

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

ALLAN RODRIGUES VIEIRA

**SELECÇÃO DE MODOS SPIN-ÓRBITA EM UM
INTERFERÔMETRO SAGNAC**

**Niterói
2013**

ALLAN RODRIGUES VIEIRA

**SELECÇÃO DE MODOS SPIN-ÓRBITA EM UM
INTERFERÔMETRO SAGNAC**

Trabalho apresentado como requisito
para a obtenção do título de mestre
em física pela Universidade Federal
Fluminense.

Orientador: Prof. Dr. ANTONIO ZELAQUETT KHOURY

**Niterói
2013**

V658 Vieira, Allan Rodrigues.
Seleção de modos spin-órbita em um interferômetro Sagnac /
Allan Rodrigues Vieira ; orientador: Antonio Zelaquett
Khoury. -- Niterói, 2013.
58 f. : il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal Fluminense.
Instituto de Física, 2013.
Bibliografia: f. 57-58.

1.INFORMAÇÃO QUÂNTICA. 2.ÓPTICA QUÂNTICA. 3.FÓTON.
I.Khoury, Antonio Zelaquett, Orientador. II.Universidade
Federal Fluminense. Instituto de Física, Instituição
responsável. III.Título.

CDD 530.120285

Resumo

Nós empregamos modos transversos eletromagnéticos e a polarização como nossos graus de liberdade. Dois tipos de bases de modos transversos são utilizadas: modos Hermite-Guaussiano (HG) e Laguerre-Gaussianos (LG). Ambos são soluções da equação de onda paraxial. Este grau de liberdade é combinado aos modos de polarização do LASER para a codificação de dois qubits, um em cada grau de liberdade. É bem conhecido que dois vetores de polarização ortogonais entre si formam uma base de dois níveis para os modos de polarização, enquanto os modos HG de primeira ordem formam uma base completa para subespaço dos modos transversos de primeira ordem. Dois interferômetros foram utilizados: na preparação um interferômetro do tipo Mach-Zender, e na medida um interferômetro do tipo Sagnac. Além disso mostramos que o interferômetro de medida funciona como um seletor de paridade spin-órbita.

Abstract

We employ Transverse Electromagnetic Modes and polarization as degree of freedom. Two kinds of mode basis are used: Hermite-Gaussian (HG) and Laguerre-Gaussian (LG). Both are solutions of the paraxial wave equation. This degree of freedom is combined with polarization modes to encode two photonic qubits. It is well known that two vectors with orthogonal polarizations form a two-level basis for the polarization vectors and first order HG modes form a complete basis for the first order TEM subspace. Two interferometers are used to prepare and measure different states in the combined degrees of freedom: a Mach-Zender interferometer and a Sagnac interferometer. Furthermore, we show that this Sagnac interferometer works as a spin-orbit parity selector.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos aqueles que me ajudaram e me ajudam de alguma forma. Sem dúvida, eu não seria capaz de fazer muitas coisas sem a amizade, o carinho, o companheirismo e o amor dos meus familiares e amigos. Peço desculpas para aqueles que esqueci de citar. Agradeço ao meu orientador, por investir seu tempo e sua dedicação em mim. Agradeço à banca formada pelos professores Marcelo Sarandy e Stephen Walborn. Por aceitarem avaliar a dissertação em um prazo mais curto de tempo. Agradeço à professora Malena Osorio Hor-Meyll da UFRJ que propos a construção do interferômetro Sagnac como um seletor de paridade. Agradeço aos amigos da UFF, que estão sempre comigo: o Antonio Duarte Pereira jr, o Pedro Rangel, Leonardo Silva Silveira, Rosembergue Brasileiro. Aos funcionarios do Instituto de Física da UFF. A todos professores. minha querida e amada família do IEBM. minha família. E por último, a mais importante: Luiza Zelesco Barretto, Lulu.

Sumário

1	Introdução	10
1.1	Polarização	10
1.2	Parâmetros de Stokes	11
1.3	Equação paraxial e suas soluções	14
1.3.1	A equação Paraxial	14
1.3.2	O modo fundamental	16
1.3.3	Os modos HG	18
1.3.4	Os Modos LG	18
1.4	Componentes óticos	21
1.4.1	Divisor de feixe	21
1.4.2	Divisor de feixe polarizador	23
1.4.3	Lâminas de meia onda	24
1.4.4	Prisma de Dove	25
1.4.5	Espelhos	25
2	Emaranhamento	27
2.1	Emaranhamento	27
2.2	Separabilidade spin-órbita na Ótica Clássica	28
2.3	Produção de modos espaciais	29
2.4	Modos spin-órbita	31
2.4.1	Produção do modo não-separável	31
2.5	Padrões de polarização	32

2.5.1	Polarização radial e azimutal	33
2.6	Teste com um modo não separável	34
3	Interferômetro Sagnac	36
3.0.1	Interferômetro Mach-Zender	36
3.0.2	Interferômetro Sagnac	38
3.1	Resultados experimentais	41
4	Desigualdade de Bell	44
4.1	Desigualdade de Bell	44
4.2	Desigualdade CHSH	45
4.3	Bases rodadas	46
4.4	Resultados preliminares	47
4.5	O prisma de Dove	48

Lista de Figuras

1.1	Esfera de Poincaré	12
1.2	Feixe gaussiano: (a) distribuição de intensidade em duas dimensões, (b) perfil de propagação.	17
1.3	Perfil de intensidade dos modos Hermite-Gaussianos.	19
1.4	Perfil de intensidade dos modos Laguerre-Gaussianos.	20
1.5	Relação entre os modos Laguerre-Gaussianos e os modos Hermite-Gaussianos.	20
1.6	Esfera de modos transversais de 1 ^a ordem.	21
1.7	Divisor de feixe (BS), e campos de entrada e saída.	22
1.8	Divisor de feixe polarizador (PBS). A polarização do feixe de entrada \hat{e}_Q é dada pela equação 1.6.	24
1.9	Operação de paridade de uma lâmina de meia onda.	25
1.10	Prisma de Dove.	25
1.11	Imagens antes e depois da reflexão.	26
2.1	A difração de um feixe e as ordens de difração.	30
2.2	Perfil das redes de difração. (a) produz modos Laguerre-Gaussianos de 1 ^a ordem e (b) produz modos HG_{01}	30
2.3	Produção do modo não separável.	32
2.4	Campo vetorial radial.	33
2.5	Campo vetorial azimutal.	33
2.6	Esquema experimental do teste com o modo não separável.	34

2.7	Modos transversais rodados de acordo com a orientação da lâmina de meia onda ($\lambda/2$): (a) $\lambda/2$ a 0° , (b) $\lambda/2$ a 10° , (c) $\lambda/2$ a 20° , (d) $\lambda/2$ a 30° , (e) $\lambda/2$ a 40° , (f) $\lambda/2$ a 50° , (g) $\lambda/2$ a 60° , (h) $\lambda/2$ a 70° , (i) $\lambda/2$ a 80° e (j) $\lambda/2$ a 90° , observando-se apenas o feixe transmitido pelo PBS, com polarização horizontal.	35
3.1	Interferômetro Mach-Zender com um espelho adicional.	37
3.2	Interferômetro Sagnac	38
3.3	Interferômetro Sagnac como seletor de paridade.	39
3.4	Imagens das 4 saídas para cada um dos 4 modos da base	41
3.5	Imagem de diferentes modos de entrada decompostos	42
4.1	Esquema para a medida da desigualdade CHSH de um modo spin-órbita não separável.	47
4.2	Esquema para medir a mudança na polarização em um feixe devido ao prisma de Dove.	48
4.3	Gráficos de medida de intensidade normalizada obtidas a partir do teste representado pela Fig. 4.2: (a) feixe de entrada com polarização \hat{e}_V , (b) feixe de entrada com polarização \hat{e}_H	48
4.4	Gráfico obtido unindo-se os gráficos da Fig. 4.3.	49
4.5	Esquema experimental: utilizando um interferômetro de preparação Mach-Zender e dois interferômetros de medida Sagnac.	50

Capítulo 1

Introdução

Os feixes LASER - *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation* são produzidos em cavidades óticas onde, de acordo com a geometria destas, as ondas eletromagnéticas oscilam. A frequência e o perfil espacial do feixe emitido pela cavidade estarão relacionados com o comprimento e outras características da mesma. Os feixes LASER possuem coerência espacial e temporal. Além disso, divergem pouco enquanto se propagam, sendo este um dos pontos fundamentais da ótica paraxial.

Neste texto trataremos separadamente os graus de liberdade - polarização e modo transversal eletromagnético de um feixe LASER. A descrição matemática da polarização apresentará o formalismo de Stokes-Jones [1][2], e a estrutura espacial do campo elétrico surgirá a partir da equação paraxial [3][4]. Além disso, tendo em vista que o desenvolvimento das soluções para a equação paraxial será feito com o *ansatz* $\vec{E} = (E_x, 0, 0)$ - campo polarizado, a polarização de uma onda eletromagnética será descrita independentemente da função que representa a estrutura espacial de seu campo elétrico.

1.1 Polarização

No estudo de ondas eletromagnéticas, ao observarmos o comportamento dos campos que dão origem àquelas, surge o conceito de *polarização* - direção de oscilação do campo elétrico.

É bem conhecido que os campos elétrico \vec{E} e magnético \vec{B} de uma onda eletromagnética são ortogonais à sua direção de propagação. Por isso, para tratarmos a polarização, nessa seção, o vetor campo elétrico terá uma de suas três componentes omitidas.

1.2 Parâmetros de Stokes

Para caracterizar o vetor de polarização de uma onda eletromagnética através dos parâmetros de Stokes, suponha que utilizemos 4 elementos óticos, nos quais lançaremos o feixe a ser investigado e mediremos a intensidade da luz transmitida, um elemento de cada vez. Por escolha, o 1º será um filtro isotrópico - atuando da mesma maneira sobre qualquer polarização - onde apenas metade da intensidade da luz é transmitida. O 2º e o 3º são, respectivamente, polarizadores lineares que transmitem polarização horizontal e polarização $+45^\circ$ com relação a horizontal. E o último trata-se de um polarizador circular que transmite polarização circular à direita. O filtro e cada um dos polarizadores será posicionado no caminho do feixe, individualmente, e então faremos a leitura da intensidade I_0 para o filtro, I_1 para o polarizador linear na horizontal, I_2 para o polarizador linear a 45° e I_3 para o polarizador circular. Então os parâmetros de Stokes são definidos da seguinte forma [1]:

$$\begin{aligned}
 S_0 &= 2I_0, \\
 S_1 &= 2I_1 - 2I_0, \\
 S_2 &= 2I_2 - 2I_0, \\
 S_3 &= 2I_3 - 2I_0.
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Como podemos notar, S_0 é simplesmente a intensidade do feixe. Por outro lado, $S_{1,2,3}$ trazem consigo informações sobre a polarização. Por exemplo:

1. se o feixe possuir polarização linear vertical, então $S_1 = -S_0$ e $S_2 = S_3 = 0$;
2. se o feixe tem polarização circular R, então $S_3 = S_0$ e $S_1 = S_2 = 0$;
3. se o feixe não é polarizado (luz natural), $S_1 = S_2 = S_3 = 0$.

Além disso, podemos construir um grau de polarização P [2], como

$$P = \frac{\sqrt{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}}{S_0}. \quad (1.2)$$

Assim, feixes não polarizados tem $P = 0$, e feixes totalmente polarizados $P = 1$, ou ainda:

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2. \quad (1.3)$$

Note que 1.3 é a equação de uma esfera. De fato, uma representação muito conhecida para a polarização é a *Esfera de Poincaré*, ilustrada na Fig. 1.1. Os eixos da esfera são formados pelas polarizações que escolhemos medir e todos os demais pontos de sua superfície representam polarizações possíveis. Pontos no interior da esfera representam feixes parcialmente polarizados.

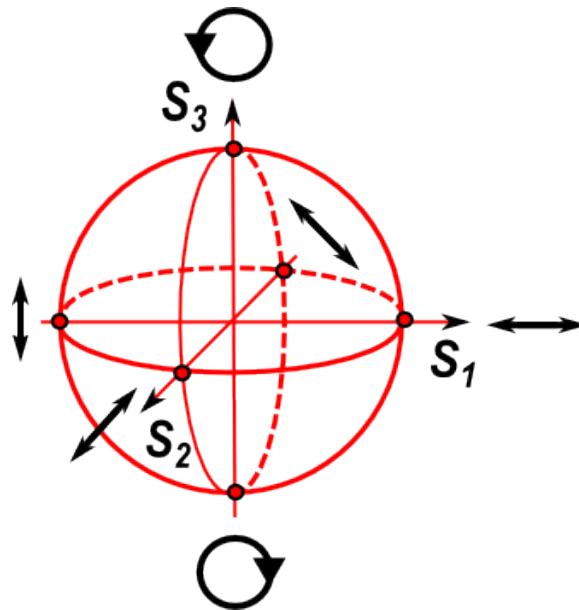


Figura 1.1: Esfera de Poincaré

Outra representação possível para a polarização com $P = 1$ são os *Vetores de Jones*. Essa notação é bastante conveniente na ótica linear pois, tanto os feixes completamente polarizados podem ser expressos através dos vetores de Jones, quanto os elementos ótico através das matrizes de Jones. Para uma onda eletromagnética plana \mathbf{E} que se propaga na direção z positiva com frequência ω , suas componentes complexas transversais E_x , E_y ao longo das direções x e y

podem ser expressas em um vetor coluna de tal maneira:

$$\mathbf{E} \equiv \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}, \quad (1.4)$$

repare que omitimos o fator $e^{i(kz-\omega t)}$. Além disso, as transformações lineares realizadas por elementos óticos também podem ser descritas pelas *Matrizes de Jones*, tal que $\mathbf{E}' = M\mathbf{E}$, ou ainda

$$\mathbf{E}' = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mathbf{E}. \quad (1.5)$$

Normalizando-se as componentes do vetor pela intensidade do campo, podemos reescrever o vetor de Jones, como nestes exemplos abaixo:

$$\hat{e}_H = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{e}_V = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{e}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \hat{e}_R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix},$$

onde \hat{e}_H e \hat{e}_V representam campos linearmente polarizados na horizontal e vertical, respectivamente, enquanto \hat{e}_+ representa um campo linearmente polarizado a 45° com a horizontal e \hat{e}_R um campo com polarização circular à direita. Assim, como um sistema de dois níveis na Mecânica Quântica, as polarizações na superfície da esfera de Poincaré podem ser descritas através de dois vetores, por exemplo: \hat{e}_H e \hat{e}_V . De maneira geral, podemos escrever uma polarização \hat{e}_Q qualquer como

$$\hat{e}_Q = \cos \frac{\theta}{2} \hat{e}_H + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \hat{e}_V. \quad (1.6)$$

Mais à frente, faremos algumas comparações entre a descrição matemática da polarização e dos modos espaciais do campo elétrico.

1.3 Equação paraxial e suas soluções

Os feixes LASER's possuem uma descrição matemática particular que leva em conta a geometria da cavidade e algumas características, como por exemplo: cintura, comprimento de Rayleigh e comprimento de onda. Denomina-se regime paraxial àquele em que a divergência do feixe LASER é pequena, isto é, quando sua cintura é muito maior que o comprimento de onda. A equação paraxial,

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad (1.7)$$

com $\vec{E} = (E_x, 0, 0)$ e $E_x = \psi(x, y, z) e^{i(kz - \omega t)}$ pode ser obtida fazendo-se algumas aproximações na equação de onda para o campo elétrico proveniente das equações de Maxwell. Porém, faremos aqui um tratamento baseado em teoria de perturbação com em [3],[4] que evidencia a importância da aproximação paraxial.

1.3.1 A equação Paraxial

Partindo das equações de Maxwell para um meio linear, sem cargas ou correntes livres:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu\epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

onde \vec{E} e \vec{B} são os vetores campo elétrico e magnético, respectivamente. Tomando o rotacional na Lei de Faraday-Lens temos:

$$\vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E} \right) - \nabla^2 \vec{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (1.9)$$

Para um feixe que se propague na direção z , separaremos o campo elétrico e o operador nabla em componentes transversal e longitudinal à propagação, da seguinte forma:

$$\vec{E} = \left(\vec{\psi}_\perp(\vec{r}) + \hat{z}\psi_z(\vec{r}) \right) \exp[i(kz - \omega t)] , \quad (1.10)$$

$$\vec{\nabla} = \vec{\nabla}_\perp + \hat{z}\frac{\partial}{\partial z} , \quad (1.11)$$

onde

$$\vec{\nabla}_\perp \equiv \hat{x}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial}{\partial y} . \quad (1.12)$$

Utilizando as coordenadas transversal e longitudinal para reescrever (1.9), teremos duas equações, uma para cada coordenada:

$$\vec{\nabla}_\perp \left[\vec{\nabla}_\perp \cdot \vec{\psi}_\perp + \frac{\partial \psi_z}{\partial z} + ik\psi_z \right] - \nabla_\perp^2 \vec{\psi}_\perp - \frac{\partial^2 \vec{\psi}_\perp}{\partial z^2} - 2ik\frac{\partial \vec{\psi}_\perp}{\partial z} = 0 , \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\vec{\nabla}_\perp \cdot \vec{\psi}_\perp \right) + ik\vec{\nabla}_\perp \cdot \vec{\psi}_\perp - \nabla_\perp^2 \psi_z - k^2 \psi_z = 0 . \quad (1.14)$$

Neste ponto, precisamos reescalonar estas equações levando-se em conta dois fatores característicos do feixe. São eles: a cintura do feixe, w_0 , e a distância de Rayleigh, $z_R = kw_0^2/\lambda$, que é o comprimento que o feixe deve propagar para que seu diâmetro aumente de um fator $\sqrt{2}$:

$$x = w_0\xi \quad , \quad y = w_0\eta \quad \text{e} \quad z = z_R\zeta . \quad (1.15)$$

Realizando esta transformação e multiplicando (1.13) por w_0^3/z_R e (1.14) por w_0^4/z_R^2 , teremos duas novas equações nas coordenadas (ξ, η, ζ) :

$$\vec{\nabla}_\tau \left[h\vec{\nabla}_\tau \cdot \vec{\psi}_\tau + h^2\frac{\partial \psi_\zeta}{\partial \zeta} + 2i\psi_\zeta \right] - h\nabla_\tau^2 \vec{\psi}_\tau - h^3\frac{\partial^2 \vec{\psi}_\tau}{\partial \zeta^2} - 4ih\frac{\partial \vec{\psi}_\tau}{\partial \zeta} = 0 , \quad (1.16)$$

$$h^3\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\vec{\nabla}_\tau \cdot \vec{\psi}_\tau \right) + 2ih\vec{\nabla}_\tau \cdot \vec{\psi}_\tau - h^2\nabla_\tau^2 \psi_\zeta - 4\psi_\zeta = 0 , \quad (1.17)$$

onde $h = w_0/z_R$ e

$$\vec{\nabla}_\tau \equiv \hat{\xi}\frac{\partial}{\partial \xi} + \hat{\eta}\frac{\partial}{\partial \eta} .$$

Para um feixe bem colimado, teremos

$$w_0 \ll z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \lambda \ll w_0 . \quad (1.18)$$

Neste formato, percebemos que h é um parâmetro de expansão:

$$\vec{\psi}_\tau = h\vec{\psi}_\tau^{(0)} + h^3\vec{\psi}_\tau^{(2)} + h^5\vec{\psi}_\tau^{(4)} + \dots \quad (1.19)$$

$$\psi_\zeta = \psi_\zeta^{(1)} + h^2\psi_\zeta^{(3)} + h^4\psi_\zeta^{(5)} + \dots \quad (1.20)$$

Reunindo os termos em primeira ordem em h , obteremos:

$$\nabla_\tau^2 \vec{\psi}_\tau^{(0)} + 4i \frac{\partial \vec{\psi}_\tau^{(0)}}{\partial z} = 0 , \quad (1.21)$$

$$\psi_\zeta^{(1)} = \frac{i}{2} \vec{\nabla}_\tau \cdot \vec{\psi}_\tau^{(0)} . \quad (1.22)$$

Analisando a equação (1.21), vemos que ela é a bem conhecida equação paraxial, enquanto a equação (1.16) fornece uma correção de 1ª ordem em h . O tratamento de suas soluções será feito de maneira análoga aos livros-textos.

1.3.2 O modo fundamental

Como solução da equação paraxial, construiremos o seguinte ansatz:

$$\vec{E} = (E_x, 0, 0) ,$$

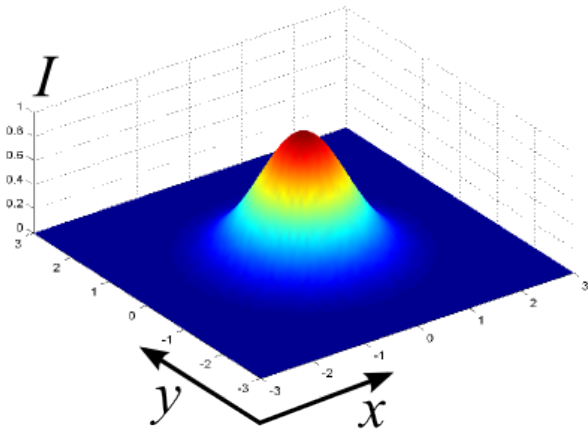
$$E_x = \psi(\vec{r}) \exp(i(zk - \omega t)) \quad \text{e}$$

$$\psi(\vec{r}) = A \exp \left\{ i \left[\frac{kr^2}{2q(z)} + P(z) \right] \right\} . \quad (1.23)$$

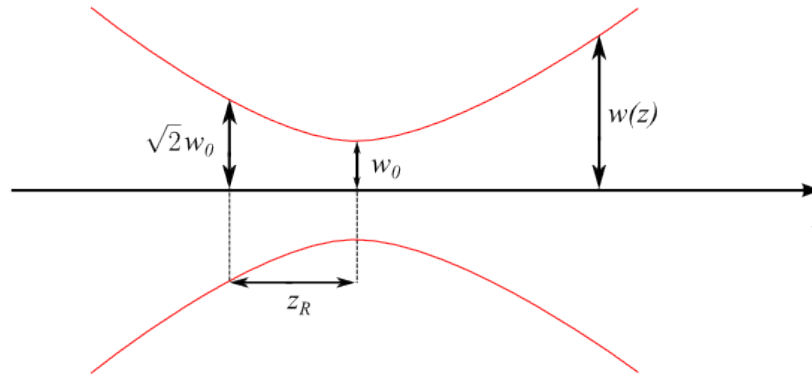
Substituindo (1.23) na equação paraxial, teremos condições a serem impostas sobre $q(z)$ e $P(z)$, tais que:

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} + i \frac{2}{kw^2(z)} \quad \text{e} \quad P(z) = i \ln \left[1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2 \right] - \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right), \quad (1.24)$$

onde $w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2}$ e $R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_R}{z} \right)^2 \right]$ são respectivamente o raio do feixe e o raio de curvatura da frente de onda. Os parâmetros w_0 e $z_R = kw_0^2/\lambda$ são mostrados na Fig. 1.2 (b). A partir disso, determinamos o modo fundamental (feixe gaussiano), Fig. 1.2 (a):



(a)



(b)

Figura 1.2: Feixe gaussiano: (a) distribuição de intensidade em duas dimensões, (b) perfil de propagação.

$$E_x(\vec{r}) = \underbrace{E_0 \frac{w_0}{w(z)} \exp \left[\frac{-r^2}{w^2(z)} \right]}_{\text{fator de amplitude}} \exp \left\{ i \left[\underbrace{kz - \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right)}_{\text{fase longitudinal}} + \underbrace{\frac{kr^2}{2R(z)}}_{\text{fase radial}} \right] \right\}. \quad (1.25)$$

1.3.3 Os modos HG

Um feixe gaussiano é apenas uma das soluções para a equação paraxial. Supondo que a amplitude dependa das coordenadas transversais, temos o ansatz:

$$\psi(\vec{r}) = A f\left(\frac{x}{w(z)}\right) g\left(\frac{y}{w(z)}\right) \exp\left\{i\left[\frac{kr^2}{2q(z)} + P(z)\right]\right\}. \quad (1.26)$$

Então, aplicando (1.26) na equação (1.7), obteremos:

$$f\left(\frac{x}{w(z)}\right) = H_n\left(\sqrt{2}\frac{x}{w(z)}\right) \quad \text{e} \quad g\left(\frac{y}{w(z)}\right) = H_m\left(\sqrt{2}\frac{y}{w(z)}\right), \quad (1.27)$$

onde $H_n(x)$ é o polinômio de Hermite de ordem n . Nesta situação, a função $P(z)$ dependerá da ordem dos polinômios de Hermite:

$$P(z) = i \ln \left[\sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} \right] - (n + m + 1) \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right). \quad (1.28)$$

Portanto, a solução geral, para a equação paraxial em coordenadas cartesianas é:

$$\begin{aligned} \psi_{m,n} = & \frac{A_{m,n}}{w(z)} H_n\left(\sqrt{2}\frac{x}{w(z)}\right) H_m\left(\sqrt{2}\frac{y}{w(z)}\right) \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)}\right] \\ & \times \exp\left\{i\left[\frac{k(x^2 + y^2)}{2R(z)} - \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right) + \frac{kr^2}{2R(z)}\right]\right\}, \end{aligned} \quad (1.29)$$

onde $A_{m,n}$ é uma constante de normalização e $N = n + m$, define a hierarquia da solução, chamada de modo Hermite-Gaussiano ($HG_{m,n}$), Fig. 1.3. Para $n = m = 0$, recuperamos a solução do modo fundamental. $\psi_{m,n}$ é um conjunto completo e ortogonal de soluções da equação paraxial.

1.3.4 Os Modos LG

Construindo uma solução, em coordenadas cilíndricas teremos o ansatz:

$$\psi(\vec{r}) = A \chi\left(\frac{2r^2}{w^2(z)}\right) \exp\left\{i\left[\frac{kr^2}{2R(z)} + P(z) + l\phi\right]\right\}. \quad (1.30)$$

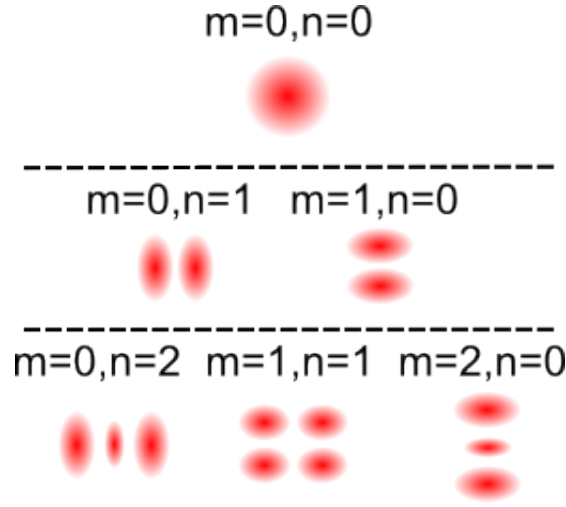


Figura 1.3: Perfil de intensidade dos modos Hermite-Gaussianos.

A equação paraxial em coordenadas cilíndricas fica:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + 2ik \frac{\partial \psi}{\partial z} . \quad (1.31)$$

Realizando o mesmo processo dos itens anteriores, teremos:

$$\chi_p^l \left(\frac{2r^2}{w^2(z)} \right) = \left[\frac{\sqrt{2}r}{w(z)} \right]^{|l|} \exp \left[-\frac{r^2}{w^2(z)} \right] L_p^{|l|} \left(\frac{2r^2}{w^2(z)} \right) \quad e \quad (1.32)$$

$$P(z) = i \ln \left[\sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2} \right] - (2p + |l| + 1) \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right) , \quad (1.33)$$

onde $L_p^{|l|}$ são os polinômios associados de Laguerre. Com esses resultados em mãos, obtemos os chamados modos Laguerre-Gaussianos, Fig. 1.4:

$$\begin{aligned} \psi_{l,p} = & \sqrt{\frac{2p!}{\pi w^2(z) (p + |l|)}} \left[\frac{\sqrt{2}r}{w(z)} \right] L_p^{|l|} \left(\frac{r^2}{w^2(z)} \right) \exp \left[-\frac{r^2}{w^2(z)} \right] \\ & \times \exp \left\{ i \left[\frac{kr^2}{2R(z)} - (2p - |l| + 1) \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right) + l\phi \right] \right\} . \end{aligned} \quad (1.34)$$

Os modos Hermite-Gaussianos e Laguerre-Gaussianos, separadamente, formam conjuntos completos para as soluções da equação paraxial. Portanto, temos dois conjuntos distintos para

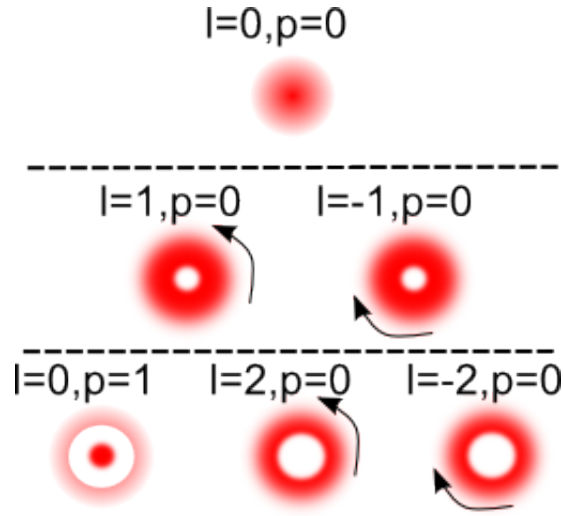


Figura 1.4: Perfil de intensidade dos modos Laguerre-Gaussianos.

o espaço das soluções daquela equação. De fato, existe uma relação que permite escrever os polinômios de Hermite como combinação linear dos polinômios de Laguerre e vice-versa [3][4]:

$$\sum_{k=0}^{n+m} (2i)^k P_k^{n-k,m-k}(0) H_{n+m-k}(x) H_k(y) = 2^{n+m} \times$$

$$\times \begin{cases} (-1)^m m! (x + iy)^{n-m} L_n^{n-m}(x^2 + y^2) & \text{para } n \geq m \\ (-1)^n n! (x - iy)^{m-n} L_n^{m-n}(x^2 + y^2) & \text{para } n \leq m \end{cases},$$

onde $P_k^{n-k,m-k}(0) = \frac{(-1)^k}{2^k k!} \frac{d^k}{dt^k} [(1-t)^m (1+t)^n] |_{t=0}$ são os polinômios de Jacobi. Além disso, olhando apenas para os modos de 1ª ordem, esta relação é muito simples, como vemos na Fig. 1.5.

$$\begin{aligned} \text{Laguerre-Gaussian } (l=1, p=0) &= [\text{Hermite-Gaussian } (l=1, p=0) + i \text{Hermite-Gaussian } (l=1, p=1)] \sqrt{2} \\ \text{Laguerre-Gaussian } (l=-1, p=0) &= [\text{Hermite-Gaussian } (l=1, p=0) - i \text{Hermite-Gaussian } (l=1, p=1)] \sqrt{2} \end{aligned}$$

Figura 1.5: Relação entre os modos Laguerre-Gaussianos e os modos Hermite-Gaussianos.

Como podemos ver, os modos Laguerre-Gaussianos de 1ª ordem são escritos como uma combinação linear dos modos Hermite-Gaussianos de 1ª ordem, da mesma maneira que as polarizações circulares são escritas como combinação linear das polarizações lineares horizontal

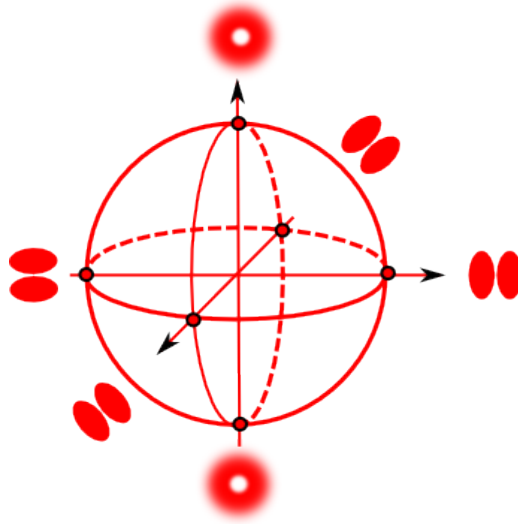


Figura 1.6: Esfera de modos transversais de 1ª ordem.

e vertical. De maneira semelhante ao vetor de Jones, podemos identificar $HG_{10} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \psi_h$,

$HG_{01} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \psi_v$ e assim um modo transversal de 1ª ordem qualquer pode ser descrito como

$$\psi_q = \cos \frac{\theta}{2} \psi_h + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} \psi_v . \quad (1.35)$$

E portanto, podemos ainda imaginar uma esfera de modos, similar à esfera de Poincaré, como na Fig. 1.6. Esta representação dos modos de 1ª ordem foi proposta por *Padgett e Courtial* [5].

1.4 Componentes óticos

1.4.1 Divisor de feixe

O divisor de feixes (BS) - do inglês *beam splitter* - é um elemento ótico que transmite e reflete a luz nele incidida. Comumente o BS é construído para transmitir e refletir 50% do feixe incidente, no entanto outras proporções entre a parte transmitida e o refletida são possíveis. Como na Fig.(1.7), os campos elétricos \mathbf{E}_1 e \mathbf{E}_2 entram no BS enquanto \mathbf{E}'_1 e \mathbf{E}'_2 saem dele. Podemos esperar, que \mathbf{E}'_1 dependa da transmissão de \mathbf{E}_2 e da reflexão de \mathbf{E}_1 e fazendo o mesmo

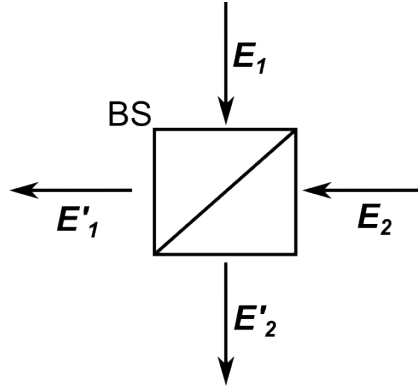


Figura 1.7: Divisor de feixe (BS), e campos de entrada e saída.

raciocínio para \mathbf{E}'_2 podemos escrever:

$$\mathbf{E}'_1 = a\mathbf{E}_1 + b\mathbf{E}_2, \quad (1.36)$$

$$\mathbf{E}'_2 = c\mathbf{E}_1 + d\mathbf{E}_2.$$

onde $a \propto \sqrt{R}$, $b \propto \sqrt{T}$, $c \propto \sqrt{T}$ e $d \propto \sqrt{R}$. E R, T são os coeficientes de reflexão e transmissão, respectivamente. Escrevendo a equação 1.37 na forma matricial, temos:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}'_1 \\ \mathbf{E}'_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \end{pmatrix}. \quad (1.37)$$

Sejam I' e I as intensidades dos campos de entrada e saída no BS.

$$I' = |\mathbf{E}'_1|^2 + |\mathbf{E}'_2|^2 = (\mathbf{E}'_1^* \mathbf{E}'_2^*) \begin{pmatrix} \mathbf{E}'_1 \\ \mathbf{E}'_2 \end{pmatrix}. \quad (1.38)$$

Supondo que o BS não absorve luz, $I' = I$ e utilizando a equação 1.37 temos:

$$(\mathbf{E}_1^* \mathbf{E}_2^*) M^\dagger M \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \end{pmatrix} = (\mathbf{E}_1^* \mathbf{E}_2^*) \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \end{pmatrix}. \quad (1.39)$$

Portanto, se não há perdas no BS, $I' = I \Rightarrow M^\dagger M = \mathbb{1}$. Logo,

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\sqrt{R} & \beta\sqrt{T} \\ \gamma\sqrt{T} & \delta\sqrt{R} \end{pmatrix},$$

$$M^\dagger M = \begin{pmatrix} \alpha^*\sqrt{R} & \gamma^*\sqrt{T} \\ \beta^*\sqrt{T} & \delta^*\sqrt{R} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha\sqrt{R} & \beta\sqrt{T} \\ \gamma\sqrt{T} & \delta\sqrt{R} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

o que nos leva a

$$\begin{aligned} |\alpha|^2 R + |\gamma|^2 T &= 1, \\ |\beta|^2 T + |\delta|^2 R &= 1, \\ \alpha^* \beta + \gamma^* \delta &= 0, \\ \beta^* \alpha + \delta^* \gamma &= 0. \end{aligned} \tag{1.40}$$

Três exemplos de matrizes que representam uma transformação de um BS são:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.4.2 Divisor de feixe polarizador

O divisor de feixe polarizador (PBS - do inglês *polarizing beam splitter*) é um elemento ótico que separa as componentes \hat{e}_H , \hat{e}_V de um feixe. Alinhando a base do PBS com a horizontal, e utilizando as matrizes de Jones, podemos dizer que quando lançamos uma polarização qualquer (1.6) o PBS realiza as operações na polarização

$$Pol_{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Pol_{\mathbf{V}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sobre as componentes transmitida e refletida de um feixe, respectivamente, como na Fig. (1.8).

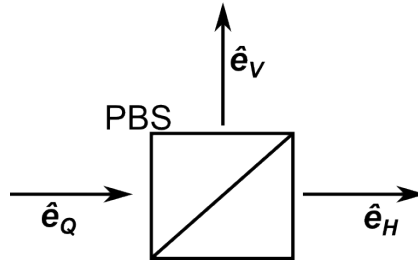


Figura 1.8: Divisor de feixe polarizador (PBS). A polarização do feixe de entrada \hat{e}_Q é dada pela equação 1.6.

1.4.3 Lâminas de meia onda

A lâmina de meia onda ($\lambda/2$) é um elemento óptico usado para manipular a polarização da luz. Ela é feita de um material birrefringente que possui índices de refração diferentes para diferentes polarizações. Isto permite que seja adicionada uma fase entre as polarizações alinhadas com os eixos da lâmina, chamados de eixo rápido e eixo lento (ortogonais entre si). Para um dado feixe incidente na lâmina de meia onda, seu vetor de polarização pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores que definem as direções do eixo rápido e do eixo lento da lâmina. Assim, a lâmina atuará de forma diferente para essas duas componentes. A componente do campo elétrico sobre o eixo lento ganhará uma fase de π com relação à outra componente, ou seja, meio comprimento de onda. Este fenômeno, em geral, altera a polarização do feixe. Além disso, uma lâmina de meia onda realiza no vetor de polarização do feixe, uma operação de paridade com relação ao seu eixo (eixo rápido). Utilizando a representação de Jones, a matriz P que descreve o funcionamento da lâmina de meia onda é:

$$P = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}, \quad (1.41)$$

onde α é ângulo do eixo lento com o plano horizontal. Como podemos ver, P não é uma matriz de rotação, pois $\det P = -1$.

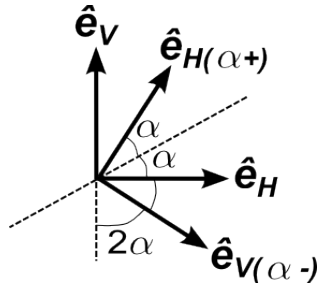


Figura 1.9: Operação de paridade de uma lâmina de meia onda.

1.4.4 Prisma de Dove

O prisma de Dove é um elemento óptico utilizado para alterar o perfil espacial do feixe, Fig. 1.10. Nele o feixe refrata na face de entrada, reflete totalmente na base do prisma e novamente é refratado, agora na face de saída. Esta sequência de fenômenos óticos no interior do prisma já nos mostra que o alinhamento do mesmo é difícil. No entanto a descrição do funcionamento do prisma de Dove é idêntica à lâmina de meia onda quando tratamos do modos transversais de 1ª ordem. Seja $\psi_h \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\psi_v \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, e D a matriz de transformação do prisma de

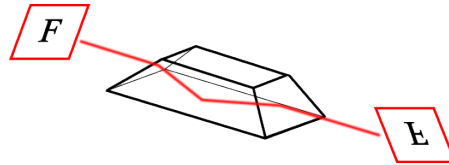


Figura 1.10: Prisma de Dove.

Dove orientado em um ângulo α com respeito a horizontal, então

$$D = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}. \quad (1.42)$$

1.4.5 Espelhos

Como sabemos, o espelho tem a propriedade de refletir uma imagem, ou LASER, ou uma luz incidente nele. Enviando a Fig. (1.11)(a) perpendicularmente ao plano do espelho, esta torna-se Fig. (1.11)(b). Identificando as direções dos vetores, vemos que apenas a componente x ou ainda *horizontal*, sobre a reflexão. Ou seja, se um feixe com polarização horizontal sobre uma

reflexão em um espelho, podemos dizer que $\hat{e}_H \Rightarrow -\hat{e}_H$. Além disso, se um feixe com modo transversal ψ_h refletiu em um espelho seu modo transversal torna-se $-\psi_h$. Podemos escrever na forma matricial, tanto para o conjunto (ψ_h, ψ_v) quanto para (\hat{e}_H, \hat{e}_V) , a transformação imposta por um espelho a esses vetores é:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.43)$$

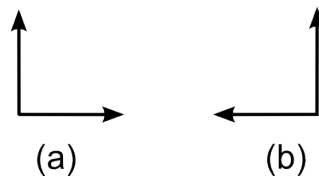


Figura 1.11: Imagens antes e depois da reflexão.

Capítulo 2

Emaranhamento

Neste capítulo apresentaremos uma breve discussão sobre a não separabilidade e o emaranhamento. Primeiramente no contexto quântico, onde o termo surgiu e em seguida nos graus de liberdade que utilizamos: polarização e função espacial do campo luminoso.

2.1 Emaranhamento

Na mecânica quântica, um sistema ou seus graus de liberdade podem ser descritos matematicamente por um espaço de Hilbert \mathcal{H} , cujos vetores representam estados possíveis para aquele sistema. Esta descrição será suficiente para discutirmos conceitos quânticos como superposição e emaranhamento.

O bem conhecido fenômeno da superposição nada mais é que a combinação linear de dois ou mais vetores pertencentes ao espaço de Hilbert. Já o emaranhamento, surge quando vamos descrever diferentes graus de liberdade de um sistema quântico, onde cada parte, por sua vez, pode ser representada por um espaço de Hilbert. Nesta descrição global utiliza-se o *produto tensorial* representado por \otimes para compor os espaços vetoriais. Vamos definir o que é emaranhamento utilizando um sistema *bipartido* \mathcal{H}_{bi} , o qual é formado por duas partes a e b , respectivamente \mathcal{H}_a e \mathcal{H}_b , onde cada parte tem dois níveis, ou seja, possui dois estados quânticos distinguíveis:

$|0\rangle_a$ e $|1\rangle_a$ para a e $|0\rangle_b$ e $|1\rangle_b$ para b .

$$\mathcal{H}_{bi} = \mathcal{H}_a \otimes \mathcal{H}_b. \quad (2.1)$$

1. Os estados quânticos descritos como $|\psi\rangle = |\psi\rangle_a \otimes |\psi\rangle_b$, com $|\psi\rangle_a = \alpha|0\rangle_a + \beta|1\rangle_a$ e $|\psi\rangle_b = \gamma|0\rangle_b + \delta|1\rangle_b$ serão chamados de estados produto ou estados separáveis, visto que são formados por um produto de um estado da parte a por outro da parte b . Exemplos:

$$|\psi\rangle_1 = \frac{|0\rangle_a \otimes |0\rangle_b + |0\rangle_a \otimes |1\rangle_b}{\sqrt{2}}, \quad |\psi\rangle_2 = |1\rangle_a \otimes |0\rangle_b \quad \text{e} \quad |\psi\rangle_3 = \frac{|0\rangle_a - \sqrt{4}|1\rangle_a}{\sqrt{5}} \otimes \frac{\sqrt{2}|0\rangle_b + |1\rangle_b}{\sqrt{3}}.$$

2. Por outro lado, define-se um estado emaranhado como sendo não separável, ou seja, ele não pode ser escrito como um produto de um estado da parte a por outro da parte b . Exemplos comuns de estados emaranhados são os estados de Bell:

$$|\psi\rangle_1 = \frac{|0\rangle_a \otimes |0\rangle_b + |1\rangle_a \otimes |1\rangle_b}{\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad |\psi\rangle_2 = \frac{|0\rangle_a \otimes |1\rangle_b + |1\rangle_a \otimes |0\rangle_b}{\sqrt{2}}.$$

O emaranhamento apresenta consequências teóricas importantes e aplicações que revolucionariam as áreas de Computação e Tecnologia da Informação. Do ponto de vista teórico, o conceito de emaranhamento representa um ponto chave sobre os fundamentos da mecânica quântica pois, como veremos mais à frente os estados de Bell violam maximamente a desigualdade de Bell.

2.2 Separabilidade spin-órbita na Ótica Clássica

Como enfatizamos na introdução deste trabalho, simplificando um pouco a notação, um feixe paraxial que se propaga na direção z pode ser representado por:

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\rho}) = (a\hat{x} + b\hat{y})\zeta(\boldsymbol{\rho}), \quad (2.2)$$

onde a e b são constantes complexas e ζ é uma função de quadrado integrável pertencente a um espaço de Hilbert $L^2(\mathbf{R}^2)$.

Podemos ver que $(a\hat{x} + b\hat{y})$ é a polarização e $\zeta(\boldsymbol{\rho})$ é a função espacial do feixe. Caso nossa atenção esteja sobre o perfil transversal do campo, podemos suprimir o termo $(a\hat{x} + b\hat{y})$ e então somos levados a uma ótica escalar, como no tratamento da equação paraxial. Caso nosso interesse seja a polarização, podemos igualmente abandonar a dependência transversal $\zeta(\boldsymbol{\rho})$, e então caímos no formalismo para ondas planas, utilizando os vetores de Jones ou os parâmetros de Stokes, como fizemos no capítulo 1. Como podemos simplificar a descrição do feixe (2.2), chamaremos todos os campos que podem ser escritos neste formato de *separáveis*, visto que, literalmente, podemos separar o tratamento para cada grau de liberdade.

Mais precisamente, podemos reescrever a eq. (2.2):

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\rho}) = \zeta_1(\boldsymbol{\rho})\hat{x} + \zeta_2(\boldsymbol{\rho})\hat{y}, \quad (2.3)$$

$\zeta_1(\boldsymbol{\rho}), \zeta_2(\boldsymbol{\rho}) \in L^2(\mathbf{R}^2)$. Observamos que se e somente se ζ_1 for proporcional - linearmente dependente - a ζ_2 então \mathbf{E} será *separável* [11]. Por outro lado, quando $\zeta_1(\boldsymbol{\rho})$ for uma função ortogonal a $\zeta_2(\boldsymbol{\rho})$ então \mathbf{E} não será separável [11]. Podemos ainda dizer, neste caso, que (2.3) é um feixe não separável pois, não podemos identificá-lo como um produto da polarização pela parte transversal.

2.3 Produção de modos espaciais

Experimentalmente, a obtenção de feixes com determinado modo transversal é feita através de máscaras de fase ou amplitude, ambas pelo fenômeno de difração, ou ainda através de conversores de modos astigmáticos. Nossa discussão será focada no primeiro item. As máscaras de fase são produzidas imprimindo-se o padrão de uma rede de difração sobre uma lâmina de vidro. Essa impressão é feita aplicando-se uma resina foto-sensível sobre a lâmina, e com o auxílio da rede de difração cujo padrão queremos imprimir, incidimos luz sobre a lâmina, de modo que somente parte dela seja corroída. Os padrões de fase ou amplitude das máscaras

utilizadas possuem um defeito topológico, como mostrado na Fig.(2.2), o qual será explorado através da difração. Para gerar cada modo transversal eletromagnético, há uma rede de difração específica. Sobre as máscaras de fase enviamos um feixe laser com perfil gaussiano, o qual deve incidir sobre o defeito topológico, e então selecionamos a primeira ordem de difração, Fig. 2.1. A ordem zero de difração não sofre alteração estrutural, mas a 1ª ordem de difração terá seu perfil transversal modificado de acordo com a máscara. A desvantagem deste método, é a

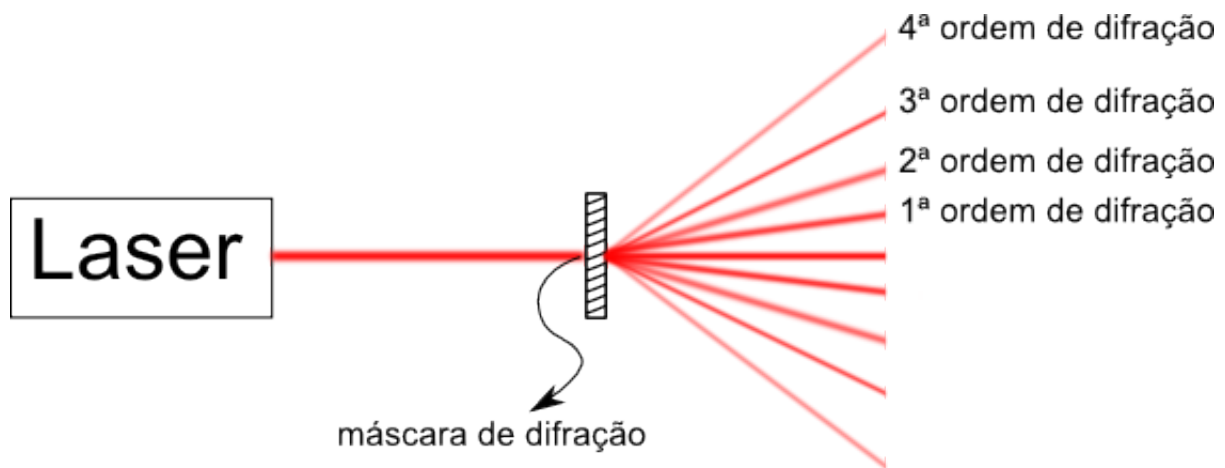


Figura 2.1: A difração de um feixe e as ordens de difração.

perda considerável de intensidade com relação ao feixe incidente. No entanto, as máscaras de fase apresentam valores de transmissividade razoavelmente maiores que as de amplitude. A 1ª

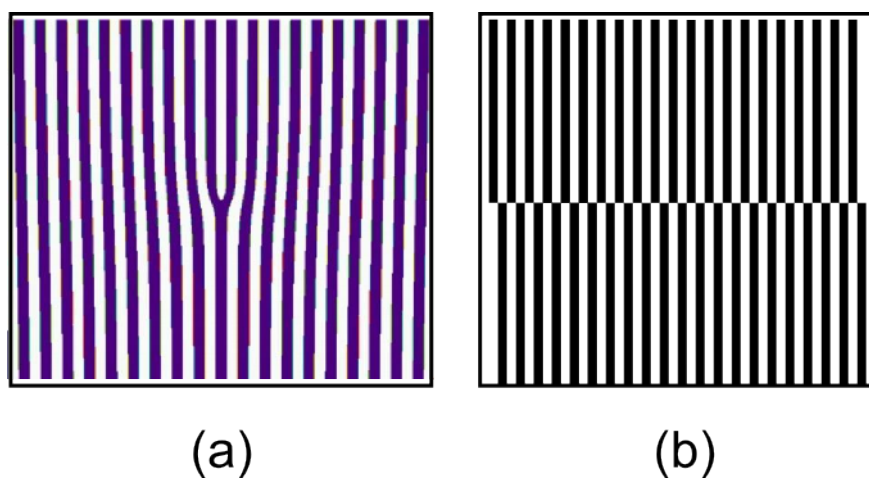


Figura 2.2: Perfil das redes de difração. (a) produz modos Laguerre-Gaussianos de 1ª ordem e (b) produz modos HG_{01} .

ordem de difração produzido pela Fig. (2.2) (a) é composta por um modo LG_{10} de um lado,

e do outro por $LG_{-1,0}$. Na Fig. (2.2), a máscara (b) produz dois spots com modo HG_{01} na 1ª ordem de difração. Dada sua simetria retangular, ao rodá-la de 90° graus, produzimos dois spots com modo HG_{10} .

Como sabemos as polarizações circulares à esquerda e à direita são associadas ao momento angular de spin dos fótons [7]. Por outro lado, os modos LG de primeira ordem possuem momento angular orbital (MAO) não nulo, visto que suas frentes de onda são helicoidais [7]. Portanto, utilizaremos o termo spin-órbita para designar a manipulação nos graus de liberdade polarização e modo transversal.

2.4 Modos spin-órbita

Como vimos no capítulo 1, os modos transversos HG_{01} e HG_{10} formam uma base para os modos transversos de 1ª ordem. Além disso, os vetores de polarização linear horizontal e vertical formam uma base para os vetores de polarização de um campo elétrico. Assim podemos combiná-los criando o que chamaremos de *modos spin-órbita* [8],[9]:

$$\Psi = \alpha \psi_h \hat{e}_H + \beta \psi_h \hat{e}_V + \gamma \psi_v \hat{e}_H + \delta \psi_v \hat{e}_V, \quad (2.4)$$

onde ψ_h (horizontal) e ψ_v (vertical) representam HG_{10} e HG_{01} , respectivamente; e \hat{e}_H (horizontal) e \hat{e}_V (vertical) são os vetores de polarização linear horizontal e vertical, respectivamente. É válido ressaltar que Ψ não é um vetor campo elétrico, mas sim um vetor unitário adimensional ($|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$):

$$\vec{E} \propto \sqrt{I} \Psi, \quad (2.5)$$

sendo I a intensidade deste campo, proporcional a $|\vec{E}|^2$.

2.4.1 Produção do modo não-separável

Para a preparação do modo não separável, enviamos um modo $\psi_v \hat{e}_H$ em uma lâmina de meia onda à 22,5° e em seguida no interferômetro do tipo Mach-Zender como na Fig. 2.3. O primeiro elemento deste dispositivo é um PBS, o qual transmite $\psi_v \hat{e}_H$ e reflete $\psi_v \hat{e}_V$ que por

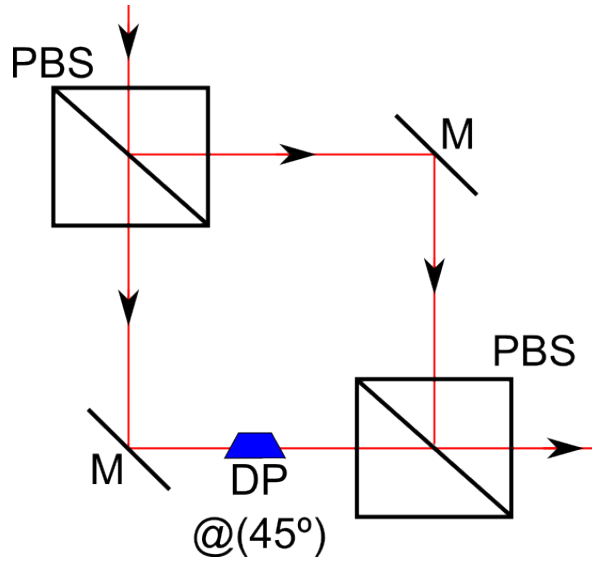


Figura 2.3: Produção do modo não separável.

sua vez passa por um prisma de Dove orientado à 45° com respeito a horizontal, transformando ψ_v em ψ_h . Em seguida, os modos $\psi_v \hat{e}_H$ e $\psi_h \hat{e}_V$ são recombinados em um PBS formando

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_h(\vec{r}) \hat{e}_V + \psi_v(\vec{r}) \hat{e}_H].$$

Como podemos ver, a produção do modo não separável é similar a construção de um modo emaranhado em um sistema bipartido de dois níveis. Aqui a lâmina de onda a $22,5^\circ$ faz o papel da porta Hadamard e o interferômetro o papel de uma porta C-NOT.

2.5 Padrões de polarização

Os campos da forma (2.2), que apresentam a e b como constantes complexas são ditos *separáveis*. Além disso, para um feixe (2.3) não separável, não é possível atribuímos um estado de polarização bem determinado pois a parte transversal do campo está conectada aos vetores de polarização. No entanto, se analisarmos o caráter vetorial do campo, podemos observar, padrões de polarização. Comparando as equações (2.2), (2.3), vemos que $\zeta_1(\boldsymbol{\rho})$, $\zeta_2(\boldsymbol{\rho})$ em (2.3), fazem o papel de a e b em (2.2). Assim, podemos dizer, que um feixe não separável possui uma polarização não homogênea [11], ou seja, dependente das coordenadas transversais.

2.5.1 Polarização radial e azimutal

Como sabemos, o polinômio de Hermite de grau 1 é: $H_1(x) = 2x$. Assim, apresentaremos os modos Hermite-Gaussianos de 1ª ordem como:

$$\begin{aligned}\psi_h &\propto x e^{-x^2-y^2}, \\ \psi_v &\propto y e^{-x^2-y^2}.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Além disso, usaremos $\hat{e}_H = \hat{x}$ e $\hat{e}_V = \hat{y}$. Sendo assim, analisaremos simplificadamente a

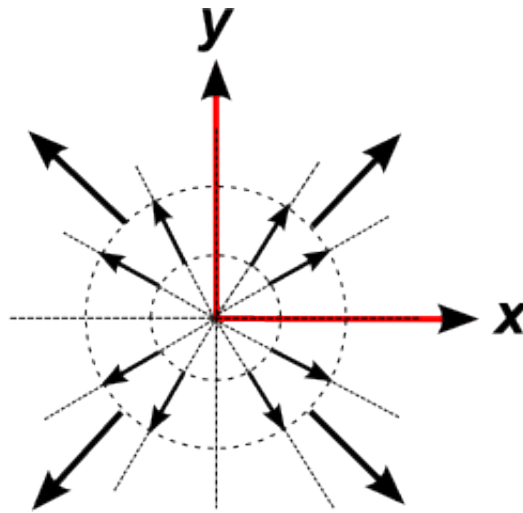


Figura 2.4: Campo vetorial radial.

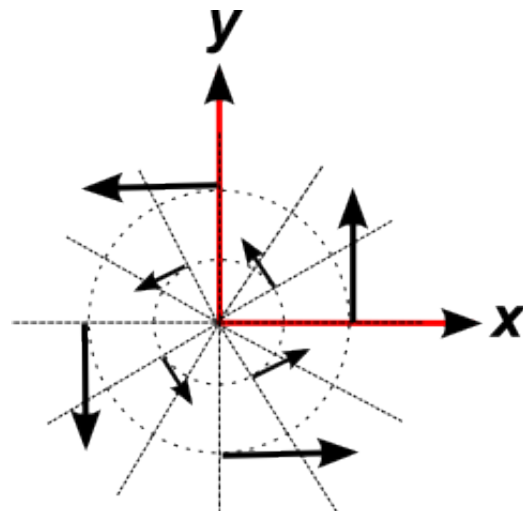


Figura 2.5: Campo vetorial azimutal.

estrutura dos modos não separáveis

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_h \hat{e}_H + \psi_v \hat{e}_V] \quad e \quad (2.7)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_h \hat{e}_V - \psi_v \hat{e}_H]. \quad (2.8)$$

Omitindo-se o termo gaussiano $e^{-x^2-y^2}$ e o fator $1/\sqrt{2}$ do modo (2.7), teremos:

$$\psi_h \hat{e}_H + \psi_v \hat{e}_V \propto x\hat{x} + y\hat{y} \equiv \boldsymbol{\rho}. \quad (2.9)$$

Portanto, podemos dizer que o modo (2.7) apresenta uma polarização radial (não homogênea), Fig 2.4. De fato, para cada ponto ρ transversal ao feixe, teremos uma “polarização” na direção $\hat{\rho}$. Da mesma forma, para o modo (2.8), temos:

$$\psi_h \hat{e}_V - \psi_v \hat{e}_H \propto x\hat{y} - y\hat{x} = \cos\phi\hat{y} - \sin\phi\hat{x} \equiv \rho\hat{\phi}. \quad (2.10)$$

Logo, o modo (2.8) apresenta uma polarização azimutal, Fig. 2.5.

Hoje, já existe um produto no mercado que se propõe a criar uma polarização radial. Chama-se *S-plate*. Quando transmitimos um feixe gaussiano através desse elemento ótico, com uma eficiência de 50% ele cria um feixe radialmente polarizado, que é o modo (2.7).

2.6 Teste com um modo não separável

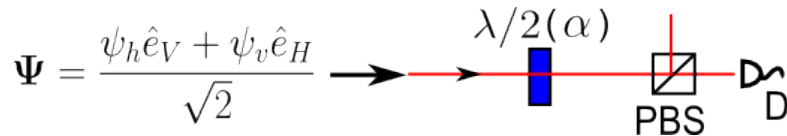


Figura 2.6: Esquema experimental do teste com o modo não separável.

Realizamos um teste no modo não-separável buscando avaliar sua produção, como representado na Fig. 2.6. Lançando o modo $\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_h \hat{e}_V - \psi_v \hat{e}_H]$ em uma lâmina de meia onda,

e isolando os vetores \hat{e}_H e \hat{e}_V obtemos:

$$\Psi = \frac{\hat{e}_H}{\sqrt{2}} (\sin \alpha \psi_v - \cos \alpha \psi_h) + \frac{\hat{e}_V}{\sqrt{2}} (\cos \alpha \psi_v + \sin \alpha \psi_h). \quad (2.11)$$

Como podemos ver, cada componente de polarização possui um modo transversal HG de 1ª ordem rodado de um $+\alpha$ e $-\alpha$. Portanto separando as componentes de polarização do feixe com um PBS, devemos observar um modo HG girando de acordo com a orientação da lâmina de meia onda. Caso os dois braços do interferômetro de preparação não estiverem bem alinhados, não seremos capazes.

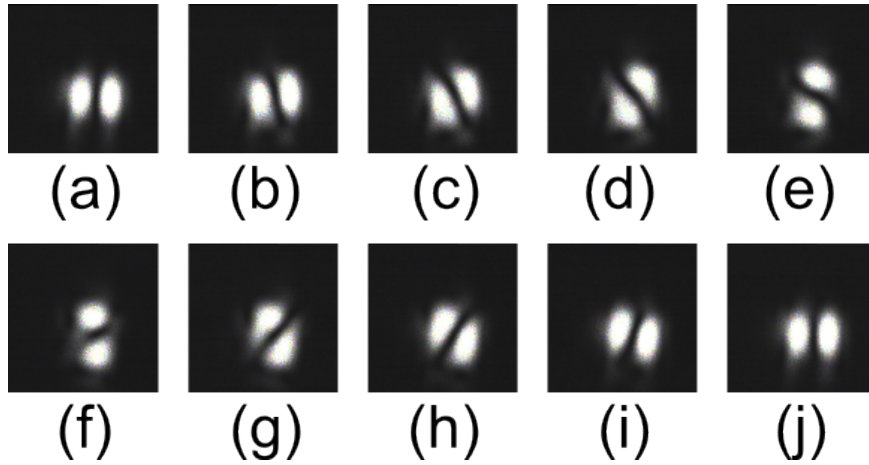


Figura 2.7: Modos transversais rodados de acordo com a orientação da lâmina de meia onda ($\lambda/2$): (a) $\lambda/2$ a 0° , (b) $\lambda/2$ a 10° , (c) $\lambda/2$ a 20° , (d) $\lambda/2$ a 30° , (e) $\lambda/2$ a 40° , (f) $\lambda/2$ a 50° , (g) $\lambda/2$ a 60° , (h) $\lambda/2$ a 70° , (i) $\lambda/2$ a 80° e (j) $\lambda/2$ a 90° , observando-se apenas o feixe transmitido pelo PBS, com polarização horizontal.

Capítulo 3

Interferômetro Sagnac

Neste capítulo descreveremos um seletor de modos spin-órbita de 1ª ordem baseado um interferômetro do tipo Sagnac construído no Laboratório de Ótica Quântica. Contudo, descreveremos também um interferômetro Mach-Zender apresentado por H. Sasada e M. Okamoto [6], com um espelho adicional o qual motiva a busca pela geometria de um interferômetro Sagnac.

Mostraremos que alguns elementos óticos atuarão somente na polarização, enquanto outros na função espacial do feixe e ainda alguns atuaram em ambos. Representaremos a atuação de cada elemento na base spin-órbita, $\{\psi_h, \psi_v\} \otimes \{\hat{e}_H, \hat{e}_V\}$.

3.0.1 Interferômetro Mach-Zender

Como na Fig. (3.1), a porta de entrada deste interferômetro é um divisor de feixe 50/50, onde o feixe de entrada Ψ_{in} foi dividido em duas partes : Ψ_{sh} (sentido horário) e Ψ_{ah} (sentido anti-horário), com $\Psi_{ah} = -i\Psi_{sh} = \Psi_{in}\sqrt{2}$, segundo um BS da forma $\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$. Após o primeiro BS, o braço ah sofre duas reflexões antes de chegar ao segundo BS, enquanto o braço sh sofre apenas uma. No entanto nada garante que os dois feixes chegarão no BS de saída em fase, percorrendo o mesmo caminho ótico. Por isso coloca-se uma placa de vidro (PV) inclinada e ajustável no braço sh .

Assim, como vimos no capítulo 1, o espelho modifica tanto o vetor de polarização horizontal \hat{e}_H quanto o modo Hermite-Gaussiano horizontal ψ_h , adicionando a estes uma fase π , além de

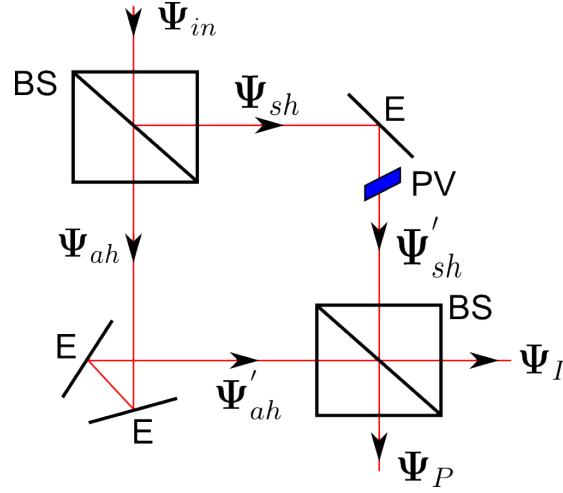


Figura 3.1: Interferômetro Mach-Zender com um espelho adicional.

deixar \hat{e}_V e ψ_v inalterados introduzindo a transformação $U_m \otimes U_M$:

$$\begin{aligned}
 U_m \psi_h &= -\psi_h, \\
 U_m \psi_v &= \psi_v, \\
 U_M \hat{e}_H &= -\hat{e}_H, \\
 U_M \hat{e}_V &= \hat{e}_V.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Note que dupla reflexão resulta na identidade, uma vez que $(U_m \otimes U_M)^2 = \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}$. Então podemos escrever Ψ'_{sh} e Ψ'_{ah} como:

$$\begin{aligned}
 \Psi'_{sh} &= e^{i\phi} (U_m \otimes U_M) \Psi'_{sh}, \\
 \Psi'_{ah} &= \Psi_{ah},
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde $e^{i\phi}$ é a diferença de fase entre os dois caminhos ajustável pela placa de vidro. Quando $\phi = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ a escolha dos sub-índices de Ψ_P, Ψ_I se justifica pois, neste caso as componentes pares de Ψ_{in} , $(\psi_h \hat{e}_H, \psi_v \hat{e}_V)$, estarão no modo de saída Ψ_P , enquanto as componentes ímpares $(\psi_h \hat{e}_V, \psi_v \hat{e}_H)$ no modo de saída Ψ_I .

No entanto, o controle de ϕ através de uma placa de vidro apresenta grandes dificuldades experimentais em um interferômetro do tipo Mach-Zender. Por isso utiliza-se uma cerâmica

piezo-elétrica presa a um dos espelhos, que fornece um ajuste muito mais preciso. Porém, ainda assim, interferômetros do tipo Mach-Zender apresentam uma flutuação em seu alinhamento, ou seja, eles perdem o alinhamento com o tempo e por isso, diz-se que estes não são robustos. Por outro lado, o interferômetro desenvolvido por Georges Sagnac em 1838 não apresenta esta dificuldade experimental. De fato, interferômetros que apresentam a geometria do tipo Sagnac são mais robustos. Podemos ver na Fig. (3.2), que em uma construção comum deste

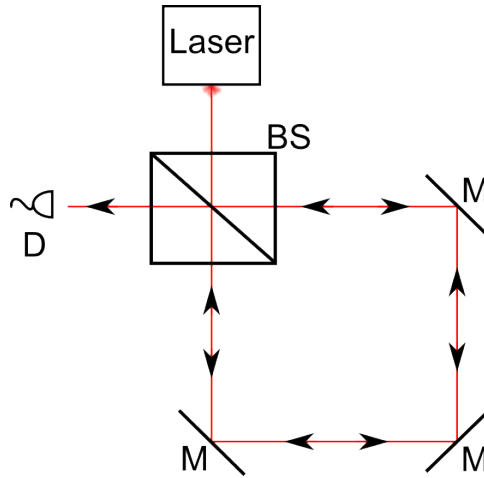


Figura 3.2: Interferômetro Sagnac

interferômetro os feixes passam pelos mesmos elementos óticos além de percorrerem o mesmo caminho ótico.

Por isso, na próxima seção apresentaremos com mais detalhe um interferômetro do tipo Sagnac que funciona da mesma maneira que o dispositivo proposto por H. Sasada e M. Okamoto.

3.0.2 Interferômetro Sagnac

Como em Fig. 3.3, a porta de entrada e saída do interferômetro é um divisor de feixe 50/50, onde o feixe de entrada Ψ_{in} foi dividido em duas partes contrapropagantes: Ψ_{sh} (sentido horário) e Ψ_{ah} (sentido anti-horário), com $\Psi_{ah} = -i\Psi_{sh} = \Psi_{in}\sqrt{2}$. Uma lâmina birrefringente de meia onda foi inserida no caminho que se propaga no sentido horário e um prisma de Dove naquele que se propaga no sentido anti-horário, ambos orientados na horizontal (0°), afim de tornar o interferômetro um seletor de paridade spin-órbita. Como veremos, os modos pares $\psi_h\hat{e}_H$ e $\psi_v\hat{e}_V$ sairão por uma porta do interferômetro, enquanto os modos ímpares $\psi_h\hat{e}_V$ e

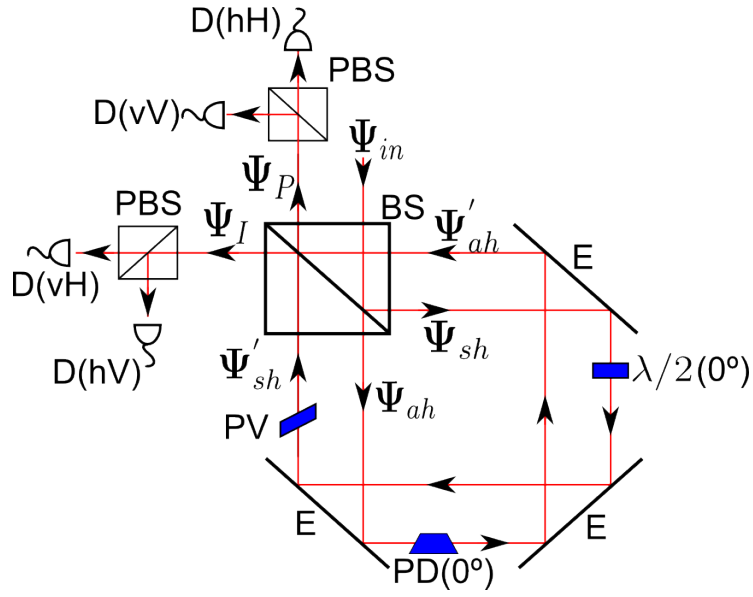


Figura 3.3: Interferômetro Sagnac como seletor de paridade.

$\psi_v \hat{e}_H$ sairão por outra. Além disso, a lâmina birrefringente de meia onda adiciona uma fase π entre \hat{e}_H e \hat{e}_V , e o prisma de Dove, por sua vez, faz o mesmo com ψ_h e ψ_v . A adição destes elementos muda o caminho óptico dos feixes. Para equiparar a defasagem entre os dois braços utilizamos uma placa de vidro inclinada e ajustável, que não altera nem a polarização nem o perfil transversal do feixe.

A lâmina de meia onda age apenas nos vetores de polarização, por isso sua transformação será da forma $\mathbb{1} \otimes U_{\lambda/2}$. Seguindo a equação (1.41) do capítulo 1, temos

$$\begin{aligned} U_{\lambda/2} \hat{e}_H &= \hat{e}_H, \\ U_{\lambda/2} \hat{e}_V &= -\hat{e}_V. \end{aligned} \quad (3.3)$$

O prisma de Dove, por outro lado, atua somente nas funções espaciais com a seguinte transformação: $U_{Dove} \otimes \mathbb{1}$; embora de maneira similar à lâmina de meia onda,

$$\begin{aligned} U_{Dove} \psi_h &= \psi_h, \\ U_{Dove} \psi_v &= -\psi_v. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Sendo assim, ao conjunto total das transformações será contabilizada uma diferença de fase

ϕ entre os dois braços, a ser controlada pela inclinação da lâmina de vidro:

$$\begin{aligned}\Psi'_{\text{sh}} &= e^{i\phi} \left(\mathbb{1} \otimes U_{HWP} \right) \left(U_m \otimes U_M \right) \Psi_{\text{sh}} , \\ \Psi'_{\text{ah}} &= \left(U_{Dove} \otimes \mathbb{1} \right) \left(U_m \otimes U_M \right) \Psi_{\text{ah}} ,\end{aligned}\quad (3.5)$$

Note que novamente duplas reflexões foram ignoradas.

Portanto, a combinação desses modos no BS criará os modos de saída, que serão nomeados como pares (P) e ímpares (I):

$$\begin{aligned}\Psi_{\text{P}} &= \frac{\Psi'_{\text{sh}} + i\Psi'_{\text{ah}}}{\sqrt{2}}, \\ \Psi_{\text{I}} &= \frac{i\Psi'_{\text{sh}} + \Psi'_{\text{ah}}}{\sqrt{2}}.\end{aligned}\quad (3.6)$$

Podemos conectar os modos de entrada e saída do interferômetro na base $\{\psi_h \hat{e}_H, \psi_h \hat{e}_V, \psi_v \hat{e}_H, \psi_v \hat{e}_V\}$ pela transformação M_j ($j = P, I$), $\Psi_j = M_j \Psi_{\text{in}}$, ou em notação matricial, $(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j)^T = M_j (\alpha_{\text{in}}, \beta_{\text{in}}, \gamma_{\text{in}}, \delta_{\text{in}})^T$, onde

$$M_P = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} e^{i\phi} + 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{i\phi} + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{i\phi} - 1 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

e

$$M_I = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{i\phi} - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} + 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{i\phi} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{i\phi} + 1 \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Como podemos ver, $\beta_P = \gamma_P = 0$, $\alpha_I = \delta_I = 0$ quando ajustamos $\phi = 0$. E assim para um modo spin-órbita Ψ_{in} arbitrário, o interferômetro separará as componentes pares das ímpares. Caso $\phi = \pi$, então as portas de saída serão trocadas. Cada um dos modos de saída ainda passará por um PBS, discriminando assim as polarizações horizontais das verticais, e conseqüentemente as

quatro componentes da base.

3.1 Resultados experimentais

Apresentaremos aqui 3 conjuntos de resultados que mostram que o interferômetro Sagnac desenvolvido funciona como na descrição feita na seção anterior [10]. Como vimos, para cada feixe de entrada observaremos quatro resultados, os quais foram registrados com uma câmera CCD. Além disso, medidores de intensidade e um osciloscópio aferiram resultados quantitativos a respeito da *visibilidade* do dispositivo. Em todos os casos utilizamos um feixe LASER He-Ne ($\lambda = 632,8\text{nm}$).

Primeiramente enviamos os quatro elementos da base individualmente, pois neste caso, apenas uma das quatro portas de saída do interferômetro estaria acesa. Além deste ser o teste mais simples, um bom resultado aqui nos mostra o funcionamento adequado do dispositivo. Os modos cuja função espacial $\psi_v = HG_{01}$ foram obtidos incidindo um feixe gaussiano na máscara de fase que aparece na Fig. (2.2)(b). Para os modos $\psi_h = HG_{10}$ repetimos o mesmo processo supracitado e incluímos um prisma de Dove orientado a 45° com a horizontal, que transforma ψ_v em ψ_h . Além disso, a escolha da polarização do modo foi feita com uma lâmina de meia onda. As intensidades dos feixes nas portas acesas ficaram entre 79% e 92% do total das

$\Psi_{in} \backslash D$	hH	hV	vH	vV
$\psi_h \hat{e}_H$				
$\psi_h \hat{e}_V$				
$\psi_v \hat{e}_H$				
$\psi_v \hat{e}_V$				

Figura 3.4: Imagens das 4 saídas para cada um dos 4 modos da base

intensidades de saída. Depois, um conjunto de diferentes feixes de entrada com perfis espaciais e polarizações diferentes foram enviados ao interferômetro. Começamos enviando um feixe com

perfil transverso Laguerre-Gaussiano de 1ª ordem, gerado enviando-se um feixe gaussiano na máscara de fase que aparece na Fig. (2.2)(a). Como vimos no capítulo 1, os modos Laguerre-Gaussianos não são auto-funções da base de medida:

$$\psi_r \hat{e}_\sigma = \left(\frac{\psi_h + i\psi_v}{\sqrt{2}} \right) \hat{e}_\sigma. \quad (3.9)$$

$\sigma = H, V$. As duas primeiras linhas da Fig. 3.5 mostram os modos Laguerre-Gaussianos decompostos em modos Hermite-Gaussianos horizontal e vertical. As intensidades dos feixes nas portas acesas ficaram entre 41% e 57% do total das intensidades de saída.

$\Psi_{in} \backslash D$	hH	hV	vH	vV
$\psi_r \hat{e}_H$				
$\psi_r \hat{e}_V$				
$\psi_h \hat{e}_+$				
$\psi_v \hat{e}_+$				
$\psi_r \hat{e}_+$				
Ψ_{ent}				

Figura 3.5: Imagem de diferentes modos de entrada decompostos

Posteriormente, enviamos cada modo espacial da base de medida com um vetor de polarização inclinado a 45° com respeito à horizontal:

$$\psi_\sigma \hat{e}_+ = \psi_\sigma \left(\frac{\hat{e}_V + \hat{e}_H}{\sqrt{2}} \right). \quad (3.10)$$

$\sigma = h, v$. A 3ª e a 4ª linha mostram a decomposição do modo de polarização nos vetores de polarização linear horizontal e vertical. As intensidades dos feixes nas portas acesas ficaram entre 41% e 50% do total das intensidades de saída.

Em seguida, enviamos um modo Laguerre-Gaussiano com polarização à 45° , que é uma combinação de todos elementos da base,

$$\psi_r \hat{e}_+ = \left(\frac{\psi_h + i\psi_v}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\hat{e}_V + \hat{e}_H}{\sqrt{2}} \right). \quad (3.11)$$

Na penúltima linha da imagem vemos que todas as saídas do interferômetro estavam acesas e suas intensidades ficaram entre 19% e 28% do total das intensidades de saída.

Por fim, enviamos um modo não separável,

$$\Psi_{\text{ent}} = \frac{\psi_h \hat{e}_V + \psi_v \hat{e}_H}{\sqrt{2}} \quad (3.12)$$

o qual também foi decomposto corretamente como mostra a última linha da figura. As intensidades dos feixes nas portas acesas ficaram entre 51% e 44% do total das intensidades de saída. A preparação do modo não-separável está descrita no capítulo anterior.

Capítulo 4

Desigualdade de Bell

4.1 Desigualdade de Bell

Em 1935, Einstein, Podolsky e Rosen publicaram um artigo no qual questionam a validade da Mecânica Quântica (MQ) [15], indicando que esta não possui “elementos de realidade”, ou seja, os objetos físicos possuem propriedades independentes do processo de medida (realismo) e que a medida feita por dois observadores diferentes não podem se interferir mutuamente caso não haja troca de informação entre as partes do sistema ou dos observadores (localidade). Lá, *Einstein et al.* propõem um “gedakenexperiment” (experimento pensado) onde ficaria provado que a MQ é uma teoria incompleta.

Posteriormente, foi proposto que utilizando-se um conjunto de *variáveis ocultas* - que não pertencem ao formalismo da MQ - seria possível obter-se os resultados da MQ com uma teoria real e local.

Seguindo esta linha de raciocínio, J. S. Bell publicou um artigo [12] em 1964 onde demonstra que através de teorias baseadas em *variáveis ocultas*, as grandezas físicas mensuráveis obedecem a uma desigualdade, posteriormente chamada de desigualdade de Bell. Com auxílio destas desigualdades tornou-se possível quantificar os resultados previstos por teorias baseadas em variáveis ocultas.

Contudo, a partir de 1971, experimentos mostraram que a natureza não obedece a desigualdade de Bell [14]. Neste cenário, os estados de Bell exerceram, e exercem ainda hoje, grande

importância, visto que estes violam maximamente estas desigualdades.

4.2 Desigualdade CHSH

Aqui, trataremos de um modelo para esta desigualdade conhecido como desigualdade C.H.S.H. proposto em 1969 por Clauser, Horne, Shimony e Holt [13]. Nele, duas partículas de spin $1/2$ são necessárias. Com o auxílio de um Stern-Gerlach mede-se a componente de momento angular numa dada base, \hat{S}_z ou \hat{S}_x , por exemplo, e como sabemos nessa medida podemos obter 2 valores, $\hbar/2$ ou $-\hbar/2$; de maneira mais simplificada: $+1$ ou -1 .

Assim, podemos medir o momento angular nas direções \mathbf{a}_1 e \mathbf{a}_2 na 1ª partícula, obtendo $A_1, A_2 = \pm 1$ respectivamente, e nas direções \mathbf{b}_1 e \mathbf{b}_2 na 2ª, com $B_1, B_2 = \pm 1$. De posse dos valores possíveis de cada medida, vamos analisar a quantidade $A_1B_1 + A_1B_2 - A_2B_1 + A_2B_2 = A_1(B_1 + B_2) + A_2(-B_1 + B_2)$ [17]. Como podemos ver, ou $(B_1 + B_2) = 0$ ou $(-B_1 + B_2) = 0$. Consequentemente obteremos

$$A_1B_1 + A_1B_2 - A_2B_1 + A_2B_2 = \pm 2. \quad (4.1)$$

Seja $M(\hat{A}, \hat{B}) = \langle \hat{A} \rangle \langle \hat{B} \rangle$, onde \hat{A}, \hat{B} é a projeção do momento angular na direção \mathbf{a}, \mathbf{b} , respectivamente, e além disso o operador \hat{A} atua somente na partícula 1 e \hat{B} somente na partícula 2. Podemos definir uma quantidade S como:

$$S = M(\hat{A}_1, \hat{B}_1) + M(\hat{A}_1, \hat{B}_2) - M(\hat{A}_2, \hat{B}_1) + M(\hat{A}_2, \hat{B}_2). \quad (4.2)$$

De maneira análogo a (4.1) obteremos a desigualdade CHSH $-2 \leq S \leq 2$.

Experimentalmente, define-se $P_{i,j}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ como a probabilidade de medirmos i na base \mathbf{a} e j na base \mathbf{b} , onde $i, j = \pm$. Assim, teremos 4 combinações possíveis: $P_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $P_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $P_{--}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ e $P_{-+}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Então

$$\begin{aligned} M(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= P_{++}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + P_{--}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P_{+-}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P_{-+}(\mathbf{a}, \mathbf{b}), \\ S &= M(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) + M(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2) - M(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) + M(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2), \end{aligned} \quad (4.3)$$

De fato, estados separáveis de 2 spins 1/2 obedecem a desigualdade CHSH. No entanto, $S = 2\sqrt{2}$ para um estado maximamente emaranhado de 2 spins 1/2 [17].

4.3 Bases rodadas

Como vimos no capítulo 2, possuímos um interferômetro capaz de decompor um modo spin-órbita na base $(\psi_h, \psi_v) \otimes (\hat{e}_H, \hat{e}_V)$. Além disso, no mesmo capítulo vimos como construir um modo spin orbita não-separável. Portanto, inspirados na desigualdade CHSH, reescreveremos a mesma utilizando a polarização e os modos transversais como graus de liberdade [8].

Ao invés de girarmos o interferômetro com respeito ao feixe, as escolhas da base de medida serão feitas com o auxílio de uma lâmina de meia onda rodada de um ângulo α para a polarização e um prisma de Dove rodado de um ângulo β para os modos espaciais, de acordo com as relações abaixo:

$$\begin{aligned}
\hat{e}_{\alpha+} &= \cos \alpha \hat{e}_V + \sin \alpha \hat{e}_H, \\
\hat{e}_{\alpha-} &= \sin \alpha \hat{e}_V - \cos \alpha \hat{e}_H, \\
\psi_{\beta+}(\vec{r}) &= \cos \beta \psi_v(\vec{r}) + \sin \beta \psi_h(\vec{r}), \\
\psi_{\beta-}(\vec{r}) &= \sin \beta \psi_v(\vec{r}) - \cos \beta \psi_h(\vec{r}).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Lançando o modo emaranhado $\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_h \hat{e}_V + \psi_v \hat{e}_H]$ na lâmina de onda e no prisma de Dove, temos:

$$\begin{aligned}
\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ & [\sin \beta \psi_{\beta+}(\vec{r}) - \cos \beta \psi_{\beta-}(\vec{r})] [\cos \alpha \hat{e}_{\alpha+} + \sin \alpha \hat{e}_{\alpha-}] + \\
& [\cos \beta \psi_{\beta+}(\vec{r}) + \sin \beta \psi_{\beta-}(\vec{r})] [\sin \alpha \hat{e}_{\alpha+} - \cos \alpha \hat{e}_{\alpha-}] \},
\end{aligned}$$

ou ainda:

$$\begin{aligned}
\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ & \psi_{\beta+}(\vec{r}) \hat{e}_{\alpha+} [\sin(\alpha + \beta)] + \psi_{\beta+}(\vec{r}) \hat{e}_{\alpha-} [-\cos(\alpha + \beta)] + \\
& \psi_{\beta-}(\vec{r}) \hat{e}_{\alpha+} [-\cos(\alpha + \beta)] + \psi_{\beta-}(\vec{r}) \hat{e}_{\alpha-} [-\sin(\alpha + \beta)] \}.
\end{aligned}$$

Seja $I_{(\pm)(\pm)}(\alpha, \beta)$ o quadrado da amplitude $\psi_{(\pm)}(\vec{r})\hat{e}_{(\pm)}$, componente de Ψ na base rodada. De maneira análoga a desigualdade CHSH da mecânica quântica para duas partículas de spin 1/2 (4.3), podemos escrever:

$$M(\alpha, \beta) = I_{++}(\alpha, \beta) + I_{--}(\alpha, \beta) - I_{+-}(\alpha, \beta) - I_{-+}(\alpha, \beta) = -\cos[2(\alpha + \beta)], \quad (4.5)$$

$$S = M(\alpha_1, \beta_1) + M(\alpha_1, \beta_2) - M(\alpha_2, \beta_1) + M(\alpha_2, \beta_2). \quad (4.6)$$

Para qualquer estado separável obtemos $-2 \leq S \leq 2$. No entanto, para o estado não-separável em questão, escolhendo-se $\alpha_1 = 3\pi/8$, $\alpha_2 = \pi/8$, $\beta_1 = 0$ e $\beta_2 = \pi/4$ teremos $S = 2\sqrt{2}$.

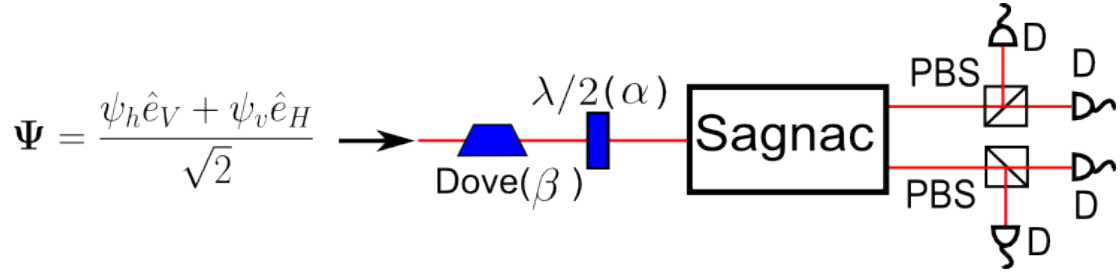


Figura 4.1: Esquema para a medida da desigualdade CHSH de um modo spin-órbita não separável.

4.4 Resultados preliminares

Posicionando um prisma de Dove e uma lâmina de meia onda após o interferômetro de preparação do modo emaranhado e antes do interferômetro Sagnac podemos escolher os valores de (α, β) para a medida de Bell. Os 4 valores $I_{(\pm)(\pm)}(\alpha, \beta)$ possíveis são identificados cada um como uma fração parcial das amplitudes de campo medidas nas quatro saídas do interferômetro Sagnac. Escolher $\beta_1 = 0$ apresenta uma vantagem experimental, pois neste caso, não inserir o prisma de Dove é equivalente a ignorar o sinal negativo em ψ_h devida à inserção do prisma a 0° . E com essa construção conseguimos os valores de $M(\frac{\pi}{8}, 0)$ e $M(\frac{3\pi}{8}, 0)$:

$$\begin{aligned} M\left(\frac{\pi}{8}, 0\right) &= 0,672, \\ M\left(\frac{3\pi}{8}, 0\right) &= 0,549, \end{aligned}$$

onde os valores teóricos para $M\left(\frac{\pi}{8}, 0\right)$ e $M\left(\frac{3\pi}{8}, 0\right)$ são $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$. Os valores M com prisma de Dove orientado a 45° não foram obtidos. No entanto, se esses dois valores se repetirem, teremos $S \approx 2,4$.

4.5 O prisma de Dove

O funcionamento do prisma de Dove, como descrito no capítulo 1, apresenta algumas modificações com respeito ao seu funcionamento real. De fato, o prisma de Dove não altera única e exclusivamente o modo espacial do feixe, mas de acordo com sua orientação este também pode, mesmo que pouco, mudar a polarização do feixe.

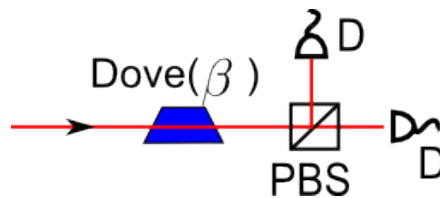


Figura 4.2: Esquema para medir a mudança na polarização em um feixe devido ao prisma de Dove.

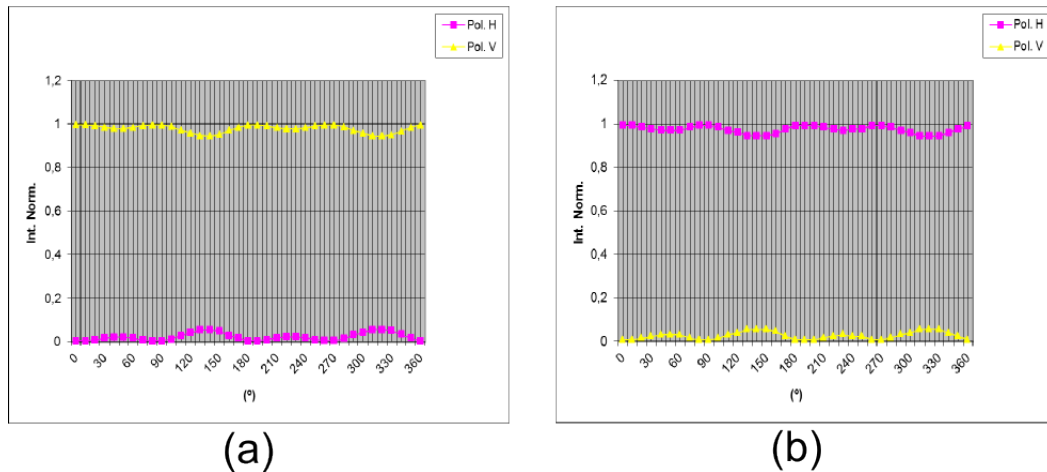


Figura 4.3: Gráficos de medida de intensidade normalizada obtidas a partir do teste representado pela Fig. 4.2: (a) feixe de entrada com polarização \hat{e}_V , (b) feixe de entrada com polarização \hat{e}_H .

Em [16], *Moreno et al.* apresentam o real comportamento do prisma através dos parâmetros de Stokes, visto que este elemento óptico transforma polarização linear em elíptica na maioria dos casos.

Obtivemos alguns dos resultados daquele artigo implementando lançando um feixe polarizado um prisma de Dove, livre para girar, seguido por um PBS Na Fig. (4.3)(a), lançamos um feixe com polarização horizontal, e em (4.3)(b) vertical. Como vemos, de acordo com o ângulo que o prisma de Dove foi rodado obtemos diferentes valores para as componentes horizontal e vertical do feixe. Unindo-se os gráfico da Fig. (4.3), obtemos (4.4).

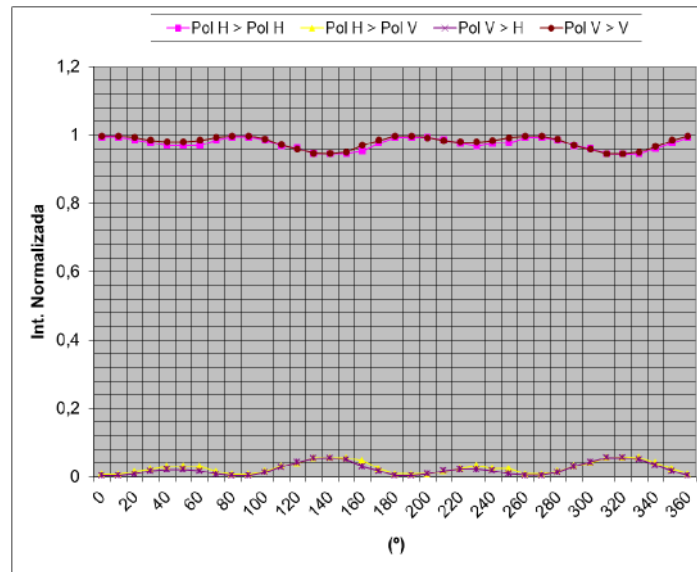


Figura 4.4: Gráfico obtido unindo-se os gráficos da Fig. 4.3.

Contudo, tomamos o efeito do prisma de Dove na polarização como erro experimental em nosso resultados.

Conclusão e perspectivas

Neste trabalho, fomos capazes de produzir um interferômetro do tipo Sagnac, que decompõe um feixe na base spin-órbita, proposto pela professora Malena Osorio Hor-Meyll da UFRJ. A descrição da polarização e do modo transversal eletromagnético de um feixe é idêntica a

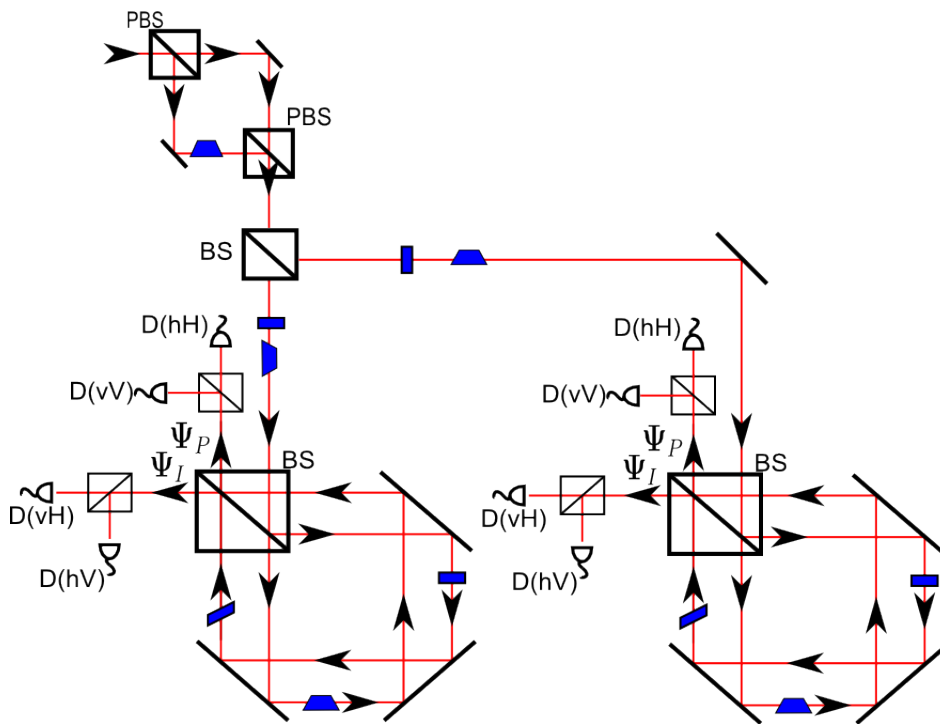


Figura 4.5: Esquema experimental: utilizando um interferômetro de preparação Mach-Zender e dois interferômetros de medida Sagnac.

descrição de um sistema bipartido da Mecânica Quântica. Por isso, realizar uma desigualdade de Bell para um feixe LASER torna-se uma tarefa interessante.

Futuramente, pretendemos finalizar a medida da desigualdade de Bell e superar as dificuldades experimentais relativas ao prisma de Dove. Uma proposta para realizar este experimento é utilizar dois interferômetros do tipo Sagnac na medida da base spin-órbita, como na Fig. 4.5.

Com esta construção pretendemos facilitar a medida.

Por outro lado, um sistema bipartido de 2 níveis é o mais simples possível onde podemos observar fenômenos quânticos. Por isso, vemos na literatura construções como violação da desigualdade de Bell, testemunhas de emaranhamento, testemunhas de classicalidade, e etc utilizando sistemas bipartidos.

No entanto, com nossas discussões sobre a desigualdade de Bell não pretendemos trazer conceitos quântico, como emaranhamento ou não localidade, para a física clássica. Pretendemos, com nossos experimentos compreender melhor os conceitos quânticos.

Anexo - Trabalho publicado

Spin-orbit mode selection with a modified Sagnac interferometer

A. R. Vieira,¹ M. Hor-Meyll,² and A. Z. Khoury^{1,*}

¹Instituto de Física, Universidade Federal Fluminense, Niterói 24210-346, Brazil

²Instituto de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro 21941-972, Brazil

*Corresponding author: khoury@if.uff.br

Received February 1, 2013; revised April 3, 2013; accepted April 19, 2013;

posted April 19, 2013 (Doc. ID 184661); published May 22, 2013

We report on a modified Sagnac interferometer used to sort spin-orbit modes of a paraxial beam. The interferometer works as a parity sorter and can be useful for quantum information protocols. The geometry used benefits from phase stability and allows for independent manipulation of the interfering beams. © 2013 Optical Society of America

OCIS codes: (270.5585) Quantum information and processing; (270.5565) Quantum communications.
<http://dx.doi.org/10.1364/JOSAB.30.001623>

1. INTRODUCTION

In the recent years, we have witnessed a considerable development of techniques to encode and manipulate quantum information in optical systems. The use of polarization modes as a qubit realization has become trivial, and a huge literature has been devoted to this subject [1]. Moreover, interesting perspectives are brought into scene when polarization modes are combined with the transverse spatial profile of paraxial beams. In particular, another qubit structure can be identified in the subspace of first-order solutions of the paraxial wave equation [2], where the role of linear polarization is played by Hermite–Gaussian modes while circular polarization is represented by Laguerre–Gaussian modes with helical wavefronts [3,4]. This double photonic qubit realization has led to a number of contributions, including spin-orbit couplers [5–8], topological phases [9], alignment-free quantum cryptography [10], Bell inequality [11,12], and reservoir-induced entanglement [13]. The combination of polarization and transverse structure has also led to important developments in connection with quantum-correlated photon pairs generated by parametric down conversion. In this matter we may quote polarization-controlled quantum images [14,15], hybrid entanglement both with discrete [16–18] and continuous [19] variables, and teleportation protocols [20].

These contributions bring the need for devices capable to manipulate efficiently the spin-orbit modes. Controlled gates based on polarization and spatial profiles have already been developed [21–24]. A measurement device based on a Mach-Zehnder interferometer was first proposed in [25]. There, an additional mirror inserted in one arm caused even and odd modes entering the interferometer to exit from different outputs. For this purpose, mode parity is evaluated according to a reflection operation on the plane of the interferometer. However, a Mach-Zehnder interferometer may be inconvenient when phase stability is a critical issue. In this work, we report on a different approach to parity mode decomposition based on a modified Sagnac interferometer.

2. INTERFEROMETER

By combining the spatial and polarization degrees of freedom of a paraxial beam, we can describe a general spin-orbit mode. Within the subspace of first-order paraxial modes we have

$$\Psi = \alpha\psi_h\hat{e}_H + \beta\psi_h\hat{e}_V + \gamma\psi_v\hat{e}_H + \delta\psi_v\hat{e}_V, \quad (1)$$

where ψ_h (horizontal) and ψ_v (vertical) are Hermite–Gaussian modes, while \hat{e}_H (horizontal) and \hat{e}_V (vertical) are orthogonal polarization unit vectors [26]. On this basis, the spin-orbit modes are described by column vectors $\Psi = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)^T$.

This type of mode mimics a two-qubit system and has been used to discuss a Bell inequality using a classical beam [12]. So in analogy with the measure of entanglement in a bipartite system, we define the concurrence of mode Ψ to be $C = 2|\alpha\delta - \beta\gamma|$ [27]. Nonfactorizable spin-orbit modes like

$$\Phi = \frac{\psi_h(\mathbf{r})\hat{e}_V + \psi_v(\mathbf{r})\hat{e}_H}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

correspond to $C = 1$ and will be referred as entangled modes. Those described by a product of a general normalized spatial function by a general polarization unit vector will be referred to as separable modes for which $C = 0$.

In the following section we shall see how the interferometer behaves when beams corresponding to different degrees of concurrence are used as input. The setup is shown in Fig. (1). The input-output port of the interferometer is a 50/50 beam splitter (BS), where an incoming beam gets divided into two counterpropagating, but nonoverlapping, paths. While this geometry benefits from phase stability, it also allows for independent manipulation of the counterpropagating beams. In order to achieve parity selection, a half-waveplate (HWP) is inserted in the clockwise (cw) and a Dove prism (DP) in the counterclockwise (cc) path, both horizontally oriented. With this configuration, even modes like $\psi_h\hat{e}_H$ and $\psi_v\hat{e}_V$ interfere constructively in one output of the interferometer

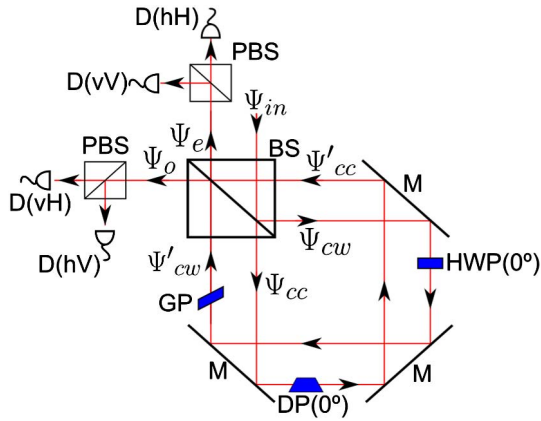


Fig. 1. Experimental setup. M, mirror; HWP, half waveplate; DP, Dove prism; GP, glass plate; PBS, polarizing beam splitter; D, detector.

while odd modes like $\psi_v \hat{e}_H$ and $\psi_h \hat{e}_V$ exit through the other output. Indeed, the HWP introduces a π -phase shift between \hat{e}_H and \hat{e}_V polarization, and the same phase shift is introduced by the DP between ψ_h and ψ_v Hermite–Gaussian modes. Therefore, if the two paths are balanced, even and odd modes interfere constructively on different outputs and get separated by the interferometer. Of course, the optical components inserted in both paths change their relative optical lengths, so that a mode-insensitive compensation has to be inserted in one path to equilibrate their optical lengths. This is achieved by inserting a tilted piece of glass in order to balance the interferometer. Also, a slight effect of the DP on the polarization state can also be neglected for our purposes [28,29].

Let us now detail how each optical component inside the interferometer acts on the spin-orbit modes. In the input of the interferometer, a general mode Ψ_{in} is split by the BS in a clockwise Ψ_{cw} and a counterclockwise Ψ_{cc} component. From the usual input–output relations in a beam splitter, with a single input we have $\Psi_{cc} = -i\Psi_{cw} = \Psi_{in}/\sqrt{2}$. Each component will pass through a sequence of optical devices characterized by unitary spin-orbit transformations. Mirror reflections act on both polarization and spatial functions, adding a π -phase to the horizontal components while leaving the vertical ones unaltered. Therefore, in the $\{\psi_h, \psi_v\} \otimes \{\hat{e}_H, \hat{e}_V\}$ basis, each mirror introduces the transformation $U_m \otimes U_M$, where

$$\begin{aligned} U_m \psi_h &= -\psi_h, \\ U_m \psi_v &= \psi_v, \\ U_M \hat{e}_H &= -\hat{e}_H, \\ U_M \hat{e}_V &= \hat{e}_V. \end{aligned} \quad (3)$$

HWPs act only on polarization modes. When horizontally oriented they add a π -phase to the vertical component, so that its transformation corresponds to $\mathbb{1} \otimes U_{HWP}$, where

$$\begin{aligned} U_{HWP} \hat{e}_H &= \hat{e}_H, \\ U_{HWP} \hat{e}_V &= -\hat{e}_V. \end{aligned} \quad (4)$$

Dove prisms act in a similar way on spatial modes only, so that its transformation corresponds to $U_{DP} \otimes \mathbb{1}$, where

$$\begin{aligned} U_{DP} \psi_h &= \psi_h, \\ U_{DP} \psi_v &= -\psi_v. \end{aligned} \quad (5)$$

The accumulated phase difference ϕ between the two paths can be adjusted with the glass plate. The overall transformation performed on each path gives rise to the following spin-orbit modes re-entering the BS:

$$\begin{aligned} \Psi'_{cw} &= e^{i\phi} (\mathbb{1} \otimes U_{HWP}) (U_m \otimes U_M) \Psi_{cw}, \\ \Psi'_{cc} &= (U_{DP} \otimes \mathbb{1}) (U_m \otimes U_M) \Psi_{cc}, \end{aligned} \quad (6)$$

where we omitted the double reflections since $U_m^2 = U_M^2 = \mathbb{1}$. Finally, these modes are combined in the BS, producing the following output modes:

$$\begin{aligned} \Psi_e &= \frac{\Psi'_{cw} + i\Psi'_{cc}}{\sqrt{2}}, \\ \Psi_o &= \frac{i\Psi'_{cw} + \Psi'_{cc}}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \quad (7)$$

which are precisely the even (e) and odd (o) spin-orbit modes for a suitable choice of ϕ . On the $\{\psi_h \hat{e}_H, \psi_h \hat{e}_V, \psi_v \hat{e}_H, \psi_v \hat{e}_V\}$ basis, the components of the output modes are given by transformations M_j ($j = e, o$), so that $\Psi_j = M_j \Psi_{in}$ or, in matrix form, $(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j, \delta_j)^T = M_j (\alpha_{in}, \beta_{in}, \gamma_{in}, \delta_{in})^T$, where

$$M_e = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} e^{i\phi} + 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{i\phi} + 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{i\phi} - 1 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

and

$$M_o = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{i\phi} - 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi} + 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{i\phi} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{i\phi} + 1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Note that $\beta_e = \gamma_e = 0$ and $\alpha_o = \delta_o = 0$ when we set $\phi = 0$. This demonstrates proper operation of the interferometer as a spin-orbit parity selector. For $\phi = \pi$, the even and odd outputs are interchanged.

3. EXPERIMENTAL RESULTS

Once the parity modes are sorted, a polarizing beam splitter (PBS) is used on each output of the interferometer in order to discriminate the polarization modes. This provides a total of four outputs, all of them imaged on a CCD camera. Therefore, the whole measurement setup provides complete decomposition of an arbitrary input mode in the spin-orbit basis $\{\psi_h \hat{e}_H, \psi_h \hat{e}_V, \psi_v \hat{e}_H, \psi_v \hat{e}_V\}$. The first order Hermite–Gaussian profile is generated by diffraction of the Gaussian output of a linearly polarized He–Ne laser ($\lambda = 632.8$ nm) through a shifted grating [30]. As usual, the polarization mode is adjusted by waveplates.

In order to check for proper operation, we first sent beams prepared on each element of the measurement basis and verified that all ports but one were dark, as shown in Fig. (2). The intensities in the bright ports were between 79% and 92% of the total output intensity.

$\Psi_{in} \backslash D$	hH	hV	vH	vV
$\psi_h \hat{e}_H$				
$\psi_h \hat{e}_V$				
$\psi_v \hat{e}_H$				
$\psi_v \hat{e}_V$				

Fig. 2. Images of the four detector (D) outputs of the measurement setup for single-component inputs.

Then, we used the interferometer for decomposition of several input modes. First, we produced a spin-orbit mode with two spatial and one polarization components in the measurement basis. A first-order Laguerre-Gaussian mode with right-handed helicity was generated by a forked hologram [31–33], and prepared with either horizontal or vertical polarization:

$$\psi_r \hat{e}_\sigma = \left(\frac{\psi_h + i\psi_v}{\sqrt{2}} \right) \hat{e}_\sigma \quad (10)$$

($\sigma = H, V$). As shown in the first two image lines of Fig. (3), this mode was properly decomposed in its Hermite-Gaussian components. The intensities in the bright ports were between 41% and 57% of the total output intensity.

The interferometer was also used for decomposition of a spin-orbit mode with one spatial and two polarization components in the measurement basis. Either a horizontal or a vertical Hermite-Gaussian mode was prepared with linear polarization oriented at 45° with respect to the horizontal:

$$\psi_\sigma \hat{e}_+ = \psi_\sigma \left(\frac{\hat{e}_H + \hat{e}_V}{\sqrt{2}} \right) \quad (11)$$

$\Psi_{in} \backslash D$	hH	hV	vH	vV
$\psi_r \hat{e}_H$				
$\psi_r \hat{e}_V$				
$\psi_h \hat{e}_+$				
$\psi_v \hat{e}_+$				
$\psi_r \hat{e}_+$				
Ψ_{ent}				

Fig. 3. Images of the four detectors (D) for several input modes Ψ_{in} .

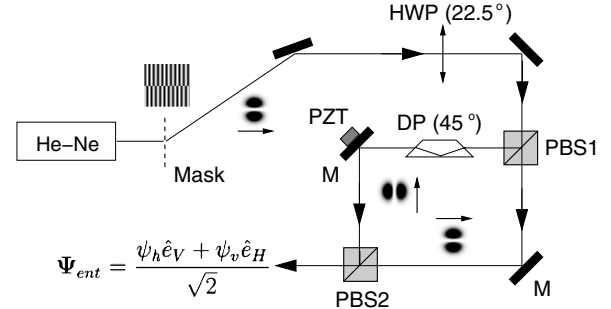


Fig. 4. Entangled mode preparation setup.

($\sigma = h, v$). This mode was properly decomposed in its polarization components, as shown in the third and fourth image lines of Fig. (3). The intensities in the bright ports were between 41% and 50% of the total output intensity.

In the fifth image line of Fig. (3), we show the full decomposition of a spin-orbit mode produced from a right-handed Laguerre-Gaussian beam linearly polarized at 45° . This mode is given by

$$\psi_r \hat{e}_+ = \left(\frac{\psi_h + i\psi_v}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{\hat{e}_H + \hat{e}_V}{\sqrt{2}} \right) \quad (12)$$

having all four components in the measurement basis. As expected, all output ports were bright, with intensities between 19% and 28% of the total output intensity.

All previous modes were separable ones ($C = 0$). Finally, we checked for decomposition of the maximally entangled mode ($C = 1$):

$$\Psi_{ent} = \frac{\psi_h \hat{e}_V + \psi_v \hat{e}_H}{\sqrt{2}}. \quad (13)$$

This mode was generated with a Mach-Zehnder (MZ) interferometer with input and output PBS, as shown in Fig. (4). Before the interferometer, a HWP sets the laser polarization at 45° , so that the incoming mode is equally distributed between the two arms of the interferometer. A Dove prism was inserted in the vertical polarization arm, where the incoming vertical Hermite-Gaussian (HG) mode was flipped and recombined in the output PBS. This sequence implements a Hadamard operation (HWP) followed by a controlled NOT gate (interferometer) [33]. A piezoelectric transducer (PZT) was used to control the phase shift between the two arms of the MZ interferometer. The images in the last line of Fig. (3) show the correct decomposition of the entangled mode. The intensities in the bright ports were 51% and 44% of the total output intensity.

4. CONCLUSION

In conclusion, we developed a spin-orbit parity mode sorter based on a Sagnac interferometer. The Sagnac architecture adopted provides better phase stability while allowing for independent manipulation of the counterpropagating beams. It can be a useful tool for quantum information protocols as a measurement device for spin-orbit modes.

ACKNOWLEDGMENTS

The authors acknowledge financial support from the Brazilian funding agencies CNPq, CAPES, and FAPERJ. This work was

performed as part of the Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia de Informação Quântica (INCT-IQ).

REFERENCES

1. P. Kok, W. J. Munro, K. Nemoto, T. C. Ralph, J. P. Dowling, and G. J. Milburn, "Linear optical quantum computing with photonic qubits," *Rev. Mod. Phys.* **79**, 135–174 (2007).
2. M. J. Padgett and J. Courtial, "Poincaré-sphere equivalent for light beams containing orbital angular momentum," *Opt. Lett.* **24**, 430–432 (1999).
3. E. Abramochkin and V. Volostnikov, "Beam transformations and nontransformed beams," *Opt. Commun.* **83**, 123–135 (1991).
4. M. J. Padgett and L. Allen, "Light with a twist in its tail," *Contemp. Phys.* **41**, 275–285 (2000).
5. E. Nagali, F. Sciarrino, F. De Martini, L. Marrucci, B. Piccirillo, E. Karimi, and E. Santamato, "Quantum information transfer from spin to orbital angular momentum of photons," *Phys. Rev. Lett.* **103**, 013601 (2009).
6. L. Marrucci, E. Karimi, S. Slussarenko, B. Piccirillo, E. Santamato, E. Nagali, and F. Sciarrino, "Spin-to-orbital conversion of the angular momentum of light and its classical and quantum applications," *J. Opt.* **13**, 064001 (2011).
7. A. Picón, A. Benseny, J. Mompart, and G. F. Calvo, "Spin and orbital angular momentum propagation in anisotropic media: theory," *J. Opt.* **13**, 064019 (2011).
8. K. Y. Bliokh, M. A. Alonso, E. A. Ostrovskaya, and A. Aiello, "Angular momenta and spin-orbit interaction of nonparaxial light in free space," *Phys. Rev. A* **82**, 063825 (2010).
9. C. E. R. Souza, J. A. O. Huguenin, P. Milman, and A. Z. Khoury, "Topological phase for spin-orbit transformations on a laser beam," *Phys. Rev. Lett.* **99**, 160401 (2007).
10. C. E. R. Souza, C. V. S. Borges, A. Z. Khoury, J. A. O. Huguenin, L. Aolita, and S. P. Walborn, "Quantum key distribution without a shared reference frame," *Phys. Rev. A* **77**, 032345 (2008).
11. L. Chen and W. She, "Single-photon spin-orbit entanglement violating a Bell-like inequality," *J. Opt. Soc. Am. B* **27**, A7–A10 (2010).
12. C. V. S. Borges, M. Hor-Meyll, J. A. O. Huguenin, and A. Z. Khoury, "Bell-like inequality for the spin-orbit separability of a laser beam," *Phys. Rev. A* **82**, 033833 (2010).
13. M. Hor-Meyll, A. Auyuanet, C. V. S. Borges, A. Aragão, J. A. O. Huguenin, A. Z. Khoury, and L. Davidovich, "Environment-induced entanglement with a single photon," *Phys. Rev. A* **80**, 042327 (2009).
14. M. Franca Santos, P. Milman, A. Z. Khoury, and P. H. Souto Ribeiro, "Measurement of the degree of polarization entanglement through position interference," *Phys. Rev. A* **64**, 023804 (2001).
15. D. P. Caetano, P. H. Souto Ribeiro, J. T. C. Pardal, and A. Z. Khoury, "Quantum image control through polarization entanglement in parametric down-conversion," *Phys. Rev. A* **68**, 023805 (2003).
16. E. Karimi, J. Leach, S. Slussarenko, B. Piccirillo, L. Marrucci, L. Chen, W. She, S. Franke-Arnold, M. J. Padgett, and E. Santamato, "Spin-orbit hybrid entanglement of photons and quantum contextuality," *Phys. Rev. A* **82**, 022115 (2010).
17. L. Chen and W. She, "Teleportation of a controllable orbital angular momentum generator," *Phys. Rev. A* **80**, 063831 (2009).
18. J. T. Barreiro, T.-C. Wei, and P. G. Kwiat, "Remote preparation of single-photon hybrid entangled and vector-polarization states," *Phys. Rev. Lett.* **105**, 030407 (2010).
19. B. Coutinho dos Santos, K. Dechoum, and A. Z. Khoury, "Continuous-variable hyperentanglement in a parametric oscillator with orbital angular momentum," *Phys. Rev. Lett.* **103**, 230503 (2009).
20. A. Z. Khoury and P. Milman, "Quantum teleportation in the spin-orbit variables of photon pairs," *Phys. Rev. A* **83**, 060301 (2011).
21. M. Fiorentino and F. N. C. Wong, "Deterministic controlled-NOT gate for single-photon two-qubit quantum logic," *Phys. Rev. Lett.* **93**, 070502 (2004).
22. A. N. de Oliveira, S. P. Walborn, and C. H. Monken, "Implementing the Deutsch algorithm with polarization and transverse spatial modes," *J. Opt. B* **7**, 288–292 (2005).
23. C. E. R. Souza and A. Z. Khoury, "A Michelson controlled-not gate with a single-lens astigmatic mode converter," *Opt. Express* **18**, 9207–9212 (2010).
24. S. Slussarenko, V. D'Ambrosio, B. Piccirillo, L. Marrucci, and E. Santamato, "The polarizing Sagnac interferometer: a tool for light orbital angular momentum sorting and spin-orbit photon processing," *Opt. Express* **18**, 27205–27216 (2010).
25. H. Sasada and M. Okamoto, "Transverse-mode beam splitter of a light beam and its application to quantum cryptography," *Phys. Rev. A* **68**, 012323 (2003).
26. B. E. A. Saleh and M. C. Teich, *Fundamentals of Photonics* (Wiley, 2007).
27. W. K. Wootters, "Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits," *Phys. Rev. Lett.* **80**, 2245–2248 (1998).
28. M. J. Padgett and J. P. Lleso, "Dove prisms and polarized light," *J. Mod. Opt.* **46**, 175–179 (1999).
29. I. Moreno, G. Paez, and M. Strojnik, "Polarization transforming properties of Dove prisms," *Opt. Commun.* **220**, 257–268 (2003).
30. N. K. Langford, R. B. Dalton, M. D. Harvey, J. L. O'Brien, G. J. Pryde, A. Gilchrist, S. D. Bartlett, and A. G. White, "Measuring entangled qutrits and their use for quantum bit commitment," *Phys. Rev. Lett.* **93**, 053601 (2004).
31. N. R. Heckenberg, R. McDuff, C. P. Smith, and A. G. White, "Generation of optical phase singularities by computer-generated holograms," *Opt. Lett.* **17**, 221–223 (1992).
32. J. A. O. Huguenin, B. Coutinho dos Santos, P. A. M. dos Santos, and A. Z. Khoury, "Topological defects in moiré fringes with spiral zone plates," *J. Opt. Soc. Am. A* **20**, 1883–1889 (2003).
33. M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge University, 2000).

Referências Bibliográficas

- [1] Eugene Hetch, *Optics*, 4.a Edição - Addison Wesley (2002).
- [2] Nadja Kolb Bernardes *Polarização da luz em estados quânticos multimodais* - Dissertação de mestrado - UFMG (2006).
- [3] Melvin Lax, *From Maxwell to paraxial wave optics*, Phys. Rev. A, 11, 1365 (1975).
- [4] Bernardo Coutinho Camilo dos Santos, *Dinâmica e ruído quântico em osciladores paramétricos óticos com momento angular orbital* - Tese de doutorado - Instituto de Física - UFF (2009).
- [5] M. Padgett e J Courtial, *Poincaré-sphere equivalent for light beams containing orbital angular momentum* Optics Letters 24 (7), 430-432 (1999)
- [6] H. Sasada e M. Okamoto, *Transverse-mode beam splitter of a light beam and its application to quantum cryptography*, Phys. Rev. A, 68, 012323 (2003).
- [7] M. Padgett e L. Allen, *Light with a twist in its tail*, Contemporary Physics, vol. 41, 5, 275-285 (2000).
- [8] C. V. S. Borges, M. Hor-Meyll, J. A. O. Huguenin e A. Z. Khoury, *Bell-like inequality for a spin-orbit separability of a laser beam*, Phys. Rev. A 82, 033833 (2010).
- [9] C. E. R. Souza, J. A. O. Huguenin, P. Milman e A. Z. Khoury, *Topological phase for spin-orbit transformations on a laser beam*, Phys. Rev. Letters 99, 160401 (2007).
- [10] A. R. Vieira, M. Hor-Meyll e A. Z. Khoury, *Spin-orbit mode selection with a modified Sagnac interferometer*, J. Opt. Soc. Am. B, vol. 30, N.o 6, 1623 (2013)

- [11] B. N. Simon, S. Simon, F. Gori, M. Santarsiero, R. Borgui, N. Mukunda, e R. Simon, *Nonquantum entanglement resolves a basic issue in polarization optics*, Phys. Rev. Letters 104, 023901 (2010).
- [12] J. S. Bell, *On the Einstein-Podolsky-Rosen Paradox*, Physics 1, 195 (1964).
- [13] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony and R. A. Holt, *Proposed experiment to test local hidden-variable theories*, Phys. Rev. Lett. 23, 880 (1969).
- [14] A. Aspect, *Bells theorem: The naive view of an experimentalist*, Quantum [Un]speakables From Bell to Quantum information, Springer (2002).
- [15] A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen, *Can Quantum-Mechanical description of physical reality be considered complete ?* Phys. Rev. 47, 777 (1935).
- [16] I. Moreno, G. Paez e M. Strojnik, *Polarization transforming properties of Dove prisms*, Optics Communications, vol. 220, 4-6, 257-268 (2003).
- [17] M. A. Nielsen e I. L. Chuang, *Quantum computation and quantum information*, 10.a edição, Editora Cambridge (2010).