

**A FASE SUPERCONDUTORA DE COR
DA MATÉRIA ESTRANHA NO
MODELO CROMODIELÉTRICO E
ESTRELAS DE QUARKS**

LUIS PAULO FERNANDES LIBERTO LINARES

Orientador:

MANUEL MÁXIMO BASTOS MALHEIRO DE OLIVEIRA

INSTITUTO DE FÍSICA
UFF

Universidade Federal Fluminense

Niterói

2005

A FASE SUPERCONDUTORA DE COR DA MATÉRIA ESTRANHA NO MODELO CROMODIELÉTRICO E ESTRELAS DE QUARKS

LUIS PAULO FERNANDES LIBERTO LINARES¹

Orientador:

MANUEL MÁXIMO BASTOS MALHEIRO DE OLIVEIRA

*Dissertação apresentada ao Instituto de Física
da Universidade Federal Fluminense como parte
dos requisitos para obtenção do título de Mestre
em Física.*

Universidade Federal Fluminense

Niterói

2005

²Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.



INSTITUTO DE FÍSICA

À minha mãe
Maria Luisa

Universidade Federal Fluminense

Agradecimentos

Ao amigo e orientador Manuel Malheiro pelo estímulo, participação intensa, segurança, motivação e paciência ao longo deste trabalho.

À minha amada esposa Sabrina Linares pela dedicação, incentivo, paciência e companheirismo.

Ao professor Manuel Fiolhais e ao André Taurines, pela contribuição imprescindível.

Aos amigos e funcionários do Instituto de Física.

Ao apoio financeiro da CAPES para a realização deste trabalho.

INSTITUTO DE FÍSICA

Universidade Federal Fluminense

Resumo

Resultados recentes obtidos no Modelo Cromodielétrico (CDM) mostram que a matéria estranha de quarks a densidades muito altas pode aparecer em duas fases, uma fase quiral simétrica e outra quebrada que não é absolutamente estável. A altas densidades, a abundância dos quarks u , d e s é a mesma na fase quiral simétrica e não há elétrons. Estas duas propriedades também são obtidas numa nova fase que deve ocorrer na QCD a altas densidades, conhecida como fase fechada de cor e sabor (CFL). Isto sugere que a matéria estranha possa fazer uma transição para a fase CFL, na qual a energia é diminuída pelo emparelhamento BCS dos quarks. Acredita-se que o estado CFL (ao menos para densidades assintóticas) é provavelmente o estado fundamental mesmo para massas de quarks diferentes.

Nesta tese fazemos um estudo numa versão estendida do modelo CDM onde implementamos o emparelhamento BCS dos quarks e analisamos a fase supercondutora fechada de cor e sabor. No modelo CDM existe um potencial confinante que origina uma constante de sacola B . Mostramos que a inclusão de um termo negativo na densidade de energia livre, devido ao condensado dos pares de quarks, mantém a estabilidade da matéria de quarks mesmo para uma energia potencial grande. A razão para isto é que quando a energia de gap do par de Cooper da QCD aumenta, a energia potencial pode também aumentar e a matéria estranha permanecer ainda absolutamente estável (i.e sua energia por partícula fica abaixo da massa do nucleon). Investigamos as transições de fase entre as diversas equações de estado e concluímos que para altas densidades a matéria supercondutora de cor não pode fazer a transição para a matéria de quarks estranha não emparelhada. Assim, o estado CFL é o verdadeiro estado fundamental da matéria estranha no modelo CDM.

Este estudo é também relevante para a astrofísica, em particular para o entendimento da formação e estrutura das estrelas compactas formadas de quarks. Mostramos explicitamente que as estrelas CFL podem ser absolutamente estáveis e até mais compactas que as estrelas estranhas.

Abstract

Recent results obtained in the Chromodielectric model (CDM) show that strange quark matter at very high densities may appear in two phases, namely a chiral broken and a chiral symmetric phase, which may be not absolutely stable. At high densities, the abundance of quarks u , d and s are the same in the chiral symmetric phase and there are no electrons. These two properties are also obtained in a new phase which is expected to occur in QCD at very high densities, known as color flavor locked (CFL) phase. This suggests that strange matter can make a transition to the CFL phase, in which the energy is lowered by the quark BCS pairing. It is now generally believed that the CFL state (at least for asymptotic densities) is likely to be the ground state even for different quark masses.

In this thesis we perform a study in an extended version of the Chromodielectric model (CDM) with the BCS quark pairing implemented, and analyze the superconducting color flavor locked phase. In the CDM there is a confining potential which originates a bag constant B . We show that the inclusion in the free energy density of a negative term of the diquark condensate keeps the stability of quark matter even for a large potential energy. The reason for that is because when the gap energy of the QCD Cooper pairs increases, the confining potential energy can also increase and the strange matter still remains absolutely stable (i.e., its energy per particle lies below the nucleon mass). We investigated the phase transition among the equations of state and conclude that at high densities the color superconducting phase cannot make a transition to the strange unpaired quark matter. So the CFL state is the real ground state of strange quark matter in the CDM model.

This study is also relevant for astrophysics in particular for understanding the formation and structure of compact quark stars. We explicitly show that CFL stars can be absolutely stable and even more compact than strange stars.

Sumário

Resumo	iii
Introdução	5
1 O modelo cromodielétrico	10
1.1 Equações de autoconsistência para os campos	14
1.2 Comparação com o modelo da sacola do MIT	16
2 A fase supercondutora de cor (CFL)	19
2.1 Modelo CDM na fase CFL	29
3 Resultados	33
3.1 Equação de estado com emparelhamento fraco	33
3.2 Equação de estado com emparelhamento forte	36
3.3 Transição de fase	45
4 Estrelas de quarks CFL	48
4.1 A matéria estranha como o verdadeiro estado fundamental	49
4.2 Equações TOV	50
4.3 Massas e raios das estrelas CFL	54
4.4 Variação da pressão e densidade de energia nas estrelas CFL	57
4.4.1 A importância das correções relativísticas	61
5 Conclusão	65
Bibliografia	69
A Equação de gap pelo método variacional	73

Lista de Figuras

2.1	Diagrama de fase para três sabores de quarks sem massa, conforme [5].	26
2.2	Diagrama de fase para 2+1 sabores à $T = 0$, conforme [5].	28
3.1	Curva da estabilidade da matéria de quarks sem emparelhamento.	34
3.2	Equação de estado sem emparelhamento com $\eta = 0.0966$ para a solução nova.	35
3.3	Equação de estado sem emparelhamento com $\eta = 0.0966$ para a solução normal.	35
3.4	Energia por partícula em função da densidade para a solução nova com $\eta = 0.0966$ fixo introduzindo o emparelhamento.	37
3.5	Densidade de energia e seus termos na solução nova com $\eta = 0.0966$ fixo para $\Delta = 0$ e $\Delta = 100$ MeV.	38
3.6	Energia por partícula em função da densidade para a solução normal com $\eta = 0.0966$ fixo introduzindo o emparelhamento.	39
3.7	Momento de fermi em função da densidade para a solução nova com $\eta = 0.0966$ fixo introduzindo o emparelhamento.	39
3.8	Densidade de energia e seus termos na solução normal com $\eta = 0.0966$ fixo para $\Delta = 0$ e $\Delta = 100$ MeV.	40
3.9	Equação de estado com emparelhamento para a solução nova.	41
3.10	Equação de estado com emparelhamento para a solução normal.	41
3.11	Valores dos pares (g, η) com $\Delta = 100$ MeV para a curva da estabilidade na solução nova.	42
3.12	Valores dos pares (g, η) com $\Delta = 150$ MeV para a curva da estabilidade na solução nova.	43
3.13	Energia por partícula para a solução nova com $g = 23$ MeV e $\eta = 0.1053$ para $\Delta = 100$ MeV, e $\eta = 0.1137$ para $\Delta = 150$ MeV.	44
3.14	Equação de estado com emparelhamento $\Delta = 150$ MeV, $g = 23$ MeV e três valores do parâmetro η	44
3.15	Transição de fase para $\eta = 0.0966$ fixo com a introdução do emparelhamento.	46
3.16	Transição de fase com $\Delta = 100$ MeV fixo para dois valores do parâmetro η	46
3.17	Transição de fase da matéria no CDM+CFL para a matéria em equilíbrio β	47
4.1	Massa \times densidade central para $\eta = 0.0966$ fixo com a introdução do emparelhamento.	55
4.2	Massa \times densidade central com o emparelhamento fixo aumentando a energia potencial.	55
4.3	Massa \times raio com $\eta = 0.0966$ para três valores de Δ	56
4.4	Massa \times raio com $\Delta = 150$ MeV e três valores de η	56
4.5	Densidade de energia em função do raio com $\eta = 0.0966$ para três valores de Δ	58
4.6	Pressão em função do raio com $\eta = 0.0966$ para três valores de Δ	59

4.7	Densidade de energia em função do raio com $\Delta = 150$ MeV para três valores de η	59
4.8	Pressão em função do raio para $\Delta = 150$ MeV com três valores de η	60
4.9	Fatores relativísticos em função do raio da estrela hiperônica de massa máxima para o modelo de Walecka.	62
4.10	Fatores relativísticos em função do raio da estrela hiperônica de massa máxima para o modelo de Zimmany-Moszkowski.	62
4.11	Fatores relativísticos em função do raio da estrela CFL para $\Delta = 0$ e $\Delta = 150$ MeV com $\eta = 0.0966$ fixo.	64
4.12	Fatores relativísticos em função do raio da estrela CFL para $\eta = 0.0966$ e $\eta = 0.1137$ com $\Delta = 150$ fixo.	64



INSTITUTO DE FÍSICA

Universidade Federal Fluminense

Lista de Tabelas

4.1	Valores de M , R e ε_c para a estrela estável de massa máxima com diversos valores de η e Δ	57
-----	---	----



INSTITUTO DE FÍSICA

Universidade Federal Fluminense

Introdução

Nesta dissertação vamos estudar a matéria sujeita a altíssimas densidades e baixas temperaturas. Neste regime, os graus de liberdade relevantes, conforme a teoria da Cromodinâmica Quântica (QCD), são os quarks e glúons. Como veremos, a matéria a altas densidades e baixas temperaturas é bastante diferente da encontrada a altas temperaturas e baixas densidades. A altas temperaturas as simetrias do estado de mais baixa energia estão bem definidas. Neste regime espera-se a restauração da simetria quiral e recentes cálculos da QCD na rede para potencial químico $\mu = 0$, indicam de fato uma transição quiral que coincide com o desconfinamento dos quarks para uma temperatura $T \sim 180$ MeV. Este regime é conhecido na literatura como o plasma de quarks e glúons onde todas as simetrias da QCD, de cor, quiral e do número bariônico estão preservadas.

Como veremos neste nosso estudo, na matéria a altas densidades e baixas temperaturas as simetrias do estado de menor energia são bem diferentes e de fato todas as simetrias da QCD estão quebradas. Neste regime os graus de liberdade relevantes são os quarks com momento perto da superfície de fermi. Há aproximadamente 20 anos Bailin e Love [1, 2] propuseram que a interação atrativa da QCD via troca de um glúon poderia formar pares de quarks com momentos iguais e opostos perto da superfície de fermi, exatamente como na física da matéria condensada. A teoria BCS [3] explica a supercondutividade como surgindo exatamente da formação de pares, que neste caso são pares de elétrons partícula-buraco. Para a formação destes pares basta uma interação atrativa, mesmo que muito pequena. No caso do estado sólido, a interação entre elétrons é repulsiva e portanto essa força atrativa vem da interação com os fónons da rede. Já na QCD surge uma interação atrativa naturalmente com a troca de um glúon.

Esta interação atrativa da QCD leva os quarks perto da superfície de fermi a formar pares de Cooper, e que como sendo bósons condensam. Estes condensados geram gaps no espectro fermiônico, exatamente como na matéria condensada, e que podem ser entendidos como massas para esses quasi-quarks. Como os pares de quarks não podem pela teoria da QCD ser singletos de cor, a simetria de cor é quebrada:

este fenômeno é conhecido como supercondutividade de cor. A fase supercondutora de cor da QCD, que será apresentada no capítulo (2), só mais recentemente recebeu uma investigação mais profunda, análise esta reiniciada essencialmente por Wilczek, Alford e Rajagopal [4, 5, 6, 7, 8]. Como veremos, na fase 2SC onde só consideramos apenas os quarks leves u e d , dois sabores e três cores, a simetria de cor está quebrada (os pares são estados antisimétricos na cor) mas a simetria quiral não, pois o par é um isosinglete no espaço dos sabores (quiral).

No caso de 3 sabores, onde incluímos o quark estranho e consideramos inicialmente as massas dos quarks nulas, um novo fenômeno ocorre na condensação dos pares de quarks. Como neste caso, os pares de Cooper não podem ser isosingletos no sabor, tanto a simetria quiral como a simetria de cor estão quebradas. Os condensados formados pelo canal atrativo da troca de um glúon apresentam o que é conhecido na literatura como o fechamento da cor-sabor (em inglês este fenômeno é conhecido por CFL que quer dizer Color Flavour Locking) [7]. Explicaremos em mais detalhes a fase CFL no capítulo (2), mas para entendermos a razão deste termo, consideremos por exemplo um espinor de helicidade mão esquerda. As transformações de rotação no espaço do sabor $SU(3)_L$ estão ligadas ("locked") com as rotações $SU(3)_{cor}$ no espaço da cor, no sentido que o condensado não é simétrico por nenhuma dessas transformações separadamente, mas é simétrico apenas pelas transformações simultâneas da cor-sabor $SU(3)_{L+cor}$ (o mesmo ocorre para espinores de helicidade mão direita se consideramos as rotações $SU(3)_R$). Assim, a simetria quiral está quebrada na fase CFL devido a este novo fenômeno e não à formação de qualquer condensado quark-antiquark que para estas densidades já são essencialmente nulos.

Esta nova fase da matéria de quarks estranha não tem nenhuma das simetrias do plasma de quarks e glúons. De fato apresenta as simetrias da matéria bariônica estranha, a matéria hiperônica, e por isso pode ser que não exista nenhuma transição de fase entre estes dois regimes. A única diferença entre eles é o desconfinamento. Isto é conhecido na literatura como dualidade quark-hádron ou continuidade quark-hádron [9]. Como o momento de Fermi é muito alto, a superfície de Fermi dos híperons e dos nucleons é essencialmente a mesma e pares de $p(n)$ -híperons ou mesmo apenas híperon-híperon podem ser criados, fazendo com que devido à existência destes condensados a simetria quiral continue quebrada como na fase CFL. Na realidade, é possível escrever o espectro de partículas continuamente da matéria hipernuclear para a matéria de quarks CFL [8, 9]. Os píons tornam-se o octeto pseudoescalar dos bósons de Nambu-Goldstone da fase CFL, os méson vetoriais relacionam-se com os glúons massivos e os bárions com os quarks. Portanto, considerando apenas o espectro de excitações, os dois regimes matéria hipernuclear-CFL são indistinguíveis. O diagrama de fase da QCD para quarks sem massa e os efeitos nesse diagrama ao considerarmos a massa do

quark estranho não nula serão apresentados e discutidos no capítulo (2).

A altas densidades e baixas temperaturas a matéria de quarks estranha na fase CFL, com um estado fundamental tipo BCS formado de pares quark-quark, é energeticamente favorável em relação a uma matéria de quarks sem emparelhamento, no sentido de que possui uma energia livre menor [4, 5]. Isto é de fato esperado pela teoria BCS ao explicar que na presença de interações atrativas, por pequenas que sejam, a superfície de fermi é instável, o que significa que o estado fundamental não é trivial: um estado formado apenas pelos quarks ocupando todos os níveis de energia até o momento de fermi (uma superfície de fermi desnuda). O verdadeiro estado fundamental é um estado formado por pares de quarks perto do nível de fermi, os pares de Cooper. Assim, podemos dizer que mesmo que a propriedade da liberdade assintótica da QCD indique que a força entre os quarks torna-se arbitrariamente pequena conforme o momento aumenta, a descrição da matéria a altas densidades e baixas temperaturas como sendo a de uma superfície de fermi de quarks livres, cuja dinâmica depende essencialmente dos quarks de momento alto que se encontram perto do nível de fermi, não parece ser correta.

O estudo destas fases supercondutoras de cor da matéria de quarks pode ter importantes consequências na astrofísica. Dentro das estrelas de nêutrons, são encontradas densidades na ordem de dez vezes a matéria nuclear, com potenciais químicos $\mu \sim 400$ à 500 MeV e maiores que a massa do quark estranho, exatamente o regime de densidades da fase CFL. A formação de caroços de matéria de quarks dentro dessas estrelas ou até mesmo a possibilidade de existirem estrelas feitas puramente de matéria de quarks motiva este nosso estudo.

Nesta tese vamos investigar a fase supercondutora de cor CFL no modelo Cromodielétrico (CDM) [10, 11, 12]. A escolha deste modelo de quarks interagindo com mésons escalares e pseudoescalares, que vamos introduzir no capítulo (1), deve-se a que ele possui simetria quiral quebrada espontaneamente gerando uma massa dinâmica para os quarks e de possuir confinamento a baixas energias. Este confinamento é obtido via um campo efetivo χ que pode ser entendido como vindo da integração dos glúons [13]. A baixas energias ele reproduz bem a fenomenologia do núcleon [14, 15]. Além disto, foram realizados estudos neste modelo da matéria de quarks não emparelhada em dois sabores [16] e em 3 sabores sujeitos à condição de equilíbrio β [17, 18]. Problemas com a estabilidade desta matéria estranha a altas densidades foram encontrados no modelo CDM [19] o que sugere a análise neste mesmo modelo da matéria na fase supercondutora descrita anteriormente, cuja energia por partícula é menor. Resultados preliminares deste estudo já foram apresentados em duas conferências [20, 21]. A inclusão da energia de emparelhamento, como veremos no capítulo (2), possibilita uma faixa maior para os parâmetros do modelo CDM onde a matéria estranha é estável.

Trabalhar com um modelo efetivo de quarks, que a baixas densidades tem a simetria quiral quebrada e a altas densidades esta simetria é restaurada, possibilita estudar se existe alguma interface entre esta matéria e a descrita pela fase supercondutora de cor. Este tipo de análise não é possível fazer na QCD, pois esta teoria ainda não é solúvel no regime de baixas densidades onde temos o confinamento dos quarks. Além disto, na versão do modelo CDM com um potencial quártico que vamos usar neste trabalho, duas equações de estado (EOS) aparecem para a matéria de quarks estranha em equilíbrio β [17, 18]. Uma para baixas densidades que apresenta a simetria quiral quebrada e outra para altas densidades onde a simetria quiral está restaurada. Nesta equação para altas densidades gerada de um modo auto-consistente dentro do modelo CDM, os momentos de fermi dos 3 quarks são todos iguais, a matéria é neutra e os elétrons são expulsos. Esta fenomenologia é exatamente a prevista na fase CFL supercondutora de cor, mas neste caso a energia do gap é nula. Deste modo, esta equação de estado para a matéria de quarks em equilíbrio β , encontrada no modelo CDM para altas densidades, parece ser a transição natural da fase CFL com emparelhamento forte, visto que quando a densidade diminui o emparelhamento deverá desaparecer. A análise desta transição de fase será apresentada no capítulo (3).

Por último, estrelas constituídas puramente de quarks foram geradas pela EOS de altas densidades em equilíbrio β . Contudo, estrelas bem compactas com raios menores que 8 Km são meta-estáveis neste caso [17, 18]. Como mostraremos no capítulo (4) ao calcular a relação $M \times R$ das estrelas CFL, nessa fase supercondutora, é possível obter estrelas bem compactas, com massa máxima $M/M_{\odot} = 1.43$ e raio $R \sim 7.5$ Km onde a matéria de quarks é estável ($\varepsilon < \rho M$). Este resultado indica que as estrelas de quarks, se existirem na natureza, devem estar na fase CFL. Neste trabalho, não consideramos a possibilidade de uma transição de fase quark-hádron, usando alguma EOS hadrônica. O nosso intuito nesta dissertação foi apenas estudar a matéria de quarks. Contudo, é de se esperar que a baixas densidades aconteça essa transição o que sugere a existência de estrelas híbridas formadas por um caroço de matéria de quarks na fase CFL e uma crosta de matéria hadrônica.

Considerando tudo o que apresentamos até agora, podemos dizer que o nosso trabalho tem essencialmente três objetivos: estudar como a fase supercondutora de cor melhora a estabilidade da matéria de quarks estranha no modelo CDM, investigar o efeito do emparelhamento na EOS e as transições de fase entre a matéria de quarks na fase CFL e a não emparelhada em equilíbrio β e, por último, estudar as estrelas CFL formadas puramente de quarks, sua estabilidade e sua fenomenologia.

A tese está organizada da seguinte maneira: no capítulo (1) introduzimos o modelo CDM, as equações auto-consistentes para os campos mesônicos e apresentamos uma comparação com o modelo de sacola do MIT; no capítulo (2) abordamos a fase

supercondutora de cor na QCD (onde os cálculos para obter a equação do gap são apresentados em um apêndice), distinguindo a fase 2SC da CFL, e apresentamos a formulação do modelo CDM na fase CFL; no capítulo (3) estudamos o efeito da energia de emparelhamento na EOS, dando uma atenção especial à condição de estabilidade da matéria de quarks na fase CFL e analisando as possíveis transições de fase entre as diversas equações de estado; as estrelas CFL, sua metaestabilidade, a relação $M \times R$ e a importância das correções relativísticas são analisadas no capítulo (4) e por fim apresentamos nossas conclusões.



INSTITUTO DE FÍSICA

Universidade Federal Fluminense

Capítulo 1

O modelo cromodielétrico

Como sabemos, a teoria que estuda a interação forte entre os quarks que são os constituintes dos hádrons, é a cromodinâmica quântica (QCD). No regime de altas densidades e temperaturas ocorre o desconfinamento dos quarks e a formação do plasma de quarks e glúons, onde estas partículas estão livres. Neste regime a QCD fornece resultados, pois a constante de acoplamento α_s da teoria é pequena e podemos fazer o estudo perturbativo até primeira ordem nesta constante. Entretanto a QCD a baixas densidades não é solúvel até o momento, pois a constante de acoplamento α_s é grande o que não permite fazer um tratamento perturbativo neste regime.

Neste regime em que a QCD não fornece nenhuma previsão, os modelos de quarks são essenciais para descrever algumas propriedades hadrônicas esperadas pela QCD, como o confinamento dos quarks, a quebra e restauração da simetria quiral. Por exemplo, os resultados obtidos pelo modelo de sacola do MIT [22] assemelham-se aos previstos pela QCD em três aspectos: o dos bárions serem compostos por três quarks (qqq), o do confinamento (os quarks estão no interior de uma sacola) e o da liberdade assintótica (os quarks estão livres dentro da sacola). Neste modelo, a massa dos quarks é a massa corrente, bem baixas na escala da QCD, e a constante da sacola B é constante. Um dos problemas do modelo de MIT é que ele não possui simetria quiral e esta simetria é quebrada devido à existência da sacola, mesmo no caso de quarks sem massa [23]. Para resolver este problema foi proposto o modelo de sacola com nuvem de mésons, onde o méson π é responsável pela conservação da simetria quiral [24, 25]. Uma característica comum a estes modelos é que a massa dos quarks é fixa.

Uma outra classe de modelos de quarks são aqueles onde estes férmions inicialmente sem massa (ou apenas com a massa corrente), adquirem ela dinamicamente através de uma interação pois não são mais livres. Um dos modelos mais conhecidos desta classe e que possui só graus de liberdade de quarks, foi proposto por Nambu-Jona-

Lasínio (NJL) [26]. Neste modelo existe uma interação de contato entre os quarks, que na aproximação de campo médio produz a massa dinâmica para os quarks via um processo de condensação de pares quark-antiquark que quebra espontaneamente a simetria quiral [27, 28, 29, 30]. Outros modelos, nesta mesma classe, misturam graus de liberdade mesônicos aos de quarks: neste caso os quarks interagem via a troca de mésons escalares e pseudo-escalares (alguns modelos consideram também a interação repulsiva devida aos mésons vetoriais). O modelo mais conhecido com interação méson-quark é o modelo σ -linear [31], que por construção possuiu simetria quiral devido à inclusão de uma interação de Yukawa e uma pseudo-escalar entre os quarks e os mésons escalares σ e pseudo-escalar π respectivamente. O modelo possui além desta interação um potencial de auto-interação mesônico conhecido na literatura com o nome de chapéu mexicano. Este modelo foi utilizado também para estudar a matéria nuclear e de quarks na sua versão linear [32] e não linear [33]

Nestes modelos de quarks com geração de massa dinâmica, o mecanismo da restauração da simetria quiral a altas densidades (massa dos quarks tendendo a zero) aparece naturalmente, mas eles têm o defeito de não possuírem, em contraste com o modelo de sacola, o confinamento dos quarks. No sentido de conseguir uma massa dinâmica para os quarks e além disso um mecanismo de confinamento para eles, foi proposto o modelo cromodielétrico de cor (CDM) [10, 11, 12]. Este modelo é essencialmente o modelo σ -linear mais um novo campo escalar χ (um isosinglete de cor que pode ser entendido como vindo da integração dos campos gluônicos [13]) que produz o confinamento dos quarks a baixas densidades. Este campo χ é dinâmico e possuiu uma energia potencial com a forma mais comum usada na literatura que é a de um oscilador harmônico. Neste nosso trabalho vamos usar uma forma quártica para este potencial. Neste caso teremos dois mínimos, um mínimo global para χ perto de zero (que é o caso do potencial harmônico) e outro local para valores maiores deste campo. Como veremos ao longo deste trabalho, este mínimo local para valores grandes de χ será fundamental para garantir a existência de uma nova equação de estado da matéria de quarks estranha obtida neste modelo no caso de altíssimas densidades.

A principal razão que nos levou a escolher o modelo CDM neste trabalho foi esta propriedade do confinamento dos quarks devido à existência do campo escalar χ . Neste modelo é possível obter uma boa descrição para o nucleon [14, 15]. Além disto, estudos na matéria de quarks estranha em equilíbrio β tinham sido desenvolvidos anteriormente na versão quadrática do potencial confinante [16] e pelo meu orientador na versão quártica [17], como já descrevemos na introdução. Assim, nada mais natural que procurar continuar este estudo incluindo a matéria de quarks na fase supercondutora de cor.

Vamos agora descrever sucintamente o modelo Cromodielétrico. A densidade

lagrangiana do CDM pode ser escrita como: [10, 11, 12]

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_q + \mathcal{L}_{\sigma,\pi} + \mathcal{L}_{q\text{-meson}} + \mathcal{L}_\chi \quad (1.1)$$

O primeiro termo descreve a densidade lagrangiana de Dirac dos quarks, onde apenas escrevemos o termo cinético, omitindo o termo de massa por estarmos trabalhando neste modelo no caso onde a massa corrente dos quarks é nula. Este termo é dado por:

$$\mathcal{L}_q = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi \quad (1.2)$$

O segundo termo é a densidade lagrangiana dos campos mesônicos escalar σ e pseudo-escalar π , que é igual à do modelo σ -linear

$$\mathcal{L}_{\sigma,\pi} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\sigma\partial^\mu\sigma + \partial_\mu\vec{\pi}\cdot\partial^\mu\vec{\pi}) - W(\vec{\pi},\sigma) \quad (1.3)$$

a qual é composta de suas partes cinéticas e de um termo de auto-interação mesônico

$$W(\vec{\sigma},\vec{\pi}) = \frac{m_\sigma^2}{8f_\pi^2}(\sigma^2 + \pi^2 - f_\pi^2)^2 \quad (1.4)$$

que, como já fizemos referência, é conhecido com o nome de potencial chapéu mexicano onde f_π é a constante de decaimento do pión.

O terceiro termo descreve a interação méson-quark. Assumindo dois sabores de quarks, u e d, temos:

$$\mathcal{L}_{q\text{-meson}} = \frac{g}{\chi}\bar{\psi}(\sigma + i\vec{\tau}\cdot\vec{\pi}\gamma_5)\psi \quad (1.5)$$

onde aparece o campo confinante χ no denominador, resultado da integração dos campos gluônicos conforme [13]. Sem a presença deste campo teríamos a interação quark-méson do modelo σ -linear, a interação de Yukawa e a pseudo-escalar já discutidas anteriormente. É este termo que na aproximação de campo médio gera dinamicamente as massas dos quarks leves.

O último termo na densidade lagrangiana da Eq. (1.1), está relacionado ao campo dinâmico χ por:

$$\mathcal{L}_\chi = \frac{1}{2}\partial_\mu\chi\partial^\mu\chi - U(\chi) \quad (1.6)$$

onde temos além do termo cinético um potencial $U(\chi)$. Como já referimos anteriormente, vamos trabalhar com um potencial quártico para o campo χ da forma:

$$U(\chi) = \frac{1}{2}m_\chi^2\chi^2 \left[1 + \left(\frac{8\eta^4}{\gamma^2} - 2 \right) \left(\frac{\chi}{\gamma m_\chi} \right) + \left(1 - \frac{6\eta^4}{\gamma^2} \right) \left(\frac{\chi}{\gamma m_\chi} \right)^2 \right] \quad (1.7)$$

onde m_χ é a massa do campo χ . Este potencial escrito nesta forma permite que as duas constantes adquiram um significado simples: γ define a posição do segundo mínimo local em $\chi = \gamma m_\chi$ e η o valor do potencial neste segundo mínimo $U(\gamma m_\chi) = (\eta m_\chi)^4$. Fixando η neste potencial, o valor de $U(\chi)$ é constante neste segundo mínimo e pode ser interpretado como sendo a pressão da sacola [34], a constante B do modelo do MIT. Veremos ao fazer posteriormente a compração do modelo CDM a altas densidades com o modelo do MIT que esta identificação é correta. A faixa de valores de η usadas neste trabalho foi obtida através de valores considerados razoáveis na literatura para a constante B [17, 19]. Além disso, este potencial possui um mínimo global em $\chi = 0$ que não depende dos valores de γ e η , o que é exatamente o que ocorre no caso do potencial quadrático (tipo oscilador harmônico). Por isso, podemos dizer que para valores de χ perto de zero o potencial da Eq. (1.7) engloba os resultados obtidos nos trabalhos anteriores onde foi considerado apenas um potencial quadrático [16].

Para incluir o setor estranho no modelo, devemos acrescentar mais um termo de interação na Eq. (1.1) que seja compatível com o acoplamento entre o quark estranho e o campo χ . Este termo será tomado como sendo [35]:

$$\mathcal{L}_{s\text{-meson}} = \frac{g_s}{\chi} \bar{\psi}_s \psi_s \quad (1.8)$$

Na aproximação de campo médio, onde os campos mesônicos são descritos por campos clássicos constantes, a densidade de energia por unidade de volume para um sistema homogêneo de quarks u , d e s , interagindo com os campos χ e σ é dada por [17, 18, 19]:

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \alpha \int_0^{k_u} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sqrt{k^2 + m_u(\sigma, \chi)^2} + \alpha \int_0^{k_d} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sqrt{k^2 + m_d(\sigma, \chi)^2} \\ & + \alpha \int_0^{k_s} \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \sqrt{k^2 + m_s(\chi)^2} + U(\chi) + \frac{m_\sigma^2}{8f_\pi^2} (\sigma^2 - f_\pi^2)^2 \end{aligned} \quad (1.9)$$

onde, por razões de paridade, os termos que dependem do valor esperado do campo do pión são nulos nesta aproximação. α é o fator de degenerescência, $\alpha = 2$ (spin) \times 3 (cor) = 6, $f_\pi = 93$ MeV e $m_\sigma = 1.2$ GeV. Os três primeiros termos da Eq. (1.9) constituem a energia cinética de um gás de férmions relativísticos, correspondentes aos três sabores de quarks e, como estamos tratando de um sistema infinito e homogêneo, os mesmos são descritos por ondas planas. Os dois últimos termos correspondem a energia potencial dos campos mesônicos.

Os momentos de fermi de cada quark (k_i) se relacionam com suas densidades (ρ_i) através de:

$$\rho_i = \alpha \frac{k_i^3}{6\pi^2} = \frac{k_i^3}{\pi^2} \quad (1.10)$$

onde $i = u, d$ e s .

Devido as interações méson-quark, descritas nas Eqs. (1.5) e (1.8), as massas dinâmicas dos quarks são todas elas diferentes [35] e dadas por

$$m_u(\sigma, \chi) = \frac{g_u \sigma}{\chi f_\pi}, \quad m_d(\sigma, \chi) = \frac{g_d \sigma}{\chi f_\pi}, \quad m_s(\chi) = \frac{g_s}{\chi}. \quad (1.11)$$

As constantes de acoplamento dos quarks u, d e s são respectivamente

$$g_u = g(f_\pi + \xi_3), \quad g_d = g(f_\pi - \xi_3), \quad g_s = g(2f_K - f_\pi) \quad (1.12)$$

onde $\xi_3 = -0.75$ MeV e $f_K = 113$ MeV. Os parâmetros que melhor reproduzem as propriedades do nucleon neste modelo são a constante de acoplamento $g = 0.023$ GeV e a massa do campo χ dada por $m_\chi = 1.7$ GeV [16, 18], como veremos no próximo capítulo ao estudar a estabilidade da matéria de quarks variaremos um pouco o valor da constante de acoplamento. O parâmetro γ será fixado em 0.2, pois como mostrado em estudos anteriores da matéria de quarks neste modelo ele afeta muito pouco a equação de estado a altas densidades [16, 17] e os valores para o parâmetro η serão discutidos no próximo capítulo. Por fim, no caso da matéria estranha em que consideramos o equilíbrio β , faz-se também necessário a inclusão de um gás relativístico de elétrons livres [17, 19] na expressão da densidade de energia Eq. (1.9).

1.1 Equações de autoconsistência para os campos

Munidos da densidade de energia (Eq. (1.9)) aplicaremos nesta o princípio variacional em relação os campos mesônicos σ e χ , no qual encontraremos duas equações autoconsistentes, também chamadas de Equações de Gap.

Antes de calcularmos tais equações, iremos definir:

$$I_i = \int_0^{k_i} \frac{k^2 dk}{\sqrt{k^2 + m_i(\sigma, \chi)^2}} \quad (1.13)$$

onde $i = u$ e d , e também:

$$I_s = \int_0^{k_s} \frac{k^2 dk}{\sqrt{k^2 + m_s(\chi)^2}} \quad (1.14)$$

simplesmente por simplificação de notação futura. As massas dos quarks m_i , são dadas pela Eq. (1.11).

A primeira equação autoconsistente, que obtemos ao fazer $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \sigma} = 0$, é dada por:

$$\frac{\alpha}{2\pi^2} \left[I_u \left(\frac{g_u}{\chi f_\pi} \right)^2 \sigma + I_d \left(\frac{g_d}{\chi f_\pi} \right)^2 \sigma \right] + \frac{m_\sigma^2 (\sigma^2 - f_\pi^2) \sigma}{2f_\pi^2} = 0 \quad (1.15)$$

onde utilizamos a simetria esférica ($d^3k = 4\pi k^2 dk$), a Eq. (1.13) e as duas primeiras Eqs. de (1.11).

Esta primeira equação autoconsistente pode ser reescrita de uma forma mais simples como:

$$\alpha(g_u^2 I_u + g_d^2 I_d) + (\pi \chi m_\sigma)^2 (\sigma^2 - f_\pi^2) = 0 \quad (1.16)$$

onde as constantes de acoplamento g_u e g_d são dadas pelas duas primeiras equações de (1.12). Como vemos esta equação depende ao mesmo tempo de σ e de χ e necessita ser resolvida para cada momento de fermi k_i .

Analogamente, a segunda equação autoconsistente surge ao minimizar a densidade de energia em relação ao campo χ ($\frac{\partial \varepsilon}{\partial \chi} = 0$) e pode ser escrita como:

$$- \left(\frac{\alpha}{2\pi^2} \right) \frac{1}{\chi} \left[I_u \left(\frac{g_u \sigma}{\chi f_\pi} \right)^2 + I_d \left(\frac{g_d \sigma}{\chi f_\pi} \right)^2 + I_s \left(\frac{g_s}{\chi} \right)^2 \right] + \frac{\partial U(\chi)}{\partial \chi} = 0 \quad (1.17)$$

onde utilizamos a Eq. (1.14) e a última equação de (1.11). Esta última equação pode também ser reescrita como:

$$\left(\frac{\sigma^2}{f_\pi^2} \right) (g_u^2 I_u + g_d^2 I_d) + g_s^2 I_s - \left(\frac{2\pi^2 \chi^3}{\alpha} \right) \frac{\partial U(\chi)}{\partial \chi} = 0 \quad (1.18)$$

De acordo com a Eq. (1.7) temos que a derivada do potencial $U(\chi)$ em relação ao campo χ é

$$\frac{\partial U(\chi)}{\partial \chi} = m_\chi^2 \chi \left[1 + \frac{3}{2} \left(\frac{8\eta^4}{\gamma^2} - 2 \right) \left(\frac{\chi}{\gamma m_\chi} \right) + 2 \left(1 - \frac{6\eta^4}{\gamma^2} \right) \left(\frac{\chi}{\gamma m_\chi} \right)^2 \right] \quad (1.19)$$

Desta forma, substituindo a Eq. (1.19) em (1.18), a segunda equação autoconsistente pode ser simplificada numa forma mais fechada

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sigma^2}{f_\pi^2} \right) (g_u^2 I_u + g_d^2 I_d) + g_s^2 I_s - \left(\frac{2\pi^2 m_\chi^2 \chi^4}{\alpha} \right) \times \\ & \times \left[1 + \frac{3}{2} \left(\frac{8\eta^4}{\gamma^2} - 2 \right) \left(\frac{\chi}{\gamma m_\chi} \right) + 2 \left(1 - \frac{6\eta^4}{\gamma^2} \right) \left(\frac{\chi}{\gamma m_\chi} \right)^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (1.20)$$

Esta equação também depende de σ e χ . Assim, estas duas equações são acopladas e necessitam ser resolvidas autoconsistentemente para cada valor da densidade de quarks.

1.2 Comparação com o modelo da sacola do MIT

Nesta seção vamos fazer a comparação entre os modelos CDM e o do MIT. Primeiramente apresentaremos a equação de estado (EOS) para a matéria de quarks do MIT. A EOS deste modelo para a matéria de quarks estranho a altas densidades é essencialmente a EOS de um gás ultra-relativístico, ou seja $p = \varepsilon/3$, visto $p \gg m$, menos o termo da energia de volume que vem da constante da sacola B .

Usando a aproximação de gás de fermi livre para um sistema homogêneo, a densidade de energia, a pressão e a densidade bariônica são dadas, respectivamente, por:

$$\varepsilon = \sum_{i=u,d,s} \gamma_i \int_0^{k_i} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{k^2 + m_i^2} + B \quad (1.21)$$

$$p = \sum_{i=u,d,s} \frac{\gamma_i}{3} \int_0^{k_i} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + m_i^2}} - B \quad (1.22)$$

$$\rho = \sum_{i=u,d,s} \frac{\gamma_i}{3} \int_0^{k_i} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \quad (1.23)$$

onde a constante B é a constante da sacola e representa o deslocamento de energia positiva por volume entre o vácuo desconfiante e o vácuo confinante. O fator de degenerescência é $\gamma_i = 2$ (spin) $\times 3$ (cor) e na expressão da densidade de bárions ρ , o fator $1/3$ aparece por termos três quarks por bárion.

Integrando as Eqs.(1.21), (1.22) e (1.23) e utilizando a condição de simetria esférica, elas podem ser escritas em expressões analíticas como

$$\varepsilon = \sum_{i=u,d,s} \frac{3}{4\pi^2} \left[\mu_i k_i \left(\mu_i^2 - \frac{1}{2} m_i^2 \right) - \frac{1}{2} m_i^4 \ln \left(\frac{\mu_i + k_i}{m_i} \right) \right] + B \quad (1.24)$$

$$p = \sum_{i=u,d,s} \frac{1}{4\pi^2} \left[\mu_i k_i \left(\mu_i^2 - \frac{5}{2} m_i^2 \right) - \frac{3}{2} m_i^4 \ln \left(\frac{\mu_i + k_i}{m_i} \right) \right] - B \quad (1.25)$$

$$\rho = \sum_{i=u,d,s} \frac{k_i^3}{3\pi^2} \quad (1.26)$$

onde o momento de fermi de cada quark k_i é definido em termos do potencial químico, $\mu_i = \sqrt{m_i^2 + k_i^2}$. Vale a pena salientar que a constante da sacola B , sendo um escalar,

contribui positivamente para a densidade de energia mas negativamente para a pressão, fazendo com que esta diminua.

Para o limite ultra-relativístico, $m_i \rightarrow 0$, as Eqs. (1.24) e (1.25) tornam-se, respectivamente:

$$\varepsilon = \sum_{i=u,d,s} = \frac{3k_i^4}{4\pi^2} + B \quad (1.27)$$

$$p = \sum_{i=u,d,s} = \frac{k_i^4}{4\pi^2} - B \quad (1.28)$$

o que nos permite escrever a EOS do modelo da sacola no caso ultra-relativístico na forma que é bem conhecida na literatura

$$p = \frac{\varepsilon}{3} - \frac{4B}{3}. \quad (1.29)$$

Se compararmos a Eq. (1.9) para a densidade de energia do modelo CDM com a Eq. (1.21) no modelo de sacola, vemos que no lugar da constante B temos os potenciais mesônicos em $U(\chi) + W(\sigma, \pi)$. Além disso, como já fizemos referência, no modelo do MIT as massas dos quarks são fixas e baixas enquanto que no modelo CDM elas variam com a densidade e dependendo do valor de χ podem ser grandes.

Conforme o estudo realizado para a matéria de quarks em equilíbrio β no modelo CDM detalhado em [17, 18, 19], ao resolver as equações autoconsistentes apresentadas na seção anterior a solução para o campo σ aproxima-se sempre muito do valor de f_π para qualquer valor da densidade bariônica, de tal modo que a contribuição para a energia proveniente do potencial tipo chapéu mexicano ($W(\sigma, \pi)$) é essencialmente nula. Por outro lado o campo confinante χ possui duas soluções estáveis. Na primeira solução o campo χ está perto de zero e é uma função que aumenta pouco como função da densidade (esta solução é exatamente a mesma que a obtida para potenciais $U(\chi)$ harmônicos), fazendo com que também neste caso a contribuição do potencial $U(\chi)$ para a densidade de energia seja desprezível. Nesta solução, nomeada no estudo apresentado em [17] de solução I e por nós neste trabalho de solução *normal*, como o valor deste campo é muito pequeno as massas dos quarks são grandes (são inversamente proporcionais a χ e na ordem de 100 a 150 MeV). Estes quarks podem ser vistos como quarks com massas constituintes em analogia aos modelos de quarks não relativísticos e o sistema encontra-se numa fase onde a simetria quiral está quebrada (é nesta solução *normal* que obtemos a formação dos bárions no modelo CDM). Para esta solução, visto os termos dos potenciais mesônicos não contribuírem e as massas dos quarks serem altas, a dinâmica obtida é bem diferente da do modelo de sacola.

Por outro lado já na outra solução, χ é grande e constante com a variação da

densidade, $\chi \sim \gamma m_\chi$ (perto do valor de χ no segundo mínimo do potencial, o mínimo local). Sendo assim, o valor do potencial $U(\chi)$ para esta solução é grande, constante e $\sim (\eta m_\chi)^4$ não dependendo da densidade. Sendo constante, no caso desta solução nomeada em [17] de solução II e neste trabalho de solução *nova*, podemos identificar o potencial confinante $U(\chi)$ com a constante B do modelo da sacola. Finalmente, para esta solução, como a massa dinâmica dos quarks é inversamente proporcional ao campo χ , o fato de χ ser grande fornece massas muito pequenas, quase nulas para todos os três sabores de quarks, e portanto esta solução corresponde à solução quiral. Desta forma, não só $B = U(\chi) \sim (\eta m_\chi)^4$, como também o termo de energia cinética do gás de fermi no CDM é essencialmente idêntico ao do modelo do MIT no limite ultra-relativístico. Sendo assim, os resultados obtidos para a solução *nova* são muito similares aos obtidos no modelo do MIT com quarks sem massa [36]. Como veremos no próximo capítulo, esta identificação também será válida mesmo com a introdução do termo de emparelhamento devido à condensação dos pares quark-quark.



INSTITUTO DE FÍSICA

Universidade Federal Fluminense

Capítulo 2

A fase supercondutora de cor (CFL)

Como já apresentamos na introdução, a QCD a altas densidades, visto a interação entre os quarks ser atrativa pela troca de um glúon, permite que os quarks se emparelhem perto da superfície de fermi. Exatamente como na física da matéria condensada, esperamos que na presença de interações atrativas a superfície de fermi seja instável, o que significa que o estado fundamental não é trivial, ou seja tão simples assim: um estado formado apenas pelos quarks ocupando todos os níveis de energia até o momento de fermi (uma superfície de fermi desnuda). O verdadeiro estado fundamental é um estado formado por pares de quarks perto do nível de fermi, os pares de Cooper, cujo nome tem sua origem na teoria de Bardeen, Cooper e Shrieffer, conhecida na literatura pelas iniciais destes autores como teoria BCS [3]. Assim, podemos dizer que mesmo que a propriedade da liberdade assintótica da QCD indique que as forças entre os quarks torna-se arbitrariamente pequena conforme o momento aumenta, a descrição da matéria a altas densidades e baixas temperaturas como sendo a de uma superfície de fermi de quarks livres cuja dinâmica depende essencialmente dos quarks de momento alto que se encontram perto do nível de fermi não é completamente correta.

Como veremos mais adiante a instabilidade do estado fundamental, mesmo no caso de um interação atrativa muito fraca, só pode ser resolvida pelo surgimento de pares. A criação de um par não custa energia livre para a superfície de fermi, visto a interação atrativa entre os quarks resultar na diminuição da energia livre. A energia necessária para a formação desses pares, normalmente denominada na literatura de energia do gap Δ pode ser identificada, como ficará mais claro em seguida, com a massa de uma quasi-partícula, os pares de Cooper quark-quark. Como a interação atrativa favorece a formação destes pares de férmions, que serão criados perto da superfície de fermi, e como são bósons formarão um condensado quebrando espontaneamente as simetrias da QCD.

Como veremos nesta seção a QCD a altíssimas densidades, com três cores e

três sabores, possui um estado fundamental com uma energia menor que a do estado fundamental trivial, onde todos os graus de liberdade de cor e sabor adquirem gaps. A simetria de cor e quiral são quebradas, os quarks e glúons adquirem massa e novos modos coletivos sem massa (bósons de Nambu-Goldstone) aparecem. Como os pares, no caso de 3 cores, não podem ser singletos de cor, o condensado quebrará a simetria $SU(3)_{cor}$: este fenômeno é chamado de supercondutividade de cor. Esta hipótese de emparelhamento na QCD foi de fato proposta há mais de 20 anos por Bailin e Love [1, 2], mas só recentemente estudos mais detalhados foram feitos deste emparelhamento e das fases supercondutoras da QCD, essencialmente por Wilczek, Alford and Rajagopal onde bons artigos de revisão destes autores podem ser encontrados em [4, 5].

Vamos aqui mostrar como estimar a energia do gap dos pares de quarks na versão da QCD apenas com dois sabores, quarks u e d e 3 cores no limite de acoplamento fraco (altas densidades) [6]. Nesta fase conhecida na literatura como 2SC, a álgebra e os cálculos são mais simples e mostram os passos necessários para se calcular o valor da energia do gap Δ . Depois apresentaremos as principais diferenças ao incluir o quark estranho e explicaremos a origem do nome fase fechada de cor e sabor (a fase CFL que significa em inglês color-flavor-locked) [7]. Esta fase CFL supercondutora da matéria de quarks estranha é esperada a altas densidades onde o potencial químico é bem maior que a massa do quark estranho [8].

Escolhendo um Hamiltoniano com uma interação pontual de quatro férmions (que tem sua origem no vértice de instantons) e que respeita as simetrias quiral e de cor da QCD, Alford, Rajagopal e Wilczek acharam uma instabilidade BCS [6]. Com esta interação efetiva semelhante à do modelo de Nambu Jona-Lasínio (NJL), um condensado não nulo pode existir e possui a forma:

$$G\langle q_i^\alpha C\gamma_5 q_j^\beta \rangle = \epsilon_{ij} \epsilon^{\alpha\beta 3} \Delta \quad (2.1)$$

onde G é a constante de acoplamento, $C = i\gamma^0\gamma^2$, os índices latinos referem-se aos sabores e os gregos às cores e Δ no lado direito é o parâmetro do energia do gap. A escolha da direção privilegiada "3" no espaço de cor (a cor azul) é arbitrária. Existe claramente uma assimetria entre as duas cores ativas (vermelho e verde) que participam na condensação e a terceira (azul) que não participa neste processo. Esta assimetria é inevitável neste caso que envolve apenas dois sabores de quarks leves devido à diferença entre o número de cores e o número de sabores.

Para calcularmos nesta fase 2SC a energia do condensado (o gap) da Eq. (2.1) usamos a energia livre do tipo NJL dada por:

$$\Omega = \int d^3x \bar{\psi}(x)(\not{\nabla} - \mu\gamma_0)\psi(x) + H_I \quad (2.2)$$

onde a Hamiltoniana de interação,

$$H_I = \frac{3}{8}G \int d^3x \mathcal{F} (\bar{\psi}(x)\gamma_\mu T^A \psi(x)) (\bar{\psi}(x)\gamma^\mu T^A \psi(x)) \quad (2.3)$$

descreve a interação entre quatro férmions com a estrutura, cor e sabor gerada pela troca de um glúon e onde T^A representam os geradores do grupo $SU(3)_{cor}$ (proporcionais às matrizes de Gellman). Na QCD realística a interação torna-se fraca a altos momentos e por isso introduzimos um fator de forma \mathcal{F} . Usando um cálculo variacional neste Hamiltoniano, mostramos no apêndice (A) como obter a equação do gap. Neste cálculo usamos a forma mais simples para este fator de forma (uma função degrau)

$$\mathcal{F} = \begin{cases} 1 & \text{para } p < \Lambda \\ 0 & \text{para } p > \Lambda \end{cases} \quad (2.4)$$

onde o parâmetro de corte Λ terá que ser definido. Outras formas para \mathcal{F} como uma função degrau mais suave ou com uma forma de lei de potências também foram usadas na literatura [6, 7].

Partindo desta Hamiltoniana e usando um ansatz BCS para a função de onda do estado fundamental mostramos nesse apêndice que a equação do gap Δ é dada por:

$$1 = \frac{2G}{V} \sum_{\mathbf{p}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(|\mathbf{p}| - \mu)^2 + \Delta^2}} + \frac{1}{\sqrt{(|\mathbf{p}| + \mu)^2 + \Delta^2}} \right\} \quad (2.5)$$

O primeiro termo do lado direito da Eq. (2.5) conduz a uma divergência logarítmica na superfície de Fermi se Δ for pequeno. Este termo é a contribuição da equação de gap para o par partícula-buraco (o quasi-quark no nosso caso), e a divergência logarítmica é a manifestação da instabilidade BCS, já referida anteriormente. Por causa da divergência do lado direito para $\Delta \rightarrow 0$, deve haver uma solução para a equação de gap com $\Delta \neq 0$ mesmo para valores pequenos da constante de acoplamento G . Para isso basta que G seja positivo (atrativo), visto o lado direito desta equação ter que ser positivo. O segundo termo, com $(|\mathbf{p}| + \mu)$ no denominador, é a contribuição das antipartículas. Vale a pena salientar que a contribuição das antipartículas para a equação de gap é pequena pois o seu denominador já é sempre maior que μ .

Para um sistema infinito pode-se escrever:

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}$$

Desta maneira a Eq. (2.5), pode ser reescrita como:

$$\Delta = 2G \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\frac{\Delta}{\sqrt{(|\vec{p}| - \mu)^2 + \Delta^2}} + \frac{\Delta}{\sqrt{(|\vec{p}| + \mu)^2 + \Delta^2}} \right) \quad (2.6)$$

A Eq. (2.6) é a versão integral da Eq. (2.5) mas multiplicada por Δ apenas porque a usaremos em seguida nessa forma para obter a energia livre.

Usando a função de onda dada no apêndice (A) para o valor de Δ que é solução da equação do gap (Eq. (2.5)), obtemos a relação de dispersão para a quasi-partícula formada pelo di-quark

$$E(\mathbf{p}) = \sqrt{(|\mathbf{p}| - \mu)^2 + \Delta^2} \quad (2.7)$$

Nesta relação E é a energia necessária para remover o par de quarks. Esta equação mostra que Δ é o gap no espectro de excitação fermiônico exatamente como na teoria da supercondutividade da matéria condensada: a energia exigida para formar uma excitação partícula-buraco é no mínimo igual a 2Δ [3]. Assim, o par de Cooper de spin 0 para os quarks leves condensa e tem a forma $(ud - du)$ pois é um singlete quiral que é antisimétrico na troca de sabor e na troca de cor pois está no estado $\bar{\mathbf{3}}$ que é o canal atrativo na interação de troca de um glúon. Devido à condensação, os pares de quarks com cor vermelha e verde adquirem um gap Δ que é a massa das excitações em torno da superfície de fermi (quasi-quarks) mas os quarks de cor azul não adquirem massa (pela nossa escolha da direção "3" no espaço de cor).

Como mostramos no apêndice (A) a energia do gap é exatamente o valor do condensado multiplicado pela constante de acoplamento G . No limite de acoplamento fraco previsto para altas densidades, onde o valor de G é pequeno (e consequentemente Δ também) podemos integrar analiticamente a Eq. (2.5) e expandir a solução para $\Delta \ll \mu, \Lambda$. Neste caso conseguimos obter uma expressão simples para a energia do gap, válida apenas para o caso de acoplamento fraco [4]

$$\Delta = 2\sqrt{\Lambda^2 - \mu^2} \exp\left(\frac{\Lambda^2 - 3\mu^2}{2\mu^2}\right) \exp\left(-\frac{\pi^2}{2\mu^2 G}\right) \quad (2.8)$$

Nesta expressão os termos que são função de Λ dependem de modelo, especificamente do fator de forma \mathcal{F} escolhido, mas na última exponencial o fator $2(\mu/\pi)^2$ que multiplica a constante de acoplamento G é universal, é a densidade de estados exatamente como previsto pela teoria BCS [3] para os quarks u e d com cores vermelho e verde.

Para obter a contribuição da energia de emparelhamento para a energia livre

podemos calcular o valor esperado de Ω na função de onda BCS obtida pelo princípio variacional, com o valor de Δ que é solução da Eq. (2.5). Uma outra alternativa é usar o fato de que a equação Eq. (2.6) deve ser entendida como vindo de um princípio de minimização, ou seja de que a energia livre tem que ser estacionária em relação ao parâmetro do gap, $\frac{\partial \Omega}{\partial \Delta} = 0$. Assim, se integrarmos a equação do gap em relação a Δ a energia livre Ω pode ser escrita da forma

$$\Omega = \Omega_{\text{livre}} + V \int_0^{\Delta_{\text{solucao}}} d\Delta \left(-\frac{\Delta}{2G} + \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \text{integrando} \right) \quad (2.9)$$

onde o “integrando” é exatamente o mesmo que o do lado direito da equação Eq. (2.6) e Δ_{solucao} é o valor de Δ que é solução dessa equação. Ω_{livre} é a expressão usual para a energia livre de férmions não-interagentes (livres).

A contribuição do emparelhamento para a energia livre pode ser obtida exatamente no limite de acoplamento fraco onde Δ é dado pela Eq. (2.8). Integrando explicitamente a Eq. (2.9) no limite em que $G \rightarrow 0$ (o que significa considerar que $\Delta \ll \mu, \Lambda$) e depois usando a expressão de Δ neste limite, dada pela Eq. (2.8), para eliminar G , obtemos [4]

$$\frac{\Omega - \Omega_{\text{livre}}}{V} = - \left(\frac{\Delta \mu}{\pi} \right)^2 \quad (2.10)$$

Este resultado mostra que desapareceram a constante G e o parâmetro de corte Λ que são dependentes de modelo e que apenas o observável físico, a energia do gap Δ , permaneceu. Assim, é razoável aceitar que caso este cálculo tivesse sido feito mesmo na QCD no limite de acoplamento fraco e tivéssemos obtido o valor do gap, o resultado obtido acima para a energia de condensação no limite assintótico deveria ser válido (a menos de algum prefator numérico).

Finalmente para estimarmos o valor numérico de Δ necessitamos fixar a constante G e o parâmetro de corte Λ . Isto é feito calculando o gap do vácuo quiral que gera a massa dinâmica M (massa constituinte) dos quarks, exatamente como no modelo de NJL [26, 27]. A expressão do vácuo quiral é dada por

$$1 = \frac{8G}{V} \sum_{\mathbf{p}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + M^2}} \right\} \quad (2.11)$$

e que é obtida exatamente no mesmo modo que a nossa equação do gap supercondutor, por um cálculo variacional, mas trabalhando agora no vácuo ($\mu = 0$). Um estudo recente e bem completo da quebra espontânea da simetria quiral e das fases supercondutora no modelo de Nambu foi feito por Buballa [37]. Este gap quiral M quebra a simetria quiral espontaneamente, devido a que os pares agora de quark-antiquark

condensam. Neste caso não há instabilidade BCS quando $M \rightarrow 0$ pois $\mu = 0$ [38]. Portanto, agora tem que existir um valor mínimo para a constante de acoplamento, um G_{crit} na Eq. (2.11), para que M e portanto o condensado quiral sejam não nulos. Escolhendo para massa dos quarks $M = 400$ MeV e $\Lambda = 800$ MeV (valores padrão do modelo de Nambu) a constante G esta fixada pela Eq. (2.11). Resolvendo a nossa equação do gap superconductor Eq. (2.5) com esse G , encontramos que $\Delta \sim 100$ MeV para $\mu = 400$ MeV e $\Delta \sim 150$ MeV para $\mu = 500$ MeV. Variando o parâmetro de corte e usando um fator de forma \mathcal{F} mais suave ou mais duro (uma função que seja uma lei de potências por exemplo) os resultados para Δ não variam muito e com a inclusão de instantons este parâmetro pode chegar a ser maior na ordem de 200 MeV. Como veremos em seguida, na fase CFL onde consideramos o quark estranho, o valor previsto para Δ permanece nesta ordem de grandeza, justificando os valores para Δ de 100 e 150 MeV usados por nós no próximo capítulo para obter nossos resultados.

Como vimos até agora a supercondutividade de cor depende essencialmente dos quarks perto da superfície de fermi. Como estamos interessados em altas densidades onde o potencial químico $\mu \sim 400$ a 500 MeV, bem maior que a massa m_s do quark estranho, não podemos deixar de considerar este sabor de quark. Além disso, devido à restauração quiral com a diminuição do condensado $s\bar{s}$ a massa m_s é esperada que seja bem pequena. Assim, vamos considerar primeiramente o caso em que as massas dos quarks u, d, s são nulas e c, b e t são infinitamente grandes. A inclusão de mais um sabor de quark faz com que agora os pares de Cooper não possam mais ser singletos de sabor como era o caso da fase 2SC explicada anteriormente. Assim, enquanto que na fase 2SC a simetria quiral não foi quebrada, agora com 3 sabores não só a simetria local de gauge referente ao espaço da cor $SU(3)_{cor}$ é quebrada mas também a simetria global quiral $SU(3)_L \times SU(3)_R$. Assim tanto a simetria de cor como a de sabor são quebradas o que torna a física neste caso muito mais rica como veremos em seguida. Vale a pena aqui salientar que como consequência do fechamento entre cor-sabor nesta fase CFL a simetria quiral está quebrada espontaneamente mesmo a altas densidades em contraste com a já bem estabelecida restauração da simetria quiral a altas temperaturas.

A troca de um glúon é atrativa se os quarks são antisimétricos na cor e o par, portanto, está no canal $\bar{\mathbf{3}}$. No caso de acoplamento fraco, esta interação domina e como já fizemos referência anteriormente no caso 2SC isto garante a condensação no canal $\bar{\mathbf{3}}$. A interação instanton também é atrativa no canal $\bar{\mathbf{3}}$ o que favorece ainda mais a condensação.

Neste canal a forma do condensado é dada por:

$$\langle \psi_{iL}^{a\alpha}(\vec{p}) \psi_{jL}^{b\beta}(-\vec{p}) \epsilon_{ab} \rangle = -\langle \psi(\vec{p})_{iR}^{a\alpha} \psi_{jR}^{b\beta}(-\vec{p}) \epsilon_{ab} \rangle = \Delta(p^2) \epsilon^{\alpha\beta A} \epsilon_{ijA} \quad (2.12)$$

onde (α, β) , (i, j) e (a, b) são, respectivamente, os índices de cor, sabor e spin. O índice A é somado e portanto une a cor e o sabor. Aqui estamos usando a notação de spinor com duas componentes e o índice L significa mão esquerda e R mão direita. A importante informação fornecida pelos spinores é que o condensado não viola a invariância de rotação. O sinal de menos relativo ao condensado de helicidade direita e esquerda significa que o estado fundamental é um escalar, conseqüentemente a paridade não é quebrada ¹.

Agora podemos explicar o termo CFL “Color-Flavor-Locking”. Escrevendo:

$$\epsilon^{\alpha\beta A} \epsilon_{abA} = \delta_a^\alpha \delta_b^\beta - \delta_b^\alpha \delta_a^\beta$$

o condensado da Eq. (2.12) apresenta uma dependência com as funções delta de Kronecker que relacionam os índices de cor e sabor. Estes condensados não são invariantes separadamente por transformações de cor $SU(3)_{cor}$ ou de sabor $SU(3)_{L,R}$. Agora, devido as funções delta, o condensado é simétrico se rodarmos simultaneamente, a cor e o sabor. Num modo mais técnico, por exemplo para o caso de spinores mão esquerda, o grupo de rotações de sabor $SU(3)_L$ fecha (esta ligado) com o grupo de rotações no espaço da cor $SU(3)_{cor}$, no sentido de que o condensado necessita também rodar no espaço de cor de tal modo que ele só é invariante pela transformação simultânea de rotações $SU(3)_{L+cor}$ (no caso de spinores mão de direita temos o mesmo fenômeno tendo agora que considerar o grupo de rotações de sabor $SU(3)_R$). Assim estas duas simetrias estão fechadas nesta fase, mas separadamente tanto a simetria de cor como de sabor (quiral) estão quebradas. interessante que todas as simetrias estão quebradas na fase CFL da matéria de quarks do mesmo modo que na fase hadrônica, ou seja na matéria bariônica na presença de condensados de pares de bárions (a dualidade quark-hádron discutida inicialmente em [9]). Assim, pode ser que a fase CFL possa se conectar continuamente com a matéria bariônica. No caso da fase 2SC, onde a simetria quiral não está quebrada, a transição entre esta fase e a matéria bariônica deverá ser mais abrupta e, o mais certo, de primeira ordem.

Nesta fase, todos os 3 sabores e 3 cores participam da condensação. Os pares de Cooper $u-d$, $d-s$ e $u-s$ formam-se, de tal modo que todos os 9 quarks adquirem um gap (uma massa). A quebra da simetria de cor, via o mecanismo de Higgs, faz com que também os 8 glúons adquiram massa. Além disso, temos o aparecimento de 8 bósons de Nambu-Goldstone sem massa devido à quebra espontânea da simetria

¹De fato a condensação no canal $\bar{\mathbf{3}}$ induz um condensado também no canal $\bar{\mathbf{6}}$ [7], embora este novo condensado não seja muito favorecido energeticamente visto a interação de troca de um glúon ser repulsiva neste caso. Assim o condensado mais geral na fase CFL depende de duas funções κ_1 e κ_2 sendo proporcional a $\epsilon^{ab}(\kappa_1(p^2)\delta_i^\alpha\delta_j^\beta + \kappa_2(p^2)\delta_j^\alpha\delta_i^\beta)$. O condensado puro no canal $\bar{\mathbf{3}}$ escrito na Eq. (2.12) é o caso mais simples onde $\kappa_2 = -\kappa_1$, o que é razoável pois este canal domina no limite assintótico de densidades em que estamos interessados [7, 8].

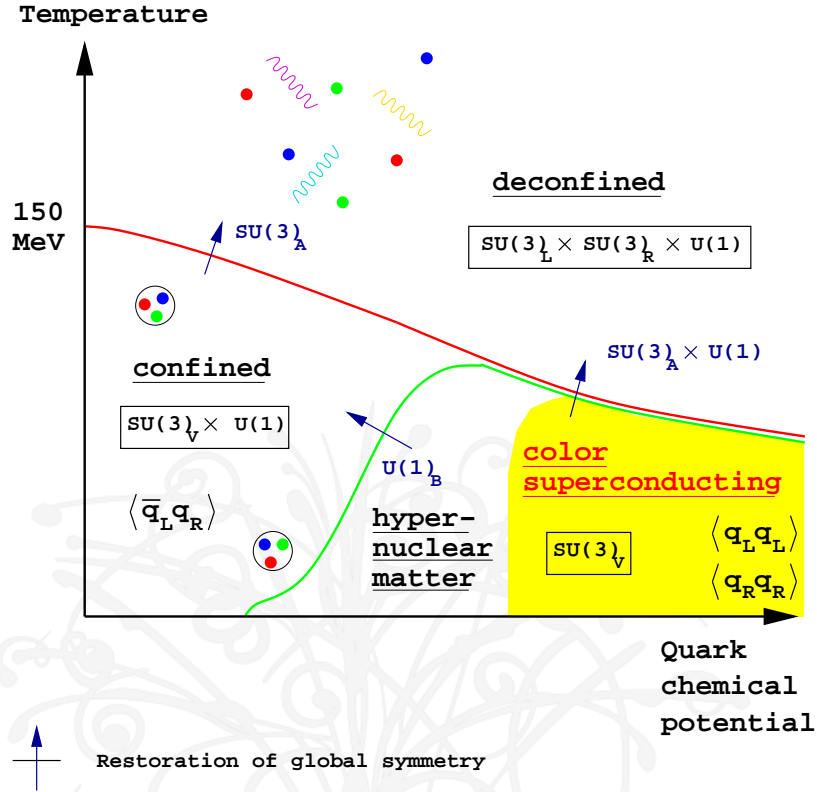


Figura 2.1: Diagrama de fase para três sabores de quarks sem massa, conforme [5].

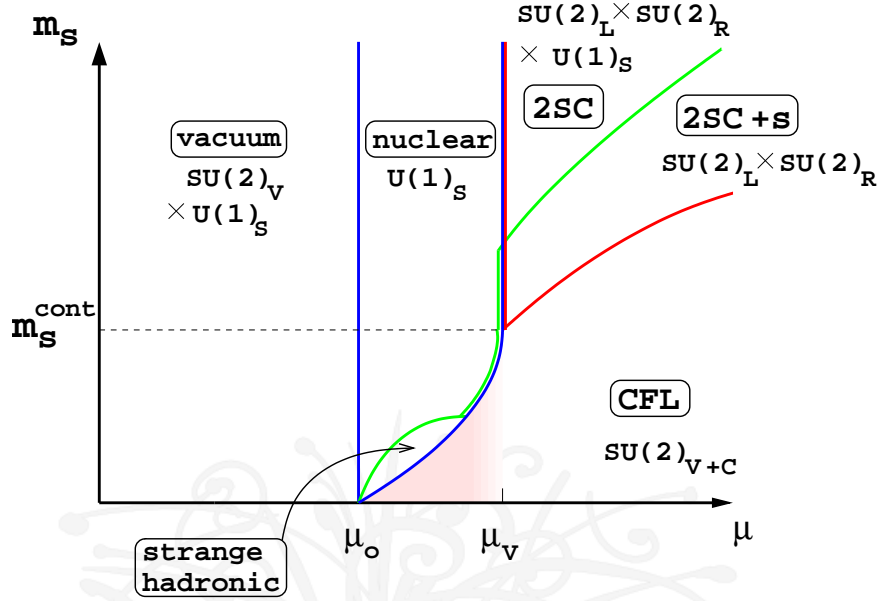
quiral (exatamente como o octeto mesônico pseudo-escalar a baixas energias). Temos também a violação do número bariônico $U(1)$ o que produz mais um bóson de Nambu-Goldstone. Os dois mecanismos de quebra de simetria onde o estado fundamental não tem a simetria da hamiltoniana estão presentes na fase CFL: a local de gauge, de cor, (mecanismo de Higgs) e a global, a quiral, (mecanismo de Nambu-Goldstone) produzindo todo esse espectro de excitações e alguns novos fenômenos [7, 8, 42].

Apresentamos na Fig. (2.1) o diagrama de fase previsto para matéria no caso de 3 sabores de quarks sem massa. A altas densidades e baixas temperaturas temos a fase CFL supercondutora. Ao aumentar a temperatura temos a restauração da simetria quiral e os quarks continuam desconfiados, que é a fase do plasma de quarks e glúons. A baixas temperaturas e ao diminuir a densidade temos o surgimento de uma matéria hiperônica, onde as simetrias são as mesmas da fase CFL e por isso pode ser que não exista nenhuma transição de fase entre estes dois regimes (não há uma linha no diagrama $T \times \mu$ entre estas duas fases). A única diferença entre estes dois regimes é o desconfinamento. Como já fizemos referência antes, isto é conhecido como dualidade quark-hádron ou continuidade quark-hádron [9]. Como o momento de fermi é muito alto, a superfície de fermi dos hiperons e dos nucleons é essencialmente a mesma e pares de p(n)-híperons ou mesmo apenas híperon-híperon podem ser criados, fazendo com que devido à existência destes condensados a simetria quiral continue quebrada como

na fase CFL. Na realidade, é possível escrever o espectro de partículas continuamente da matéria hipernuclear para a matéria de quarks CFL [8, 9]. Os píons tornam-se o octeto pseudoescalar dos bósons de Nambu-Goldstone, os méson vetoriais convertem-se para os glúons massivos e os bárions para os quarks. Portanto, considerando apenas o espectro de excitações, os dois regimes da matéria hipernuclear-CFL são indistinguíveis. Diminuindo mais o potencial químico (a densidade) aparece a matéria nuclear onde a simetria quiral está quebrada agora pelo condensado quiral $\langle q\bar{q} \rangle \neq 0$ e a estranheza e o número bariônico $U(1)$ são conservadas.

Vale a pena aqui fazer referência que no mundo real a massa do quark estranho não é nula e os efeitos deste fato alteram um pouco o diagrama de fase anterior previsto para quarks sem massa. Conforme descrito em [5, 7] ao aumentar a massa do quark estranho m_s na fase CFL, os condensados us e ds devem se anular (a diferença entre os níveis de fermi dos quarks leves com do estranho é grande) para um dado valor crítico de m_s e, neste caso, teríamos uma fase quiral restaurada $SU(2)_L \times SU(2)_R$, apenas para os quarks leves (mas continuando com 3 sabores) não existindo mais o fechamento da cor-sabor (conhecida como fase 2SC+s unlocked para $m_s \neq 0$ e discutida em [8]). No caso de m_s ser muito grande de tal modo que $\mu < m_s$, não é possível criar quarks estranhos e aí teríamos a uma transição dessa fase quiral para a fase supercondutora 2SC só com dois sabores descrita anteriormente, onde a estranheza $U(1)_S$ é conservada pois não temos mais quarks estranhos. Esta discussão fica mais clara no diagrama de fase de $m_s \times \mu$. Esse diagrama está representado na Fig. (2.2), onde $\mu_o \sim 300$ MeV é o potencial químico de quarks referente à matéria nuclear [5, 8]. Ao baixar o potencial químico para perto de μ_o temos a continuidade quark-hádron já discutida, onde surge uma pequena região com a matéria hipernuclear onde a estranheza está quebrada e para valores ainda menores de μ temos a usual matéria nuclear onde a simetria $U(1)_S$ da estranheza é restaurada (não há bárions estranhos) e a simetria quiral $SU(2)_L \times SU(2)_R$ da fase 2SC está quebrada.

Neste nosso trabalho, como veremos no capítulo (3), as massas dinâmicas dos quarks u , d e s obtidos no modelo CDM na solução para altas densidades são quase nulas. Assim, vamos trabalhar na versão CFL com quarks sem massa. Neste caso, como a forma do condensado CFL dado na Eq. (2.12) tem a mesma forma que no caso da fase 2SC Eq. (2.1), a menos da cor que não condensa neste caso, o cálculo para a energia do gap, a equação de gap, é o mesmo e a contribuição do emparelhamento para energia livre também. A única diferença é que temos agora três tipos de pares de quarks: $u - d$ (como na fase 2SC), $u - s$ e $d - s$ o que faz com que o termo na energia livre devido ao emparelhamento no limite de acoplamento fraco, na fase CFL seja


 Figura 2.2: Diagrama de fase para 2+1 sabores à $T = 0$, conforme [5].

$$\frac{\Omega_{CFL} - \Omega_{livre}}{V} = -3 \left(\frac{\Delta\mu}{\pi} \right)^2. \quad (2.13)$$

Este resultado mostra claramente que a fase CFL é favorecida em relação à fase 2SC, visto ter uma energia livre menor.

Na fase CFL o momento de cada quark tem que ser o mesmo, para que a energia livre da fase CFL seja mínima, no sentido de favorecer a maior formação de pares (mesmo no caso de que os quarks tenham massa) [39]. Deste modo, devido às respectivas cargas dos quarks u , d e s a fase CFL é eletricamente neutra. Como é discutido nesse trabalho, a fase CFL funciona como um isolante e não permite a presença de elétrons. Recentemente, foi considerada a possibilidade de que os bósons de Nambu-Goldstone, que aparecem na fase CFL, condensem. Se o potencial químico dos elétrons for não nulo e maior que a massa do π^- um condensado de pions pode surgir e como $\mu_e \neq 0$ teremos também um número de elétrons na fase CFL, tornando a fase CFL carregada. Neste trabalho, os resultados mostram que esta carga é pequena na fase CFL. Ao considerar esta condensação de pions (a contribuição de um condensado de kaons é muito pequena [40]) temos que incluir novos termos na expressão da energia livre da fase CFL devido à contribuição destes bósons (negativa) e à dos elétrons (positiva) [41]. Ambos estes termos são proporcionais μ_e e portanto no caso de $\mu_e=0$ não contribuem. Neste nosso trabalho vamos trabalhar com a expressão da energia livre vinda apenas dos quarks (Eq.(2.13)) assumindo $\mu_e = 0$ (sem elétrons) de acordo com [39].

2.1 Modelo CDM na fase CFL

Nesta seção vamos apresentar o modelo Cromodielétrico na fase CFL, introduzindo o termo de emparelhamento atrativo $-3\left(\frac{\Delta\mu}{\pi}\right)^2$ que diminui a energia livre conforme a discussão da seção anterior, e como Δ apresenta uma pequena dependência com μ no caso de altas densidades (μ entre 400 a 500 MeV), vamos considerar a energia do gap constante. Mesmo que este novo termo não tenha sido derivado no modelo CDM, a sua dedução vem da QCD de uma maneira efetiva, ao linearizar (aproximação de campo médio) a interação de quatro férmions que no modelo CDM está presente de um certo modo no termo de interação méson-quark. Como foi mostrado em [17, 18], no regime de altas densidades a EOS obtida pela solução *nova* no modelo CDM é essencialmente a obtida pela QCD numa expansão perturbativa [36], o que justifica a introdução do termo de emparelhamento no modelo cromodielétrico. Um estudo da fase supercondutora CFL no modelo do MIT foi realizado em [43], onde esse termo de emparelhamento foi também incluído na energia livre no modelo de sacola. Como no trabalho realizado no modelo do MIT, vamos considerar que a energia do gap a altas densidades varia pouco com o potencial químico μ e pode ser tratada como um parâmetro fixo que não varia com a densidade.

Da termodinâmica sabemos que, no caso de sistemas cuja temperatura é zero, o gran-potencial dividido pelo volume do sistema, é dado por:

$$\Omega = \varepsilon - \mu\rho \quad (2.14)$$

onde ε é a densidade de energia, μ é o potencial químico e ρ é a densidade de partículas.

Seguindo os mesmos passos desenvolvidos em [43] para o caso do modelo de MIT, o gran-potencial do modelo CDM na fase supercondutora de cor (CFL), é dado por

$$\Omega_{CFL} = \alpha \sum_{i=u,d,s} \int_0^{k_i} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\sqrt{k^2 + m_i^2} - \mu_i \right) - 3 \left(\frac{\Delta\mu}{\pi} \right)^2 + U(\chi) + W(\sigma, \pi) \quad (2.15)$$

onde a massa dos quarks m_i é dado pela Eq. (1.11), $U(\chi)$ pela Eq. (1.7) e $W(\sigma, \pi)$ pela Eq. (1.4). Conforme discutido anteriormente o termo $U(\chi) + W(\sigma, \pi)$ pode ser identificado com a constante da sacola B do modelo do MIT.

Utilizando $\alpha = 6$ e a simetria esférica, a Eq. (2.15) torna-se:

$$\Omega_{CFL} = \frac{3}{\pi^2} \sum_{i=u,d,s} \int_0^{k_i} k^2 \left(\sqrt{k^2 + m_i^2} - \mu_i \right) dk - 3 \left(\frac{\Delta\mu}{\pi} \right)^2 + U(\chi) + W(\sigma, \pi) \quad (2.16)$$

que pode ser escrita como:

$$\Omega_{CFL} = \varepsilon_k - \frac{1}{\pi^2} \sum_{i=u,d,s} \mu_i k_i^3 - 3 \left(\frac{\Delta\mu}{\pi} \right)^2 + U(\chi) + W(\sigma, \pi) \quad (2.17)$$

onde

$$\varepsilon_k = \frac{3}{\pi^2} \sum_{i=u,d,s} \int_0^{k_i} \left(k^2 \sqrt{(k^2 + m_i^2)} \right) dk \quad (2.18)$$

é a energia cinética do gás de quarks relativístico.

Substituindo (2.17) em (2.14), para os quarks u , d e s , a densidade de energia é dada por:

$$\varepsilon = \varepsilon_k - \frac{1}{\pi^2} \sum_{i=u,d,s} \mu_i k_i^3 - 3 \left(\frac{\Delta\mu}{\pi} \right)^2 + U(\chi) + W(\sigma, \pi) + \sum_{i=u,d,s} \mu_i \rho_i \quad (2.19)$$

Na fase CFL, conforme discutido anteriormente e para garantir a neutralidade de carga, os momentos de fermi ($k_i = \sqrt{\mu_i^2 - m_i^2}$) de todos os quarks são iguais, ou seja:

$$k_f = k_u = k_d = k_s = 2\mu - \sqrt{\mu^2 + \frac{m_s^2}{3}} \quad (2.20)$$

onde definimos o potencial químico μ dos quarks por

$$3\mu = \sum_{i=u,d,s} \mu_i \quad (2.21)$$

e consideramos que as massas dos quarks u e d são muito pequenas.

Derivando o gran-potencial dado pela Eq. (2.17) em relação ao potencial químico, sabendo que todos os quarks possuem o mesmo momento de fermi e usando a Eq. (2.21), obtemos que a densidade dos quarks u , d e s na fase CFL é a mesma, fazendo com que a densidade bariônica ρ seja dada por:

$$\rho = \rho_u = \rho_d = \rho_s = \frac{1}{\pi^2} (k_f^3 + 2\Delta^2\mu) \quad (2.22)$$

Vale a pena salientar que como o termo de emparelhamento na Eq. (2.17) depende do potencial químico, a densidade bariônica na fase CFL depende também do valor da constante de emparelhamento Δ e não só de k_f^3 . Este resultado manifesta o fato bem conhecido de que a teoria BCS viola a conservação do número de partículas e este número depende agora não só do momento de fermi mas também do próprio valor do condensado (o gap). Assim, para uma dada densidade quanto maior for Δ menor será o momento de fermi. Como veremos, isto afetará a contribuição para a densidade

de energia que vem do termo da energia cinética escrita na Eq. (2.19).

Substituindo (2.20), (2.22) e (2.21) na Eq. (2.19), temos:

$$\varepsilon = \varepsilon_k - \frac{3\mu k_f^3}{\pi^2} - 3 \left(\frac{\Delta\mu}{\pi} \right)^2 + U(\chi) + W(\sigma, \pi) + \frac{3\mu}{\pi^2} (k_f^3 + 2\Delta^2\mu) \quad (2.23)$$

obtendo por fim uma expressão simples para a densidade de energia

$$\varepsilon = \varepsilon_k + 3 \left(\frac{\Delta\mu}{\pi} \right)^2 + U(\chi) + W(\sigma, \pi) \quad (2.24)$$

onde ε_k é dado pela Eq. (2.18).

Comparando a Eq. (2.24) com a Eq. (1.9), observamos a introdução do termo de emparelhamento e que este contribui positivamente para a densidade de energia no modelo CDM, da mesma forma que no modelo do MIT [43]. A Eq. (2.24) é formalmente igual à obtida no modelo do MIT, se identificarmos os potenciais mesônicos $U(\chi) + W(\sigma, \pi)$ com a constante da sacola B .

Como a pressão é dada por:

$$p = -\Omega_{CFL} \quad (2.25)$$

obtemos pela Eq. (2.17)

$$p = \frac{3\mu k_f^3}{\pi^2} - \varepsilon_k + 3 \left(\frac{\Delta\mu}{\pi} \right)^2 - U(\chi) - W(\sigma, \pi) \quad (2.26)$$

onde utilizamos a Eq. (2.21).

Nota-se que o termo de emparelhamento também contribui positivamente para a pressão enquanto o potencial confinante $U(\chi)$ tende a diminuí-la. Isto significa que o emparelhamento aumentando a pressão diminui a energia livre tornando em principio o sistema mais estável, enquanto que o potencial confinante conspira contra a estabilidade do sistema [19].

As duas equações acima constituem a EOS do modelo CDM na fase supercondutora CFL. Para calcularmos as grandezas físicas de interesse como a densidade de energia ε , pressão p e as massas dos quarks m_i , para os regimes de altas e baixas densidades (conforme a solução de χ), utilizamos um programa feito em fortran no qual fixado o emparelhamento Δ , a constante de acoplamento g e o parâmetro η , resolvemos para uma dada densidade o sistema formado pelas três equações: (1.16), (1.20) mais a

da conservação da densidade bariônica

$$3\rho = \rho_u + \rho_d + \rho_s \quad (2.27)$$

utilizando o método numérico de Newton-Raphson.

Para encontrar as três soluções desse sistema, precisamos iniciar o método numérico com um valor inicial para as três variáveis χ , σ e μ . Para escolher um bom valor inicial para χ temos que analisar que tipo de regime estamos interessados em estudar, ou seja, o regime de altas densidades ($\chi \sim \gamma m_\chi$ perto do segundo mínimo, a solução *nova*), ou o regime de baixas densidades ($\chi \sim 0$ próximo do mínimo global, solução *normal*). Os valores iniciais escolhidos para o campo σ e o potencial químico μ foram f_π e um terço da massa do nucleon respectivamente. Após o programa ter fornecido o valor de χ , σ e μ (e conseqüentemente k_f) que são as soluções das três equações descritas acima, podemos encontrar as massas dos quarks através da Eq. (1.11), densidade de energia pela Eq. (2.24) e a pressão da Eq. (2.26) tanto para a solução *Normal* quanto a *Nova*. No capítulo seguinte, apresentaremos os resultados obtidos pelo procedimento numérico que acabamos de detalhar.

INSTITUTO DE FÍSICA

Universidade Federal Fluminense

Capítulo 3

Resultados

Neste capítulo vamos apresentar os resultados obtidos no modelo cromodielétrico na fase CFL descrito no capítulo anterior. Como no caso da matéria de quarks sem emparelhamento [17, 18] temos duas soluções neste modelo: uma para valores de χ pequeno (solução normal) e outra para valores grandes deste campo, localizada perto do segundo mínimo do potencial confiante, $\chi \sim \gamma m_\chi$ (solução nova).

3.1 Equação de estado com emparelhamento fraco

Nesta seção iremos estudar a matéria estranha de quarks u , d e s para esses dois tipos de solução (normal e nova) do potencial $U(\chi)$ no CDM para emparelhamento fraco. Como o termo de emparelhamento para $\Delta \leq 20$ MeV é pequeno comparado com o potencial $U(\chi)$ podemos desprezar seu efeito. É este o caso que aqui denominamos de emparelhamento fraco. Sendo assim, vamos considerar $\Delta = 0$ nesta seção. Contudo as outras condições da fase CFL, como a igualdade dos momentos de fermi e como consequência a neutralidade de carga, serão mantidas.

Vamos primeiro considerar o caso da solução nova. Como o emparelhamento é fraco, esta solução é idêntica à solução nova com equilíbrio β . Como discutimos no capítulo anterior, nesta solução da matéria de quarks sem emparelhamento, que acontece a altas densidades, os quarks possuem massas quase nulas (regime quiral) e para garantir a neutralidade de carga, a solução auto-consistente para esta matéria força todos os momentos de fermi dos quarks u , d e s a serem iguais, que como acabamos de escrever, é uma característica da fase CFL. Em trabalhos anteriores sobre a matéria estranha em equilíbrio β [17], foi discutida a estabilidade desta matéria na solução nova ($\varepsilon < \rho M$), em função dos parâmetros do modelo. Definindo as massas dos mésons e do campo χ , os parâmetros livres no modelo são apenas a constante de acoplamento g , γ e

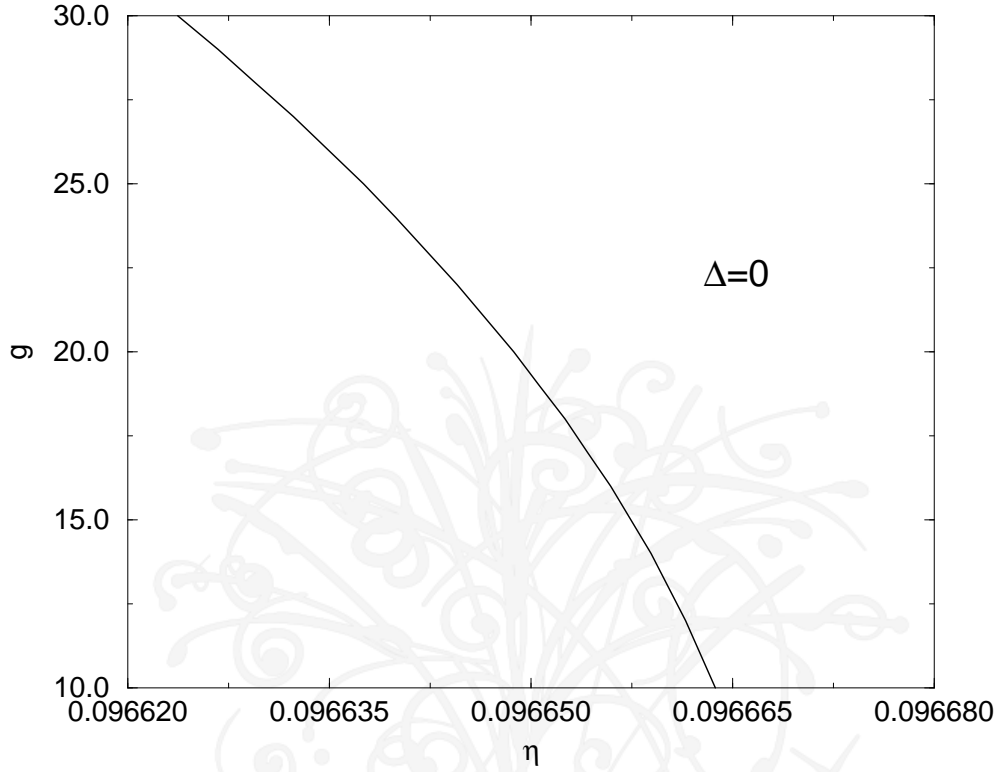


Figura 3.1: Curva da estabilidade da matéria de quarks sem emparelhamento.

η , estes dois últimos ligados ao segundo mínimo do potencial $U(\chi)$ e só são importantes para esta solução. Como, para este caso, a sensibilidade da EOS ao parâmetro γ é pequena [17], apenas os parâmetros g e η são relevantes.

Para o valor de $g = 23$ MeV usado anteriormente na literatura [16], e que reproduz bem as propriedades do nucleon, a matéria de quarks é instável para $\eta \gtrsim 0.1$. Para realizar um estudo da estabilidade da matéria de quarks na fase CFL, para a solução nova, vamos procurar o par (g, η) que satisfaz o limite de estabilidade $\varepsilon = \rho M$. Esta curva é mostrada na Fig. (3.1), na qual a região à esquerda da curva fornece estabilidade ($\varepsilon < \rho M$) e à direita a matéria de quarks é instável ($\varepsilon > \rho M$). Nesta figura podemos observar que ao variar g o parâmetro η praticamente não se altera. Assim, para $g = 23$ MeV temos o parâmetro $\eta = 0.0966$ para a matéria de quarks com emparelhamento fraco.

Uma vez fixado o parâmetro η , vejamos o quanto a escolha de g influencia no modelo CDM. Para isso, iremos usar dois valores de g da Fig. (3.1) e juntamente com $\eta = 0.0966$ obter a EOS sem emparelhamento para as soluções nova e normal (esta independe de η). Estas duas equações de estado podem ser vistas, respectivamente, nas Figs. (3.2) e (3.3).

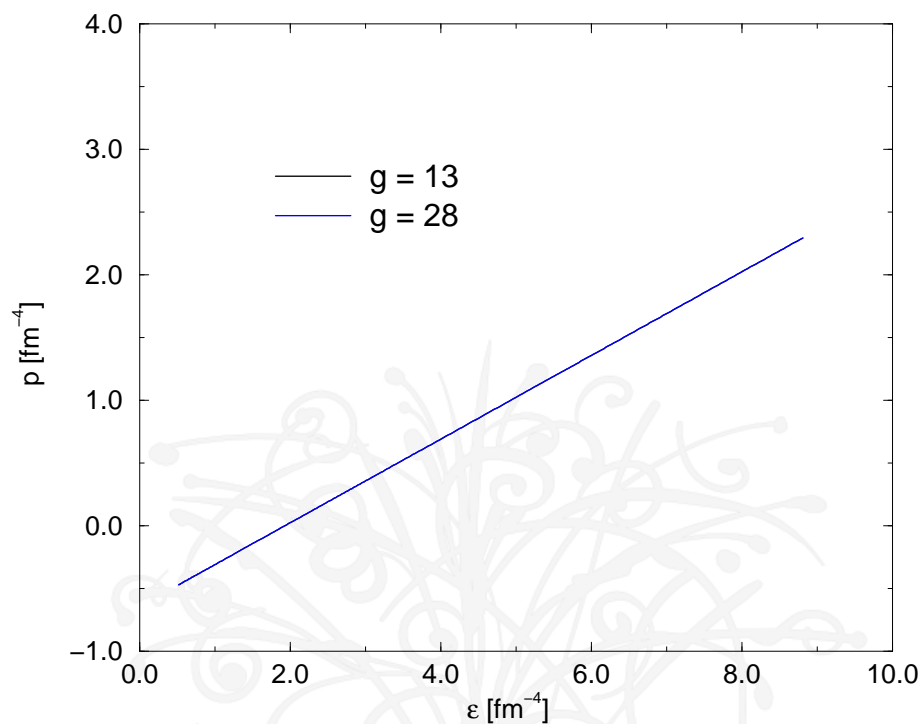


Figura 3.2: Equação de estado sem emparelhamento com $\eta = 0.0966$ para a solução nova.

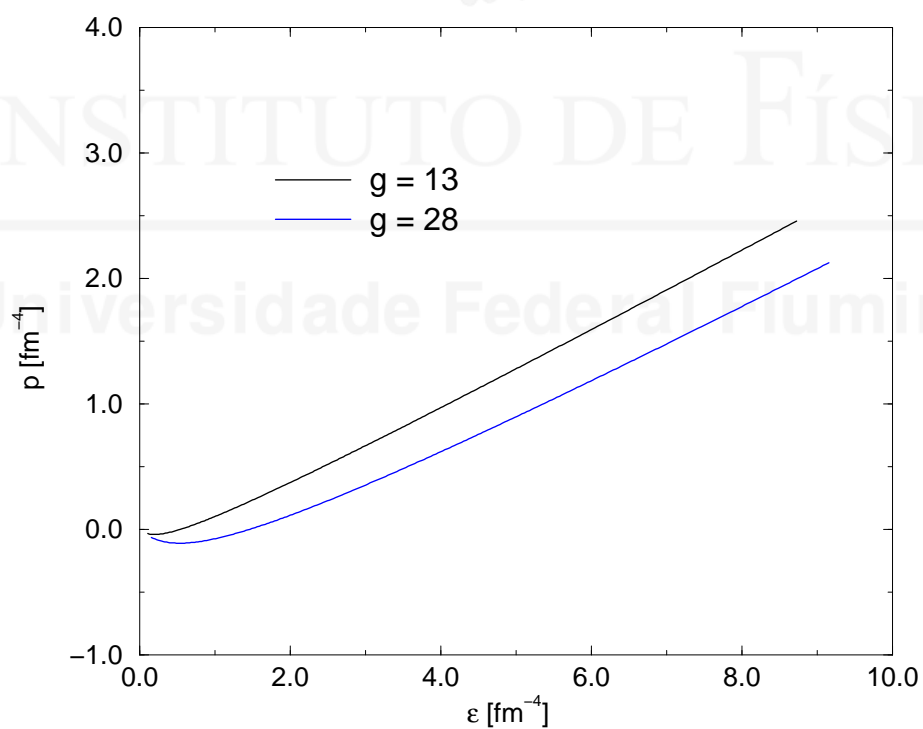


Figura 3.3: Equação de estado sem emparelhamento com $\eta = 0.0966$ para a solução normal.

Para a solução nova, a escolha de g não altera os resultados, algo que a Fig. (3.1) de fato já indica pois para uma grande variação de g , η mal se alterou e a densidade de energia permaneceu a mesma na curva de estabilidade. O motivo pelo qual isto ocorre pode ser observado na Fig. (3.5) onde apresentamos a contribuição da energia cinética do gás de quarks relativísticos ε_k (composto pelos três primeiros termos da Eq. (1.9)) e do potencial $U(\chi)$ para a densidade de energia (a contribuição do potencial chapéu mexicano do campo σ é essencialmente nula visto que $\sigma \approx f_\pi$ nas duas soluções). A EOS dependente de g somente nas massas dos quarks, conforme pode ser observado na Eq. (1.11) (o potencial $U(\chi)$ independe de g e para esta solução nova $U(\chi) = (\eta m_\chi)^4$). Como neste regime χ é grande, as massas dos quarks são desprezíveis em relação ao momento de fermi k_f o que explica a independência dos resultados da escolha de g para esta solução.

Já para a solução normal a escolha de g altera os resultados. Isto se deve ao fato de que neste regime χ é pequeno e portanto as massas dos quarks não são mais desprezíveis em relação ao momento k_f . Desta forma, com o aumento de g a energia de cada bárion torna-se crescente e conseqüentemente a densidade de energia também, como pode ser observado na Fig. (3.8). Mesmo assim, a dependência de g na EOS da solução normal é pequena. Sendo assim, escolhamos o valor de $g = 23$ MeV utilizado na literatura [16, 17] e para a solução nova $\eta = 0.0966$, que é o maior valor possível de η para termos ainda a matéria de quarks estável.

3.2 Equação de estado com emparelhamento forte

Com os valores de g e η fixados e discutidos anteriormente, faremos agora o estudo da energia por partícula e da EOS, para os dois tipos de solução, no caso de emparelhamento forte, onde consideramos valores de $\Delta \gtrsim 100$ MeV.

Na Fig. (3.4), mostramos o gráfico da energia por partícula para a solução nova com a introdução do emparelhamento. Como podemos observar, com o aumento do emparelhamento a energia por partícula diminui conduzindo a uma maior estabilidade da matéria. Este resultado à primeira vista é difícil de entender já que com a introdução do emparelhamento aumentaríamos a densidade de energia conforme Eq. (2.24). O motivo pelo qual ocorre o decréscimo da densidade de energia com a introdução do emparelhamento é mostrado na Fig. (3.5), onde apresentamos esta densidade e a contribuição para ela de cada termo, ou seja, a energia cinética do gás de quarks relativísticos ε_k , o potencial $U(\chi)$ e o emparelhamento $3(\Delta\mu/\pi)^2$ (W não é mostrado porque é nulo visto $\sigma \approx f_\pi$ mesmo com Δ grande). De acordo com a Eq. (2.22), o acréscimo no emparelhamento diminui o momento de fermi para uma dada densidade

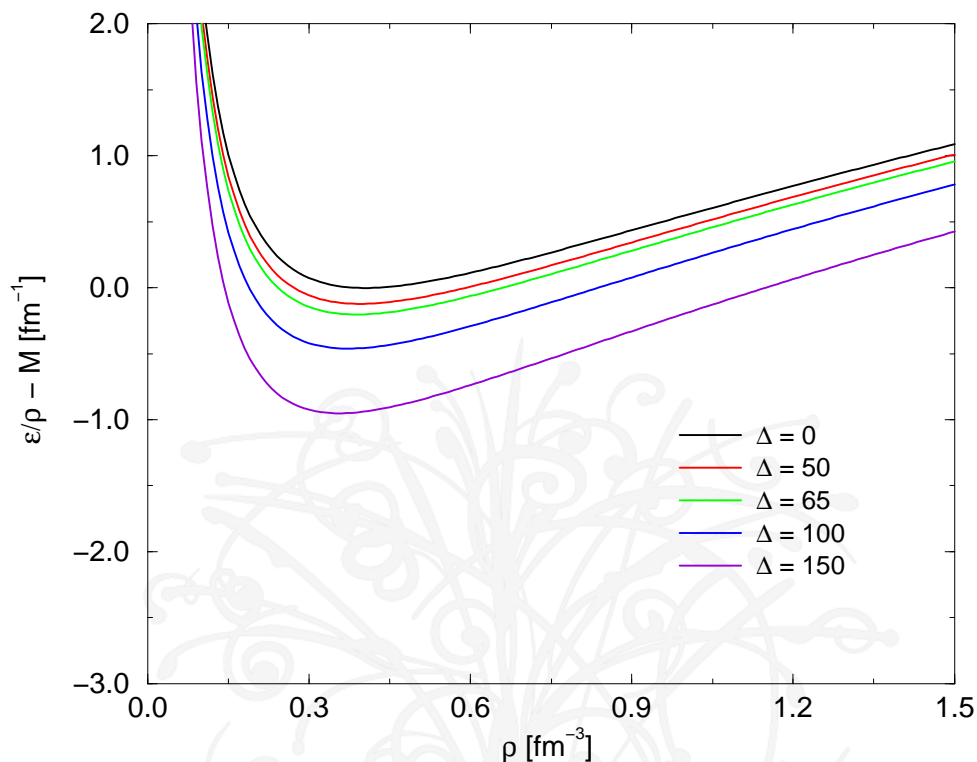


Figura 3.4: Energia por partícula em função da densidade para a solução nova com $\eta = 0.0966$ fixo introduzindo o emparelhamento.

bariônica, como pode ser observado na Fig. (3.7). Desta maneira o termo de maior contribuição para a densidade de energia (ϵ_k), cuja integração depende de k_f , de acordo com Eq. (2.18), também diminui, causando o decréscimo da densidade de energia e como consequência da energia por partícula.

A ocorrência de um mínimo na Fig. (3.4) mostra que existe uma densidade de saturação onde a pressão ($\rho^2 \partial(\epsilon/\rho)/\partial\rho$) se anula como pode ser observado na equação de estado, Fig. (3.9). Maiores detalhes sobre esta equação de estado serão apresentados mais adiante.

Reparamos também que o efeito do emparelhamento na Fig. (3.4) começa mesmo a ser importante para valores de $\Delta \gtrsim 100$ MeV. Só para valores de Δ nesta faixa, o emparelhamento torna-se relevante em comparação com o potencial $U(\chi)$, como pode ser visto na Fig. (3.5) onde apresentamos a contribuição desses dois termos para a densidade de energia.

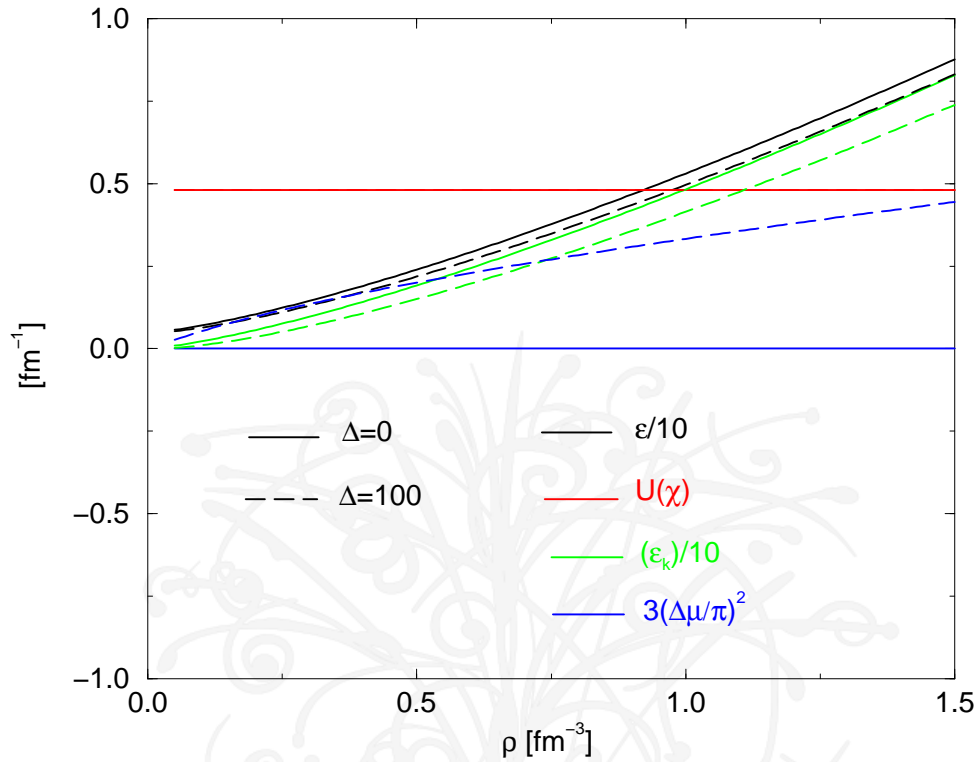


Figura 3.5: Densidade de energia e seus termos na solução nova com $\eta = 0.0966$ fixo para $\Delta = 0$ e $\Delta = 100$ MeV.

No caso da solução normal, como podemos observar na Fig. (3.6), a matéria só é estável para valores de $\Delta \lesssim 65$ MeV. Isto deve-se porque somente para estes valores de Δ , a pressão se anula conforme Fig. (3.10) gerando assim um mínimo na Fig. (3.6). Para valores maiores do emparelhamento, a energia por partícula deixa de ter mínimo e a matéria colapsa para densidades baixas. Este resultado indica que nesta fase da matéria os quarks massivos não buscam o emparelhamento. Isto ocorre porque como o potencial $U(\chi)$ é pequeno nesta solução e o efeito do emparelhamento já é muito relevante para valores de Δ relativamente baixos, como pode ser visto na Fig. (3.8). Para energias do gap $\Delta > 65$ MeV, a energia de emparelhamento supera em módulo a energia potencial e a pressão passa a ser sempre positiva, sendo impossível o seu anulamento e produzir assim, um mínimo na energia por partícula.

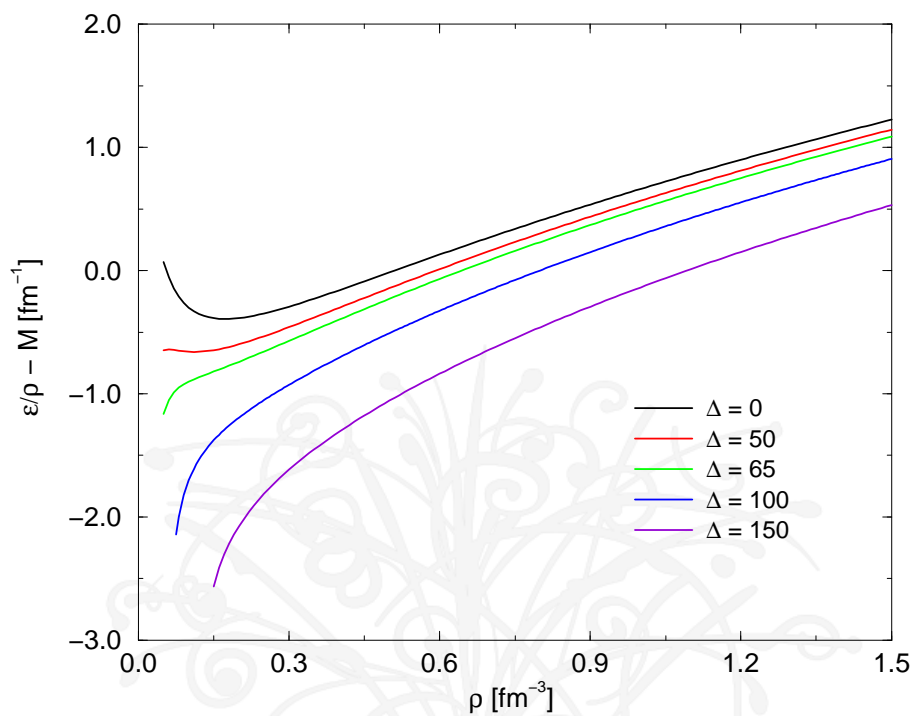


Figura 3.6: Energia por partícula em função da densidade para a solução normal com $\eta = 0.0966$ fixo introduzindo o emparelhamento.

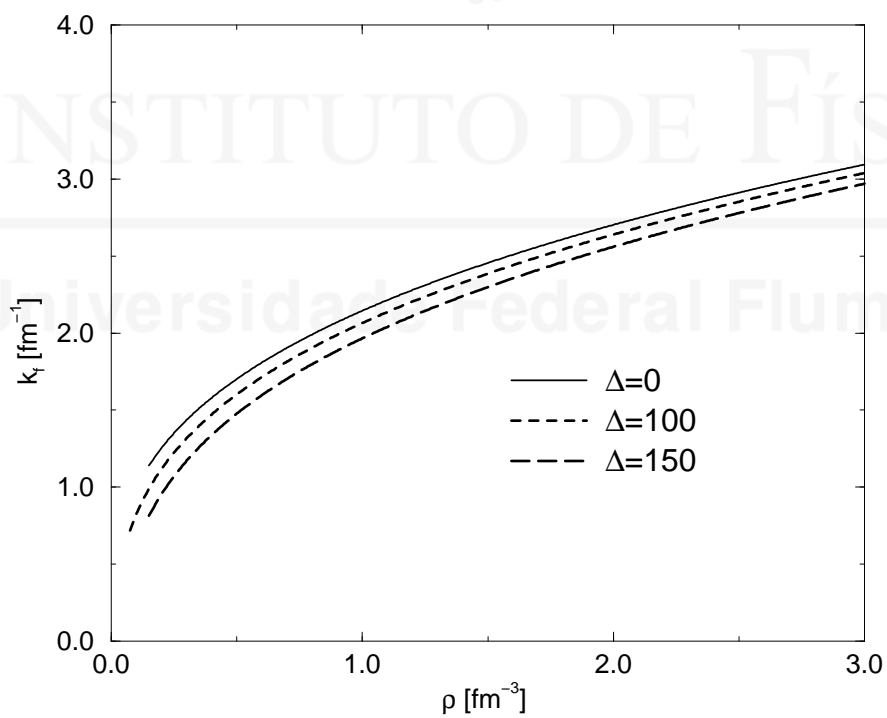


Figura 3.7: Momento de fermi em função da densidade para a solução nova com $\eta = 0.0966$ fixo introduzindo o emparelhamento.

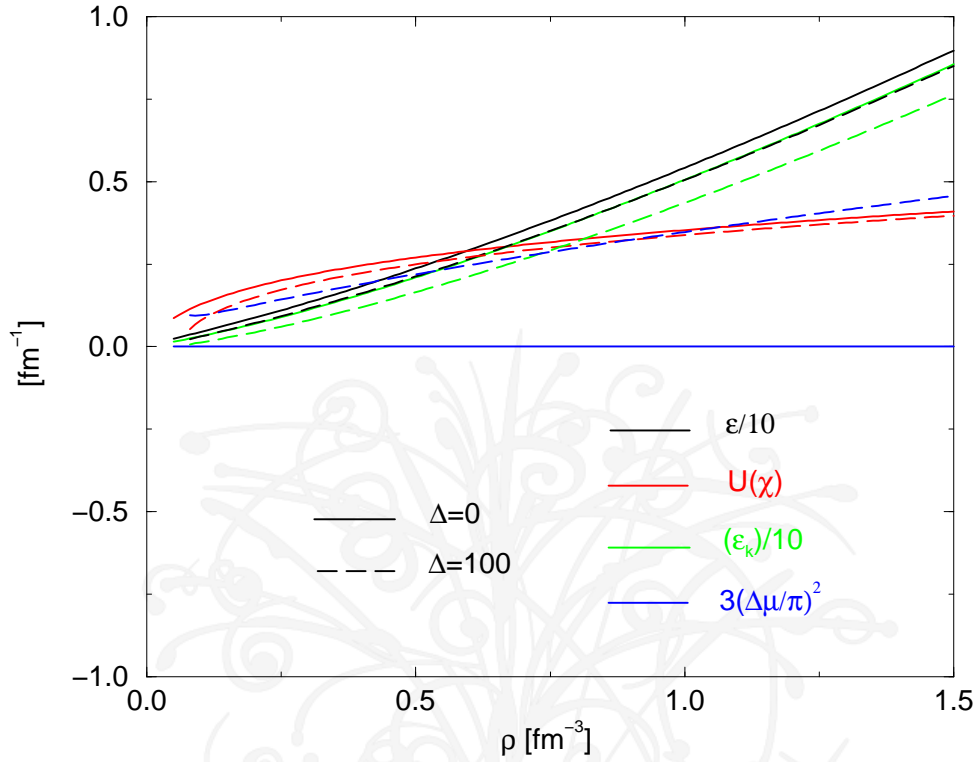


Figura 3.8: Densidade de energia e seus termos na solução normal com $\eta = 0.0966$ fixo para $\Delta = 0$ e $\Delta = 100$ MeV.

Após ter analisado o efeito do emparelhamento forte na densidade de energia, vamos ver seu efeito na pressão investigando a equação de estado (EOS) para os dois tipos de solução. Primeiramente iremos fixar o parâmetro $\eta = 0.0966$ de $\Delta = 0$ e aumentar a energia do gap. Na Fig. (3.9) temos a equação de estado para a solução nova, enquanto que na Fig. (3.10) temos a equação de estado para a solução normal. Nestas duas figuras podemos observar que para uma dada densidade de energia o aumento do emparelhamento conduz um acréscimo na pressão. Este resultado nos permite concluir que na fase CFL a equação de estado é mais dura.

Vamos agora fazer o estudo da estabilidade da matéria na fase CFL, no caso da solução nova para altas densidades, para $\Delta = 100$ MeV e $\Delta = 150$ MeV: encontrar o maior valor do par (g, η) para o qual a matéria de quarks ainda é estável. Na Fig. (3.11) e Fig. (3.12), encontram-se a curva de estabilidade da matéria para a energia do gap $\Delta = 100$ MeV e $\Delta = 150$ MeV, respectivamente. Como antes, temos que à esquerda dessas curvas a matéria é estável e à direita a matéria torna-se instável. Devido à independência com g desta solução discutida na seção anterior, o parâmetro η varia muito pouco. Desta forma, para $g = 23$ MeV temos: $\eta = 0.1053$ para $\Delta = 100$ MeV e $\eta = 0.1137$ para $\Delta = 150$ MeV.

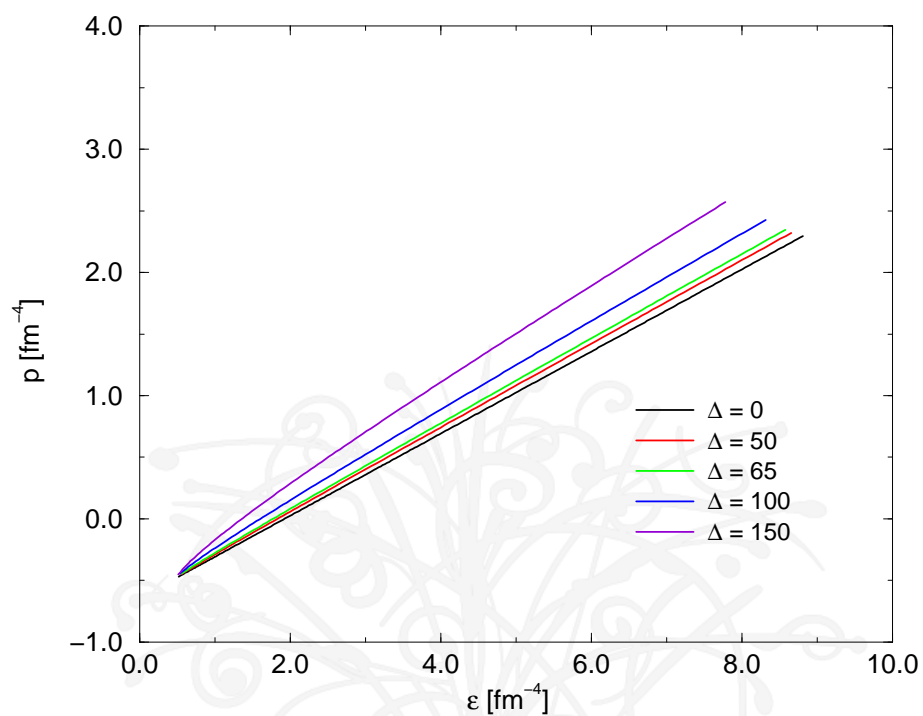


Figura 3.9: Equação de estado com emparelhamento para a solução nova.

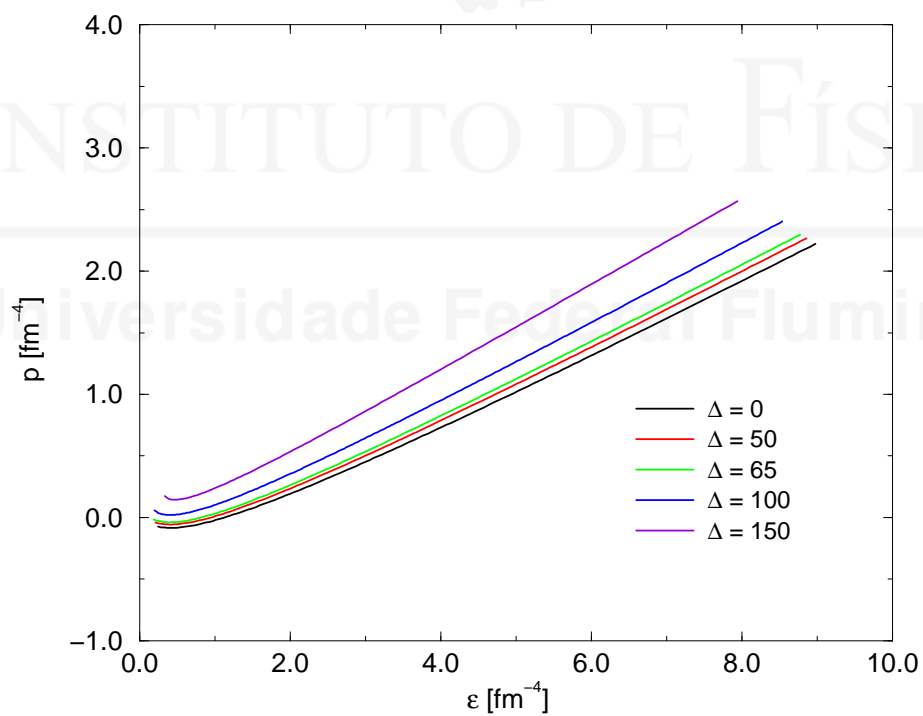


Figura 3.10: Equação de estado com emparelhamento para a solução normal.

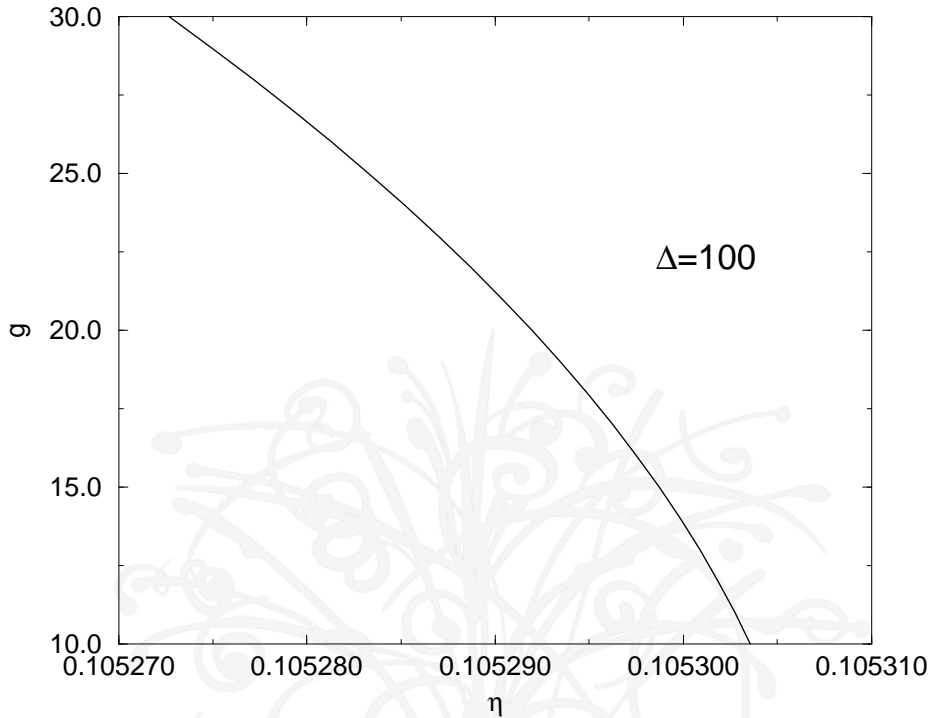


Figura 3.11: Valores dos pares (g, η) com $\Delta = 100$ MeV para a curva da estabilidade na solução nova.

Existe uma dependência com g na EOS no caso da solução normal, mas ela não é grande. Como vimos anteriormente, esta solução apresenta uma instabilidade a baixas densidades para o caso de acoplamento forte o que nos leva a concluir que a fase CFL não é bem descrita por esta solução, onde os quarks não querem emparelhar.

Para termos uma idéia do efeito conjunto de um forte emparelhamento e uma grande energia potencial, apresentamos para os valores de $\eta = 0.1053$ e $\Delta = 100$ MeV e $\eta = 0.1137$ para $\Delta = 150$ MeV a curva da energia por partícula para a solução nova, que é a relevante na fase CFL na Fig. (3.13). Como podemos perceber, a densidade de saturação da matéria de quarks aumenta conforme aumenta o emparelhamento. Isto é importante para que tenhamos estrelas de quarks compactas, uma vez que as estrelas tornam-se mais compactas conforme aumenta a densidade de saturação, visto neste caso a pressão ser nula (que é a condição que define o raio da estrela) a uma densidade de energia maior. No Cap. (4) iremos fazer o estudo de tais objetos compactos.

Anteriormente fizemos um estudo no qual fixamos o valor do parâmetro η e aumentamos o emparelhamento. Agora faremos o estudo inverso, ou seja, fixaremos o emparelhamento e aumentaremos o valor do parâmetro η , o que significa aumentar a energia potencial $(U(\chi) = (\eta m_\chi)^4)$ (mantendo sempre a matéria estável). O valor da constante de acoplamento, como discutido anteriormente, está fixo em $g = 23$ MeV.

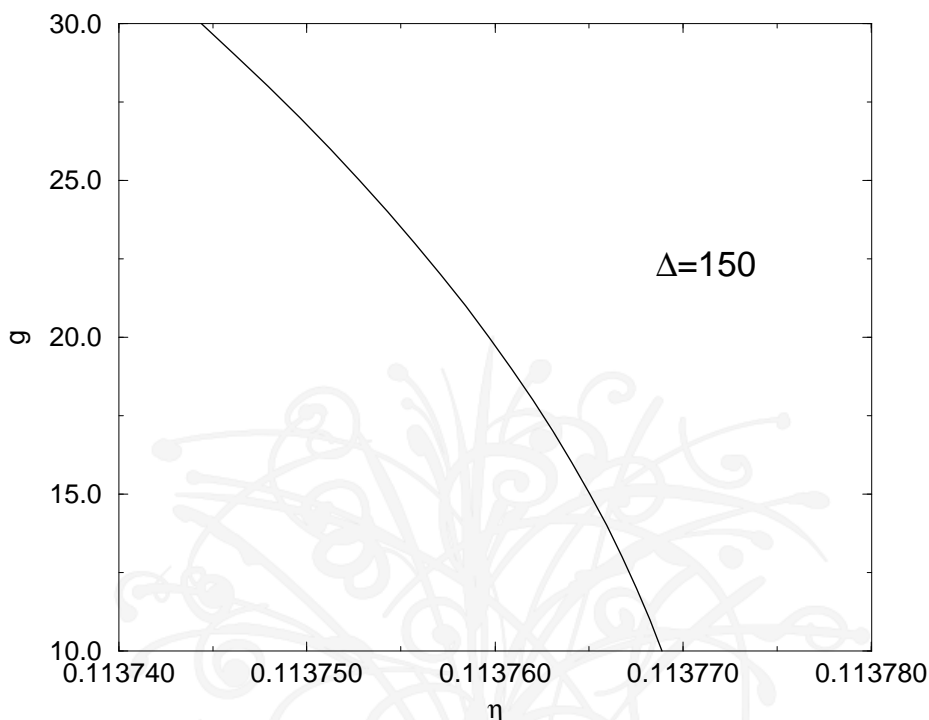


Figura 3.12: Valores dos pares (g, η) com $\Delta = 150$ MeV para a curva da estabilidade na solução nova.

Este estudo pode ser observado na Fig. (3.14) onde temos a EOS com o valor do emparelhamento fixo em $\Delta = 150$ MeV e três valores para o parâmetro η . Como podemos observar, ao aumentar o valor do parâmetro η aumentamos a densidade de energia da matéria e diminuímos a pressão, o que torna a equação de estado mais mole. Isto ocorre porque o termo da energia potencial $U(\chi)$ é positivo na densidade de energia e negativo na expressão da pressão do sistema.

Desta análise da EOS podemos concluir que os efeitos do aumento da energia do gap e da energia potencial do campo χ competem entre si: o aumento de Δ aumenta a pressão (diminui a energia livre) e ajuda a estabilizar a matéria de quarks enquanto que o aumento da energia potencial (de η) ao diminuir a pressão desestabiliza o sistema. Deste modo, a matéria na fase CFL com emparelhamento forte pode existir com energias potenciais maiores no modelo CDM sem tornar-se metaestável, resolvendo assim um problema encontrado anteriormente para o caso da matéria de quarks não emparelhada. [17, 19]

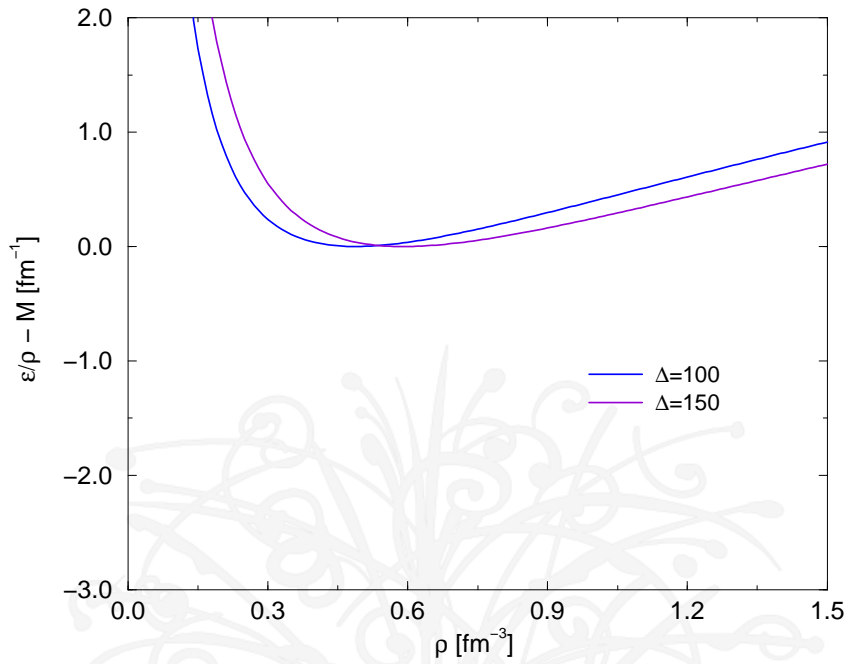


Figura 3.13: Energia por partícula para a solução nova com $g = 23 \text{ MeV}$ e $\eta = 0.1053$ para $\Delta = 100 \text{ MeV}$, e $\eta = 0.1137$ para $\Delta = 150 \text{ MeV}$.

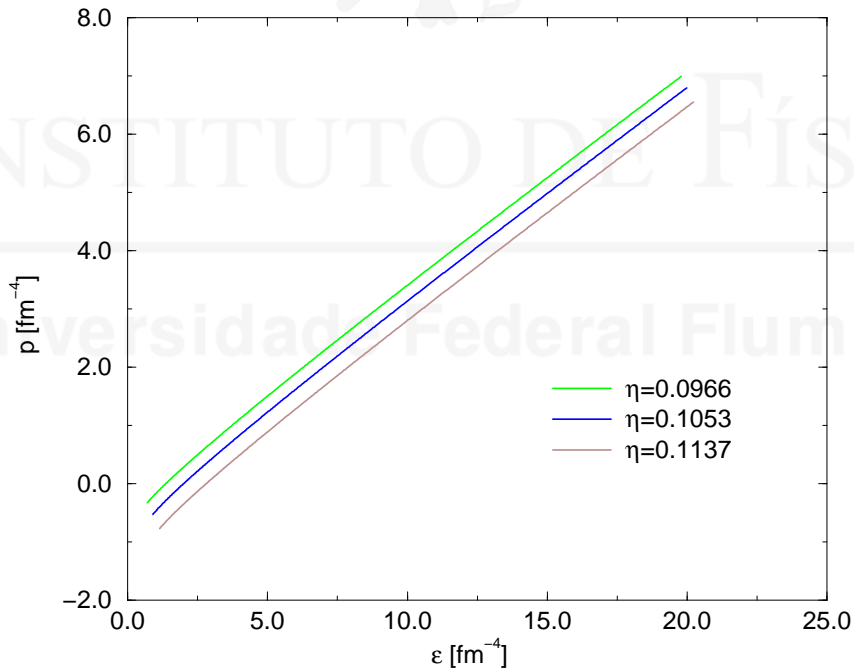


Figura 3.14: Equação de estado com emparelhamento $\Delta = 150 \text{ MeV}$, $g = 23 \text{ MeV}$ e três valores do parâmetro η .

3.3 Transição de fase

Nesta seção iremos fazer o estudo da transição de fase da matéria de quark estranha no CDM na fase CFL e verificar se ocorre ou não transição para esta matéria em equilíbrio β . Como já fizemos referência a equação de estado para altas densidades da matéria de quarks não emparelhada, obtida no modelo CDM, apresenta as condições de igualdade nos momentos de fermi dos quarks e a neutralidade de carga ($\mu_e = 0$) que são comuns à fase CFL. Assim, seria muito conveniente fisicamente que a transição entre este dois regimes acontecesse para alguma densidade. Como escrevemos na introdução deste trabalho estamos apenas interessados em estudar transições de fase a densidades altas, no regime de desconfinamento dos quarks ($\mu > 350$ à 400 MeV) e por isso não consideramos nenhuma transição quark-hádron.

Na Fig. (3.15), apresentamos o gráfico da pressão em função do potencial químico da matéria no CDM e em equilíbrio β para $g = 23$ MeV e $\eta = 0.0966$ fixo (não levamos em conta a solução normal para $\Delta = 100$ MeV porque a matéria neste regime colapsa para densidades mais baixas). Como podemos observar não ocorre transição de fase da solução nova da matéria no regime CDM+CFL para a matéria em equilíbrio β , pois o efeito do emparelhamento torna essas duas curvas paralelas. Isto ocorre porque ao fixarmos η e aumentarmos o emparelhamento a pressão aumenta para uma mesma densidade de energia, conforme podemos observar nas Figs. (3.9) e (3.10).

Já na Fig. (3.16), fizemos o mesmo estudo anterior porém fixando $g = 23$ MeV, $\Delta = 100$ MeV e introduzindo dois valores do parâmetro η . Como podemos observar não ocorre transição de fase da matéria entre estes dois regimes se aumentarmos a energia potencial do sistema. A razão disto advém de que ao aumentarmos a energia potencial a pressão diminui para a mesma densidade de energia, como pode ser visto na Eq. (3.14).

Para vermos a sensibilidade destes resultados aos parâmetros usados, estudamos a transição de fase para o caso extremo de máximo emparelhamento e máxima energia potencial, $\Delta = 150$ MeV e $\eta = 0.1137$. Como podemos observar na Fig.(3.17) ocorre uma transição de fase entre a matéria CFL (solução nova) para a matéria na solução normal em equilíbrio β . Esta matéria é considerada no modelo CDM como sendo a fase quiral quebrada, onde os quarks são massivos, e que mais se aproxima do regime hadrônico. Esta transição indica a existência de uma fase mista entre estes dois regimes. O sistema muda de uma densidade, aproximadamente, 0.67 fm^{-3} da fase CDM+CFL com $\Delta = 150$ MeV para uma densidade menor de 0.41 fm^{-3} da matéria em equilíbrio β . Como vemos, estamos numa transição de fase a altas densidades: de $\rho \sim 4.5\rho_o$ para $\rho \sim 3.0\rho_o$ onde $\rho_o = 0.15 \text{ fm}^{-3}$ é a densidade da matéria nuclear. Este resultado mostra que no modelo CDM é possível ter, uma região onde a fase CDM coexista com

uma fase quiral quebrada onde a matéria estranha não está emparelhada. Como a pressão desta transição é bem baixa, perto de zero, que é a pressão da matéria nuclear, pode ser que exista outra transição quark-matéria nuclear.

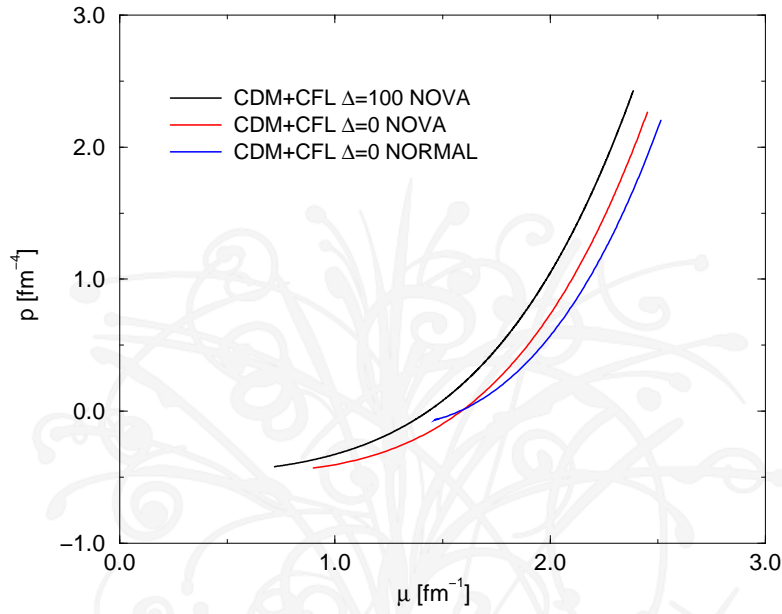


Figura 3.15: Transição de fase para $\eta = 0.0966$ fixo com a introdução do emparelhamento.

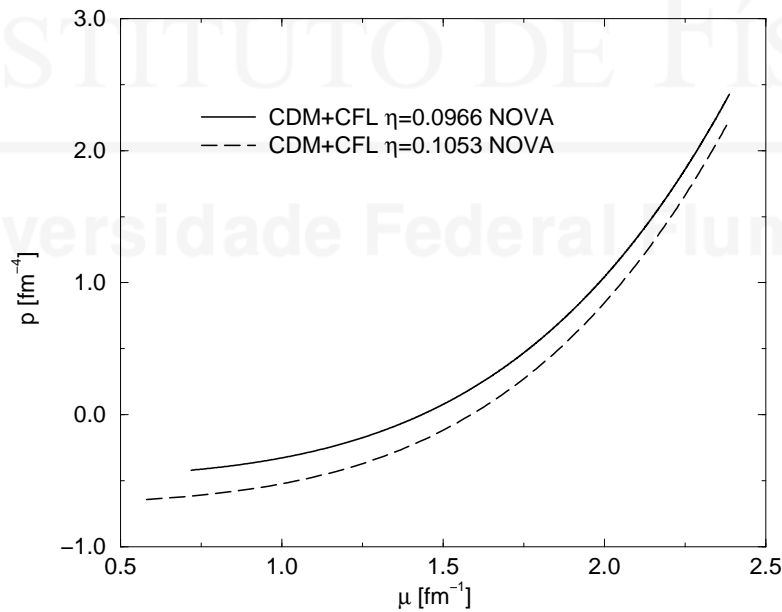


Figura 3.16: Transição de fase com $\Delta = 100$ MeV fixo para dois valores do parâmetro η .

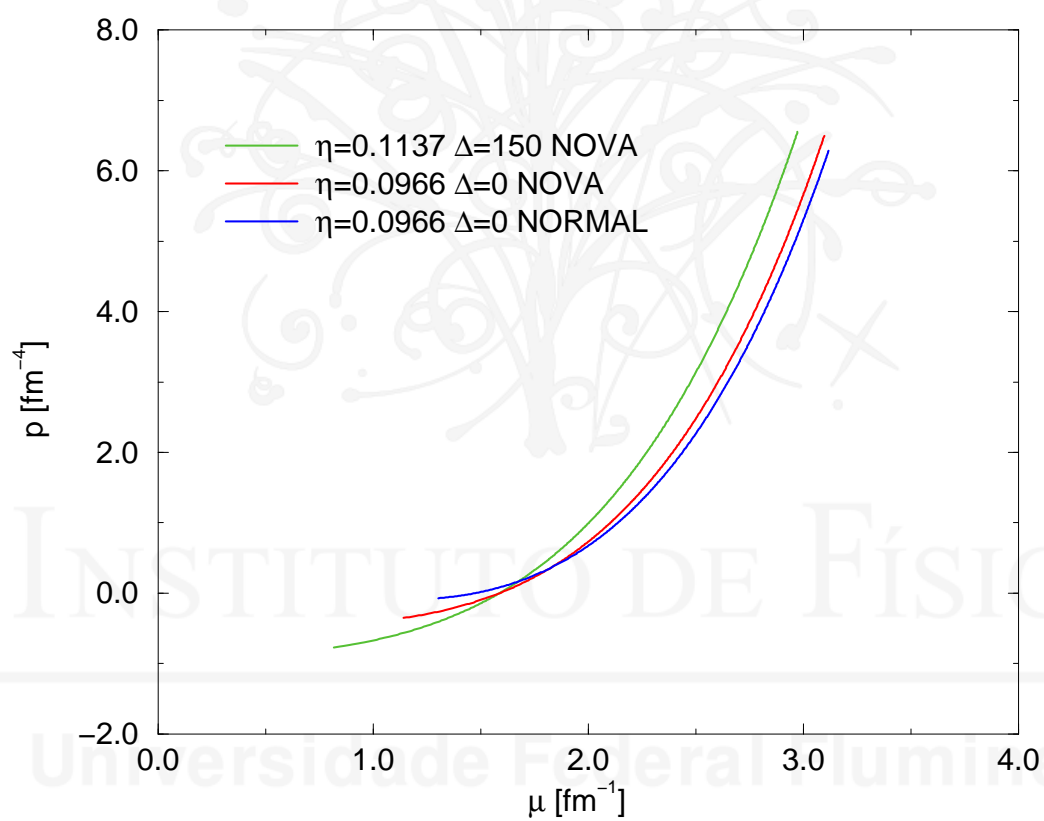


Figura 3.17: Transição de fase da matéria no CDM+CFL para a matéria em equilíbrio β .

Capítulo 4

Estrelas de quarks CFL

Como mostramos no último capítulo, a matéria de quarks na fase supercondutora CFL é absolutamente estável, é o estado mais baixo de energia da matéria estranha apresentando uma transição de fase para uma matéria em equilíbrio β com quarks massivos apenas para pressões nulas. Este fato justifica a possibilidade de estrelas feitas puramente de quarks nesta fase supercondutora que vamos chamar de estrelas CFL. Como a superfície da estrela é definida quando a pressão se anula, estas estrelas seriam feitas completamente dessa nova matéria de quarks emparelhada e seriam estáveis. A densidade na superfície seria bem alta, como vimos no capítulo anterior, na ordem de 4 a 5 vezes a densidade da matéria nuclear e a densidade de energia também ($\varepsilon \sim \rho M$).

No modelo CDM com matéria de quarks não emparelhada em equilíbrio β foram previstas estrelas estranhas bem compactas porém metaestáveis, $\varepsilon/\rho > M$ (ou Fe), o que é um problema já que estas estrelas poderiam decair. Agora, depois de fazer este estudo no modelo CDM na fase supercondutora, sabemos que a matéria estranha não emparelhada não é mesmo o estado fundamental da matéria de quarks a altas densidades. Como são as estrelas CFL? Podem ser mais compactas que as estrelas estranhas e mesmo assim absolutamente estáveis? O objetivo deste capítulo é responder a estas perguntas. Para isso vamos analisar a estrutura dessas estrelas formadas de uma matéria que satisfaz a equação de estado CFL apresentada no capítulo anterior, mantendo a estabilidade desta matéria e não permitindo assim o decaimento dessas estrelas CFL.

Estudos da importância da fase CFL em estrelas compactas, receberam recentemente muita atenção, visto ser este atualmente o único sistema físico aplicável, ou seja, que pode possuir estas altíssimas densidades onde se espera encontrar a fase supercondutora de cor [16, 41, 44, 45]. Estas estrelas CFL foram estudadas recentemente no modelo de sacola do MIT com quarks estranhos massivos e sua estabilidade investigada [46]. Estrelas híbridas, com um caroço de matéria CFL e uma crosta hadrônica

também foram investigadas recentemente [47, 48]. Um recente artigo de revisão sobre o estado da arte na física de estrelas de nêutrons e suas variantes pode ser encontrado em [49].

Para estudar a estrutura destas estrelas CFL teremos que resolver a equação de Tollman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) [50, 51] com a equação de estado dessa matéria e obtermos o diagrama $M \times R$. Posteriormente, veremos o perfil da estrela formada com a massa máxima M_{max} , ou seja como a densidade de energia ρ e pressão p variam dentro da estrela. Investigaremos também como a relação $M \times R$ varia para diversos valores da energia do gap Δ e para diversos valores da energia potencial.

Começaremos com a discussão da hipótese da existência de uma estrela puramente constituída de quarks, no qual o estado fundamental é composto por quarks u , d e s . Em seguida, apresentaremos a equação TOV, os resultados para as massas em função da densidade central e a importância dos termos relativísticos nas estrelas CFL.

4.1 A matéria estranha como o verdadeiro estado fundamental

A possibilidade da existência de quarks se baseia na hipótese da matéria estranha, proposta por Witten, na qual o verdadeiro estado fundamental das interações fortes é o estado desconfinado da matéria de quarks consistindo de uma igual proporção, aproximadamente, de quarks u , d e s . Matéria em tal estado é conhecida como **Matéria Estranha**. Como vimos no capítulo anterior, modelos efetivos da QCD de fato mostram isso.

Supõe-se que o estado fundamental da matéria hadrônica seja um estado no qual os quarks estejam confinados nos hádrons. Entretanto, atualmente não há evidências que comprovem que o estado fundamental (o estado de mais baixa energia) da matéria deva ser esse onde os quarks estão confinados em hádrons. Numa longa escala de tempo talvez seja possível que a matéria hadrônica converta-se em matéria estranha. Esta conversão poderia acontecer no interior de estrelas de nêutrons que possuem núcleos bem densos, onde essa transição hádron-quark pode ocorrer [52]. Neste processo um terço dos quarks converteriam-se em quarks estranhos porque a altas densidades, tal estado tem uma energia mais baixa (uma superfície de fermi) que a matéria formada apenas de quarks u e d . De fato esta hipótese que não dá para confirmar nem refutar, baseia-se essencialmente no fato de que, a energia por nucleon da matéria de quarks (não estranha) está acima da energia da matéria hadrônica. Mas isto é verdade a baixas densidades. Se a densidade for muito grande, tal que o potencial químico seja maior

que a massa do quark estranho então o número bariônico pode ser compartilhado com os três mares de fermi diminuindo assim a energia por partícula.

É esta a hipótese que dá sustentação à possibilidade de existirem estrelas de nêutrons com grandes caroços formados de matéria estranha, ou mesmo, formadas totalmente por quarks como é o caso das estrelas que estamos considerando neste capítulo. Possíveis candidatos a estrelas puras de quarks foram discutidos em [53], e faixas de massas e raios impossíveis de ser explicadas por qualquer EOS hadrônica, foram definidas como um possível critério para a sua identificação [54, 55]. Até hoje não existe nenhum dado observacional categórico que garanta a existência destas estrelas. Recentemente, foi proposto que um dos modos de vibração de uma estrela compacta poderia em princípio identificar uma estrela de quarks [56]. Mas até o momento, podemos dizer que o estudo de estrelas de quarks permanece ainda no terreno especulativo. Distinguir uma estrela estranha de uma estrela CFL talvez seja ainda mais difícil, visto que a tão altas densidades o efeito do termo de emparelhamento, sendo um fenômeno na superfície de fermi, representa como vimos um efeito entre 5 à 10 % na equação de estado. Contudo é importante notar, como já fizemos referência, que as estrelas CFL sendo formadas de matéria estranha estável têm a possibilidade de existir sem decair para uma estrela hadrônica.

4.2 Equações TOV

No caso de uma estrela muito compacta como as estrelas de nêutrons e de quarks, a equação de equilíbrio hidrostático Newtoniana é modificada por correções relativísticas que surgem por mudanças da métrica do espaço-tempo devido ao efeito das altas densidades. Proposta por Tollman-Oppenheimer-Volkoff [50, 51], a solução dessas equações fornece a estrutura interna de uma estrela relativística tais como sua massa M e raio R . Tais estrelas são relativísticas pois seus potenciais gravitacionais envolvidos possuem tal intensidade que a formulação Newtoniana deixa de ter validade. Para verificarmos as equações TOV faremos algumas hipóteses no sentido de simplificar a solução das equações de Einstein.

A primeira hipótese será que a matéria no interior da estrela se comporte como um fluido perfeito. Desta forma o tensor energia-momento é dado por [57]:

$$T^{\mu\nu} = -pg^{\mu\nu} + (p + \varepsilon)u^\mu u^\nu \quad (4.1)$$

onde $g^{\mu\nu}$ é o tensor métrico, p é a pressão, ε é a densidade de energia e $u^\mu \equiv dx^\mu/d\tau$ é a quadri-velocidade de um elemento do fluido.

A segunda hipótese é que a estrela seja esférica. A métrica mais geral nesta condição é dada por:

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = e^{2\nu(r)}dt^2 - e^{2\lambda(r)}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\text{sen}^2\theta d\phi^2 \quad (4.2)$$

Com essa métrica podemos identificar os componentes do tensor métrico

$$\begin{aligned} g_{00} &= e^{2\nu(r)} \\ g_{11} &= -e^{2\lambda(r)} \\ g_{22} &= -r^2 \\ g_{33} &= -r^2\text{sen}^2\theta \end{aligned} \quad (4.3)$$

e esta é conhecida como a métrica de Schwarzschild [58].

Decorrente da métrica de Schwarzschild, as componentes do tensor de Ricci são:

$$\begin{aligned} R_{00} &= (-\nu'' + \lambda'\nu' - \nu'^2 - \frac{2\nu'}{r})e^{2(\nu-\lambda)} \\ R_{11} &= -\nu'' - \lambda'\nu' + \nu'^2 - \frac{2\nu'}{r} \\ R_{22} &= (1 + r\nu' - r\lambda')e^{2\lambda} - 1 \\ R_{33} &= R_{22}\text{sen}^2\theta \end{aligned} \quad (4.4)$$

Fora da estrela, que é o espaço vazio, as equações de Einstein são:

$$R^{\mu\nu} = \frac{1}{2}R \quad (4.5)$$

o que conduz usando a definição da curvatura escalar

$$R \equiv g_{\mu\nu}R^{\mu\nu} \quad (4.6)$$

à $R = 0$ e $R^{\mu\nu} = 0$.

Aplicando estas relações na Eq. (4.4), encontramos a mesma solução obtida por Schwarzschild [59] para a região exterior a estrela ($r \geq R$), ou seja:

$$\begin{aligned} g_{00}(r) &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \\ g_{11}(r) &= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \end{aligned} \quad (4.7)$$

Agora para a região interna da estrela ($r \leq R$), devido a presença de matéria, as equações de Einstein precisam incluir o tensor energia momento ($T^{\mu\nu}$) da forma:

$$G^{\mu\nu} = -8\pi T^{\mu\nu} \quad (4.8)$$

onde $G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}R$ é o tensor de Einstein.

Com isso a curvatura escalar não mais se anula e precisamos calculá-la. A partir da definição da curvatura escalar (Eq. 4.6) encontramos:

$$R = e^{-2\lambda} \left(-2\nu'' + 2\lambda'\nu' - 2\nu'^2 - \frac{2}{r^2} + 4\frac{\lambda'}{r} - 4\frac{\nu'}{r} \right) + \frac{2}{r^2} \quad (4.9)$$

e com isso podemos obter as componentes de $G^{\mu\nu}$, uma vez que já temos os elementos de $R^{\mu\nu}$, Eq. (4.4).

A última hipótese é de que a estrela seja estática, ou seja:

$$u^m = 0 \quad (m = 1, 2, 3) \quad (4.10)$$

observando que $u_\mu u^\mu = 1$, temos:

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \quad (4.11)$$

Substituindo esses resultados na Eq. (4.1), temos

$$\begin{aligned} T_0^0 &= \varepsilon \\ T_m^m &= -p \end{aligned} \quad (4.12)$$

Combinando as Eqs. (4.4), (4.9) e (4.12) encontramos as componentes do tensor de Einstein

$$G_0^0 = e^{-2\lambda} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{2\lambda'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = 8\pi\varepsilon(r) \quad (4.13)$$

$$G_1^1 = e^{-2\lambda} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{2\nu'}{r} \right) - \frac{1}{r^2} = 8\pi p(r) \quad (4.14)$$

$$G_2^2 = e^{-2\lambda} \left(\nu'' + \nu'^2 - \lambda'\nu' + \frac{\nu' - \lambda'}{r} \right) = 8\pi p(r) \quad (4.15)$$

$$G_3^3 = G_2^2 = 8\pi p(r) \quad (4.16)$$

Integrando a Eq. (4.13), temos:

$$e^{-2\lambda(r)} = 1 - \frac{8\pi}{r} \int_0^r \varepsilon(r)r^2 dr \quad (4.17)$$

Definiremos a massa gravitacional da estrela contida num volume de raio r como:

$$M(r) \equiv 4\pi \int_0^r \varepsilon(r)r^2 dr \quad (4.18)$$

Agora é necessário expressarmos λ' , ν' e ν'' em função de grandezas físicas como massa, raio, densidade de energia e pressão. Desta forma isolando λ' da Eq. (4.13), temos:

$$2r\lambda' = (1 - 8\pi r^2 \varepsilon)e^{2\lambda} - 1 \quad (4.19)$$

e ν' da Eq. (4.14):

$$2r\nu' = (1 + 8\pi r^2 \varepsilon)e^{2\lambda} - 1 \quad (4.20)$$

Tomando a derivada radial da Eq. (4.20), temos:

$$2r^2\nu'' = 1 + (16\pi r^2 p + 8\pi r^3 p')e^{2\lambda} - (1 - 8\pi r^2 \varepsilon)e^{4\lambda} \quad (4.21)$$

Finalmente substituindo (4.19), (4.20) e (4.21) na Eq. (4.15) temos:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{M(r)\varepsilon(r)}{r^2} \left(1 + \frac{p(r)}{\varepsilon(r)}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^2 p(r)}{M(r)}\right) \left(1 - \frac{2M(r)}{r}\right)^{-1} \quad (4.22)$$

As Eqs. (4.18) e (4.22) são conhecidas com equações Tollman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) [50, 51], no qual trabalhamos com $G = c = 1$. Estas equações devem ser integradas desde a origem, onde $M(0) = 0$ e $\varepsilon(0) \equiv \varepsilon_c$, até que se atinja um raio R em que a pressão é nula. Não sendo possível suportar mais massa, define-se este raio como o raio da estrela e $M(R)$ como a massa gravitacional medida nas observações. Para cada EOS que introduzimos nestas equações obtemos uma relação única entre a massa da estrela e sua densidade central.

Os três termos entre parênteses no lado direito da equação anterior são os fatores de correção relativísticos à teoria Newtoniana provenientes da Teoria da Relatividade. Todos esses termos são positivos e garantindo assim que o gradiente de pressão seja sempre negativo, ou seja, tanto maior quanto mais nos aproximamos do centro da estrela.

4.3 Massas e raios das estrelas CFL

Vamos agora analisar a importância dessa nova matéria na estrutura da estrela. Para isso usaremos a equação de estado na fase CFL para alguns valores de Δ . O objetivo aqui é estudar se as estrelas de quarks na fase CFL são mais compactas que as estrelas de quarks em equilíbrio β no regime de altas densidades (solução *nova*), trabalhando sempre com uma equação de estado da matéria supercondutora estável. Utilizaremos a mesma linha de raciocínio apresentada ao longo deste trabalho, ou seja, iremos fixar a energia potencial (η) e aumentaremos o emparelhamento, posteriormente faremos o inverso e fixaremos o emparelhamento e aumentaremos a energia potencial até o maior valor possível de η tal que a matéria ainda permaneça estável.

Na Fig. (4.1) apresentamos a curva $M \times \varepsilon_c$ para $\eta = 0.0966$ fixo com a introdução do emparelhamento. Como podemos observar o aumento do emparelhamento fornece estrelas mais massivas com densidade de energia central menor. A razão disto vem de que ao aumentar a energia do gap a equação de estado torna-se mais dura, a pressão interna aumenta para um dada energia central suportando mais massa.

Já na Fig. (4.2) temos o gráfico $M \times \varepsilon_c$ com $\Delta = 150$ MeV fixo e variando a energia potencial. Como podemos observar, o aumento da energia potencial conduz a estrelas menos massivas e com densidade de energia central maior, pois neste caso a EOS torna-se mais mole, isto é, para um dada energia central a pressão interna diminui suportando assim menos massa.

Prosseguindo o estudo, na Fig. (4.3) apresentamos a curva $M \times R$ com a energia potencial fixa e o aumento da energia do gap. Como podemos observar a introdução do emparelhamento conduz a estrelas com raios maiores e conseqüentemente as estrelas em equilíbrio β são mais compactas do que as estrelas CFL. Agora se mantivermos o emparelhamento fixo e aumentarmos a energia potencial obtemos estrelas CFL mais compactas do que estrelas em equilíbrio β , conforme podemos observar na Fig. (4.4). A razão das estrelas CFL terem raios maiores depende do perfil da pressão dentro da estrela, ou seja, de como o gradiente da pressão varia com o raio, o que define com que rapidez a pressão vai a zero na superfície ($r=R$). Veremos isto detalhadamente na próxima seção.

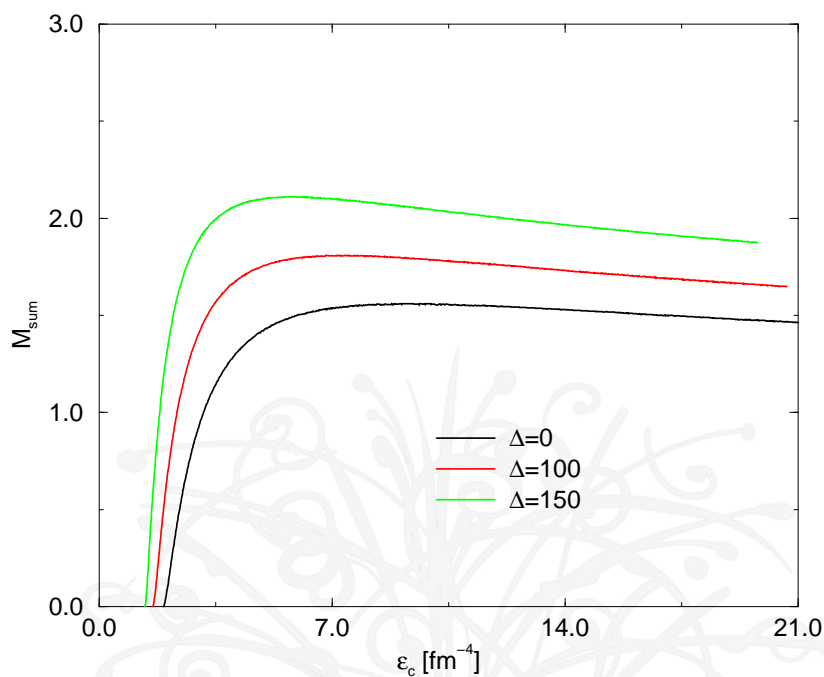


Figura 4.1: Massa \times densidade central para $\eta = 0.0966$ fixo com a introdução do emparelhamento.

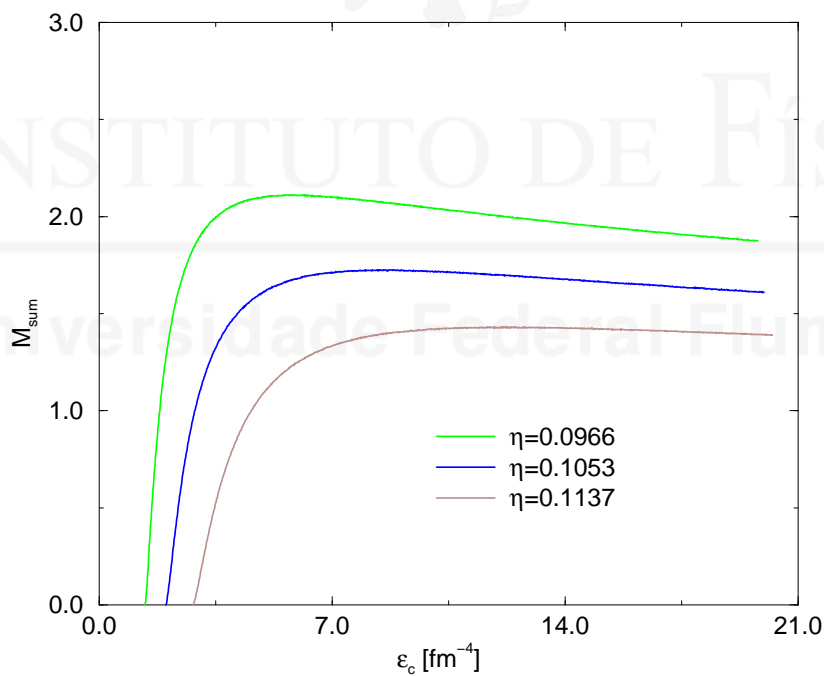
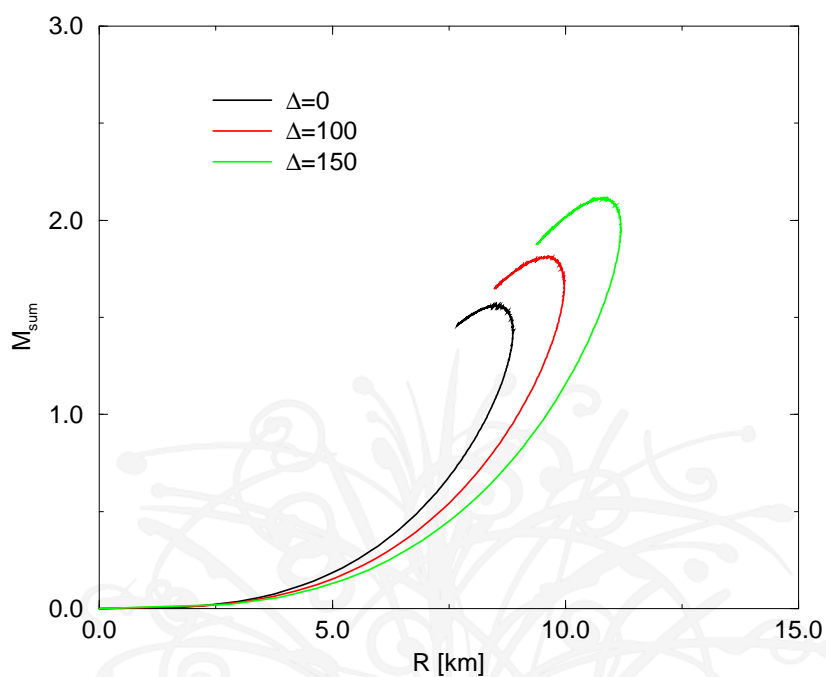
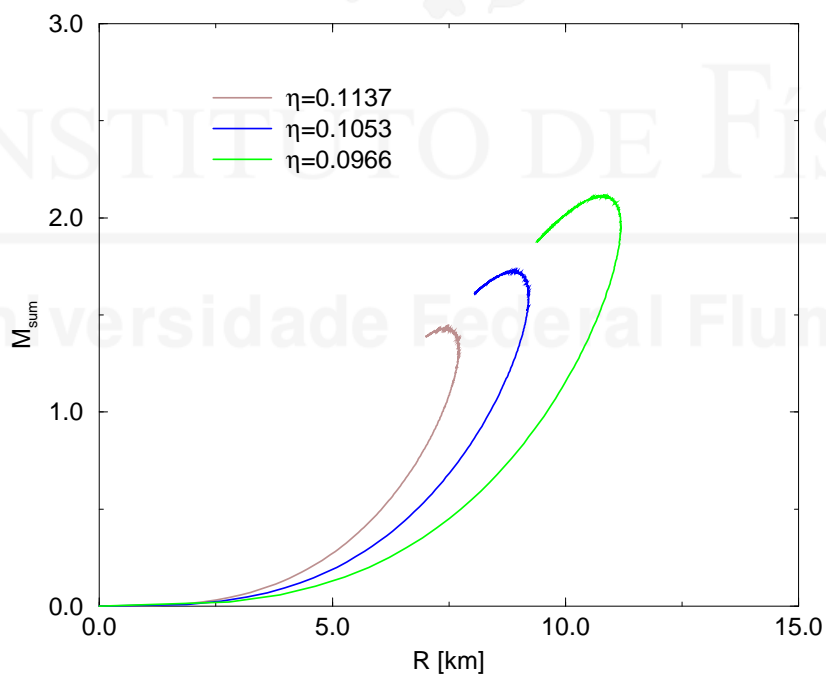


Figura 4.2: Massa \times densidade central com o emparelhamento fixo aumentando a energia potencial.

Figura 4.3: Massa \times raio com $\eta = 0.0966$ para três valores de Δ .Figura 4.4: Massa \times raio com $\Delta = 150$ MeV e três valores de η .

η	Δ [MeV]	M [M_\odot]	R [Km]	ε_c [fm^{-4}]
0.0966	0	1.56	8.48	9.62
	100	1.81	9.61	7.18
	150	2.11	10.81	5.72
0.1053	100	1.49	7.94	10.62
	150	1.72	8.89	8.46
0.1137	150	1.43	7.45	11.87

Tabela 4.1: Valores de M , R e ε_c para a estrela estável de massa máxima com diversos valores de η e Δ .

Os resultados discutidos anteriormente estão colocados na Tabela [4.1], onde apresentamos os valores da massa máxima em unidades de massa solar (M [M_\odot]), do raio (R [km]) e da densidade de energia central (ε_c [fm^{-4}]) das estrelas estranhas na fase CFL para os valores de η em que a matéria ainda permanece estável. Como podemos ver nesta tabela, obtemos massas máximas relativamente grandes para as estrelas CFL. A maior parte das estrelas de nêutrons possuem massas $M \sim 1.4 M_\odot$. Mesmo assim, é bastante interessante que no limite máximo de estabilidade da matéria (maior η) para $\Delta = 100$ MeV e $\Delta = 150$ MeV as massas máximas estejam em torno desse valor mas com raios menores, $R \leq 8$ Km, em comparação com os raios de 10 a 14 Km de uma estrela de nêutrons.

4.4 Variação da pressão e densidade de energia nas estrelas CFL

Vamos aqui estudar o efeito da energia do gap na variação da pressão e da densidade de energia com raio (perfil) dentro de uma estrela CFL.

Na Fig. (4.5) mostramos o perfil da estrela de massa máxima com $\eta = 0.0966$ fixo para diversos valores do emparelhamento. Como podemos observar, o aumento do emparelhamento atenua a densidade de energia ao longo da estrela ficando quase que constante para $\Delta = 150$ MeV além de que esta estrela é menos compacta. Outra observação é que a densidade de energia não se anula na superfície tendo, aproximadamente, $2 fm^{-4}$ de densidade de energia. Esta é a principal diferença entre uma estrela de quarks e uma estrela de nêutrons, onde a densidade de energia se anula na superfície.

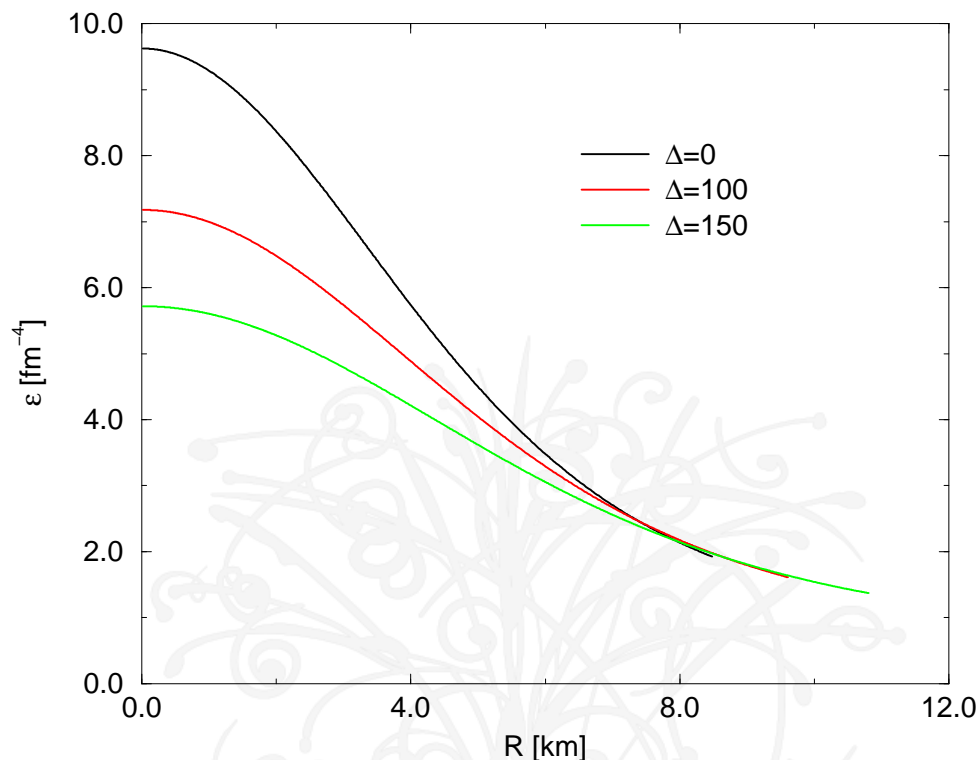


Figura 4.5: Densidade de energia em função do raio com $\eta = 0.0966$ para três valores de Δ .

Já na Fig. (4.6) mostramos como a pressão varia ao longo da estrela com o parâmetro η fixo e a introdução do emparelhamento. Como podemos observar, a estrela que possui emparelhamento maior tem uma menor pressão no centro da estrela e um raio R maior porque a pressão demora para ir a zero. Isto é consequência de que o gradiente de pressão (dp/dr), que é a derivada da Fig. (4.6), diminui lentamente e consequentemente a energia varia mais lentamente perto da superfície. Isto explica porque a estrela com maior energia do gap, mesmo tendo uma densidade de energia central menor, possui uma maior massa: como a pressão varia muito lentamente perto da superfície com o aumento do gap, a energia também é aproximadamente constante nesses 1 Km perto da superfície, e neste caso a massa da estrela vai com o volume que é grande $r \sim 10$ Km.

Por outro lado se fixarmos o emparelhamento $\Delta = 150$ MeV e aumentarmos a energia potencial a energia central aumenta mas varia muito rapidamente, como podemos observar na Fig. (4.7). Já a estrela com a maior energia potencial é a mais compacta conforme Fig. (4.8). Nesta figura podemos observar que com o aumento de η o gradiente de pressão aumenta muito rapidamente, o que faz com que a energia vá a zero muito rapidamente diminuindo a massa da estrela.

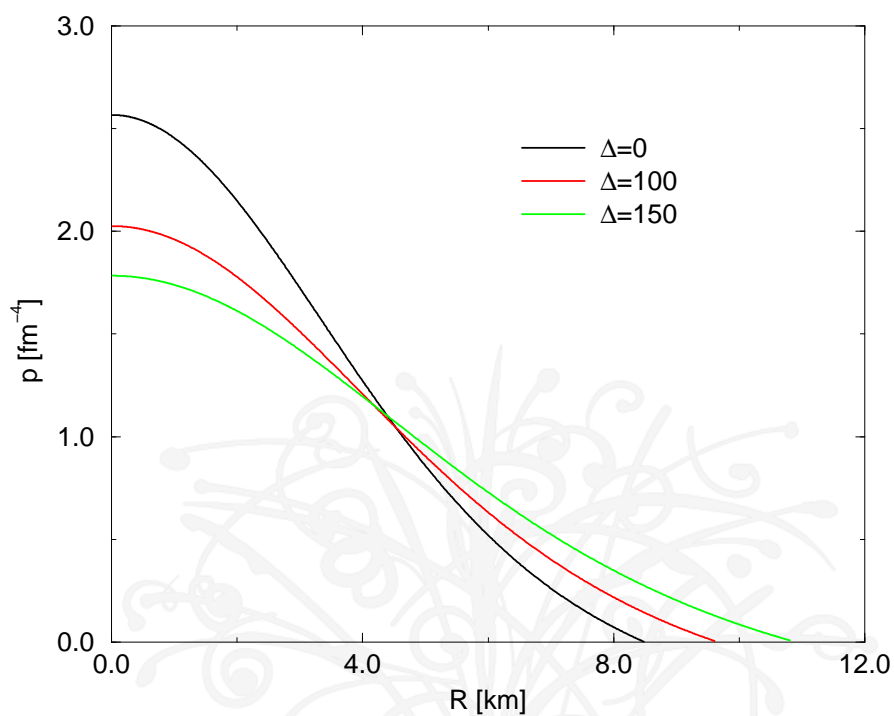


Figura 4.6: Pressão em função do raio com $\eta = 0.0966$ para três valores de Δ .

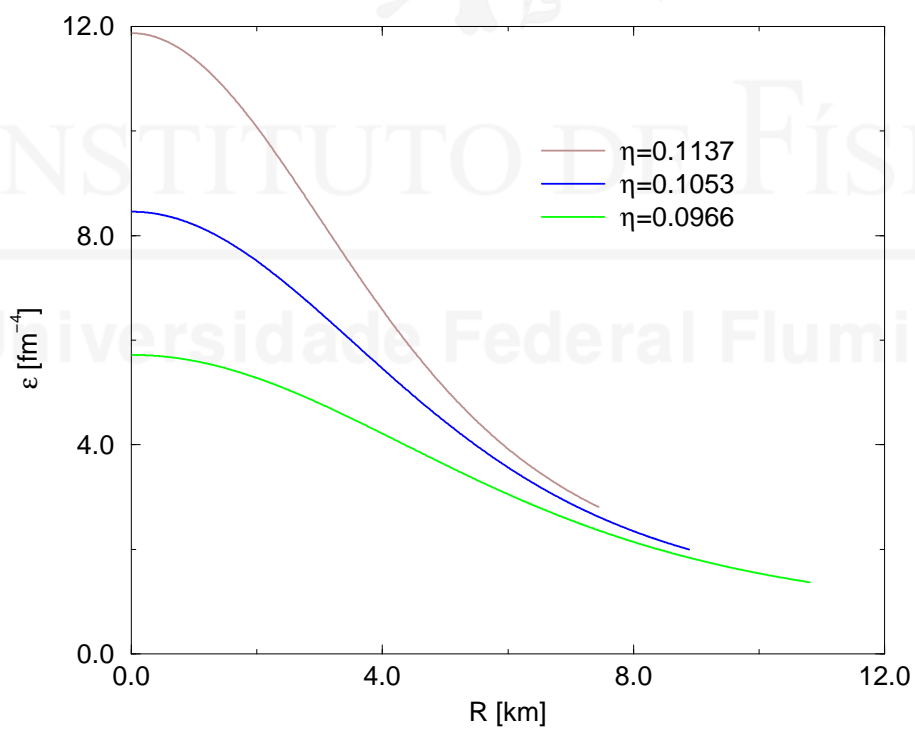


Figura 4.7: Densidade de energia em função do raio com $\Delta = 150$ MeV para três valores de η .

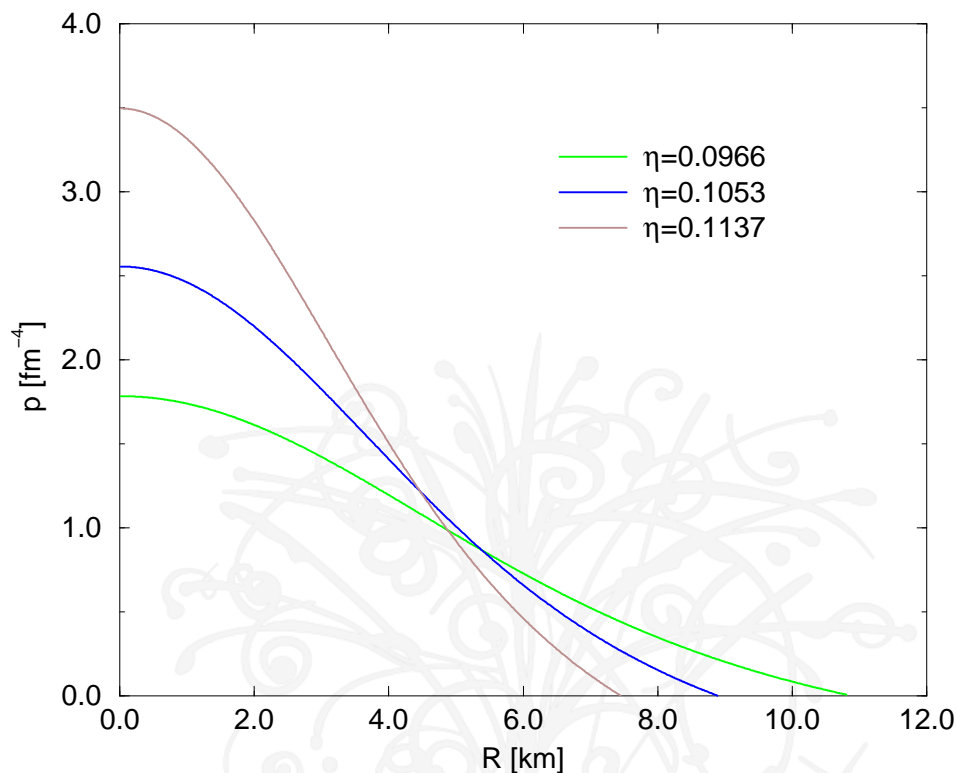


Figura 4.8: Pressão em função do raio para $\Delta = 150$ MeV com três valores de η .

Resumindo, vemos que devido aos efeitos opostos que a energia de emparelhamento e a energia potencial têm na equação de estado, o aumento da primeira produz estrelas maiores e mais massivas enquanto que o aumento da energia potencial (proporcional a η) gera estrelas menos massivas e mais compactas. Com os parâmetros considerados no nosso modelo, o limite máximo para a energia potencial e a energia do gap são $\eta = 0.1137$ e $\Delta = 150$ MeV respectivamente, e neste caso obtemos estrelas CFL muito compactas (linha marrom da Fig. (4.4)) e estáveis, o que não é possível obter no caso da matéria de quarks não emparelhada, sem cair na metaestabilidade [17]. Assim, podemos concluir que nas estrelas CFL a matéria supercondutora de cor é estável e as estrelas podem ser muito compactas.

4.4.1 A importância das correções relativísticas

O objetivo desta seção é verificar a importância dos fatores relativísticos na equação TOV originados da matéria estranha na fase CFL e comparar com os resultados obtidos para estrelas híbridas. Este estudo foi realizado num recente trabalho [60] onde analisamos a importância das correções relativísticas na equação TOV para estrelas híbridas para dois modelos relativísticos, o modelo de Walecka (W) e Zimmany-Moszkowski (ZM). Os dois primeiros fatores de correção relativísticos são:

$$f_1 = 1 + \frac{p(r)}{\varepsilon(r)} \quad (4.23)$$

$$f_2 = 1 + \frac{4\pi r^2 p(r)}{M(r)} \quad (4.24)$$

que dependem da equação de estado. Eles são mais importantes no centro da estrela onde a pressão é maior do que em sua superfície.

O fator proveniente da métrica

$$f_3 = \left(1 - \frac{2M(r)}{r}\right)^{-1} \quad (4.25)$$

é muito pequeno no centro da estrela tornando-se dominante a partir do meio da estrela, ou seja, $r \geq R/2$.

O fator global

$$f = f_1 \times f_2 \times f_3 \quad (4.26)$$

é sempre maior e constante ao longo da estrela e este comportamento geral independe da EOS, conforme pode ser observado nas Figuras (4.9) e (4.10). Estes resultados permitiram nos concluir, não só que as correções relativísticas são importantes $f_W = 3.8$ e $f_{ZM} = 2.4$, mas que dependem fortemente da incompressibilidade da matéria hadrônica, que está relacionada com a relatividade do modelo usado [60]. No modelo de Walecka que é muito duro, estas contribuições são bem maiores que no modelo de ZM que apresenta uma EOS bem mole, como podemos ver ao comparar as Figuras (4.9) e (4.10).

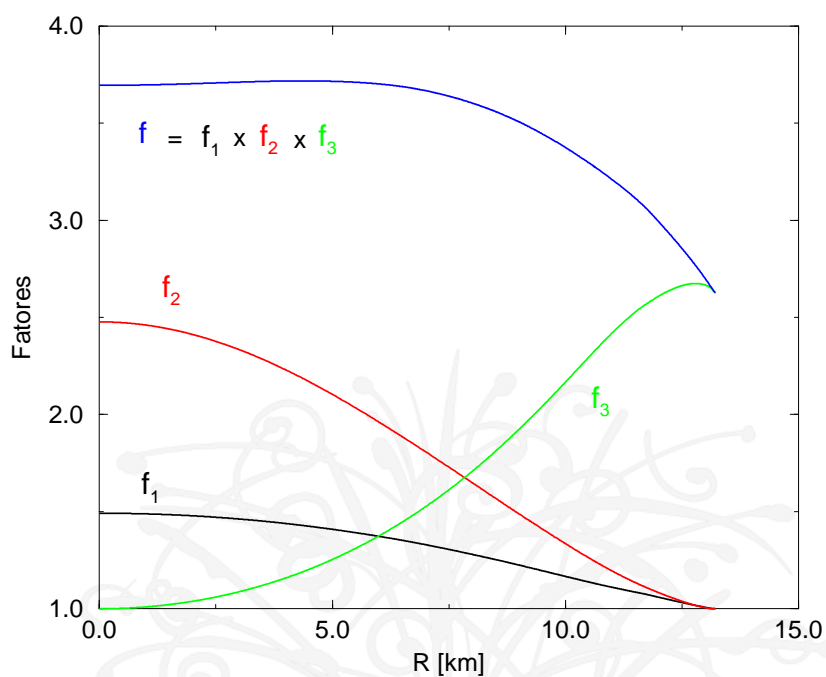


Figura 4.9: Fatores relativísticos em função do raio da estrela hiperônica de massa máxima para o modelo de Walecka.

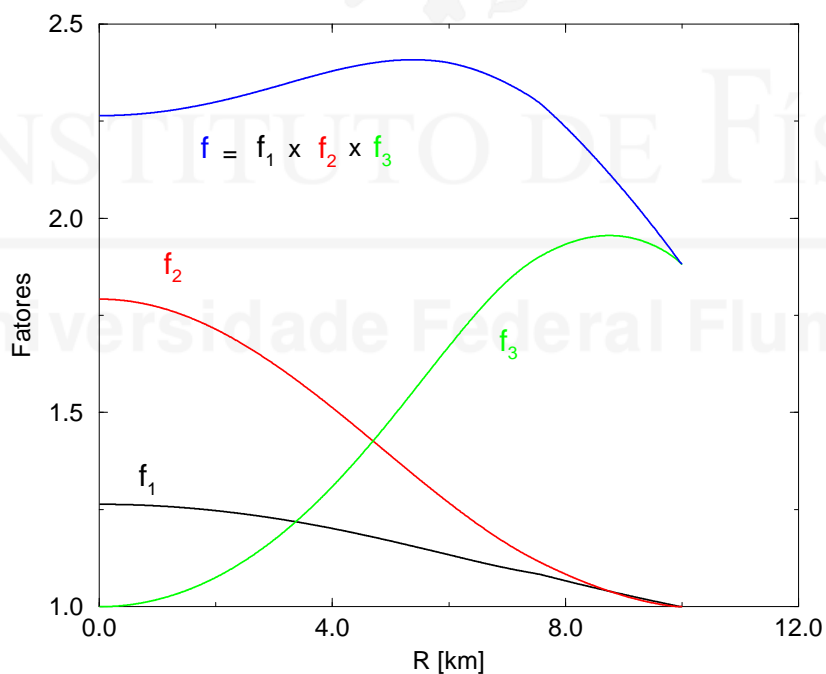


Figura 4.10: Fatores relativísticos em função do raio da estrela hiperônica de massa máxima para o modelo de Zimmany-Moszkowski.

Vamos ver agora a importância destes fatores nas estrelas CFL. Mantendo a energia potencial $\eta = 0.0966$ fixa e aumentando o emparelhamento podemos observar o aumento dos fatores f_1 , f_2 e f . Também podemos observar a diminuição do fator f_3 , conforme Fig. (4.11). O aumento dos fatores f_1 e f_2 deve-se por que ambos são proporcionais à razão p/ε que aumenta com a introdução do emparelhamento, pois a EOS torna-se mais dura conforme Fig. (3.9). O fator f_3 diminui com a introdução do emparelhamento. Isto ocorre porque ao introduzir o emparelhamento obtemos estrelas maiores e mais massivas conforme Fig. (4.3) e esse termo é igual a $f_3 = (1 - 2M/r)^{-1}$. Numa estrelas de quarks a massa cresce essencialmente com o volume, M é proporcional a r^3 e por isso a razão M/r cresce com o aumento do gap, fazendo com que f_3 seja sempre uma função crescente com r .

Por outro lado se mantivermos o emparelhamento $\Delta = 150$ MeV fixo e variarmos a energia potencial, os fatores f_1 , f_2 e f diminuem, como para as estrelas híbridas, porque a EOS torna-se mais mole enquanto o fator f_3 aumenta, conforme pode ser observado na Eq. (4.12), exatamente pelo já explicado acima, visto neste caso a massa e o raio diminuirão conforme Fig. (4.4) e portanto M/r diminuir com o aumento de η .

Desta comparação entre as correções relativísticas para as estrelas híbridas e estrelas CFL, concluímos para ambos os casos que quando a EOS torna-se mais dura (mole) a importância destes fatores cresce (decresce), e $f \gg 1$ o que por si só mostra que uma estrela de nêutrons ou de quarks não pode ser considerada uma estrela Newtoniana. A única diferença entre as estrelas híbrida e CFL, está no fator da métrica f_3 . Perto da superfície da estrela, a métrica não possui um máximo como numa estrela híbrida, ela é sempre crescente numa estrela de quarks. Isto ocorre, porque como já explicamos antes, como $f_3 = (1 - 2M/r)^{-1}$ e numa estrela de quarks a massa cresce essencialmente com o volume (densidade de energia varia pouco), M é proporcional a r^3 e portanto f_3 é sempre uma função crescente com o raio. Isto não é verdade numa estrelas híbrida (nêutrons), onde perto da superfície a massa cresce pouco com o raio, porque a densidade de energia é muito baixa.

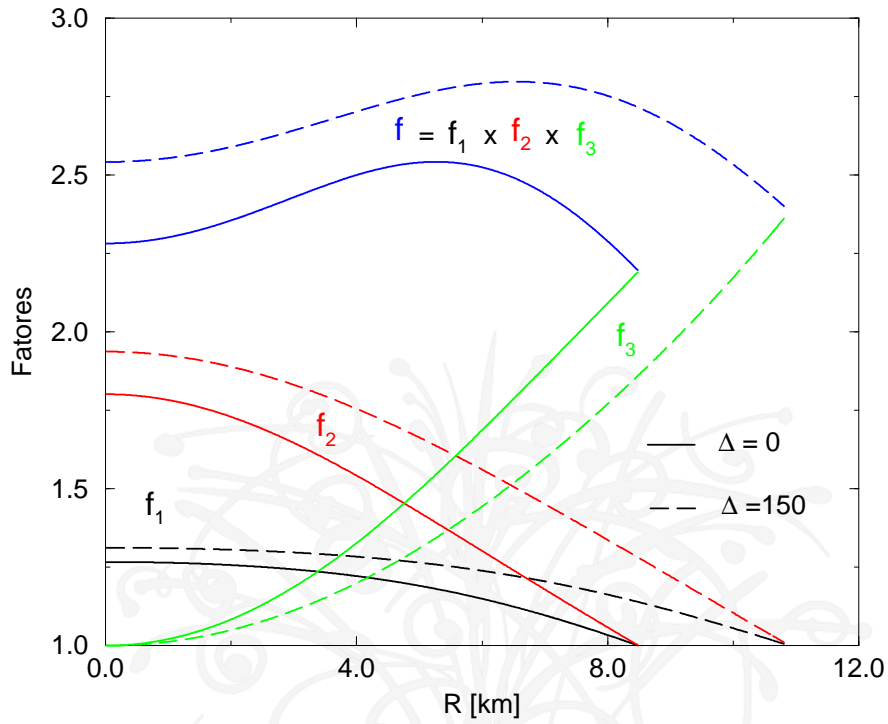


Figura 4.11: Fatores relativísticos em função do raio da estrela CFL para $\Delta = 0$ e $\Delta = 150$ MeV com $\eta = 0.0966$ fixo.

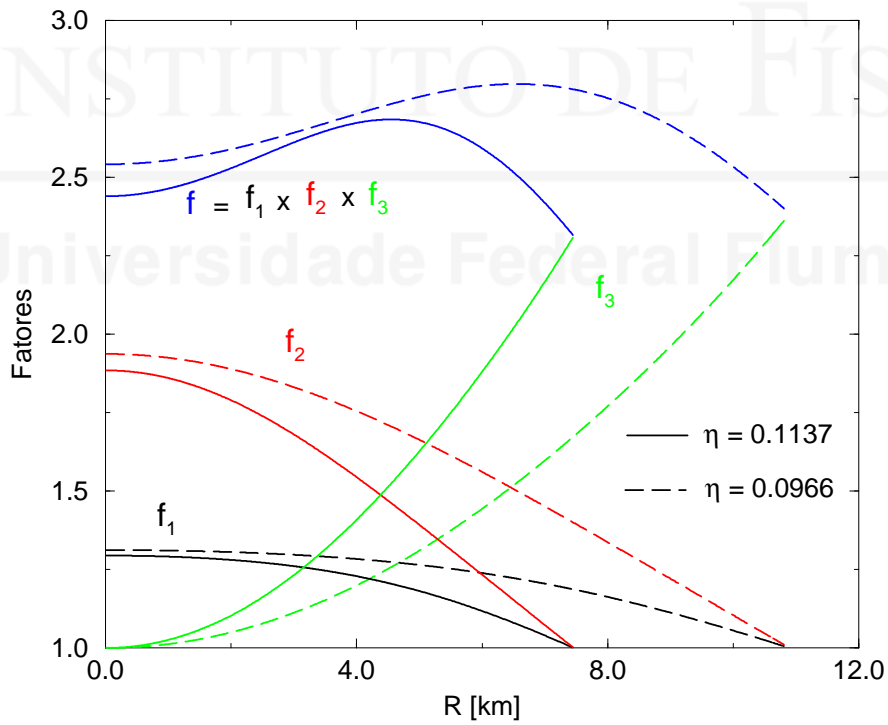


Figura 4.12: Fatores relativísticos em função do raio da estrela CFL para $\eta = 0.0966$ e $\eta = 0.1137$ com $\Delta = 150$ MeV fixo.

Capítulo 5

Conclusão

Nesta dissertação estudamos a influência do termo de emparelhamento da fase supercondutora CFL, obtido por uma interação efetiva que tem sua origem na troca de um glúon prevista pela QCD, no modelo Cromodielétrico (CDM). Introduzimos esse termo de emparelhamento diretamente no modelo CDM, pois este modelo a altas densidades representa bem a equação de estado prevista pela QCD [36]. Trabalhamos no caso em que a matéria CFL é neutra [39] pois, como vimos no capítulo (3), procuramos uma transição de fase entre a matéria na fase CFL e a não emparelhada em equilíbrio β onde o potencial químico dos elétrons é nulo ($\mu_e = 0$). Assim, a escolha de uma fase CFL neutra é consistente visto na transição μ_e necessitar ser contínuo, ou seja, ter o mesmo valor nas duas fases. Como no caso da matéria de quarks não emparelhada [17, 18], encontramos para a fase CFL, duas equações de estado, uma para valores de χ pequenos perto de zero e outra para valores deste campo grande ($\chi \sim \gamma m_\chi$).

Na primeira solução a massa dos quarks é relativamente grande ~ 100 MeV sendo a massa do quark estranho maior. Identificamos esta fase como a que tem simetria quiral quebrada por um condensado quark-antiquark. Devido a isto, esta EOS é referida neste trabalho como a de baixas densidades. Esta EOS, como no caso não emparelhado, não depende dos parâmetros γ e η que são importantes apenas para definir o mínimo local do potencial $U(\chi)$ onde se encontra a outra solução. Este regime é sensível apenas ao valor da constante de acoplamento g do modelo, visto as massas dos quarks variarem linearmente com ela. Usando o valor desta constante que reproduz bem as propriedades do nucleon ($g = 23$ MeV) mostramos que a matéria nesta fase não gosta de emparelhar: ela só é estável para valores do parâmetro de gap baixos ($\Delta \lesssim 65$ MeV) pois para maiores valores deste parâmetro a energia por partícula deixa de ter mínimo e a matéria colapsa. Isto deve-se, a que nesta solução o potencial $U(\chi)$ é pequeno e quando Δ cresce a pressão associada ao termo de emparelhamento torna-se maior que esse potencial, não sendo mais possível anular a pressão e o sistema colapsa.

Este resultado permitiu-nos concluir que esta solução de baixas densidades prevista no modelo CDM não existe na fase supercondutora de cor CFL para os valores da energia do gap previstos nos cálculos apresentados no capítulo (2), onde $100 \lesssim \Delta \lesssim 150$ MeV. Assim, podemos dizer que no modelo CDM com quarks massivos (densidades baixas) que a fase de supercondutividade de cor CFL só é possível apenas para um emparelhamento muito fraco. Este resultado é consistente com a descrição da fase CFL como sendo o regime previsto para a matéria a densidades muito altas. Encontramos uma possível transição de fase, no caso em que a energia do gap é grande ($\Delta = 150$ MeV) e a energia potencial associada ao campo χ também, entre a fase CFL e a da matéria de quarks não emparelhada em equilíbrio β obtida com esta solução de baixas densidades. Esta transição ocorre para valores da pressão bem perto de zero e temos uma descontinuidade na densidade, formando uma pequena fase mista onde estas duas fases coexistem.

No caso da outra solução para valores grandes de χ , como também ocorre para a matéria de quarks não emparelhada, a EOS depende essencialmente apenas do parâmetro η que define a energia potencial do campo χ no segundo mínimo local, ($U(\chi) = (\eta M)^4$), que como discutimos no capítulo (1) pode ser associada com a constante de sacola B do modelo do MIT. Nesta solução, as massas dos quarks são quase nulas e portanto ao variar a constante de acoplamento g elas não mudam. Variar γ afeta também muito pouco a EOS, porque as massas dos quarks são inversamente proporcionais a χ (γm_χ), desde que γ não seja muito pequeno. No caso de γ pequeno a posição do segundo mínimo aproxima-se muito do mínimo global localizado em $\chi = 0$ e esta solução torna-se degenerada com a solução de baixas densidades, onde passamos a ter o caso do potencial quadrático para $U(\chi)$, tipo oscilador harmônico, que só possui uma solução. Assim, esta solução depende essencialmente de apenas um dos parâmetros do potencial confinante, a constante η . Como neste caso as massas dos quarks são muito pequenas, identificamos esta EOS com a matéria de quarks na fase CFL de altas densidades. Algo bastante interessante, e que já fizemos referência na introdução deste trabalho, é que na EOS para a matéria de quarks sem emparelhamento, gerada de um modo auto-consistente dentro do modelo CDM, os momentos de Fermi dos 3 quarks são todos iguais, a matéria é neutra e os elétrons são expulsos ($\mu_e = 0$) [17, 18]. Esta fenomenologia é exatamente a prevista na fase supercondutora de cor CFL, mas neste caso onde não temos a formação dos pares de Cooper de quarks, a energia do gap é nula. Deste modo, esta equação de estado para a matéria de quarks em equilíbrio β , encontrada no modelo CDM para altas densidades, parece ser a transição natural da fase CFL com emparelhamento forte, visto que quando a densidade diminui o emparelhamento desaparece. Contudo, não encontramos tal transição para os valores de energia do gap e do parâmetro η utilizados: a matéria na fase supercondutora tem

sempre uma pressão maior (menor energia livre) que a fase de quarks não emparelhada em equilíbrio β .

Um dos problemas desta EOS para altas densidades sem emparelhamento é que existe um η_{max} para o qual a matéria é estável: para valores de $\eta \geq 0.0966$ a matéria de quarks, não emparelhada e em equilíbrio β , torna-se muito metaestável ($\varepsilon < \rho M$) [19]. Isto significa que não podemos ter grandes valores para a energia potencial do campo χ . Ao introduzir o emparelhamento concluímos que este conduz a uma diminuição da energia por partícula tornando a matéria mais estável. Este efeito surge, não devido ao termo de emparelhamento (que é positivo na densidade de energia) e que, como mostramos no capítulo (3), é 10 vezes menor que o termo da densidade de energia cinética dos quarks. A razão da diminuição da densidade de energia no estado CFL deve-se ao fato de que, como a teoria BCS viola o número de partículas, a densidade de partículas na fase supercondutora não depende somente do momento de fermi mas também da energia do gap Δ , conforme Eq. (2.22). Assim, para uma densidade de partículas fixa, o aumento do gap conduz a uma diminuição do momento de fermi, o que ao integrar a energia até um momento de fermi menor, faz com que a densidade de energia cinética do gás relativístico de quarks ε_k diminua, e este é o termo dominante na densidade de energia. Também concluímos que o efeito do emparelhamento só é importante para valores de $\Delta \gtrsim 100$ MeV, pois só para estes valores de Δ , a energia de emparelhamento torna-se comparável com a energia potencial $U(\chi)$.

Como a inclusão do emparelhamento melhora a estabilidade da matéria de quarks diminuindo a energia por partícula, o estado CFL permite que usemos no modelo valores maiores para o parâmetro η . Assim, fizemos uma análise da estabilidade da matéria CFL (exigindo $\varepsilon = \rho M$) para esta solução de altas densidades (nomeada como *nova* neste trabalho), fazendo variar a constante de acoplamento g e η_{max} para o caso de $\Delta = 100$ MeV e $\Delta = 150$ MeV, o que chamamos de Emparelhamento Forte. Como já explicamos antes, a dependência desta EOS na constante de acoplamento é muito pequena o que permite que ela varie bastante (ente 10 e 30 MeV) enquanto que η varia muito pouco. Para o valor da constante usado no nosso trabalho $g = 23$ MeV, obtivemos para $\Delta = 100$ MeV o valor de $\eta_{max} = 0.1053$ e para $\Delta = 150$ MeV o valor $\eta_{max} = 0.1137$, o que mostra que na fase CFL podemos ter energias potenciais maiores. Como exigimos que a matéria sature em $\varepsilon = \rho M$, o potencial químico dos quarks está fixo em $\mu = M/3$ neste ponto onde a pressão se anula. Assim, é possível mostrar que para esta solução onde os quarks têm massa nula $\mu = k_f$, existe uma relação entre η_{max} e a energia do gap Δ e que portanto eles não são independentes. De fato η_{max} depende de Δ , na forma $\eta_{max} \propto (1 + (6\Delta/M)^2)^{1/4}$, o que explica que para variações de 50% no parâmetro do gap, η_{max} tenha variado tão pouco.

Estudamos a dependência da EOS da fase CFL desta solução nova com a energia

do gap, com η fixo no seu valor máximo para $\Delta = 0$ e concluímos que ao aumentar Δ a pressão aumenta para uma dada densidade de energia e que a saturação ocorre a uma densidade de energia menor. Depois fixamos $\Delta = 150$ MeV e variamos o η : mostramos que ao aumentar este parâmetro (a energia potencial aumenta) a pressão diminui para uma dada densidade de energia (a contribuição de $U(\chi)$ para a pressão é negativa). O efeito do aumento de η é exatamente o oposto do obtido com o aumento de Δ , pois ao diminuir a pressão, aumenta a energia livre e a matéria torna-se mais instável. De fato, a pressão vai a zero (o ponto de saturação que corresponde ao mínimo da curva ε/ρ) numa densidade de energia maior.

Este fato de que a pressão vai a zero numa densidade de energia menor quanto Δ aumenta, e numa densidade de energia maior quando η cresce, tem importantes consequências na análise da estrutura das estrelas CFL que apresentamos no capítulo (4). Como o raio da estrela é definido para o valor de r onde $p(r) = 0$, obtivemos, para um η fixo, que o aumento da energia do gap produz estrelas mais massivas, o que podemos ver ao fazer o diagrama $M \times R$. Isto, também nos permitiu concluir que o efeito do emparelhamento conduz a estrelas de raios maiores em comparação com as estrelas de quarks em equilíbrio β (onde $\Delta = 0$). Por outro lado, pelo mesmo argumento, obtivemos estrelas mais compactas fixando o valor de Δ e aumentando o valor do parâmetro η . Um efeito conjunto destes dois parâmetros, com $\Delta = 150$ e $\eta_{max} = 0.1137$, produziu estrelas CFL mais compactas que no caso das estrelas de quarks obtidas com a matéria de quarks sem emparelhamento e, o que é mais importante, estrelas estáveis, resolvendo assim o problema da metaestabilidade das estrelas de quarks encontrado no modelo CDM em [17, 18].

Finalmente, estudamos a variação da pressão e da densidade de energia com o raio para as estrelas de massa máxima obtidas com diversos valores de Δ e η (vide tabela (4.1)). O perfil da densidade de energia em função do raio evidencia uma característica das estrelas puramente feitas de quarks, a de que estas possuem, em contraste com as estrelas de nêutrons, uma superfície dura: a pressão vai a zero na superfície mas a densidade de energia é grande, enquanto numa estrela hadrônica, na superfície dessas estrelas a pressão vai a zero só quando a densidade de energia se anula. Mostramos que as correções relativísticas para as estrelas de quarks são importantes. O caráter predominante até o meio da estrela dos termos dependentes f_1 e f_2 provenientes da EOS, são gerais (funções que decrescem monotonicamente com o raio e se anulam na superfície onde a pressão é zero) [60] e mais importantes com o aumento do emparelhamento pois a pressão aumenta. Após o meio da estrela o termo predominante é o da métrica (f_3) que é sempre crescente o que não acontece para as estrelas de nêutrons, visto numa estrela de quarks a massa crescer aproximadamente com o volume ($\propto r^3$), enquanto que numa estrela de nêutrons isto não acontece.

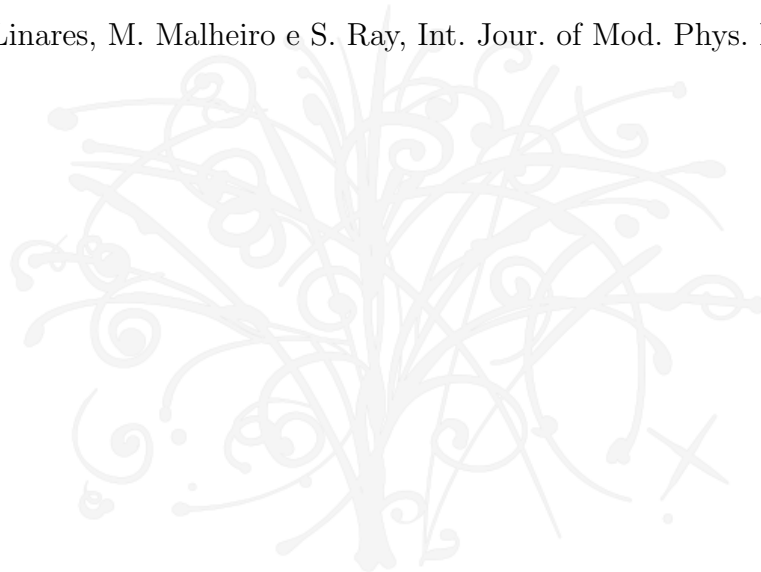
Referências Bibliográficas

- [1] D. Bailin e A. Love, Phys. Rept. **107**, 325 (1984)
- [2] D. Bailin and A. Love, *Supersymmetric Gauge Field Theory and String Theory*, (IOP, London, 1994).
- [3] J. Bardeen, L. N. Cooper e J. R. Schrieffer, Phys. Rev. **106**, 162 (1957); **108**, 1175 (1957).
- [4] K. Rajagopal e F. Wilczek, *The Condensed Matter Physics of QCD*, Chapter 35 'At the Frontier of Particle Physics / Handbook of QCD', M. Shifman, ed., (World Scientific), vol. 3 2061-2151.(2001), hep-ph/0011333
- [5] M. Alford, *Color Superconducting Quark Matter* Ann.Rev.Nucl.Part.Sci. **51**, 131-160 (2001), hep-ph/0102047
- [6] M. Alford, K. Rajagopal e F. Wilczek, Phys. Lett. **B422**, 247 (1998)
- [7] M. Alford, K. Rajagopal e F. Wilczek Nucl. Phys. B **537**, 433 (1999)
- [8] M. Alford, J. Berges e K. Rajagopal Nucl. Phys. B **558**, 219 (1999)
- [9] T. Schaefer e F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **82**,3956 (1999)
- [10] M. K. Banerjee, Prog. Part. Nucl. Phys. **31**, 77 (1993)
- [11] M. C. Birse, Prog. Part. Nucl. Phys. **25**, 1 (1990)
- [12] H. J. Pirner, Prog. Part. Nucl. Phys. **29**, 33 (1992)
- [13] H. B. Nielsen e A. Patkós, Nucl. Phys. B **195**, 137 (1982)
- [14] T. Neuber, M. Fiolhais, K. Goeke e J. N. Urbano, Nucl. Phys. A **560**, 909 (1993)
- [15] A. Drago, M. Fiolhais e U. Tambini, Nucl. Phys. A **609**, 488 (1996)
- [16] A. Drago, M. Fiolhais e U. Tambini, Nucl. Phys. A **588**, 801 (1995)
- [17] M. Malheiro, M. Fiolhais e A. R. Taurines, J. Phys. G **29**, 1045 (2003)

- [18] M. Malheiro, E. O. Azevedo, L. G. Nuss, M. Fiolhais e A.R. Taurines, *Small Quark Stars in the Chromodielectric Model*, publicado nos anais da Pan American Advanced Studies Institute on New States of Matter in Hadronic Interactions (PASI 2002), 658 (2002), hep-ph/0111148
- [19] M. Fiolhais, M. Malheiro e A. R. Taurines, *Stability of Quark Matter and Quark Stars*, publicado nos anais da conferncia Faro 2002, New worlds in astroparticle physics, 123 (2002)
- [20] M. Fiolhais, L. P. Linares, M. Malheiro e A. Taurines, *Quark Matter and Quark Stars*, publicado nos anais da conferncia Bled 2004 Quark dynamics, 18 (2004)
- [21] L. P. Linares, M. Malheiro, M. Fiolhais e A. Taurines, *Superconducting Quark Matter in the Chromodielectric Model*, IX Hadron Physics and VII Relativistic Aspects of Nuclear Physics, Anais publicados pela AIP, 488(2004)
- [22] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn e V. F. Weisskopf Phys. Rev. D **9**, 3471 (1974)
- [23] A. W. Thomas, Nucl. Phys. **A416**, 69 (1984)
- [24] A. W. Thomas, S. Theberge, Gerald A. Miller , Phys.Rev. **D24**, 216 (1981)
- [25] A. W. Thomas, Adv. Nucl. Phys. **13**, 1-137 (1984)
- [26] Y. Nambu e G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122**, 345 (1961); **124**, 246 (1961)
- [27] S. P. Klevansky, Rev. Mod. Phys. **64**, 649 (1992) para um bom artigo de reviso do modelo NJL.
-
- [28] S. Klimt, M. Lutz e W. Weise, Phys. Lett. **B249**, 386 (1990) ; M. Lutz, S. Klimt e W. Weise **A542**, 521 (1992)
- [29] T. Hatsuda e T. Kunihiro, Phys. Rept. **247**, 221 (1994)
- [30] M. Asakawa e K. Yazaki, Nucl. Phys. **A504**, 668 (1989)
- [31] T. D. Lee, *Particle Physics and Introduction to Field Theory*, Harvard Academic, N.Y. (1981)
- [32] L. G. Liu , W. Bentz e A. Arima, Annals Phys. **194**, 387 (1989)
- [33] W. Bentz, C. Matulla e H. Baier Phys. Rev. **C56**, 2280 (1997)
- [34] M. Rosina, A. Schuh e H. J. Pirner, Nucl. Phys. A **448**, 557 (1986)

- [35] J. A. McGovern e M. Birse Nucl. Phys. A **506**, 367 (1990); Nucl. Phys. **506**, 392 (1990)
- [36] E. S. Fraga, R. D. Pisarski e J. Schaffner-Bielich, Phys. Rev. D **63**, 121702 (2002)
- [37] M. Buballa, *NJL Model Analysis of Quark Matter at large density*, 191pp (2003), hep-ph/0402234 , um bom artigo de reviso das fases supercondutoras no modelo NJL.
- [38] M. Buballa, Nucl. Phys. A **611**, 393 (1996)
- [39] K. Rajagopal, F. Wilczek, Phys. Rev. Lett. **86**, 3492 (2001)
- [40] P. F. Bedaque e T. Schaefer, Nucl. Phys. A **697**, 802 (2002)
- [41] M. Alford, S. Reddy Phys. Rev. D **67**, 074024 (2003)
- [42] M. Alford, J. Bowers e K. Rajagopal, Phys. Rev. D **69**, 057505 (2004)
- [43] G. Lugones, J. E. Horvath Phys. Rev. D **66**, 074017 (2002)
- [44] M. Alford, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **51**, 131-160 (2001), hep-ph/0102047
- [45] M. Alford, J. Bowers, K. Rajagopal J. Phys. G **27**, 541 (2001); Lect. Notes Phys. **578**, 235-252 (2001), Trento 2000, Physics of neutron star interiors, hep-ph/0009357
- [46] G. Lugones e J. E. Horvath Astronomy and Astrophysics **403**, 173 (2003)
- [47] M. Baldo e M. Buballa, Phys. Lett. B **562**, 153 (2003)
- [48] P. K. Panda, D.P. Menezes e C. Providncia Phys. Rev. C **69**, 025207 (2004)
- [49] H. Heiselberg e M. Hjorth-Jensen, Phys. Rept. **328**, 237 (2000)
- [50] R. C. Tolman, Phys. Rev. **55**, 364 (1939)
- [51] J. R. Oppenheimer e G. M. Volkoff, Astrophys. J. **74**, 81 (1939)
- [52] M. K. Glendenning, *Compact Stars*, N.Y., Springer-Verlag (1997)
- [53] I. Bombaci *Do strange stars exist in the universe?*, Pacific Rim Conference on Stellar Astrophysics, Hong Kong, China, 3 (1999), astro-ph/0002524
- [54] X. D. Li, I. Bombaci, M. Dey, Jishnu Dey e E. P. J. van den Heuvel, Phys. Rev. Lett. **83** 3776 (1999)

- [55] M. Dey, I. Bombaci, J. Dey , Subharthi Ray e B. C. Samanta, Phys. Lett. B **438**, 123 (1998), Addendum-ibid.B **447**, 352 (1999)
- [56] J. Madsen, Phys. Rev. Lett. **81**, 3311 (1998)
- [57] L. Landau e E. Lifshitz, The classical theory of fields. Addison-Wesley, (1951)
- [58] S. Weinberg, Gravitation and Cosmology, New York John Wiley, (1972)
- [59] Schwarzschild, Sitzungsberichte Preuss, 422, (1916)
- [60] L. P. Linares, M. Malheiro e S. Ray, Int. Jour. of Mod. Phys. D, **13**, 1355 (2004)



INSTITUTO DE FÍSICA

Universidade Federal Fluminense

Apêndice A

Equação de gap pelo método variacional

A interação atrativa entre os quarks produz uma instabilidade no estado fundamental trivial, onde todos os momentos dos quarks estão ocupados até a superfície de Fermi. Bardeen, Cooper e Schrieffer os pais da teoria BCS, argumentaram que a resolução dessa instabilidade é o estado emparelhado [3]. Este estado fundamental é caracterizado por um gap de energia Δ , devido ao emparelhamento dos quarks perto da superfície de Fermi que cria pares partícula-buraco (os quasi-quarks que como veremos adquirem uma massa). Neste apêndice faremos o cálculo deste gap, usando o princípio variacional, na Hamiltoniana de interação da troca de um glúon para o caso em que temos apenas dois sabores de quarks u e d .

A teoria BCS pode ser bem entendida no formalismo Hamiltoniano fazendo uso de um método não perturbativo: o princípio variacional da minimização da energia através de uma função de onda teste que depende de alguns parâmetros. O modelo que vamos usar para a Hamiltoniana está baseada na interação de troca de um glúon que é atrativa no canal $\bar{\mathbf{3}}$ e portanto para pares de quarks próximos à superfície de Fermi condensa a onda-s (spin 0) no canal singlete de cor. O pioneiro trabalho de Nambu e Jona-Lasinio [26], modelo NJL, aplicou esta ideia da teoria BCS para o emparelhamento de partícula-antipartícula, onde um condensado destes pares se forma e a simetria quiral é espontaneamente quebrada gerando massa para os quarks. Para isso, utilizaram uma interação de contato de quatro férmions para os quarks e uma função de onda teste com o objetivo de diagonalizar esta Hamiltoniana. Aplicaremos, neste apêndice a ideia da teoria BCS em modelos tipo-NJL, que simulam de um modo efetivo a QCD, mas para o emparelhamento quark-quark. Como estamos considerando apenas os dois quarks leves, o cálculo que vamos aqui apresentar para a energia do gap Δ , refere-se à fase 2SC apresentada no capítulo 3.

A expressão para a energia livre para quarks sem massa é dada por

$$\Omega = \int d^3x \bar{\psi}(x)(\not{\nabla} - \mu\gamma_0)\psi(x) + H_I \quad (\text{A.1})$$

onde a Hamiltoniana de interação,

$$H_I = \frac{3}{8}G \int d^3x \mathcal{F} (\bar{\psi}(x)\gamma_\mu T^A \psi(x)) (\bar{\psi}(x)\gamma^\mu T^A \psi(x)) \quad (\text{A.2})$$

descreve a interação entre quatro férmions com a estrutura, cor e sabor gerada pela troca de um glúon e onde T^A representa os geradores do grupo $SU(3)_{cor}$ (proporcionais as matrizes de Gellman). Na QCD realística a interação torna-se fraca a altos momentos (altas densidades) e por isso introduzimos um fator de forma \mathcal{F} .

Conforme é utilizado na literatura [6], substituiremos o fator de forma pela função mais simples uma função degrau:

$$F(p) = \begin{cases} 1 & \text{se } p < \Lambda \\ 0 & \text{se } p > \Lambda \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

onde o parâmetro de corte Λ terá que ser fixado. Com esta função as integrais no espaço dos momentos são cortadas para momentos maiores que Λ . Considerando os dois sabores de quarks u e d e utilizando os procedimentos efetuados em [4, 6, 42], procuramos um condensado fazendo o “ansatz” BCS para a função de onda do estado fundamental:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= A_L^\dagger A_R^\dagger |0\rangle \\ A_L^\dagger &= \prod_{\mathbf{p}, \alpha, \beta} \left(\cos \theta_L(\mathbf{p}) + \epsilon^{\alpha\beta 3} e^{i\xi_L(\mathbf{p})} \sin \theta_L(\mathbf{p}) a_{Lu\alpha}^\dagger(\mathbf{p}) a_{Ld\beta}^\dagger(-\mathbf{p}) \right) \\ A_R^\dagger &= \prod_{\mathbf{p}, \alpha, \beta} \left(\cos \theta_R(\mathbf{p}) + \epsilon^{\alpha\beta 3} e^{i\xi_R(\mathbf{p})} \sin \theta_R(\mathbf{p}) a_{Ru\alpha}^\dagger(\mathbf{p}) a_{Rd\beta}^\dagger(-\mathbf{p}) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

onde α, β são índices de cor, u, d são os sabores e a^\dagger é o operador criação. Os índices L e R referem-se a quarks sem massa com quiralidade (helicidade) mão esquerda e mão direita respectivamente.

Os pares de Cooper descritos por este ansatz são antisimétricos na cor e no sabor devido as relações de anticomutação relacionadas a esses operadores. Os θ 's and ξ 's são os parâmetros variacionais do nosso ansatz e serão escolhidos para minimizar a energia livre deste estado BCS. Temos também que levar em conta o emparelhamento

das anti-partículas o que introduz mais um termo na função de onda BCS. Isto apenas aumenta o número de equações, mas no final, ao obter a equação de gap incluiremos a contribuição das anti-partículas e veremos que é pequena.

Ao fazer o cálculo do condensado para a quiralidade mão esquerda

$$\Gamma_L \equiv -\frac{1}{2} \langle \Psi | \epsilon_{ij} \epsilon_{\alpha\beta} \psi^{i\alpha}(\mathbf{r}) C L \psi^{j\beta}(\mathbf{r}) | \Psi \rangle \quad (\text{A.5})$$

na função de onda teste vemos que não é nulo. Aqui, $C = i\gamma^0\gamma^2$ e $L = (1 - \gamma_5)/2$ é o usual operador de projeção mão esquerda.

Ao fazer o cálculo explícito usando a função de onda BCS, o condensado Γ_L pode ser expresso em termos dos parâmetros variacionais como:

$$\Gamma_L = \frac{4}{V} \sum_{\mathbf{p}} \sin \theta_L(\mathbf{p}) \cos \theta_L(\mathbf{p}) e^{i(\xi_L(\mathbf{p}) - \phi(\mathbf{p}))} \quad (\text{A.6})$$

onde V é o volume do sistema e a dependência no ângulo ϕ aparece ao utilizar as convenções para os spinores descrita em [2, 6, 7].

A expressão para o condensado quiral mão direita Γ_R é essencialmente a mesma que a da Eq. (A.6), a menos de uma fase, e é dada por:

$$\Gamma_R = \frac{4}{V} \sum_{\mathbf{p}} \sin \theta_R(\mathbf{p}) \cos \theta_R(\mathbf{p}) e^{i(\xi_R(\mathbf{p}) - (\pi - \phi(\mathbf{p})))} \quad (\text{A.7})$$

Ao considerarmos um sistema infinito, podemos fazer a seguinte substituição nestas equações:

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{p}} \rightarrow \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}$$

Nossa escolha simplificada do fator de forma restringe o limite de integração desta integral para $|\mathbf{p}| < \Lambda$. Além disso, a função de onda trivial pode ser obtida pela função de onda BCS para os ângulos quirais:

$$\theta_L(\mathbf{p}) = \theta_R(\mathbf{p}) = \begin{cases} \pi/2 & \text{para } |\mathbf{p}| > \mu \\ 0 & \text{para } |\mathbf{p}| < \mu \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

que são exatamente os ângulos que tornam nulos os condensados.

Podemos calcular explicitamente o valor esperado da energia livre (A.1) no

estado $|\Psi\rangle$ e obtemos:

$$\langle\Psi|\Omega|\Psi\rangle = 4 \sum_{\mathbf{p}} (|\mathbf{p}| - \mu) \sin^2 \theta_L(\mathbf{p}) + 4 \sum_{\mathbf{p}} (|\mathbf{p}| - \mu) \sin^2 \theta_R(\mathbf{p}) + \langle H_I \rangle \quad (\text{A.9})$$

onde

$$\langle H_I \rangle = -\frac{GV}{2} (|\Gamma_L|^2 + |\Gamma_R|^2) \quad (\text{A.10})$$

está escrito em função dos condensados que são funções dos parâmetros variacionais. Não consideramos a contribuição para $\langle\Omega\rangle$ devida a terceira cor do quark, pois esta não participa do emparelhamento.

Aplicando o princípio variacional em relação aos ξ 's, encontramos que eles devem cancelar as fases $\phi(\mathbf{p})$ na Eq. (A.6). Deste modo, nós obtemos a maior coerência na soma em \mathbf{p} , o que nos fornece o maior valor para o condensado e conseqüentemente o menor valor para a energia livre. Para que aconteça este cancelamento das fases nas expressões dos condensados

$$\xi_L(\mathbf{p}) = \phi(\mathbf{p}) + \varphi_L \quad \xi_R(\mathbf{p}) = \pi - \phi(\mathbf{p}) + \varphi_R \quad (\text{A.11})$$

onde φ_L e φ_R são ângulos arbitrários \mathbf{p} -independentes. Estas fases constantes não afetam a energia livre - elas correspondem aos bósons de Goldstone da quebra de simetria quiral, mão direita e mão esquerda - e portanto não são fixos pelo método variacional. Por conveniência, definimos $\varphi_L = \varphi_R = 0$, e obtemos condensados e parâmetros do gap Δ puramente reais ao anular as exponenciais nas expressões dos condensados.

Agora, aplicamos o princípio variacional para determinar os ângulos quirais $\theta(\mathbf{p})_{L,R}$ nas nossas funções de onda BCS teste, minimizando a energia livre:

$$\frac{\partial\langle\Omega\rangle}{\partial\theta(\mathbf{p})_{L,R}} = 0$$

Como os resultados são os mesmos para o condensado mão esquerda ou mão direita, vamos eliminar os índices L e R dos ângulos quirais e dos condensados. Fazendo estas derivadas explicitamente na expressão do valor esperado da energia livre dada acima, facilmente obtemos que

$$\tan 2\theta(\mathbf{p}) = \frac{\Delta}{|\mathbf{p}| - \mu} \quad (\text{A.12})$$

onde $\Delta = G\Gamma$. Com os ângulos θ expressos agora em termos de Δ , podemos usar a função de onda $|\Psi\rangle$ para obter a relação de dispersão de quasi-partículas

$$E(\mathbf{p}) = \sqrt{(|\mathbf{p}| - \mu)^2 + \Delta^2} \quad (\text{A.13})$$

onde E é o custo de energia livre para remover um par e substituir ele por um quark u com momento \mathbf{p} e um quark d com momento $-\mathbf{p}$. Este resultado confirma que Δ é o gap no espectro de excitações fermiônicas.

Substituindo θ da Eq. (A.12) na Eq. (A.6) e usando a relação $\Delta = G\Gamma$, obtemos a equação para o gap Δ

$$1 = \frac{2G}{V} \sum_{\mathbf{p}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(|\mathbf{p}| - \mu)^2 + \Delta^2}} + \frac{1}{\sqrt{(|\mathbf{p}| + \mu)^2 + \Delta^2}} \right\} \quad (\text{A.14})$$

O primeiro termo do lado direito da equação de gap, Eq. (A.14) conduz a uma divergência logarítmica na superfície de Fermi se $\Delta \rightarrow 0$. Este termo é a contribuição da equação de gap para a partícula-buraco (a quasi-partícula), e a divergência logarítmica é a manifestação da instabilidade BCS. Por causa da divergência do lado direito para $\Delta \rightarrow 0$, deve haver uma solução para a equação de gap com $\Delta \neq 0$ mesmo para valores pequenos da constante de acoplamento G , bastando para isso que G seja positivo (atrativo) visto o lado direito da equação do gap ter ser positivo. O segundo termo, com $(|\mathbf{p}| + \mu)$ no denominador, é a contribuição das antipartículas, que não foi considerado nos cálculos mas que incluímos agora. É interessante notar que apesar de Δ aparecer tanto na parte de anti-partículas quanto na de partícula-buraco, a contribuição das anti-partículas para a equação do gap é pequena, pois o seu denominador é sempre maior que μ .