

CONEXÃO ENTRE MODELOS  
HADRÔNICOS NÃO-LINEARES E  
MODELOS DE CONTATO



**INSTITUTO DE FÍSICA**  

---

**Universidade Federal Fluminense**

Dissertação apresentada como requisito parcial para  
obtenção do título de Mestre em Física

Autor: **Odilon Lourenço da Silva Filho**

Orientador: **Dr. Antônio Delfino Jr.**

Niterói - Rio de Janeiro

2007

“O correr da vida embrulha tudo, a vida é assim: esquenta e esfria, aperta e daí afrouxa, sossega e depois desinquieta. O que ela quer da gente é coragem.”

*Guimarães Rosa.*

# Agradecimentos

- A Deus por sempre me iluminar e abençoar, especialmente durante esse trabalho.
- Ao meu orientador Antônio Delfino, com quem aprendo constantemente, por ter conduzido com extrema eficiência e competência esse trabalho.
- Ao professor Rubens do Amaral pela grande contribuição dada à esse trabalho.
- Aos meus pais Odilon e Tercilia, por terem me concedido a oportunidade de concluir mais essa etapa em minha vida.
- À minha futura esposa Mariana Dutra, pela ajuda, amor e carinho.
- À toda minha família.
- Aos meus amigos Carlos Eduardo, Edésio Barboza, Ricardo Aguiar e Rodrigo Picanço.
- À todas as funcionárias da biblioteca do Instituto de Física.
- À secretaria de pós-graduação do Instituto de Física.
- À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro.

# Resumo

Nesse trabalho estudamos uma classe de modelos hadrônicos relativísticos de contato e investigamos a relação entre esses modelos com os modelos hadrônicos não-lineares. Mostramos como é possível obter, rigorosamente, os modelos de contato a partir dos modelos de alcance finito através do limite hipermassivo dos mésons trocados. Tratamos os modelos de contato no regime de temperatura nula e finita através da obtenção de suas equações de estado, para com isso compará-las com as respectivas equações de estado do modelo de Walecka não-linear. Analisamos um caso particular do modelo de contato não-linear que trata da aproximação entre as densidades escalar e vetorial, verificando que os cálculos, em temperatura nula, passam a ser analíticos. Uma discussão sobre correlações entre observáveis em temperatura nula e parâmetros críticos, para uma classe de modelos não-lineares, é apresentada.

# Abstract

In this work a study of a set of relativistic hadronic point coupling models are made analysing the relation among this models with the hadronic nonlinear ones. We show how to obtain, rigorously, the point coupling models from the finite range ones by the hypermassive limit of the changed mesons. The point coupling models are discuss in the zero and finite temperature regime by its equations of state and then we compare this equations with the Walecka nonlinear model ones. A particular case of the point coupling nonlinear model that discuss the approach among the scalar and vectorial densities are analyze and the calculation in zero temperature regime to become analytical. A discussion about the correlations among the observables in zero temperature regime and the critical parameters are presented to a set of hadronic nonlinear models.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 O modelo fermiônico de contato</b>	<b>7</b>
1.1 Construção da densidade lagrangiana . . . . .	8
1.1.1 Construção a partir do modelo de Walecka . . . . .	8
1.1.2 Construção dos termos de mais alta ordem . . . . .	13
1.2 Equações de estado em temperatura nula . . . . .	17
1.2.1 Incompressibilidade . . . . .	22
1.3 Equações de estado em temperatura finita . . . . .	24
1.4 O modelo misto na aproximação de campo médio . . . . .	31
<b>2 O modelo de Walecka não-linear</b>	<b>37</b>
2.1 Equações de estado em temperatura nula . . . . .	37
2.1.1 Incompressibilidade . . . . .	41
2.2 Equações de estado em temperatura finita . . . . .	44
<b>3 Comparação entre os modelos</b>	<b>48</b>
3.1 Modelos em temperatura nula . . . . .	48
3.2 Modelos em temperatura finita . . . . .	51
3.3 Interpretação dos resultados . . . . .	58
3.3.1 Análise em temperatura nula . . . . .	60
3.3.2 Análise em temperatura finita . . . . .	63

<b>4</b>	<b>Aproximação <math>\rho = \rho_s</math> para o modelo de contato</b>	<b>65</b>
4.1	Relação de dispersão e hamiltoniano do sistema . . . . .	67
4.2	Equações de estado em temperatura nula . . . . .	69
4.3	Resultados . . . . .	74
<b>5</b>	<b>Correlação entre a temperatura crítica e observáveis em <math>T = 0</math></b>	<b>82</b>
	<b>Conclusões</b>	<b>88</b>
<b>A</b>	<b>Notações e Convenções</b>	<b>93</b>
<b>B</b>	<b>Equação do campo fermiônico para a matéria nuclear</b>	<b>96</b>
B.1	Densidades na aproximação de campo médio . . . . .	97
<b>C</b>	<b>Relações termodinâmicas</b>	<b>100</b>
C.1	Relação entre o equilíbrio hidrostático e os extremos de $\mathcal{E}/\rho$ . . . . .	100
C.2	Expressões para a incompressibilidade . . . . .	101
<b>D</b>	<b>Procedimentos numéricos</b>	<b>103</b>
D.1	Cálculo das integrais que contém a função de Fermi . . . . .	103
D.2	Cálculo da temperatura crítica dos modelos nucleares . . . . .	109
<b>E</b>	<b>Expansão relativística de Sommerfeld em baixas temperaturas</b>	<b>111</b>
E.1	Expansão relativística de Sommerfeld . . . . .	111
E.2	Aplicação no modelo de Walecka . . . . .	114
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>118</b>

# Lista de Figuras

3.1	$P \times \rho/\rho_0$ , para vários valores de $m^* = M_0^*/M$ e $K_0$ em $T = 0$ . A linha cheia representa o modelo de contato e a tracejada o modelo de Walecka não-linear. . . . .	48
3.2	Energia por nucleon como função da razão $\rho/\rho_0$ , para vários valores de $m^* = M_0^*/M$ e $K_0$ em $T = 0$ . A linha cheia representa o modelo de contato e a tracejada o modelo de Walecka não-linear. . . . .	49
3.3	$M^*/M$ como função de $\rho/\rho_0$ para $m^* = 0,54$ e $K_0 = 551 MeV$ em $T = 0$ . A linha cheia representa o modelo de contato e a tracejada o modelo de Walecka não-linear. . . . .	50
3.4	$M^*/M$ como função de $\rho/\rho_0$ para $m^* = 0,56$ e $K_0 = 450 MeV$ em $T = 0$ . A linha cheia representa o modelo de contato e a tracejada o modelo de Walecka não-linear. . . . .	50
3.5	$M^*/M$ como função de $\rho/\rho_0$ para $m^* = 0,58$ e $K_0 = 350 MeV$ em $T = 0$ . A linha cheia representa o modelo de contato e a tracejada o modelo de Walecka não-linear. . . . .	50
3.6	$M^*/M$ como função de $\rho/\rho_0$ para $m^* = 0,60$ e $K_0 = 250 MeV$ em $T = 0$ . A linha cheia representa o modelo de contato e a tracejada o modelo de Walecka não-linear. . . . .	51
3.7	$M^*/M$ como função de $\rho/\rho_0$ para $m^* = 0,62$ e $K_0 = 220 MeV$ em $T = 0$ . A linha cheia representa o modelo de contato e a tracejada o modelo de Walecka não-linear. . . . .	51



3.8	Pressão como função da razão $\rho/\rho_0$ , para vários valores de $m^* = M_0^*/M$ e $K_0$ em $T = 5 MeV$ . A linha cheia representa o modelo de contato e a tracejada o modelo de Walecka não-linear. . . . .	52
3.9	Pressão como função da razão $\rho/\rho_0$ , para vários valores de $m^* = M_0^*/M$ e $K_0$ em $T = 10 MeV$ . A linha cheia representa o modelo de contato e a tracejada o modelo de Walecka não-linear. . . . .	52
3.10	Pressão como função da razão $\rho/\rho_0$ , para vários valores de $m^* = M_0^*/M$ e $K_0$ em $T = 15 MeV$ . A linha cheia representa o modelo de contato e a tracejada o modelo de Walecka não-linear. . . . .	53
3.11	Energia por nucleon como função da razão $\rho/\rho_0$ , para vários valores de $m^* = M_0^*/M$ e $K_0$ em $T = 5 MeV$ . A linha cheia representa o modelo de contato e a tracejada o modelo de Walecka não-linear. . . . .	53
3.12	Energia por nucleon como função da razão $\rho/\rho_0$ , para vários valores de $m^* = M_0^*/M$ e $K_0$ em $T = 10 MeV$ . A linha cheia representa o modelo de contato e a tracejada o modelo de Walecka não-linear. . . . .	54
3.13	Energia por nucleon como função da razão $\rho/\rho_0$ , para vários valores de $m^* = M_0^*/M$ e $K_0$ em $T = 15 MeV$ . A linha cheia representa o modelo de contato e a tracejada o modelo de Walecka não-linear. . . . .	54
3.14	Razão $M^*/M$ como função da temperatura para o modelo de contato para $\rho = \nu = 0$ . . . . .	55
3.15	Razão $M^*/M$ como função da temperatura para o modelo de Walecka não-linear para $\rho = \nu = 0$ . . . . .	55
3.16	Energia livre de Helmholtz por partícula como função da razão $\rho/\rho_0$ , para vários valores de $m^* = M_0^*/M$ e $K_0$ em $T = 5 MeV$ . A linha cheia representa o modelo de contato e a tracejada o modelo de Walecka não-linear. . . . .	56
3.17	Energia livre de Helmholtz por partícula como função da razão $\rho/\rho_0$ , para vários valores de $m^* = M_0^*/M$ e $K_0$ em $T = 10 MeV$ . A linha cheia representa o modelo de contato e a tracejada o modelo de Walecka não-linear. . . . .	57

3.18	Energia livre de Helmholtz por partícula como função da razão $\rho/\rho_0$ , para vários valores de $m^* = M_0^*/M$ e $K_0$ em $T = 15 \text{ MeV}$ . A linha cheia representa o modelo de contato e a tracejada o modelo de Walecka não-linear. . . . .	57
4.1	Razão $\rho_s/\rho_0$ como função de $\rho/\rho_0$ do modelo de contato para diferentes valores de $m^*$ e $K_0$ . . . . .	65
4.2	$P \times \rho/\rho_0$ para $\bar{M}_0/M = 0,54$ e $K_0 = 551 \text{ MeV}$ em $T = 0$ . A linha cheia representa o modelo de contato exato e a tracejada a aproximação $\rho = \rho_s$ . . . . .	74
4.3	$P \times \rho/\rho_0$ para $\bar{M}_0/M = 0,56$ e $K_0 = 450 \text{ MeV}$ em $T = 0$ . A linha cheia representa o modelo de contato exato e a tracejada a aproximação $\rho = \rho_s$ . . . . .	74
4.4	$P \times \rho/\rho_0$ para $\bar{M}_0/M = 0,58$ e $K_0 = 350 \text{ MeV}$ em $T = 0$ . A linha cheia representa o modelo de contato exato e a tracejada a aproximação $\rho = \rho_s$ . . . . .	75
4.5	$P \times \rho/\rho_0$ para $\bar{M}_0/M = 0,60$ e $K_0 = 250 \text{ MeV}$ em $T = 0$ . A linha cheia representa o modelo de contato exato e a tracejada a aproximação $\rho = \rho_s$ . . . . .	75
4.6	$P \times \rho/\rho_0$ para $\bar{M}_0/M = 0,62$ e $K_0 = 220 \text{ MeV}$ em $T = 0$ . A linha cheia representa o modelo de contato exato e a tracejada a aproximação $\rho = \rho_s$ . . . . .	76
4.7	$\mathcal{E}/\rho \times \rho/\rho_0$ para $\bar{M}_0/M = 0,54$ e $K_0 = 551 \text{ MeV}$ em $T = 0$ . A linha cheia representa o modelo de contato exato e a tracejada a aproximação $\rho = \rho_s$ . . . . .	76
4.8	$\mathcal{E}/\rho \times \rho/\rho_0$ para $\bar{M}_0/M = 0,56$ e $K_0 = 450 \text{ MeV}$ em $T = 0$ . A linha cheia representa o modelo de contato exato e a tracejada a aproximação $\rho = \rho_s$ . . . . .	77
4.9	$\mathcal{E}/\rho \times \rho/\rho_0$ para $\bar{M}_0/M = 0,58$ e $K_0 = 350 \text{ MeV}$ em $T = 0$ . A linha cheia representa o modelo de contato exato e a tracejada a aproximação $\rho = \rho_s$ . . . . .	77

4.10	$\mathcal{E}/\rho \times \rho/\rho_0$ para $\bar{M}_0/M = 0,60$ e $K_0 = 250 MeV$ em $T = 0$ . A linha cheia representa o modelo de contato exato e a tracejada a aproximação $\rho = \rho_s$ . . . . .	78
4.11	$\mathcal{E}/\rho \times \rho/\rho_0$ para $\bar{M}_0/M = 0,62$ e $K_0 = 220 MeV$ em $T = 0$ . A linha cheia representa o modelo de contato exato e a tracejada a aproximação $\rho = \rho_s$ . . . . .	78
4.12	$m^* \times \rho/\rho_0$ para $T = 0$ . A linha cheia representa o modelo de contato exato onde $m^* = M_0^*/M$ e a tracejada a aproximação $\rho = \rho_s$ , onde $m^* = \bar{M}_0/M$ . Em ambos $m^* = 0,54$ e $K_0 = 551 MeV$ . . . . .	79
4.13	$m^* \times \rho/\rho_0$ para $T = 0$ . A linha cheia representa o modelo de contato exato onde $m^* = M_0^*/M$ e a tracejada a aproximação $\rho = \rho_s$ , onde $m^* = \bar{M}_0/M$ . Em ambos $m^* = 0,56$ e $K_0 = 450 MeV$ . . . . .	79
4.14	$m^* \times \rho/\rho_0$ para $T = 0$ . A linha cheia representa o modelo de contato exato onde $m^* = M_0^*/M$ e a tracejada a aproximação $\rho = \rho_s$ , onde $m^* = \bar{M}_0/M$ . Em ambos $m^* = 0,58$ e $K_0 = 350 MeV$ . . . . .	80
4.15	$m^* \times \rho/\rho_0$ para $T = 0$ . A linha cheia representa o modelo de contato exato onde $m^* = M_0^*/M$ e a tracejada a aproximação $\rho = \rho_s$ , onde $m^* = \bar{M}_0/M$ . Em ambos $m^* = 0,60$ e $K_0 = 250 MeV$ . . . . .	80
4.16	$m^* \times \rho/\rho_0$ para $T = 0$ . A linha cheia representa o modelo de contato exato onde $m^* = M_0^*/M$ e a tracejada a aproximação $\rho = \rho_s$ , onde $m^* = \bar{M}_0/M$ . Em ambos $m^* = 0,62$ e $K_0 = 220 MeV$ . . . . .	80
5.1	Temperatura crítica de vários modelos nucleares em função da quantidade $(K_0/m^*)^{1/2}\rho_0^{1/3}$ . Os pontos da esquerda para a direita, representam os valores da incompressibilidade $K = 180, 200, 220, 240, 250, 260, 280$ e $300 MeV$ . . . . .	85
5.2	$m_c^*P_c/\rho_cT_c$ como função da quantidade $(K_0/m^*)^{1/2}\rho_0^{1/3}$ . . . . .	87

D.1	Gráfico qualitativo da pressão como função da densidade para algumas isotermas. Os pontos vermelhos representam os pontos spinodais e o ponto em azul o ponto crítico do sistema. No gráfico $T_1 < T_2 < T_3 < T_c$ . . . . .	109
E.1	Comportamento da razão entre o coeficiente relativístico ( $I_2$ ) e o não-relativístico ( $\pi^2/6$ ), como função de $k_F$ para $T = 1, 5$ e $10 MeV$ . . . . .	115
E.2	Pressão como função da razão $\rho/\rho_0$ para $T = 1 MeV$ . A densidade de saturação é $\rho_0 = 0,15 fm^{-3}$ . A linha tracejada representa o cálculo com a expansão e a linha cheia o exato. . . . .	116
E.3	Pressão como função da razão $\rho/\rho_0$ para $T = 5 MeV$ . A densidade de saturação é $\rho_0 = 0,15 fm^{-3}$ . A linha tracejada representa o cálculo com a expansão e a linha cheia o exato. . . . .	116

# Lista de Tabelas

3.1	Valores das constantes do modelo de contato para os diversos parâmetros $m^*$ e $K_0$ . As constantes $G_V'^2$ e $G_s'^2$ multiplicadas por $M^2$ são adimensionais. . . . .	60
3.2	Valores das constantes do modelo de Walecka não-linear para os diversos parâmetros $m^*$ e $K_0$ . As constantes $G_V^2$ e $G_s^2$ multiplicadas por $M^2$ são adimensionais. . . . .	60
3.3	Razão entre as constantes dos modelos de contato e Walecka não-linear para diversos parâmetros $m^*$ e $K_0$ . . . . .	61
3.4	Valores dos termos da energia por partícula do modelo de contato. O termo cinético está representado por $E'_c$ . Aqui, por simplicidade, fizemos $B' = 0$ . A energia de ligação é dada por $E_0 = E'_1 + E'_2 + E'_3 + E'_c - M$ . . . . .	61
3.5	Valores dos termos da energia por partícula do modelo de Walecka não-linear. Aqui, por simplicidade, fizemos $b = 0$ . A energia de ligação é dada por $E_0 = E_1 + E_2 + E_3 + E_c - M$ . . . . .	62
3.6	Valores dos termos da energia por partícula do modelo de contato com todos os termos não-lineares. A energia de ligação é dada por $E_0 = E'_1 + E'_2 + E'_3 + E'_4 + E'_c - M$ . . . . .	62
3.7	Valores dos termos da energia por partícula do modelo de Walecka não-linear com todos os termos não-lineares. A energia de ligação é dada por $E_0 = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_c - M$ . . . . .	62
3.8	Parâmetros críticos para o diversos modelos nucleares calculados a partir do modelo de contato. . . . .	63

3.9	Parâmetros críticos para o diversos modelos nucleares calculados a partir do modelo de Walecka não-linear. . . . .	63
5.1	Parâmetros críticos para os diversos modelos nucleares dentro da faixa de $0,58 \leq m^* \leq 0,62$ . . . . .	86
D.1	Valores da pressão em $\rho = 0,01 \text{ fm}^{-3}$ para diversos pontos de Gauss distribuídos nos dois intervalos de integração. O valor da temperatura para essa isoterma é $T = 1 \text{ MeV}$ . O potencial químico efetivo correspondente é $\nu = 913 \text{ MeV}$ . . . . .	107
D.2	Valores da pressão em $\rho = 0,01 \text{ fm}^{-3}$ para diversos pontos de Gauss (distribuídos em um único intervalo de integração) e para $x_{\max} = 4$ . O valor da temperatura para essa isoterma é $T = 1 \text{ MeV}$ . O potencial químico efetivo correspondente é $\nu = 913 \text{ MeV}$ . . . . .	108
E.1	Termos de ordem mais baixa da expansão relativística. . . . .	115

# Introdução

A força nuclear é uma das quatro forças fundamentais da natureza. Diferentemente do caso coulombiano, a interação entre os nucleons não é bem estabelecida, ou seja, não existe um potencial bem definido que descreva a força entre os prótons e nêutrons, entretanto sabe-se que essa interação é de curto alcance.

Na década de 50, foram realizados experimentos de espalhamento próton-próton que mostraram uma troca de sinal no deslocamento de fase. Isso indicou que a interação nucleon-nucleon deveria, ou ser não-local dependente da energia, o que gerou a construção de potenciais dependentes da velocidade, ou que tal interação deveria ser local, isto é, depender somente da distância relativa entre os nucleons. Nesse caso, esta deveria conter tanto parte atrativa quanto repulsiva, o que também já explicaria a saturação da energia por nucleon da matéria nuclear. Essa segunda opção foi a mais utilizada e os potenciais mais sofisticados que existem atualmente, tais como os potenciais de Bonn, Paris, Nijmegen e Argonne [1-5] são considerados locais.

Usualmente, a descrição de sistemas nucleares é feita propondo-se uma interação e a partir daí, seus parâmetros livres são ajustados para reproduzir os observáveis de estado ligado (energia negativa) e espalhamento (energia positiva) que se conhece da física de dois nucleons. Feito isso, os observáveis pertinentes a núcleos mais leves, mais pesados, matéria nuclear e estrela de nêutrons podem ser calculados com a interação proposta. De um modo geral, a qualidade da interação se associa com o número de parâmetros livres existentes para ajuste. Todas as interações propostas são baseadas na possibilidade da troca de mésons entre os nucleons. A modelagem de troca de mésons entre os nucleons foi proposta por Yukawa, que a fez

em total analogia com a interação eletromagnética, governada essencialmente pela troca de fótons, mas diferentemente desta interação a partícula mediadora proposta por Yukawa é o méson  $\pi$ . Esta parte, referente à troca de um pión é comum a todas as interações. No entanto, em região de mais curto alcance, as interações diferem.

Em cálculos com sistemas de muitos nucleons há pelo menos duas linhas competitivas de abordagem. A mais tradicional e antiga utiliza as interações nucleon-nucleon disponíveis e através de técnicas conhecidas como Brueckner-Hartree-Fock (BHF) [6] os cálculos são efetuados. A outra utiliza basicamente a teoria quântica de campos como modelo. Dentre as várias interações existentes que utilizam a aproximação BHF, duas são usadas extensivamente para a descrição dos sistemas nucleares, são elas a interação de Gogny e a de Skyrme. A primeira é baseada em interações de alcance finito e a outra, em interações de alcance zero.

Modelos cujas interações entre os nucleons são de alcance finito foram introduzidos inicialmente levando em consideração propriedades dos nucleons tais como spin e isospin [7]. Posteriormente, Gogny alterou tais interações adicionando os efeitos de spin-órbita. A subsequente parametrização desta interação foi chamada de força de Gogny [8]. Já no modelo de Skyrme [9, 10], os nucleons interagem entre si apenas quando dois ou três deles estão em contato (ou seja, as interações são de alcance zero). Esse modelo contempla portanto, a contribuição de forças de dois e três corpos. Esses dois modelos descrevem bem os sistemas nucleares, porém são não-relativísticos. Existem modelos nos quais o conteúdo relativístico (por exemplo, o acoplamento spin-órbita) surge de forma natural, tais modelos são na sua maioria derivados da teoria quântica de campos e tratam basicamente, via aproximação de campo médio, os nucleons como um todo, diferentemente do tratamento via aproximações BHF onde o conhecimento do potencial em questão é fundamental.

A formulação que utiliza como base a teoria quântica de campos é chamada de Hadrodinâmica Quântica (QHD) e descreve a interação entre os nucleons através da troca de mésons. Nessa abordagem, os nucleons e os mésons são os graus de liberdade da teoria. O modelo inicialmente proposto apoiado na QHD para a descrição da matéria nuclear, foi o modelo de Walecka em 1974 [11]. Esse modelo



propõe que a atração a distâncias intermediárias entre os nucleons é devida a troca de um méson escalar, méson  $\sigma$  e a repulsão a curto alcance, devida a troca do méson vetorial  $\omega$ . Nesse modelo há apenas dois parâmetros livres, fixados de tal forma que a energia de ligação por partícula e a densidade de saturação da matéria nuclear sejam reproduzidos. Embora tal modelo descreva muitas propriedades da matéria nuclear, falha em algumas. Por exemplo, a incompressibilidade prevista por esse modelo é de  $550 \text{ MeV}$ , valor bem distante do comprovado experimentalmente ( $230 \pm 5 \text{ MeV}$ ) [12]. Propriedades de núcleos finitos como o desdobramento spin-órbita também não são bem descritos pelo modelo de Walecka. Para contornar essas limitações, foram propostos os chamados modelos de Walecka não-lineares (WNL), nos quais termos cúbicos e quárticos de auto-interações dos campos mesônicos escalares foram introduzidos [13].

Modelos que diferem estruturalmente dos modelos não-lineares também são largamente usados na física nuclear, um deles é o modelo de Zimanyi-Moszkowski (ZM) [14] que leva em conta acoplamentos derivativos entre o nucleon e os mésons. O valor fornecido para a incompressibilidade é bastante razoável,  $K = 225 \text{ MeV}$ , porém a descrição do desdobramento spin-órbita de núcleons finitos é falha. Outras descrições relativísticas para os modelos nucleares levam em conta a dependência da densidade nas “constantes” de acoplamento. Na verdade, tanto ZM quanto ZM3 [15, 16] podem ser interpretados como modelos de Walecka cujas constantes de acoplamento dependem da densidade [17, 18].

Todos esses modelos baseiam-se em uma interação de alcance finito (troca de mésons massivos). Há porém outros modelos, ainda dentro da abordagem da QHD, que descrevem os sistemas nucleares através de interações de alcance zero entre os nucleons [19, 20, 21]. Essas abordagens, que podem ser vistas como os equivalentes relativísticos do modelo de Skyrme, são chamadas de modelos de contato, pois os nucleons interagem entre si apenas quando em contato pontual, sem a troca de mésons. Seus resultados na descrição da matéria nuclear estão no mesmo nível dos modelos relativísticos de alcance finito [19, 20].

Os objetivos principais desse trabalho são mostrar a obtenção, através de deriva-

ções rigorosas, de modelos relativísticos de contato a partir dos modelos relativísticos de alcance finito; comparar ambas descrições dos sistemas nucleares, mais especificamente matéria nuclear infinita e verificar se os modelos de contato assim propostos, são adequados para tais descrições.

Para isso, dividimos esse trabalho da seguinte maneira. No capítulo 1 será mostrado como é obtida a densidade lagrangiana do modelo de contato de auto-interação fermiônica quadrática através da densidade lagrangiana do modelo de Walecka. A obtenção de um modelo a partir do outro é feita, de forma rigorosa, com o uso do funcional gerador e do limite de massas mesônicas muito grandes. Todo o procedimento será descrito detalhadamente e a partir daí será mostrado qual a densidade lagrangiana necessária para a construção dos termos de mais alta ordem (termos cúbicos e quárticos de auto-interação fermiônica) no modelo de contato. Os cálculos que levam um modelo em outro também serão feitos com as mesmas ferramentas já citadas. Ainda nesse capítulo, será feita a descrição termodinâmica da matéria nuclear infinita através do cálculo das equações de estado em temperatura nula e finita usando para isso a aproximação de campo médio. O modelo de contato não-linear será usado como base dessa descrição e os ajustes dos parâmetros livres serão feitos de forma a reproduzir a energia de ligação por partícula, densidade de saturação, incompressibilidade do sistema na densidade de saturação e massa efetiva do nucleon. O modelo cuja densidade lagrangiana gera o modelo de contato não-linear também será tratado via aproximação de campo médio em temperatura nula e será mostrado que mesmo utilizando apenas essa aproximação, temos reproduzidas as equações do modelo de contato não-linear.

A descrição termodinâmica do modelo WNL será apresentada no capítulo 2 onde serão calculadas, segundo aproximação de campo-médio, suas equações de estado em temperatura nula e finita. Novamente, os parâmetros livres dessa teoria serão fixados de modo a reproduzir os mesmos observáveis citados para a determinação dos parâmetros do modelo de contato não-linear em temperatura nula. A motivação para o estudo desse modelo no contexto do trabalho é devida ao fato que estruturalmente, o modelo WNL é muito parecido com o de contato, pelo fato de apresentar termos que

contém auto-interações cúbicas e quárticas do méson escalar. O modelo de contato não-linear apresenta também esses termos, porém de auto-interações puramente fermiônicas.

A comparação entre os modelos de Walecka não-linear e o de contato não-linear será feita no capítulo 3. Inicialmente, esses serão comparados no regime de temperatura nula através das principais quantidades termodinâmicas, tais como pressão e energia por partícula. O comportamento da massa efetiva do nucleon como função da densidade do sistema também será usado para efeito de comparação. Posteriormente, para alguns valores de temperatura, essas comparações serão repetidas e por estarmos tratando de sistemas a temperatura finita, será levado em consideração a energia livre de Helmholtz, grandeza importante para esses casos, como mais um elemento de comparação. O comportamento da massa efetiva como função da temperatura no regime de densidade nula será igualmente analisado. As constantes de acoplamento de ambos os modelos serão confrontadas e os resultados discutidos, assim como a análise da contribuição dos termos não lineares dos dois modelos para a densidade de energia na densidade de saturação. Ainda nesse capítulo, os parâmetros críticos dos modelos (temperatura, pressão, densidade, massa efetiva e fator de compressibilidade) serão calculados e utilizados na análise entre os modelos.

O capítulo 4 mostrará um caso particular do modelo de contato não-linear, a aproximação  $\rho = \rho_s$ , que se trata em princípio de uma aproximação não-relativística. Primeiramente, será mostrada a motivação para o estudo de tal aproximação e em seguida, com o uso da aproximação de campo-médio, os cálculos que levam ao hamiltoniano do sistema e à relação de dispersão serão realizados com detalhes. A partir do hamiltoniano serão derivadas, para o sistema em temperatura nula, as equações de estado do modelo aproximado (pressão e densidade de energia em função da densidade) assim como a expressão para a incompressibilidade. Os novos parâmetros livres do modelo aproximado são ajustados da mesma forma que no modelo exato, ou seja, fixando os mesmos observáveis. Ao cabo do capítulo serão apresentados os resultados, bem como a análise da região de validade da aproximação.

Finalmente no capítulo 5 será discutida a correlação entre a temperatura crítica

e os observáveis em temperatura nula. Essa correlação será feita a partir de uma expressão analítica relacionando a temperatura crítica a esses observáveis. Essa análise será efetuada e testada a partir de diversos modelos nucleares, todos calculados a partir do modelo WNL dentro de um intervalo de valores para a massa efetiva do nucleon que reproduz satisfatoriamente o desdobramento spin-órbita de núcleos finitos.

Os apêndices desse trabalho estão assim distribuídos. O apêndice A define as notações e convenções utilizadas ao longo da dissertação. O segundo apêndice (apêndice B) mostrará qual a estrutura e como é resolvida a equação do campo fermiônico para a matéria nuclear. Ainda nesse apêndice serão calculadas, com o uso da aproximação de campo médio, as densidades bariônica e escalar na matéria nuclear em temperatura nula.

O apêndice C mostrará algumas relações termodinâmicas bastante úteis na descrição de sistemas nucleares. Uma delas é a equivalência entre o equilíbrio hidrostático e os extremos da energia livre de Helmholtz por volume. As diversas expressões para a incompressibilidade isotérmica também serão demonstradas nesse apêndice.

Os procedimentos numéricos utilizados no trabalho para a resolução das integrais que contém as funções de Fermi-Dirac, bem como o método desenvolvido para a obtenção da temperatura crítica dos diferentes modelos nucleares utilizados serão detalhadamente mostrados no apêndice D. No quinto e último apêndice (apêndice E) será desenvolvida uma expansão que visa tratar analiticamente as integrais que contém as funções de Fermi-Dirac. Usualmente tais integrais são resolvidas de forma numérica. Essa expansão será feita nos moldes da expansão de Sommerfeld para sistemas fermiônicos, porém na matéria nuclear os cálculos são essencialmente relativísticos. A aplicação dessa expansão será feita como exemplo, no modelo de Walecka.

# Capítulo 1

## O Modelo Fermiônico de Contato

O modelo fermiônico de contato é um modelo no qual os férmions estão em contato pontual e interagem diretamente entre si sem a troca de mésons. Pode-se pensar tal modelo como tratando-se de um modelo no qual os férmions estão sendo intermediados por mésons, como o modelo de Walecka por exemplo, mas com a massa desses mésons sendo muito grande. A razão disso está no fato de que no modelo de Walecka, que apresenta quatro constantes arbitrárias ( $g_s$  e  $g_V$ , constantes de acoplamento méson escalar-nucleon e méson vetorial-nucleon e as respectivas massas mesônicas  $m_s$  e  $m_V$ ), quando tratado via aproximação de campo médio, exhibe como parâmetros ajustáveis apenas as razões entre as constantes de acoplamento e as respectivas massas mesônicas (cada constante individualmente permanece arbitrária). Com isso é razoável tomar qualquer valor para as massas mesônicas, como a única restrição de manter fixo o valor dessas razões.

Como o alcance da força nuclear ( $R$ ) é inversamente proporcional a massa do méson trocado ( $R \sim \frac{\hbar c}{mc^2}$ ) podemos concluir que com o limite  $m \rightarrow \infty$ , o alcance da interação mesônica é praticamente nulo, reproduzindo portanto o modelo de contato. De fato já se mostrou que o modelo de contato é perfeitamente equivalente ao modelo de Walecka [22, 23]. A pergunta que queremos responder é se tomando-se os limites de  $m \rightarrow \infty$  em modelos de Walecka não-lineares (WNL) esta equivalência permanece.

Assim, neste capítulo será deduzida, usando o procedimento descrito acima, a

densidade lagrangiana do modelo dada por

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - M)\psi + \frac{1}{2}G'_s{}^2(\bar{\psi}\psi)^2 - \frac{1}{2}G'_V{}^2(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2 + \frac{1}{3}A'(\bar{\psi}\psi)^3 + \frac{1}{4}B'(\bar{\psi}\psi)^4. \quad (1.1)$$

A inclusão dos termos proporcionais a  $(\bar{\psi}\psi)^3$  e  $(\bar{\psi}\psi)^4$  visa descrever melhor a matéria nuclear através do ajuste das constantes de acoplamento  $G'_s{}^2$ ,  $G'_V{}^2$ ,  $A'$  e  $B'$  a partir<sup>1</sup> de observáveis experimentalmente acessíveis da física nuclear (energia de ligação, densidade de saturação, incompressibilidade e massa efetiva do nucleon). Tais observáveis, o ajuste mencionado e também as equações de estado do modelo serão tratados com detalhes na seção 1.2 deste capítulo.

## 1.1 Construção da densidade lagrangiana

Sabe-se da literatura que o modelo de contato com apenas o termo de auto-interação  $(\bar{\psi}\psi)^2$  (equação 1.1 com  $A' = B' = 0$ ) apresenta as mesmas equações de estado que o modelo de Walecka. Através do limite de massa mesônica muito grande, será mostrado como se gera a densidade lagrangiana do modelo de contato (com o termo quadrático de auto-interação) a partir da densidade lagrangiana de Walecka.

### 1.1.1 Construção a partir do modelo de Walecka

A densidade lagrangiana do modelo de Walecka é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - M)\psi + \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m_s^2\phi^2 - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_V^2V_\mu V^\mu \\ &- g_s\bar{\psi}\phi\psi - g_V\bar{\psi}\gamma^\mu V_\mu\psi \end{aligned} \quad (1.2)$$

com<sup>2</sup>

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu V^\nu - \partial^\nu V^\mu. \quad (1.3)$$

Vê-se na equação acima, a densidade lagrangiana de Dirac (1º termo) que representa férmions (nucleons) livres, a de Klein-Gordon (2º e 3º termos) representando

<sup>1</sup>As constantes  $G'_s{}^2$  e  $G'_V{}^2$  têm a dimensão de  $MeV^{-2}$ ,  $A'$  de  $MeV^{-5}$  e  $B'$  de  $MeV^{-8}$ .

<sup>2</sup>As constantes de acoplamento  $g_s$  e  $g_V$  são adimensionais e as massas mesônicas  $m_s$  e  $m_V$  têm a dimensão de  $MeV$ .

bósons massivos livres de spin 0 (méson escalar), a de Proca (4° e 5° termos) representando bósons massivos livres de spin 1 (méson vetorial), a de Yukawa (6° termo) que representa a interação entre o méson escalar e os férmions e a densidade lagrangiana que representa a interação entre o méson vetorial e os férmions (7° termo).

O méson escalar, de massa  $m_s$ , é o mediador responsável pela atração de médio alcance entre os nucleons e o méson vetorial, de massa  $m_V$ , pela repulsão de curto alcance.

Em teoria quântica de campos a temperatura nula o funcional gerador (F. G.), construído através de integrais funcionais, é um objeto matemático que permite o cálculo das funções de correlação para os campos [24, 25, 26]. Estas são geradas a partir das derivadas funcionais do F. G. com relação às fontes dos campos envolvidos. Para a teoria de Walecka, temos que o F. G. é dado por

$$W[J, A_\mu, \eta, \bar{\eta}] = N \int [D\psi][D\bar{\psi}][DV^\mu][D\phi] e^{iS_F} \quad (1.4)$$

com

$$N = \frac{1}{\int d^4x e^{iS}}, \quad (1.5)$$

$$S = \int d^4x \mathcal{L}_W \quad \text{e} \quad (1.6)$$

$$S_F = \int d^4x [\mathcal{L}_W + A_\mu(x)V^\mu(x) + J(x)\phi(x) + \bar{\eta}(x)\psi(x) + \eta(x)\bar{\psi}(x)] \quad (1.7)$$

onde  $A_\mu(x)$ ,  $J(x)$ ,  $\eta(x)$  e  $\bar{\eta}(x)$  são as fontes dos campos vetorial ( $V^\mu$ ), escalar ( $\phi$ ) e spinoriais ( $\bar{\psi}$  e  $\psi$ ) respectivamente. A ação é dada por  $S$  e a ação com os termos de fonte é dada por  $S_F$ .

Fazendo agora as seguintes definições:

$$V'^\mu \equiv m_V V^\mu, \quad (1.8)$$

$$\phi' \equiv m_s \phi, \quad (1.9)$$

$$G'_s \equiv \frac{g_s}{m_s}, \quad (1.10)$$

$$G'_V \equiv \frac{g_V}{m_V}, \quad (1.11)$$

$$A'_\mu \equiv \frac{A_\mu}{m_V} \quad (1.12)$$

e

$$J' \equiv \frac{J}{m_s} \quad (1.13)$$

temos que (1.2) torna-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_W &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - M)\psi + \frac{1}{2m_s^2}\partial^\mu\phi'\partial_\mu\phi' - \frac{1}{2}\phi'^2 - \frac{1}{4m_V^2}F'^{\mu\nu}F'_{\mu\nu} + \frac{1}{2}V'_\mu V'^\mu \\ &- G'_s\bar{\psi}\phi'\psi - G'_V\bar{\psi}\gamma^\mu V'_\mu\psi \end{aligned} \quad (1.14)$$

que pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\mathcal{L}_W = \mathcal{L}'_W + \frac{1}{2m_s^2}\partial^\mu\phi'\partial_\mu\phi' - \frac{1}{4m_V^2}F'^{\mu\nu}F'_{\mu\nu} \quad (1.15)$$

$$\equiv \mathcal{L}'_W + U(\phi', V'^\mu), \quad (1.16)$$

onde

$$F'^{\mu\nu} = \partial^\mu V'^\nu - \partial^\nu V'^\mu \quad e \quad (1.17)$$

$$\mathcal{L}'_W = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - M)\psi - \frac{1}{2}\phi'^2 + \frac{1}{2}V'_\mu V'^\mu - G'_s\bar{\psi}\phi'\psi - G'_V\bar{\psi}\gamma^\mu V'_\mu\psi. \quad (1.18)$$

A partir dessas definições, (1.4) pode ser escrito como

$$W[J', A'_\mu, \eta, \bar{\eta}] = N \int [D\psi][D\bar{\psi}][DV'^\mu][D\phi'] e^{i \left[ \int d^4x U(\phi', V'^\mu) + S'_F \right]} \quad (1.19)$$

sendo

$$S'_F = \int d^4x \left[ \mathcal{L}'_W + A'_\mu(x)V'^\mu(x) + J'(x)\phi'(x) + \bar{\eta}(x)\psi(x) + \eta(x)\bar{\psi}(x) \right]. \quad (1.20)$$

O foco aqui é o limite em que as massas mesônicas são muito grandes, logo está configurado um ambiente no qual pode-se tratar os termos que contém os parâmetros  $\frac{1}{2m_s^2}$  e  $\frac{1}{4m_V^2}$  como perturbativos em uma expansão no funcional gerador. Tal procedimento permite utilizar a teoria de perturbação nos termos cinéticos da densidade lagrangiana ao contrário do que se faz usualmente, onde os termos de interação são tratados perturbativamente.



Dessa forma identificam-se os campos da grandeza  $U(\phi', V'^\mu)$  com suas respectivas derivadas funcionais da seguinte maneira

$$U(\phi', V'^\mu) = \frac{1}{2m_s^2} \partial^\mu \phi' \partial_\mu \phi' - \frac{1}{4m_V^2} F'^{\mu\nu} F'_{\mu\nu} \quad (1.21)$$

$$= \frac{1}{2m_s^2} \left( \partial^\mu \frac{\delta}{\delta J'} \right)^2 - \frac{1}{4m_V^2} \left( \partial^\nu \frac{\delta}{\delta A'_\mu} - \partial^\mu \frac{\delta}{\delta A'_\nu} \right)^2 \quad (1.22)$$

$$= U \left( \frac{\delta}{\delta J'}, \frac{\delta}{\delta A'_\mu} \right), \quad (1.23)$$

o que permite escrever (1.19) como

$$W[J', A'_\mu, \eta, \bar{\eta}] = N e^{i \left[ \int d^4x U \left( \frac{\delta}{\delta J'}, \frac{\delta}{\delta A'_\mu} \right) \right]} \int [D\psi][D\bar{\psi}][DV'^\mu][D\phi'] e^{iS'_F}. \quad (1.24)$$

Utilizando apenas o primeiro termo na expansão do funcional gerador, ou seja, tomando

$$e^{i \left[ \int d^4x U \left( \frac{\delta}{\delta J'}, \frac{\delta}{\delta A'_\mu} \right) \right]} \simeq 1 \quad (1.25)$$

temos que

$$W[J', A'_\mu, \eta, \bar{\eta}] = N \int [D\psi][D\bar{\psi}][DV'^\mu][D\phi'] e^{iS'_F} \quad (1.26)$$

e com isso, os termos cinéticos associados aos campos mesônicos são eliminados nessa aproximação.

O modelo de contato apresenta apenas os campos fermiônicos, portanto a densidade lagrangiana dada pela expressão (1.18) ainda não representa tal modelo. Apesar da ausência dos termos cinéticos dos campos mesônicos em relação à (1.2), a equação ainda contém termos que representam a interação dos campos modificados  $\phi'$  e  $V'^\mu$  com os campos fermiônicos  $\psi$  e  $\bar{\psi}$ .

Para desacoplá-los será utilizado o procedimento da translação nos campos, mas antes de usar esse método simplificaremos um pouco mais o problema. Já que a interação mais importante em questão é a fermiônica, ou seja, não estamos interessados em analisar o comportamento das funções de correlação mesônicas, podemos descartar suas respectivas fontes, em outras palavras, faremos  $J'(x) = A'_\mu(x) = 0$

em (1.20). Usando essa condição e as seguintes identidades:

$$-\frac{1}{2}\phi'^2 - G'_s \bar{\psi} \phi' \psi = -\frac{1}{2}(\phi' + G'_s \bar{\psi} \psi)^2 + \frac{1}{2}G'^2_s (\bar{\psi} \psi)^2 \quad (1.27)$$

$$\frac{1}{2}V'^\mu V'_\mu - G'_V \bar{\psi} \gamma^\mu V'_\mu \psi = \frac{1}{2}(V'^\mu - G'_V \bar{\psi} \gamma^\mu \psi)^2 - \frac{1}{2}G'^2_V (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)^2, \quad (1.28)$$

reescrevemos (1.20) como

$$\begin{aligned} S'_F &= \int d^4x \left[ \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - M)\psi - \frac{1}{2}(\phi' + G'_s \bar{\psi} \psi)^2 + \frac{1}{2}G'^2_s (\bar{\psi} \psi)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(V'^\mu - G'_V \bar{\psi} \gamma^\mu \psi)^2 - \frac{1}{2}G'^2_V (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)^2 + \bar{\eta}(x)\psi(x) + \eta(x)\bar{\psi}(x) \right]. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Agora, definimos novos campos transladados tais como

$$\lambda = \phi' + G'_s \bar{\psi} \psi \quad (1.30)$$

$$R^\mu = V'^\mu - G'_V \bar{\psi} \gamma^\mu \psi, \quad (1.31)$$

com isso, as integrais funcionais dos campos mesônicos em (1.26) podem ser reescritas desse modo<sup>3</sup>:

$$\int [D\phi'] e^{-i \int d^4x \frac{1}{2}(\phi' + G'_s \bar{\psi} \psi)^2} = \int [D\lambda] e^{-i \int d^4x \frac{1}{2}\lambda^2} \quad (1.32)$$

$$\int [DV'^\mu] e^{i \int d^4x \frac{1}{2}(V'^\mu - G'_V \bar{\psi} \gamma^\mu \psi)^2} = \int [DR^\mu] e^{i \int d^4x \frac{1}{2}R^\mu R_\mu}. \quad (1.33)$$

Nesse ponto, foi utilizado uma propriedade da integração funcional análoga a que existe na integração usual que é a seguinte:

$$\int dy \int dx f(x \pm y)g(y) = \int dy \int dx' f(x')g(y), \quad (1.34)$$

válida para a transformação  $x' = x \pm y$ , que apresenta jacobiano igual a 1. Analogamente, a translação nos campos também apresenta jacobiano unitário.

Dessa forma, a expressão (1.26) torna-se

$$W[\eta, \bar{\eta}] = \mathcal{N} \int [D\psi][D\bar{\psi}] e^{iS'_F} \quad (1.35)$$

---

<sup>3</sup>Note que essas integrais têm a forma  $\int [D\lambda] e^{-i \int d^4x \frac{1}{2}\lambda^2} = \pi^2 \det[\mathcal{D}^{-1/2}]$  onde  $\mathcal{D}$  é um operador linear. Nos casos em questão,  $\mathcal{D} = 1$  e com isso os resultados das integrais são triviais.

onde

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &= \frac{\int [D\lambda] e^{-i \int d^4x \frac{1}{2} \lambda^2} \int [DR^\mu] e^{i \int d^4x \frac{1}{2} R^\mu R_\mu}}{\int [D\lambda] e^{-i \int d^4x \frac{1}{2} \lambda^2} \int [DR^\mu] e^{i \int d^4x \frac{1}{2} R^\mu R_\mu} \int [D\psi][D\bar{\psi}] e^{iS''}} \\ &= \frac{1}{\int [D\psi][D\bar{\psi}] e^{iS''}}, \end{aligned} \quad (1.36)$$

$$S'' = \int d^4x \left[ \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - M)\psi + \frac{1}{2} G_s'^2 (\bar{\psi}\psi)^2 - \frac{1}{2} G_V'^2 (\bar{\psi}\gamma^\mu \psi)^2 \right] e \quad (1.37)$$

$$S_F'' = \int d^4x \left[ \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - M)\psi + \frac{1}{2} G_s'^2 (\bar{\psi}\psi)^2 - \frac{1}{2} G_V'^2 (\bar{\psi}\gamma^\mu \psi)^2 + \bar{\eta}\psi + \eta\bar{\psi} \right]. \quad (1.38)$$

Note que agora a densidade lagrangiana associada às expressões (1.37) e (1.38), dada por

$$\mathcal{L} = (i\gamma^\mu \partial_\mu - M)\psi + \frac{1}{2} G_s'^2 (\bar{\psi}\psi)^2 - \frac{1}{2} G_V'^2 (\bar{\psi}\gamma^\mu \psi)^2 \quad (1.39)$$

não apresenta nenhum campo mesônico, logo podemos dizer que essa representa o modelo fermiônico de contato, como já havia sido mostrado anteriormente [22, 23]

### 1.1.2 Construção dos termos de mais alta ordem

Na seção anterior, o modelo de Walecka foi utilizado para reproduzir (no limite de massa mesônica muito grande) o modelo de contato com o termo quadrático de auto-interação fermiônica. Poder-se-ia esperar, através dessa motivação, que o modelo de Walecka não-linear fosse usado como base para gerar o modelo de contato com os termos de mais alta ordem de auto-interação (termo cúbico e quártico). Porém é fácil perceber que o procedimento de integração nos campos mesônicos, no limite hipermassivo, aplicado ao modelo WNL não leva formalmente ao modelo de contato não-linear. A dificuldade estaria nas integrais dos campos dos termos de ordem maior que a segunda, na medida em que tais integrais não são conhecidas. Essa dificuldade poderia ser contornada se fosse possível desacoplar os campos mesônicos de forma análoga à realizada no caso do modelo de Walecka. Então os termos

desacoplados, mesmo não conhecendo-se o resultado explícito das integrações, não seriam relevantes já que estamos interessados apenas no comportamento do sistema fermiônico. No entanto esse não é o caso do modelo WNL, já que acoplamentos de ordem superior entre os campos mesônicos e fermiônicos ainda permaneceriam com o uso desse método.

Para solucionar esse problema e obtermos então o modelo de contato não-linear, através do mesmo limite hipermassivo e das mesmas translações nos campos mesônicos, será introduzido um modelo com interações entre os mésons e os férmions que possa levar a campos desacopláveis. Tal modelo é descrito pela seguinte densidade lagrangiana:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - M)\psi + \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m_s^2\phi^2 - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_V^2V_\mu V^\mu \\ &- g_s\bar{\psi}\phi\psi - g_V\bar{\psi}\gamma^\mu V_\mu\psi + \mathcal{L}_3 + \mathcal{L}_4 \end{aligned} \quad (1.40)$$

onde

$$\mathcal{L}_3 = -\frac{A'}{3} \left[ \left(\frac{m_s^2}{g_s}\right)^3 \phi^3 + 3 \left(\frac{m_s^2}{g_s}\right)^2 \phi^2 \bar{\psi}\psi + 3 \frac{m_s^2}{g_s} \phi (\bar{\psi}\psi)^2 \right] \quad e \quad (1.41)$$

$$\mathcal{L}_4 = -\frac{B'}{4} \left[ \left(\frac{m_s^2}{g_s}\right)^4 \phi^4 + 4 \left(\frac{m_s^2}{g_s}\right)^3 \phi^3 \bar{\psi}\psi + 6 \left(\frac{m_s^2}{g_s}\right)^2 \phi^2 (\bar{\psi}\psi)^2 + 4 \frac{m_s^2}{g_s} \phi (\bar{\psi}\psi)^3 \right]. \quad (1.42)$$

O funcional gerador para esse modelo é escrito como

$$W[J, A_\mu, \eta, \bar{\eta}] = N \int [D\psi][D\bar{\psi}][DV^\mu][D\phi] e^{iS_F} \quad (1.43)$$

com

$$N = \frac{1}{\int d^4x e^{iS}}, \quad (1.44)$$

$$S = \int d^4x \mathcal{L}_M \quad e \quad (1.45)$$

$$S_F = \int d^4x [\mathcal{L}_M + A_\mu(x)V^\mu(x) + J(x)\phi(x) + \bar{\eta}(x)\psi(x) + \eta(x)\bar{\psi}(x)] \quad (1.46)$$

Usando novamente as definições dadas por (1.8) a (1.13), temos que (1.40) torna-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - M)\psi + \frac{1}{2m_s^2}\partial^\mu\phi'\partial_\mu\phi' - \frac{1}{2}\phi'^2 - \frac{1}{4m_V^2}F'^{\mu\nu}F'_{\mu\nu} + \frac{1}{2}V'_\mu V'^\mu \\ &- G'_s\bar{\psi}\phi'\psi - G'_V\bar{\psi}\gamma^\mu V'_\mu\psi + \mathcal{L}'_3 + \mathcal{L}'_4 \end{aligned} \quad (1.47)$$

$$\equiv \mathcal{L}'_M + \mathcal{L}'_3 + \mathcal{L}'_4 + U(\phi', V'^\mu) \quad (1.48)$$

onde

$$\mathcal{L}'_M = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - M)\psi - \frac{1}{2}\phi'^2 + \frac{1}{2}V'_\mu V'^\mu - G'_s\bar{\psi}\phi'\psi - G'_V\bar{\psi}\gamma^\mu V'_\mu\psi, \quad (1.49)$$

$$\mathcal{L}'_3 = -\frac{A'}{3} \left[ \frac{1}{G_s'^3}\phi'^3 + \frac{3}{G_s'^2}\phi'^2\bar{\psi}\psi + \frac{3}{G_s'}\phi'(\bar{\psi}\psi)^2 \right], \quad (1.50)$$

$$\mathcal{L}'_4 = -\frac{B'}{4} \left[ \frac{1}{G_s'^4}\phi'^4 + \frac{4}{G_s'^3}\phi'^3\bar{\psi}\psi + \frac{6}{G_s'^2}\phi'^2(\bar{\psi}\psi)^2 + \frac{4}{G_s'}\phi'(\bar{\psi}\psi)^3 \right] \quad (1.51)$$

e  $U(\phi', V'^\mu)$  é dado por (1.21). Logo, pode-se reescrever (1.43) da seguinte maneira:

$$W[J', A'_\mu, \eta, \bar{\eta}] = N \int [D\psi][D\bar{\psi}][DV'^\mu][D\phi'] e^{i \left[ \int d^4x U(\phi', V'^\mu) + S'_F \right]} \quad (1.52)$$

sendo

$$S'_F = \int d^4x \left[ \mathcal{L}'_M + \mathcal{L}'_3 + \mathcal{L}'_4 + A'_\mu(x)V'^\mu(x) + J'(x)\phi'(x) + \bar{\eta}(x)\psi(x) + \eta(x)\bar{\psi}(x) \right]. \quad (1.53)$$

Novamente o termo  $U(\phi', V'^\mu)$ , no funcional gerador, será tratado perturbativamente. Esse tratamento acompanhado da aproximação dada em (1.25) resulta em

$$W[J', A'_\mu, \eta, \bar{\eta}] = N \int [D\psi][D\bar{\psi}][DV'^\mu][D\phi'] e^{iS'_F}. \quad (1.54)$$

Nesse ponto as funções de correlação mesônicas são descartadas, fazendo-se  $J'(x) = A'_\mu(x) = 0$  em (1.53) com a mesma justificativa dada anteriormente. As funções de correlação fermiônicas são o objeto de estudo na aproximação de massas mesônicas muito grandes. Essa condição, juntamente com as identidades dadas em (1.27), (1.28) e as seguintes:

$$-\frac{A'}{3} \left[ \frac{1}{G_s'^3} \phi'^3 + \frac{3}{G_s'^2} \phi'^2 \bar{\psi} \psi + \frac{3}{G_s'} \phi' (\bar{\psi} \psi)^2 \right] = -\frac{A'}{3G_s'^3} (\phi' + G_s' \bar{\psi} \psi)^3 + \frac{A'}{3} (\bar{\psi} \psi)^3, \quad (1.55)$$

$$\begin{aligned} -\frac{B'}{4} \left[ \frac{1}{G_s'^4} \phi'^4 + \frac{4}{G_s'^3} \phi'^3 \bar{\psi} \psi + \frac{6}{G_s'^2} \phi'^2 (\bar{\psi} \psi)^2 + \frac{4}{G_s'} \phi' (\bar{\psi} \psi)^3 \right] &= -\frac{B'}{4G_s'^4} (\phi' + G_s' \bar{\psi} \psi)^4 \\ &+ \frac{B'}{4} (\bar{\psi} \psi)^4 \end{aligned} \quad (1.56)$$

permite reescrever (1.53) como

$$\begin{aligned} S'_F &= \int d^4x \left[ \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - M) \psi - \frac{1}{2} (\phi' + G_s' \bar{\psi} \psi)^2 + \frac{1}{2} G_s'^2 (\bar{\psi} \psi)^2 \right. \\ &+ \frac{1}{2} (V'^\mu - G_V' \bar{\psi} \gamma^\mu \psi)^2 - \frac{1}{2} G_V'^2 (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)^2 - \frac{A'}{3G_s'^3} (\phi' + G_s' \bar{\psi} \psi)^3 + \frac{A'}{3} (\bar{\psi} \psi)^3 \\ &\left. - \frac{B'}{4G_s'^4} (\phi' + G_s' \bar{\psi} \psi)^4 + \frac{B'}{4} (\bar{\psi} \psi)^4 + \bar{\eta}(x) \psi(x) + \eta(x) \bar{\psi}(x) \right]. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Deninindo novos campos dados por

$$\lambda = \phi' + G_s' \bar{\psi} \psi \quad \text{e} \quad (1.58)$$

$$R^\mu = V'^\mu - G_V' \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (1.59)$$

temos que as integrais dos campos mesônicos em (1.52) tornam-se

$$\begin{aligned} \int [D\phi'] e^{-i \int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\phi' + G_s' \bar{\psi} \psi)^2 + \frac{A'}{3G_s'^3} (\phi' + G_s' \bar{\psi} \psi)^3 + \frac{B'}{4G_s'^4} (\phi' + G_s' \bar{\psi} \psi)^4 \right]} &= \\ = \int [D\lambda] e^{-i \int d^4x \left[ \frac{1}{2} \lambda^2 + \frac{A'}{3G_s'^3} \lambda^3 + \frac{B'}{4G_s'^4} \lambda^4 \right]} & \end{aligned} \quad (1.60)$$

e

$$\int [DV'^\mu] e^{i \int d^4x \frac{1}{2} (V'^\mu - G_V' \bar{\psi} \gamma^\mu \psi)^2} = \int [DR^\mu] e^{i \int d^4x \frac{1}{2} R^\mu R_\mu}. \quad (1.61)$$

Essas transformações e translações, alteram a expressão (1.54) para

$$W[\eta, \bar{\eta}] = \mathcal{N} \int [D\psi][D\bar{\psi}] e^{iS'_F} \quad (1.62)$$

onde

$$\mathcal{N} = \frac{1}{\int [D\psi][D\bar{\psi}] e^{iS''}}, \quad (1.63)$$

$$S'' = \int d^4x \left[ \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - M)\psi + \frac{1}{2}G'_s{}^2(\bar{\psi}\psi)^2 - \frac{1}{2}G'_V{}^2(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2 + \frac{A'}{3}(\bar{\psi}\psi)^3 + \frac{B'}{4}(\bar{\psi}\psi)^4 \right] e \quad (1.64)$$

$$S''_F = \int d^4x \left[ \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - M)\psi + \frac{1}{2}G'_s{}^2(\bar{\psi}\psi)^2 - \frac{1}{2}G'_V{}^2(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2 + \frac{A'}{3}(\bar{\psi}\psi)^3 + \frac{B'}{4}(\bar{\psi}\psi)^4 + \bar{\eta}(x)\psi(x) + \eta(x)\bar{\psi}(x) \right]. \quad (1.65)$$

A densidade lagrangiana associada à (1.64) e (1.65) representa o modelo fermiônico de contato com os termos cúbico e quártico de auto-interação, expressão (1.1). É importante ressaltar que a densidade lagrangiana que gera esse modelo não é a de Walecka não-linear (que possui apenas termos interagentes para os campos mesônicos) mas sim a dada por (1.40).

## 1.2 Equações de estado em temperatura nula

Considere um núcleo atômico com igual número de prótons e nêutrons (núcleo simétrico) em seu estado fundamental. Hipoteticamente pode-se imaginar esse núcleo com dimensão infinita, ou seja, tomar o limite termodinâmico (ou de forma equivalente, considerar seu raio infinito) e além disso, supor que não exista interação coulombiana entre seus prótons. Um sistema nuclear que está sob tais limites é chamado de matéria nuclear simétrica infinita ou somente matéria nuclear simétrica. Estas aproximações descrevem bem o centro de núcleos pesados, como o  $^{208}\text{Pb}$  por exemplo.

Para caracterizar um núcleo mais realisticamente, pode-se relaxar algumas dessas condições, como por exemplo, permitir que o núcleo seja assimétrico ou mais, considerar os efeitos da superfície nuclear. Entretanto, os cálculos efetuados na dissertação se restringem somente à matéria nuclear.

No estudo da matéria nuclear torna-se essencial o conhecimento de suas equações

de estado, antes porém será feita a análise do modelo de contato, descrito pela densidade lagrangiana dada em (1.1), obtendo-se suas equações de campo através das equações de Euler-Lagrange:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu Q_i)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Q_i} = 0 . \quad (1.66)$$

Quando se escolhe  $Q_i = \bar{\psi}$ , temos a equação de movimento para o campo  $\psi$  dada por

$$\left\{ \gamma^\mu \left( i\partial_\mu - G_V'^2 \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \right) - \left[ M - G_s'^2 \bar{\psi} \psi - A' (\bar{\psi} \psi)^2 - B' (\bar{\psi} \psi)^3 \right] \right\} \psi = 0 . \quad (1.67)$$

A equação acima pode ser interpretada como a equação de Dirac onde o quadri-momento do nucleon é alterado pela corrente bariônica  $\bar{\psi} \gamma_\mu \psi$  e a massa pela quantidade  $\bar{\psi} \psi$ .

Com o objetivo de obter soluções exatas para a equação acima, utilizaremos a aproximação de campo médio (ACM) que consiste em substituir apenas (nesse caso) as quantidades  $\bar{\psi} \psi$  e  $\bar{\psi} \gamma_\mu \psi$  pelos seus respectivos valores médios  $\rho_s = \langle \bar{\psi} \psi \rangle$  e  $\rho = \langle \bar{\psi} \gamma_0 \psi \rangle$ .

Como o sistema nuclear em estudo é espacialmente uniforme (matéria nuclear infinita) pode-se dizer que a densidade escalar ( $\rho_s$ ) e a densidade bariônica ( $\rho$ ) são independentes da posição.

A partir dessa análise a equação (1.67) torna-se

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu - \gamma^0 G_V'^2 \rho - (M - G_s'^2 \rho_s - A' \rho_s^2 - B' \rho_s^3)] \psi = 0 , \quad (1.68)$$

onde a massa efetiva do nucleon definida por

$$M^* \equiv M - G_s'^2 \rho_s - A' \rho_s^2 - B' \rho_s^3 \quad (1.69)$$

e as densidades dadas por

$$\rho = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} k^2 dk \quad (1.70)$$

$$= \frac{\gamma}{6\pi^2} k_F^3 \quad \text{e} \quad (1.71)$$

$$\rho_s = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} \frac{M^*}{(k^2 + M^{*2})^{1/2}} k^2 dk \quad (1.72)$$

$$= \frac{\gamma M^*}{4\pi^2} \left\{ k_F (k_F^2 + M^{*2})^{1/2} - M^{*2} \ln \left[ \frac{k_F + (k_F^2 + M^{*2})^{1/2}}{M^*} \right] \right\} . \quad (1.73)$$



Para o cálculo das densidades usa-se a expansão em modos do campo  $\psi(\mathbf{x}, t)$ , estas derivações estão feitas com detalhes no apêndice B.

Note que a densidade bariônica possui a dependência  $k_F^3$  ( $k_F$  é o momento de Fermi), característica que independe da interação entre as partículas fermiônicas. Os nucleons ocupam todos os níveis de energia com momento  $k$  ( $\gamma$  nucleons em cada nível), até a superfície de Fermi. Na matéria nuclear,  $\gamma = 4$  e na matéria de nêutrons  $\gamma = 2$ .

As equações de estado do modelo de contato, são determinadas com o uso do tensor momento-energia, definido por

$$T_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu}\mathcal{L} + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu Q_i)} \partial_\nu Q_i \quad (1.74)$$

onde  $g_{\mu\nu}$  é a métrica do espaço-tempo. O somatório está sobre todos os campos envolvidos na teoria.

No modelo de contato, temos que

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} = & -g_{\mu\nu} \left[ \bar{\psi}(i\gamma^\alpha \partial_\alpha - M)\psi + \frac{1}{2}G_s'^2(\bar{\psi}\psi)^2 - \frac{1}{2}G_V'^2(\bar{\psi}\gamma^\alpha\psi)^2 \right. \\ & \left. + \frac{A'}{3}(\bar{\psi}\psi)^3 + \frac{B'}{4}(\bar{\psi}\psi)^4 \right] + i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\nu\psi. \end{aligned} \quad (1.75)$$

Usando a aproximação de campo médio, pode-se escrevê-lo como

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{(ACM)} = & -g_{\mu\nu} \left[ \bar{\psi}(i\gamma^\alpha \partial_\alpha - M)\psi + \frac{1}{2}G_s'^2(\bar{\psi}\psi)^2 - \frac{1}{2}G_V'^2(\bar{\psi}\gamma_0\psi)^2 \right. \\ & \left. + \frac{A'}{3}(\bar{\psi}\psi)^3 + \frac{B'}{4}(\bar{\psi}\psi)^4 \right] + i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\nu\psi. \end{aligned} \quad (1.76)$$

Esse tensor é importante, pois a densidade de energia do sistema é calculada a partir dele da seguinte forma

$$\mathcal{E} = \langle T_{00} \rangle. \quad (1.77)$$

Usando a equação (1.68), temos

$$\bar{\psi}(i\gamma^\alpha \partial_\alpha - M)\psi = \bar{\psi}\gamma^0\psi G_V'^2\rho - G_s'^2\rho_s\bar{\psi}\psi - A'\rho_s^2\bar{\psi}\psi - B'\rho_s^3\bar{\psi}\psi \quad (1.78)$$

$$\langle \bar{\psi}(i\gamma^\alpha \partial_\alpha - M)\psi \rangle = G_V'^2\rho^2 - G_s'^2\rho_s^2 - A'\rho_s^3 - B'\rho_s^4 \quad (1.79)$$

que quando substituído em (1.77), com  $\mu = \nu = 0$ , resulta em um densidade de energia dada por

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}G'_s{}^2\rho_s^2 - \frac{1}{2}G'_V{}^2\rho^2 + \frac{2}{3}A'\rho_s^3 + \frac{3}{4}B'\rho_s^4 + i\langle\bar{\psi}\gamma_0\partial_0\psi\rangle. \quad (1.80)$$

Para o cálculo da quantidade  $i\langle\bar{\psi}\gamma_0\partial_0\psi\rangle$  usa-se a solução de onda plana para o campo  $\psi$ , já que está se considerando a equação de movimento desse campo como sendo a equação de Dirac. Essa solução é dada por

$$\psi(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{k}, \lambda)e^{-ik_\mu x^\mu}, \quad (1.81)$$

acarretando em

$$i\bar{\psi}\gamma_0\partial_0\psi = k_0\bar{\psi}\gamma_0\psi. \quad (1.82)$$

Pela estrutura da equação (1.68) é possível mostrar <sup>4</sup> que a relação de dispersão é dada por

$$k_0 = G'_V{}^2\bar{\psi}\gamma_0\psi \pm (k^2 + M^{*2})^{1/2} \quad (1.83)$$

$$= G'_V{}^2\rho \pm (k^2 + M^{*2})^{1/2} \quad (1.84)$$

onde  $k_0$  é a energia do nucleon e os sinais positivo e negativo são correspondentes à partículas e anti-partículas respectivamente. Usando este resultado e a energia referente às partículas, temos que

$$i\bar{\psi}\gamma_0\partial_0\psi = [G'_V{}^2\rho + (k^2 + M^{*2})^{1/2}]\bar{\psi}\gamma_0\psi \quad (1.85)$$

$$i\langle\bar{\psi}\gamma_0\partial_0\psi\rangle = G'_V{}^2\rho\langle\bar{\psi}\gamma_0\psi\rangle + \langle(k^2 + M^{*2})^{1/2}\bar{\psi}\gamma_0\psi\rangle \quad (1.86)$$

$$= G'_V{}^2\rho\langle\psi^\dagger\psi\rangle + \langle(k^2 + M^{*2})^{1/2}\psi^\dagger\psi\rangle. \quad (1.87)$$

Utilizando a expansão em modos do spinor  $\psi(\mathbf{x}, t)$ , dada por

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k [a_{\mathbf{k},\lambda}u(\mathbf{k}, \lambda)e^{-ik_\mu x^\mu} + b_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger v(\mathbf{k}, \lambda)e^{ik_\mu x^\mu}] \quad (1.88)$$

e a aproximação que despreza todas as anti-partículas do sistema, temos

$$i\langle\bar{\psi}\gamma_0\partial_0\psi\rangle = G'_V{}^2\rho^2 + \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} (k^2 + M^{*2})^{1/2}k^2 dk \quad (1.89)$$

---

<sup>4</sup>Essa demonstração é feita no apêndice B.

levando finalmente a

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}G_V'^2 \rho^2 + \frac{1}{2}G_s'^2 \rho_s^2 + \frac{2}{3}A' \rho_s^3 + \frac{3}{4}B' \rho_s^4 + \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} (k^2 + M^{*2})^{1/2} k^2 dk . \quad (1.90)$$

A pressão do sistema também é dada em termos do tensor momento-energia da seguinte forma

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{3} \langle T_{ii} \rangle & (1.91) \\ &= -\frac{g_{ii}}{3} \left\langle \left[ \bar{\psi}(i\gamma^\alpha \partial_\alpha - M)\psi + \frac{1}{2}G_s'^2 (\bar{\psi}\psi)^2 - \frac{1}{2}G_V'^2 (\bar{\psi}\gamma^\alpha \psi)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{A'}{3} (\bar{\psi}\psi)^3 + \frac{B'}{4} (\bar{\psi}\psi)^4 \right] \right\rangle + \frac{i}{3} \langle \bar{\psi}\gamma_i \partial_i \psi \rangle \\ &= \frac{1}{2}G_V'^2 \rho^2 - \frac{1}{2}G_s'^2 \rho_s^2 - \frac{2}{3}A' \rho_s^3 - \frac{3}{4}B' \rho_s^4 + \frac{i}{3} \langle \bar{\psi}\gamma_i \partial_i \psi \rangle & (1.92) \end{aligned}$$

onde novamente foi usada a relação (1.79). A quantidade  $i \langle \bar{\psi}\gamma_i \partial_i \psi \rangle$  é encontrada a partir de (1.89) e da equação (1.68) da seguinte maneira

$$\begin{aligned} i \langle \bar{\psi}\gamma_i \partial_i \psi \rangle &= i \langle \bar{\psi}\gamma_0 \partial_0 \psi \rangle - i \langle \bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi \rangle & (1.93) \\ &= G_V'^2 \rho^2 + \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} (k^2 + M^{*2})^{1/2} k^2 dk - G_V'^2 \rho^2 + M^* \rho_s \\ &= \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} \left[ (k^2 + M^{*2})^{1/2} - \frac{M^{*2}}{(k^2 + M^{*2})^{1/2}} \right] k^2 dk \\ &= \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} \frac{k^4}{(k^2 + M^{*2})^{1/2}} dk & (1.94) \end{aligned}$$

fornecendo então o seguinte resultado

$$P = \frac{1}{2}G_V'^2 \rho^2 - \frac{1}{2}G_s'^2 \rho_s^2 - \frac{2}{3}A' \rho_s^3 - \frac{3}{4}B' \rho_s^4 + \frac{\gamma}{6\pi^2} \int_0^{k_F} \frac{k^4}{(k^2 + M^{*2})^{1/2}} dk . \quad (1.95)$$

Note que as equações de estado do modelo de contato dependem de quatro constantes,  $G_s'^2$ ,  $G_V'^2$ ,  $A'$  e  $B'$ , determinadas a partir dos valores conhecidos de quatro observáveis da física nuclear: a energia de ligação por partícula ( $E_0$ ), a densidade de saturação ( $\rho_0$ ), a incompressibilidade do sistema ( $K_0$ ) e a massa efetiva do nucleon<sup>5</sup> ( $M_0$ ).

Os valores experimentais mais bem estabelecidos dos observáveis da física nuclear são a energia de ligação do nucleon,  $E_0 = -16 \text{ MeV}$  e a densidade correspondente

<sup>5</sup>Os valores  $E_0$ ,  $K_0$  e  $M_0$  são os dados da matéria nuclear na densidade de saturação.

$\rho_0 = 0,15 \text{ fm}^{-3}$  (densidade encontrada no interior de núcleos pesados). As demais grandezas citadas são medidas de forma indireta e seus valores são menos precisos.

A incompressibilidade da matéria nuclear é obtida através da energia de ressonância gigante de monopolo isoscalar (modo de compressão, chamado de “breathing mode”). Seu valor experimental originalmente medido foi  $210 \pm 30 \text{ MeV}$  [12] mas, recentemente, outros estudos indicam que este valor, com uma margem de incerteza menor, seja  $230 \pm 5 \text{ MeV}$  [27]. A incompressibilidade do sistema fornece a curvatura da curva  $\mathcal{E}/\rho$  x  $\rho$  e para o trabalho, utilizaremos o intervalo de  $K_0 \sim 500 - 220 \text{ MeV}$ . A massa efetiva do nucleon será escolhida dentro de uma faixa que descreve bem o desdobramento dos níveis de energia (splitting) de núcleos finitos. Os valores escolhidos são tais que  $0,58 \leq M_0^*/M \leq 0,62$  [28].

### 1.2.1 Incompressibilidade

A incompressibilidade em sistemas termodinâmicos a temperatura nula pode ser obtida através de

$$K = 9 \left[ \frac{\partial(\mathcal{E} + P)}{\partial \rho} - \frac{\mathcal{E} + P}{\rho} \right]. \quad (1.96)$$

Embora existam outras expressões, conforme demonstrado no apêndice C, a estrutura das equações de estado do modelo de contato tornam mais simples o cálculo da incompressibilidade através de (1.96).

Usando (1.90) e (1.95) obtém-se

$$\mathcal{E} + P = G_V'^2 \rho^2 + (k_F^2 + M^{*2})^{1/2} \rho \quad (1.97)$$

permitindo escrever a relação

$$\frac{\partial(\mathcal{E} + P)}{\partial \rho} = \frac{\partial(\mathcal{E} + P)}{\partial k_F} \frac{\partial k_F}{\partial \rho} + \frac{\partial(\mathcal{E} + P)}{\partial M^*} \frac{\partial M^*}{\partial \rho}, \quad (1.98)$$

já que  $k_F = k_F(\rho)$ , veja (1.71) e  $M^* = M^*(\rho_s)$  com  $\rho_s = \rho_s(k_F) = \rho_s(\rho)$ , conforme (1.69) e (1.73). Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\mathcal{E} + P)}{\partial k_F} \frac{\partial k_F}{\partial \rho} &= \left[ G_V'^2 \rho \frac{\gamma k_F^2}{\pi^2} + (k_F^2 + M^{*2})^{1/2} \frac{\gamma k_F^2}{2\pi^2} + \frac{\rho k_F}{(k_F^2 + M^{*2})^{1/2}} \right] \frac{2\pi^2}{\gamma k_F^2} \\ &= 2G_V'^2 \rho + (k_F^2 + M^{*2})^{1/2} \left[ 1 + \frac{k_F^2}{3(k_F^2 + M^{*2})} \right] \end{aligned} \quad (1.99)$$

que permite escrever (1.96) como

$$\begin{aligned} K &= 9 \left[ G_V'^2 \rho + \frac{k_F^2}{3(k_F^2 + M^{*2})^{1/2}} + \frac{\partial(\mathcal{E} + P)}{\partial M^*} \frac{\partial M^*}{\partial \rho} \right] \\ &= 9 \left[ G_V'^2 \rho + \frac{k_F^2}{3(k_F^2 + M^{*2})^{1/2}} + \frac{\rho M^*}{(k_F^2 + M^{*2})^{1/2}} \frac{\partial M^*}{\partial \rho} \right]. \end{aligned} \quad (1.100)$$

Segundo (1.69), temos que

$$\frac{\partial M^*}{\partial \rho} = -(G_s'^2 + 2A'\rho_s + 3B'\rho_s^2) \frac{\partial \rho_s}{\partial \rho}, \quad (1.101)$$

mas por (1.73)  $\rho_s = \rho_s(k_F, M^*)$ , logo

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial \rho} = \frac{\partial \rho_s}{\partial k_F} \frac{\partial k_F}{\partial \rho} + \frac{\partial \rho_s}{\partial M^*} \frac{\partial M^*}{\partial \rho}. \quad (1.102)$$

Como

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial k_F} = \frac{\gamma M^*}{2\pi^2} \frac{k_F^2}{(k_F^2 + M^{*2})^{1/2}} \quad (1.103)$$

encontra-se

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial \rho} = \frac{M^*}{(k_F^2 + M^{*2})^{1/2}} + \frac{\partial \rho_s}{\partial M^*} \frac{\partial M^*}{\partial \rho} \quad (1.104)$$

resultando em

$$\begin{aligned} \frac{\partial M^*}{\partial \rho} &= -(G_s'^2 + 2A'\rho_s + 3B'\rho_s^2) \left[ \frac{M^*}{(k_F^2 + M^{*2})^{1/2}} + \frac{\partial \rho_s}{\partial M^*} \frac{\partial M^*}{\partial \rho} \right] \\ &= -\frac{M^*}{(k_F^2 + M^{*2})^{1/2}} \left[ \frac{G_s'^2 + 2A'\rho_s + 3B'\rho_s^2}{1 + (G_s'^2 + 2A'\rho_s + 3B'\rho_s^2) \frac{\partial \rho_s}{\partial M^*}} \right]. \end{aligned} \quad (1.105)$$

O cálculo de  $\frac{\partial \rho_s}{\partial M^*}$  é simples, porém trabalhoso. O resultado, somando e subtraindo no decorrer do cálculo a quantidade  $\frac{\gamma k_F}{2\pi^2} (k_F^2 + M^{*2})^{1/2}$ , é

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial M^*} = 3 \left[ \frac{\rho_s}{M^*} - \frac{\rho}{(k_F^2 + M^{*2})^{1/2}} \right] \quad (1.106)$$

e a partir daí chega-se à seguinte expressão final para a incompressibilidade:

$$K = 9G_V'^2 \rho + \frac{3k_F^2}{E_F^*} - \frac{9M^{*2}}{E_F^{*2}} \left[ \frac{(G_s'^2 + 2A'\rho_s + 3B'\rho_s^2)\rho}{1 + 3(G_s'^2 + 2A'\rho_s + 3B'\rho_s^2) \left( \frac{\rho_s}{M^*} - \frac{\rho}{E_F^*} \right)} \right] \quad (1.107)$$

onde  $E_F^* = (k_F^2 + M^{*2})^{1/2}$ .

A incompressibilidade da matéria nuclear ( $K_0$ ) é calculada fazendo  $\rho = \rho_0$  na expressão acima.

De posse desse resultado, pode-se então ajustar as constantes que determinam o modelo de contato através de quatro condições mostradas abaixo:

$$P(\rho_0) = 0, \quad (1.108)$$

$$\frac{\mathcal{E}(\rho_0)}{\rho_0} - M = -E_0, \quad (1.109)$$

$$K(\rho_0) = K_0 \text{ e} \quad (1.110)$$

$$M^*(\rho_0) = M_0^*. \quad (1.111)$$

A primeira condição diz respeito ao equilíbrio hidrostático que a matéria nuclear deve exibir na densidade de saturação. Essa condição poderia, alternativamente, ser dada por

$$\left. \frac{\partial(\mathcal{E}/\rho)}{\partial\rho} \right|_{\rho=\rho_0} = 0. \quad (1.112)$$

A demonstração da equivalência entre as duas condições está mostrada com detalhes no apêndice C.

A segunda condição fixa a energia do nucleon no valor  $-E_0$ . A terceira e quarta condições fixam a incompressibilidade do sistema e a massa efetiva do nucleon nos valores  $K_0$  e  $M_0^*$  respectivamente.

### 1.3 Equações de estado em temperatura finita

Até aqui as equações de estado encontradas descrevem o estado fundamental da matéria nuclear onde a temperatura é nula. Para tentar reproduzir os resultados de reações de íons pesados em altas energias, onde se acredita que o sistema esteja a altas temperaturas, será preciso que as equações de estado contemplem mais essa variável termodinâmica.

Com esse objetivo, o sistema será tratado segundo um ensemble grande canônico, seguindo da proposta de Walecka [11, 29, 30], com a função grande partição dada

por

$$\begin{aligned}
 Z_G &= \text{Tr}[e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})}] \\
 &= \sum_{n_1} \cdots \sum_{n_\infty} \sum_{\bar{n}_1} \cdots \sum_{\bar{n}_\infty} \\
 &\times \langle n_1, \dots, n_\infty; \bar{n}_1, \dots, \bar{n}_\infty | e^{-\beta(\hat{H}-\mu\hat{N})} | n_1, \dots, n_\infty; \bar{n}_1, \dots, \bar{n}_\infty \rangle \quad (1.113)
 \end{aligned}$$

onde  $\hat{H}$  é o hamiltoniano do sistema,  $\hat{N}$  o operador número,  $\mu$  o potencial químico e  $\beta \equiv \frac{1}{T}$ . A notação utilizada indica que o sistema apresenta  $n_1$  partículas e  $\bar{n}_1$  anti-partículas no primeiro estado,  $n_2$  partículas e  $\bar{n}_2$  anti-partículas no segundo e assim sucessivamente. Nesse caso, cada estado será representado pelo vetor  $\mathbf{k}$ .

O hamiltoniano do sistema é encontrado a partir do tensor momento-energia através de

$$\hat{H} = \int d^3x T_{00}. \quad (1.114)$$

Utilizando novamente a aproximação de campo médio, os valores médios dos campos da teoria são definidos da seguinte maneira:

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle \equiv \sigma_0 \quad \text{e} \quad (1.115)$$

$$\langle \bar{\psi}\gamma_0\psi \rangle \equiv v_0 \quad (1.116)$$

para escrever então  $T_{00}^{(ACM)}$ , usando (1.67) e (1.76), como

$$T_{00}^{(ACM)} = i\bar{\psi}\gamma_0\partial_0\psi + \frac{1}{2}G_s'^2\sigma_0^2 - \frac{1}{2}G_V'^2v_0^2 + \frac{2}{3}A'\sigma_0^3 + \frac{3}{4}B'\sigma_0^4. \quad (1.117)$$

Para o cálculo do primeiro termo da expressão anterior, será necessário utilizar as expansões em modos do campo fermiônico  $\psi$  e do seu adjunto  $\psi^\dagger$  dadas por

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \left[ a_{\mathbf{k},\lambda} u(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i\epsilon^+(\mathbf{k})t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + b_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger v(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i\epsilon^-(\mathbf{k})t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right] \quad (1.118)$$

$$\psi^\dagger = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \left[ a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger u^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) e^{i\epsilon^+(\mathbf{k})t - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + b_{\mathbf{k},\lambda} v^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) e^{i\epsilon^-(\mathbf{k})t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \right], \quad (1.119)$$

onde  $V$  é o volume do sistema e  $a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger$ ,  $a_{\mathbf{k},\lambda}$ ,  $b_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger$ ,  $b_{\mathbf{k},\lambda}$  são os operadores de criação e aniquilação para partículas e anti-partículas respectivamente.

A partir dessas expressões chega-se em

$$\begin{aligned}
 i\bar{\psi}\gamma_0\partial_0\psi &= i\psi^\dagger\partial_0\psi \\
 &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \left\{ a_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}', \lambda} u^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) u(\mathbf{k}', \lambda) e^{i[\epsilon^+(\mathbf{k}) - \epsilon^+(\mathbf{k}')]t} e^{-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} \epsilon^+(\mathbf{k}') \right. \\
 &\quad + a_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger b_{\mathbf{k}', \lambda}^\dagger u^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) v(\mathbf{k}', \lambda) e^{i[\epsilon^+(\mathbf{k}) - \epsilon^-(\mathbf{k}')]t} e^{-i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} \epsilon^-(\mathbf{k}') \\
 &\quad + b_{\mathbf{k}, \lambda} a_{\mathbf{k}', \lambda} v^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) u(\mathbf{k}', \lambda) e^{i[\epsilon^-(\mathbf{k}) - \epsilon^+(\mathbf{k}')]t} e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} \epsilon^+(\mathbf{k}') \\
 &\quad \left. + b_{\mathbf{k}, \lambda} b_{\mathbf{k}', \lambda}^\dagger v^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) v(\mathbf{k}', \lambda) e^{i[\epsilon^-(\mathbf{k}) - \epsilon^-(\mathbf{k}')]t} e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} \epsilon^-(\mathbf{k}') \right\}. \quad (1.120)
 \end{aligned}$$

O hamiltoniano é dado então por

$$\begin{aligned}
 \hat{H} &= \int d^3x i\psi^\dagger\partial_0\psi + \frac{1}{2} \left( G_s'^2 \sigma_0^2 + \frac{4}{3} A' \sigma_0^3 + \frac{3}{2} B' \sigma_0^4 - G_V'^2 v_0^2 \right) \int d^3x \\
 &= \int d^3x i\psi^\dagger\partial_0\psi + \frac{1}{2} \left( G_s'^2 \sigma_0^2 + \frac{4}{3} A' \sigma_0^3 + \frac{3}{2} B' \sigma_0^4 - G_V'^2 v_0^2 \right) V. \quad (1.121)
 \end{aligned}$$

Usando o resultado (1.120) e as relações

$$\delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} = \frac{1}{V} \int d^3x e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} \quad e \quad (1.122)$$

$$u^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) u(\mathbf{k}, \lambda) = v^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) v(\mathbf{k}, \lambda) = 1 \quad (1.123)$$

obtém-se

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}, \lambda} \epsilon^+ + b_{\mathbf{k}, \lambda} b_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger \epsilon^-) + \frac{1}{2} \left( G_s'^2 \sigma_0^2 + \frac{4}{3} A' \sigma_0^3 + \frac{3}{2} B' \sigma_0^4 - G_V'^2 v_0^2 \right) V. \quad (1.124)$$

No modelo de contato, a relação de dispersão é

$$\epsilon^\pm = G_V'^2 v_0 \pm (k^2 + M^{*2})^{1/2}. \quad (1.125)$$

Combinando esse resultado com a relação de anti-comutação

$$\{b_{\mathbf{k}, \lambda}, b_{\mathbf{k}', \lambda'}^\dagger\} = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \delta_{\lambda, \lambda'} \quad (1.126)$$

chega-se à expressão final para o hamiltoniano<sup>6</sup> do sistema, dada por

$$\begin{aligned}
 \hat{H} &= \sum_{\mathbf{k}} (k^2 + M^{*2})^{1/2} (a_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger a_{\mathbf{k}, \lambda} + b_{\mathbf{k}, \lambda}^\dagger b_{\mathbf{k}, \lambda}) + G_V'^2 v_0 \hat{N} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left( G_s'^2 \sigma_0^2 + \frac{4}{3} A' \sigma_0^3 + \frac{3}{2} B' \sigma_0^4 - G_V'^2 v_0^2 \right) V \quad (1.127)
 \end{aligned}$$

<sup>6</sup>Nesse cálculo descartam-se as quantidades  $\sum_{\mathbf{k}} (k^2 + M^{*2})^{1/2}$  e  $G_V'^2 v_0 \sum_{\mathbf{k}} 1$  referentes ao vácuo.



com

$$\hat{N} = \sum_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k},\lambda} - b_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger b_{\mathbf{k},\lambda}). \quad (1.128)$$

Introduzindo a notação

$$|n_1, \dots, n_\infty; \bar{n}_1, \dots, \bar{n}_\infty\rangle \equiv |n_i; \bar{n}_i\rangle \quad (1.129)$$

temos que

$$\begin{aligned} \hat{H} |n_i; \bar{n}_i\rangle &= \left[ \sum_{\mathbf{k}} E_k^* n_k + \sum_{\mathbf{k}'} E_{k'}^* \bar{n}_{k'} + G_V'^2 v_0 \sum_{\mathbf{k}} n_k - G_V'^2 v_0 \sum_{\mathbf{k}'} \bar{n}_{k'} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left( G_s'^2 \sigma_0^2 + \frac{4}{3} A' \sigma_0^3 + \frac{3}{2} B' \sigma_0^4 - G_V'^2 v_0^2 \right) V \right] |n_i; \bar{n}_i\rangle \quad \text{e} \quad (1.130) \end{aligned}$$

$$\mu \hat{N} |n_i; \bar{n}_i\rangle = \mu \left[ \sum_{\mathbf{k}} n_k - \sum_{\mathbf{k}'} \bar{n}_{k'} \right] |n_i; \bar{n}_i\rangle. \quad (1.131)$$

Com isso, as exponenciais em (1.113) tornam-se simples números, podendo assim ser fatoradas. A função grande partição para o modelo de contato é escrita, como um produto de traços, da seguinte forma

$$\begin{aligned} Z_G &= \langle n_1 | e^{-\beta(E_1^* + G_V'^2 v_0 - \mu)n_1} | n_1 \rangle \dots \langle n_\infty | e^{-\beta(E_\infty^* + G_V'^2 v_0 - \mu)n_\infty} | n_\infty \rangle \times \\ &\quad \times \langle \bar{n}_1 | e^{-\beta(E_1^* - G_V'^2 v_0 + \mu)\bar{n}_1} | \bar{n}_1 \rangle \dots \langle \bar{n}_\infty | e^{-\beta(E_\infty^* - G_V'^2 v_0 + \mu)\bar{n}_\infty} | \bar{n}_\infty \rangle \times \\ &\quad \times e^{-\frac{\beta V}{2} (G_s'^2 \sigma_0^2 + \frac{4}{3} A' \sigma_0^3 + \frac{3}{2} B' \sigma_0^4 - G_V'^2 v_0^2)}. \quad (1.132) \end{aligned}$$

Separando a parte referente à partículas da referente às anti-partículas, temos que

$$\begin{aligned} Z_G &= e^{-\frac{\beta V}{2} (G_s'^2 \sigma_0^2 + \frac{4}{3} A' \sigma_0^3 + \frac{3}{2} B' \sigma_0^4 - G_V'^2 v_0^2)} \prod_{i=0}^{\infty} \sum_{n_i=1}^{\infty} \langle n_i | e^{-\beta(E_i^* - \nu)n_i} | n_i \rangle \times \\ &\quad \times \prod_{j=0}^{\infty} \sum_{\bar{n}_j=1}^{\infty} \langle \bar{n}_j | e^{-\beta(E_j^* + \nu)\bar{n}_j} | \bar{n}_j \rangle \quad (1.133) \end{aligned}$$

com

$$\nu \equiv \mu - G_V'^2 v_0 \quad (1.134)$$

sendo definido como o potencial químico efetivo do sistema.

Como o sistema é fermiônico, o número de partículas é tal que  $n_i, \bar{n}_i = 0, 1$ . Isso habilita escrever a função grande partição como

$$Z_G = e^{-\frac{\beta V}{2}(G'_s{}^2 \sigma_0^2 + \frac{4}{3}A'\sigma_0^3 + \frac{3}{2}B'\sigma_0^4 - G'_V{}^2 v_0^2)} \prod_i [1 + e^{-\beta(E_i^* - \nu)}] \prod_j [1 + e^{-\beta(E_j^* + \nu)}]. \quad (1.135)$$

Uma das utilidades da função grande partição é o cálculo do grande potencial termodinâmico dado por

$$\Omega(T, V, \mu) = -\frac{1}{\beta} \ln Z_G \quad (1.136)$$

e através dele calcular todas as demais quantidades termodinâmicas de interesse.

O grande potencial termodinâmico para o modelo de contato, calculado a partir de (1.135), é dado por

$$\begin{aligned} \Omega(T, V, \mu) &= \frac{1}{2} \left( G'_s{}^2 \sigma_0^2 + \frac{4}{3}A'\sigma_0^3 + \frac{3}{2}B'\sigma_0^4 - G'_V{}^2 v_0^2 \right) V - \frac{1}{\beta} \sum_i \ln [1 + e^{-\beta(E_i^* - \nu)}] \\ &\quad - \frac{1}{\beta} \sum_j \ln [1 + e^{-\beta(E_j^* + \nu)}]. \end{aligned} \quad (1.137)$$

A densidade do sistema pode ser encontrada a partir de  $\Omega(T, V, \mu)$  através de

$$\rho = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right)_{T, V, \sigma_0, v_0} \quad (1.138)$$

que devido à (1.134) pode ser calculada da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \rho &= -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial \Omega}{\partial \nu} \right)_{T, V, \sigma_0, v_0} \\ &= \frac{1}{\beta V} \sum_i \frac{\beta e^{-\beta(E_i^* - \nu)}}{1 + e^{-\beta(E_i^* - \nu)}} + \frac{1}{\beta V} \sum_j \frac{-\beta e^{-\beta(E_j^* + \nu)}}{1 + e^{-\beta(E_j^* + \nu)}} \\ &= \frac{1}{V} \sum_i \frac{1}{1 + e^{\beta(E_i^* - \nu)}} - \frac{1}{V} \sum_j \frac{1}{1 + e^{\beta(E_j^* + \nu)}}. \end{aligned} \quad (1.139)$$

No limite do contínuo, temos que  $\frac{1}{V} \sum \longrightarrow \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k$ . Logo,

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k [n_k(T) - \bar{n}_k(T)] \\ &= \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 [n_k(T) - \bar{n}_k(T)] dk \end{aligned} \quad (1.140)$$

com

$$n_k(T) = \frac{1}{e^{(\sqrt{k^2+M^{*2}}-\nu)/T} + 1} \quad e \quad (1.141)$$

$$\bar{n}_k(T) = \frac{1}{e^{(\sqrt{k^2+M^{*2}}+\nu)/T} + 1} \quad (1.142)$$

sendo os números de ocupação de partículas e anti-partículas respectivamente. Note que a densidade do sistema é dada pela diferença entre a densidade de partículas e a densidade de anti-partículas.

O resultado seria o mesmo se o cálculo da densidade fosse a partir da média térmica do operador

$$\hat{\rho} = \frac{1}{V} \int d^3x \psi^\dagger \psi, \quad (1.143)$$

identificando

$$n_k(T) = \langle\langle a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k},\lambda} \rangle\rangle \quad e \quad (1.144)$$

$$\bar{n}_k(T) = \langle\langle b_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger b_{\mathbf{k},\lambda} \rangle\rangle. \quad (1.145)$$

Dessa forma, identifica-se a densidade como sendo

$$\rho = \langle\langle \bar{\psi} \gamma_0 \psi \rangle\rangle = \langle\langle \psi^\dagger \psi \rangle\rangle = v_0 \quad (1.146)$$

onde  $\langle\langle \rangle\rangle$  significa tomar a média térmica.

Note ainda que a quantidade

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \left( \frac{\partial \Omega}{\partial M} \right)_{T,V,\mu,\sigma_0,v_0} &= \frac{1}{V} \left( \frac{\partial \Omega}{\partial M^*} \right)_{T,V,\mu,\sigma_0,v_0} \\ &= \frac{1}{V} \sum_i \frac{M^*}{E_i^*} \frac{e^{-\beta(E_i^*-\nu)}}{1 + e^{-\beta(E_i^*-\nu)}} + \frac{1}{V} \sum_i \frac{M^*}{E_j^*} \frac{e^{-\beta(E_j^*+\nu)}}{1 + e^{-\beta(E_j^*+\nu)}} \\ &= \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \frac{M^*}{E^*(k)} [n_k(T) + \bar{n}_k(T)] \end{aligned} \quad (1.147)$$

é igualmente obtida ao efetuar-se o cálculo da média térmica do operador

$$\hat{\rho}_s = \frac{1}{V} \int d^3x \bar{\psi} \psi \quad (1.148)$$

com as identificações (1.144) e (1.145). Isso permite afirmar que

$$\rho_s = \langle\langle \bar{\psi} \psi \rangle\rangle = \sigma_0. \quad (1.149)$$

No limite do contínuo temos então

$$\begin{aligned}\rho_s &= \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{M^*}{E^*} [n_k(T) + \bar{n}_k(T)] \\ &= \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{M^*}{(k^2 + M^{*2})^{1/2}} k^2 [n_k(T) + \bar{n}_k(T)] dk.\end{aligned}\quad (1.150)$$

Com o uso da relação termodinâmica

$$\Omega(T, V, \mu) = -PV = E - TS - \mu N, \quad (1.151)$$

encontra-se a pressão do sistema através de  $P = -\Omega/V$ . O resultado é

$$\begin{aligned}P &= \frac{1}{2}G_V'^2 v_0^2 - \frac{1}{2}G_s'^2 \sigma_0^2 - \frac{2}{3}A'\sigma_0^3 - \frac{3}{4}B'\sigma_0^4 \\ &+ \frac{1}{\beta} \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k \{ \ln [1 + e^{-\beta(E^* - \nu)}] + \ln [1 + e^{-\beta(E^* + \nu)}] \}.\end{aligned}\quad (1.152)$$

Resolvendo essas integrais por partes<sup>7</sup>, chega-se em

$$\begin{aligned}P &= \frac{1}{2}G_V'^2 \rho^2 - \frac{1}{2}G_s'^2 \rho_s^2 - \frac{2}{3}A'\rho_s^3 - \frac{3}{4}B'\rho_s^4 \\ &+ \frac{\gamma}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^4}{(k^2 + M^{*2})^{1/2}} [n_k(T) + \bar{n}_k(T)] dk.\end{aligned}\quad (1.153)$$

Através de

$$S = -\frac{\partial\Omega}{\partial T} = \beta^2 \frac{\partial\Omega}{\partial\beta} \quad (1.154)$$

e do uso de (1.151), obtém-se a seguinte expressão para a densidade de energia do sistema

$$\mathcal{E} = \frac{1}{V} \frac{\partial(\beta\Omega)}{\partial\beta} + \mu\rho. \quad (1.155)$$

A partir daí chega-se facilmente à densidade de energia

$$\begin{aligned}\mathcal{E} &= -\frac{1}{2}G_V'^2 v_0^2 + \frac{1}{2}G_s'^2 \sigma_0^2 + \frac{2}{3}A'\sigma_0^3 + \frac{3}{4}B'\sigma_0^4 + (\mu - \nu)\rho \\ &+ \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k E^* [n_k(T) + \bar{n}_k(T)]\end{aligned}\quad (1.156)$$

---

<sup>7</sup>Por exemplo, a primeira integral pode ser resolvida definindo-se  $u = \ln [1 + e^{-\beta(E^* - \nu)}]$  e  $v = \frac{1}{3}k^3$ .

e com o uso de (1.134) temos

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{1}{2}G_V'^2 \rho^2 + \frac{1}{2}G_s'^2 \rho_s^2 + \frac{2}{3}A' \rho_s^3 + \frac{3}{4}B' \rho_s^4 \\ &+ \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 (k^2 + M^{*2})^{1/2} [n_k(T) + \bar{n}_k(T)] dk. \end{aligned} \quad (1.157)$$

As integrais que aparecem nas expressões (1.157), (1.153), (1.150) e (1.140), diferente das apresentadas no modelo de contato em temperatura nula, são todas resolvidas numericamente. O procedimento utilizado para resolvê-las está detalhadamente apresentado no apêndice D, seção D.1.

Outra forma de se resolver as integrais citadas é através da expansão relativística de Sommerfeld. Essa expansão em baixas temperaturas e seus limites de validade estão descritos no apêndice E.

## 1.4 O modelo misto na aproximação de campo médio

Nas seções anteriores foram construídas as equações de estado do modelo de contato a partir da densidade lagrangiana dada em (1.1), que por sua vez foi obtida pelo procedimento das integrais funcionais por meio da densidade lagrangiana dada em (1.40), representando o que será chamado de *modelo misto*. Formalmente, esse modelo (e não o de Walecka não-linear) é o que gera, no limite de massas mesônicas muito grandes, o modelo de contato com termos cúbico e quártico de auto interação fermiônica.

Nessa seção será mostrado que o modelo misto, tratado via aproximação de campo médio, reproduz com suas equações de estado e massa efetiva, o modelo de contato. Para isso, reescreveremos (1.40) como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - M) \psi + \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_V^2 V_\mu V^\mu - g_V \bar{\psi} \gamma^\mu V_\mu \psi \\ &- \frac{1}{2} \left( m_s \phi + \frac{g_s}{m_s} \bar{\psi} \psi \right)^2 + \frac{g_s^2}{2m_s^2} (\bar{\psi} \psi)^2 - \frac{A'}{3} \left( \frac{m_s}{g_s} \phi + \bar{\psi} \psi \right)^3 + \frac{A'}{3} (\bar{\psi} \psi)^3 \\ &- \frac{B'}{4} \left( \frac{m_s^2}{g_s} \phi + \bar{\psi} \psi \right)^4 + \frac{B'}{4} (\bar{\psi} \psi)^4. \end{aligned} \quad (1.158)$$

Já foi mostrado, no capítulo 1, que translações em um campo deixam a física inalterada. Com base nesse argumento, vamos definir um novo campo escalar transladado da seguinte forma

$$\lambda \equiv \frac{m_s^2}{g_s} \phi + \bar{\psi} \psi. \quad (1.159)$$

Pode-se então escrever (1.158) da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - M) \psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} m_V^2 V_\mu V^\mu - g_V \bar{\psi} \gamma^\mu V_\mu \psi - \frac{1}{2} G_s'^2 \lambda^2 \\ &+ \frac{1}{2} G_s'^2 (\bar{\psi} \psi)^2 - \frac{A'}{3} \lambda^3 + \frac{A'}{3} (\bar{\psi} \psi)^3 - \frac{B'}{4} \lambda^4 + \frac{B'}{4} (\bar{\psi} \psi)^4 \\ &+ \frac{G_s'}{2m_s^2} (\partial^\mu \lambda - \partial^\mu \bar{\psi} \psi) (\partial_\mu \lambda - \partial_\mu \bar{\psi} \psi) \end{aligned} \quad (1.160)$$

onde  $G_s' = \frac{g_s}{m_s}$ .

A aproximação de campo médio, da densidade lagrangiana acima, é feita substituindo os campos mesônicos escalar e vetorial por seus respectivos valores médios,

$$\lambda \rightarrow \langle \lambda \rangle \equiv \lambda \quad (1.161)$$

$$V^\mu \rightarrow \langle V^\mu \rangle \equiv \delta^{\mu 0} V^0. \quad (1.162)$$

Também dentro dessa aproximação tomamos a média de  $\bar{\psi} \psi$ . O sistema é espacialmente uniforme, como dito anteriormente assim, os termos derivativos de  $\lambda$  e  $\bar{\psi} \psi$  desaparecem, logo (1.160) torna-se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M^{(ACM)} &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - M) \psi + \frac{1}{2} m_V^2 V_0^2 - g_V \bar{\psi} \gamma^0 V_0 \psi - \frac{1}{2} G_s'^2 \lambda^2 + \frac{1}{2} G_s'^2 (\bar{\psi} \psi)^2 \\ &- \frac{A'}{3} \lambda^3 + \frac{A'}{3} (\bar{\psi} \psi)^3 - \frac{B'}{4} \lambda^4 + \frac{B'}{4} (\bar{\psi} \psi)^4. \end{aligned} \quad (1.163)$$

Assim, como o procedimento das integrais funcionais, a aproximação de campo médio (junto à consideração de que o sistema é espacialmente uniforme) elimina os termos cinéticos referentes aos campos escalar ( $\lambda$  nesse caso) e vetorial ( $V^\mu$ ).

Os campos independentes dessa teoria são  $\lambda$ ,  $\bar{\psi}$ ,  $\psi$  e  $V^0$ . Através das equações de Euler-Lagrange dadas por (1.66) temos que as equações para esses campos são dadas por

$$\lambda(G_s'^2 + A'\lambda + B'\lambda^2) = 0, \quad (1.164)$$

$$V_0 = \frac{g_V}{m_V^2} \bar{\psi} \gamma_0 \psi \quad (1.165)$$

e

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu - g_V \gamma^0 V_0 - (M - G_s'^2 (\bar{\psi}\psi) - A' (\bar{\psi}\psi)^2 - B' (\bar{\psi}\psi)^3)]\psi = 0. \quad (1.166)$$

Onde usamos (1.164) nos cálculos que fornecem a equação de campo para  $\psi$ .

Substituindo as quantidades  $\bar{\psi}\psi$  e  $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$  pelos seus respectivos valores médios, temos que (1.165) é escrita como

$$V_0 = \frac{g_V}{m_V^2} \langle \bar{\psi} \gamma_0 \psi \rangle = \frac{g_V}{m_V^2} \rho \quad (1.167)$$

e conseqüentemente (1.166) altera-se para

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu - \gamma^0 G_V'^2 \rho - (M - G_s'^2 \rho_s - A' \rho_s^2 - B' \rho_s^3)]\psi = 0 \quad (1.168)$$

onde  $G_V' = \frac{g_V}{m_V}$  e  $\rho_s = \langle \bar{\psi}\psi \rangle$ .

Note que a equação de campo para  $\psi$  é idêntica à encontrada no modelo de contato (equação 1.68) e a massa efetiva associada ao nucleon será também a mesma,

$$M^* = M - G_s'^2 \rho_s - A' \rho_s^2 - B' \rho_s^3. \quad (1.169)$$

Aqui novamente a equação do campo fermiônico foi tratada como a equação de Dirac e sendo assim pode-se usar a expansão em modos do campo  $\psi$  para chegar nas mesmas expressões de  $\rho$  e  $\rho_s$  já obtidas na seção 1.2, dadas respectivamente por (1.71) e (1.73).

As equações de estado do modelo misto são derivadas a partir do tensor momento-energia, dado por (1.74). Para o modelo misto na aproximação de campo médio esse tensor é escrito, com o uso da equação de campo (1.166), do seguinte modo

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{(ACM)} &= -g_{\mu\nu} \left[ \bar{\psi} (i\gamma^\alpha \partial_\alpha - g_V \gamma^0 V_0 - M) \psi + \frac{1}{2} m_V^2 V_0^2 - \frac{1}{2} G_s'^2 \lambda^2 + \frac{1}{2} G_s'^2 (\bar{\psi}\psi)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{A'}{3} \lambda^3 + \frac{A'}{3} (\bar{\psi}\psi)^3 - \frac{B'}{4} \lambda^4 + \frac{B'}{4} (\bar{\psi}\psi)^4 \right] + i\bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\nu \psi \\ &= -g_{\mu\nu} \left[ -\frac{1}{2} G_s'^2 (\bar{\psi}\psi)^2 - \frac{2A'}{3} (\bar{\psi}\psi)^3 - \frac{3B'}{4} (\bar{\psi}\psi)^4 + \frac{1}{2} m_V^2 V_0^2 - \frac{1}{2} G_s'^2 \lambda^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{A'}{3} \lambda^3 - \frac{B'}{4} \lambda^4 \right] + i\bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\nu \psi. \end{aligned} \quad (1.170)$$

A densidade de energia é calculada como

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E} &= \langle T_{00}^{(ACM)} \rangle \\
 &= \frac{1}{2} G_V'^2 \rho_s^2 + \frac{2A'}{3} \rho_s^3 + \frac{3B'}{4} \rho_s^4 - \frac{1}{2} G_V'^2 \rho^2 + \frac{1}{2} G_s'^2 \lambda^2 + \frac{A'}{3} \lambda^3 + \frac{B'}{4} \lambda^4 \\
 &+ i \langle \bar{\psi} \gamma_0 \partial_0 \psi \rangle
 \end{aligned} \tag{1.171}$$

com o uso de (1.167).

A quantidade  $i \langle \bar{\psi} \gamma_0 \partial_0 \psi \rangle$  é encontrada da mesma forma que na seção 1.2 com o uso da relação de dispersão do modelo. Essa relação é dada por

$$\begin{aligned}
 k_0 &= g_V V_0 + (k^2 + M^{*2})^{1/2} \\
 &= G_V'^2 \rho + (k^2 + M^{*2})^{1/2}
 \end{aligned} \tag{1.172}$$

que é a mesma do modelo de contato. Assim temos que o valor médio calculado é exatamente o mesmo dado no modelo de contato e com isso pode-se escrever a densidade de energia da seguinte forma

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E} &= \frac{1}{2} G_V'^2 \rho^2 + \frac{1}{2} G_s'^2 \rho_s^2 + \frac{2A'}{3} \rho_s^3 + \frac{3B'}{4} \rho_s^4 + \frac{1}{2} G_s'^2 \lambda^2 + \frac{A'}{3} \lambda^3 + \frac{B'}{4} \lambda^4 \\
 &+ \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} (k^2 + M^{*2})^{1/2} k^2 dk .
 \end{aligned} \tag{1.173}$$

A pressão é calculada por

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{3} \langle T_{ii} \rangle \\
 &= \frac{1}{2} G_V'^2 \rho^2 - \frac{1}{2} G_s'^2 \rho_s^2 - \frac{2A'}{3} \rho_s^3 - \frac{3B'}{4} \rho_s^4 - \frac{1}{2} G_s'^2 \lambda^2 - \frac{A'}{3} \lambda^3 - \frac{B'}{4} \lambda^4 \\
 &+ \frac{1}{3} i \langle \bar{\psi} \gamma_i \partial_i \psi \rangle .
 \end{aligned} \tag{1.174}$$

O termo  $i \langle \bar{\psi} \gamma_i \partial_i \psi \rangle$  também calculado na seção 1.2 nos permite escrever

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{2} G_V'^2 \rho^2 - \frac{1}{2} G_s'^2 \rho_s^2 - \frac{2A'}{3} \rho_s^3 - \frac{3B'}{4} \rho_s^4 - \frac{1}{2} G_s'^2 \lambda^2 - \frac{A'}{3} \lambda^3 - \frac{B'}{4} \lambda^4 \\
 &+ \frac{\gamma}{6\pi^2} \int_0^{k_F} \frac{k^4}{(k^2 + M^{*2})^{1/2}} dk .
 \end{aligned} \tag{1.175}$$

Aqui será usada a imposição de que a pressão do sistema deve se anular quando a densidade bariônica é igual a zero, ou seja, não há como existir pressão quando não existem partículas. Tal condição implica em

$$\frac{1}{2} G_s'^2 \lambda^2 + \frac{A'}{3} \lambda^3 + \frac{B'}{4} \lambda^4 = 0 . \tag{1.176}$$



Logo, pode-se reduzir as equações de estado do modelo misto a

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}G_V'^2 \rho^2 + \frac{1}{2}G_s'^2 \rho_s^2 + \frac{2}{3}A' \rho_s^3 + \frac{3}{4}B' \rho_s^4 + \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} (k^2 + M^{*2})^{1/2} k^2 dk \quad (1.177)$$

e

$$P = \frac{1}{2}G_V'^2 \rho^2 - \frac{1}{2}G_s'^2 \rho_s^2 - \frac{2}{3}A' \rho_s^3 - \frac{3}{4}B' \rho_s^4 + \frac{\gamma}{6\pi^2} \int_0^{k_F} \frac{k^4}{(k^2 + M^{*2})^{1/2}} dk \quad (1.178)$$

exatamente as mesmas equações de estado do modelo de contato, dadas por (1.90) e (1.95) respectivamente, encontradas na seção 1.2.

Pode-se pensar que esse critério é válido apenas para o caso em que  $\rho = 0$ , mas não é bem o caso. Pensemos inicialmente no modelo de Walecka<sup>8</sup>. Neste caso,  $\lambda = \frac{m_s^2}{g_s} \phi + \bar{\psi} \psi$  poderia também sobreviver, mesmo quando  $A' = B' = 0$ , na densidade lagrangiana e nas equações de estado através do termo quadrático em  $\lambda$ , veja as equações (1.158), (1.173) e (1.175). Note que é possível tratar os campos  $\lambda$  e  $\phi$  de duas maneiras distintas. Uma delas consiste em considerar  $\phi$  como o campo independente, nesse caso a equação de movimento para  $\phi$  acarreta na definição deste campo em termos de  $\bar{\psi} \psi$ , anulando conseqüentemente  $\lambda$ . A outra é tratar  $\lambda$  como independente, porém nesse caso  $\lambda$  se anula pela sua própria equação de movimento, restando o termo de contato na densidade lagrangiana. O resultado final é o mesmo no que diz respeito a dinâmica fermiônica. Entretanto a última abordagem mostra que a construção do modelo misto também pode ser realizada no modelo de Walecka. Fica então evidente o papel de  $\lambda$  como um campo auxiliar independente da dinâmica fermiônica.

No caso em que  $A'$  e  $B'$  são diferentes de zero, a formulação lagrangiana dada ao modelo misto mostra que o campo  $\lambda$  continua sendo um campo auxiliar da teoria. Como a densidade bariônica está diretamente associada aos férmions, é possível afirmar que  $\lambda$  é independente de  $\rho$ , o que torna a expressão (1.176) válida para qualquer valor de densidade. Outra forma mais simples de ver que  $\lambda$  independe de  $\rho$  é através de sua própria equação de movimento dada em (1.164). Através dessa equação vê-se que as soluções não-nulas para  $\lambda$  dependem apenas dos parâmetros

---

<sup>8</sup>Descrito pela densidade lagrangiana dada em (1.158) quando  $A' = B' = 0$ .

$G_s'^2$ ,  $A'$  e  $B'$ , que são independentes de  $\rho$ , confirmando mais uma vez que  $\lambda$  não influencia na dinâmica fermiônica do sistema.

Note que até aqui não foi usado em momento algum o limite de massa mesônica muito grande e mesmo assim um modelo em que tais massas estão nesse limite foi reproduzido. Pode-se atribuir tal fato à aproximação de campo médio que geralmente fornece equações de estado que dependem da razão entre as constantes de acoplamento dos campos mesônicos com o fermiônico e as respectivas massas mesônicas. Essas razões são ajustadas para que o modelo reproduza os observáveis da física nuclear e portanto devem ser finitas.

Para o modelo misto<sup>9</sup> essas constantes são  $G_s' = \frac{g_s}{m_s}$  e  $G_V' = \frac{g_V}{m_V}$ . Embora não tomando explicitamente o limite mencionado é possível dizer que esse está implícito e para manter a razão citada sempre finita, o valor da constante de acoplamento é feito muito grande. Isso é perfeitamente possível, já que os valores dessas constantes de acoplamento e das massas mesônicas propriamente ditas são totalmente arbitrárias.

---

<sup>9</sup>Também nos modelos de Walecka e Walecka não-linear (será mostrado no capítulo seguinte) as equações de estado dependem dessa razão.

# Capítulo 2

## O Modelo de Walecka não-linear

No capítulo anterior foi mostrado que a densidade lagrangiana que gera o modelo de contato completo, tanto via integrais funcionais quanto via aproximação de campo médio somente, é a dada por (1.40). Portanto, seria natural pensar no modelo de Walecka não-linear como um candidato natural a gerar tal modelo, já que o modelo de Walecka (linear) gera o de contato com o termo quadrático de auto-interação fermiônica. Essa é a motivação para apresentar e comparar esse modelo com o modelo de contato completo.

O modelo de Walecka não-linear apresenta, em relação ao proposto por Walecka em 1974, termos cúbico e quártico de auto-interação do campo mesônico escalar. Esses termos ainda deixam a teoria renormalizável e são introduzidos para reproduzir propriedades de núcleos finitos associadas à superfície, tais como o desdobramento spin-órbita de níveis de energia. As constantes referentes a esses termos são ajustadas para reproduzir essas propriedades. Na verdade, há uma verdadeira família de tais modelos [13, 31-34] .

### 2.1 Equações de estado em temperatura nula

A densidade lagrangiana que descreve o modelo de Walecka não-linear é dada pela seguinte expressão

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{WNL} &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - M)\psi + \frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - \frac{1}{2}m_s^2\phi^2 - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m_V^2V_\mu V^\mu \\
 &- g_s\bar{\psi}\phi\psi - g_V\bar{\psi}\gamma^\mu V_\mu\psi - \frac{A}{3}\phi^3 - \frac{B}{4}\phi^4
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

com

$$F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu V^\nu - \partial^\nu V^\mu. \tag{2.2}$$

As constantes de acoplamento  $g_s$ ,  $g_V$  e  $B$  são adimensionais enquanto que  $A$  tem a dimensão de  $MeV$ . As massas mesônicas  $m_s$  e  $m_V$  têm a dimensão de  $MeV$ .

A partir das equações de Euler-Lagrange, dadas por (1.66), pode-se determinar as equações dos campos  $\phi$ ,  $V^\mu$  e  $\psi$ . Essas equações são dadas abaixo:

$$(\partial_\mu\partial^\mu + m_s^2)\phi + A\phi^2 + B\phi^3 = -g_s\bar{\psi}\psi, \tag{2.3}$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} - m_V^2 V^\mu = -g_V\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \quad e \tag{2.4}$$

$$[\gamma^\mu(i\partial_\mu - g_V V_\mu) - (M + g_s\phi)]\psi = 0. \tag{2.5}$$

Perceba que essas são as equações de campo do modelo de Walecka quando  $A = B = 0$ . Veja que tais equações são não-lineares e de difícil solução exata. Para contornar essa dificuldade será usado mais adiante, como no capítulo anterior, a aproximação de campo médio para os campos.

A equação (2.3) fornece a dinâmica do méson escalar e exhibe o escalar  $\bar{\psi}\psi$  como sua fonte. A equação (2.4) descreve o méson vetorial e apresenta a corrente bariônica dada por  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  no termo de fonte. Já a equação (2.5) pode ser interpretada como a equação de Dirac, representando um férmion livre, onde o quadri-momento do nucleon é modificado pelo campo vetorial e sua massa pelo campo escalar, ou seja, podemos definir uma massa efetiva como sendo

$$M^* = M + g_s\phi. \tag{2.6}$$

Para o cálculo das equações de estado precisa-se do tensor momento-energia que, calculado a partir de (1.74), é dado por

$$\begin{aligned}
 T_{\mu\nu} &= -g_{\mu\nu} \left\{ \frac{1}{2}\partial^\alpha\phi\partial_\alpha\phi - \frac{1}{4}F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}m_V^2V_\alpha V^\alpha - \frac{1}{2}m_s^2\phi^2 - \frac{A}{3}\phi^3 - \frac{B}{4}\phi^4 \right\} \\
 &+ \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi + i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\nu\psi + F_{\alpha\mu}\partial_\nu V^\alpha.
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

A aproximação de campo médio para esse modelo substitui os campos mesônicos escalar e vetorial por seus respectivos valores médios, isto é,

$$\phi \rightarrow \langle \phi \rangle \equiv \phi_0 \quad (2.8)$$

$$V^\mu \rightarrow \langle V^\mu \rangle \equiv \delta^{\mu 0} V^0. \quad (2.9)$$

Levando em conta que o sistema é espacialmente uniforme (matéria nuclear infinita), temos que a densidade lagrangiana e o tensor momento-energia do modelo tornam-se respectivamente

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{WNL}^{(ACM)} &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - M)\psi - \frac{1}{2}m_s^2\phi_0^2 + \frac{1}{2}m_V^2V_0^2 - g_s\bar{\psi}\phi_0\psi - g_V\bar{\psi}\gamma^0V_0\psi \\ &- \frac{A}{3}\phi_0^3 - \frac{B}{4}\phi_0^4 \quad \text{e} \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$T_{\mu\nu}^{(ACM)} = -g_{\mu\nu} \left\{ \frac{1}{2}m_V^2V_0^2 - \frac{1}{2}m_s^2\phi_0^2 - \frac{A}{3}\phi_0^3 - \frac{B}{4}\phi_0^4 \right\} + i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial_\nu\psi. \quad (2.11)$$

As equações dos campos alteram-se para

$$\phi_0 = -\frac{g_s}{m_s^2}\rho_s - \frac{A}{m_s^2}\phi_0^2 - \frac{B}{m_s^2}\phi_0^3, \quad (2.12)$$

$$V_0 = \frac{g_V}{m_V^2}\rho \quad \text{e} \quad (2.13)$$

$$[i\gamma^\mu\partial_\mu - g_V\gamma^0V_0 - M^*]\psi = 0 \quad (2.14)$$

onde  $\rho_s = \langle \bar{\psi}\psi \rangle$  e  $\rho = \langle \bar{\psi}\gamma_0\psi \rangle$ , devido à aproximação de campo médio. Note que a equação (2.12) continua sendo não-linear e por esse motivo chama-se esse modelo de modelo de Walecka não-linear. Como está se tratando a equação do campo fermiônico como a equação de Dirac, pode-se usar a expansão em modos de  $\psi$  para obter as expressões de  $\rho$  e  $\rho_s$ . Realizando os mesmos cálculos mostrados no apêndice B, temos

$$\rho = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} k^2 dk = \frac{\gamma}{6\pi^2} k_F^3 \quad \text{e} \quad (2.15)$$

$$\rho_s = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} \frac{M^*}{(k^2 + M^{*2})^{1/2}} k^2 dk \quad (2.16)$$

$$= \frac{\gamma M^*}{4\pi^2} \left\{ k_F (k_F^2 + M^{*2})^{1/2} - M^{*2} \ln \left[ \frac{k_F + (k_F^2 + M^{*2})^{1/2}}{M^*} \right] \right\}. \quad (2.17)$$

exatamente como no modelo de contato.

Pode-se, a partir de (2.12), obter uma nova expressão da massa efetiva do nucleon dada por

$$M^* = M - \frac{g_s^2}{m_s^2} \rho_s - \frac{A g_s}{m_s^2} \phi_0^2 - \frac{B g_s}{m_s^2} \phi_0^3 \quad (2.18)$$

$$= M - \frac{g_s^2}{m_s^2} \rho_s - \frac{A}{m_s^2} \frac{(M^* - M)^2}{g_s} - \frac{B}{m_s^2} \frac{(M^* - M)^3}{g_s^2}. \quad (2.19)$$

Essa equação que determina a massa efetiva é transcendental e deve ser resolvida de forma auto-consistente.

A partir de (2.11) pode-se calcular as equações de estado,

$$\mathcal{E} = \langle T_{00}^{(ACM)} \rangle \quad \text{e} \quad (2.20)$$

$$P = \frac{1}{3} \langle T_{ii}^{(ACM)} \rangle, \quad (2.21)$$

levando em

$$\mathcal{E} = -\frac{g_V^2}{2m_V^2} \rho^2 + \frac{1}{2} m_s^2 \phi_0^2 + \frac{A}{3} \phi_0^3 + \frac{B}{4} \phi_0^4 + i \langle \bar{\psi} \gamma_0 \partial_0 \psi \rangle. \quad (2.22)$$

Pela estrutura da equação (2.14) temos que a relação de dispersão do modelo é dada (conforme mostrado no apêndice B) por

$$\begin{aligned} k_0 &= g_V V_0 \pm (k^2 + M^{*2})^{1/2} \\ &= \frac{g_V^2}{m_V^2} \rho \pm (k^2 + M^{*2})^{1/2} \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde o sinal positivo refere-se às partículas e o negativo às anti-partículas. A partir daí usam-se os mesmos procedimentos tomados no capítulo 1, para chegar em

$$i \langle \bar{\psi} \gamma_0 \partial_0 \psi \rangle = \frac{g_V^2}{m_V^2} \rho^2 + \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} (k^2 + M^{*2})^{1/2} k^2 dk \quad (2.24)$$

e escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{g_V^2}{2m_V^2} \rho^2 + \frac{1}{2} m_s^2 \phi_0^2 + \frac{A}{3} \phi_0^3 + \frac{B}{4} \phi_0^4 + \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} (k^2 + M^{*2})^{1/2} k^2 dk \\ &= \frac{g_V^2}{2m_V^2} \rho^2 + \frac{m_s^2 (\Delta M)^2}{2g_s^2} + \frac{A (\Delta M)^3}{3g_s^3} + \frac{B (\Delta M)^4}{4g_s^4} + \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} (k^2 + M^{*2})^{1/2} k^2 dk \end{aligned} \quad (2.25)$$

com  $\Delta M \equiv M^* - M$ .

A pressão, calculada por (2.21), tem a seguinte expressão

$$P = \frac{g_V^2}{2m_V^2}\rho^2 - \frac{1}{2}m_s^2\phi_0^2 - \frac{A}{3}\phi_0^3 - \frac{B}{4}\phi_0^4 + \frac{1}{3}i\langle\bar{\psi}\gamma_i\partial_i\psi\rangle. \quad (2.26)$$

O cálculo de  $i\langle\bar{\psi}\gamma_i\partial_i\psi\rangle$  já foi feito no capítulo 1. Procedendo da mesma maneira, encontra-se

$$\frac{1}{3}i\langle\bar{\psi}\gamma_i\partial_i\psi\rangle = \frac{\gamma}{6\pi^2} \int_0^{k_F} \frac{k^4}{(k^2 + M^{*2})^{1/2}} dk \quad (2.27)$$

que permite escrever

$$\begin{aligned} P &= \frac{g_V^2}{2m_V^2}\rho^2 - \frac{1}{2}m_s^2\phi_0^2 - \frac{A}{3}\phi_0^3 - \frac{B}{4}\phi_0^4 + \frac{\gamma}{6\pi^2} \int_0^{k_F} \frac{k^4}{(k^2 + M^{*2})^{1/2}} dk \\ &= \frac{g_V^2}{2m_V^2}\rho^2 - \frac{m_s^2(\Delta M)^2}{2g_s^2} - \frac{A(\Delta M)^3}{3g_s^3} - \frac{B(\Delta M)^4}{4g_s^4} + \frac{\gamma}{6\pi^2} \int_0^{k_F} \frac{k^4}{(k^2 + M^{*2})^{1/2}} dk \end{aligned} \quad (2.28)$$

determinando assim as equações de estado do modelo.

### 2.1.1 Incompressibilidade

A incompressibilidade do modelo será calculada, assim como no modelo de contato, a partir de

$$K = 9 \left[ \frac{\partial(\mathcal{E} + P)}{\partial\rho} - \frac{\mathcal{E} + P}{\rho} \right] \quad (2.29)$$

e por (2.25) e (2.28) temos que

$$\mathcal{E} + P = \frac{g_V^2}{m_V^2}\rho^2 + (k_F^2 + M^{*2})^{1/2}\rho. \quad (2.30)$$

Logo

$$\frac{\partial(\mathcal{E} + P)}{\partial\rho} = \frac{\partial(\mathcal{E} + P)}{\partial k_F} \frac{\partial k_F}{\partial\rho} + \frac{\partial(\mathcal{E} + P)}{\partial M^*} \frac{\partial M^*}{\partial\rho}, \quad (2.31)$$

já que  $k_F = k_F(\rho)$  e  $M^* = M^*(\rho_s) = M^*(\rho)$ . Com isso temos que

$$\frac{\partial(\mathcal{E} + P)}{\partial k_F} \frac{\partial k_F}{\partial\rho} = 2\frac{g_V^2}{m_V^2}\rho + (k_F^2 + M^{*2})^{1/2} \left[ 1 + \frac{k_F^2}{3(k_F^2 + M^{*2})} \right]. \quad (2.32)$$

Então pode-se escrever a incompressibilidade como

$$\begin{aligned} K &= 9 \left[ \frac{g_V^2}{m_V^2} \rho + \frac{k_F^2}{3(k_F^2 + M^{*2})^{1/2}} + \frac{\partial(\mathcal{E} + P)}{\partial M^*} \frac{\partial M^*}{\partial \rho} \right] \\ &= 9 \left[ \frac{g_V^2}{m_V^2} \rho + \frac{k_F^2}{3(k_F^2 + M^{*2})^{1/2}} + \frac{\rho M^*}{(k_F^2 + M^{*2})^{1/2}} \frac{\partial M^*}{\partial \rho} \right]. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Segundo a expressão da massa efetiva dada em (2.18), obtém-se

$$\frac{\partial M^*}{\partial \rho} = -\frac{g_s^2}{m_s^2} \frac{\partial \rho_s}{\partial \rho} - \frac{\partial \phi_0}{\partial \rho} \left( \frac{2A g_s}{m_s^2} \phi_0 + \frac{3B g_s}{m_s^2} \phi_0^2 \right) \quad (2.34)$$

$$= -\frac{g_s^2}{m_s^2} \frac{\partial \rho_s}{\partial \rho} - \frac{\partial M^*}{\partial \rho} \left( \frac{2A}{m_s^2} \phi_0 + \frac{3B}{m_s^2} \phi_0^2 \right) \quad (2.35)$$

cujos cálculos da derivada do campo escalar é feito a partir de (2.6).

Como a expressão de  $\rho_s$  é exatamente igual à dada pelo modelo de contato, pode-se então usar o resultado obtido no capítulo 1 para a derivada de  $\rho_s$  com relação a  $\rho$ , ou seja, será usado

$$\frac{\partial \rho_s}{\partial \rho} = \frac{M^*}{(k_F^2 + M^{*2})^{1/2}} + 3 \left[ \frac{\rho_s}{M^*} - \frac{\rho}{(k_F^2 + M^{*2})^{1/2}} \right] \frac{\partial M^*}{\partial \rho} \quad (2.36)$$

para daí obter a expressão final para  $\frac{\partial M^*}{\partial \rho}$  dada por

$$\frac{\partial M^*}{\partial \rho} = -\frac{g_s^2 M^*}{m_s^2 E_F^* \left[ 1 + \left( \frac{2A}{m_s^2} \phi_0 + \frac{3B}{m_s^2} \phi_0^2 \right) + \frac{3g_s^2}{m_s^2} \left( \frac{\rho_s}{M^*} - \frac{\rho}{E_F^*} \right) \right]} \quad (2.37)$$

onde  $E_F^* = (k_F^2 + M^{*2})^{1/2}$ .

De posse desses resultados, é possível finalmente escrever a expressão da incompressibilidade do modelo como

$$K = 9 \frac{g_V^2}{m_V^2} \rho + \frac{3k_F^2}{E_F^*} - \frac{9M^{*2}}{E_F^{*2}} \frac{g_s^2 \rho}{m_s^2 \left[ 1 + \frac{2A \Delta M}{m_s^2 g_s} + \frac{3B (\Delta M)^2}{m_s^2 g_s^2} + \frac{3g_s^2}{m_s^2} \left( \frac{\rho_s}{M^*} - \frac{\rho}{E_F^*} \right) \right]}. \quad (2.38)$$

Pode-se ainda reescrever as equações (2.19), (2.25), (2.28) e (2.38) respectivamente como



$$M^* = M - G_s^2 [\rho_s + a(\Delta M)^2 + b(\Delta M)^3], \quad (2.39)$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}G_V^2\rho^2 + \frac{(\Delta M)^2}{2G_s^2} + \frac{a(\Delta M)^3}{3} + \frac{b(\Delta M)^4}{4} + \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} (k^2 + M^{*2})^{1/2} k^2 dk, \quad (2.40)$$

$$P = \frac{1}{2}G_V^2\rho^2 - \frac{(\Delta M)^2}{2G_s^2} - \frac{a(\Delta M)^3}{3} - \frac{b(\Delta M)^4}{4} + \frac{\gamma}{6\pi^2} \int_0^{k_F} \frac{k^4}{(k^2 + M^{*2})^{1/2}} dk \quad (2.41)$$

e

$$K = 9G_V^2\rho + \frac{3k_F^2}{E_F^*} - \frac{9M^{*2}\rho}{E_F^{*2} \left[ \frac{1}{G_s^2} + 2a\Delta M + 3b(\Delta M)^2 + 3 \left( \frac{\rho_s}{M^*} - \frac{\rho}{E_F^*} \right) \right]} \quad (2.42)$$

onde

$$G_s^2 \equiv \frac{g_s^2}{m_s^2}, \quad (2.43)$$

$$G_V^2 \equiv \frac{g_V^2}{m_V^2}, \quad (2.44)$$

$$a \equiv \frac{A}{g_s^3} \quad \text{e} \quad (2.45)$$

$$b \equiv \frac{B}{g_s^4}. \quad (2.46)$$

Note então que, o modelo de Walecka não-linear depende de apenas quatro constantes<sup>1</sup> exibidas acima e não das seis iniciais. As constantes de acoplamento e as massas mesônicas permanecem arbitrárias. Para determiná-las, será utilizado o mesmo ajuste feito no modelo de contato, no qual foram impostas as seguintes condições:

$$P(\rho_0) = 0, \quad (2.47)$$

$$\frac{\mathcal{E}(\rho_0)}{\rho_0} - M = -E_0, \quad (2.48)$$

$$K(\rho_0) = K_0 \quad \text{e} \quad (2.49)$$

$$M^*(\rho_0) = M_0^*. \quad (2.50)$$

---

<sup>1</sup>As dimensões de  $G_s^2$  e  $G_V^2$  são de  $MeV^{-2}$ . A constante  $a$  tem a dimensão de  $MeV$  e  $b$  é adimensional.

Os valores dos observáveis são os mesmos. A densidade de saturação da matéria nuclear é  $\rho_0 = 0,15 \text{ fm}^{-3}$ , a energia de ligação por nucleon é  $E_0 = -16 \text{ MeV}$ , os valores da incompressibilidade estão na faixa de  $K_0 \sim 500 - 220 \text{ MeV}$  e a massa efetiva no intervalo que reproduz o desdobramento dos níveis de energia para núcleos finitos  $0,58 \leq M_0^*/M \leq 0,62$ .

## 2.2 Equações de estado em temperatura finita

O procedimento feito na seção 1.3, do capítulo anterior, para encontrar as equações de estado em temperatura finita do modelo de contato será utilizado novamente. Necessita-se portanto da componente  $T_{00}$  do tensor momento-energia do modelo de Walecka não-linear, que na aproximação de campo médio é dada por

$$T_{00}^{(ACM)} = i\bar{\psi}\gamma_0\partial_0\psi + \frac{1}{2}m_s^2\phi_0^2 - \frac{1}{2}m_V^2V_0^2 + \frac{1}{3}A\phi_0^3 + \frac{1}{4}B\phi_0^4. \quad (2.51)$$

O uso desse tensor juntamente com as expansões em modos do campo fermiônico  $\psi$  e seu adjunto  $\psi^\dagger$ , dadas em (1.118) e (1.119), fornece a seguinte expressão para o hamiltoniano do sistema:

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \int d^3x T_{00}^{(ACM)} \\ &= \int d^3x i\psi^\dagger\partial_0\psi + \frac{1}{2} \left( m_s^2\phi_0^2 + \frac{2}{3}A\phi_0^3 + \frac{1}{2}B\phi_0^4 - m_V^2V_0^2 \right) V \\ &= \sum_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k},\lambda}\epsilon^+ + b_{\mathbf{k},\lambda} b_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger\epsilon^-) + \frac{1}{2} \left( m_s^2\phi_0^2 + \frac{2}{3}A\phi_0^3 + \frac{1}{2}B\phi_0^4 - m_V^2V_0^2 \right) V. \end{aligned} \quad (2.52)$$

As energias de partículas e anti-partículas são dadas por

$$\epsilon^\pm = g_V V_0 \pm (k^2 + M^{*2})^{1/2}. \quad (2.53)$$

Essa informação junto às relações (1.122), (1.123) e (1.126), são necessárias para que se obtenha

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \sum_{\mathbf{k}} (k^2 + M^{*2})^{1/2} (a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k},\lambda} + b_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger b_{\mathbf{k},\lambda}) + g_V V_0 \hat{N} \\ &+ \frac{1}{2} \left( m_s^2\phi_0^2 + \frac{2}{3}A\phi_0^3 + \frac{1}{2}B\phi_0^4 - m_V^2V_0^2 \right) V \end{aligned} \quad (2.54)$$

com

$$\hat{N} = \sum_{\mathbf{k}} (a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k},\lambda} - b_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger b_{\mathbf{k},\lambda}). \quad (2.55)$$

Veja que esse hamiltoniano<sup>2</sup> difere do dado em (1.127) apenas nos termos que se referem ao tipo de interação. No modelo de Walecka não-linear esses termos, representados pelos campos  $\phi_0$  e  $V_0$ , estão associados aos mésons escalar e vetorial respectivamente. No modelo de contato, os termos de interação estão associados somente à auto-interação entre os férmions.

O hamiltoniano e o operador número de partículas estabelecem então as relações

$$\begin{aligned} \hat{H} |n_i; \bar{n}_i\rangle &= \left[ \sum_{\mathbf{k}} E_{\mathbf{k}}^* n_{\mathbf{k}} + \sum_{\mathbf{k}'} E_{\mathbf{k}'}^* \bar{n}_{\mathbf{k}'} + g_V V_0 \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} - g_V V_0 \sum_{\mathbf{k}'} \bar{n}_{\mathbf{k}'} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left( m_s^2 \phi_0^2 + \frac{2}{3} A \phi_0^3 + \frac{1}{2} B \phi_0^4 - m_V^2 V_0^2 \right) V \right] |n_i; \bar{n}_i\rangle \end{aligned} \quad (2.56)$$

e

$$\mu \hat{N} |n_i; \bar{n}_i\rangle = \mu \left[ \sum_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} - \sum_{\mathbf{k}'} \bar{n}_{\mathbf{k}'} \right] |n_i; \bar{n}_i\rangle. \quad (2.57)$$

A partir desses resultados, a função grande partição é escrita como

$$\begin{aligned} Z_G &= e^{-\frac{\beta V}{2} (m_s^2 \phi_0^2 + \frac{2}{3} A \phi_0^3 + \frac{1}{2} B \phi_0^4 - m_V^2 V_0^2)} \prod_{i=0}^{\infty} \sum_{n_i=1}^{\infty} \langle n_i | e^{-\beta(E_i^* - \nu)n_i} | n_i \rangle \times \\ &\quad \times \prod_{j=0}^{\infty} \sum_{\bar{n}_j=1}^{\infty} \langle \bar{n}_j | e^{-\beta(E_j^* + \nu)\bar{n}_j} | \bar{n}_j \rangle \\ &= e^{-\frac{\beta V}{2} (m_s^2 \phi_0^2 + \frac{2}{3} A \phi_0^3 + \frac{1}{2} B \phi_0^4 - m_V^2 V_0^2)} \prod_i [1 + e^{-\beta(E_i^* - \nu)}] \prod_j [1 + e^{-\beta(E_j^* + \nu)}] \end{aligned} \quad (2.58)$$

com

$$\nu \equiv \mu - g_V V_0 \quad (2.59)$$

sendo o potencial químico efetivo para o modelo de Walecka não-linear.

---

<sup>2</sup>Para o cálculo dessa grandeza descartam-se as quantidades  $\sum_{\mathbf{k}} (k^2 + M^{*2})^{1/2}$  e  $g_V V_0 \sum_{\mathbf{k}} 1$  referentes ao vácuo.

O grande potencial termodinâmico, dado por (1.136), é escrito como

$$\begin{aligned}\Omega(T, V, \mu) &= \frac{1}{2} \left( m_s^2 \phi_0^2 + \frac{2}{3} A \phi_0^3 + \frac{1}{2} B \phi_0^4 - m_V^2 V_0^2 \right) V - \frac{1}{\beta} \sum_i \ln [1 + e^{-\beta(E_i^* - \nu)}] \\ &\quad - \frac{1}{\beta} \sum_j \ln [1 + e^{-\beta(E_j^* + \nu)}].\end{aligned}\quad (2.60)$$

As demais quantidades termodinâmicas são obtidas através de  $\Omega$ . A densidade, é calculada a partir de

$$\begin{aligned}\rho &= -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \right)_{T, V, \phi_0, V_0} \\ &= -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial \Omega}{\partial \nu} \right)_{T, V, \phi_0, V_0} \\ &= \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 [n_k(T) - \bar{n}_k(T)] dk.\end{aligned}\quad (2.61)$$

Pode-se ainda identificar a densidade como

$$\rho = \langle\langle \bar{\psi} \gamma_0 \psi \rangle\rangle = \langle\langle \psi^\dagger \psi \rangle\rangle = \frac{m_V^2}{g_V} V_0. \quad (2.62)$$

A densidade escalar, calculada a partir de

$$\begin{aligned}\rho_s &= \frac{1}{V} \left( \frac{\partial \Omega}{\partial M} \right)_{T, V, \mu, \phi_0, V_0} \\ &= \frac{1}{V} \left( \frac{\partial \Omega}{\partial M^*} \right)_{T, V, \mu, \phi_0, V_0} \\ &= \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{M^*}{(k^2 + M^{*2})^{1/2}} k^2 [n_k(T) + \bar{n}_k(T)] dk\end{aligned}\quad (2.63)$$

é identificada como a média térmica do operador  $\bar{\psi} \psi$ .

A pressão, obtida usando  $P = -\Omega/V$ , é dada por

$$\begin{aligned}P &= \frac{1}{2} m_V^2 V_0^2 - \frac{1}{2} m_s^2 \phi_0^2 - \frac{1}{3} A \phi_0^3 - \frac{1}{4} B \phi_0^4 \\ &\quad + \frac{1}{\beta} \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k \{ \ln [1 + e^{-\beta(E^* - \nu)}] + \ln [1 + e^{-\beta(E^* + \nu)}] \}\end{aligned}\quad (2.64)$$

que pode ser reescrita, com o auxílio de (2.6) e das definições (2.43)-(2.46), da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}P &= \frac{1}{2} G_V^2 \rho^2 - \frac{(\Delta M)^2}{2G_s^2} - \frac{a(\Delta M)^3}{3} - \frac{b(\Delta M)^4}{4} \\ &\quad + \frac{\gamma}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^4}{(k^2 + M^{*2})^{1/2}} [n_k(T) + \bar{n}_k(T)] dk.\end{aligned}\quad (2.65)$$

A densidade de energia é escrita como

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \frac{1}{V} \frac{\partial(\beta\Omega)}{\partial\beta} + \mu\rho \\
&= -\frac{1}{2}m_V^2 V_0^2 + \frac{1}{2}m_s^2 \phi_0^2 + \frac{1}{3}A\phi_0^3 + \frac{1}{4}B\phi_0^4 + (\mu - \nu)\rho \\
&+ \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k E^* [n_k(T) + \bar{n}_k(T)]
\end{aligned} \tag{2.66}$$

que com o uso de (2.59) torna-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \frac{1}{2}G_V^2 \rho^2 + \frac{(\Delta M)^2}{2G_s^2} + \frac{a(\Delta M)^3}{3} + \frac{b(\Delta M)^4}{4} \\
&+ \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 (k^2 + M^{*2})^{1/2} [n_k(T) + \bar{n}_k(T)] dk .
\end{aligned} \tag{2.67}$$

Assim como no modelo de contato, as integrais envolvidas nas expressões (2.67), (2.65), (2.63) e (2.61) são resolvidas numericamente. A primeira seção do apêndice D contém os procedimentos utilizados para a resolução de tais integrais.

A solução analítica dessas integrais é feita para o caso em que  $a = b = 0$  (modelo de Walecka), no regime de baixas temperaturas, via expansão relativística de Sommerfeld apresentada no apêndice E .

# Capítulo 3

## Comparação entre os Modelos

De posse das equações de estado dos modelos de contato e Walecka não-linear, podemos agora compará-los através da análise de algumas grandezas importantes.

### 3.1 Modelos em temperatura nula

Nessa seção será visto como o sistema se comporta quando a temperatura é nula. Na figura 3.1 temos o gráfico da pressão em função da razão entre a densidade do sistema e a densidade de saturação para diversos modelos distintos.

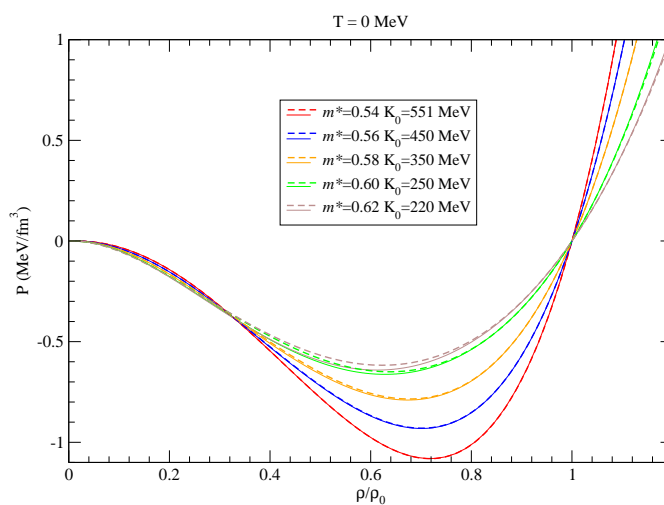


Figura 3.1:  $P \times \rho/\rho_0$ , para vários valores de  $m^* = M_0^*/M$  e  $K_0$  em  $T = 0$ . A linha cheia representa o modelo de contato e a tracejada o modelo de Walecka não-linear.

Em cada curva mostrada na figura anterior, temos dois valores fixos para os observáveis da física nuclear; a densidade de saturação dada por  $\rho_0 = 0.15 \text{ fm}^{-3}$  e a energia de ligação por nucleon dada por  $E_0 = -16 \text{ MeV}$ . Variando o valor dos outros dois observáveis, dados por  $m^* \equiv M_0^*/M$  e  $K_0$  (incompressibilidade), temos na verdade um conjunto de modelos nucleares distintos mas com a mesma estrutura, modelos de contato fermiônico com interações cúbicas e quárticas e modelos com auto-interações mesônicas também cúbicas e quárticas.

Note que a pressão é nula na densidade de saturação (equilíbrio hidrostático) em todos os modelos como tinha de ser, já que esta é uma das condições impostas para a determinação das constantes dos modelos (condições 1.108 e 2.47).

Os mesmos modelos nos gráficos da figura 3.2, que representam a energia por nucleon do sistema como função da mesma razão, foram repetidos. Esse gráfico é conhecido como curva de saturação.

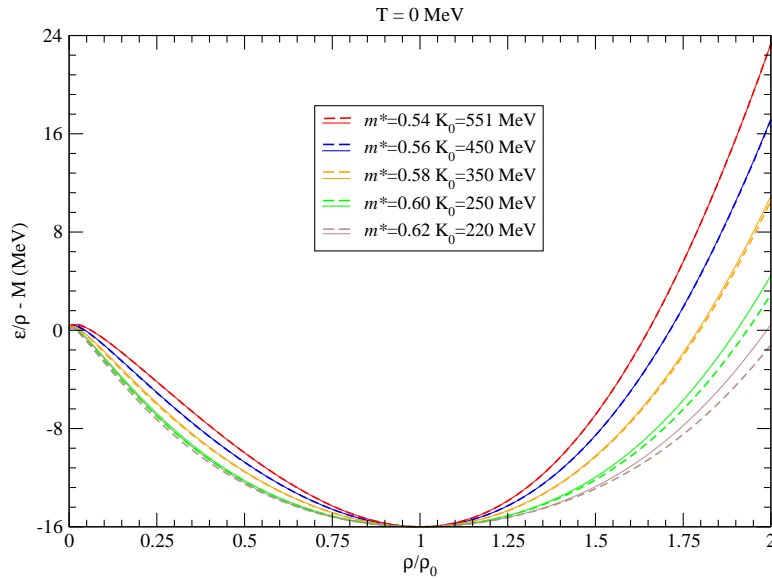


Figura 3.2: Energia por nucleon como função da razão  $\rho/\rho_0$ , para vários valores de  $m^* = M_0^*/M$  e  $K_0$  em  $T = 0$ . A linha cheia representa o modelo de contato e a tracejada o modelo de Walecka não-linear.

Perceba que a energia por nucleon do sistema na densidade de saturação é igual a  $E_0 = -16 \text{ MeV}$  em todos os modelos exatamente como as condições (1.109) e

(2.48) exigem.

O comportamento de  $M^*/M$  como função da razão  $\rho/\rho_0$  foi analisado para o sistema a temperatura nula em ambos os modelos. As figuras 3.3-3.7 ilustram esse comportamento.

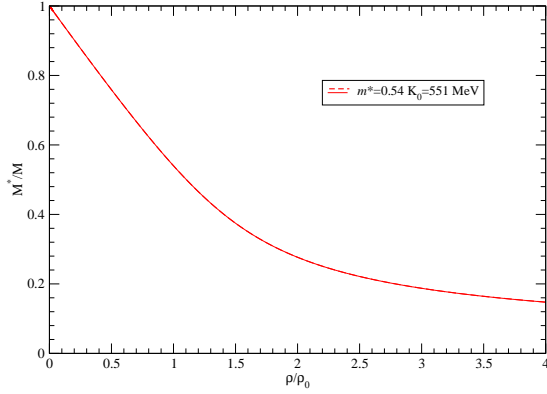


Figura 3.3:  $M^*/M$  como função de  $\rho/\rho_0$  para  $m^* = 0,54$  e  $K_0 = 551 \text{ MeV}$  em  $T = 0$ . A linha cheia representa o modelo de contato e a tracejada o modelo de Walecka não-linear.

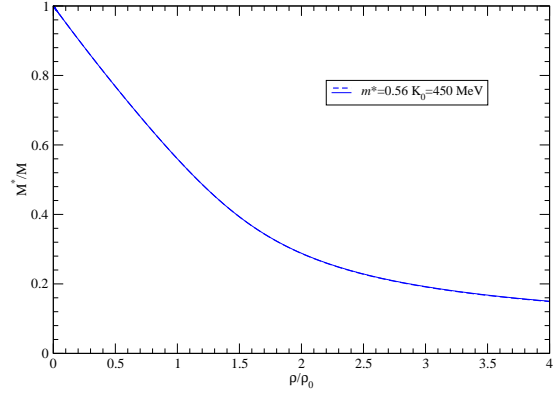


Figura 3.4:  $M^*/M$  como função de  $\rho/\rho_0$  para  $m^* = 0,56$  e  $K_0 = 450 \text{ MeV}$  em  $T = 0$ . A linha cheia representa o modelo de contato e a tracejada o modelo de Walecka não-linear.

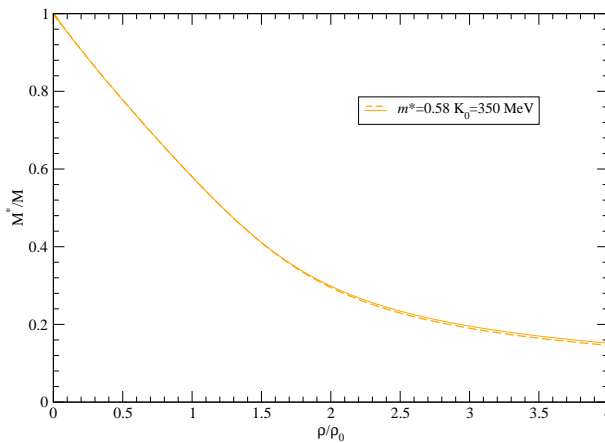


Figura 3.5:  $M^*/M$  como função de  $\rho/\rho_0$  para  $m^* = 0,58$  e  $K_0 = 350 \text{ MeV}$  em  $T = 0$ . A linha cheia representa o modelo de contato e a tracejada o modelo de Walecka não-linear.



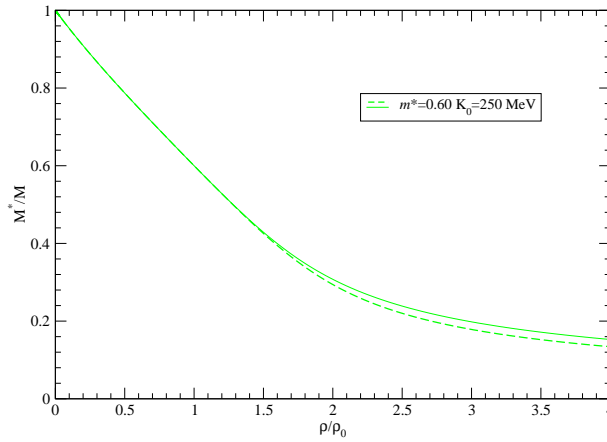


Figura 3.6:  $M^*/M$  como função de  $\rho/\rho_0$  para  $m^* = 0,60$  e  $K_0 = 250 \text{ MeV}$  em  $T = 0$ . A linha cheia representa o modelo de contato e a tracejada o modelo de Walecka não-linear.

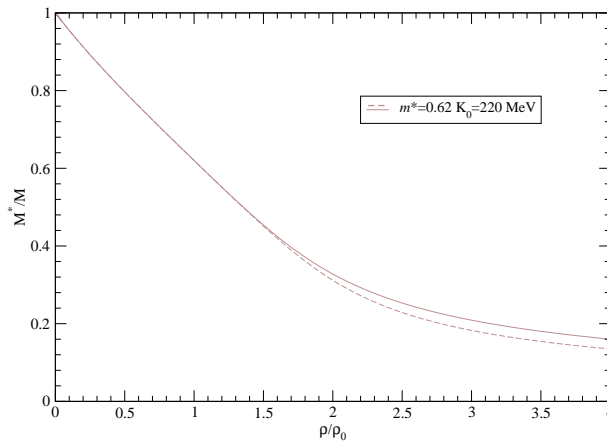


Figura 3.7:  $M^*/M$  como função de  $\rho/\rho_0$  para  $m^* = 0,62$  e  $K_0 = 220 \text{ MeV}$  em  $T = 0$ . A linha cheia representa o modelo de contato e a tracejada o modelo de Walecka não-linear.

### 3.2 Modelos em temperatura finita

A partir de agora, será introduzida a temperatura nos modelos. Para isso geramos os mesmos gráficos, mostrados anteriormente em  $T = 0$ , para os valores  $T = 5$ ,

10 e 15 MeV. As figuras seguintes mostram esses gráficos.

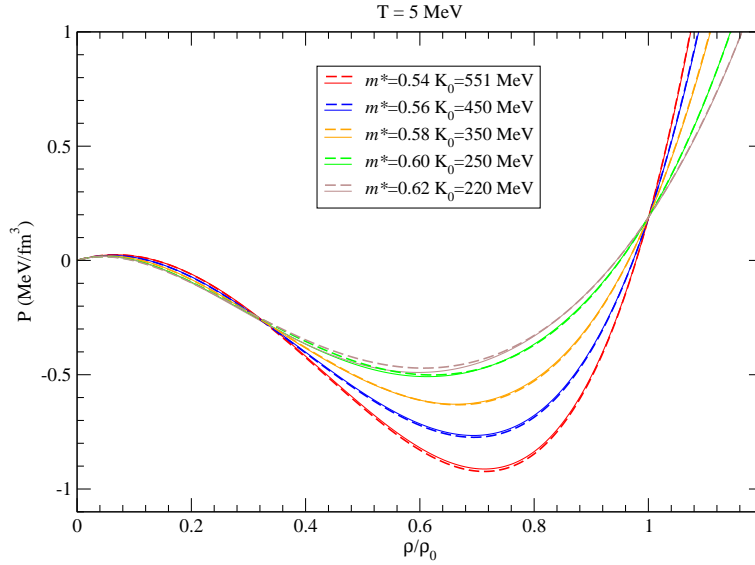


Figura 3.8: Pressão como função da razão  $\rho/\rho_0$ , para vários valores de  $m^* = M_0^*/M$  e  $K_0$  em  $T = 5 \text{ MeV}$ . A linha cheia representa o modelo de contato e a tracejada o modelo de Walecka não-linear.

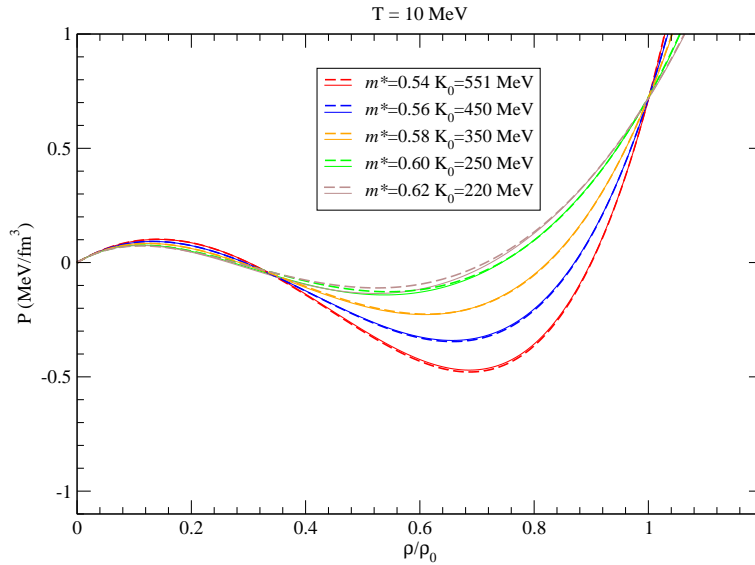


Figura 3.9: Pressão como função da razão  $\rho/\rho_0$ , para vários valores de  $m^* = M_0^*/M$  e  $K_0$  em  $T = 10 \text{ MeV}$ . A linha cheia representa o modelo de contato e a tracejada o modelo de Walecka não-linear.

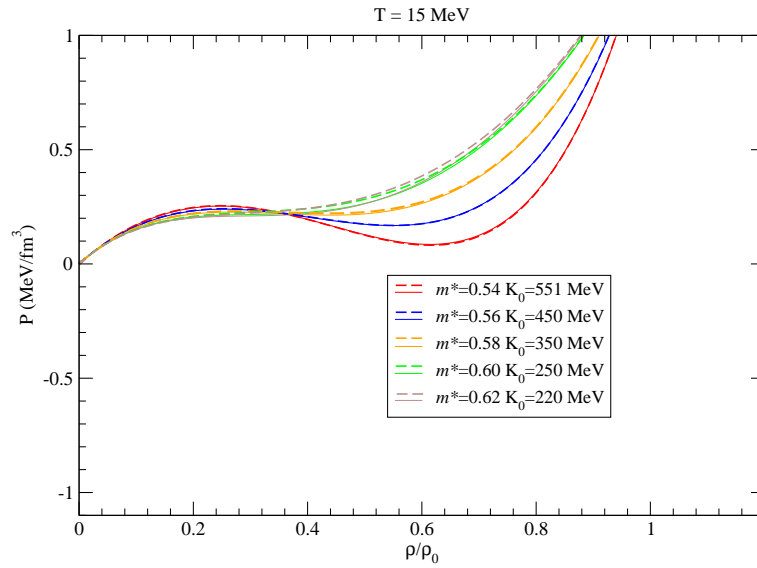


Figura 3.10: Pressão como função da razão  $\rho/\rho_0$ , para vários valores de  $m^* = M_0^*/M$  e  $K_0$  em  $T = 15 \text{ MeV}$ . A linha cheia representa o modelo de contato e a tracejada o modelo de Walecka não-linear.

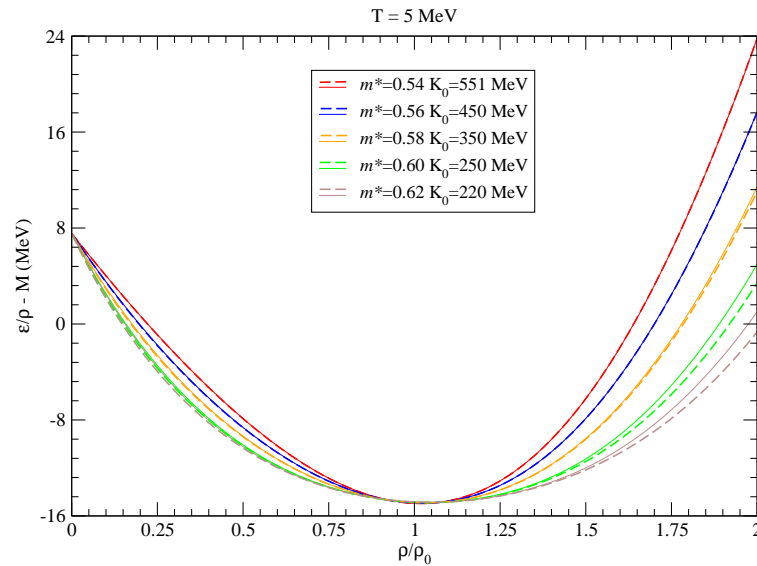


Figura 3.11: Energia por nucleon como função da razão  $\rho/\rho_0$ , para vários valores de  $m^* = M_0^*/M$  e  $K_0$  em  $T = 5 \text{ MeV}$ . A linha cheia representa o modelo de contato e a tracejada o modelo de Walecka não-linear.

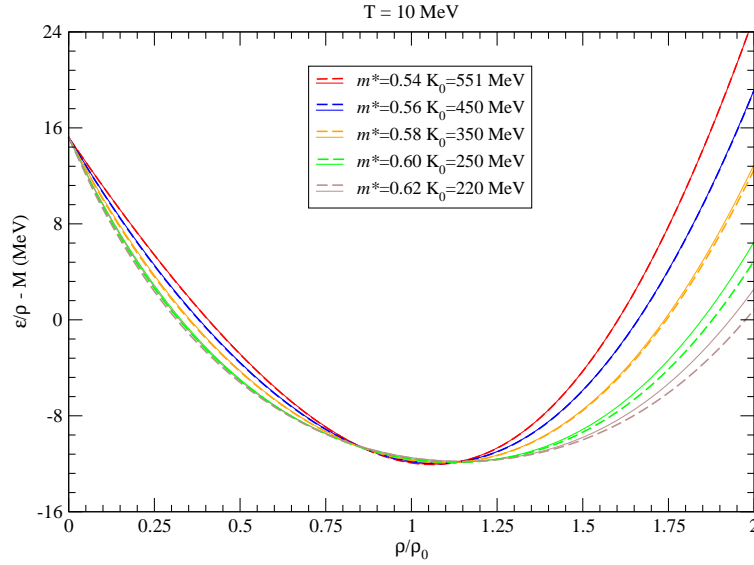


Figura 3.12: Energia por nucleon como função da razão  $\rho/\rho_0$ , para vários valores de  $m^* = M_0^*/M$  e  $K_0$  em  $T = 10$  MeV. A linha cheia representa o modelo de contato e a tracejada o modelo de Walecka não-linear.

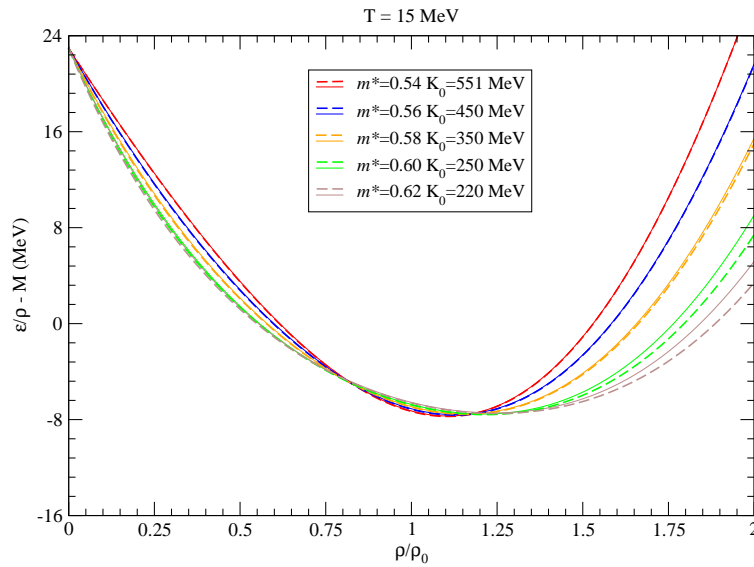


Figura 3.13: Energia por nucleon como função da razão  $\rho/\rho_0$ , para vários valores de  $m^* = M_0^*/M$  e  $K_0$  em  $T = 15$  MeV. A linha cheia representa o modelo de contato e a tracejada o modelo de Walecka não-linear.

O comportamento da razão  $M^*/M$  em função da temperatura, foi verificado no

regime de densidade bariônica nula para os modelos de contato e Walecka não-linear. Esse regime é alcançado fazendo  $\nu = 0$  nas equações (1.140) e (2.61). Com isso as interações vetoriais são nulas no modelo de Walecka não-linear já que o campo  $V_0$  é proporcional a  $\rho$ , conforme visto em (2.13). Os gráficos são mostrados nas figuras 3.14 e 3.15.

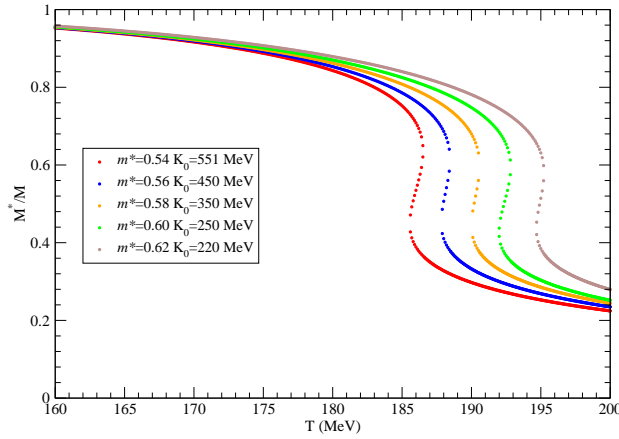


Figura 3.14: Razão  $M^*/M$  como função da temperatura para o modelo de contato para  $\rho = \nu = 0$ .

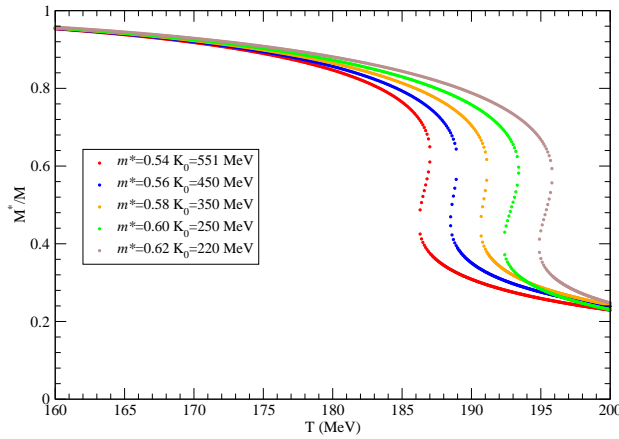


Figura 3.15: Razão  $M^*/M$  como função da temperatura para o modelo de Walecka não-linear para  $\rho = \nu = 0$ .

Note que ambos os modelos, para os diversos valores de  $m^*$  e  $K_0$  apresentam a assinatura de uma transição de fase de primeira ordem no regime de vácuo térmico.

Outra grandeza muito importante quando tratamos de sistemas a temperatura finita, é a energia livre de Helmholtz dada por

$$F = E - TS \quad (3.1)$$

onde  $S$  representa a entropia.

Nos modelos nucleares, onde as variáveis independentes são naturalmente  $T$ ,  $V$  e  $N$  (sendo as duas últimas representadas pela densidade  $\rho$ ), a energia livre de Helmholtz é o potencial termodinâmico que contém toda a informação do sistema. Por exemplo, é através dela que obtemos a energia de ligação.

Por isso é importante comparar os modelos de contato e de Walecka não-linear através da função  $F$ . A comparação é mostrada, para temperaturas de 5, 10 e 15 MeV, nos gráficos seguintes onde na verdade é exibido o comportamento da energia livre de Helmholtz por partícula, dada por  $f/\rho$  com  $f = F/V$ .

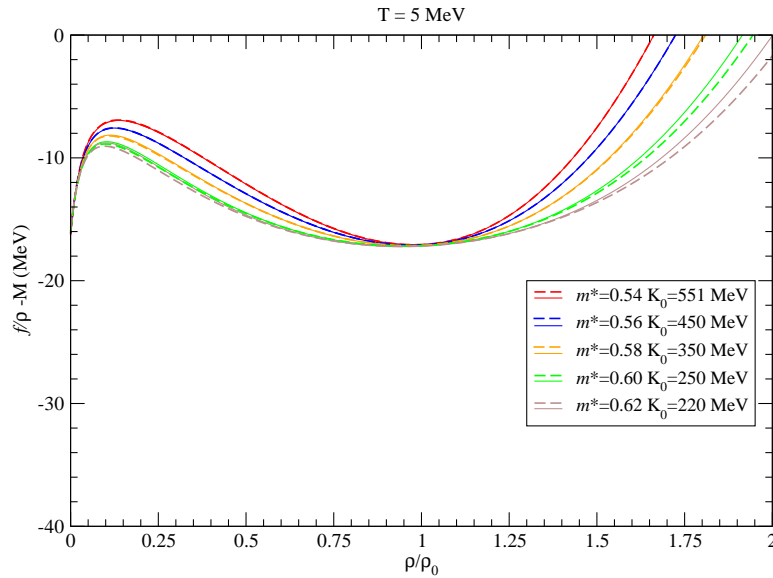


Figura 3.16: Energia livre de Helmholtz por partícula como função da razão  $\rho/\rho_0$ , para vários valores de  $m^* = M_0^*/M$  e  $K_0$  em  $T = 5$  MeV. A linha cheia representa o modelo de contato e a tracejada o modelo de Walecka não-linear.

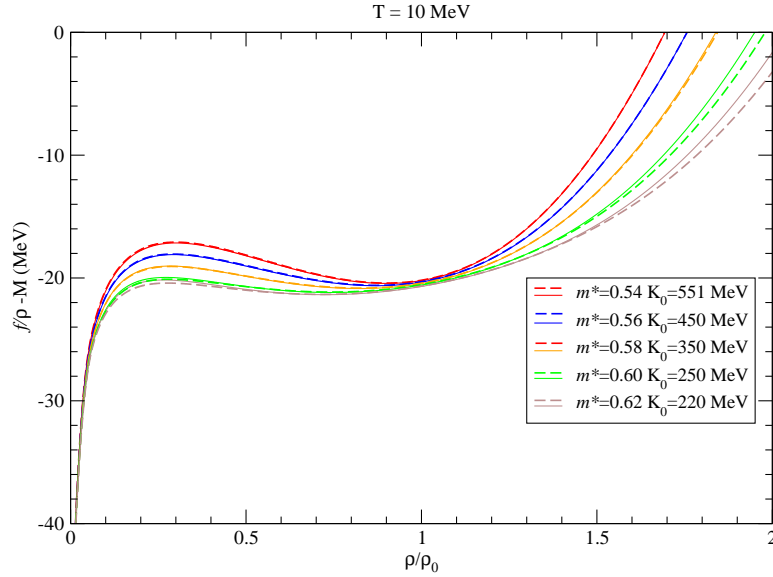


Figura 3.17: Energia livre de Helmholtz por partícula como função da razão  $\rho/\rho_0$ , para vários valores de  $m^* = M_0^*/M$  e  $K_0$  em  $T = 10$  MeV. A linha cheia representa o modelo de contato e a tracejada o modelo de Walecka não-linear.

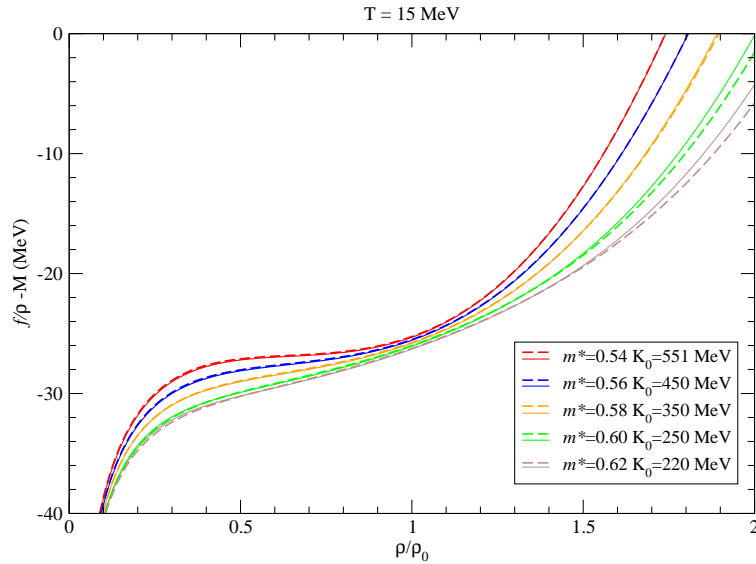


Figura 3.18: Energia livre de Helmholtz por partícula como função da razão  $\rho/\rho_0$ , para vários valores de  $m^* = M_0^*/M$  e  $K_0$  em  $T = 15$  MeV. A linha cheia representa o modelo de contato e a tracejada o modelo de Walecka não-linear.

Os gráficos exibidos ilustram claramente que os dois modelos fornecem a mesma informação física do sistema, apesar de descreverem a matéria nuclear com equações de estado analiticamente diferentes, dadas por (1.90), (1.95), (2.25) e (2.28). Isso seria natural se a comparação fosse feita entre modelo de Walecka, descrito por (1.2), com o modelo de contato apenas de auto-interação quadrática dado por (1.39), já que foi mostrado anteriormente a equivalência entre ambos no limite de massa mesônica muito grande. Porém, a comparação aqui foi feita entre os modelos de contato de auto-interações cúbicas e quárticas e Walecka não-linear onde a conexão, a princípio não é verificada já que foi mostrado que o modelo gerador da densidade lagrangiana de contato completa é fornecido por (1.40) e não o dado por (2.1).

### 3.3 Interpretação dos resultados

Para que os resultados mostrados sejam consistentes, é necessário que os termos

$$-\frac{A'}{3} \left[ 3 \left( \frac{m_s^2}{g_s} \right)^2 \phi^2 \bar{\psi}\psi + 3 \frac{m_s^2}{g_s} \phi (\bar{\psi}\psi)^2 \right], \quad (3.2)$$

presentes em (1.41) e os termos

$$-\frac{B'}{4} \left[ 4 \left( \frac{m_s^2}{g_s} \right)^3 \phi^3 \bar{\psi}\psi + 6 \left( \frac{m_s^2}{g_s} \right)^2 \phi^2 (\bar{\psi}\psi)^2 + 4 \frac{m_s^2}{g_s} \phi (\bar{\psi}\psi)^3 \right] \quad (3.3)$$

em (1.42) sejam desprezíveis quando comparados a

$$-\frac{A'}{3} \left( \frac{m_s^2}{g_s} \right)^3 \phi^3 \quad (3.4)$$

e

$$-\frac{B'}{4} \left( \frac{m_s^2}{g_s} \right)^4 \phi^4 \quad (3.5)$$

respectivamente. Ou seja, está se mostrando na verdade que o modelo de Walecka não-linear é na verdade aproximadamente igual ao modelo misto, descrito pela densidade lagrangiana dada em (1.40) e assim, indiretamente, seria provado que o modelo de Walecka não-linear é equivalente ao modelo de contato de auto-interações cúbicas e quárticas.



É possível fazer tal comparação em termos das constantes, sendo necessário apenas mostrar que

$$G'_s{}^2 = G_s^2, \quad (3.6)$$

$$G'_V{}^2 = G_V^2, \quad (3.7)$$

$$A' \left( \frac{m_s^2}{g_s} \right)^3 = A \quad \text{e} \quad (3.8)$$

$$B' \left( \frac{m_s^2}{g_s} \right)^4 = B. \quad (3.9)$$

As comparações indicadas pelas igualdades<sup>1</sup> (3.6) e (3.7) podem ser feitas de forma direta sem nenhum tipo de obstáculo, já as comparações mostradas em (3.8) e (3.9) apresentam sutilezas que devem ser cuidadosamente observadas. Na verdade, não temos acesso aos valores  $A' \left( \frac{m_s^2}{g_s} \right)^3$  e  $B' \left( \frac{m_s^2}{g_s} \right)^4$  na resolução do modelo de contato completo, mas sim das constantes  $A'$  e  $B'$ . O mesmo ocorre no modelo de Walecka não-linear. Os valores de  $A$  e  $B$  são desconhecidos, porém as constantes  $a = \frac{A}{g_s^3}$  e  $b = \frac{B}{g_s^4}$ , definidas em (2.45) e (2.46), são bem determinadas.

Logo, as igualdades (3.8) e (3.9) podem ser verificadas da seguinte maneira: fazendo

$$\left( \frac{m_s^2}{g_s} \right)^{12} = \frac{A^4}{A'^4} \quad \text{e} \quad (3.10)$$

$$\left( \frac{m_s^2}{g_s} \right)^{12} = \frac{B^3}{B'^3}, \quad (3.11)$$

temos que

$$\left( \frac{m_s^2}{g_s^2} \right)^{12} = \frac{A^4}{A'^4} \frac{1}{g_s^{12}} = \frac{a^4}{A'^4} \quad \text{e} \quad (3.12)$$

$$\left( \frac{m_s^2}{g_s^2} \right)^{12} = \frac{B^3}{B'^3} \frac{1}{g_s^{12}} = \frac{b^3}{B'^3}, \quad (3.13)$$

ou seja, (3.8) e (3.9) são verificadas apenas se

$$\frac{a^4}{b^3} = \frac{A'^4}{B'^3}. \quad (3.14)$$

---

<sup>1</sup>É importante neste ponto, lembrar que as constantes que possuem linha, referem-se ao modelo de contato completo e as demais ao modelo de Walecka não-linear.

### 3.3.1 Análise em temperatura nula

Aqui mostraremos os valores das constantes de cada modelo e a comparação citada anteriormente. Esses dados, calculados para os vários modelos nucleares adotados até aqui, estão nas tabelas seguintes.

Modelo de contato	$G_V'^2 M^2$	$G_s'^2 M^2$	$\frac{A'^4}{B'^3} (10^8 \text{ MeV}^4)$
$m^* = 0,54 \ K_0 = 551 \text{ MeV}$	273,58	357,91	-
$m^* = 0,56 \ K_0 = 450 \text{ MeV}$	260,61	354,54	2,94
$m^* = 0,58 \ K_0 = 350 \text{ MeV}$	247,55	351,04	5,43
$m^* = 0,60 \ K_0 = 250 \text{ MeV}$	234,40	347,49	7,74
$m^* = 0,62 \ K_0 = 220 \text{ MeV}$	221,18	335,71	9,58

Tabela 3.1: Valores das constantes do modelo de contato para os diversos parâmetros  $m^*$  e  $K_0$ . As constantes  $G_V'^2$  e  $G_s'^2$  multiplicadas por  $M^2$  são adimensionais.

Modelo de Walecka não-linear	$G_V^2 M^2$	$G_s^2 M^2$	$\frac{a^4}{b^3} (10^8 \text{ MeV}^4)$
$m^* = 0,54 \ K_0 = 551 \text{ MeV}$	273,58	357,91	-
$m^* = 0,56 \ K_0 = 450 \text{ MeV}$	260,61	355,16	-2,94
$m^* = 0,58 \ K_0 = 350 \text{ MeV}$	247,55	353,59	-5,43
$m^* = 0,60 \ K_0 = 250 \text{ MeV}$	234,40	353,56	-7,73
$m^* = 0,62 \ K_0 = 220 \text{ MeV}$	221,18	343,98	-9,58

Tabela 3.2: Valores das constantes do modelo de Walecka não-linear para os diversos parâmetros  $m^*$  e  $K_0$ . As constantes  $G_V^2$  e  $G_s^2$  multiplicadas por  $M^2$  são adimensionais.

Note que a diferença  $(G_s^2 - G_s'^2)M^2$  diminui a medida que os modelos tornam-se mais próximo do modelo de Walecka (linear). Isso ocorre quando o valor de  $m^*$  aproxima-se de 0,54.

A tabela 3.3 mostra as razões entre as constantes dos modelos de contato e Walecka não-linear.

Parâmetros	$\frac{G_V'^2}{G_V^2}$	$\frac{G_s'^2}{G_s^2}$	$\frac{A'^4/B'^3}{a^4/b^3}$
$m^* = 0,54 \ K_0 = 551 \text{ MeV}$	1,0000	1,0000	-
$m^* = 0,56 \ K_0 = 450 \text{ MeV}$	1,0000	0,99825	-1,00
$m^* = 0,58 \ K_0 = 350 \text{ MeV}$	1,0000	0,99279	-1,00
$m^* = 0,60 \ K_0 = 250 \text{ MeV}$	1,0000	0,98283	-1,00
$m^* = 0,62 \ K_0 = 220 \text{ MeV}$	1,0000	0,97596	-1,00

Tabela 3.3: Razão entre as constantes dos modelos de contato e Walecka não-linear para diversos parâmetros  $m^*$  e  $K_0$ .

Os resultados mostram que as igualdades (3.6), (3.7), (3.8) e (3.9) são satisfeitas, indicando assim que os termos (3.2) e (3.3) presentes na densidade lagrangiana do modelo misto são formalmente necessários para que o limite de massa mesônica muito grande gere o modelo de contato completo através do procedimento das integrais funcionais, porém, numericamente são absolutamente desprezíveis.

Outra comparação feita entre os modelos, foi através dos termos que contribuem para a energia por partícula na densidade de saturação,  $\mathcal{E}(\rho_0)/\rho_0 - M$ , para o regime de temperatura nula. Esses termos são calculados a partir das expressões (1.90) e (2.40). As tabelas seguintes mostram os resultados.

Modelo de contato	$E'_1 = \frac{G_V'^2}{2}\rho_0$ (MeV)	$E'_2 = \frac{G_s'^2\rho_s^2}{2\rho_0}$ (MeV)	$E'_3 = \frac{2A'\rho_s^3}{3\rho_0}$ (MeV)	$E'_c(\rho_0)$ (MeV)	$E_0$ (MeV)
$m^* = 0,54$	177,18	201,17	0	544,00	-15,92
$m^* = 0,56$	168,78	197,32	-5,37	561,54	-15,99
$m^* = 0,58$	160,32	192,68	-9,87	579,15	-15,99
$m^* = 0,60$	151,81	187,54	-13,90	596,83	-15,99
$m^* = 0,62$	143,25	181,97	-17,51	614,57	-15,99

Tabela 3.4: Valores dos termos da energia por partícula do modelo de contato. O termo cinético está representado por  $E'_c$ . Aqui, por simplicidade, fizemos  $B' = 0$ . A energia de ligação é dada por  $E_0 = E'_1 + E'_2 + E'_3 + E'_c - M$ .

Modelo de Walecka não-linear	$E_1 = \frac{G_V^2}{2}\rho_0$ (MeV)	$E_2 = \frac{\delta^2}{2G_s^2\rho_0}$ (MeV)	$E_3 = \frac{a\delta^3}{3\rho_0}$ (MeV)	$E_c(\rho_0)$ (MeV)	$E_0$ (MeV)
$m^* = 0,54$	177,18	201,17	0	544,00	-15,92
$m^* = 0,56$	168,78	189,68	2,68	561,54	-15,99
$m^* = 0,58$	160,32	177,87	4,94	579,15	-15,99
$m^* = 0,60$	151,81	166,69	6,95	596,83	-15,99
$m^* = 0,62$	143,25	155,70	8,76	614,57	-15,99

Tabela 3.5: Valores dos termos da energia por partícula do modelo de Walecka não-linear. Aqui, por simplicidade, fizemos  $b = 0$ . A energia de ligação é dada por  $E_0 = E_1 + E_2 + E_3 + E_c - M$ .

Nas duas tabelas anteriores as constantes  $B'$  e  $b$  dos modelos de contato e Walecka não-linear respectivamente, foram feitas iguais a zero. Nas próximas duas tabelas, os termos referentes a essas constantes foram incluídos.

Modelo de contato	$E'_1 = \frac{G_V'^2}{2}\rho_0$ (MeV)	$E'_2 = \frac{G_s'^2\rho_s^2}{2\rho_0}$ (MeV)	$E'_3 = \frac{2A'\rho_s^3}{3\rho_0}$ (MeV)	$E'_4 = \frac{3B'\rho_s^4}{4\rho_0}$ (MeV)	$E'_c(\rho_0)$ (MeV)	$E_0$ (MeV)
$m^* = 0,54 K_0 = 551 MeV$	177,18	201,17	0	0	544,00	-15,92
$m^* = 0,56 K_0 = 450 MeV$	168,78	201,34	-21,46	12,07	561,54	-15,99
$m^* = 0,58 K_0 = 350 MeV$	160,32	201,01	-43,21	25,00	579,15	-15,99
$m^* = 0,60 K_0 = 250 MeV$	151,81	200,47	-65,63	38,80	596,83	-15,99
$m^* = 0,62 K_0 = 220 MeV$	143,25	192,99	-61,63	33,09	614,57	-15,99

Tabela 3.6: Valores dos termos da energia por partícula do modelo de contato com todos os termos não-lineares. A energia de ligação é dada por  $E_0 = E'_1 + E'_2 + E'_3 + E'_4 + E'_c - M$ .

Modelo de Walecka não-linear	$E_1 = \frac{G_V^2}{2}\rho_0$ (MeV)	$E_2 = \frac{\delta^2}{2G_s^2\rho_0}$ (MeV)	$E_3 = \frac{a\delta^3}{3\rho_0}$ (MeV)	$E_4 = \frac{b\delta^4}{4\rho_0}$ (MeV)	$E_c(\rho_0)$ (MeV)	$E_0$ (MeV)
$m^* = 0,54 K_0 = 551 MeV$	177,18	201,17	0	0	544,00	-15,92
$m^* = 0,56 K_0 = 450 MeV$	168,78	185,25	10,73	-4,02	561,54	-15,99
$m^* = 0,58 K_0 = 350 MeV$	160,32	169,54	21,59	-8,33	579,15	-15,99
$m^* = 0,60 K_0 = 250 MeV$	151,81	153,79	32,75	-12,89	596,83	-15,99
$m^* = 0,62 K_0 = 220 MeV$	143,25	142,66	34,84	-13,04	614,57	-15,99

Tabela 3.7: Valores dos termos da energia por partícula do modelo de Walecka não-linear com todos os termos não-lineares. A energia de ligação é dada por  $E_0 = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + E_c - M$ .

Veja que em ambos os modelos os termos não-lineares contribuem muito pouco para a energia de ligação por partícula do sistema.

### 3.3.2 Análise em temperatura finita

Nessa seção serão feitas comparações, mas agora para temperatura finita. Escolhemos um caso particular onde  $T = T_c$  é a temperatura crítica, a partir da qual a fase líquido-gás torna-se puramente gasosa.

Os parâmetros críticos dos modelos, ou seja, as quantidades  $T_c$ ,  $\rho_c$ ,  $P_c$ ,  $m_c^* = \frac{M_c^*}{M}$  e o fator de compressibilidade  $\frac{P_c}{\rho_c T_c}$  também foram obtidos e comparados. Os resultados encontram-se nas tabelas 3.8 e 3.9.

Modelo de contato	$T_c$ (MeV)	$\rho_c$ ( $fm^{-3}$ )	$P_c$ (MeV/ $fm^3$ )	$m_c^*$	$\frac{P_c}{\rho_c T_c}$
$m^* = 0,54$ $K_0 = 551$ MeV	18,35	0,065	0,43	0,79	0,36
$m^* = 0,56$ $K_0 = 450$ MeV	16,90	0,059	0,34	0,82	0,33
$m^* = 0,58$ $K_0 = 350$ MeV	15,64	0,052	0,26	0,84	0,32
$m^* = 0,60$ $K_0 = 250$ MeV	14,75	0,044	0,20	0,87	0,31
$m^* = 0,62$ $K_0 = 220$ MeV	14,80	0,043	0,20	0,88	0,31

Tabela 3.8: Parâmetros críticos para o diversos modelos nucleares calculados a partir do modelo de contato.

Walecka não-linear	$T_c$ (MeV)	$\rho_c$ ( $fm^{-3}$ )	$P_c$ (MeV/ $fm^3$ )	$m_c^*$	$\frac{P_c}{\rho_c T_c}$
$m^* = 0,54$ $K_0 = 551$ MeV	18,35	0,065	0,43	0,79	0,36
$m^* = 0,56$ $K_0 = 450$ MeV	16,86	0,060	0,33	0,81	0,33
$m^* = 0,58$ $K_0 = 350$ MeV	15,45	0,053	0,25	0,84	0,31
$m^* = 0,60$ $K_0 = 250$ MeV	14,27	0,045	0,19	0,87	0,30
$m^* = 0,62$ $K_0 = 220$ MeV	14,12	0,043	0,18	0,88	0,29

Tabela 3.9: Parâmetros críticos para o diversos modelos nucleares calculados a partir do modelo de Walecka não-linear.

Como se vê, mesmo em  $T = T_c$ , ambos os modelos ainda continuam produzindo resultados muito próximos.

O procedimento numérico utilizado para o cálculo da temperatura crítica dos modelos apresentados nas tabelas anteriores, está descrito cuidadosamente na seção D.2 do apêndice D.

## Capítulo 4

# Aproximação $\rho = \rho_s$ para o Modelo de Contato

Um caso particular do modelo de Walecka linear que trata da aproximação  $\rho = \rho_s$  foi recentemente estudado [35]. A motivação para esse estudo veio da verificação que numericamente essas duas quantidades são muito próximas na região  $\rho \leq \rho_0$ , assim também investigamos tal aproximação para modelos de contato não-lineares. De fato como pode ser visto na figura abaixo, esta continua sendo uma boa aproximação.

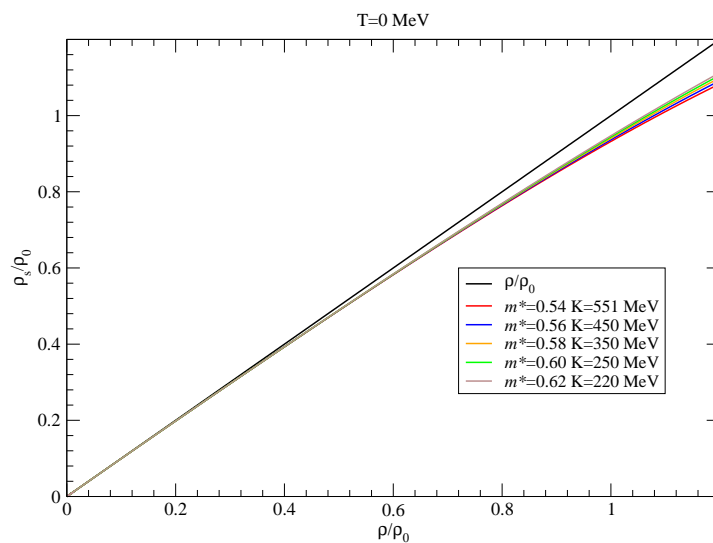


Figura 4.1: Razão  $\rho_s/\rho_0$  como função de  $\rho/\rho_0$  do modelo de contato para diferentes valores de  $m^*$  e  $K_0$ .

Além disso será visto que tal aproximação permite desenvolver o modelo de contato de forma totalmente analítica.

O modelo de contato com os parâmetros  $m^* = 0,54$  e  $K_0 = 551 \text{ MeV}$  corresponde às constantes  $A' = B' = 0$  na densidade lagrangiana dada em (1.1)<sup>1</sup>. Note que esse modelo (curva vermelha na figura anterior) é o que apresenta a maior diferença entre  $\rho$  e  $\rho_s$  e mesmo assim essa diferença é de apenas 6%, o que garante grande confiabilidade no uso da aproximação.

Veja o que significa fisicamente fazer a aproximação  $\rho = \rho_s$ . Temos que

$$\rho = \bar{\psi}\gamma^0\psi = \psi^\dagger\psi \quad \text{e} \quad (4.1)$$

$$\rho_s = \bar{\psi}\psi = \psi^\dagger\gamma^0\psi, \quad (4.2)$$

com  $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ .

O spinor de Dirac,

$$\psi = \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

é descrito em termos de sua grande ( $\phi$ ) e pequena ( $\chi$ ) componentes, onde cada uma delas é um outro spinor de duas componentes. A grande componente descreve os estados de energia positiva e a pequena os estados de energia negativa. Em termos da grande e pequena componentes do spinor de Dirac,  $\rho$  e  $\rho_s$  são dados por

$$\rho = \phi^2 + \chi^2 \quad \text{e} \quad (4.4)$$

$$\rho_s = \phi^2 - \chi^2. \quad (4.5)$$

Nesse cenário,  $\rho = \rho_s$  significa fazer  $\chi = 0$  e conseqüentemente o limite em que  $\psi = \phi$ , ou seja, o limite não-relativístico do modelo em estudo<sup>2</sup>. Apesar disso, veremos que no modelo de contato essa aproximação não despreza totalmente a relatividade do modelo. Na verdade a massa efetiva do nucleon ainda contém informações relativísticas.

---

<sup>1</sup>Como já foi visto esse modelo é equivalente ao modelo de Walecka no limite de massas mesônicas muito grandes.

<sup>2</sup>Note que o limite não-relativístico do modelo de contato também é feito quando tomamos  $k^2 \ll M^{*2}$ . Isso pode ser visto pelas equações (1.70) e (1.72).



## 4.1 Relação de dispersão e hamiltoniano do sistema

Outra maneira de se obter a relação de dispersão e o hamiltoniano do sistema é através da decomposição do spinor de Dirac em termos de suas componentes. Esse procedimento é muito mais claro e será usado aqui para o modelo de contato.

A equação de movimento para o campo fermiônico  $\psi$  é dada através das equações de Euler-Lagrange com a densidade lagrangiana do modelo de contato dada em (1.1). Usando a aproximação de campo médio, temos que essa equação de movimento é descrita por

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu - M + G'_s{}^2 \rho_s - \gamma^0 G'_V{}^2 \rho + A' \rho_s^2 + B' \rho_s^3) \psi &= 0 \\ (i\gamma^0 \partial_0 + i\gamma^a \partial_a - M + G'_s{}^2 \rho_s - \gamma^0 G'_V{}^2 \rho + A' \rho_s^2 + B' \rho_s^3) \psi &= 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Multiplicando à esquerda toda a equação pela matriz

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} 1_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & -1_{2 \times 2} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

onde  $1_{2 \times 2}$  e  $0_{2 \times 2}$  são as matrizes  $2 \times 2$  identidade e nula respectivamente, temos que

$$\begin{aligned} \left[ i\partial_0 + i\gamma^0 \gamma^a \partial_a + \gamma^0 (G'_s{}^2 \rho_s - M + A' \rho_s^2 + B' \rho_s^3) - G'_V{}^2 \rho \right] \psi &= 0 \\ \left[ -i\alpha^a \partial_a + \beta (M - G'_s{}^2 \rho_s - A' \rho_s^2 - B' \rho_s^3) + G'_V{}^2 \rho \right] \psi &= i \frac{\partial \psi}{\partial t} \\ [\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{k} + \beta (M + S') + V'] \psi &= i \frac{\partial \psi}{\partial t} \\ [\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{k} + \beta (M + S') + V'] \psi &= E \psi \end{aligned} \quad (4.8)$$

onde

$$\begin{aligned} \alpha^a &= \gamma^0 \gamma^a, \\ k_a &= i \partial_a, \\ S' &\equiv -G'_s{}^2 \rho_s - A' \rho_s^2 - B' \rho_s^3 \quad \text{e} \\ V' &\equiv G'_V{}^2 \rho. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Mas como

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

a equação (4.8) pode ser escrita como

$$\begin{pmatrix} M + S' + V' & \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} & -M - S' + V' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \phi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

que leva ao seguinte sistema

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} \chi + (M + S' + V')\phi = E\phi \quad (4.12)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} \phi - (M + S' - V')\chi = E\chi. \quad (4.13)$$

Extraindo-se o valor de  $\chi$  a partir de (4.13) e inserindo-o em (4.12), obtemos

$$(M + S' + V' - E)\phi + \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k})^2}{M + S' - V' + E} \phi = 0, \quad (4.14)$$

que pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} (M + S' - V' + E)(M + S' + V' - E)\phi + (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k})^2 \phi &= 0 \\ [(M + S')^2 - (E - V')^2 + (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k})^2] \phi &= 0 \\ [(M + S')^2 - (E - V')^2 + k^2] \phi &= 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Lembrando que a massa efetiva do modelo de contato, expressão (1.69), pode ser dada por  $M^* = M + S'$ , temos que (4.15) reproduz a relação de dispersão

$$E = V' \pm [k^2 + (M + S')^2]^{1/2} \quad (4.16)$$

dada em (1.84).

Para obter o hamiltoniano do sistema nesse formalismo, procederemos da seguinte forma: definimos as quantidades

$$\Sigma = V' + S', \quad (4.17)$$

$$\Delta = V' - S' \quad (4.18)$$

e com isso modificamos (4.12) e (4.13) para

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} \chi + (M + \Sigma)\phi = E\phi \quad \text{e} \quad (4.19)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k} \phi - (M - \Delta)\chi = E\chi. \quad (4.20)$$

Substituindo  $\chi$  de (4.20) em (4.19), obtemos

$$\begin{aligned} (M + \Sigma)\phi + \frac{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k})^2}{M - \Delta + E} \phi &= E \phi \\ \left[ \frac{k^2}{M - \Delta + E} + \Sigma \right] \phi &= (E - M)\phi, \end{aligned} \quad (4.21)$$

que pode ser reescrito como

$$\left[ \frac{k^2}{2M(1 - \frac{\epsilon + \Delta}{2M})} + \Sigma \right] \phi = -\epsilon \phi \quad (4.22)$$

onde

$$\epsilon = M - E \quad (4.23)$$

é a energia do nucleon.

Perceba que a expressão (4.22) sugere que o nucleon é descrito pelo hamiltoniano dado por

$$\hat{H} = \frac{k^2}{2\bar{M}} + \Sigma \quad (4.24)$$

com

$$\bar{M} = M \left( 1 - \frac{\epsilon + \Delta}{2M} \right) \quad (4.25)$$

sendo sua massa efetiva. Note que essa quantidade aparece quando o modelo de contato é tratado nesse formalismo e se relaciona com a massa efetiva dada por  $M^* = M + S'$  da seguinte forma

$$\bar{M} = \frac{1}{2}[M^* + (M - V - \epsilon)]. \quad (4.26)$$

## 4.2 Equações de estado em temperatura nula

A partir de agora serão encontradas as equações de estado em temperatura nula para o modelo de contato dentro do formalismo de Dirac adotado até aqui. Para isso será utilizada a aproximação  $\rho = \rho_s$  propriamente dita, escrevendo as quantidades

$\Sigma$  e  $\Delta$  definidas anteriormente como

$$\begin{aligned}
\Sigma &= V' + S' \\
&= G_V'^2 \rho - G_s'^2 \rho_s - A' \rho_s^2 - B' \rho_s^3 \\
&= (G_V'^2 - G_s'^2) \rho - A' \rho^2 - B' \rho^3 \\
&\equiv \Sigma_0 \frac{\rho}{\rho_0} + \alpha \frac{\rho^2}{\rho_0^2} + \beta \frac{\rho^3}{\rho_0^3}
\end{aligned} \tag{4.27}$$

e

$$\begin{aligned}
\Delta &= V' - S' \\
&= G_V'^2 \rho + G_s'^2 \rho_s + A' \rho_s^2 + B' \rho_s^3 \\
&= (G_V'^2 + G_s'^2) \rho + A' \rho^2 + B' \rho^3 \\
&\equiv \Delta_0 \frac{\rho}{\rho_0} - \alpha \frac{\rho^2}{\rho_0^2} - \beta \frac{\rho^3}{\rho_0^3}
\end{aligned} \tag{4.28}$$

onde  $\rho_0$  é a densidade de saturação da matéria nuclear.

Os parâmetros ajustados, segundo os observáveis conhecidos da física nuclear em  $T = 0$  são agora  $\Sigma_0$ ,  $\Delta_0$ ,  $\alpha$  e  $\beta$ .

Mesmo após feita a aproximação, que em princípio é um limite não-relativístico, o hamiltoniano dado em (4.24) ainda guarda informações relativísticas sobre o modelo, mais precisamente em  $\bar{M}$ . Note que se  $\bar{M}$  fosse igual a  $M$ , teríamos um modelo não-relativístico e (4.24) seria exatamente o hamiltoniano de Schrödinger.

Para simplificar ainda mais os cálculos, despreza-se  $\epsilon/2M$  em (4.26), o que permite escrever a massa efetiva do nucleon<sup>3</sup> como sendo

$$\bar{M} = M \left( 1 - \frac{\Delta}{2M} \right) \tag{4.29}$$

$$= M \left( 1 - \frac{\Delta_0 \frac{\rho}{\rho_0} - \alpha \frac{\rho^2}{\rho_0^2} - \beta \frac{\rho^3}{\rho_0^3}}{2M} \right) . \tag{4.30}$$

A energia de um nucleon é dada, segundo (4.24) como

$$E_1 = \Sigma + \frac{k^2}{2\bar{M}} , \tag{4.31}$$

---

<sup>3</sup>A aproximação é justificada já que  $\epsilon = 16 \text{ MeV}$  e  $M = 939 \text{ MeV}$ , o que torna  $\frac{\epsilon}{2M} \ll 1$ .

logo, a energia total do sistema é dada por

$$E = N\Sigma + \frac{\gamma}{2M} \sum_{i=0}^{k_F} k_i^2 \quad (4.32)$$

com  $k_F$  sendo o momento de Fermi,  $\gamma$  o número de nucleons em cada nível de energia, respeitando o princípio da exclusão de Pauli e  $N$  o número total de partículas do sistema. Como  $k$  é uma grandeza contínua, o somatório pode ser convertido em uma integral através do seguinte procedimento: supondo que em uma dimensão valha a discretização de  $k$  como  $k = \frac{2\pi n}{L}$  (condições periódicas de contorno) onde  $n$  é um inteiro e  $L$  é o período, escreve-se

$$\frac{1}{L} \sum_{i=0}^{k_F} k_i^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{k_F} \frac{2\pi}{L} k_i^2 \quad (4.33)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{k_F} \Delta k k_i^2. \quad (4.34)$$

O limite do contínuo significa fazer  $L \rightarrow \infty$ , o que torna

$$\frac{1}{L} \sum_{i=0}^{k_F} k_i^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{k_F} dk k^2, \quad (4.35)$$

logo, em três dimensões temos

$$\frac{1}{L^3} \sum_{i=0}^{k_F} k_i^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k k^2. \quad (4.36)$$

Utilizando esse método e lembrando que  $L^3 = V$  é o volume do sistema, temos que a energia total é escrita como

$$E = N\Sigma + \frac{\gamma V}{(2\pi)^3} \int \frac{k^2}{2M} d^3k. \quad (4.37)$$

Dividindo toda a expressão anterior por  $V$ , obtém-se

$$\mathcal{E} = \Sigma\rho + \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \frac{1}{2M} \int_0^{k_F} 4\pi k^4 dk \quad (4.38)$$

$$= \Sigma\rho + \frac{\gamma}{4\pi^2 M} \frac{k_F^5}{5}. \quad (4.39)$$

A densidade é escrita em termos do momento de Fermi  $k_F$  como

$$\rho = \frac{\gamma}{6\pi^2} k_F^3 \quad (4.40)$$

e assim, a densidade de energia torna-se

$$\mathcal{E} = \Sigma\rho + \frac{\gamma}{20\pi^2 M} \left( \frac{6\pi^2}{\gamma} \right)^{5/3} \rho^{5/3} \quad (4.41)$$

$$= \Sigma\rho + \frac{3}{10} \left( \frac{6\pi^2}{\gamma} \right)^{-1} \left( \frac{6\pi^2}{\gamma} \right)^{5/3} \frac{\rho^{5/3}}{M} \quad (4.42)$$

$$= \Sigma\rho + \frac{3}{10M} \left( \frac{6\pi^2}{\gamma} \right)^{2/3} \left[ \frac{1}{1 - \frac{\Delta}{2M}} \right] \rho^{5/3}. \quad (4.43)$$

Como  $\Sigma$  e  $\Delta$  são respectivamente dados por (4.27) e (4.28), temos finalmente que

$$\mathcal{E} = \Sigma_0 \frac{\rho^2}{\rho_0} + \alpha \frac{\rho^3}{\rho_0^2} + \beta \frac{\rho^4}{\rho_0^3} + \frac{3}{10M} \left( \frac{6\pi^2}{\gamma} \right)^{2/3} \left[ \frac{1}{1 - \frac{\Delta_0 \frac{\rho}{\rho_0} - \alpha \frac{\rho^2}{\rho_0^2} - \beta \frac{\rho^3}{\rho_0^3}}{2M}} \right] \rho^{5/3} \quad (4.44)$$

e o potencial químico do sistema é encontrado a partir de

$$\begin{aligned} \mu = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho} &= 2\Sigma_0 \frac{\rho}{\rho_0} + 3\alpha \frac{\rho^2}{\rho_0^2} + 4\beta \frac{\rho^3}{\rho_0^3} \\ &+ \frac{1}{2M} \left( \frac{6\pi^2}{\gamma} \right)^{2/3} \left[ \frac{1 - \frac{\Delta_0 \rho}{5M\rho_0} - \frac{\alpha \rho^2}{10M\rho_0^2} - \frac{2\beta \rho^3}{5M\rho_0^3}}{\left( 1 - \frac{\Delta_0 \frac{\rho}{\rho_0} - \alpha \frac{\rho^2}{\rho_0^2} - \beta \frac{\rho^3}{\rho_0^3}}{2M} \right)^2} \right] \rho^{2/3}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Em sistemas onde a temperatura é nula, a relação termodinâmica (C.1) provada no apêndice C torna-se

$$\mu = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho} = \frac{P + \mathcal{E}}{\rho}, \quad (4.46)$$

já que nesse caso  $f = \mathcal{E}$ . A partir dessa relação, pode-se determinar a pressão como função da densidade. Com o uso de (4.44) e de (4.45) chega-se em

$$P = \Sigma_0 \frac{\rho^2}{\rho_0} + 2\alpha \frac{\rho^3}{\rho_0^2} + 3\beta \frac{\rho^4}{\rho_0^3} + \frac{1}{5M} \left( \frac{6\pi^2}{\gamma} \right)^{2/3} \left[ \frac{1 + \frac{\Delta_0 \rho}{4M\rho_0} - \frac{\alpha \rho^2}{M\rho_0^2} - \frac{7\beta \rho^3}{4M\rho_0^3}}{\left( 1 - \frac{\Delta_0 \frac{\rho}{\rho_0} - \alpha \frac{\rho^2}{\rho_0^2} - \beta \frac{\rho^3}{\rho_0^3}}{2M} \right)^2} \right] \rho^{5/3}. \quad (4.47)$$

A incompressibilidade do sistema, dada por

$$K = 9 \frac{\partial P}{\partial \rho} \quad (4.48)$$

é determinada com o uso de (4.47). O resultado, após álgebra simples porém muito trabalhosa, é

$$K = 18\Sigma_0 \frac{\rho}{\rho_0} + 54\alpha \frac{\rho^2}{\rho_0^2} + 108\beta \frac{\rho^3}{\rho_0^3} + \frac{3}{M} \left( \frac{6\pi^2}{\gamma} \right)^{2/3} \left[ \frac{c_1 \left( 1 - \frac{\Delta_0 \frac{\rho}{\rho_0} - \alpha \frac{\rho^2}{\rho_0^2} - \beta \frac{\rho^3}{\rho_0^3}}{2M} \right) + \frac{6}{5} c_2 c_3}{\left( 1 - \frac{\Delta_0 \frac{\rho}{\rho_0} - \alpha \frac{\rho^2}{\rho_0^2} - \beta \frac{\rho^3}{\rho_0^3}}{2M} \right)^3} \right] \rho^{2/3} \quad (4.49)$$

onde

$$c_1 = 1 + \frac{2\Delta_0 \rho}{5M\rho_0} - \frac{11\alpha\rho^2}{5M\rho_0^2} - \frac{49\beta\rho^3}{10M\rho_0^3}, \quad (4.50)$$

$$c_2 = 1 + \frac{\Delta_0 \rho}{4M\rho_0} - \frac{\alpha\rho^2}{M\rho_0^2} - \frac{7\beta\rho^3}{4M\rho_0^3} \quad \text{e} \quad (4.51)$$

$$c_3 = \frac{\Delta_0 \rho}{2M\rho_0} - \frac{\alpha\rho^2}{M\rho_0^2} - \frac{3\beta\rho^3}{2M\rho_0^3}. \quad (4.52)$$

A determinação das constantes  $\Delta_0$ ,  $\Sigma_0$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  é feita do mesmo modo que no método exato, através da fixação dos quatro observáveis  $E_0$  (energia de ligação por nucleon),  $\rho_0$  (densidade de saturação),  $\bar{M}_0$  (massa efetiva do nucleon na densidade de saturação) e  $K_0$  (incompressibilidade do sistema na densidade de saturação). Essa determinação significa resolver o seguinte sistema de quatro equações:

$$P(\rho_0) = 0, \quad (4.53)$$

$$\frac{\mathcal{E}(\rho_0)}{\rho_0} = -E_0, \quad (4.54)$$

$$K(\rho_0) = K_0 \quad \text{e} \quad (4.55)$$

$$\bar{M}(\rho_0) = \bar{M}_0, \quad (4.56)$$

obtido a partir das expressões (4.47), (4.44), (4.49) e (4.30).

Note que uma enorme vantagem da aproximação  $\rho = \rho_s$  utilizada é o fato de que o modelo de contato torna-se totalmente solúvel analiticamente, em detrimento da solução numérica auto-consistente que o método exato nos força a adotar.

### 4.3 Resultados

Esta seção mostrará os resultados comparativos, através de alguns gráficos, entre o modelo de contato resolvido de forma exata e numérica e o resolvido usando-se a aproximação  $\rho = \rho_s$  de forma analítica.

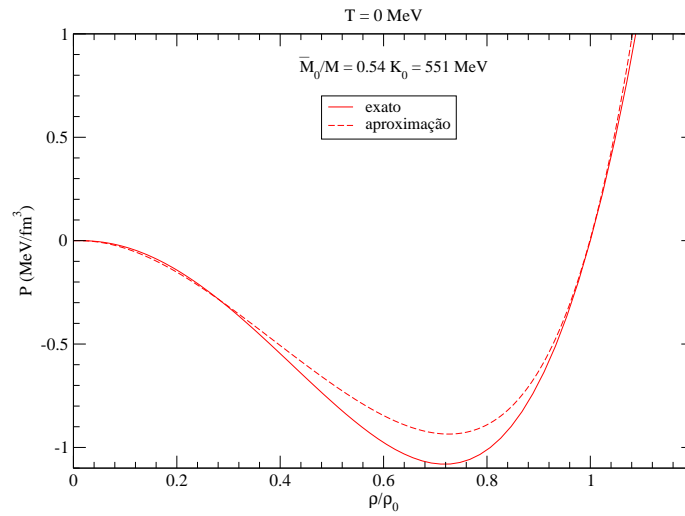


Figura 4.2:  $P \times \rho/\rho_0$  para  $\bar{M}_0/M = 0,54$  e  $K_0 = 551 \text{ MeV}$  em  $T = 0$ . A linha cheia representa o modelo de contato exato e a tracejada a aproximação  $\rho = \rho_s$ .

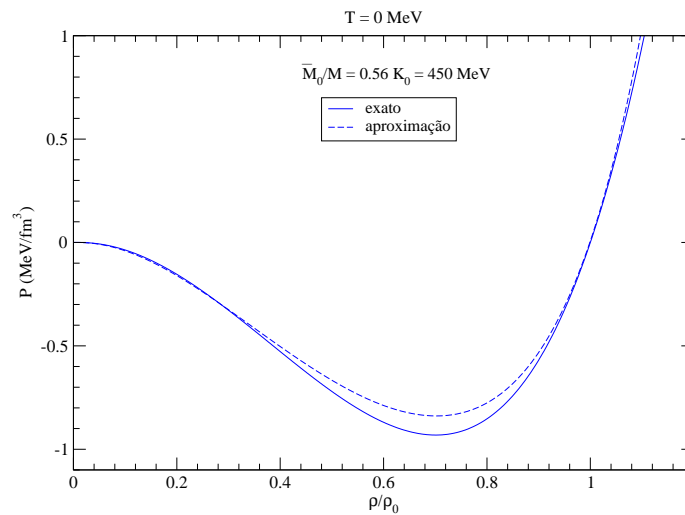


Figura 4.3:  $P \times \rho/\rho_0$  para  $\bar{M}_0/M = 0,56$  e  $K_0 = 450 \text{ MeV}$  em  $T = 0$ . A linha cheia representa o modelo de contato exato e a tracejada a aproximação  $\rho = \rho_s$ .



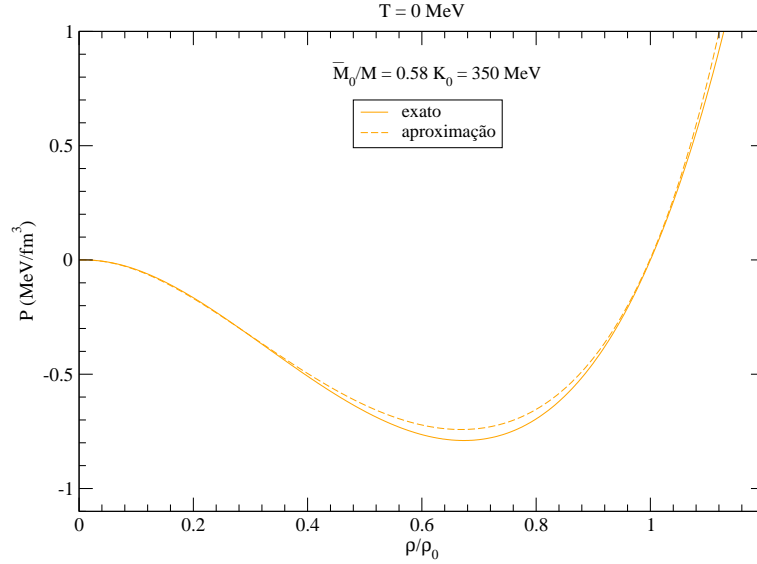


Figura 4.4:  $P \times \rho/\rho_0$  para  $\bar{M}_0/M = 0,58$  e  $K_0 = 350 \text{ MeV}$  em  $T = 0$ . A linha cheia representa o modelo de contato exato e a tracejada a aproximação  $\rho = \rho_s$ .

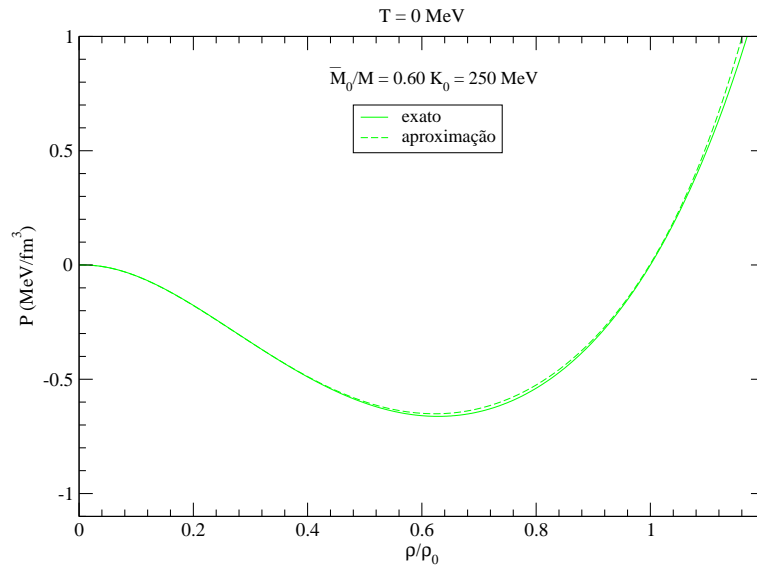


Figura 4.5:  $P \times \rho/\rho_0$  para  $\bar{M}_0/M = 0,60$  e  $K_0 = 250 \text{ MeV}$  em  $T = 0$ . A linha cheia representa o modelo de contato exato e a tracejada a aproximação  $\rho = \rho_s$ .

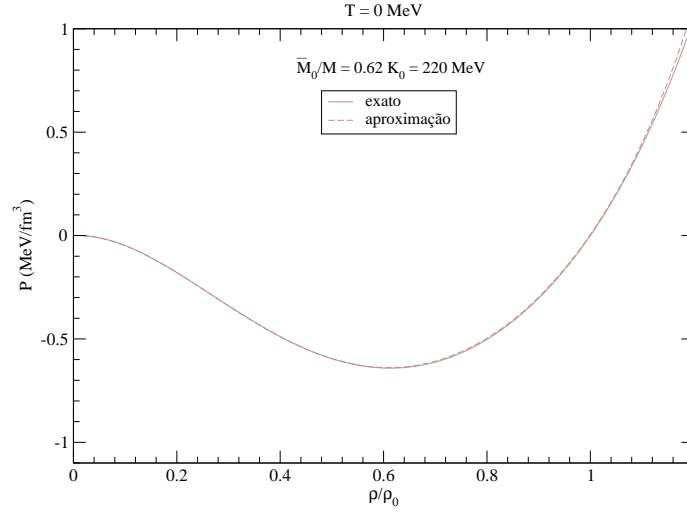


Figura 4.6:  $P \times \rho/\rho_0$  para  $\bar{M}_0/M = 0,62$  e  $K_0 = 220$  MeV em  $T = 0$ . A linha cheia representa o modelo de contato exato e a tracejada a aproximação  $\rho = \rho_s$ .

Foi comparada também a aproximação com o método exato, através dos gráficos da energia por nucleon como função da razão  $\rho/\rho_0$  para os diversos valores de  $\bar{M}_0/M$  e  $K_0$ . Esses gráficos estão dispostos nas figuras seguintes.

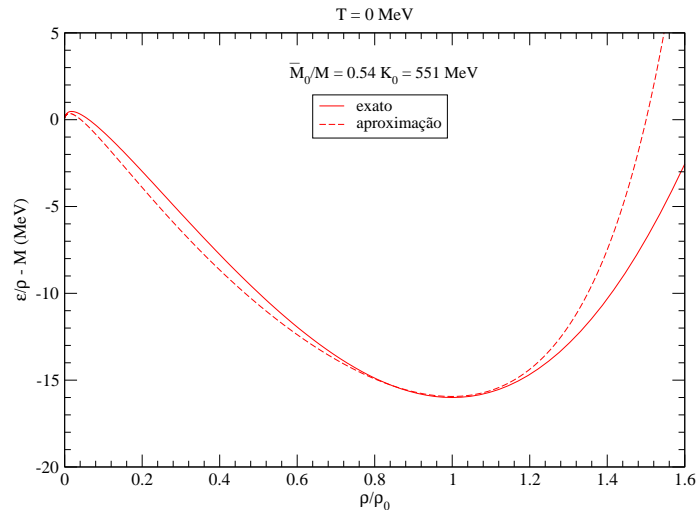


Figura 4.7:  $\mathcal{E}/\rho \times \rho/\rho_0$  para  $\bar{M}_0/M = 0,54$  e  $K_0 = 551$  MeV em  $T = 0$ . A linha cheia representa o modelo de contato exato e a tracejada a aproximação  $\rho = \rho_s$ .

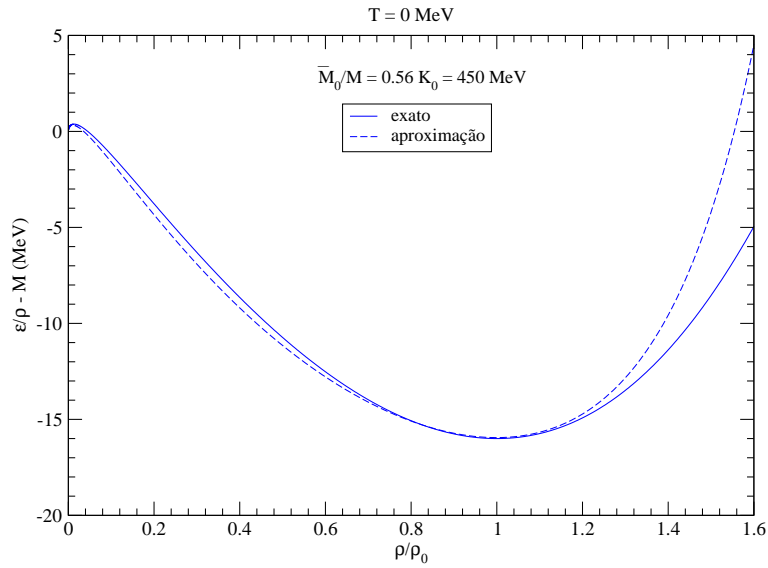


Figura 4.8:  $\mathcal{E}/\rho \times \rho/\rho_0$  para  $\bar{M}_0/M = 0,56$  e  $K_0 = 450$  MeV em  $T = 0$ . A linha cheia representa o modelo de contato exato e a tracejada a aproximação  $\rho = \rho_s$ .

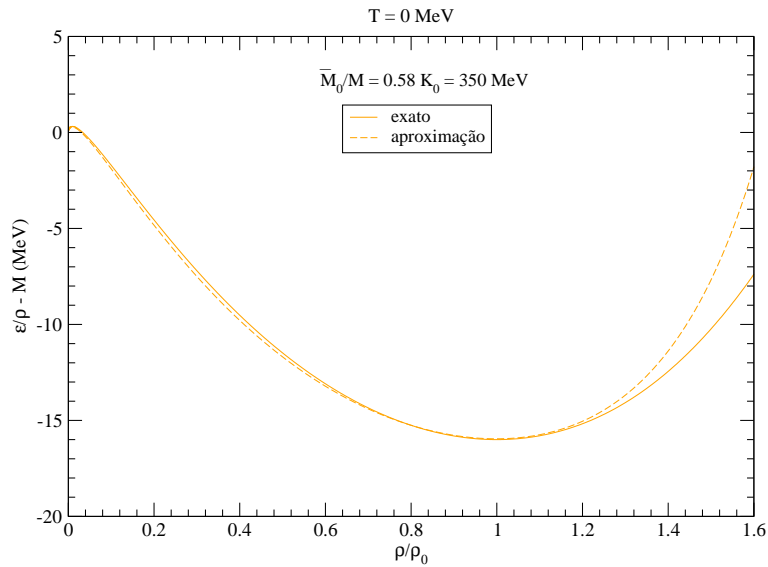


Figura 4.9:  $\mathcal{E}/\rho \times \rho/\rho_0$  para  $\bar{M}_0/M = 0,58$  e  $K_0 = 350$  MeV em  $T = 0$ . A linha cheia representa o modelo de contato exato e a tracejada a aproximação  $\rho = \rho_s$ .

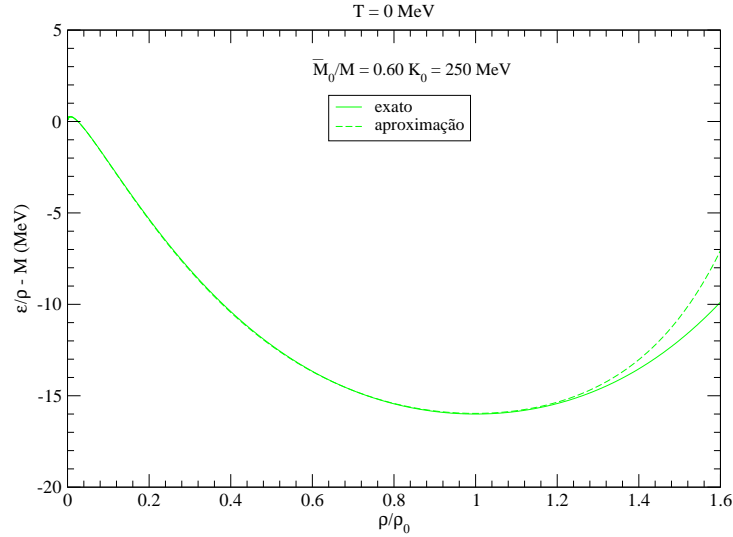


Figura 4.10:  $\mathcal{E}/\rho \times \rho/\rho_0$  para  $\bar{M}_0/M = 0,60$  e  $K_0 = 250$  MeV em  $T = 0$ . A linha cheia representa o modelo de contato exato e a tracejada a aproximação  $\rho = \rho_s$ .

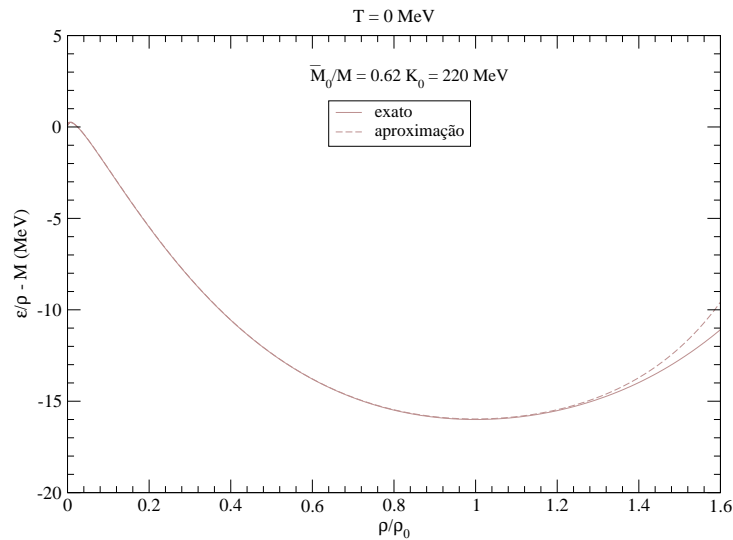


Figura 4.11:  $\mathcal{E}/\rho \times \rho/\rho_0$  para  $\bar{M}_0/M = 0,62$  e  $K_0 = 220$  MeV em  $T = 0$ . A linha cheia representa o modelo de contato exato e a tracejada a aproximação  $\rho = \rho_s$ .

Os gráficos anteriores indicam que quanto mais próximo da unidade é a razão  $\bar{M}_0/M$ , melhor é a aproximação, resultado coerente, já que  $\rho = \rho_s$  sugere fazer o limite não-relativístico do sistema e a razão  $\bar{M}_0/M = 1$  significa exatamente esse

limite. Como já foi mostrado pela equação (4.30), quando a massa efetiva do modelo é igual a  $M$  (massa real do nucleon) temos que (4.22) é a própria equação de Schrödinger. Veja novamente por (4.30) que  $\bar{M}_0/M = 1$  quando  $\Delta_0 = \alpha + \beta$ .

Outra quantidade comparada foi a razão  $\bar{M}/M$  como função de  $\rho/\rho_0$ . As próximas figuras mostram esses gráficos para os diferentes valores de  $\bar{M}_0/M$  e  $K_0$ .

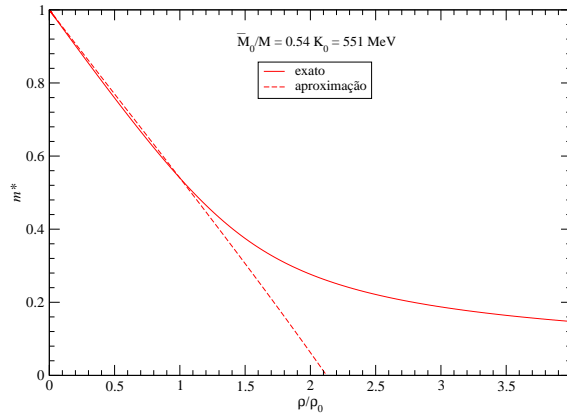


Figura 4.12:  $m^* \times \rho/\rho_0$  para  $T = 0$ . A linha cheia representa o modelo de contato exato onde  $m^* = M_0^*/M$  e a tracejada a aproximação  $\rho = \rho_s$ , onde  $m^* = \bar{M}_0/M$ . Em ambos  $m^* = 0,54$  e  $K_0 = 551 \text{ MeV}$ .

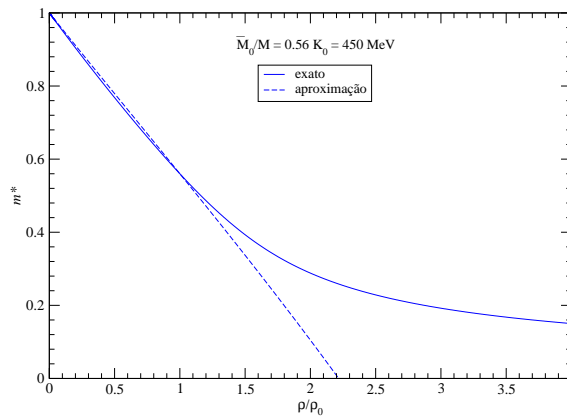


Figura 4.13:  $m^* \times \rho/\rho_0$  para  $T = 0$ . A linha cheia representa o modelo de contato exato onde  $m^* = M_0^*/M$  e a tracejada a aproximação  $\rho = \rho_s$ , onde  $m^* = \bar{M}_0/M$ . Em ambos  $m^* = 0,56$  e  $K_0 = 450 \text{ MeV}$ .

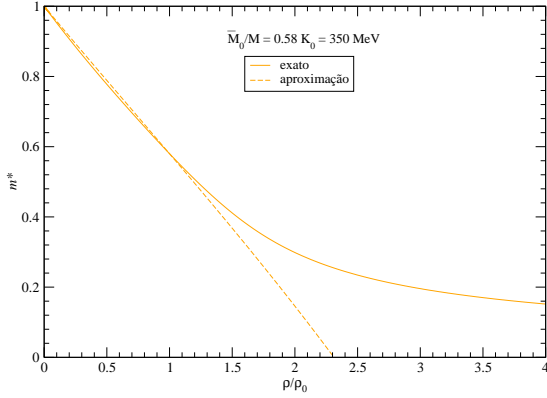


Figura 4.14:  $m^* \times \rho/\rho_0$  para  $T = 0$ . A linha cheia representa o modelo de contato exato onde  $m^* = M_0^*/M$  e a tracejada a aproximação  $\rho = \rho_s$ , onde  $m^* = \bar{M}_0/M$ . Em ambos  $m^* = 0,58$  e  $K_0 = 350 \text{ MeV}$ .

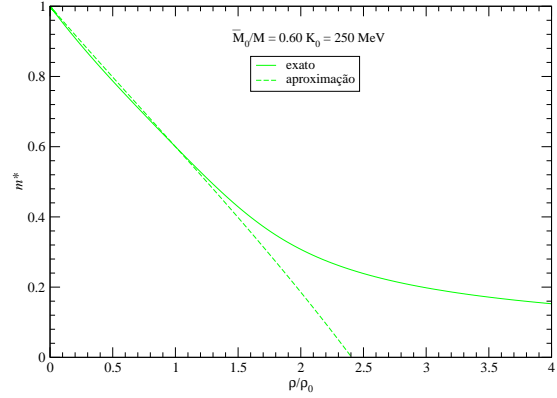


Figura 4.15:  $m^* \times \rho/\rho_0$  para  $T = 0$ . A linha cheia representa o modelo de contato exato onde  $m^* = M_0^*/M$  e a tracejada a aproximação  $\rho = \rho_s$ , onde  $m^* = \bar{M}_0/M$ . Em ambos  $m^* = 0,60$  e  $K_0 = 250 \text{ MeV}$ .

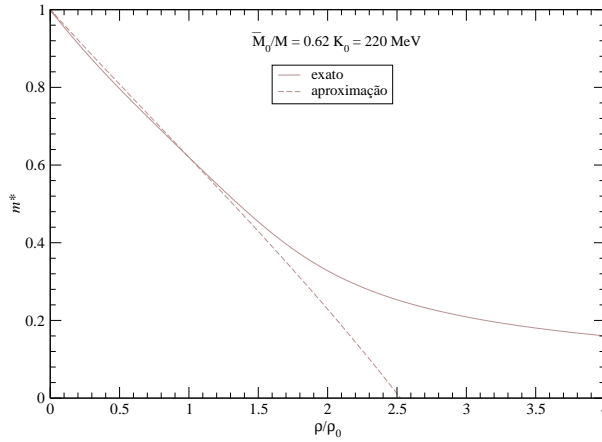


Figura 4.16:  $m^* \times \rho/\rho_0$  para  $T = 0$ . A linha cheia representa o modelo de contato exato onde  $m^* = M_0^*/M$  e a tracejada a aproximação  $\rho = \rho_s$ , onde  $m^* = \bar{M}_0/M$ . Em ambos  $m^* = 0,62$  e  $K_0 = 220 \text{ MeV}$ .

Em todos os casos a massa efetiva do modelo aproximado atinge valores negativos a partir de um certo valor da razão  $\rho/\rho_0$ , restringindo portanto a validade da

aproximação até esse ponto. Note que para o modelo de Walecka ( $m^* = 0,54$  e  $K_0 = 551 \text{ MeV}$ ) a região de validade vai até aproximadamente  $\rho/\rho_0 = 2,13$ . Tal região aumenta conforme o modelo torna-se cada vez menos relativístico, até o ponto onde a aproximação é válida até a região onde  $\rho/\rho_0 \simeq 2.52$  para o modelo em que  $m^* = 0,62$  e  $K_0 = 220 \text{ MeV}$ .

## Capítulo 5

# Correlação entre a Temperatura

## Crítica e Observáveis em $T = 0$

Matéria nuclear infinita é um modelo hipotético no qual o número de prótons e de nêutrons é considerado igual e os efeitos coulombiano e de superfície são desprezados. As forças nucleares, já discutidas anteriormente, todas, são capazes de prever a saturação da energia por nucleon do sistema para um certo valor de densidade, considerada de equilíbrio, onde a pressão hidrostática é nula. Nos diversos modelos e em temperatura nula, valores obtidos para a energia de ligação da matéria nuclear infinita, usualmente em torno de  $16 \text{ MeV}$ , são praticamente o dobro da energia de ligação por nucleon de um núcleo pesado, onde tanto a contribuição devida à repulsão dos prótons assim como os efeitos de superfície são incluídos.

Em temperatura finita, as propriedades nucleares são usualmente analisadas via equações de estado. Grande repulsão em curtas distâncias ( $\sim 0,6 \text{ fm}$ ) e atração em regiões típicas de troca de dois e um pión fazem as interações nucleon-nucleon “assemelharem-se” nas características básicas de forças que descrevem gases reais. As escalas de distância, energia e temperatura de sistemas de moléculas e da física nuclear são, evidentemente, diferentes. No entanto, quando se estuda tais sistemas em temperaturas finitas, ambos produzem assinaturas típicas de coexistência de fases líquida e de vapor até uma certa temperatura limite, chamada de crítica, onde as fases se unificam em apenas uma, puramente gasosa. Grosseiramente falando,



todos esses sistemas em uma aproximação de campo médio, exibem uma física classicamente explicada em modelos termodinâmicos com interações do tipo van der Waals.

Em física nuclear, a escala típica de energia de ligação por nucleon dos núcleos é de algumas unidades de  $MeV$ 's e portanto é razoável se imaginar que a temperatura crítica também se situe nesta faixa de energia. De fato, sabe-se hoje que emissão de Fragmentos de Massa Intermediários [36], curvas calóricas [37], expoentes críticos [38, 39] e fracionização de isospin [40-43] são considerados assinaturas importantes na evidência de uma transição de fase para núcleos quentes e conjecturam uma transição de fase para temperaturas entre 6 e 12  $MeV$ . Um grande número de cálculos teóricos para a matéria nuclear semi-infinita (neste caso com termo de superfície incorporado) prediz valores de  $T_c$  em uma faixa de 13 até 24  $MeV$  [44-53].

Assim como para o caso  $T = 0$ , onde a energia de ligação por nucleon da matéria nuclear infinita é praticamente o dobro da energia por nucleon para núcleos finitos; os valores de  $T_c$  previstos para a matéria nuclear infinita são também praticamente o dobro dos calculados para núcleos finitos.

A forma de se calcular a temperatura crítica dos modelos estudados até agora é a seguinte. As equações de estado fornecem a pressão como função das densidades escalar  $\rho_s$  e vetorial  $\rho$ , assim como da pressão cinética, obtida via uma distribuição de Fermi-Dirac. Esta última é uma função do potencial químico  $\mu$ , da massa efetiva  $m^*$  do nucleon e da temperatura  $T$ . Por sua vez,  $m^*$  é obtida de forma auto-consistente, por uma equação auxiliar que garante a minimização da energia com relação aos campos escalar e vetorial. Veja por exemplo, as equações (2.65) e (2.40).

Para se obter a coexistência de fases de sistemas termodinâmicos, é necessário satisfazer o critério de Gibbs, dado pelo seguinte conjunto de equações

$$P_1 = P_2 \quad (5.1)$$

$$\mu_1 = \mu_2 \quad e \quad (5.2)$$

$$T_1 = T_2, \quad (5.3)$$

onde os índices 1 e 2 referem-se às diferentes fases<sup>1</sup> (líquida e gasosa). Para valores de temperaturas abaixo da temperatura crítica, é possível encontrar solução para o conjunto de equações acima. A partir disto, pode-se calcular a temperatura crítica, ou seja, a temperatura na qual o núcleo apresenta uma fase termodinâmica bem definida e a partir da qual o sistema seja puramente gasoso. Geralmente nos modelos nucleares propostos, todo esse procedimento deve ser realizado numericamente, sendo muitas vezes complexo e tedioso.

Seria possível obter informação da temperatura crítica do sistema com os observáveis calculados para  $T = 0$ ?

Esta questão já foi colocada anteriormente por Kapusta e Lattimer [54, 55], que propuseram a validade da seguinte relação,

$$T_c = C \left( \frac{K_0}{m^*} \right)^{1/2} \rho_0^{1/3}, \quad (5.4)$$

onde  $K_0$ ,  $m^*$  e  $\rho_0$  são os parâmetros da matéria nuclear em temperatura nula e  $C$  é uma constante. Mais recentemente essa mesma proposição foi revisitada e analisada por Natowitz et al [56], que utilizando resultados de diversos trabalhos concluem por sua validade. De posse de um grande conjunto de modelos hadrônicos não lineares resolvemos então investigar ainda mais tal proposição. A razão para isso é que, caso válida, tal proposição é realmente importante por algumas razões. Primeiramente porque, tanto quanto sabemos, é a primeira relação que tenta conectar de forma direta os observáveis ainda em temperatura nula com a temperatura crítica do sistema. Mais ainda porque, estabelecendo uma correlação entre regimes tão distintos ajudaria em muito a clarear, no caso limitar, a arbitrariedade dos parâmetros ajustáveis. Caso viesse a se conhecer de fato a temperatura crítica de núcleos finitos, a relação acima, estreitaria ainda mais as incertezas hoje conhecidas, seja para a incompressibilidade nuclear, seja para o valor da massa efetiva do nucleon, ainda obtida de forma bastante indireta. Isso tudo, ainda na fase de ajuste dos parâmetros que se dá em  $T = 0$ .

---

<sup>1</sup>Em sistemas mistos, onde consideramos dois constituintes (no caso de sistemas nucleares, prótons e nêutrons) a equação (5.2) deverá ser resolvida para os dois componentes simultaneamente.

Para testar a validade da equação (5.4), foi utilizada a equação de estado, dada por (2.41) do modelo de Walecka não-linear e a partir daí construiu-se o gráfico  $T_c \times (K_0/m^*)^{1/2} \rho_0^{1/3}$  (disposto na figura 5.1), onde foi usado  $\rho_0 = 0,15 \text{ fm}^{-3}$  para a densidade de saturação. A incompressibilidade dos modelos restringiu-se ao intervalo de  $180 - 300 \text{ MeV}$ .

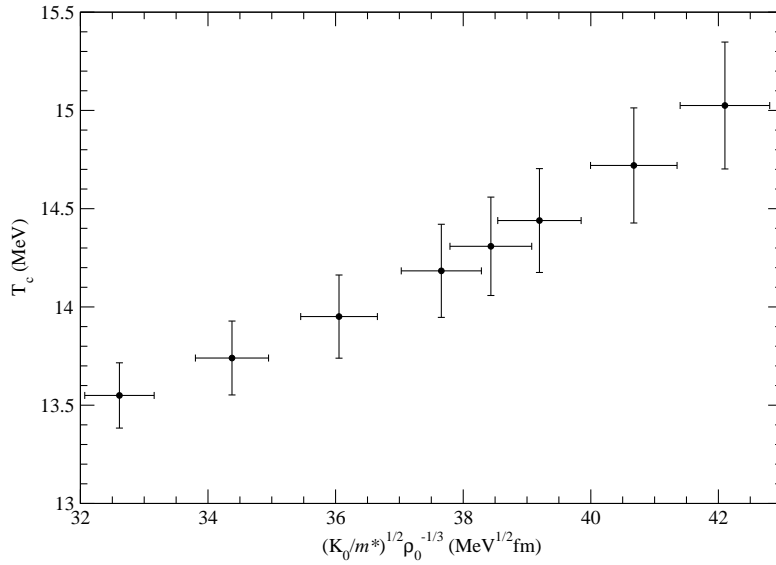


Figura 5.1: Temperatura crítica de vários modelos nucleares em função da quantidade  $(K_0/m^*)^{1/2} \rho_0^{1/3}$ . Os pontos da esquerda para a direita, representam os valores da incompressibilidade  $K = 180, 200, 220, 240, 250, 260, 280$  e  $300 \text{ MeV}$ .

A barra de erro mostrada no gráfico foi gerada a partir dos valores extremos da massa efetiva do nucleon, que reproduzem os desdobramentos spin-órbita em núcleos finitos. Esses extremos são dados por  $m^* = 0,58$  e  $m^* = 0,62$ . O método para o cálculo da barra de erro foi o seguinte: a temperatura crítica e  $(K_0/m^*)^{1/2} \rho_0^{1/3}$  foram calculados em um valor fixo de  $\rho_0$  e  $K_0$  para os dois valores de  $m^*$ , com isso os pontos apresentados na figura 5.1 são obtidos pela média entre esses valores calculados.

O cálculo das temperaturas críticas dos modelos relativísticos utilizados são usualmente feitos numericamente através de métodos trabalhosos, como já mencionado. Nesse trabalho foi proposto um método numérico relativamente simples para o cál-

culo da temperatura crítica de tais modelos nucleares. Esse método está descrito na seção D.2 do apêndice D.

Com o gráfico da figura 5.1 é possível afirmar que a relação proposta em (5.4) é válida para os modelos utilizados.

Além da temperatura, alguns outros parâmetros críticos ( $\rho_c$ ,  $P_c$ ,  $m_c^* = \frac{M_c^*}{M}$  e o fator de compressibilidade  $\frac{P_c}{\rho_c T_c}$ ) do conjunto de modelos nucleares abordados foram também obtidos, com o propósito de se obter alguma outro tipo de correlação. Os resultados para os vários valores de incompressibilidade, todos dentro da mesma faixa de incerteza definida pelos valores extremos da massa efetiva em  $T = 0$ , estão dispostos na tabela 5.1 seguinte.

$K_0$ (MeV)	$m^*$ (MeV)	$\rho_c$ ( $fm^{-3}$ )	$P_c$ (MeV. $fm^{-3}$ )	$m_c^*$	$\frac{P_c}{\rho_c T_c}$	$m_c^* \frac{P_c}{\rho_c T_c}$
180	0,58	0,0398	0,152	0,879	0,290	0,255
	0,62	0,0405	0,161	0,886	0,290	0,257
200	0,58	0,0406	0,160	0,875	0,291	0,255
	0,62	0,0420	0,171	0,882	0,292	0,258
220	0,58	0,0421	0,169	0,871	0,292	0,255
	0,62	0,0437	0,182	0,878	0,294	0,258
240	0,58	0,0437	0,179	0,867	0,294	0,255
	0,62	0,0453	0,194	0,874	0,297	0,259
250	0,58	0,0446	0,184	0,865	0,294	0,254
	0,62	0,0461	0,200	0,872	0,298	0,260
260	0,58	0,0453	0,190	0,863	0,296	0,255
	0,62	0,0470	0,207	0,870	0,299	0,260
280	0,58	0,0471	0,202	0,858	0,297	0,255
	0,62	0,0488	0,222	0,866	0,303	0,262
300	0,58	0,0488	0,216	0,854	0,301	0,257
	0,62	0,0505	0,238	0,862	0,307	0,264

Tabela 5.1: Parâmetros críticos para os diversos modelos nucleares dentro da faixa de  $0,58 \leq m^* \leq 0,62$ .

Note que aumentando a incompressibilidade, para um  $m^*$  fixo como por exemplo 0,58, temos uma diminuição no valor de  $m_c^*$  e simultaneamente um aumento no valor do fator de compressibilidade, mantendo o produto entre essas duas grandezas aproximadamente constante. A última coluna da tabela anterior mostra esse produto. Isso mostra que há outra correlação entre os valores dos dois observáveis em  $T = 0$  e, agora, entre os parâmetros críticos  $m_c^*$  e  $\frac{P_c}{\rho_c T_c}$ .

Para analisar esse comportamento, construímos o gráfico de  $m_c^* \frac{P_c}{\rho_c T_c}$  como função de  $(K_0/m^*)^{1/2} \rho_0^{1/3}$ , quantidade usada para estudar a correlação entre os observáveis de  $T = 0$  e a temperatura crítica. Esse comportamento é ilustrado através da figura 5.2 onde a barra de erro, como no caso anterior, é dada pelos extremos da massa efetiva.

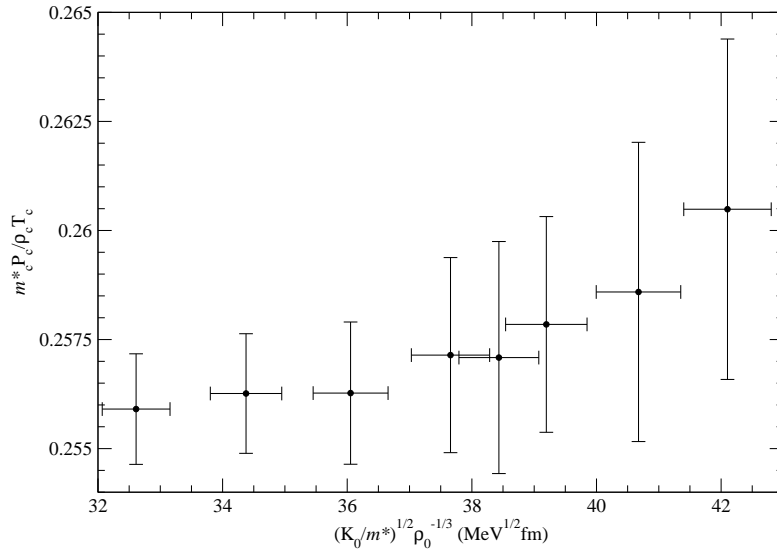


Figura 5.2:  $m_c^* P_c / \rho_c T_c$  como função da quantidade  $(K_0/m^*)^{1/2} \rho_0^{1/3}$ .

O gráfico acima nos permite concluir, dentro da faixa de incerteza dada pelos valores extremos da massa efetiva, que o valor da quantidade  $m_c^* \frac{P_c}{\rho_c T_c}$  pode, realmente, ser dado por uma constante. Uma inspeção no gráfico acima permite aproximar um valor de 0,257 para  $m_c^* \frac{P_c}{\rho_c T_c}$ .

Isso mostra que essas duas grandezas não são independentes, uma vez encontrado, por exemplo, o valor do fator de compressibilidade do sistema, a massa efetiva na densidade crítica podeira ser estimada, na classe dos modelos não-lineares estudados.

# Conclusões

Nessa dissertação foi realizado um estudo dos modelos hadrônicos relativísticos de alcance zero, representado por um modelo que contém termos cúbicos e quárticos de auto-interação fermiônica, juntamente com os modelos de alcance finito, descritos pelo modelo de Walecka não-linear. A idéia principal de todo o estudo foi obter os modelos de contato a partir dos modelos de alcance finito, compará-los e verificar até que ponto os modelos de contato são válidos para a descrição da matéria nuclear infinita. Serão destacados agora, alguns comentários e pontos importantes acerca do nosso trabalho.

- Um ponto importante foi obter de forma rigorosa o modelo hadrônico de contato com o termo quadrático de auto-interação fermiônica, a partir do modelo de Walecka que é baseado na troca de mésons (escalar e vetorial). O procedimento tomado foi o de tomar o limite hipermassivo dos mésons da teoria de Walecka e, com o uso de uma translação apropriada nos campos mesônicos, utilizar o funcional gerador para obter a densidade lagrangiana que descreve o modelo de contato. Esse procedimento tem o embasamento de que a física não é alterada quando se faz uma translação nos campos.

- Ainda mantendo o mesmo procedimento, foi gerada a densidade lagrangiana que descreve o modelo de contato não-linear (que contém os termos cúbicos e quárticos de auto-interação fermiônica). Porém, o modelo usado como base e ponto de partida não foi o modelo de Walecka não-linear. Era natural esperar que esse fosse o modelo gerador do modelo de contato não-linear pelo fato de apresentar uma estrutura muito parecida, contendo os termos cúbicos e quárticos de auto-interação

dos campo mesônicos. No entanto, foi mostrado rigorosamente que o modelo gerador deve ser na verdade, o modelo de Walecka não-linear alterado por termos que combinam os campos  $\phi$  e  $\bar{\psi}\psi$ .

- As equações de estado, em temperatura nula e finita, do modelo de contato não-linear foram obtidas via aproximação de campo-médio e os parâmetros livres foram ajustados de modo a reproduzir os valores, já conhecidos experimentalmente, da densidade de saturação, energia de ligação por partícula, incompressibilidade e massa efetiva do nucleon. Foi mostrado também que o modelo de Walecka não-linear modificado quando tratado somente via aproximação de campo-médio, isto é, mesmo não levando em consideração o limite hipermassivo dos mésons e o uso das translações dos campos mesônicos, produz as mesmas equações de estado, em temperatura nula, do modelo de contato não-linear. Isso é perfeitamente justificado, na medida que no modelo WNL modificado, na aproximação de campo-médio, fornece equações de estado que dependem da razão entre as constantes de acoplamento e as massas mesônicas, ou seja, o valor das contantes de acoplamento permanecem arbitrários. Podemos então pensar que o limite hipermassivo foi tomado e o valor das contantes foi da mesma forma alterado para que a razão permanecesse constante.

- Estudamos também os modelos hadrônicos descritos pelo modelo de Walecka não-linear, através da obtenção de suas equações de estado (em temperatura nula e finita), massa efetiva e incompressibilidade. Esse é um modelo bastante usado em física nuclear para a descrição da matéria nuclear infinita e núcleos finitos. Sua estrutura é muito semelhante a do modelo de alcance zero mencionado anteriormente.

- Os modelos de contato não-linear e WNL foram comparados no regime de temperatura nula e finita. No primeiro regime, foram analisados o comportamento de algumas grandezas termodinâmicas fundamentais na descrição da matéria nuclear infinita. Gráficos da pressão como função da razão  $\rho/\rho_0$  e da energia de ligação por partícula como função da mesma razão foram gerados para diversos modelos nucleares, ou seja, foram traçados para diferentes valores de massa efetiva e incompressibilidade. A massa efetiva como função de  $\rho/\rho_0$  também foi analisada e

comparada em ambos os modelos hadrônicos (contato e WNL). Tratando-se do sistema em temperatura finita, repetimos os mesmos gráficos para alguns valores de temperatura e construímos outros mais. A energia livre de Helmholtz passa a ser importante quando o sistema encontra-se em  $T \neq 0$  e por esse motivo incluímos os gráficos dessa grandeza, também como função de  $\rho/\rho_0$ , para alguns valores de  $T$ . Os resultados mostram a descrição dada pelo modelo de Walecka não-linear é praticamente a mesma que a dada pelo modelo de contato.

- Como forma de interpretar esses resultados, foram comparados os parâmetros livres dos dois modelos, o de contato e modelo WNL. Como discutido no capítulo 3, isso foi um modo de verificar o quanto o modelo de Walecka não-linear modificado difere do modelo WNL. As razões entre as constantes de mesma natureza de ambos os modelos mostraram-se muito próximas da unidade, como pode ser visto na tabela 3.3. Isso significa que os termos adicionados à densidade lagrangiana do modelo WNL são necessários para que se obtenha formalmente o modelo de contato não-linear, porém são numericamente desprezíveis, ou seja, mostramos na verdade (via modelo de contato não-linear) que o modelo de Walecka não-linear modificado é aproximadamente igual ao modelo WNL.

- Através da análise de cada parcela da energia por partícula, calculada na densidade de saturação, foi observado que as contribuições referentes aos termos não-lineares são muito pequenas quando comparadas aos demais, isto é, contribuem muito pouco para a energia de ligação por nucleon da matéria nuclear. Esse fato ocorre tanto no modelo de contato não-linear quanto no modelo WNL. Outro fato curioso é a troca de sinal de um modelo em relação ao outro nos valores dos termos referentes aos auto-acoplamentos cúbicos e quárticos.

- Os valores dos parâmetros críticos ( $T_c$ ,  $\rho_c$ ,  $P_c$ ,  $m_c^*$  e  $\frac{P_c}{\rho_c T_c}$ ) referentes aos modelos nucleares baseados no modelo de contato não-linear mostraram-se também muito parecidos com os valores obtidos para os modelos de alcance finito (modelos do tipo WNL).



- Diante de todo o estudo feito dos modelos hadrônicos relativísticos de alcance zero, descritos pelo modelo de contato de auto-interações cúbicas e quárticas, foi possível concluir que tal modelo é bastante eficaz na descrição da matéria nuclear infinita. Possivelmente encontraríamos a mesma eficácia no tratamento de núcleos finitos.

- Um caso particular do modelo de contato não-linear, que trata de uma aproximação não-relativística para o modelo, foi apresentado e estudado no capítulo 4 da dissertação. Embora não-relativística, a aproximação tomada ainda deixa o modelo com conteúdos essencialmente relativísticos. Foi mostrado que as informações relativísticas do modelo estão contidas na massa efetiva do nucleon, dada pela equação (4.25), ou seja, se a massa efetiva fosse simplesmente igual a massa de repouso do nucleon, teríamos um modelo puramente não-relativístico. A grande vantagem dessa aproximação, em relação ao modelo exato, é que as equações de estado, massa efetiva e incompressibilidade podem ser todas resolvidas analiticamente. Os resultados do modelo aproximado mostraram-se coerentes, na medida em que quanto mais próximo da unidade é a razão  $\bar{M}/M$ , ou seja, quanto menos relativístico é o modelo, melhor é a aproximação, o que pode ser rapidamente verificado através das figuras 4.2 a 4.11. A região de validade da aproximação também foi verificada e através das figuras 4.12 a 4.16 mostrou-se que o limite em que  $m^*$  torna-se negativa é maior quando o modelo é menos relativístico, ou seja, para os casos estudados,  $\rho/\rho_0 \simeq 2,52$  quando o modelo é tal que  $m^* = 0,62$  e  $K_0 = 220 \text{ MeV}$ .

- O estudo de correlações entre os observáveis da física nuclear em temperatura nula e os parâmetros críticos do sistema foi feito no capítulo 5. A relação (5.4) proposta em [54, 55] foi testada para diversos modelos nucleares, utilizando como base o modelo WNL. Os resultados, obtidos dentro do intervalo de valores da massa efetiva que reproduz satisfatoriamente o desdobramento spin-órbita de núcleos finitos ( $0,58 < m^* < 0,62$ ), mostraram a validade de tal relação (figura 5.1). Outra correlação observada, utilizando os mesmos modelos nucleares já citados, foi que a quantidade  $m_c^* \frac{P_c}{\rho_c T_c}$  mostra-se aproximadamente constante.

- No apêndice D, foi desenvolvido um método numérico para a resolução das integrais que aparecem nas equações de estado dos modelos de contato não-linear e WNL, quando tratados no regime de temperatura finita. O método usual (quadratura de Gauss-Legendre) apresenta problemas de convergência em temperaturas muito baixas ( $T < 5 \text{ MeV}$ ), necessitando de muitos pontos de Gauss para que o resultado convirja satisfatoriamente. O método desenvolvido mostrou contornar de forma bastante eficaz esse problema, isto é, convergências que eram alcançadas com por exemplo 128 pontos de Gauss no método usual, são alcançadas com apenas 22 na região de  $T < 5 \text{ MeV}$ . Uma comparação que mostra a eficiência desse novo método, pode ser vista nas tabelas D.1 e D.2.

# Apêndice A

## Notações e Convenções

Nesse apêndice serão apresentadas as notações e convenções utilizadas ao longo da dissertação. As convenções usadas são as de Bjorken e Drell [57] e utilizamos o sistema natural de unidades  $\hbar = c = k_B = 1$ . Pode-se escrever os quadri-vetores contravariantes e covariantes como

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) \quad \text{e} \quad (\text{A.1})$$

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (t, -x, -y, -z). \quad (\text{A.2})$$

A relação entre essas duas quantidades é expressa por

$$x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu, \quad (\text{A.3})$$

onde a soma corre sobre todos os índices repetidos, sendo  $g_{\mu\nu}$  o tensor métrico no espaço de Minkowski dado por

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Os índices gregos referem-se às componentes espaço-tempo no espaço de Minkowski, assumindo valores  $\mu, \nu = \{0, 1, 2, 3\}$ . Os índices latinos correspondem às componentes espaciais do vetor ordinário, sendo  $i, j = \{1, 2, 3\}$ .

Para as derivadas covariante e contravariante temos

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_0, \partial_i), \quad (\text{A.5})$$

$$\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = (\partial^0, -\partial^i), \quad (\text{A.6})$$

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta = \square. \quad (\text{A.7})$$

O produto escalar de dois quadri-vetores assume a forma

$$\begin{aligned} a \cdot b &= a^\mu b_\mu \\ &= g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu \\ &= a_0 b_0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}, \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

onde os símbolos em negrito significam um vetor no espaço tridimensional.

A equação de continuidade na forma covariante é escrita como

$$\begin{aligned} \partial_\mu J^\mu &= \partial_0 J^0 + \partial_i J^i \\ &= \frac{\partial J^0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Para uma partícula livre de massa  $M$ , a equação de Dirac é dada por

$$(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta M)\psi(x, t) = \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t}, \quad (\text{A.10})$$

onde  $\psi(x, t)$  é um vetor de quatro componentes sendo  $\boldsymbol{\alpha}$  e  $\beta$  matrizes de traço nulo.

Escolhemos a representação usual

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

onde as componentes de  $\boldsymbol{\sigma}$  são matrizes de Pauli  $2 \times 2$  e  $I$  é a matriz identidade, ou seja

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \text{e} \quad I &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

As matrizes  $\alpha^i$  e  $\beta$  possuem as propriedades

$$\alpha^i \alpha^j + \alpha^j \alpha^i = \{\alpha^i, \alpha^j\} = 2g^{ij} \quad (\text{A.13})$$

$$\beta \alpha^i + \alpha^i \beta = \{\beta, \alpha^i\} = 2\delta^{ij} \quad (\text{A.14})$$

$$(\alpha^i)^2 = (\beta)^2 = 1 \quad (\text{A.15})$$

Na forma covariante a equação de Dirac (A.10) pode ser escrita como

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu - M)\psi(x, t) = 0, \quad (\text{A.16})$$

onde

$$\gamma_\mu \partial^\mu = \gamma_0 \partial^0 + \gamma_i \partial^i. \quad (\text{A.17})$$

As matrizes  $\gamma^\mu$  são definidas por

$$\gamma^0 = \beta, \quad (\text{A.18})$$

$$\gamma^i = \beta \alpha^i. \quad (\text{A.19})$$

Essas matrizes obedecem às relações de anti-comutação

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (\text{A.20})$$

com

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0. \quad (\text{A.21})$$

Na representação de Dirac-Pauli as matrizes dadas em (A.18) e (A.19) assumem a seguinte forma

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.22})$$

# Apêndice B

## Equação do Campo Fermiônico para a Matéria Nuclear

Quando se trata a matéria nuclear, a equação de movimento para o campo fermiônico que representa os nucleons geralmente tem o seguinte formato:

$$[\gamma^\mu(i\partial_\mu - av_\mu) - (M - b\sigma)]\psi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\text{B.1})$$

onde  $v_\mu$  é um campo vetorial,  $\sigma$  um campo escalar e  $a$  e  $b$  são constantes.

Tal equação pode ser interpretada como a equação de um férmion livre (equação de Dirac), onde seu quadri-momento é modificado pelo vetor  $v_\mu$  e sua massa pelo escalar  $b\sigma$ . Para simplificar a resolução dessa equação, usa-se a aproximação de campo médio, que consiste em substituir os campos  $v_\mu$  e  $\sigma$  pelos seus respectivos valores médios  $\langle v_\mu \rangle = v_0$  e  $\langle \sigma \rangle$ .

Com isso (B.1) torna-se

$$[i\gamma^\mu\partial_\mu - a\gamma^0v_0 - M^*]\psi = 0, \quad (\text{B.2})$$

com  $M^* \equiv M - \langle \sigma \rangle$  sendo a massa efetiva do férmion.

Admitindo que a solução desta equação é uma onda plana do tipo

$$\psi(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{k}, \lambda)e^{-ik_\mu x^\mu}, \quad (\text{B.3})$$

---

<sup>1</sup>Aqui usam-se que as componentes espaciais do vetor  $v_\mu$  são nulas nessa aproximação.

onde  $u(\mathbf{k}, s)$  é um spinor de vetor de onda  $\mathbf{k}$  e estado de polarização de spin  $\lambda$ , pode-se inseri-la em (B.2), resultando em

$$(\gamma^\mu k_\mu - a\gamma^0 v_0 - M^*)u(\mathbf{k}, \lambda) = 0. \quad (\text{B.4})$$

Multiplicando essa equação pela matriz  $\beta$ , à esquerda e usando  $\alpha^i = \beta\gamma^i$ , obtém-se

$$(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{k} + \beta M^*)u = (k_0 - av_0)u \quad (\text{B.5})$$

$$(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{k} + \beta M^*)u \equiv E^*u. \quad (\text{B.6})$$

Pela estrutura dessa equação, temos  $E^* = \pm(k^2 + M^{*2})^{1/2}$ , onde o sinal positivo está associado à partículas e o negativo à anti-partículas. Como  $k_0 = E$ , a energia do nucleon é dada por:

$$E = av_0 \pm (k^2 + M^{*2})^{1/2}, \quad (\text{B.7})$$

ou seja, a componente  $v_0$  realiza um deslocamento no espectro de energia.

## B.1 Densidades na aproximação de campo médio

Na aproximação de campo médio, as quantidades  $\bar{\psi}\psi$  e  $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi$  são substituídas pelos seus respectivos valores médios  $\rho_s = \langle \bar{\psi}\psi \rangle$  e  $\rho = \langle \bar{\psi}\gamma_0\psi \rangle$ . Para o cálculos dessas grandezas será usada uma importante relação, demonstrada a seguir.

Tomando o adjunto da equação (B.6), temos

$$u^\dagger(\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{k} + \beta M^*) = E^*u^\dagger, \quad (\text{B.8})$$

onde as propriedades  $\alpha_i^\dagger = \alpha_i$  e  $\beta^\dagger = \beta$  foram utilizadas. Multiplicando (B.6) por  $u^\dagger\beta$  pela esquerda e (B.8) por  $\beta u$  pela direita obtém-se

$$u^\dagger\beta\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{k}u + u^\dagger u M^* = u^\dagger\beta u E^* \quad (\text{B.9})$$

$$u^\dagger\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{k}\beta u + u^\dagger u M^* = u^\dagger\beta u E^*. \quad (\text{B.10})$$

Como  $\{\beta, \alpha_i\} = 0$  e  $u^\dagger\beta u = u^\dagger\gamma_0 u = \bar{u}u$ , somando (B.9) e (B.10) chega-se ao seguinte resultado

$$\bar{u}u = \frac{M^*}{E^*} u^\dagger u. \quad (\text{B.11})$$

Ao usar a solução de onda plana do spinor  $\psi$  para anti-partículas, dada por

$$\psi(\mathbf{x}, t) = v(\mathbf{k}, \lambda)e^{ik_\mu x^\mu}, \quad (\text{B.12})$$

chega-se a

$$\bar{v}v = -\frac{M^*}{E^*} v^\dagger v. \quad (\text{B.13})$$

A expansão em modos do spinor  $\psi(\mathbf{x}, t)$ , levando em consideração as soluções associadas às anti-partículas e seu adjunto são respectivamente

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k [a_{\mathbf{k},\lambda} u(\mathbf{k}, \lambda)e^{-ik_\mu x^\mu} + b_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger v(\mathbf{k}, \lambda)e^{ik_\mu x^\mu}] \quad \text{e} \quad (\text{B.14})$$

$$\psi^\dagger(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k [a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger u^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)e^{ik_\mu x^\mu} + b_{\mathbf{k},\lambda} v^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)e^{-ik_\mu x^\mu}], \quad (\text{B.15})$$

portanto

$$\rho = \langle \bar{\psi} \gamma_0 \psi \rangle = \langle 0 | \psi^\dagger \psi | 0 \rangle \quad (\text{B.16})$$

$$= \langle 0 | \int d^3x \psi^\dagger \psi | 0 \rangle \quad (\text{B.17})$$

$$= \langle 0 | \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k (a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k},\lambda} + b_{\mathbf{k},\lambda} b_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger) | 0 \rangle \quad (\text{B.18})$$

$$= \langle 0 | \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k (a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k},\lambda} - b_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger b_{\mathbf{k},\lambda}) | 0 \rangle \quad (\text{B.19})$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k (N_p - N_a), \quad (\text{B.20})$$

com  $N_p$  e  $N_a$  sendo o número de partículas e anti-partículas respectivamente <sup>2</sup>.

Pode-se ainda utilizar uma outra aproximação que despreza todos os estados de anti-partículas. Isso fornece então

$$\rho = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int d^3k \quad (\text{B.21})$$

$$= \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} k^2 dk \quad (\text{B.22})$$

$$= \frac{\gamma}{6\pi^2} k_F^3 \quad (\text{B.23})$$

onde  $\gamma$  é o número de partículas existente em cada nível de energia. Para a matéria nuclear  $\gamma = 4$ .

---

<sup>2</sup>Nos cálculos, usa-se a representação integral da função delta de Dirac, a relação de comutação entre os operadores de criação e aniquilação para as anti-partículas e a normalização  $u^\dagger u = v^\dagger v = 1$



Cálculo análogo é feito para a densidade escalar. Temos que

$$\rho_s = \langle \bar{\psi}\psi \rangle = \langle 0 | \bar{\psi}\psi | 0 \rangle \quad (\text{B.24})$$

$$= \langle 0 | \int d^3x \bar{\psi}\psi | 0 \rangle \quad (\text{B.25})$$

$$= \langle 0 | \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{M^*}{E^*} (a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k},\lambda} - b_{\mathbf{k},\lambda} b_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger) | 0 \rangle \quad (\text{B.26})$$

$$= \langle 0 | \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{M^*}{E^*} (a_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger a_{\mathbf{k},\lambda} + b_{\mathbf{k},\lambda}^\dagger b_{\mathbf{k},\lambda}) | 0 \rangle \quad (\text{B.27})$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{M^*}{E^*} (N_p + N_a) , \quad (\text{B.28})$$

onde as relações (B.11) e (B.13) foram usadas. Novamente desprezando as anti-partículas do sistema, chega-se em

$$\rho_s = \frac{\gamma}{(2\pi)^3} \int \frac{M^*}{E^*} d^3k \quad (\text{B.29})$$

$$= \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^{k_F} \frac{M^*}{(k^2 + M^{*2})^{1/2}} k^2 dk \quad (\text{B.30})$$

$$= \frac{\gamma M^*}{4\pi^2} \left\{ k_F (k_F^2 + M^{*2})^{1/2} - M^{*2} \ln \left[ \frac{k_F + (k_F^2 + M^{*2})^{1/2}}{M^*} \right] \right\} . \quad (\text{B.31})$$

# Apêndice C

## Relações Termodinâmicas

### C.1 Relação entre o equilíbrio hidrostático e os extremos de $\mathcal{E}/\rho$

A energia livre por volume de um sistema termodinâmico definida por  $f = \frac{F}{V}$ , onde  $F = E - TS$ , tem sua derivada em relação a densidade dada por<sup>1</sup>

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \rho} &= \frac{\partial(F/V)}{\partial(N/V)} = \frac{\partial(F/V)}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial(N/V)} \\ &= - \left( \frac{1}{V} \frac{\partial F}{\partial V} - \frac{F}{V^2} \right) \frac{V^2}{N} \\ &= \frac{V}{N} \left( - \frac{\partial F}{\partial V} \right) + \frac{F}{N} \\ &= \frac{P + f}{\rho},\end{aligned}\tag{C.1}$$

já que  $P = -\frac{\partial F}{\partial V}$ . Quando o sistema encontra-se no equilíbrio hidrostático, ou seja, quando  $P(\rho_0) = 0$  temos então que

$$\left. \frac{\partial f}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} = \frac{f(\rho_0)}{\rho_0}.\tag{C.2}$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial(f/\rho)}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} - \frac{f}{\rho^2}\tag{C.3}$$

---

<sup>1</sup>Na verdade essa derivada é o próprio potencial químico do sistema, já que  $\mu = \frac{\partial F}{\partial N}$ .

e por (C.2), quando a pressão é nula,

$$\left. \frac{\partial(f/\rho)}{\partial\rho} \right|_{\rho=\rho_0} = 0 \quad (\text{C.4})$$

mostrando assim que a função  $f/\rho$  possui extremos nos pontos de densidades que anulam a pressão. Em outras palavras, usar a condição (C.4) já implica assumir que  $P(\rho_0) = 0$ .

Em sistemas onde a temperatura nula, onde  $F = E$ , chega-se a partir dos resultados acima em

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\rho} = \frac{P + \mathcal{E}}{\rho}, \quad (\text{C.5})$$

$$\frac{\partial(\mathcal{E}/\rho)}{\partial\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial\mathcal{E}}{\partial\rho} - \frac{\mathcal{E}}{\rho^2} \quad (\text{C.6})$$

e conseqüentemente verifica-se que quando  $P(\rho_0) = 0$  temos

$$\left. \frac{\partial(\mathcal{E}/\rho)}{\partial\rho} \right|_{\rho=\rho_0} = 0. \quad (\text{C.7})$$

Portanto a função que apresenta extremos é  $\mathcal{E}/\rho$ . No caso da matéria nuclear a densidade de equilíbrio hidrostático é dada por  $\rho_0 = 0,15 \text{ fm}^{-3}$  e a função  $\mathcal{E}/\rho - M$ , onde  $M$  é a massa do nucleon, apresenta um mínimo em  $-16 \text{ MeV}$ .

## C.2 Expressões para a incompressibilidade

A incompressibilidade isotérmica de sistemas termodinâmicos, dada por

$$K_T = 9 \left[ \rho^2 \frac{\partial^2(f/\rho)}{\partial\rho^2} + 2\rho \frac{\partial(f/\rho)}{\partial\rho} \right] \quad (\text{C.8})$$

pode ser escrita de formas diferentes. Serão demonstradas agora algumas dessas expressões.

Temos que

$$\frac{\partial(f/\rho)}{\partial\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial\rho} - \frac{f}{\rho^2} \quad \text{e} \quad (\text{C.9})$$

$$\frac{\partial^2(f/\rho)}{\partial\rho^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 f}{\partial\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial f}{\partial\rho} + \frac{2f}{\rho^3}, \quad (\text{C.10})$$

logo multiplicando (C.9) por  $2\rho$  e (C.10) por  $\rho^2$  temos, por (C.8), que a incompressibilidade também pode ser escrita como

$$K_T = 9\rho \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} . \quad (\text{C.11})$$

Porém,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{P+f}{\rho} \right) \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

$$= \frac{1}{\rho} \frac{\partial(P+f)}{\partial \rho} - \frac{P+f}{\rho^2} \quad (\text{C.13})$$

onde foi usado (C.1). Sendo assim, por (C.11), chega-se em outra expressão bastante útil para a incompressibilidade dada por

$$K_T = 9 \left[ \frac{\partial(P+f)}{\partial \rho} - \frac{P+f}{\rho} \right] . \quad (\text{C.14})$$

Perceba que a partir de (C.12) obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} &= \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{P+f}{\rho} \right) \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \rho} - \frac{P}{\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \rho} - \frac{f}{\rho^2} \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \left( \frac{P+f}{\rho} - \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) . \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Mas por (C.1),

$$\frac{P+f}{\rho} - \frac{\partial f}{\partial \rho} = 0 , \quad (\text{C.16})$$

resultando em

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial \rho} . \quad (\text{C.17})$$

Assim chega-se, por (C.11), em uma quarta expressão para a incompressibilidade descrita por

$$K_T = 9 \frac{\partial P}{\partial \rho} . \quad (\text{C.18})$$

Em sistemas a temperatura nula, as expressões dadas por (C.8), (C.11) e (C.14) têm o mesmo formato, porém agora com  $f = \mathcal{E}$ . No entanto (C.18) não necessita de nenhuma modificação, mostrando assim que esta é a expressão mais geral possível para o cálculo da incompressibilidade isotérmica.

# Apêndice D

## Procedimentos Numéricos

### D.1 Cálculo das integrais que contém a função de Fermi

Nessa seção será apresentado o procedimento desenvolvido para o cálculo numérico das integrais que aparecem nas equações de estado e nas expressões de  $\rho$  e  $\rho_s$  dos modelos de contato e Walecka não-linear, ambos à temperatura finita.

As integrais mencionadas são da forma

$$I_{\pm} = \int_0^{\infty} f(k) [n_k(T) \pm \bar{n}_k(T)] dk \quad (\text{D.1})$$

onde

$$n_k(T) = \frac{1}{e^{(\sqrt{k^2 + M^{*2} - \nu})/T} + 1} \quad \text{e} \quad (\text{D.2})$$

$$\bar{n}_k(T) = \frac{1}{e^{(\sqrt{k^2 + M^{*2} + \nu})/T} + 1}. \quad (\text{D.3})$$

A integral da forma  $I_-$  aparece na definição de  $\rho$  e a da forma  $I_+$  nas demais equações de estado e expressões de  $\rho_s$  dos referidos modelos.

Primeiramente reescrevem-se as funções de distribuição de Fermi para partículas (D.2) e anti-partículas (D.3) de outra maneira, definindo novas variáveis adimensi-

onais da seguinte forma:

$$x \equiv \frac{k}{M}, \quad (\text{D.4})$$

$$y \equiv \frac{M^*}{M}, \quad (\text{D.5})$$

$$\nu' \equiv \frac{\nu}{M} \quad (\text{D.6})$$

e

$$T' \equiv \frac{T}{M}. \quad (\text{D.7})$$

Com isso, as distribuições de Fermi tornam-se funções dessas novas variáveis e conseqüentemente as integrais em (D.1) alteram-se para:

$$I_{\pm} = M \int_0^{\infty} f(Mx) [\eta_x(T) \pm \bar{\eta}_x(T)] dx \quad (\text{D.8})$$

com

$$\eta_x(T) = \frac{1}{e^{(\sqrt{x^2+y^2}-\nu')/T'} + 1} \quad \text{e} \quad (\text{D.9})$$

$$\bar{\eta}_x(T) = \frac{1}{e^{(\sqrt{x^2+y^2}+\nu')/T'} + 1}. \quad (\text{D.10})$$

Na verdade, a integração não foi realizada de zero a infinito e sim até um ponto denominado  $x_{\max}$ . A justificativa para esta mudança é devida às distribuições de Fermi que vão a zero a partir deste ponto. Conseqüentemente a integral também se anula na mesma região.

O método numérico utilizado para o cálculo dessas integrais foi o da Quadratura de Gauss-Legendre, que consiste na seguinte aproximação:

$$\int_{-1}^1 F(t) dt = \sum_{i=1}^n A_i F(t_i). \quad (\text{D.11})$$

No uso de tal método, foi observado que o cálculo das integrais apresenta problemas de convergência. No regime de baixas temperaturas ( $T < 5 \text{ MeV}$ ), é necessário um número muito grande de pontos para que as integrais convirjam adequadamente. Isso ocorre porque em tal limite, os pontos distribuem-se de forma heterogênea, sendo que há casos em que grande parte dos pontos de Gauss encontram-se em uma região na qual a função de Fermi já se anulou, ou seja, os pontos estão fora da região de interesse físico. Isso prejudica sensivelmente a convergência e o método passa a

ser extremamente dependente do número de pontos (que está entre 80 e 90 para  $T = 5 \text{ MeV}$ , por exemplo) e do ponto  $x_{\max}$  (entre 5 e 6 para  $T = 5 \text{ MeV}$ ). Observa-se que  $x_{\max}$  é obtido quando, ao aumentarmos seu valor e o número de pontos para integração, não mais haja variação dos resultados dentro da aproximação desejada.

A fim de contornar este inconveniente, foi desenvolvido o seguinte procedimento: Dividimos a integração em duas partes. A primeira integral é avaliada de 0 à  $x_m$  e a segunda de  $x_m$  à  $x_{\text{final}}$ . A integral em (D.8) torna-se então:

$$I_{\pm} = M \left\{ \int_0^{x_m} f(Mx) [\eta_x(T) \pm \bar{\eta}_x(T)] dx + \int_{x_m}^{x_{\text{final}}} f(Mx) [\eta_x(T) \pm \bar{\eta}_x(T)] dx \right\}. \quad (\text{D.12})$$

O ponto  $x_m$  foi escolhido apropriadamente para que a distribuição

$$F(x) = \frac{1}{e^{(\sqrt{x^2+y^2}-\nu')/T'} + 1} \quad (\text{D.13})$$

seja igual a 1/2. Nesses termos, tal ponto é dado por

$$x_m = \sqrt{\nu'^2 - y^2}. \quad (\text{D.14})$$

O ponto  $x_{\text{final}}$  é o que teoricamente anula a distribuição de Fermi dada por (D.13), porém numericamente admitimos que este “zero” seja aproximadamente igual a  $1/e^{21}$  ( $\sim 10^{-10}$ ). Com essa aproximação, temos

$$\frac{1}{e^{21}} \simeq \frac{1}{e^{(\sqrt{x_{\text{final}}^2+y^2}-\nu')/T'}} \quad (\text{D.15})$$

que leva à

$$x_{\text{final}} = \sqrt{(21T + \nu')^2 - y^2}. \quad (\text{D.16})$$

Através de (D.14), pode-se escrever  $x_{\text{final}}$  em termos de  $x_m$ . O resultado é

$$x_{\text{final}} = x_m \left[ 1 + \frac{(21T + \nu')^2 - \nu'^2}{x_m^2} \right]^{1/2}. \quad (\text{D.17})$$

Com os pontos  $x_m$  e  $x_{\text{final}}$  determinados pelas considerações citadas acima, garantimos a homogeneidade da distribuição dos pontos de Gauss ao longo dos dois intervalos de integração. Este procedimento otimiza o problema da convergência

das integrais e conseqüentemente não é mais preciso que pontos desnecessários sejam usados para a obtenção do valor correto das mesmas. Integrais que convergiam com 80 a 90 pontos de Gauss com o método usual, agora convergem com apenas 20 a 28 pontos.

A seguir, será mostrada a eficiência e robustez desse método através de um exemplo. Será usada a seguinte equação de estado do modelo de contato:

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{2}G_V'^2 \rho^2 - \frac{1}{2}G_s'^2 \rho_s^2 - \frac{2}{3}A' \rho_s^3 - \frac{3}{4}B' \rho_s^4 \\
 &+ \frac{\gamma}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{k^4}{(k^2 + M^{*2})^{1/2}} [n_k(T) + \bar{n}_k(T)] dk, \quad (D.18)
 \end{aligned}$$

com

$$\rho = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\infty k^2 [n_k(T) - \bar{n}_k(T)] dk \quad (D.19)$$

e

$$\rho_s = \frac{\gamma}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{M^* k^2}{(k^2 + M^{*2})^{1/2}} [n_k(T) + \bar{n}_k(T)] dk. \quad (D.20)$$

Utilizando as definições (D.4) à (D.7) e a técnica da separação dos intervalos de integração, as expressões (D.18) à (D.20) tornam-se:

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{2}G_V'^2 \rho^2 - \frac{1}{2}G_s'^2 \rho_s^2 - \frac{2}{3}A' \rho_s^3 - \frac{3}{4}B' \rho_s^4 \\
 &+ \frac{\gamma M^4}{6\pi^2} \left\{ \int_0^{x_m} \frac{x^4}{(x^2 + y^2)^{1/2}} [\eta_x(T) + \bar{\eta}_x(T)] dx + \right. \\
 &\left. + \int_{x_m}^{x_{\text{final}}} \frac{x^4}{(x^2 + y^2)^{1/2}} [\eta_x(T) + \bar{\eta}_x(T)] dx \right\}, \quad (D.21)
 \end{aligned}$$

onde

$$\rho = \frac{\gamma M^3}{2\pi^2} \left\{ \int_0^{x_m} x^2 [\eta_x(T) - \bar{\eta}_x(T)] dx + \int_{x_m}^{x_{\text{final}}} x^2 [\eta_x(T) - \bar{\eta}_x(T)] dx \right\} \quad (D.22)$$

e

$$\begin{aligned}
 \rho_s &= \frac{\gamma M^3 y}{2\pi^2} \left\{ \int_0^{x_m} \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{1/2}} [\eta_x(T) + \bar{\eta}_x(T)] dx + \right. \\
 &\left. + \int_{x_m}^{x_{\text{final}}} \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{1/2}} [\eta_x(T) + \bar{\eta}_x(T)] dx \right\}. \quad (D.23)
 \end{aligned}$$

Usando o método desenvolvido, calculam-se as integrais para um determinado valor da temperatura,  $T = 1 \text{ MeV}$  neste exemplo, dando como entrada o valor de



$\nu$  e o número de pontos de Gauss em cada um dos intervalos de integração. Para cada valor de  $\nu$ , o algoritmo proposto resolve de forma auto-consistente a equação que determina a massa efetiva (e por consequência  $y$ ). Para o modelo de contato essa equação é:

$$1 - y - \frac{1}{M}(G'_s{}^2 \rho_s + A' \rho_s^2 + B' \rho_s^3) = 0, \quad (\text{D.24})$$

com  $\rho_s$  dado por (D.23). De posse do valor de  $y$ , o cálculo numérico das integrais é efetuado seguindo nosso método.

O valor da pressão onde  $\rho = 0,01 \text{ fm}^{-3}$  foi escolhido para ser analisado. Os resultados estão dispostos na seguinte tabela:

Nº de pontos no 1º intervalo	Nº de pontos no 2º intervalo	$P (\text{MeV}/\text{fm}^3)$
8	8	-0,00891435784
8	10	-0,00891500657
8	12	-0,00891494199
8	14	-0,00891494728
8	16	-0,00891494691
10	8	-0,00891445989
10	10	-0,00891510864
10	12	-0,00891504406
10	14	-0,00891504936
10	16	-0,00891504898
12	8	-0,008914457
12	10	-0,00891510576
12	12	-0,00891504118
12	14	-0,00891504647
12	16	-0,0089150461

Tabela D.1: Valores da pressão em  $\rho = 0,01 \text{ fm}^{-3}$  para diversos pontos de Gauss distribuídos nos dois intervalos de integração. O valor da temperatura para essa isoterma é  $T = 1 \text{ MeV}$ . O potencial químico efetivo correspondente é  $\nu = 913 \text{ MeV}$ .

Esse exemplo mostra que a convergência das integrais é atingida em até 8 casas decimais com poucos pontos de Gauss. Nota-se também que o segundo intervalo de integração é mais sensível que o primeiro, ou seja, essa é a região que mais necessita de pontos. Já no primeiro intervalo são suficientes de 8 a 10 pontos para alcançar a convergência.

À título de comparação, a mesma equação de estado foi calculada com apenas um intervalo de integração. Variando o número de pontos de Gauss e o ponto  $x_{\max}$ , obtém-se o resultado mostrado na tabela a seguir:

Nº de pontos	$P (MeV/fm^3)$	Nº de pontos	$P (MeV/fm^3)$
88	-0,00888745404	136	-0,00891455106
92	-0,0089254596	140	-0,00891546396
96	-0,00891469677	144	-0,00891475101
100	-0,00890984879	148	-0,00891521826
104	-0,00892181319	152	-0,0089149696
108	-0,0089088173	156	-0,0089150575
112	-0,00891973255	160	-0,0089150683
116	-0,00891208637	162	-0,00891498915
120	-0,00891652978	166	-0,00891507339
124	-0,00891460128	170	-0,00891503794
128	-0,008914873	174	-0,0089150417
132	-0,0089154927	178	-0,00891505475

Tabela D.2: Valores da pressão em  $\rho = 0,01 fm^{-3}$  para diversos pontos de Gauss (distribuídos em um único intervalo de integração) e para  $x_{\max} = 4$ . O valor da temperatura para essa isoterma é  $T = 1 MeV$ . O potencial químico efetivo correspondente é  $\nu = 913 MeV$ .

Note que o método com apenas um intervalo de integração apresenta razoável convergência apenas a partir de 156 pontos, contrastando com os 20 do caso anterior. Isso mostra sua extrema dependência, no regime de baixas temperaturas, com o número de pontos de Gauss utilizado. Já o procedimento da divisão do intervalo de integração mostra-se livre desse inconveniente e portanto apresenta-se como

excelente alternativa para contornar o problema da convergência das integrais.

## D.2 Cálculo da temperatura crítica dos modelos nucleares

O cálculo numérico da temperatura crítica dos modelos nucleares, utilizados nesse trabalho, tem como idéia principal encontrar os pontos spinodais definidos por

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = 0. \quad (\text{D.25})$$

Nos modelos estudados, as isotermas possuem o mesmo comportamento apresentado por aquelas do modelo de van der Waals, ou seja, exibem uma transição de fase líquido-gás e portanto um par de pontos spinodais para temperaturas abaixo da temperatura crítica. Esses pontos, conforme o aumento da temperatura, colapsam para o ponto crítico. A figura D.1 dá uma idéia qualitativa da evolução do sistema a partir de uma temperatura  $T_1$  até a temperatura crítica  $T_c$ .

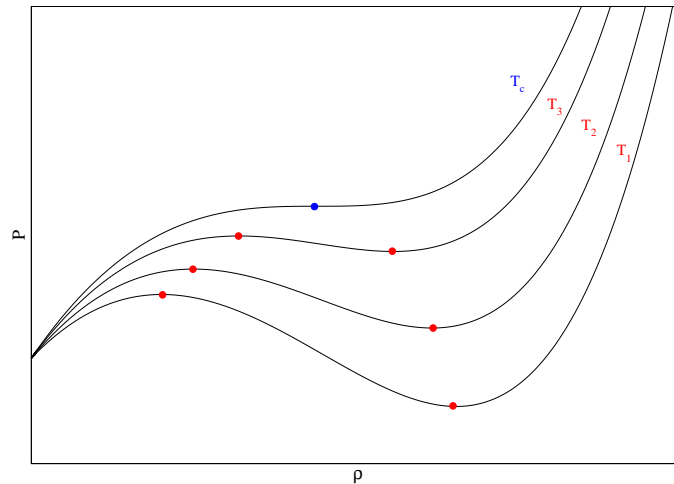


Figura D.1: Gráfico qualitativo da pressão como função da densidade para algumas isotermas. Os pontos vermelhos representam os pontos spinodais e o ponto em azul o ponto crítico do sistema. No gráfico  $T_1 < T_2 < T_3 < T_c$ .

Para obter esses pontos spinodais numericamente, foi criado um campo onde são armazenados os valores da densidade e pressão. De posse desses valores calcula-se a derivada numérica dada por

$$\frac{\Delta P}{\Delta \rho} = \frac{P_{i+1} - P_i}{\rho_{i+1} - \rho_i} . \quad (\text{D.26})$$

A partir das derivadas calculadas para cada ponto de densidade, é feito o produto entre o valor da derivada no ponto  $\rho_i$  e  $\rho_{i+1}$ . Quando esse produto é negativo, evidenciando uma troca de sinal no valor da derivada, estamos diante de um par de pontos spinodais. O procedimento é repetido para cada valor de temperatura, que é incrementado a cada vez até que se encontre apenas um único ponto spinodal, ou seja, o ponto crítico desejado.

É importante ressaltar que para esse tipo de modelo, geralmente é dado como valor de entrada o potencial químico efetivo descrito por

$$\nu = \mu - G_V^2 \rho . \quad (\text{D.27})$$

Com esse valor inicial, encontramos a densidade do sistema dada por (D.19). De posse do valor da densidade, a pressão do sistema é calculada. Esse método apresenta um inconveniente que é o fato dos valores de densidade não serem igualmente espaçados, dificultando portando o cálculo numérico das derivadas já citadas. Para contornar esse problema, foi preciso primeiramente interpolar esses pontos de modo a tornar possível o procedimento numérico descrito nessa seção.

# Apêndice E

## Expansão Relativística de Sommerfeld em Baixas Temperaturas

Problemas na termodinâmica de sistemas fermiônicos não-relativísticos de muitos corpos, tais quais aqueles encontrados na teoria da condução de elétrons em metais, podem ser tratados analiticamente usando-se a expansão de Sommerfeld. Essa expansão é um artifício utilizado que faz uso das propriedades da distribuição de Fermi-Dirac, a baixas temperaturas, para aproximar o valor das integrais que estão presentes no cálculo de quantidades termodinâmicas de sistemas eletrônicos.

Nesse apêndice a idéia principal é deduzir uma expansão similar para sistemas fermiônicos relativísticos, construída a partir das propriedades da distribuição de Fermi-Dirac, mencionadas acima e testar sua aplicabilidade no estudo da termodinâmica do modelo de Walecka.

### E.1 Expansão relativística de Sommerfeld

A termodinâmica de sistemas relativísticos se difere essencialmente da dos sistemas não-relativísticos, pela presença da energia relativística na distribuição de Fermi-Dirac. As integrais envolvidas no cálculo das quantidades termodinâmicas

podem ser escritas da seguinte forma geral

$$J = \int_0^\infty \frac{\phi(x)dx}{1 + e^{(\sqrt{x^2+y^2}-\nu)/T}} \quad (\text{E.1})$$

onde  $\sqrt{x^2+y^2}$  é a energia relativística com  $x^2$  sendo a energia cinética,  $y^2$  o termo de massa de repouso e  $\nu$  o potencial químico efetivo (corrigido), todos em unidades apropriadas.

Para o cálculo da expansão, inicialmente muda-se a variável de integração definindo

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (\text{E.2})$$

assim

$$dz = \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{e} \quad (\text{E.3})$$

$$dx = \frac{zdz}{\sqrt{z^2 - y^2}}. \quad (\text{E.4})$$

Logo, a integral (E.1) torna-se

$$J = \int_y^\infty \frac{\phi(\sqrt{z^2 - y^2})zdz}{[\sqrt{z^2 - y^2}][1 + e^{(z-\nu)/T}]}. \quad (\text{E.5})$$

Definindo

$$\omega = \frac{z - \nu}{T} \quad \text{e} \quad (\text{E.6})$$

$$g(\omega) = \frac{z\phi(\sqrt{z^2 - y^2})}{\sqrt{z^2 - y^2}}, \quad (\text{E.7})$$

obtém-se

$$J = T \int_{\frac{y-\nu}{T}}^\infty \frac{g(\omega)}{1 + e^\omega} d\omega. \quad (\text{E.8})$$

Integrando  $J$  por partes, temos:

$$J = T\psi(\omega)f(\omega)\Big|_{\frac{y-\nu}{T}}^\infty - T \int_{\frac{y-\nu}{T}}^\infty \psi(\omega)f'(\omega)d\omega \quad (\text{E.9})$$

com

$$f(\omega) = \frac{1}{1 + e^\omega}, \quad (\text{E.10})$$

$$f'(\omega) = -\frac{e^\omega}{(1 + e^\omega)^2} \quad \text{e} \quad (\text{E.11})$$

$$\psi(\omega) = \int_0^\omega g(\omega')d\omega'. \quad (\text{E.12})$$

Expandindo  $\psi(\omega)$  em torno de  $\omega = 0$  obtém-se

$$\begin{aligned}\psi(\omega) &= \psi(0) + \left. \frac{d\psi}{d\omega} \right|_{\omega=0} \omega + \left. \frac{d^2\psi}{d\omega^2} \right|_{\omega=0} \frac{\omega^2}{2} + \dots \\ &= \psi(0) + g(0)\omega + \left. \frac{dg}{d\omega} \right|_{\omega=0} \frac{\omega^2}{2} + \dots\end{aligned}\quad (\text{E.13})$$

logo,

$$\begin{aligned}J &= T \left[ g(0)\omega + \left. \frac{dg}{d\omega} \right|_{\omega=0} \frac{\omega^2}{2} + \dots \right] f(\omega) \Big|_{\frac{y-\nu}{T}}^{\infty} \\ &- T \int_{\frac{y-\nu}{T}}^{\infty} \left[ g(0)\omega + \left. \frac{dg}{d\omega} \right|_{\omega=0} \frac{\omega^2}{2} + \dots \right] f'(\omega) d\omega.\end{aligned}\quad (\text{E.14})$$

Chamando

$$J_1 = Tg(0) \int_{\frac{y-\nu}{T}}^{\infty} \frac{\omega e^{\omega}}{(1+e^{\omega})^2} d\omega, \quad (\text{E.15})$$

$$J_2 = \frac{T}{2} \left. \frac{dg}{d\omega} \right|_{\omega=0} \int_{\frac{y-\nu}{T}}^{\infty} \frac{\omega^2 e^{\omega}}{(1+e^{\omega})^2} d\omega \quad (\text{E.16})$$

e assim por diante, temos

$$J = T \left[ g(0)\omega + \left. \frac{dg}{d\omega} \right|_{\omega=0} \frac{\omega^2}{2} + \dots \right] f(\omega) \Big|_{\frac{y-\nu}{T}}^{\infty} + J_1 + J_2 + \dots \quad (\text{E.17})$$

onde

$$J_n = \frac{T}{n!} \left. \frac{d^{n-1}g}{d\omega^{n-1}} \right|_{\omega=0} I_n \quad (\text{E.18})$$

com

$$I_n = \int_{\frac{y-\nu}{T}}^{\infty} \frac{\omega^n e^{\omega}}{(1+e^{\omega})^2} d\omega. \quad (\text{E.19})$$

Nesse caso,

$$\nu = \sqrt{x_f^2 + y^2} - TLn \left( \frac{1 - \frac{y^2 T}{x_F^2 \sqrt{x_F^2 + y^2}}}{1 + \frac{y^2 T}{x_F^2 \sqrt{x_F^2 + y^2}}} \right) \quad (\text{E.20})$$

foi escolhido para maximizar a derivada da função  $f(x) = \frac{1}{1+e^{(\sqrt{x^2+y^2}-\nu)/T}}$  com relação ao seu argumento ( $x$ ).

As integrais  $I_n$  reproduzem assintoticamente os coeficientes da expansão não-relativística de Sommerfeld. Os termos  $J_n$ , para  $n$  ímpar não contribuem para a expansão modificada, já que as respectivas integrais  $I_n$  são nulas assim como no caso não-relativístico.

## E.2 Aplicação no modelo de Walecka

No modelo de Walecka as equações de estado para a densidade de energia e pressão são dadas por

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}G_V^2\rho^2 + \frac{M^2}{2G_s^2}(1-y)^2 + \frac{\gamma M^4}{2\pi^2} \int_0^\infty x^2(y^2+x^2)^{1/2}dx(\eta_x + \bar{\eta}_x) \quad (\text{E.21})$$

e

$$P = \frac{1}{2}G_V^2\rho^2 - \frac{M^2}{2G_s^2}(1-y)^2 + \frac{\gamma M^4}{6\pi^2} \int_0^\infty \frac{x^4 dx}{(x^2+y^2)^{1/2}}(\eta_x + \bar{\eta}_x) \quad (\text{E.22})$$

em que

$$x = \frac{k}{M} \quad (\text{E.23})$$

e

$$y = \frac{M^*}{M}, \quad (\text{E.24})$$

com  $k$  sendo o momento,  $M$  a massa bariônica e  $M^*$  a massa efetiva do nucleon.

As distribuições térmicas de Fermi-Dirac para partículas e anti-partículas são  $\eta_x$  e  $\bar{\eta}_x$  respectivamente.

A massa efetiva do nucleon é determinada auto-consistentemente pela solução da chamada “gap equation” onde estão presentes integrais similares às apresentadas acima. A densidade também é calculada via integrais que envolvem as distribuições de Fermi-Dirac, com as contribuições de anti-partículas geralmente negligenciadas. Por essa razão, as integrais envolvidas no modelo de Walecka tem a forma apropriada para o uso da expansão deduzida na seção anterior.

Para a expansão, será considerado apenas o termo de ordem mais baixa para cada quantidade termodinâmica. Como os termos ímpares vão a zero na medida em que  $k_F$  (momento de Fermi) aumenta, será utilizado apenas o termo de segunda ordem da expansão.

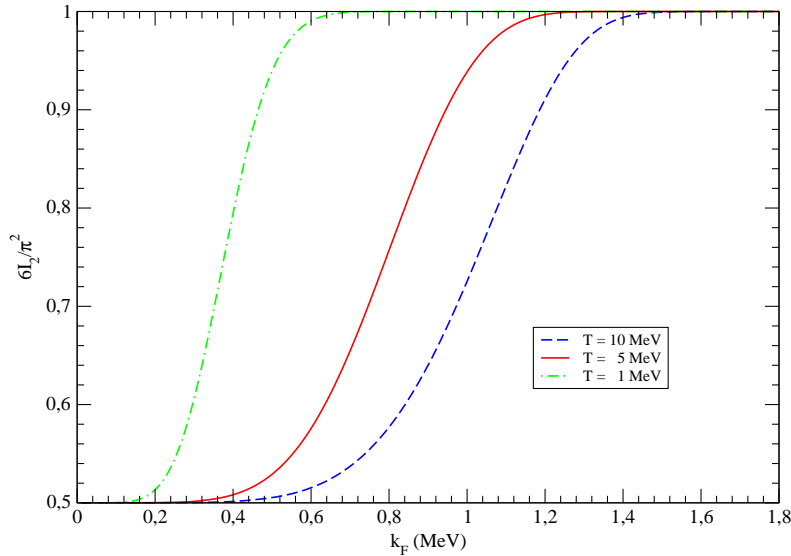
A tabela E.1, apresentada a seguir, mostra a forma que a função  $\phi(x)$  assume e os termos de segunda ordem da expansão ( $J_2$ ), para cada quantidade de interesse do modelo.



Quantidade	$\phi(x)$	$J_2$
densidade	$x^2$	$\frac{(2x_F^2+y^2)}{2x_F}T^2I_2$
pressão	$x^4(x^2+y^2)^{-1/2}$	$\frac{3x_F(x_F^2+y^2)^{1/2}}{2}T^2I_2$
densidade de energia	$x^2(x^2+y^2)^{1/2}$	$\frac{(3x_F^2+y^2)(x_F^2+y^2)^{1/2}}{2x_F}T^2I_2$
massa efetiva	$x^2(x^2+y^2)^{-1/2}$	$\frac{(x_F^2+y^2)^{1/2}}{2x_F}T^2I_2$

Tabela E.1: Termos de ordem mais baixa da expansão relativística.

Como mencionado anteriormente, os coeficientes  $I_n$  convergem para seus valores não-relativísticos quando o momento de Fermi aumenta. A seguir, a figura E.1 mostra, para alguns valores de temperatura, como o coeficiente  $I_2$  (calculado para o modelo de Walecka) comporta-se em função de  $k_F$ , exemplificando a convergência supracitada.


 Figura E.1: Comportamento da razão entre o coeficiente relativístico ( $I_2$ ) e o não-relativístico ( $\pi^2/6$ ), como função de  $k_F$  para  $T = 1, 5$  e  $10 \text{ MeV}$ .

As duas próximas figuras (E.2 e E.3) ilustram a comparação dos resultados exatos com aqueles obtidos através da expansão relativística.

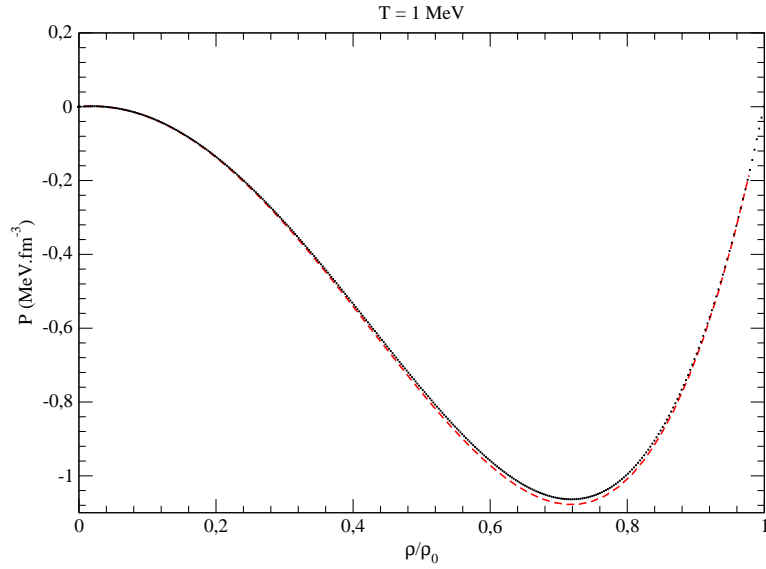


Figura E.2: Pressão como função da razão  $\rho/\rho_0$  para  $T = 1 \text{ MeV}$ . A densidade de saturação é  $\rho_0 = 0,15 \text{ fm}^{-3}$ . A linha tracejada representa o cálculo com a expansão e a linha cheia o exato.

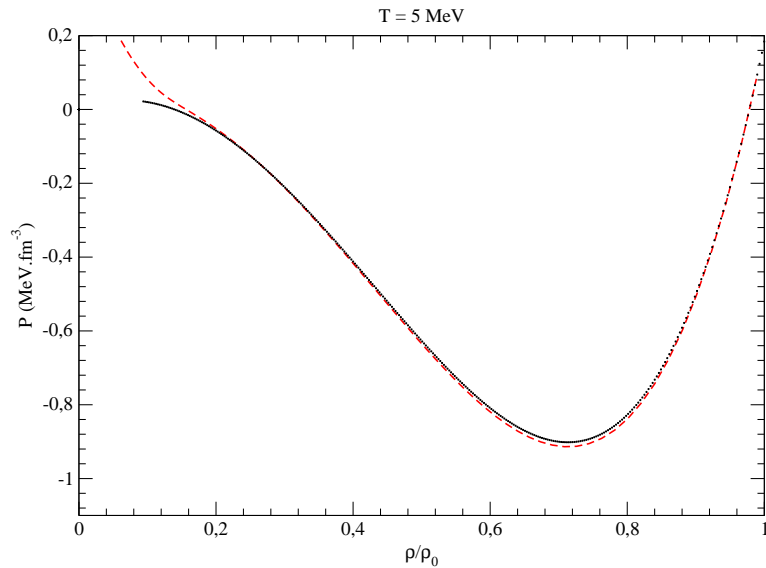


Figura E.3: Pressão como função da razão  $\rho/\rho_0$  para  $T = 5 \text{ MeV}$ . A densidade de saturação é  $\rho_0 = 0,15 \text{ fm}^{-3}$ . A linha tracejada representa o cálculo com a expansão e a linha cheia o exato.

Os gráficos mostram que para baixos valores de temperatura (figura E.2), os

resultados da expansão são praticamente indistinguíveis (desde  $\rho = 0$  até  $\rho = \rho_0$ ) dos obtidos através dos trabalhosos procedimentos numéricos. Para altos valores de temperatura, começam a surgir discrepâncias no regime de baixas densidades (veja figura E.3), prejudicando o uso da expansão no estudo de transições de fase da matéria nuclear. Numericamente, mostra-se que um critério de validade para essa aproximação é  $\frac{T}{x_F} \ll 1$ .

Os resultados gerados com os termos de mais baixa ordem da expansão relativística de Sommerfeld para o modelo de Walecka, reproduzem satisfatoriamente no regime de temperaturas muito baixas, o padrão das isotermas geradas com os métodos numéricos existentes. Isso indica que essa expansão pode ser muito útil para o estudo da matéria nuclear nesse regime, tais como encontrados por exemplo em estrelas de nêutrons.

# Referências Bibliográficas

- [1] W. Glöckle, *The Quantum Mechanical Few-Body Problem*, Springer-Verlag, Berlin (1983).
- [2] R. Machleidt, K. Holinde e Ch. Elster, *Phys. Rep.* **149**, 1 (1987).
- [3] R. Machleidt, *Adv. Nucl. Phys.* **19**, 189 (1989).
- [4] M. Lacombe et al., *Phys. Rev.* **C21**, 861 (1980).
- [5] V.G.J Stoks, R.A.M Klomp, C.P.F. Terheggen e J.J. de Swart, *Phys. Rev.* **C49**, 2950 (1954).
- [6] P. Ring e P. Schuck, *The Nuclear Many Body-Problem*, Springer, Heidelberg (1980).
- [7] M. Brink e E. Boeker, *Nucl. Phys.* **A91**, 1 (1967).
- [8] J. Dechargé e D. Gogny, *Phys. Rev.* **C21**, 1568 (1980).
- [9] T.H.R. Skyrme, *Nucl. Phys.* **9**, 615 (1959).
- [10] T.H.R. Skyrme, *Nucl. Phys.* **9**, 635 (1959).
- [11] J.D. Walecka, *Ann. Phys.* **83**, 491 (1974).
- [12] J.P. Blaizot, *Phys. Rep.* **64**, 171 (1980).
- [13] J. Boguta e A.R. Bodmer, *Nucl. Phys.* **A292**, 413 (1977).
- [14] J. Zimanyi e S.A. Moszkowski, *Phys. Rev.* **C42**, 1416 (1990).

- [15] A. Delfino, C.T. Coelho e M. Malheiro, *Phys. Rev.* **C51**, 2188 (1995).
- [16] C.T. Coelho e M. Malheiro, *Phys. Lett.* **B345**, 361 (1995).
- [17] M. Chiapparini, A. Delfino, M. Malheiro e A. Gattone, *Z. Phys.* **A357**, 47 (1997).
- [18] A. Delfino, M. Chiapparini, M. Malheiro, L.V. Belvedere e A. Gattone, *Z. Phys* **A355**, 145 (1996).
- [19] B.A. Nikolaus e T. Hoch, *Phys. Rev.* **C46**, 1757 (1992).
- [20] J.J. Rusnak e R.J. Furnstahl, *Nucl. Phys.* **A627**, 495 (1997).
- [21] T. Bürvenich, D.G. Madland, J.A. Maruhn e P.G. Reinhard *Phys. Rev.* **C65**, 044308 (2002).
- [22] A. Delfino, M. Malheiro e T. Frederico, *Braz. J. of Phys.* **31**, 518 (2001).
- [23] Graciela Gelmini e Bruce Ritzi, *Phys. Lett.* **B357**, 431 (1995).
- [24] Walter Greiner e Joachim Reinhardt, *Field Quantization*, Springer, Heidelberg (1996).
- [25] Pierre Ramond, *Field Theory*, Benjamin/Cummings Publishing Company, Massachusetts (1981).
- [26] Ashok Das, *Field Theory: a Path Integral Approach*, World Scientific, Singapura (1993).
- [27] J.P. Blaizot et al., *Nucl. Phys.* **A591**, 435 (1995).
- [28] R.J. Furnstahl, J.J. Rusnak e B.D. Serot, *Nucl. Phys.* **A632**, 607 (1998).
- [29] R.J. Furnstahl e B.D. Serot, *Phys. Rev.* **C41**, 262 (1990).
- [30] B.D. Serot e J.D. Walecka, *Adv. Nucl. Phys.* **16**, 1 (1986).
- [31] P.G. Reinhard, *Rep. Prog. Phys.* **52**, 439 (1989).

- [32] M.M. Sharma, M.A. Nagarajan e P. Ring, *Phys. Lett.* **312B**, 337 (1993).
- [33] G.A. Lalazissis, J. König e P. Ring, *Phys. Rev.* **C55**, 540 (1997).
- [34] R.J. Furnstahl, B.D. Serot e Hua-Bin Tang, *Nucl. Phys.* **A615**, 441, (1997).
- [35] A. Delfino, J.B. Silva e M. Malheiro, *Phys. Rev.* **C73**, 037311, (2006).
- [36] S. Das Gupta, A.Z. Mekjian e M.B. Tsang, *Adv. Nucl. Phys.* **26**, 89 (2001).
- [37] D.P Menezes e C. Providência, *Phys. Rev.* **C64**, 044306 (2001).
- [38] M.E. Fisher, *Physics*, **3**, 225, Long Island City, Nova Iorque, (1967).
- [39] J.S. Sá Martins e P.M.C de Oliveira, *Nucl. Phys.* **A643**, 433 (1998).
- [40] Ph. Chomaz e F. Gulminelli, *Phys. Lett.* **B447**, 221 (1999).
- [41] S.K. Samaddar e S. Das Gupta, *Phys. Rev.* **C61**, 034610 (2000).
- [42] P. Bhattacharyya, S. Das Gupta e A.Z. Mekjian, *Phys. Rev.* **C60**, 054616 (1999).
- [43] S.J. Lee e A.Z. Mekjian, *ibid* **63**, 044605 (2001); **68**, 014608 (2003).
- [44] P. Bonche et al., *Nucl. Phys.* **A436**, 265 (1985).
- [45] S. Levit e P. Bonche, *Nucl. Phys.* **A437**, 426 (1985).
- [46] J. Besprovaný e S. Levit, *Phys. Lett.* **B217**, 1 (1989).
- [47] H.Q. Song e R.K. Su, *Phys. Rev.* **C44**, 2505 (1991).
- [48] Y.J. Zhang et al., *Phys. Rev.* **C54**, 1137 (1996).
- [49] A. Das et al., *J. Phys.* **G18**, 869 (1992).
- [50] H.Q. Song et al., *Phys. Rev.* **C47**, 2001 (1993).
- [51] H.Q. Song et al., *Phys. Rev.* **C49**, 2924 (1994).

- [52] M. Baldo e L.S. Ferreira, *Phys. Rev.* **C59**, 682 (1999).
- [53] L.L. Zhang et al., *Phys. Rev.* **C59**, 3292 (1999).
- [54] J. Kapusta, *Phys. Rev.* **C29**, 1735 (1984).
- [55] J.M. Lattimer e F.D. Swesty, *Nucl. Phys.* **A535**, 331 (1991).
- [56] J.B. Natowitz et al., *Phys. Rev. Lett.* **89**, 212701 (2002).
- [57] J.D. Bjorken e Drell, *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill, Nova Iorque (1965).