coordenadas  $y$ ,

$$Z[J] = N \int dz \exp [iS_J] \det \left( \frac{\partial F(z)}{\partial y} \right) \delta^{(m)}(F(z)). \quad (2.28)$$

Agora só é preciso reinterpretar nosso resultado em termos das variáveis que estamos interessados. As variáveis de campo  $A_\mu$  estão representadas pelas coordenadas  $z$ , pois envolve tanto aquelas que estão conectadas por transformações de calibre quanto as que não estão conectadas. Dessa forma, a fixação da superfície  $F(z) = 0$  deve ser substituída por  $F(A_\mu) = 0$  que representa a fixação de calibre escolhida (fig.1). As coordenadas

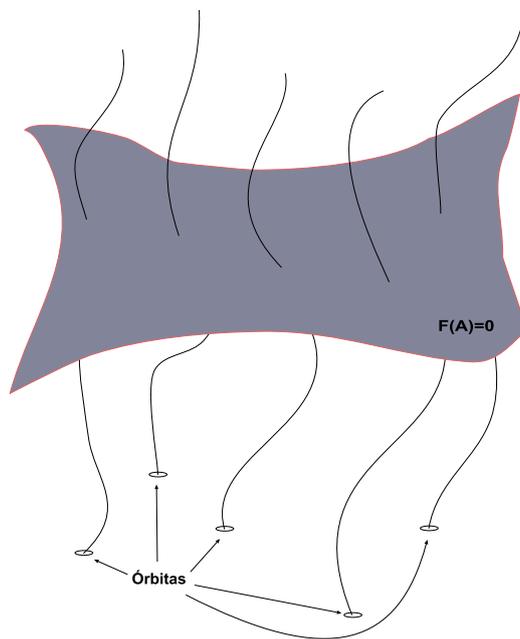


Figura 1: Representação da superfície fixadora de calibre

$x$  escolhidas para representar configurações que não representam a mesma física são, portanto, as diferentes órbitas das teorias de Yang-Mills, e por último as coordenadas  $y$  são aquelas responsáveis por transitar sobre uma mesma órbita, ou seja, é o parâmetro da transformação. Uma vez conhecida a relação entre cada um dos termos do "funcional gerador" e do funcional gerador inicial é possível escrever o *ansatz* de Faddeev-Popov

como

$$Z[J] = N \int [DA_\mu] \exp [iS_J] \det \left( \frac{\partial F(A_\mu)}{\partial \theta} \right) \delta(F(A_\mu)), \quad (2.29)$$

onde  $\delta(F(A_\mu))$  possui propriedades equivalentes a distribuição delta de Dirac convencional, porém filtra configurações nas integrais. O resultado (2.29) é a maneira correta de, perturbativamente, representar o funcional gerador em uma teoria de calibre. Um ponto que vale a pena ser ressaltado é a importância da fixação de calibre. Na teoria clássica de campos, essa técnica surgia apenas como um facilitador, pois o resultado poderia ser obtido independentemente de escolher ou não um calibre. Já na TQC, dependendo da descrição utilizada para quantizar o modelo, a escolha passa a ser fundamental pois somente assim é possível tratar as infinitas repetições na soma sobre configurações, ou eliminar modos não físicos na quantização canônica. Para entender como trabalhar com a equação (2.29) é necessário introduzir a ideia dos *ghosts* de Faddeev-Popov.

### 2.3.2.2 Ghosts de Faddeev-Popov

A única integração que sabemos realizar funcionalmente é a chamada integração Gaussiana, onde o resultado, apesar de já ter sido utilizado no início desta seção, é

$$\int [D\phi] e^{\phi(x)K(x,y)\phi(y)} = \frac{1}{\sqrt{\det K}}, \quad (2.30)$$

quando tratamos de um campo bosônico real  $\phi$ . A relação entre uma integral gaussiana e o determinante de um certo operador indica que esse caminho pode render frutos para representar o determinante de Faddeev-Popov, entretanto, a substituição não pode ser feita através de um campo real. Seria importante encontrar uma integral que, ao invés de depender da raiz quadrada do determinante do operador, dependa simplesmente do determinante, pois seria ainda mais próximo do *ansatz* dado em (2.29). Neste respeito, a integração gaussiana de um campo bosônico complexo gera justamente um fator

$$\int [D\phi] [D\phi^*] e^{i\phi^*(x)K(x,y)\phi(y)} = \frac{1}{\det K}. \quad (2.31)$$

Porém, apesar dos esforços, a descrição do determinante de um operador em termos de campos bosônicos não pode ficar melhor do que esse resultado encontrado acima. Sendo assim, a maneira correta de substituir o jacobiano do *ansatz* de Faddeev-Popov é através de um campo fermiônico, uma vez que a contribuição destes é inversa a de um campo bosônico. Portanto, uma maneira alternativa de escrever um funcional gerador para uma

teoria de calibre não abeliana é

$$Z[J] = N \int [DA_\mu][D\zeta][D\zeta^*] \exp [iS_J + i\zeta^*(x)K(x,y)\zeta(y)] \delta(F(A_\mu)), \quad (2.32)$$

onde  $\zeta$  representa o campo de *ghost* de Faddeev-Popov e  $\zeta^*$  o campo conjugado. Comparando as equações (2.29) e (2.32), podemos concluir que

$$K(x,y) = \frac{\partial F(A_\mu)}{\partial \theta}. \quad (2.33)$$

Algumas características são bem marcantes neste novo campo que acaba de ser introduzido. Uma análise em (2.32) revela que estes campos fermiônicos não possuem spin, ou seja, deveriam ser bosônicos. Felizmente, uma análise cuidadosa na matriz de espalhamento garante que estes são responsáveis apenas por eliminar modos não físicos da teoria, não sendo possível sua aparição em estados assintóticos.

## 2.4 Efeitos não triviais

### 2.4.1 Liberdade Assintótica

Em 2004, D. J. Gross, H. D. Politzer e F. Wilczek ganharam o prêmio Nobel de Física pela descoberta de um fenômeno existente apenas em teorias de calibre não abelianas, conhecida como liberdade assintótica. A função  $\beta$ , definida a partir da teoria de renormalização como

$$\beta = \mu \frac{dg}{d\mu}, \quad (2.34)$$

onde  $\mu$  é um parâmetro com dimensão de energia que depende do processo escolhido para renormalizar o sistema, é o objeto responsável por determinar qual faixa de energia apresenta uma constante de acoplamento suficientemente pequena a ponto de validar métodos perturbativos. Note que, em geral,  $g \equiv g(\mu)$ , uma vez que os processos de renormalização nos levam a redefinir constantes de acoplamento nuas, adimensionais e sem dependência com qualquer outro parâmetro, em termos de outras constantes renormalizadas com a finalidade de absorver as divergências existentes. Esta característica variante da constante de acoplamento é conhecida como *running coupling constant* e gera naturalmente uma escala neste objeto. Os três ganhadores mostraram que a função  $\beta$  da cromodinâmica quântica (QCD) é dada por

$$\beta = - \left( 11 - \frac{2n_f}{3} \right) \frac{g^3}{16\pi^2}, \quad (2.35)$$

onde  $n_f$  é o número de sabores existentes na natureza (atualmente  $n_f = 6$ ). Comparando os resultados (2.34) e (2.35), podemos perceber que para  $n_f < 16$ ,  $g$  se enfraquece a medida que a energia do sistema aumenta devido ao valor negativo obtido para a função  $\beta$ . Apesar de todos os cálculos validarem o efeito, ainda faltava uma interpretação mais física e intuitiva deste fenômeno. Esta foi proposta por E. Ma [18], para a teoria pura, e reformulada por N.K. Nielsen [21] para incluir os quarks da QCD. A melhor maneira de entender esse efeito é comparando-o com a eletrodinâmica quântica (QED), pois esta é a teoria cujas previsões apresentam melhor convergência com os dados experimentais e que, ao contrário da QCD, não possui liberdade assintótica. Primeiramente vamos supor dois sistemas, cada um deles regido por uma das teorias, onde exista apenas uma partícula fonte, elétron e quark fontes, respectivamente. No sistema regido pela QED, a existência do elétron polariza o vácuo de modo que pósitrons virtuais são atraídos enquanto os elétrons repelidos. Este efeito é característico de uma blindagem, sugerindo que a interação seria mais poderosa quanto menor a distância da fonte. No sistema regido pela QCD, a polarização do vácuo através de pares quark-antiquark virtuais também ocorrerá, porém, devido ao fato dos transportadores carregarem carga de cor, estes são capazes de interagir com os dipolos virtuais, amplificando interações a grandes distâncias [25], de maneira semelhante ao que ocorre em materiais paramagnéticos. Esta interpretação não é única, porém, uma competição entre efeitos de blindagem e amplificação é necessária na busca por uma análise qualitativa da liberdade assintótica. Devido a todas estas peculiaridades existentes apenas nas teorias de calibre não abelianas, muitos afirmam que a liberdade assintótica é uma exclusividade desta simetria. Mais a frente iremos estudar sistemas onde um efeito similar pode surgir na Mecânica Quântica utilizando como exemplo potenciais singulares.

### 2.4.2 Confinamento das cargas de cor

Como vimos na subseção 2.4.1, a liberdade assintótica é um efeito muito bem conhecido e consolidado quando se trata das teorias de calibre não abelianas. Porém o confinamento de cargas de cor e o *gap* de massa ainda são alvos de estudo até a data na qual foi escrita esta dissertação. Diferentemente da liberdade assintótica, estes efeitos são relevantes na faixa do infravermelho, região na qual não existe um consenso entre os pesquisadores sobre o tratamento adequado. Apesar das diferenças, um modelo que se propõe a explicar o confinamento é aceito pelos diferentes grupos de pesquisa. Entre um quark e um antiquark a uma distância  $L$ , deve surgir um tubo cilíndrico de fluxo cromoe-létrico [16] que mantém ambos ligados, dando lugar a um méson. Desta forma é possível

mostrar que a energia armazenada pelo sistema aumenta linearmente com o tamanho do tubo,

$$E = \sigma L, \quad \sigma = \int d^2x \frac{1}{2} \mathcal{F}_{0k}^a \mathcal{F}_{0k}^a, \quad (2.36)$$

onde a integração é realizada sobre a seção reta do tubo de fluxo. Imaginemos que a distância entre estas duas partículas aumente com o propósito de separarmos completamente as partículas. Inicialmente  $E < M_0$ , onde  $M_0$  é a soma das massa de repouso do quark e do antiquark, porém, a medida que  $L$  cresce, esta desigualdade deixará de ser verdadeira em algum momento. No instante em que  $E > M_0$ , o sistema formado por quark-antiquark deixará de ser energeticamente favorável em relação a um sistema formado por 2 destes pares cujas partículas estejam mais próximas, resultando no decaimento segundo a Figura 2. Sendo assim, a carga de cor esta sempre confinada dentro de estruturas que são ditas

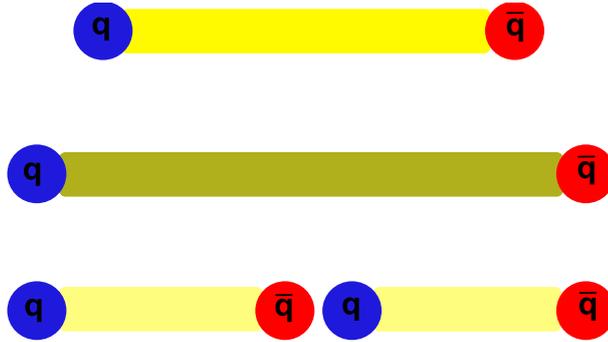


Figura 2: Decaimento de um méson em dois devido ao acúmulo de energia no tubo cromoeletrônico

de cor branca (mésons e bárions). Para este modelo, confinamento das cargas de cor está associado a uma energia que dependa linearmente da distância entre as partículas elementares. Este regime é buscado pelos mais diversos grupos de pesquisa, cada um baseando-se em propriedades nada triviais das teorias de Yang-Mills. Dentre eles destaca-se o modelo do supercondutor dual [17], que mesmo não tendo sido citado diretamente nesta dissertação, é a base de todos os trabalhos realizados com vórtices de centro e outras estruturas topológicas.

## 3 *Vórtices de Centro e Confinamento*

### 3.1 Loop de Wilson

Em teorias de calibre puras, o confinamento de quarks externos pesados, sem dinâmica, pode ser associado a uma lei da área para o *loop* de Wilson [32]. Com o objetivo de entender o surgimento desta interpretação, vamos analisar um sistema formado por um quark e um antiquark ( $\bar{q}q$ ) separados por uma distância  $R$ . Este par é criado no instante  $t = 0$  e aniquilado em  $t = T$  [5],[9],[16]. Antes de descrever o problema, iremos discutir mais cuidadosamente dois aspectos. Primeiramente, ao criarmos as partículas em pontos diferentes do espaço, precisamos necessariamente criar uma linha de fluxo ligando-as, para que desta maneira a conservação local da carga seja preservada. O fator responsável por esta criação é a holonomia  $U(x', x, C)$  do grupo,

$$\bar{U}(x', x, C) = \mathcal{P} \exp \left[ ig \int_{x'}^x dy_\mu A_\mu(y) \right], \quad (3.1)$$

onde  $\mathcal{P}$  é o operador de ordenamento espacial ao longo da curva  $C$ . Portanto, podemos escrever o operador de criação para o par  $\bar{q}q$  segundo

$$Q(x', x, t, C) = \bar{q}(x', t) \bar{U}(x', x, C) q(x, t), \quad (3.2)$$

onde  $C$  representa uma curva que inicia no ponto  $x'$  e termina no ponto  $x$ . Desta forma, os diferentes estados de quark-antiquark são diferenciados apenas pelas diversas curvas que ligam cada partícula. Para relacionar confinamento e lei da área, nosso objeto de estudo será o valor esperado do operador definido em (3.2), calculado no estado fundamental da teoria.

Primeiramente iremos basear nossa descrição a partir do formalismo canônico. Desta

forma, podemos escrever

$$\langle Q^\dagger(0, R, T, C)Q(0, R, 0, C) \rangle = \sum_{m,n} \mathcal{N} \langle 0|Q^\dagger(0, R, 0, C)|m \rangle \langle m|e^{-HT}|n \rangle \langle n|Q(0, R, 0, C)|0 \rangle, \quad (3.3)$$

onde o fator  $\mathcal{N}$  provém da normalização para este observável. Nesta passagem utilizamos a definição do operador de evolução temporal e introduzimos uma base completa de estados  $|m\rangle$ . Repare que assumindo a escala  $T$  muito grande, o termo mais relevante para o cálculo do correlator é aquele que possui o estado com menor energia, a qual iremos denotar  $E(R)$ . Desta forma,

$$\langle Q^\dagger(0, R, T, C)Q(0, R, 0, C) \rangle \sim e^{-TE(R)}, \quad (3.4)$$

onde assumimos que a energia do vácuo é nula.

Na segunda etapa deste cálculo, iremos adotar o procedimento funcional, visando uma outra interpretação para o nosso correlator. Utilizando (3.2), é possível escrever

$$\langle Q^\dagger(0, R, T, C)Q(0, R, 0, C) \rangle = \left\langle \bar{q}(0, 0) \bar{U} \left( (0, 0), (0, R), C \right) q(R, 0) \bar{q}(R, T) \bar{U} \left( (T, R), (T, 0), C \right) q(0, T) \right\rangle. \quad (3.5)$$

Porém, antes de tentar resolver diretamente o propagador acima, iremos analisar um correlator mais simples onde esperamos encontrar um resultado que facilite nossa compreensão. Este é dado por

$$\langle q^\alpha(t, x) \bar{q}^\beta(t', x) \rangle = \mathcal{N} \int [DA][Dq][D\bar{q}] q^\alpha(t, x) \bar{q}^\beta(t', x) e^{-S_E}, \quad (3.6)$$

onde  $S_E = \left( \int d^4x \frac{1}{2} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + i \bar{q} \gamma^0 D_0 q - im_0 \bar{q} q \right)$ . No regime de quarks pesados a seguinte equação de campo é satisfeita

$$i\gamma^0(\partial_0 - igA_0)q = im_0q, \quad (3.7)$$

onde  $m_0$  é a massa renormalizada dos quarks. O propagador do quark pode ser escrito como

$$\langle q^\alpha(t, x) \bar{q}^\beta(t', x) \rangle = \mathcal{P} \exp \left[ ig \int_{t'}^t d\tau A_0(\tau, x) \right] \langle q^\alpha(t, x) \bar{q}^\beta(t', x) \rangle_{livre}, \quad (3.8)$$

de maneira que as diferenças entre  $\langle q^\alpha(t, x) \bar{q}^\beta(t', x) \rangle$  e  $\langle q^\alpha(t, x) \bar{q}^\beta(t', x) \rangle_{livre}$  são dadas pelas trocas  $D_0 \rightarrow \partial_0$ ,  $q^\alpha(t, x) \rightarrow q^\alpha(t, x)_{livre}$  e  $\bar{q}^\beta(t', x) \rightarrow \bar{q}^\beta(t', x)_{livre}$ . O primeiro termo do lado direito corresponde a holonomia do grupo sobre uma curva que não varia espacialmente, apenas temporalmente. O termo livre, independe dos campos de calibre, simplesmente fornece um valor constante para o propagador. Agora estamos prontos para

analisar nosso sistema. Ao generalizarmos o resultado acima para mais de um quark, é possível escrever,

$$\begin{aligned} \langle Q^\dagger(0, R, T, C)Q(0, R, 0, C) \rangle \sim \\ \langle \bar{U}((0, 0), (0, R))\bar{U}((0, R), (T, R))\bar{U}((T, R), (T, 0))\bar{U}((T, 0), (0, 0)) \rangle_A = \\ \langle \text{tr}U(x, x, C) \rangle_A, \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde  $C$  é o quadrado cujos vértices são os pontos dados acima (veja Figura 3). Este último membro é chamado "loop de Wilson" e denota-se  $W[C]$ . Para efeito de cálculo, a notação  $\langle \dots \rangle_A$  significa que a integral funcional é avaliada apenas sobre configurações do campo de calibre e não mais sobre campos fermiônicos. Usando a expressão para a

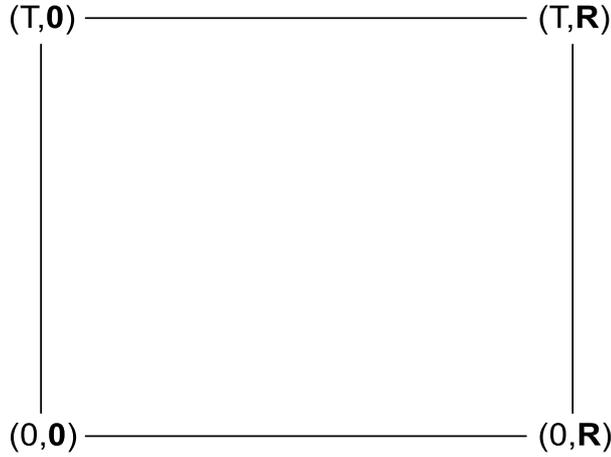


Figura 3: Curva  $C$  sobre a qual deve ser calculado o loop de Wilson

holonomia do grupo  $SU(N)$  em (3.1), obtemos finalmente

$$W[C] = \frac{1}{N} \text{tr} \mathcal{P} \exp \left[ ig \oint_C dx_\mu A_\mu(x) \right]. \quad (3.10)$$

Dentre todas as características do loop de Wilson, a mais importante é sua invariância de calibre. Visando demonstrar esta propriedade, considere um caminho aberto de  $x$  a  $x + \epsilon$ , infinitesimalmente próximos. Neste caso, a holonomia do grupo pode ser aproximada,

$$\bar{U}(x, x + \epsilon) = \mathcal{P} \exp(ig\epsilon^\mu A_\mu) \approx 1 + ig\epsilon^\mu A_\mu. \quad (3.11)$$

Aplicada uma transformação de calibre que leva os campos  $A_\mu$  em  $A'_\mu$ , segundo (2.13),

temos

$$\begin{aligned}
\bar{U}(x, x + \epsilon) &\rightarrow 1 + ig\epsilon^\mu U(x)A_\mu U^{-1}(x) - \epsilon^\mu U(x)\partial_\mu U^{-1}(x), \\
&\rightarrow 1 + ig\epsilon^\mu U(x)A_\mu U^{-1}(x) + \epsilon^\mu (\partial_\mu U(x))U^{-1}(x), \\
&\rightarrow 1 + ig\epsilon^\mu U(x)A_\mu U^{-1}(x) + \epsilon^\mu (\partial_\mu U(x))U^{-1}(x), \\
&\rightarrow ((1 + \epsilon^\mu \partial_\mu)U)U^{-1} + ig\epsilon^\mu U(x)A_\mu U^{-1}(x), \\
&\rightarrow U(x + \epsilon)(1 + ig\epsilon^\mu A_\mu)U^{-1}(x) = U(x + \epsilon)\bar{U}(x, x + \epsilon)U^{-1}(x), \quad (3.12)
\end{aligned}$$

onde utilizamos as seguintes relações,  $(1 + \epsilon^\mu \partial_\mu)U(x) \approx U(x + \epsilon)$  e  $U(x)A_\mu U^{-1}(x) \approx U(x + \epsilon)A_\mu U^{-1}(x)$ . Este resultado é aproximado e o erro encontra-se na segunda ordem em  $\epsilon$ . Sendo assim, é natural definirmos a holonomia entre dois pontos  $x$  e  $x'$  quaisquer como a composição das partes infinitesimais. Logo, a holonomia do *loop* de Wilson se transforma de maneira covariante,

$$\mathcal{P} \exp \left( ig \int_{x'}^x dy_\mu A_\mu \right) = U(x') \left[ \mathcal{P} \exp \left( ig \int_{x'}^x dy_\mu A'_\mu \right) \right] U^{-1}(x), \quad (3.13)$$

significando que ao identificarmos as extremidades, ou seja  $x' \equiv x$ , e utilizarmos a propriedade cíclica do traço, obtemos a invariância deste observável. Relacionando os resultados obtidos através dos procedimentos canônico e funcional, obtemos

$$W[C] \sim \exp[-TE(R)]. \quad (3.14)$$

Para explicar o confinamento, é esperado que a energia do estado de quark-antiquark  $E(R)$  possua uma relação linear com a distância  $R$  entre estas partículas. Ao levarmos em consideração esta hipótese, o *loop* de Wilson torna-se proporcional a área do retângulo descrito na figura 3. Por este motivo, falar em confinamento e lei da área para o *loop* de Wilson são equivalentes. Generalizando este resultado para qualquer grande curva  $C$ , obtemos o critério de Wilson para confinamento,

$$W[C] \sim \exp[-\sigma A[C]], \quad (3.15)$$

onde  $\sigma$  é um parâmetro com unidades de tensão que pode ser determinado através da espectroscopia de quarks pesados, e  $A[C]$  representa a área mínima para uma superfície que possua a curva  $C$  como contorno.

## 3.2 Vórtices finos

Em seus trabalhos sobre as fases das teorias de Yang-Mills, G. t'Hooft atribui ao centro do grupo de simetria o papel principal no regime não perturbativo [17]. Desde então, grupos de pesquisadores se dedicaram a estudar estruturas que seriam capazes de explicitar esta simetria assim como gerar a tão desejada lei da área. É neste contexto que surgem os vórtices de centro, que apesar de não emergirem como uma solução clássica, estão bem definidos quanto aos cálculos desenvolvidos na rede. No contínuo, a forma de definir estas estruturas é a partir das transformações singulares descontínuas  $\mathcal{S}$ . Transformações singulares  $\mathcal{U}$  são conhecidas por uma propriedade muito interessante,

$$[\partial_\mu, \partial_\nu]\mathcal{U}^{-1} \neq 0, \quad (3.16)$$

que resulta na quebra da covariância do tensor de intensidades não abeliano,

$$F_{\mu\nu}^{\mathcal{U}} \cdot \vec{T} = \mathcal{U}F_{\mu\nu}\mathcal{U}^{-1} - \frac{i}{g}\mathcal{U}[\partial_\mu, \partial_\nu]\mathcal{U}^{-1}. \quad (3.17)$$

Quando tratamos de transformações singulares univalentes, o termo responsável pela quebra é reconhecido como a superfície de Dirac. Por não apresentarem descontinuidades, a parametrização das cordas de Dirac, na presença de um campo de flutuações  $A_\mu$ , pode ser feita exatamente como uma transformação de calibre,

$$A_\mu \rightarrow A_\mu^{\mathcal{U}} = \mathcal{U}A_\mu\mathcal{U}^{-1} + \frac{i}{g}\mathcal{U}\partial_\mu\mathcal{U}^{-1}. \quad (3.18)$$

Entretanto, para que possamos definir um vórtice de centro, será necessário considerar um mapa  $\mathcal{S}$  descontínuo sobre uma superfície por um elemento do centro do grupo, cuja borda deve ser o vórtice de centro que desejamos introduzir,

$$\mathcal{S}(x) \rightarrow e^{i\frac{2\pi n}{N}}\mathcal{S}(x'), \quad (3.19)$$

onde  $x$  e  $x'$  são pontos que encontram-se de lados opostos desta superfície e  $1 \leq n < N$  com  $n \in \mathbb{N}$ . Desta forma, a parametrização proposta por M. Engelhardt e H. Reinhardt [13] foi

$$A_\mu = \mathcal{S}A_\mu\mathcal{S}^{-1} + \frac{i}{g}\mathcal{S}\partial_\mu\mathcal{S}^{-1} - I_\mu(\Sigma), \quad (3.20)$$

onde  $I_\mu(\Sigma)$  é o vórtice ideal responsável por cancelar o termo singular proveniente de  $\partial_\mu\mathcal{S}^{-1}$ . Portanto, a única singularidade que sobrevive é aquela que localiza-se sobre a borda desta superfície. Esta estrutura é conhecida como vórtice fino. Para determinarmos o efeito desta configuração sobre o loop de Wilson, considere uma curva aberta  $C$  cujas

extremidades são os pontos  $x$  e  $x'$ . De acordo com (3.13),

$$\mathcal{P} \exp \left( ig \int_{x'}^x dy_\mu \mathcal{A}_\mu \right) = \mathcal{S}(x') \left[ \mathcal{P} \exp \left( ig \int_{x'}^x dy_\mu A_\mu \right) \right] \mathcal{S}^{-1}(x). \quad (3.21)$$

Considere que, ao identificarmos  $x$  e  $x'$ , a curva  $C$  torna-se fechada e enlaça o vórtice fino (veja figura 4). Utilizando a equação (3.19) e a propriedade cíclica do traço, encontramos o *ansatz* dos vórtices de centro

$$W_C[A_\mu] = e^{i\frac{2\pi n}{N}} W_C[\mathcal{A}_\mu]. \quad (3.22)$$

onde  $W_C[\mathcal{A}_\mu]$  ( $W_C[A_\mu]$ ) é o cálculo do observável antes (depois) de introduzirmos o vórtice

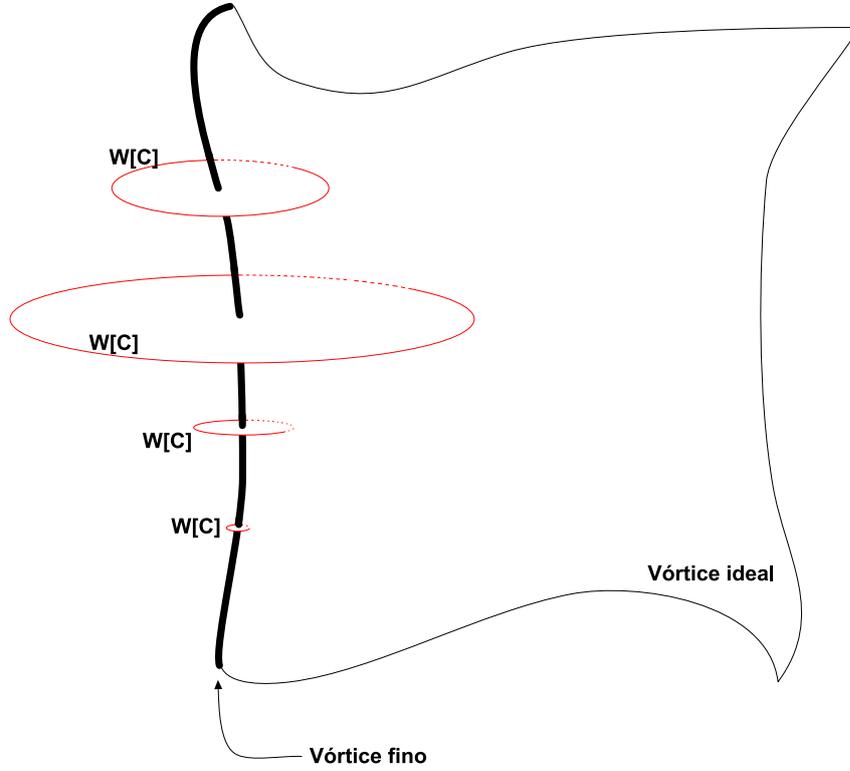


Figura 4: Representação para vórtice fino como borda do vórtice ideal sendo enlaçado por diversos *loops* de Wilson

de centro, deixando claro que este modifica a física anteriormente existente. Apesar de descrevê-los na rede, (3.20) limita a vórtices fechados as possibilidades de configurações que possuem comprimento finito. Portanto, estão impedidas correlações entre vórtices de centro e diferentes estruturas topológicas, tais como monopólos e instantons, cujas características são relevantes na descrição do confinamento.

### 3.2.1 Vórtices finos como defeitos nas bases locais de cor

Uma vez que esse procedimento visa descrever os vórtices finos como defeitos nas bases locais de cor, é importante definir coerentemente estas bases. Como uma limitação do método anterior foi não permitir a correlação entre vórtices e monopólos, definir estas bases de maneira similar a utilizada por Cho ao tratar monopólos [22] pode nos ajudar a correlacioná-los naturalmente. Sendo assim, podemos definir as bases locais do espaço de cor  $\hat{n}_A$  como

$$ST_A \mathcal{S}^{-1} = \hat{n}_A \cdot \vec{T}, \quad (3.23)$$

onde é necessário que as bases definidas acima preservem localmente todas as propriedades que caracterizam bases de um espaço, tais como ortonormalidade e completeza. Tratando-se apenas de dois sistemas de coordenadas diferentes do espaço de cor, assim como o cartesiano e o esférico para um espaço tridimensional, a relação entre elas a cada ponto é uma rotação  $\mathcal{R}$  na representação adjunta, ou seja,  $\hat{n}_A = \mathcal{R} \hat{e}_A$ . Vamos definir também,

$$C_\mu^A = -\frac{1}{gN} f^{ABC} \hat{n}_B \cdot \partial_\mu \hat{n}_C. \quad (3.24)$$

Da relação entre as bases introduzida via matriz de rotação, é possível rescrever o termo de produto interno da configuração de campo  $C_\mu^A$

$$\hat{n}_B \cdot \partial_\mu \hat{n}_C = (\mathcal{R}^{-1} \partial_\mu \mathcal{R})_{BC}. \quad (3.25)$$

O resultado acima possui um desdobramento quando tratamos de uma álgebra de Lie. Para esta classe, matrizes de rotação podem ser escritas em termos dos geradores na representação adjunta  $\mathcal{M}^A$  na forma exponencial  $\mathcal{R} = e^{i\mathcal{M}^A X_A}$ . A partir de uma pequena manipulação algébrica, podemos concluir que

$$\mathcal{R}^{-1} \partial_\mu \mathcal{R} = iX_\mu^A \mathcal{M}^A. \quad (3.26)$$

Ao substituirmos este resultado em (3.25), lembrando que os elementos dos geradores na representação adjunta são dados por  $(\mathcal{M}^A)^{BC} = -if^{ABC}$ , obtemos

$$\hat{n}_B \cdot \partial_\mu \hat{n}_C = f^{ABC} X_\mu^A, \quad (3.27)$$

e ao comparar (3.24) e (3.27) é simples notar a igualdade  $X_\mu^A = -gC_\mu^A$ , uma vez que  $f^{ACD} f^{BCD} = N\delta^{AB}$ . Portanto, o vórtice fino em termos das matrizes de rotação e dos geradores do grupo é dado por

$$C_\mu^A \mathcal{M}^A = \frac{i}{g} \mathcal{R}^{-1} \partial_\mu \mathcal{R}. \quad (3.28)$$

O resultado obtido em (3.28) encontra-se na representação adjunta do grupo, sendo assim, não existem singularidades sobre termos de superfície. Logo, podemos afirmar que  $\hat{n}_A$ , assim como  $\mathcal{R}$ , são contínuas em todo o espaço. A introdução destas bases é importante pois nos permite correlacionar vórtice e monopólos. Ao rescrevermos o resultado (3.28) na representação fundamental é necessária a introdução de um termo singular, implicando que nesta representação, o campo  $C_\mu$ , é dado por

$$-C_\mu^A \hat{n}_A \cdot \vec{T} = \frac{i}{g} \mathcal{S} \partial_\mu \mathcal{S}^{-1} - I_\mu(\Sigma), \quad (3.29)$$

onde podemos reconhecer  $-C_\mu^A$  como o vórtice fino ao compararmos (3.29) e (3.20) na ausência de  $\mathcal{A}_\mu$ . Parametrizando estes campos nas bases de cor, encontramos uma maneira equivalente de escrever a equação (3.20),

$$A_\mu = (-C_\mu^A + \mathcal{A}_\mu^A) \hat{n}_A. \quad (3.30)$$

### 3.3 Vórtices grossos e deformação diagonal dos vórtices finos

Apesar de possuir informação física relevante, quando calculamos a ação de um vórtice fino, esta diverge. Com o propósito de regularizar este problema, é introduzida uma espessura nesta estrutura. Duas maneiras são conhecidas para introduzir estes novos objetos como campos de fundo para um setor perturbativo, uma baseada na suavização da equação (3.30) [23] e outra utilizada por D. Diakonov e M. Maul [12], o qual também será chamado procedimento usual. Para entender as diferenças entre as formulações, vamos estudar os vórtices de centro grossos para as teorias de Yang-Mills com simetria  $SU(2)$ , a qual possui um único elemento de centro não trivial  $z = -1$ . Adotando a transformação singular  $\mathcal{S} = e^{i\phi T_3}$ , onde  $\phi$  é o ângulo polar e  $T_3 = \tau_3/2$ , o cálculo do vórtice fino para este mapa  $\mathcal{S}$ , na ausência de um setor perturbativo fornece como resultado (conforme equação (3.20)),

$$A_\mu^A = \frac{1}{g} \partial_\mu \phi \delta^{A3}, \quad (3.31)$$

onde podemos perceber que o fluxo magnético carregado por este é  $2\pi/g$ . Para gerar o vórtice grosso em termos da configuração acima basta introduzir um perfil  $f(\rho)$  que possua as propriedades a seguir,

$$A_\mu^A \rightarrow \frac{f(\rho)}{g} \partial_\mu \phi \delta^{A3}, \quad (3.32)$$

1.  $f(\rho) = 0$  quando  $\rho \rightarrow 0$ : Essa propriedade serve para eliminar a divergência do

vórtice fino,

2.  $f(\rho) = 1$  quando  $\rho$  seja suficientemente grande: Essa propriedade serve para garantir, a grandes distâncias, a presença de um elemento de centro no *loop* de Wilson. O maior problema da descrição dada para esta classe de vórtice é a inexistência de uma forma unívoca ao definir o que significa  $\rho$  suficientemente grande, pois cada perfil  $f(\rho)$  introduz uma escala  $\rho_0$  na teoria.

A partir das descrições dadas acima, o tratamento dado por Diakonov e Maul para vórtices grossos como campos de fundo na presença de flutuações quânticas em termos das bases globais de  $SU(2)$  é

$$\mathcal{A}_\mu = \left( \frac{f(\rho)}{g} \partial_\mu \phi + q_\mu^3 \right) \hat{e}_3 + q_\mu^a \hat{e}_a, \quad (3.33)$$

onde  $a = 1, 2$ . Entretanto, esta descrição não é compatível com a parametrização dos vórtices finos de Engelhardt e Reinhardt quando realizarmos o limite  $\rho_0 \rightarrow 0$ . Para recuperarmos a definição dos vórtices finos é necessário implementar a deformação do vórtice fino [23], onde suavizamos o perfil  $-C_\mu^A$  da equação (3.30), da seguinte maneira,

$$\mathcal{A}_\mu = \left( \frac{f(\rho)}{g} \partial_\mu \phi + Q_\mu^3 \right) \hat{e}_3 + Q_\mu^a \hat{n}_a. \quad (3.34)$$

Já havíamos discutido alguns pontos a favor da descrição em termos de bases locais e agora acabamos de perceber mais um. De fato, (3.33) e (3.34) possuem uma diferença essencial na maneira de parametrizar as flutuações e por este motivo codificam os defeitos de maneira diferente. Todos os passos anteriores podem ser generalizados para outras simetrias. No caso da simetria  $SU(3)$ , na qual os geradores são descritos em termos das matrizes de Gell-Mann, e existem dois elementos de centro não triviais, as transformações singulares são  $\mathcal{S}_1 = e^{i\frac{2}{\sqrt{3}}\phi T_8}$ , a qual possui uma descontinuidade pelo elemento de centro  $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ , e  $\mathcal{S}_2 = e^{i\phi T_3} e^{i\frac{1}{\sqrt{3}}\phi T_8}$ , referente ao elemento de centro  $z_2 = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ .

## 3.4 Mecanismo de Confinamento

Para finalizar este capítulo, vamos analisar como surge a lei da área para o *loop* de Wilson no contexto dos vórtices de centro [16]. Como vimos, este observável é modificado por um elemento de centro quando enlaça um vórtice de centro. Portanto, ao criarmos um conjunto de vórtices cujos elementos de centro são  $z_a, z_b, \dots$ , todos enlaçados por uma

curva fechada  $C$ , o *loop* de Wilson é modificado por um fator

$$W_C[\mathcal{A}_\mu] = \langle Z(C) \rangle W_C[\mathcal{A}_\mu], \quad (3.35)$$

onde  $\langle Z(C) \rangle = z_a z_b \dots$ . Para que este resultado seja verdadeiro, são necessárias duas condições

1. Para que possamos permitir (3.35), é necessário que para um *loop*  $C$ ,  $Z(C)$  e  $\bar{U}_C[\mathcal{A}_\mu]$  sejam pouco correlacionadas,
2. Para dois grandes *loops*  $C_1$  e  $C_2$ ,  $Z(C_1)$  e  $Z(C_2)$  são fracamente correlacionados, ou seja

$$\langle Z(C_1)Z(C_2) \rangle \approx \langle Z(C_1) \rangle \langle Z(C_2) \rangle. \quad (3.36)$$

A condição 1 surge como justificativa para escrever o *loop* de Wilson de acordo com (3.35). Feito isso, vamos subdividir a área  $A$  da curva  $C$  em quadrados que possuam áreas  $L^2$  cujos contornos são curvas  $C_i$ . Portanto, após a utilização da condição 2, o termo referente aos elementos de centro do *loop* de Wilson pode ser escrito como

$$\langle Z(C) \rangle \approx \prod_{i=1}^{A/L^2} \langle Z(C_i) \rangle. \quad (3.37)$$

Ao considerarmos quadrados suficientemente grandes, é válida a seguinte relação para a tensão da corda

$$\sigma = -\frac{\ln(\langle Z(C_i) \rangle)}{L^2}, \quad (3.38)$$

que uma vez resolvida para qualquer curva  $C_i$ , nos fornece que  $\langle Z(C_i) \rangle = \exp(-\sigma L^2)$  e substituindo esse resultado em (3.37), é obtido

$$\langle Z(C) \rangle = \exp(-\sigma A(C)). \quad (3.39)$$

Com esse resultado, o cenário de confinamento pode ser entendido como um conjunto de vórtices sobrepostos sobre qualquer configuração de vácuo não confinante, onde a lei da área é obtida através de flutuações no número de vórtices topologicamente enlaçados pela curva  $C$ .

## 4 *Estabilidade dos vórtices de centro*

### 4.1 Instabilidade de Savvidy-Nielsen-Olesen

Nesta seção, iremos apresentar os argumentos e cálculos que deram origem ao efeito conhecido como instabilidade de Savvidy-Nielsen-Olesen (ISNO) [20]. Para a simetria  $SU(2)$ , conhecia-se que na presença de um campo magnético de cor externo  $H$ , um novo estado de mínima energia surgia, e era dado pela seguinte equação,

$$gH_{min.} = \mu^2 \exp\left(\frac{-24\pi^2}{11g^2}\right), \quad (4.1)$$

onde  $\mu$  é um parâmetro regularizador. Esta descoberta direcionou a comunidade científica a entender propriedades quânticas deste campo. Sabemos que, segundo a TQC usual, a densidade de probabilidade de um sistema estático, que encontra-se em  $t \rightarrow -\infty$  em um estado  $|0\rangle$ , permaneça neste em  $t \rightarrow \infty$ , tendo sofrido ação de uma corrente perturbativa externa por um tempo finito é dada, em termos da energia efetiva  $\mathcal{E}$ , de acordo com

$$\langle 0^+ | 0^- \rangle = \exp(-iT\mathcal{E}). \quad (4.2)$$

Portanto, podemos perceber que a análise da estabilidade de um estado depende da existência, ou não, de um termo imaginário na energia efetiva. Por se tratar de um procedimento perturbativo, as contribuições adicionais sobre a energia clássica podem ser calculadas a partir da expansão em *loops* sobre a energia clássica. A 1 *loop*, para um perfil estático, como o considerado, a energia efetiva é dada por

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}H^2V + \mathcal{W}_{veterial}, \quad (4.3)$$

onde  $\mathcal{W}_{veterial}$  é a soma dos autovalores do operador quadrático nos campos de flutuação da ação do sistema. Adotando  $A_\mu^3$  como campo responsável por gerar  $H$ ,  $W_\mu$  e seu conjugado  $W_\mu^*$  como campos perturbativos e fixando o calibre máximo abeliano (MAG) ( $D_\mu W_\mu = 0$ ),

podemos escrever a lagrangiana como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{1}{2}|D_\mu W_\nu - D_\nu W_\mu|^2 \\ & -ig(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)W_\mu^*W_\nu + (\text{termos de ordem maior em } W), \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde,

$$D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu,$$

$$A_\mu \equiv A_\mu^3, \quad W_\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 + iA_\mu^2).$$

Devido a isotropia do espaço antes da introdução do campo externo, não existe perda de generalidade ao adotarmos a direção 3 como privilegiada e definirmos as componentes do campo magnético constante como  $A_0 = A_1 = A_3 = 0$  e  $A_2 = Hx_1$ . Com um pouco de manipulações algébricas sobre a equação de campo, incluindo a aplicação da transformada de Fourier nas coordenadas  $x_2$  e  $x_3$ ,

$$W_E(x_1, x_2, x_3) = \int \frac{dk_2 dk_3}{(2\pi)^2} e^{i(k_2 x_2 + k_3 x_3)} \tilde{W}_E(x_1, k_2, k_3), \quad (4.5)$$

é possível determinar a seguinte equação para as autoenergias que contribuem a um *loop* para a energia efetiva,

$$E^2 \tilde{W}_E = \left[ -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + g^2 H^2 \left( x_1 - \frac{k_2}{gH} \right)^2 + k_3^2 - 2gS_3 H \right] \tilde{W}_E. \quad (4.6)$$

A equação (4.6) é conhecida desde o tratamento dos níveis de Landau. Sendo assim, a contribuição para a energia efetiva pode ser escrita como

$$\mathcal{W}_{\text{vetorial}} = c \int_{-\infty}^{\infty} dk_3 \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sqrt{2gH \left( n + \frac{3}{2} \right) + k_3^2} + \sqrt{2gH \left( n - \frac{1}{2} \right) + k_3^2} \right], \quad (4.7)$$

onde  $c$  é uma constante determinada a posteriori. Certas considerações podem ser realizadas sobre (4.7) e o tratamento que estamos adotando:

- Para  $n = 0$ ,  $S_3 = +1$  e  $k_3^2 < eH$ ,  $\mathcal{W}_{\text{vetorial}}$  recebe uma contribuição imaginária;
- o modo instável existe porque a equação de campo da teoria de Yang-Mills contém um termo de momento magnético anômalo que contribui para a energia de ponto zero;
- o estado fundamental na presença de um campo de fundo magnético estático é, portanto, um mínimo local da teoria de Yang-Mills. Entretanto, este pode representar

um passo em direção ao verdadeiro estado fundamental;

- o modo com  $S_3 = 0$  é eliminado. A maneira mais conveniente de perceber essa característica é graças a presença de *ghosts* que interagem exatamente como modos não massivos, porém, devido o fato de serem férmions, contribuem exatamente de maneira oposta ao modo considerado.

A equação (4.7) ainda não foi regularizada e renormalizada. Este procedimento é necessário porque pode existir a possibilidade da contribuição imaginária estar relacionada com os termos divergentes de  $\mathcal{W}_{vetorial}$ . Utilizando o método de regularização desenvolvido por Salam e Strathadee [29], (4.7) é dada por,

$$\mathcal{W}_{vetorial} = c \mu^{-2\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} dk_3 \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \left[ 2gH \left( n + \frac{3}{2} \right) + k_3^2 \right]^{1/2+\epsilon} + \left[ 2gH \left( n - \frac{1}{2} \right) + k_3^2 \right]^{-1/2+\epsilon} \right]. \quad (4.8)$$

Fazendo uso da representação integral da expressão,

$$(\omega^2 - i\delta)^{1/2+\epsilon} = \frac{i^{-1/2-\epsilon}}{\Gamma(-1/2 - \epsilon)} \int_0^{\infty} d\tau \tau^{-3/2-\epsilon} \exp(-i\tau(\omega^2 - i\delta)), \quad (4.9)$$

válida para  $\epsilon > -1/2$ , é possível rescrever separadamente cada um dos termos do integrando de maneira que a soma sobre todos os momentos e modos de momento angular sejam facilmente resolvidos utilizando técnicas de progressão geométrica e integração gaussiana, respectivamente. Adotando  $\omega^2 = 2gH \left( n + \frac{3}{2} \right)$  e  $\delta = 0$  no primeiro termo e  $\omega^2 = 2gH \left( n - \frac{1}{2} \right)$  e  $\delta = 0$  para o segundo, o funcional gerador passa a ser escrito como

$$\mathcal{W}_{vetorial} = \mu^{-2\epsilon} \frac{VgH}{4\pi^2} \frac{i^{-1-\epsilon} \sqrt{\pi}}{\Gamma(-1/2 - \epsilon)} \int_0^{\infty} d\tau \tau^{-2-\epsilon} \times \left[ \frac{\exp(-i\tau(3gH - i\epsilon)) + \exp(i\tau(gH + i\epsilon))}{1 - \exp(-i\tau 2gH)} \right]. \quad (4.10)$$

Em diversos casos, o procedimento para resolver integrais complexas é rotacionar o eixo de integração e redefinir uma nova variável  $\tau = -is$ . Entretanto esse processo é proibido, pois a condição de convergência da integral em  $|\tau| \rightarrow \infty$  não é satisfeita devido o termo  $\exp(i\tau(gH + i\epsilon))$ . Isso nos induz a separar  $\mathcal{W}_{vetorial}$  da seguinte maneira,

$$\mathcal{W}_{vetorial} = \mathcal{W}_{vetorial}^{est.} + \mathcal{W}_{vetorial}^{inst.}, \quad (4.11)$$

onde,

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{vetorial}^{est.} &= \mu^{-2\epsilon} \frac{VgH}{4\pi^2} \frac{i^{-1-\epsilon} \sqrt{\pi}}{\Gamma(-1/2 - \epsilon)} \int_0^\infty d\tau \tau^{-2-\epsilon} \\ &\times \left[ \frac{\exp(-i\tau 3gH) + \exp(i\tau gH)}{1 - \exp(-i\tau 2gH)} - \exp(i\tau gH) \right], \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\mathcal{W}_{vetorial}^{inst.} = \mu^{-2\epsilon} \frac{VgH}{4\pi^2} \frac{i^{-1-\epsilon} \sqrt{\pi}}{\Gamma(-1/2 - \epsilon)} \int_0^\infty d\tau \tau^{-2-\epsilon} \exp(i\tau gH + i\epsilon), \quad (4.13)$$

nos permitindo rotacionar  $\mathcal{W}_{vetorial}^{est.}$ , a contribuição livre de termos imaginários. O cálculo direto de  $\mathcal{W}_{vetorial}^{inst.}$  nos fornece como resultado,

$$\mathcal{W}_{vetorial}^{inst.} = \frac{Vg^2H^2}{8\pi^2} \frac{1}{\epsilon} + \frac{Vg^2H^2}{8\pi^2} \ln\left(\frac{gH}{\mu^2}\right) - i\pi \frac{Vg^2H^2}{8\pi^2}, \quad (4.14)$$

onde é possível perceber que o termo imaginário sobrevive a renormalização da teoria e portanto contribui diretamente para o cálculo da amplitude de transição dada por (4.2).

Este é o fenômeno conhecido como ISNO e nas próximas seções deste capítulo iremos analisar como este resultado influencia a estabilidade dos vórtices de centro.

## 4.2 Ação efetiva a 1 loop para vórtices de centro

Como a ISNO trata de uma configuração muito particular para o campo cromo magnético externo, a existência de um novo vácuo estável para as teorias de Yang-Mills não foi totalmente eliminada. De fato, este é um dos pontos que motivou esta dissertação, pois existe a esperança de que um certo perfil de vórtice de centro possa permanecer estável mesmo sob ação de efeitos quânticos. Assim como no caso discutido por Savvidy, Nielsen e Olesen, a teoria efetiva a 1 loop será a responsável por determinar a influência das flutuações sobre este defeito topológico. Ao decompor o campo em termos das bases do espaço de cor  $\hat{u}_A$ ,

$$A_\mu = Y_\mu^A \hat{u}_A, \quad (4.15)$$

podemos adotar qualquer um dos procedimentos descritos no capítulo 3, desde que definamos quais as bases que estão sendo utilizadas para descrever os vórtices e decompor as flutuações quânticas. O procedimento utilizado nesta seção será a deformação diagonal do vórtice fino [23], e apenas ao final a relacionaremos ao resultado obtido por Diakonov e Maul [12]. Como os vórtices são escritos a partir das componentes abelianas do campo de calibre, o campo de fundo é introduzido no meio de flutuações como

$$Y_\mu^i = B_\mu^i + Q_\mu^i, \quad Y_\mu^a = Q_\mu^a, \quad (4.16)$$

e o tensor de intensidades, dado pela equação (2.17), é escrito como

$$\vec{\mathcal{F}}_{\mu\nu} = (\partial_\mu Y_\nu^A - \partial_\nu Y_\mu^A)\hat{u}_A + gf^{ABC}Y_\mu^AY_\nu^B\hat{u}_C + Y_\nu^A(\hat{u}_C \cdot \partial_\mu \hat{u}_A)\hat{u}_C - Y_\mu^A(\hat{u}_C \cdot \partial_\nu \hat{u}_A)\hat{u}_C, \quad (4.17)$$

onde foi utilizada a igualdade  $\partial_\mu \hat{u}_A = (\hat{u}_C \cdot \partial_\mu \hat{u}_A)\hat{u}_C$ . Expandindo o tensor acima em termos das bases de cor,  $\vec{\mathcal{F}}_{\mu\nu} = G_{\mu\nu}^A \hat{u}_A$ , é possível determinar, com o auxílio da equação (3.27), que a componente  $G_{\mu\nu}^A$  é dada por

$$G_{\mu\nu}^A = (\partial_\mu Y_\nu^A - \partial_\nu Y_\mu^A) + gf^{ABC}Y_\mu^AY_\nu^B - gf^{CAB}Y_\nu^BC_\mu^C + gf^{CAB}Y_\mu^BC_\nu^C, \quad (4.18)$$

e fazendo uso da definição para o tensor de intensidades não abeliano, dado em (2.16), é possível rescrever,

$$G_{\mu\nu}^A = \mathcal{F}_{\mu\nu}^A(Y + C) - \mathcal{F}_{\mu\nu}^A(C), \quad (4.19)$$

onde a ação de Yang-Mills em termos deste tensor é simplesmente,

$$S_{YM} = \frac{1}{4} \int d^4x G_{\mu\nu}^A G_{\mu\nu}^A. \quad (4.20)$$

Vamos calcular a contribuição dos setores abeliano e não abeliano separadamente. Iniciando pelo setor não abeliano, podemos concluir que, devido o fato de  $C_\mu^A$  não possuir componentes nas direções fora da diagonal,  $\mathcal{F}_{\mu\nu}^a(C) = 0$ . Definindo  $D_\mu^{ab} \equiv \delta^{ab}\partial_\mu - gf^{abi}(C_\mu^i + B_\mu^i)$ , é possível escrever,

$$G_{\mu\nu}^a = D_\mu^{ab}Q_\nu^b - D_\nu^{ab}Q_\mu^b - gf^{abi}Q_\mu^iQ_\nu^b + gf^{abi}Q_\nu^iQ_\mu^b + gf^{abc}Q_\mu^bQ_\nu^c. \quad (4.21)$$

Explicitando apenas os termos relevantes para o cálculo da ação efetiva a 1 loop, ou seja, os termos quadráticos nos campos de flutuação,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a &= \frac{1}{2} [D_\mu^{ab}Q_\nu^b D_\mu^{ad}Q_\nu^d - D_\mu^{ab}Q_\nu^b D_\nu^{ad}Q_\mu^d] + \\ &\quad (\text{termos de ordem superior em } Q). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Apesar de correta, esta ainda não é a forma conveniente para realizarmos integrações gaussianas sobre este termo. Integrando por partes e definindo um novo tensor  $H_{\mu\nu}^i(A) = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i$ , o qual apresenta um comportamento idêntico a um campo magnético abeliano, é possível rescrever o resultado acima como

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_{\mu\nu}^a &= \frac{1}{2} [-Q_\nu^b D_\mu^{ba} D_\mu^{ac} Q_\nu^c + gf^{ibc} H_{\mu\nu}^i (B + C) Q_\mu^b Q_\nu^c] + \\ &\quad (\text{termos de ordem superior em } Q), \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde foi adotado o MAG ( $D_\mu^{ab}Q_\mu^b = 0$ ). Agora vamos analisar a contribuição do setor abeliano. Esta também sofre uma simplificação devido a propriedade antissimétrica das

constantes de estrutura do grupo e a inexistência de configurações  $C_\mu$  fora das direções diagonais, permitindo-nos escrever  $\mathcal{F}_{\mu\nu}^i(Y+C) = \mathcal{F}_{\mu\nu}^i(Y) + \mathcal{F}_{\mu\nu}^i(C)$ . Assim como no cálculo não abeliano, apenas os termos quadráticos em  $Q^a$  serão relevantes para a correção da ação efetiva a 1 loop. Após uma pequena sequência de cálculos usuais,

$$\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^i G_{\mu\nu}^i = \frac{1}{2} [gf^{abc} H_{\mu\nu}^i(B) Q_\mu^b Q_\nu^c] + (\text{termos em } Q^i \text{ e ordem superior em } Q^a). \quad (4.24)$$

Sendo assim, a contribuição dos campos de calibre é

$$\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^A G_{\mu\nu}^A = \frac{1}{2} [-Q_\nu^b D_\mu^{ba} D_\mu^{ac} Q_\nu^c + gf^{abc} (2H_{\mu\nu}^i(B) + H_{\mu\nu}^i(C)) Q_\mu^b Q_\nu^c], \quad (4.25)$$

válida para qualquer grupo de simetria  $SU(N)$ . A partir deste resultado apenas a escolha de um grupo de simetria nos permite seguir em frente. Inicialmente, iremos estudar o caso mais simples,  $SU(2)$ , onde os vórtices de centro encontram-se ao longo da direção  $\hat{n}_3$  do espaço de cor. Ao abrirmos as somas nos índices não abelianos, percebe-se que a redefinição dos campos de flutuação  $\Phi_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} (Q_\mu^1 + iQ_\mu^2)$  preserva a bilinearidade desta contribuição da ação e condensa a notação para

$$S_{YM}^{(1-loop)} = \int d^4x \bar{\Phi}_\mu (-D^2 \delta_{\mu\nu} - i\Upsilon_{\mu\nu}^3) \Phi_\nu + S_{ghost}, \quad (4.26)$$

onde  $D_\mu = \partial_\mu + ig(B_\mu^3 + C_\mu^3)$  e  $\Upsilon_{\mu\nu}^3 = g [2H_{\mu\nu}^3(B) + H_{\mu\nu}^3(C)]$ . Diferentemente do resultado encontrado através da deformação diagonal do vórtice fino, o procedimento utilizado por Diakonov e Maul não leva em consideração os defeitos  $C_\mu$ , os quais surgiram ao utilizarmos bases locais para parametrizar o campo de fundo e as flutuações. Caso seja de interesse recuperar o resultado obtido por eles, deveríamos eliminar este novo campo, ou seja, tomar  $C_\mu = 0$  na equação (4.26). Outro ponto relevante do resultado (4.26), é sua relação com a ação efetiva de uma teoria com simetria  $SU(3)$  para vórtices que localizam-se apenas na direção  $\hat{n}_8$ . Devido o fato de apenas as constantes de estruturas  $f^{867}$ ,  $f^{845}$  e suas respectivas antissimétricas serem não nulas, também é possível redefinir as flutuações em termos de dois campos  $\Phi_\mu^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (Q_\mu^6 + iQ_\mu^7)$  e  $\Phi_\mu^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (Q_\mu^4 + iQ_\mu^5)$ , de maneira a preservar o operador responsável por determinar os efeitos quânticos de (4.26). Portanto, uma vez que seja determinado o vórtice de centro estável para a simetria  $SU(2)$ , este também será estável em  $SU(3)$ .

Para determinarmos completamente a energia efetiva a 1 loop, resta-nos a contribuição proveniente dos campos de *ghost*, discutidos na seção 2.3. A partir do resultado obtido em (2.29), sabemos que é necessário calcular a variação da condição de fixação de calibre quando realizamos uma transformação infinitesimal sobre os campos. Como medida de

facilitação podemos aplicar a regra da cadeia,

$$\frac{\partial D_\mu \Phi_\mu}{\partial \theta} = \frac{\partial D_\mu \Phi_\mu}{\partial \Phi_\mu} \frac{\partial \Phi_\mu}{\partial \theta}, \quad (4.27)$$

Sendo assim a primeira derivada do lado direito é trivial, uma vez que o operador  $D_\mu$  independe do campo das perturbações não diagonais. O segundo termo pode ser obtido a partir da variação infinitesimal do campo de calibre, a qual é obtida a partir da equação (2.13). Em termos dos campos de perturbação podemos escrever

$$\delta Q_\mu^a = -D_\mu^{ab} \theta^b + (\text{termos de ordem maior em } \theta), \quad (4.28)$$

implicando que, de acordo com a definição dada para o campo  $\Phi_\mu$ , sua variação infinitesimal pode ser facilmente escrita como

$$\delta \Phi_\mu = D_\mu \theta + (\text{termos de ordem maior em } \theta), \quad (4.29)$$

onde  $\theta$  representa a mesma mistura de componentes do espaço de cor que o campo  $\Phi$ . Unificando os resultados encontrados com o aprendizado adquirido na seção 2.3, podemos escrever a contribuição dos campos de *ghost* como

$$S_{ghost} = \int d^4x \left[ \bar{\zeta}_1 (-D^2) \zeta_1 + \bar{\zeta}_2 (-D^2) \zeta_2 \right]. \quad (4.30)$$

Com todos os termos de (4.26) definidos, podemos concluir que a integração sobre os campos de calibre e *ghosts* a 1 loop nos fornece a seguinte regra para a contribuição a 1 loop da energia efetiva

$$\exp(-\Delta S) = \det^{-1} (-D^2 \mathbf{1} - i\Upsilon) \det^2(-D^2), \quad (4.31)$$

onde  $\mathbf{1}$  é a matriz identidade de dimensão idêntica ao espaço considerado. Matematicamente sabemos que o determinante de um operador é dado pelo produto de seus autovalores. Podemos notar que o primeiro determinante do lado direito de (4.31) é na verdade um operador matricial, logo, exige um tratamento mais cuidadoso. Este tratamento será realizado através de três procedimentos diferentes, onde seremos capazes de comparar seus resultados e definir a melhor maneira de expressá-lo.

### 4.2.1 Procedimento I: Propriedades do traço e teorema de Cayley-Hamilton

O tratamento utilizado por Y. M. Cho [10] elimina a dependência tensorial de (4.31), reduzindo-a ao seguinte resultado,

$$\Delta S = \ln \det(-D^2 + |\Upsilon|) + \ln \det(-D^2 - |\Upsilon|), \quad (4.32)$$

onde  $\Upsilon = \sqrt{\Upsilon_{\mu\nu}^2}$ , desde que  $\Upsilon_{0i} = 0$ . Dois pontos são relevantes quando nos deparamos com esse resultado. Primeiramente, não existem defeitos nas bases de cor, logo  $D^2 \equiv D^2(B)$ , uma vez que foi utilizado o procedimento usual para obtenção de (4.32). Outro ponto que chama nossa atenção é a dependência modular em  $\Upsilon$ . Sendo assim, iremos discutir se uma fórmula deste tipo poderia ser válida ou não. A partir da propriedade do determinante  $\det(\mathbf{A} + \mathbf{BC}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{1} + \mathbf{BA}^{-1}\mathbf{C})$  é possível rescrever a contribuição bosônica dada em (4.31)

$$\det(-D^2\mathbf{1} - i\Upsilon) = \det(-D^2\mathbf{1}) \det(\mathbf{1} + iD^{-2}\Upsilon), \quad (4.33)$$

onde o termo  $\ln \det(-D^2\mathbf{1}) = \text{Tr} \ln(-D^2\mathbf{1}) = 4 \ln \det(-D^2)$  para um espaço  $4D$ . Vale a pena ressaltar que este traço atua em dois espaços distintos, funcional e vetorial. Portanto, o número 4 surge ao aplicarmos o traço sobre o espaço vetorial. Como o traço funcional não é tomado, podemos rearrumar o resultado em termos do logaritmo. Desta forma, a correção a um *loop* na energia efetiva satisfaz a seguinte relação

$$\Delta S = 2 \ln \det(-D^2) + \ln \det(\mathbf{1} + iD^{-2}\Upsilon) \quad (4.34)$$

Estes são os passos considerados usuais em TQC e nos permitiram eliminar a dependência tensorial parcialmente nossa equação. Para a eliminarmos no segundo termo, podemos utilizar a conhecida generalização da expansão em série de potências da função  $\ln(1+x)$ ,

$$\ln \det(\mathbf{1} + iD^{-2}\Upsilon) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{Tr} [-iD^{-2}\Upsilon]^n. \quad (4.35)$$

O cálculo do traço de potências desta matriz é altamente não trivial. Visando entender como seria possível a obtenção do resultado dado pela equação (4.32), a partir de (4.35), vamos considerar primeiro o que aconteceria se  $-iD^{-2}\Upsilon$  fosse uma matriz cujos elementos comutam. Sob esta condição é permitido aplicar o teorema de Cayley-Hamilton, o qual afirma que toda matriz quadrada  $\mathbf{X}$ , cujos elementos  $x_{mn}$  pertencem a um anel

comutativo, a seguinte equação característica é satisfeita,

$$p(\mathbf{X}) = \mathbf{0}, \quad \text{onde } p(\lambda) = \det(\mathbf{X} - \lambda \mathbf{1}), \quad (4.36)$$

sendo  $\mathbf{0}$  a matriz nula de mesma ordem que  $\mathbf{X}$ . Para uma matriz  $4 \times 4$  antissimétrica, onde sabemos que  $\text{tr} \mathbf{X}^{2n+1} = 0$ , o teorema reduz-se a

$$\mathbf{X}^4 - \left(\frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{X}^2\right) \mathbf{X}^2 + (\det \mathbf{X}) \mathbf{1} = \mathbf{0}, \quad (4.37)$$

onde este traço atua apenas sobre o espaço vetorial. Uma vez que nossas configurações de campo são puramente magnéticas, os elementos  $x_{0n} = 0$ , implicando que o determinante destas matrizes é nulo. Sob estas condições, a relação para o traço das potências pares, a qual pode ser obtido a partir da equação (4.37) e produtos por  $\mathbf{X}^2$ , é dada pela seguinte equação

$$\text{tr} \mathbf{X}^{2n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} [\text{tr} \mathbf{X}^2]^n. \quad (4.38)$$

Conhecido o teorema, e de que maneira ele se aplicará no nosso cálculo, podemos prosseguir nossa discussão considerando uma matriz geral  $\mathbf{A}$  que satisfaça as hipóteses discutidas anteriormente,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & -a & 0 & c \\ 0 & -b & -c & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 - b^2 & -bc & ac \\ 0 & -cb & -b^2 - c^2 & -ab \\ 0 & ca & -ba & -a^2 - c^2 \end{pmatrix},$$

onde podemos perceber que  $\text{tr} \mathbf{A}^2 = -2[a^2 + b^2 + c^2] = -2a_{\mu\nu}^2$ . Prosseguindo com um cálculo equivalente a (4.35) para matrizes antissimétricas, temos que

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{tr}[-i\mathbf{A}]^n = -\sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{2s} \text{tr}[-i\mathbf{A}]^{2s} = -2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{2s} (a_{\mu\nu}^2)^s. \quad (4.39)$$

Note que (4.39) nos lembra uma expansão em termos pares da série do logaritmo. Para que possamos escrevê-la desta forma, utilizamos a seguinte relação,

$$-2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{2s} (a_{\mu\nu}^2)^s = -2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{2s} \left(\sqrt{a_{\mu\nu}^2}\right)^{2s}, \quad (4.40)$$

e uma vez que a série de  $\ln(1-x)$  é alternada,

$$-2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{2s} \left(\sqrt{a_{\mu\nu}^2}\right)^{2s} = \ln\left(1 + \sqrt{a_{\mu\nu}^2}\right) + \ln\left(1 - \sqrt{a_{\mu\nu}^2}\right). \quad (4.41)$$

O resultado acima lembra-nos o obtido por Cho [10]. Para recuperarmos o resultado (4.32), deveríamos considerar  $\mathbf{A} = D^{-2}\Upsilon$ , onde obteríamos

$$\begin{aligned} \ln \left( 1 + \sqrt{(D^{-2}\Upsilon_{\mu\nu})^2} \right) + \ln \left( 1 - \sqrt{(D^{-2}\Upsilon_{\mu\nu})^2} \right) = -2\ln(-D^2) + \\ + \ln \det(-D^2 + |\Upsilon|) + \ln \det(-D^2 - |\Upsilon|), \end{aligned} \quad (4.42)$$

que uma vez restituído o traço sobre o espaço funcional e substituído (4.42) em (4.34), leva a equação (4.32). Entretanto, precisamos analisar estas passagens com mais cuidado. Para obter o resultado (4.42) é necessário ignorar o fato de que os elementos de matriz  $D^{-2}\Upsilon_{\mu\nu}$  são operadores e tratá-los como números. Não sendo a raiz de um operador um objeto matemático bem definido, estas passagens podem estar incorretas. Também é importante notar que, para uma configuração geral, os elementos da matriz  $D^{-2}\Upsilon$  não comutam entre si, indicando que um caso onde poderíamos aplicar o teorema de Cayley-Hamilton seria aquele no qual  $b = c = 0$ . Ao analisarmos este caso especificamente, todas as passagens realizadas até (4.39) são válidas, salvo que  $\text{tr}\mathbf{A}^2 = -2a^2$  e não mais uma soma. Tratando  $a \equiv D^{-2}\Upsilon_{12}$ , não precisamos utilizar um artifício matemático envolvendo raízes e potências quadradas para tratarmos corretamente a composição de operadores, obtendo assim o seguinte resultado,

$$-2 \sum_{s=1} \frac{1}{2s} (a^2_{\mu\nu})^s = -2 \sum_{s=1} \frac{1}{2s} (D^{-2}\Upsilon_{12})^{2s}. \quad (4.43)$$

Sem a existência da raiz é possível realizar todo o tratamento como anteriormente, implicando que

$$\Delta S = \ln \det(-D^2 + \Upsilon_{12}) + \ln \det(-D^2 - \Upsilon_{12}). \quad (4.44)$$

Podemos perceber que a passagem (4.40) está incorreta, inclusive no único caso tratável pelo teorema. A aplicação da raiz, na verdade, gera uma má interpretação da composição de operadores e portanto nos fornece um resultado equivocado. Vale a pena notar que para configurações do campo de fundo definidas positivas ou negativas, ambas as equações levam ao mesmo resultado, entretanto, em casos onde  $\Upsilon_{12}$  muda de sinal, isto não ocorre.

## 4.2.2 Procedimento II: Decomposição em autovetores globais

A subseção 4.2.1 pode deixar um questionamento sobre qual operador descreve corretamente a influência das flutuações na energia efetiva a 1 loop. Visando reforçar o resultado (4.44), vamos iniciar a análise do segundo procedimento. Sabemos que para um espaço  $4D$ , por exemplo, são encontrados 4 autovetores para  $\Upsilon$ ,  $\{\vec{\psi}_1, \vec{\psi}_2, \vec{\psi}_3, \vec{\psi}_4\}$ , cada um

deles com o seu respectivo autovalor,  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ . Apesar deste resultado ser simples e bastante conhecido, ele nos permite escrever o autovetor do operador referente a contribuição bosônica, fornecido em (4.31), da seguinte maneira,  $\vec{\Psi}_i = \phi_i \vec{\psi}_i$ , onde  $\phi_i$  é uma função escalar. Calculando a contribuição de cada termo do problema original encontramos para qualquer valor de  $i$ ,

$$(-D^2 \mathbf{1} - i\Upsilon) \vec{\Psi}_i = [(-D^2 - iv_i) \phi_i] \vec{\psi}_i + \text{termos dependentes de } \partial \vec{\psi}_i. \quad (4.45)$$

Este último termo não pode ser ignorado, uma vez que, para uma configuração qualquer,  $\vec{\psi}_i$  depende das coordenadas do espaço. Já o primeiro termo é da forma desejada, uma vez que conseguimos eliminar a dependência tensorial do nosso operador original. Portanto, a pergunta que devemos nos fazer é: será que existe algum caso onde  $\vec{\psi}_i$  independa de coordenadas, ou seja, possa ser um autovetor global de  $\Upsilon$ ? Sim, é possível, e para entendermos isso, vamos analisar o nosso problema utilizando algumas propriedades da matriz  $\Upsilon$ . Como as matrizes  $\Upsilon$  que estamos tratando possuem a linha 0 nula, podemos realizar nosso tratamento em um espaço tridimensional, por simplicidade, e, ao final, realizarmos as generalizações para um espaço quadridimensional. Uma representação para essa matriz é da forma

$$\Upsilon = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix},$$

onde cada um destes elementos são funções das coordenadas. Assim como no caso anterior, com a busca pelos autovetores da matriz  $\Upsilon$  esperamos, encontrar uma maneira simples e eficiente de escrever os autovetores do operador que estamos interessados. A partir da definição de autovetor, fazendo uso de um pouco de álgebra, é possível determinar cada um deles como

$$\vec{\psi}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\gamma}{\alpha} \\ -\frac{\beta}{\alpha} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\psi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\alpha^2 + \gamma^2}{\beta\gamma + i\alpha R} \\ \frac{\alpha\beta - i\gamma R}{\beta\gamma + i\alpha R} \end{pmatrix}, \quad \vec{\psi}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\alpha^2 + \gamma^2}{-\beta\gamma + i\alpha R} \\ \frac{\alpha\beta - i\gamma R}{-\beta\gamma + i\alpha R} \end{pmatrix},$$

onde  $R = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$ . Podemos perceber que, no caso geral, ainda é impossível desvincular a dependência na posição, entretanto um caso mais simplificado seja capaz de satisfazer essa condição. Ao considerarmos um vórtice que seja invariante sob translações ao longo da direção 3, podemos garantir que  $\beta = \gamma = 0$ , implicando que os autovetores encontrados anteriormente são reduzidos a

$$\vec{\psi}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\psi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i\frac{\alpha}{|\alpha|} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\psi}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ i\frac{\alpha}{|\alpha|} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Desta forma a dependência praticamente desaparece, uma vez que  $\frac{\alpha}{|\alpha|} = \text{sgn}\alpha$ . Apesar de depender do sinal de  $\alpha$ , o ponto mais relevante desta conclusão é que ao substituirmos esse resultado na definição dos autoestados, percebemos que este conjunto é sempre o mesmo para todo o espaço,

$$\vec{\psi}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{\psi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\psi}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix},$$

todos os vetores independentes da posição. Agora somos capazes de generalizar este resultado para um espaço quadridimensional, e desde que a simetria seja mantida, estaremos introduzindo apenas uma nova linha com elementos nulos na matriz  $\Upsilon$ . Obviamente devemos também adicionar uma componente nula nos autovetores acima, e ao aumentar a dimensão do espaço, introduzimos um novo autovetor  $\vec{\psi}_4$  do mesmo tipo de  $\vec{\psi}_1$ . Assumindo, novamente, que  $\vec{\Psi}_i = \phi_i \vec{\psi}_i$ , a equação matricial passa a ser escrita como

$$(-D^2 \mathbf{1} - i\Upsilon) \vec{\Psi}_i = [(-D^2 - iv_i) \phi_i] \vec{\psi}_i, \quad (4.46)$$

uma vez que o laplaciano covariante não atua de maneira diferencial sobre a parcela vetorial. Uma rápida busca nos indica que os autovalores  $v_i$  são  $\{0, -i\alpha, +i\alpha, 0\}$  fornecendo que cada um dos campos escalares  $\phi_i$  gere uma equação característica a ser considerada na contribuição a 1 loop da energia efetiva. Os campos  $\vec{\Psi}_1$  e  $\vec{\Psi}_4$  vão gerar contribuições exatamente opostas aos campos de *ghost*, devido a origem bosônica destes autovetores e seus autovalores serem nulos. Esta eliminação, causada pelos campos fermiônicos, já havia sido vista anteriormente quando tratávamos da ISNO, no momento em que eliminávamos os modos não massivos na seção 4.1, e agora surge de maneira mais algébrica ao eliminar os estados  $\vec{\psi}_i$  que possuem autovalor  $v_i = 0$ . As contribuições de  $\vec{\Psi}_2$  e  $\vec{\Psi}_3$  são as que possuem significado físico e que efetivamente contribuem para (4.31), a qual pode ser escrita da seguinte forma

$$\Delta S = \ln \det K_+ + \ln \det K_-, \quad (4.47)$$

onde  $K_{\pm} = -D^2 \pm \Upsilon_{12}$ . Portanto, o procedimento apresentado aqui coincide com (4.44), indicando que o tratamento correto deve levar em consideração inversões de sinal ao construirmos os perfis dos vórtices de centro.

### 4.2.3 Procedimento III: Interpretação como potenciais localizados sobre curva

Como podemos perceber, ambos os procedimentos discutidos anteriormente falham quando tentamos analisar campos de fundo mais complexos. Este terceiro procedimento surge com uma possibilidade de contornarmos este problema. Antes de analisarmos o operador desejado, vamos entender o caso mais simples [8],

$$[-\nabla^2 - u(\vec{x})] \psi = E\psi, \quad (4.48)$$

que possui solução bastante conhecida a partir das identidades de Green. Algumas classes de potencial se destacam quanto a análise de autoestados, dentre estas encontram-se os potenciais singulares que possuem acoplamento adimensional. A existência de uma constante de acoplamento adimensional implica na inexistência de escala no espectro da teoria, o que muitas vezes pode levar a soluções absurdas, como estados ligados com energia infinita! A existência de singularidades leva a necessidade de realizar um tratamento via teoria de regularização e renormalização. Os exemplos mais comuns de potenciais singulares são composições de maneira adequada do potencial delta de Dirac, como  $u(\vec{x}) = \lambda \delta^{(2)}(x, y)$  em  $2D$ , o qual encontra-se localizado sobre um ponto do plano,  $u(\vec{x}) = \lambda \int_C ds \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}(s))$  em  $3D$  se encontra localizado sobre uma curva no espaço, e assim por diante para dimensões maiores. Concentrando nossa atenção no caso tridimensional, os estados ligados de (4.48) são dados por

$$\psi(\vec{x}) = -\lambda \int_C ds \mathcal{G}_D(\vec{x} - \vec{x}(s)) \psi(\vec{x}(s)), \quad (4.49)$$

onde foi adotado o método conhecido como regularização dimensional [7] para tratar as divergências. Todo o processo de regularização e renormalização desta classe de potenciais pode ser vista no apêndice A. A função de Green  $\mathcal{G}_D(\vec{x} - \vec{x}(s))$  é correspondente a um operador tipo Klein-Gordon em dimensão  $D$ . Ao comparar os operadores dados pela contribuição vetorial de (4.31) com (4.48), podemos perceber uma semelhança muito grande, com apenas algumas diferenças relevantes,

1. Vórtices grossos não podem ser escritos como potenciais localizados sobre curvas, e portanto, serão discutidos apenas ao final desta subseção;
2. Ao contrário do operador de Klein-Gordon, a troca do laplaciano pelo laplaciano covariante gera uma dependência no perfil do vórtice de centro para que possamos determinar a função de Green, uma vez que esta se modificará para cada configuração de campo de fundo.

Repare que ao adotar nosso campo de fundo com um vórtice fino fechado, o termo de potencial deve encontrar-se localizado sobre uma curva, assim como, para esta configuração,  $D^2 \rightarrow \nabla^2$  de acordo com o procedimento de deformação diagonal. Desta forma, o estudo sobre vórtices finos deve ser similar ao de potenciais localizados sobre curvas. A grande desvantagem deste cálculo esta relacionada ao fato de vórtices finos não representarem configurações físicas da natureza. De todas maneiras, uma análise realizada sobre estas configurações é interessante para discutirmos a dependência do operador de flutuações quanto a existência, ou não, do módulo do campo externo. Sendo assim, para vórtices finos, temos que a contribuição bosônica de (4.31) pode ser escrita como

$$[-\nabla^2 \mathbf{1} - i\Upsilon] \vec{\Psi} = E\vec{\Psi}, \quad (4.50)$$

onde  $\Upsilon_{\mu\nu} = -gH_{\mu\nu}^3(C) = -g(\partial_\mu C_\nu^3 - \partial_\nu C_\mu^3)$ , e é válida a seguinte relação entre tensores duais,  $j_\rho(C) = \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho}H_{\mu\nu}^3(C)$ . Esta corrente  $\vec{j}$  pode ser representada em 3 dimensões por

$$\vec{j}(C) = \frac{j}{g} \int_{C'} ds \vec{v}(x)\delta^{(3)}(x - x(s)), \quad (4.51)$$

onde  $\vec{v}(x)$  é o vetor tangente a curva  $C'$ . Uma vez tendo construído o nosso sistema de maneira semelhante ao de potenciais localizados sobre curvas, é possível inferir que os estados ligados são dados pela equação integral,

$$\vec{\Psi}(x) = -ij \int_{C'} ds \mathcal{G}_D(\vec{x} - \vec{x}(s)) \vec{v}(x) \times \vec{\Psi}(x(s)). \quad (4.52)$$

Diferentemente das equações obtidas nas subseções 4.2.1 e 4.2.2, este procedimento não deixa explícito, em um primeiro momento, diversos pontos que estamos estudando. Para realizar esta conexão, vamos analisar o perfil de dois vórtices de centro estáticos com simetria na direção 3 e que possuem fluxo magnético em direções opostas, simulando um único vórtice que fecha-se no infinito, conforme figura 5. Para esta configuração, a curva é dada por  $C' = C_1 \cup C_2$ , onde  $C_1$  é a curva na qual o vetor tangente aponta na direção  $\hat{z}$ , e portanto sobre  $C_2$ , este aponta na direção  $-\hat{z}$ . Para este perfil, podemos escrever nosso problema de autovalores como

$$\vec{\Psi}(x) = -ij \int_{C_1} ds \mathcal{G}_D(\vec{x} - \vec{x}(s)) \hat{z} \times \vec{\Psi}(x(s)) + ij \int_{C_2} ds \mathcal{G}_D(\vec{x} - \vec{x}(s)) \hat{z} \times \vec{\Psi}(x(s)). \quad (4.53)$$

Para decompor os autoestados  $\vec{\Psi}(x)$  podemos escolher as bases da matriz  $\Upsilon$ , assim como foi feito na subseção 4.2.2. Repare que neste procedimento, não existe restrição quanto a utilização de bases locais, portanto, por mais complicada que seja esta matriz, este passo é sempre possível. Voltando a nossa análise, o conjunto de bases é dado por  $\{\vec{\psi}_i\}$ ,

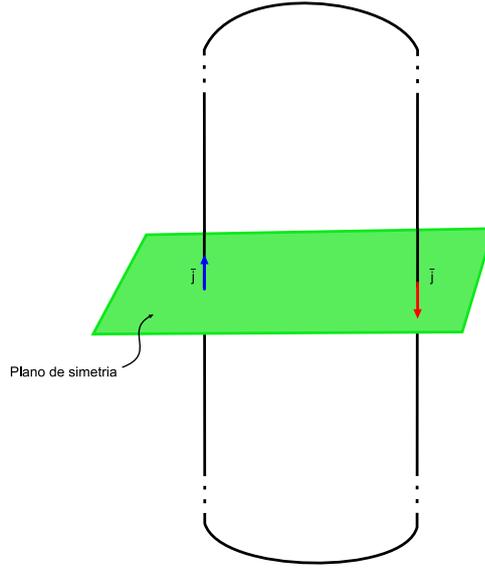


Figura 5: Persistência da direção de fluxo magnético sobre o plano de simetria

de maneira que a solução pode ser decomposta como  $\vec{\Psi}(x) = \sum_{i=1}^3 \phi_i(x) \vec{\psi}_i$ . Com isto, podemos calcular o produto vetorial presente em (4.53),

$$\hat{z} \times \vec{\Psi}(x(s)) = i\phi_2(x(s))\vec{\psi}_2 - i\phi_3(x(s))\vec{\psi}_3. \quad (4.54)$$

Antes de prosseguir com o cálculo, repare que a componente de  $\vec{\Psi}$  a qual encontra-se na direção tangente a curva, ou oposta a ela, não contribui para o produto vetorial. Estes modos, que não interagem com o campo externo, são aqueles eliminados pela contribuição dos *ghosts* de Faddeev-Popov, assim como foi visto na seção 4.1 e na subseção 4.2.2. Retornando ao método, uma vez que estas bases  $\vec{\psi}_i$  são globais, é possível escrever uma equação integral para cada uma das direções perpendiculares ao fluxo magnético, dadas por

$$\begin{aligned} \phi_2(x) &= -j \left( \int_{C_1} ds \mathcal{G}_D(\vec{x} - \vec{x}(s)) \phi_2(x(s)) - \int_{C_2} ds \mathcal{G}_D(\vec{x} - \vec{x}(s)) \phi_2(x(s)) \right), \\ \phi_3(x) &= j \left( \int_{C_1} ds \mathcal{G}_D(\vec{x} - \vec{x}(s)) \phi_3(x(s)) - \int_{C_2} ds \mathcal{G}_D(\vec{x} - \vec{x}(s)) \phi_3(x(s)) \right). \end{aligned} \quad (4.55)$$

Apesar de escritas em formato integral, (4.55) são as soluções de estados ligados para os operadores  $K_{\pm}$  vistos anteriormente. Com o propósito de descobrir quais operadores este procedimento vai reproduzir, vamos explorar a simetria em torno do eixo  $z$ . Ao tomarmos a solução para um valor fixo de  $z$  sobre a equação (4.55), temos

$$\begin{aligned} \phi_2(x) &= -j (\mathcal{G}_D(x - x_1, y - y_1) \phi_2(x_1, y_1) - \mathcal{G}_D(x - x_2, y - y_2) \phi_2(x_2, y_2)), \\ \phi_3(x) &= j (\mathcal{G}_D(x - x_1, y - y_1) \phi_3(x_1, y_1) - \mathcal{G}_D(x - x_2, y - y_2) \phi_3(x_2, y_2)), \end{aligned} \quad (4.56)$$

onde  $x_i$  e  $y_i$  são os pontos  $(x, y)$  nos quais se localiza a curva  $C_i$  sobre o plano de simetria. Com o emprego de distribuições delta de Dirac, podemos concluir que, no formato diferencial, as equações dadas em (4.56), podem ser escritas como

$$\begin{aligned} [-\nabla^2 - j(\delta(x - x_1, y - y_1) - \delta(x - x_2, y - y_2))] \phi_2(x) &= -k^2 \phi_2(x), \\ [-\nabla^2 + j(\delta(x - x_1, y - y_1) - \delta(x - x_2, y - y_2))] \phi_3(x) &= -k^2 \phi_3(x), \end{aligned} \quad (4.57)$$

onde fica clara a interpretação que estávamos buscando. Assim como foi obtido nas duas subseções anteriores, o sinal do acoplamento externo é preservado, de acordo com (4.44) e (4.47). Este é mais um indicativo de que a análise correta da estabilidade dos vórtices de centro não pode ser feita através do módulo do acoplamento externo. Podemos concluir então, que a diferença entre os potenciais é, na verdade, uma interpretação bidimensional para fluxos que atravessam o plano de simetria em direções opostas. De fato, utilizamos um perfil muito simples para que pudéssemos comparar com as únicas situações tratáveis nos procedimentos anteriores, porém este método não nos limita a fazer uso de bases globais para decompor o campo  $\vec{\Psi}$ . Um terno orientado local  $\{\hat{n}_1(x), \hat{n}_2(x), \hat{n}_3(x)\}$ , de maneira que a componente  $\hat{n}_1(x(s))$  esteja sempre localizada na direção tangente a curva  $C'$ , geraria duas equações integrais acopladas, dadas por

$$\begin{aligned} \phi_2(x) &= -ij \int_{C'} ds \mathcal{G}_D(\vec{x} - \vec{x}(s)) [\phi_2(x(s))(\hat{n}_1(x(s)) \times \hat{n}_2(x(s))) \cdot \hat{n}_2(x) + \\ &\quad + \phi_3(x(s))(\hat{n}_1(x(s)) \times \hat{n}_3(x(s)))] \cdot \hat{n}_2(x), \\ \phi_3(x) &= ij \int_{C'} ds \mathcal{G}_D(\vec{x} - \vec{x}(s)) [\phi_2(x(s))(\hat{n}_1(x(s)) \times \hat{n}_2(x(s))) \cdot \hat{n}_3(x) + \\ &\quad + \phi_3(x(s))(\hat{n}_1(x(s)) \times \hat{n}_3(x(s)))] \cdot \hat{n}_3(x), \end{aligned} \quad (4.58)$$

onde é possível perceber que o tratamento matemático seria muito mais complicado, entretanto ainda não é esperado que influenciem na interpretação do acoplamento externo, uma vez que este está relacionado a corrente  $\vec{j}$ , e não com bases perpendiculares a curva. Outro ponto interessante é a adoção de perfis grossos para os campos de fundo. Assim como a função de Green, no perfil estudado,  $\mathcal{G}_D(\vec{x} - \vec{x}(s))$  satisfaz a seguinte equação diferencial parcial,

$$[-\nabla^2 + k^2] \mathcal{G}_D(\vec{x} - \vec{y}) = j\delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (4.59)$$

para o novo caso de interesse, a nova função de Green  $\tilde{\mathcal{G}}_D(\vec{x} - \vec{y})$  deve satisfazer a seguinte equação,

$$[-D^2 + k^2] \tilde{\mathcal{G}}_D(\vec{x} - \vec{y}) = j\delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (4.60)$$

de maneira que a equação integral passaria a ser escrita como

$$\begin{aligned} \vec{\Psi}(x) = & 2ij \int_{V'} d^3x' \tilde{\mathcal{G}}_D(\vec{x} - \vec{x}') \vec{n}(x') \times \vec{\Psi}(x') + \\ & + ij \int_{C'} ds \tilde{\mathcal{G}}_D(\vec{x} - \vec{x}(s)) \vec{v}(x) \times \vec{\Psi}(x(s)), \end{aligned} \quad (4.61)$$

onde  $V'$  é a volume onde encontra-se localizado o fluxo magnético do vórtice de centro,  $\vec{n}(x')$  é o vetor normal a seção reta do vórtice e  $C'$  é a curva na qual localiza-se o defeitos  $C_\mu$ . Com estas conclusões, podemos perceber a utilidade deste terceiro procedimento, uma vez que não limita os perfis possíveis de serem tratados, diferentemente dos casos apresentados nas subseções 4.2.1 e 4.2.2.

## 4.3 A busca pelo vórtice de centro estável

### 4.3.1 Procedimento usual x procedimento diagonal

Baseados no resultado de Y. Aharonov e A. Casher para os estados de ponto zero de partículas com spin  $\frac{1}{2}$  e fator giromagnético 2 sob o efeito de um campo magnético externo [3], F. Bentosela, R.M. Cavalcanti, P. Exner e V.A. Zagrebnov obtiveram conclusões sobre fatores giromagnéticos acima deste valor crítico [6]. O resultado obtidos por eles é exatamente o que não buscávamos, pois indica que operadores  $K_-$ , definidos em (4.47), de acordo com o procedimento usual, apresentam, pelo menos,  $[F] + 1$  estados ligados, onde  $[F]$  é o número de fluxos magnéticos elementares presentes no vórtice. Sendo assim, mesmo uma configuração que possua fluxo nulo, possuirá pelo menos um estado ligado, implicando na instabilidade da mesma. Mas ao longo desta dissertação, dedicamos nossa atenção ao novo procedimento, logo é interessante verificar quais são as consequências deste teorema sobre os novos operador das flutuações  $K_\pm$  [23]. Visando construir este conhecimento, vamos considerar o perfil de vórtice de centro grosso estático com simetria axial em relação ao eixo z, e tratá-lo através dos dois procedimentos.

Via procedimento usual, as soluções nas direções que possuem simetria, z e t, são simplesmente ondas planas, porém as duas direções perpendiculares do fluxo magnético devem satisfazer,

$$\left[ -\frac{1}{\rho} \partial_\rho \rho \partial_\rho + \frac{(m + f(\rho))^2}{\rho^2} \pm \frac{2}{\rho} \partial_\rho f(\rho) \right] \mathcal{R}_m(\rho) = -\kappa^2 \mathcal{R}_m(\rho), \quad (4.62)$$

onde fica claro que aplicamos o método conhecido como separação de variáveis sobre o operador dado em (4.44). Uma escolha para o perfil  $f(\rho)$ , que satisfaz as condições

impostas na seção 3.3, é através da função degrau,

$$f(\rho) = \Theta(\rho - \rho_v), \quad \partial_\rho f(\rho) = \delta(\rho - \rho_v), \quad (4.63)$$

nos proporcionando uma maneira de escrevermos  $\mathcal{R}$  em termos das funções de Bessel de segunda espécie. A solução deste problema de equações diferenciais parciais é conhecida [15], e dada por,

$$\psi(\rho, \phi) = \begin{cases} A_m I_{|m|}(\kappa\rho) e^{im\phi}, & \text{se } \rho < \rho_v \\ B_m K_{|m+1|}(\kappa\rho) e^{im\phi}, & \text{se } \rho > \rho_v \end{cases}.$$

onde ao aplicarmos as condições de fronteira, nos deparamos com a equação transcendental,

$$\kappa\rho_v \left[ \frac{I_{|m|+1}(\kappa\rho_v)}{I_{|m|}(\kappa\rho_v)} + \frac{K_{|m+1|+1}(\kappa\rho_v)}{K_{|m+1|}(\kappa\rho_v)} \right] = \mp 2 + |m+1| - |m|, \quad (4.64)$$

responsável por determinar quais modos  $m$  geram os estados ligados do operador de flutuação  $K_-$  para esta configuração de vórtice. Através de técnicas de cálculo numérico, é possível determinar que estes modos são dois,  $m = 0$  e  $m = -1$ , ratificando o teorema citado anteriormente, uma vez que o vórtice considerado possui  $[F] = 1$ . Obviamente, apenas o operador  $K_-$  possuirá estados ligados, uma vez que  $K_+$  apresenta um potencial repulsivo.

Conhecidos os estados ligados do operador  $K_-$  segundo o procedimento usual, vamos analisar os autoestados do operador de flutuações obtido através da deformação diagonal do vórtice fino. Podemos perceber que a introdução de um vórtice fino causará problemas, portanto o regularizaremos através da introdução de um raio finito  $a < \rho_v$ , e ao final tomaremos o limite  $a \rightarrow 0$ , renormalizando qualquer divergência que surja. Com esta consideração, o problema de autovalores pode ser escrito como

$$\left[ -\frac{1}{\rho} \partial_\rho \rho \partial_\rho - \frac{1}{\rho^2} \partial_\phi^2 - 2i \frac{y(\rho)}{\rho^2} \partial_\phi + \frac{y(\rho)^2}{\rho^2} \pm \frac{2}{\rho} \delta(\rho - \rho_v) \mp \frac{1}{\rho} \delta(\rho - a) \right] \psi(\rho, \phi) = -\kappa^2 \psi(\rho, \phi), \quad (4.65)$$

onde  $y(\rho) = \Theta(\rho - \rho_v) - \Theta(\rho - a)$ . Essa equação é mais complicada de ser resolvida do que (4.62). Como proposta inicial, vamos assumir que  $\psi(\rho, \phi) \equiv \chi_{m'}(\rho, \phi) e^{im'\phi}$  e verificar o que nossa suposição pode trazer de benefícios para o problema. Com isso, é possível escrever a seguinte equação para  $\chi_m(\rho, \phi)$ ,

$$\left[ -\frac{1}{\rho} \partial_\rho \rho \partial_\rho + \frac{(m' + y(\rho))^2}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^2} \partial_\phi^2 - 2i \frac{(m' + y(\rho))}{\rho^2} \partial_\phi \pm \frac{2}{\rho} \delta(\rho - \rho_v) \mp \frac{1}{\rho} \delta(\rho - a) \right] \chi_{m'} = -\kappa^2 \chi_{m'}, \quad (4.66)$$

onde é possível aplicar o método de separação de variáveis ao escrever  $\chi_{m'} = \mathcal{R}_n(\rho)e^{in\phi}$ . Nas regiões delimitadas pelas fronteiras é possível escrever as seguintes equações de autovalores,

$$\left[ -\frac{1}{\rho} \partial_\rho \rho \partial_\rho + \frac{(m' + n)^2}{\rho^2} \right] \mathcal{R} = -\kappa^2 \mathcal{R}, \quad (4.67)$$

para  $\rho < a$  e  $\rho > \rho_v$ , e

$$\left[ -\frac{1}{\rho} \partial_\rho \rho \partial_\rho + \frac{(m' + n - 1)^2}{\rho^2} \right] \mathcal{R} = -\kappa^2 \mathcal{R}, \quad (4.68)$$

para  $a < \rho < \rho_v$ . Assumindo  $m = m' + n - 1$  e tomando o limite  $a \rightarrow 0$ , a solução via procedimento de deformação diagonal passa a ser

$$\psi(\rho, \phi) = \begin{cases} A_m I_{|m|}(\kappa\rho) e^{i(m+1)\phi}, & \text{se } \rho < \rho_v \\ B_m K_{|m+1|}(\kappa\rho) e^{i(m+1)\phi}, & \text{se } \rho > \rho_v \end{cases},$$

implicando que, ao aplicarmos as condições de fronteiras restantes, serão obtidos exatamente os mesmo modos ligados, uma vez que a equação transcendental depende apenas da solução radial. Portanto, o modo  $m = 0$ , o qual apresenta solução radial não nula na posição do defeito  $C_\mu$ , não deve ser considerado, uma vez que a solução não esta univocamente determinada neste ponto. O modo  $m = -1$  contribui normalmente para o termo imaginário da ação efetiva, indicando que esta configuração de vórtice com simetria na direção  $z$  não é estável, mesmo sob olhares do procedimento de deformação diagonal. Destas conclusões, somos capazes de perceber que uma configuração estável seria aquela que possui  $[F] = 0$  e sature o teorema citado.

### 4.3.2 Vórtice-Antivórtice com simetria polar

Procurando um perfil que satisfaça ambas as condições citadas ao final da subseção anterior, vamos estudar uma configuração de vórtices com fluxos nas direções opostas que preserva a simetria polar. Uma boa descrição do problema pode ser vista na Figura 6. Esta configuração é semelhante a considerada pelo procedimento de deformação diagonal durante a comparação dos dois procedimentos feitos na subseção 4.3.1, uma vez que vórtice grosso e defeito das bases de cor são fluxos em direções opostas. Porém, neste ponto, não podemos relevar certas contribuições, pois ambos os vórtices possuem raios finitos, assim como o mesmo fator giromagnético. Utilizando o procedimento usual para encontrar os autoestados, a equação de autovalores é exatamente a mesma de (4.62), porém  $f(\rho)$  possui as mesmas características de  $y(\rho)$ , definido para o novo procedimento onde a notação adequada é  $\rho_v \equiv \rho_{ext}$  e  $a \equiv \rho_{int}$ . Assim como anteriormente, as soluções

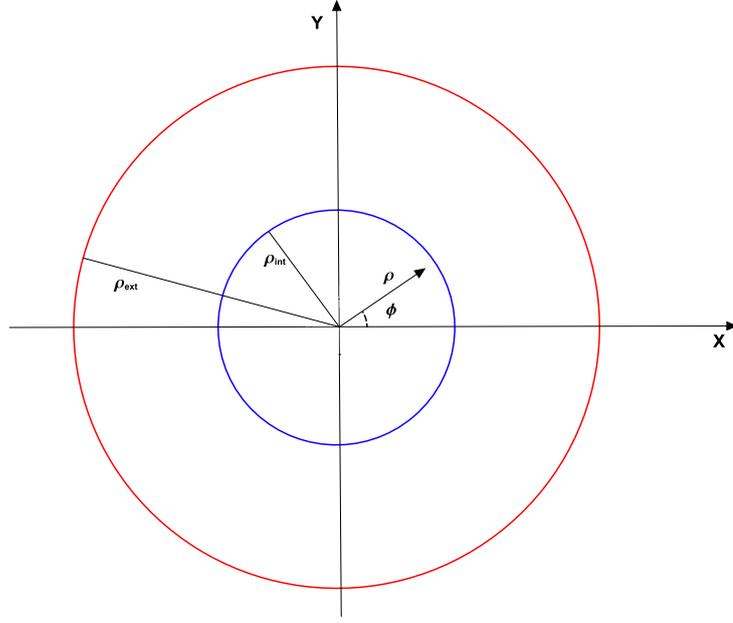


Figura 6: Arranjo de ambos os vórtices no plano

serão escritas em termos de funções de Bessel generalizadas, e a aplicação das condições de fronteira nos levarão a seguinte equação transcendental para os operadores  $K_{\pm}$ ,

$$\begin{aligned}
& x^2 \nu \left( \frac{K_{|m+1|+1}(x)}{K_{|m+1|}(x)} + \frac{I_{|m+1|}(x)}{I_{|m|}(x)} \right) \left( \frac{K_{|m+1|}(x\nu)}{K_{|m|}(x\nu)} + \frac{I_{|m+1|+1}(x\nu)}{I_{|m+1|}(x\nu)} \right) (K_{|m+1|}(x)I_{|m+1|}(x\nu)) + \\
& \quad x(|m+1| - |m| \pm 2) \left( \frac{K_{|m+1|+1}(x)}{K_{|m+1|}(x)} + \frac{I_{|m+1|}(x)}{I_{|m|}(x)} \right) (K_{|m+1|}(x)I_{|m+1|}(x\nu)) + \\
& \quad x\nu(|m| \mp 2 - |m+1|) \left( \frac{K_{|m+1|}(x\nu)}{K_{|m|}(x\nu)} + \frac{I_{|m+1|+1}(x\nu)}{I_{|m+1|}(x\nu)} \right) (K_{|m+1|}(x)I_{|m+1|}(x\nu)) + \\
& \quad (|m| \mp 2 - |m+1|)(|m+1| - |m| \pm 2)(K_{|m+1|}(x)I_{|m+1|}(x\nu)) - \\
& x^2 \nu \left( \frac{I_{|m+1|+1}(x)}{I_{|m+1|}(x)} - \frac{I_{|m+1|}(x)}{I_{|m|}(x)} \right) \left( \frac{K_{|m+1|+1}(x\nu)}{K_{|m+1|}(x\nu)} - \frac{K_{|m+1|}(x\nu)}{K_{|m|}(x\nu)} \right) (I_{|m+1|}(x)K_{|m+1|}(x\nu)) - \\
& \quad x(|m| - |m+1| \mp 2) \left( \frac{I_{|m+1|+1}(x)}{I_{|m+1|}(x)} - \frac{I_{|m+1|}(x)}{I_{|m|}(x)} \right) (I_{|m+1|}(x)K_{|m+1|}(x\nu)) - \\
& \quad x\nu(-|m| \pm 2 + |m+1|) \left( \frac{K_{|m+1|+1}(x\nu)}{K_{|m+1|}(x\nu)} - \frac{K_{|m+1|}(x\nu)}{K_{|m|}(x\nu)} \right) (I_{|m+1|}(x)K_{|m+1|}(x\nu)) - \\
& \quad (|m| \mp 2 - |m+1|)(|m+1| - |m| \pm 2)(I_{|m+1|}(x)K_{|m+1|}(x\nu)) = 0, \quad (4.69)
\end{aligned}$$

onde  $\nu \equiv \frac{\rho_{ext}}{\rho_{int}}$ , logo  $\nu \geq 1$ , e  $x \equiv \kappa\rho_{int}$ . O operador  $K_+$  representa a configuração com vórtice repulsivo mais externo, e  $K_-$  aquela que possui o vórtice atrativo mais externo. Analiticamente estes problemas não são tratáveis, portanto é necessário utilizarmos técnicas de cálculo numérico. Ao analisarmos os estados ligados de  $K_-$ , é possível construir o gráfico dado na figura 7. Podemos perceber que, para  $\nu \lesssim 1.947$ , o teorema citado no início desta seção é saturado e apenas um modo é encontrado. A análise para o ope-

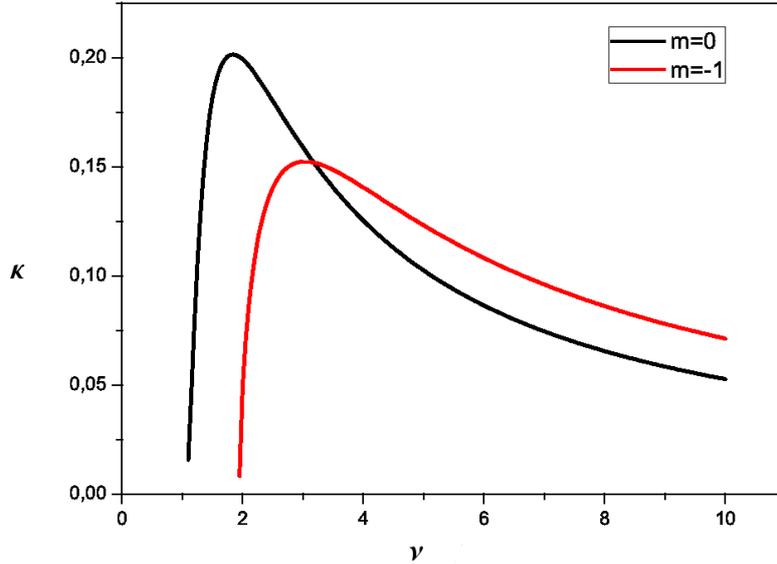


Figura 7: Gráfico dos modos ligados de  $K_-$  para diferentes razões entre os raios

rador  $K_+$  não é diferente. Apesar do potencial mais externo ser repulsivo, o teorema também é saturado, com a existência apenas do modo  $m = 0$ , para a mesma relação entre os raios  $\nu \lesssim 1,947$ . Para configurações que apresentam  $\nu$  maior do que o valor citado, surge um novo estado ligado  $m = -1$  como solução para o operador de flutuações. Desta forma, ao analisarmos estabilidade das configurações de vórtice de centro sobre o prisma da deformação diagonal, podemos concluir que aquelas cuja razão entre raios interno e externo forem menores do que o valor crítico são estáveis, uma vez que os modos  $m = 0$  são eliminados por uma questão de indeterminação na origem, como vimos na subseção 4.3.1. Vale a pena ressaltar que esta conclusão difere da obtida ao utilizarmos o operador de flutuações determinado por Cho [10], dado em (4.32). A existência do módulo obriga-nos a analisar a estabilidade desta configuração como um vórtice que possua  $[F] = 2$ , e portanto, no mínimo, três estados ligados. Desta forma, fica claro que, segundo os argumentos de eliminação de modos indeterminados sobre o defeito das bases locais, qualquer configuração não pode ser estável segundo o procedimento utilizado por Cho. E, caso adotássemos o método de Diakonov e Maul, o estado ligado contribuiria a 1 *loop* para a energia efetiva, indicando que também não é possível uma configuração estável ao realizarmos a decomposição dos vórtices de centro em bases globais do espaço de cor.

## 5 Conclusão

Como vimos ao longo desta dissertação, apesar dos vórtices de centro se tratarem de objetos singulares nas teorias de Yang-Mills pura com simetria  $SU(N)$ , somos capazes de introduzi-los através de uma classe especial de mapas  $\mathcal{S}$ , os quais apresentam as propriedades de singularidade e descontinuidade por um elemento de centro.

O foco de nosso trabalho girou em torno da estabilidade dos vórtices ao assumir que estes ganham propriedades dimensionais. Esta é representada pela existência, ou não, de um termo imaginário na energia efetiva a 1 *loop*. Desde a compreensão da instabilidade de Savvidy-Nielsen-Olesen até a análise para um perfil que apresenta fluxo nulo e simetria polar, diversos pontos foram discutidos. Certamente, a contribuição mais relevante apresentada aqui foi a ratificação de uma nova estrutura para o operador de flutuações, fornecida pela primeira vez na referência [23]. A decomposição em bases globais [12] pecava em dois pontos distintos. Primeiro, não representava corretamente o vórtice fino ao tomarmos os limites apropriados. Segundo, desconsiderava os defeitos presentes na decomposição em bases locais na correção a 1 *loop*. Como vimos, este segundo ponto é muito relevante na análise da estabilidade, pois o novo perfil possibilita o surgimento de argumentos favoráveis à eliminação do modo ligado com  $m = 0$  do operador de flutuações. A estrutura deste operador também sofreu alterações quando comparada a desenvolvida por Cho [10] para descrever a contribuição para uma configuração qualquer. Nesses trabalhos, a presença de um módulo na expressão do potencial dependente do campo externo impossibilitava qualquer chance de existirem vórtices estáveis. O problema é que, para acoplamentos magnéticos com fator giromagnético maior do que o valor crítico  $g_c = 2$ , o número de estados ligados  $N$  está relacionado com o fluxo magnético  $[F] > 0$  deste módulo segundo a relação  $N \geq [F] + 1$ . Como consequência, ao considerar uma configuração formada por um vórtice e um antivórtice com fluxo total nulo, o número de estados ligados seria maior ou igual a 3. Visando entender o surgimento deste módulo, três procedimentos foram analisados, onde pudemos perceber que todos discordam sobre a sua presença. Desta forma, para a configuração acima mencionada, o número de estados

ligados é na verdade maior ou igual a 1. Portanto, ao considerar casos onde este limite é saturado, juntamente com o acoplamento correto no operador das flutuações, surge a possibilidade de eliminar completamente os modos ligados. Um exemplo de objeto estável foi estudado nesta dissertação, a configuração de um vórtice e um antivórtice concêntricos e raios diferentes. Em particular, percebemos que configurações onde a razão entre o maior dos raios e o menor,  $\nu$ , satisfaz a desigualdade  $\nu \lesssim 1,947$ , são estáveis.

Finalmente, sobre as possíveis linhas futuras de pesquisa, dois caminhos estão muito claros. Um deles diz respeito à proliferação dos vórtices de centro. Como vimos, este é o efeito esperado para explicar uma fase confinante nas teorias de Yang-Mills puras. Segundo os cálculos desenvolvidos por Diakonov e Maul [12], o procedimento usual permite essa proliferação, representada pela parte real da energia efetiva negativa, entretanto não são conhecidas as mudanças que surgem ao seguir o processo de deformação diagonal. Outro ponto relevante para dar continuidade no doutorado, é a expansão de horizontes para modelos efetivos de Yang-Mills-Higgs [24]. A grande vantagem desta nova etapa é que na presença dos campos de Higgs, os vórtices de centro devem ser objetos mais robustos. Sendo configurações topológicas, inicialmente associadas com um *gap* de energia no modelo efetivo, estes estariam naturalmente protegidos em relação ao efeito das flutuações. Neste caso, a questão da estabilidade deste objeto voltaria a ser a pergunta a ser feita neste novo contexto, onde esperamos que existam vórtices estáveis, identificados com a corda confinante.

## *ANEXO A - Potenciais Localizados sobre Curvas no $\mathcal{R}^3$*

Os estados ligados para um operador tipo Schroedinger, em dimensão  $D$  e um potencial generalizado  $u(\vec{x})$ , satisfazem a seguinte equação de autovalores

$$[-\nabla_D^2 - u(\vec{x})] \psi(\vec{x}) = -\kappa^2 \psi(\vec{x}). \quad (\text{A.1})$$

Definindo a transformada de Fourier,

$$\tilde{f}(\vec{k}) = \int d^D \vec{x} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} f(\vec{x}), \quad (\text{A.2})$$

e conseqüentemente a transformada inversa de Fourier

$$f(\vec{r}) = \int \frac{d^D \vec{k}}{(2\pi)^D} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \tilde{f}(\vec{k}), \quad (\text{A.3})$$

ao aplicarmos (A.3) no resultado obtido ao aplicar (A.2) em (A.1), encontramos a equação integral em um espaço  $D$ -dimensional

$$\psi(\vec{y}) = - \int d^D \vec{x} \mathcal{G}_D(|\vec{y} - \vec{x}|) u(\vec{x}) \psi(\vec{x}), \quad (\text{A.4})$$

onde  $\mathcal{G}_D(|\vec{y} - \vec{x}|)$  é a função de Green (FG) em dimensão  $D$  [7], a qual é equivalente a (A.1). Repare que até esse ponto, nenhuma característica do potencial foi utilizada, logo essa equação é válida para qualquer potencial  $u(\vec{x})$  que desejarmos. Vimos ao longo desta dissertação que os potenciais localizados sobre curvas

$$u(\vec{x}) = -\lambda\mu^\varepsilon \int_C ds \delta^{(3)}(\vec{x} - \vec{x}(s)) \delta^{(D-3)}(\vec{w}), \quad (\text{A.5})$$

onde  $\mu$  é uma constante que preserva a constante de acoplamento  $\lambda$  adimensional e  $\varepsilon = 3 - D$ , é o desvio da dimesão em que se deseja analisar o problema, estão intimamente relacionados com a estabilidade de vórtices de centro em uma teoria de Yang-Mills pura. Por esta razão, este tratamento será realizado neste apêndice com maiores cuidados.

Aplicando (A.5) em (A.4), essa equação integral em dimensão  $D$  reduz-se a

$$\psi(\vec{y}) = -\lambda\mu^\varepsilon \int_{\mathcal{C}} ds \mathcal{G}_D(|\vec{y} - \vec{x}(s)|)\psi(\vec{x}(s)), \quad (\text{A.6})$$

válida para todos os pontos do espaço. Para pontos  $\vec{x}(t)$  sobre a curva, nos deparamos com a equação de Fredholm de segunda espécie [27]

$$\psi(\vec{x}(t)) = -\lambda\mu^\varepsilon \int_{\mathcal{C}} ds \mathcal{G}_D(|\vec{x}(t) - \vec{x}(s)|)\psi(\vec{x}(s)). \quad (\text{A.7})$$

Como podemos perceber na (A.7), quando  $\vec{x}(t) = \vec{x}(s)$  o argumento da função de Green se anula, gerando uma singularidade ao calcularmos a integral. Desta forma, o nosso próximo passo é entender como tratar este resultado, de maneira a recuperar uma interpretação física consistente para diferentes curvas.

## A.1 Tratamento das Singularidades para as Diversas Classes de Curvas

Vale a pena notar que, para uma regularização qualquer da FG, podemos escrever nossa equação integral para os pontos sobre a curva da seguinte forma

$$\psi(\vec{x}(t)) = -\lambda \int_{\mathcal{C}} ds \mathcal{G}_{reg.}(|\vec{x}(t) - \vec{x}(s)|)\psi(\vec{x}(s)). \quad (\text{A.8})$$

Antes de escolhermos uma curva e tentar resolver a equação (A.8), podemos trabalhá-la de maneira a extrair as características da singularidade. Podemos então escrever a equação como

$$\begin{aligned} \psi(\vec{x}(t)) &= -\lambda \int_{\mathcal{C}} ds \mathcal{G}_{reg.}(|\vec{x}(t) - \vec{x}(s)|) (\psi(\vec{x}(s)) - \psi(\vec{x}(t))) + \mathcal{K}(t)\psi(\vec{x}(t)), \\ \mathcal{K}(t) &= -\lambda \int_{\mathcal{C}} ds \mathcal{G}_{reg.}(|\vec{x}(t) - \vec{x}(s)|). \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Dessa forma, quando  $\vec{x}(s) \rightarrow \vec{x}(t)$ , o integrando do primeiro termo é suavizado, de maneira que a primeira integral é convergente. Com isso é simples perceber que toda a singularidade do problema agora se encontra no termo  $\mathcal{K}(t)$ , o que simplifica nosso problema em consideração ao caso anterior, onde o integrando singular também continha a função de onda sobre a curva. Ainda é possível isolar os efeitos da singularidade, introduzindo uma curva de referência com comprimento idêntico ao da curva  $\mathcal{C}$ , escrevendo o termo

divergente da seguinte forma

$$\mathcal{K}(t) = -\lambda \int_C ds [\mathcal{G}_{reg.}(|\vec{x}(t) - \vec{x}(s)|) - \mathcal{G}_{reg.}(|\vec{x}_0(t) - \vec{x}_0(s)|)] + \mathcal{D}(t),$$

$$\mathcal{D}(t) = -\lambda \int_C ds \mathcal{G}_{reg.}(|\vec{x}_0(t) - \vec{x}_0(s)|), \quad (\text{A.10})$$

onde  $\vec{x}_0(t)$  é a parametrização da curva de referência. Neste momento, podemos perceber que a singularidade se encontra no termo  $\mathcal{D}(t)$ , uma vez que ao fazer  $\vec{x}(s) \rightarrow \vec{x}(t)$ , as características das curvas se confundem de maneira que  $|\vec{x}(t) - \vec{x}(s)| \approx |\vec{x}_0(t) - \vec{x}_0(s)|$  e assim mais uma vez a singularidade é suavizada de maneira que possa ser integrável. Repare também que a parametrização de  $\vec{x}_0(s)$  pode ser escolhida de maneira a ser muito mais simples do que  $\vec{x}(s)$ , simplificando a determinação das características da singularidade. A partir desse momento precisaremos tratar separadamente cada classe de curva, estando interessados em duas classes de curvas em particular

- curvas de comprimento infinito;
- curvas fechadas.

### A.1.1 Curvas de Comprimento Infinito

Para tratar de curvas de comprimento infinito a escolha mais simples que poderíamos fazer, que satisfaz as condições para regularização do problema, é que  $\vec{x}_0(s)$  seja a parametrização pelo comprimento de arco de uma reta infinita. Neste caso temos que  $|\vec{x}_0(t) - \vec{x}_0(s)| = |t - s|$  e o termo divergente  $\mathcal{D}(t)$  da equação (A.10) passa a ser escrito da seguinte forma

$$\mathcal{D}(t) = -\lambda \int_{-\infty}^{\infty} ds \mathcal{G}_{reg.}(|t - s|), \quad (\text{A.11})$$

onde podemos facilmente notar que o integrando possui simetria de translação na direção da curva, e uma vez que o resultado da integral é um número adimensional, podemos impôr como condição de renormalização para (A.11) que

$$-\lambda \left[ \int_{-\infty}^{\infty} ds \mathcal{G}_{reg.}(|s|) + c \right] = 1. \quad (\text{A.12})$$

Repare que, de acordo com (A.12), a constante de acoplamento passa a depender explicitamente do parâmetro regularizador adotado. Esse comportamento é comum em teorias de renormalização e conhecido como *running coupling constant*. Para que (A.12) seja sempre válida,  $\lambda$  deve tender a zero quando o parâmetro regulador tender para o valor de interesse. É importante ressaltar que o parâmetro  $c$  surge graças a liberdade que temos

para fixar a condição de renormalização, deixando partes finitas ao remover a divergência. A sua relevância ficará clara a seguir. A partir das equações (A.11) e (A.12), temos que a equação renormalizada de (A.10) fica escrita como

$$- \int_{-\infty}^{\infty} ds \mathcal{G}_{reg.}(|\vec{x}(t) - \vec{x}(s)|) (\psi(\vec{x}(s)) - \psi(\vec{x}(t))) + \tilde{\mathcal{K}}(t)\psi(\vec{x}(t)) = 0 \quad (\text{A.13})$$

$$\tilde{\mathcal{K}}(t) = c - \int_{-\infty}^{\infty} ds [\mathcal{G}_{reg.}(|\vec{x}(t) - \vec{x}(s)|) - \mathcal{G}_{reg.}(|t - s|)]. \quad (\text{A.14})$$

Nesse momento podemos perceber mais uma vez o porquê de precisarmos introduzir o parâmetro  $c$ . Ao integrarmos (A.13) em relação ao parâmetro  $t$ , por uma questão de consistência, o parâmetro  $c$  precisa satisfazer a seguinte igualdade

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt c\psi(\vec{x}(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt ds [\mathcal{G}_{reg.}(|\vec{x}(t) - \vec{x}(s)|) - \mathcal{G}_{reg.}(|t - s|)] \psi(\vec{x}(t)), \quad (\text{A.15})$$

O único ponto que ainda devemos esclarecer em relação a este parâmetro é como introduzi-lo na teoria inicial (A.1), e isto será feito na seção A.2.

## A.1.2 Curvas Fechadas

A discussão realizada para curva infinitas é muito parecida com a que iremos realizar para curvas fechadas, uma vez que a curva mais simples que podemos escolher base é uma circunferência de mesmo comprimento ao da curva desejada, que possui a simetria de rotação sobre a curva, similar ao caso da reta infinita, a qual possui simetria de translação. Portanto, podemos impôr como condição de renormalização uma equação equivalente a (A.12), dada por

$$-\lambda \left[ \oint_{\mathcal{C}} ds \mathcal{G}_{reg.}(|\vec{x}_0(t) - \vec{x}_0(s)|) + c \right] = 1. \quad (\text{A.16})$$

Neste caso, pelas mesmas razões vistas na subseção A.1.1, a constante de acoplamento  $\lambda$  é interpretada como dependente do parâmetro regulador da teoria. Sendo assim, a equação renormalizada para curvas fechadas é dada por

$$- \oint_{\mathcal{C}} ds \mathcal{G}_{reg.}(|\vec{x}(t) - \vec{x}(s)|) (\psi(\vec{x}(s)) - \psi(\vec{x}(t))) + \tilde{\mathcal{K}}(t)\psi(\vec{x}(t)) = 0$$

$$\tilde{\mathcal{K}}(t) = c - \oint_{\mathcal{C}} ds [\mathcal{G}_{reg.}(|\vec{x}(t) - \vec{x}(s)|) - \mathcal{G}_{reg.}(|\vec{x}_0(t) - \vec{x}_0(s)|)]. \quad (\text{A.17})$$

onde  $c$ , por razões semelhantes ao caso das curvas infinitas, satisfaz

$$\oint_{\mathcal{C}} dt c\psi(\vec{x}(t)) = \oint_{\mathcal{C}} \oint_{\mathcal{C}} dt ds [\mathcal{G}_{reg.}(|\vec{x}(t) - \vec{x}(s)|) - \mathcal{G}_{reg.}(|\vec{x}_0(t) - \vec{x}_0(s)|)] \psi(\vec{x}(t)), \quad (\text{A.18})$$

## A.2 Absorção das Arbitrariedades Geradas

Para construir a teoria de maneira mais coesa precisamos que todos os parâmetros que a formam estejam incluídos na origem do problema, isso é a base de qualquer teoria de renormalização. Entretanto, toda vez que surge um novo parâmetro precisamos absorvê-lo em outros já existentes. A maneira correta de tratar o parâmetro  $c$  é introduzindo na equação inicial um novo parâmetro de renormalização arbitrário e adimensional  $\lambda\zeta$

$$(1 + \lambda\zeta) [-\nabla_D^2 + |E|] \psi(\vec{x}) = u(\vec{x})\psi(\vec{x}), \quad (\text{A.19})$$

onde  $\zeta$  é o parâmetro em que esperamos realizar a absorção de  $c$ . Desta forma, podemos agora atuar de maneira idêntica a anterior, para isso vamos aplicar (A.2) em (A.19) e no resultado aplicamos (A.3). Com isso, se obtém uma equação análoga a (A.4)

$$(1 + \lambda\zeta)\psi(\vec{y}) = -\lambda \int d^D \vec{x} \mathcal{G}_D(|\vec{y} - \vec{x}|) u(\vec{x})\psi(\vec{x}),$$

e considerando o caso de interesse, ou seja, o potencial localizado sobre uma curva em 3 dimensões

$$(1 + \lambda\zeta)\psi(\vec{y}) = -\lambda \int_C ds \mathcal{G}_{reg.}(|\vec{y} - \vec{x}(s)|) \psi(\vec{x}(s)). \quad (\text{A.20})$$

Trabalhando apenas com o lado direito da equação (A.6), o parâmetro  $c$  aparecerá após as mesmas manipulações algébricas realizadas, entretanto desta vez aparece no lado esquerdo da equação um termo com a mesma estrutura e também arbitrário, sendo assim podemos absorver  $c$  em um parâmetro arbitrário da teoria. Dessa maneira, como qualquer parâmetro arbitrário foi absorvido em parâmetros do problema, podemos dizer que nossa teoria é renormalizável.

## *Referências*

- [1] L. F. Abbott, Acta Phys. Pol. B**13**, (1982) 33.
- [2] E. S. Abers, B. W. Lee, Phys. Rep. **9**, (1973) 1.
- [3] Y. Aharonov, A. Casher, Phys. Rev. A**19** (1979) 2461.
- [4] M. F. Atiyah e I. G. MacDonald, Introduction to Commutative Algebra (Westview Press, 1969).
- [5] M. Bander, Phys. Rep. **75** (1981) 205.
- [6] F. Bentosela, R.M. Cavalcanti, P. Exner e V.A. Zagrebnoy, J. Phys. A**32** (1999) 3029.
- [7] C. G. Bollini, J. J. Giambiagi, Il Nuovo Cimento **12** (1972) 20.
- [8] H. E. Camblong, L. N. Epele, H. Fanchiotti, C. A. G. Canal, Annals Phys. **287** (2001) 14.
- [9] Ta-Pai Cheng e Ling-Fong Li, Gauge Theory of Elementary Particle Physics (Clarendon Press - Oxford).
- [10] Y. M. Cho, D. G. Pak, Phys. Rev. D**65** (2002) 74027; Y. M. Cho, D. G. Pak, H. W. Lee, Phys. Lett. B**525** (2002) 347; Y. M. Cho, D. G. Pak, Phys. Lett. B**632** (2006) 745.
- [11] S. Coleman, Aspects of Symmetry (Cambridge University Press, 1985).
- [12] D. Diakonov, M. Maul, Phys. Rev. D**66** (2002) 96004.
- [13] M. Engelhardt, H. Reinhardt, Nuc. Phys. B**567** (2000) 249.
- [14] S. Glashow, A. Salam, S. Weinberg,  
[http://www.nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/1979/](http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1979/);  
 G. 't Hooft, M. J. G. Veltman,  
[http://www.nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/1999/](http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1999/);  
 D. J. Gross, H. D. Politzer, F. Wilczek,  
[http://www.nobelprize.org/nobel\\_prizes/physics/laureates/2004/](http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2004/);  
*Millennium Prize Problems, Yang-Mills and Mass Gap* (sem solução até a data),  
[http://www.claymath.org/millennium/Yang-Mills\\_Theory/](http://www.claymath.org/millennium/Yang-Mills_Theory/).
- [15] I. S. Gradshteyn e I. M. Ryzhik, Table of Integrals, Series and Products, (Elsevier, 2007).
- [16] J. Greensite, An Introduction to the Confinement Problem (Springer Press, 2011).

- 
- [17] G. 't Hooft, *Nuc. Phys.* **B138** (1978) 1.
- [18] E. Ma, *Am. J. Phys.* **47**, (1979) 873.
- [19] F. D. Mazzitelli, D. A. R. Dalvit, F. C. Lombardo, *New J. Phys.* **8** (2006) 240.
- [20] N. K. Nielsen, P. Olesen, *Nuc. Phys.* **B144** (1978) 376.
- [21] N. K. Nielsen, *Am. J. Phys.* **49**, (1981) 1171.
- [22] L. E. Oxman, *J.H.E.P.* **12** (2008) 89.
- [23] L. E. Oxman, *J.H.E.P.* **7** (2011) 78.
- [24] L. E. Oxman, arXiv:1212.4102 [hep-th].
- [25] M. E. Peskin e D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory* (Addison-Wesley Publishing Company, 1995).
- [26] A. M. Polyakov, *Phys. Let.* **B59**, (1975) 82.
- [27] A. D. Polyanin e A. V. Manzhirov, *Handbook of Integral Equations*, (Chapman & Hall / CRC, 2008).
- [28] A. Pressley, *Elementary differential geometry*, (Springer Press, 2001).
- [29] A. Salam, J. Strathdee, *Nuc. Phys.* **B90** (1975) 203.
- [30] G. K. Savvidy, *Phys. Let.* **B71** (1977) 133.
- [31] G. N. Watson, *Treatise on the theory of Bessel Functions*, (Cambridge University Press, 1944).
- [32] K. G. Wilson, *Phys. Rev.* **D10** (1974) 2445.
- [33] C. N. Yang, R. L. Mills, *Phys. Rev.* **96**, (1954) 191.