

---

SOBRE A POSSIBILIDADE DE EFEITOS  
QUÂNTICO-GRAVITACIONAIS  
MODIFICAREM O DESTINO DO UNIVERSO

---

EDÉSIO M. BARBOZA JR.



**INSTITUTO DE FÍSICA**  
**Universidade Federal Fluminense**



---

SOBRE A POSSIBILIDADE DE EFEITOS  
QUÂNTICO-GRAVITACIONAIS  
MODIFICAREM O DESTINO DO UNIVERSO

---

EDÉSIO M. BARBOZA JR.

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal Fluminense como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Física.

ORIENTADOR: NIVALDO A. LEMOS.



**INSTITUTO DE FÍSICA**  
**Universidade Federal Fluminense**

NITERÓI-RJ  
2007



*Triste a escutar, pancada por pancada,  
A sucessividade dos segundos,  
Ouço em sons subterrâneos, do Orbe oriundos,  
O choro da Energia abandonada!*

*É a dor da Força desaproveitada,  
- O cantochão dos dínamos profundos,  
Que, podendo mover milhões de mundos,  
Jazem ainda na Estática do Nada!*

*É o soluço da forma ainda imprecisa...  
Da transcendência que não se realiza...  
Da luz que não chegou a ser lampejo...*

*E é em suma, o subconsciente aí formidando  
Da Natureza que parou, chorando,  
No rudimentarismo do Desejo!*

**Augusto dos Anjos**



# Agradecimentos

- Ao Professor Nivaldo por ter me dado uma orientação sem tirar minha independência e liberdade.
- Aos meus pais Edésio e Eliane que se sacrificaram para me dar uma educação que eles não tiveram a oportunidade de ter.
- À Monique pelo amor e carinho a mim dedicados.
- Aos meus grandes amigos Cadu e Odilon.
- Aos funcionários da biblioteca.
- Aos funcionários da secretaria de pós-graduação.
- À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro.





# Resumo

Nesta dissertação quantizamos o modelo cosmológico de Friedmann-Robertson-Walker espacialmente plano dominado por um chamado *fluido fantasma*. O modelo clássico apresenta uma expansão acelerada terminando em um *Big Rip*, uma singularidade futura caracterizada pela divergência do fator de escala e da densidade de energia em um tempo finito a contar da época presente. Ao nos aproximarmos desta singularidade, a escala de energia torna-se comparável à escala de Planck e a intensidade do campo gravitacional torna-se comparável à das outras interações fundamentais, sugerindo que próximo ao Big Rip efeitos quântico-gravitacionais tornem-se crescentemente importantes. Uma vez que em muitos casos a quantização é forte o suficiente para evitar singularidades passadas como o *Big Bang*, é natural se perguntar se efeitos quânticos podem evitar uma singularidade futura. Para responder a esta pergunta, efetuamos a quantização de três formas diferentes, as quais por sua vez fornecem universos que evoluem da mesma forma. Observamos que o mesmo fim catastrófico do universo que surge no modelo clássico é previsto pelo modelo quântico.



# Abstract

In this work we perform the quantization of a flat Friedmann-Robertson-Walker cosmological model dominated by the so-called *phantom energy*. The classical model presents an accelerated expansion ending in a *Big Rip*, a future singularity characterized by the divergence of the scale factor and the energy density a finite time from now. When this singularity is approached, the energy scale becomes comparable to the Planck scale and the gravitational field intensity becomes comparable to the intensity of the other basic interactions, suggesting that close to the Big Rip quantum-gravitational effects become increasingly important. Since in many cases the quantization is strong enough to prevent past singularities like the *Big Bang*, is natural to ask if quantum effects can prevent the future singularity. To answer this question, we perform the quantization in three different ways, which in turn supply universes that evolve in the same way. We observe that the same catastrophic end of the universe that appears in the classical model is predicted by the quantum model.



# Notações e Convenções

- Índices gregos variam de 0 a 3 e índices latinos variam de 1 a 3.
- A assinatura utilizada é  $(- + + +)$  de modo que a métrica induzida sobre hipersuperfícies espaciais é positiva definida.
- O tempo próprio  $\tau$  é definido por

$$d\tau^2 = -ds^2 = -g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu,$$

de modo que  $d\tau$  é real e positivo para uma partícula se movendo ao longo de uma geodésica do tipo tempo.

- As unidades utilizadas são tais que  $c = \hbar = 16\pi G = 1$  onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo,  $\hbar$  é a constante de Planck dividida por  $2\pi$  e  $G$  é constante de gravitação universal de Newton.

- Derivadas ordinárias

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

são indicadas por  $\partial_\mu$  ou por uma vírgula. Por exemplo, a derivada de um campo escalar  $\phi$  é

$$\frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} = \partial_\mu\phi = \phi_{,\mu}.$$

- Os símbolos de Christoffel de segunda espécie (símbolos de Christoffel, por simplicidade) são definidos como

$$\Gamma_{\mu\nu}^\kappa = \frac{1}{2}g^{\kappa\lambda}(g_{\lambda\mu,\nu} + g_{\nu\lambda,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}).$$

- O tensor de curvatura (ou tensor de Riemann-Christoffel) é definido por:

$$R^{\kappa}{}_{\lambda\mu\nu} = \Gamma^{\kappa}{}_{\nu\lambda,\mu} - \Gamma^{\kappa}{}_{\lambda\mu,\nu} + \Gamma^{\kappa}{}_{\mu\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\kappa}{}_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}{}_{\lambda\mu}.$$

- O tensor de Ricci e o escalar de curvatura são definidos, respectivamente, pelas seguintes contrações:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= R^{\kappa}{}_{\mu\kappa\nu}; \\ R &= g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

- O tensor de Einstein é definido por

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R.$$

- Para derivada covariante de um tensor qualquer  $T^{\kappa\dots}$  serão utilizadas, conforme a conveniência, as notações

$$\nabla_{\nu}T^{\kappa\dots} \text{ ou } T^{\kappa\dots}{}_{;\nu}$$

com

$$\nabla_{\nu}T^{\kappa\dots} = T^{\kappa\dots}{}_{;\nu} = \partial_{\nu}T^{\kappa\dots} + \Gamma^{\kappa}{}_{\mu\nu}T^{\mu\dots} + \dots - \Gamma^{\mu}{}_{\lambda\nu}T^{\kappa\dots}_{\mu\dots} - \dots.$$

- A derivada de Lie de um tensor qualquer  $T^{\kappa\dots}$  em relação a um campo vetorial  $X^{\mu}$ , denotada por  $\mathcal{L}_X T^{\kappa\dots}$ , é definida como

$$\mathcal{L}_X T^{\kappa\dots} = X^{\mu}\partial_{\mu}T^{\kappa\dots} - T^{\mu\dots}\nabla_{\mu}X^{\kappa} - \dots + T^{\kappa\dots}\nabla_{\lambda}X^{\mu} + \dots$$

uma vez que somente conexões simétricas (símbolos de Christoffel) serão consideradas.

- Se  $x^{\mu} = x^{\mu}(u)$  é uma congruência local de curvas cujo campo vetorial tangente é  $dx^{\mu}/du = X^{\mu}$ , a derivada absoluta de um tensor  $T^{\kappa\dots}$  ao longo de uma curva  $C$  da congruência, denotada por

$$\frac{D}{Du}T^{\kappa\dots} \text{ ou } \nabla_X T^{\kappa\dots},$$

é definida como

$$\frac{D}{Du}T^{\kappa\dots} = \nabla_X T^{\kappa\dots} \equiv X^{\mu}\nabla_{\mu}T^{\kappa\dots}.$$

# Conteúdo

<b>Resumo</b>	<b>iii</b>
<b>Resumo em Inglês</b>	<b>v</b>
<b>Notações e Convenções</b>	<b>vii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Formalismo Hamiltoniano da Relatividade Geral</b>	<b>9</b>
2.1 Decomposição 3 + 1 . . . . .	10
2.2 Curvatura Extrínseca . . . . .	12
2.3 A Equação de Gauss . . . . .	14
2.4 Escalar de Curvatura . . . . .	17
2.5 Formalismo Hamiltoniano da Relatividade Geral . . . . .	19
<b>3 Teoria Hamiltoniana de um Fluido Perfeito Relativístico</b>	<b>23</b>
3.1 Fluidos Perfeitos Relativísticos . . . . .	24
3.2 Representação Via Potenciais de Velocidade . . . . .	27
3.3 O Princípio de Ação . . . . .	30
3.4 Teoria Hamiltoniana de um Fluido Perfeito Relativístico . . . . .	32
<b>4 Tratamento Quântico da Singularidade do Big Rip</b>	<b>35</b>
4.1 A Equação de Wheeler-DeWitt . . . . .	36
4.2 Mini-superespaço . . . . .	37
4.3 Energia Fantasma e o Big Rip . . . . .	40
4.4 Tratamento Quântico da Singularidade do Big Rip . . . . .	44

4.4.1	Quantização com Produto Interno Especial . . . . .	45
4.4.2	Ordenação de Operadores e Quantização com Produto Interno Usual . . . . .	49
4.4.3	Transformação Canônica e Outra Quantização com Produto Interno Padrão . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Conclusões</b>	<b>55</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>57</b>



# Capítulo 1

## Introdução

Em sua eterna tentativa de compreender a Natureza e os fenômenos à sua volta, o homem tem formulado, desde a antiguidade, teorias e modelos que respondam às suas indagações. A cosmologia nasce do anseio humano de encontrar respostas para questões como: o Universo é finito ou infinito? O Universo teve um início ou sempre existiu? O Universo terá um fim? Essas são apenas algumas das várias questões referentes ao cosmos que têm povoado a mente humana ao longo dos séculos e têm recebido explicações que variam de uma cultura a outra, de uma época a outra, tentando impor uma ordem ao cosmos e torná-lo acessível à mente humana.

As questões referentes à cosmologia permaneceram por muito tempo pertencentes mais ao campo da filosofia, da metafísica e da religião do que ao campo da ciência. O nascimento da cosmologia como ciência pode ser atribuído a Isaac Newton (1643 – 1727). Foi só com advento da teoria da gravitação de Newton que a cosmologia tornou-se possível como ciência. A lei de força da mecânica newtoniana junto com a lei do inverso do quadrado da distância sintetizavam todo o conhecimento armazenado nos séculos anteriores acerca do movimento planetário. O sucesso da gravitação newtoniana em explicar e fazer previsões de fenômenos dentro do sistema solar foi notável e não tardou muito para que a teoria fosse extrapolada para além do sistema solar e aplicada ao Universo como um todo. Supondo que a matéria estava uniformemente distribuída através de um universo infinito, Newton foi capaz de encontrar uma equação dinâmica que ditava a evolução do universo. Porém, a cosmologia newtoniana possuía características paradoxais. Por um lado,

qualquer partícula seria igualmente atraída em todas as direções e, portanto, deveria permanecer em repouso. Por outro lado, qualquer distribuição finita de matéria não devia possuir qualquer gradiente de pressão e, portanto, deveria desabar sob sua própria gravidade.<sup>1</sup> Mais de dois séculos depois, em 1934, E. A. Milne e W. H. McCrea [1, 2] mostraram como alguns dos problemas da cosmologia newtoniana podiam ser resolvidos. Contudo, a principal fraqueza da cosmologia newtoniana é que ela não é auto-suficiente, sua justificativa depende de um resultado da relatividade geral, o teorema de Birkhoff.

Apesar do êxito da gravitação newtoniana, muitos problemas permaneciam sem explicação. Um exemplo clássico é o problema da precessão do periélio de Mercúrio, que não encontrava qualquer explicação satisfatória dentro da teoria newtoniana. Mas, uma dificuldade ainda maior se encontrava na parte conceitual: a gravitação newtoniana exerce sua influência instantaneamente e a distância sem nenhum intermediário ou contato causal óbvio. O próprio Newton admitiu que sua teoria não era capaz de explicar as causas da gravidade, mas apenas de elucidar seus efeitos. Para aprofundar a compreensão das causas da gravidade o mundo deveria esperar por Albert Einstein.

Em 1905, Einstein publicou pelo menos três trabalhos históricos. Um desses trabalhos, intitulado *Zur Elektrodynamik bewegter Körper (Sobre a Eletrodinâmica dos Corpos em Movimento)* [3], tratava da teoria da relatividade especial. Esta teoria notável produziu mudanças radicais em nosso entendimento da natureza e se baseia em dois postulados muito simples, mas de conseqüências profundas, cujos enunciados são:

**P1:** *As leis da Física são as mesmas em todos referenciais inerciais;*

**P2:** *A velocidade da luz no vácuo é a mesma em todos os referenciais inerciais.*

O primeiro postulado, conhecido como *princípio da relatividade*, afirma que não existe um referencial inercial especial em repouso em relação a um espaço absoluto e levou Einstein a abandonar a idéia newtoniana da existência de

---

<sup>1</sup>Estrelas são capazes de manter sua forma estacionária porque possuem gradientes de pressão grandes o suficiente para contrabalançar sua própria gravidade.

um espaço absoluto e de um tempo absoluto.

A teoria da relatividade especial deixava intacta a teoria eletromagnética de Maxwell, mas indicava que a mecânica newtoniana era apenas uma aproximação válida no regime de baixas velocidades comparadas à da luz.

Após ser bem sucedido na reconciliação da óptica com a mecânica, Einstein voltou-se para a gravitação. A generalização da relatividade especial pela inclusão da gravitação ou, equivalentemente, de referenciais não inerciais mostrou-se mais difícil e Einstein levou 10 anos para obtê-la. Embora tenha rapidamente elaborado as bases físicas que tornariam possível a teoria geral, Einstein esbarrava na representação matemática de suas idéias, que estava longe de ser óbvia. Introduzido por seu amigo Marcel Grossman à geometria riemanniana, Einstein encontrou finalmente o quadro matemático ideal para representar as suas idéias. Em 1915 ele publicou as equações de campo da relatividade geral [4]. Pouco tempo depois elas foram aplicadas à cosmologia. Primeiro pelo próprio Einstein, em 1917 [5], depois por W. de Sitter, A. Friedmann e G. Lemaître.

As equações de campo da relatividade geral formam um conjunto de equações diferenciais parciais não-lineares acopladas. Sua solução mais geral está além das técnicas matemáticas disponíveis no momento. Assim, se estamos interessados em obter soluções exatas para as equações de Einstein, devemos lançar mão de hipóteses simplificadoras impondo simetrias ao problema. Foi essa a postura adotada por Einstein na construção de seu modelo cosmológico. Ele supôs que o Universo era homogêneo, isotrópico e, como era natural na época, estático e com matéria uniformemente distribuída através dele. Contudo, tal modelo era incompatível com as equações de campo da relatividade geral, o que levou Einstein a modificá-las introduzindo o agora famoso *termo cosmológico*. No entanto, não levaria muito tempo para que o modelo cosmológico de Einstein fosse derrubado.

Ainda em 1917, de Sitter publicou uma solução das equações de Einstein, com termo cosmológico, no vácuo [6]. Ao contrário do universo de Einstein, o universo vazio de de Sitter se expandia. Entre 1922 e 1924, Friedmann encontrou uma solução que combinava o universo denso de Einstein com o conceito de expansão de de Sitter [7]. Cinco anos mais tarde, em 1929, Edwin Hubble publicou dados observacionais que indicavam que o Universo estava se expandindo [8], fortalecendo o modelo de Friedmann. Essa descoberta

forçou Einstein a abandonar seu modelo estático de universo e, junto com ele, o termo cosmológico, que se tornara desnecessário.

A descoberta de que o Universo estava se expandindo conduziu naturalmente à questão de suas origens. Se retrocedermos no tempo, concluiremos que o Universo deve ter sido mais denso, mais quente e mais compacto no passado. Se levarmos ao extremo este raciocínio, o modelo de Friedmann nos conduz a uma singularidade passada conhecida como *Big Bang*: um estado de densidade e temperatura infinitas e volume igual a zero, no qual o Universo teria começado.

Na década de 1940, preocupados com o problema da origem dos elementos, G. Gamow, R. Alpher e R. Herman [9, 10, 11] imaginaram que, em um típico universo de Friedmann, as condições de temperatura e pressão pouco após o Big Bang seriam adequadas para a ocorrência do processo de nucleossíntese. Eles postularam que o Universo começou unicamente com nêutrons, alguns dos quais decaíram criando prótons, elétrons e antineutrinos. Então, via captura de nêutrons, todos os elementos teriam sido criados. Para evitar que o único elemento criado nesse processo fosse o hélio, eles concluíram que deveria haver um grande número de fótons de alta energia para cada núcleon no universo primitivo. Como subproduto de sua teoria, Gamow, Alpher e Herman concluíram que uma relíquia desta radiação, altamente resfriada devido à expansão, deveria estar presente atualmente no Universo. Gamow e seus colaboradores estimaram que atualmente a temperatura desta radiação deveria ser da ordem de  $5\text{K}$ . Essa radiação cósmica de fundo foi detectada em 1965 por A. Penzias e R. Wilson [12] e constitui a mais forte evidência da existência do Big Bang. Essa descoberta, a segunda mais importante para a cosmologia desde a descoberta de Hubble, deu a Penzias e Wilson o Prêmio Nobel de Física em 1978.

A aceitação da teoria do Big Bang nos impõe uma questão importante: é possível aplicar a relatividade geral a situações tão extremas quanto aquelas encontradas no Big Bang? Nós temos bons motivos para acreditar que a resposta para esta pergunta deve ser negativa. Singularidades, tais como o Big Bang, não são uma característica exclusiva dos modelos de Friedmann, elas podem existir em qualquer solução das equações de Einstein representando um modelo cosmológico [13]. Acredita-se que a existência de singularidades em relatividade geral represente estados não-físicos e que nas situações

extremas que elas representam a relatividade geral perca sua validade. A gravidade ainda não foi completamente harmonizada com outra grande teoria da física moderna, a mecânica quântica. As condições existentes durante a maior parte da história do Universo nos permitem separar sem qualquer problema as duas teorias porque as escalas em que elas predominam são imensamente diferentes. Contudo, nas condições extremas que a vizinhança de uma singularidade representa, a natureza quântica do espaço-tempo pode vir à tona e existem indícios de que quando efeitos quântico-gravitacionais são levados em conta é possível evitar o aparecimento de singularidades. No entanto, a quantização do campo gravitacional é um trabalho incrivelmente difícil e, até hoje, nenhuma teoria quântica da gravidade consistente foi construída. Contudo, existem alguns esquemas aproximados para tentar resolver, pelo menos parcialmente, alguns dos problemas que uma teoria quântica da gravidade se propõe a atacar. Um desses esquemas é a cosmologia quântica. Há muitas formas de se fazer cosmologia quântica. Uma das mais empregadas e mais bem compreendidas é a canônica, desenvolvida por J. A. Wheeler e B. DeWitt [14], a qual será utilizada por nós nesta dissertação. A teoria canônica requer que o espaço-tempo quadridimensional da relatividade geral seja decomposto em superfícies tridimensionais do tipo espaço e curvas temporais para que a teoria clássica seja posta na forma hamiltoniana (veja o Capítulo 2). Então, efetuando as prescrições quânticas usuais e aplicando o procedimento de quantização de Dirac, é construída uma equação análoga à de Schrödinger, a equação de Wheeler-DeWitt, a qual fornece a dinâmica da teoria quântica e determina o objeto central da cosmologia quântica: a função de onda do Universo (veja o Capítulo 4).

Mas, qual será o destino do Universo? Para que estado ele está evoluindo? Em 1998 dois grupos experimentais liderados por A. Riess e S. Perlmutter, independentemente, anunciaram a terceira maior descoberta da cosmologia: a expansão acelerada do Universo [15, 16]. Esta descoberta deixou a todos desconcertados. Devido ao caráter atrativo da gravidade, havia muito tempo que físicos e astrônomos trabalhavam com a certeza de que a taxa de expansão do Universo era decrescente. Pegos de surpresa por essa descoberta, não tardou muito para que várias idéias fossem propostas para explicar este descobrimento inesperado. A principal delas supõe que o Universo é homogeneamente preenchido por um fluido com pressão negativa denominado *ener-*

*gia escura* [17]. Dado que a constante cosmológica, introduzida inicialmente por Einstein para manter o Universo estático, atua nas equações de campo da relatividade geral como uma fonte homogênea e isotrópica com pressão  $p = -\rho$ , ela ressurgiu neste cenário como a candidata mais natural e atraente a energia escura, recebendo enorme atenção por parte dos cosmólogos [18, 19]. Outra candidata que tem atraído crescente atenção devido às suas propriedades intrigantes é a chamada *energia fantasma* [20], um fluido com equação de estado  $p = w\rho$  com  $w < -1$  (veja o Capítulo 4). A principal característica da energia fantasma é que ela dá origem a uma singularidade futura denominada *Big Rip* [21], caracterizada pela divergência do fator de escala e da densidade de energia em valor finito do tempo cósmico, a contar de hoje, e que representaria um fim catastrófico do Universo.

Essa singularidade nos põe diante de uma nova questão: é possível que próximo ao Big Rip efeitos quântico-gravitacionais tornem-se fortes o suficiente para evitar essa singularidade? Embora atualmente o Universo evolua de forma consistente com a relatividade geral clássica, em fases extremas de sua evolução os efeitos quânticos devem ser significativos e até dominantes. Próximo ao Big Rip, a curvatura do espaço-tempo e a densidade de energia tornam-se arbitrariamente grandes e, portanto, temos fortes motivos para suspeitar que, próximo ao Big Rip, efeitos quântico-gravitacionais tornam-se importantes. Assim, da mesma forma que a física quântica torna-se relevante quando retrocedemos à época do Big Bang, ela deve tornar-se crescentemente importante quando nos aproximamos do Big Rip. Isto nos leva a admitir que, quando efeitos quânticos são levados em conta, a singularidade do Big Rip possa ser evitada. É desta possibilidade que trata esta dissertação.

O formalismo necessário para realização do nosso estudo será desenvolvido nos capítulos 2 e 3. Esses capítulos tratam, respectivamente, de uma revisão do formalismo ADM [22] e do formalismo de Schutz [23] para fluidos perfeitos relativísticos.

O trabalho original desta dissertação está contido no capítulo 4. Empregando o formalismo desenvolvido nos capítulos anteriores, estudamos o modelo cosmológico de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) espacialmente plano e dominado por um fluido fantasma [24]. Após investigarmos as principais características do modelo clássico, realizamos a quantização deste modelo de três formas diferentes a fim de dar sustentabilidade aos nossos resulta-

dos. Os três esquemas de quantização utilizados por nós fornecem universos que evoluem da mesma forma que o universo descrito pelo modelo clássico. Tal como o modelo clássico, o modelo quântico prevê uma expansão acelerada terminada num catastrófico Big Rip. No capítulo 5 apresentamos nossa conclusões.





## Capítulo 2

# Formalismo Hamiltoniano da Relatividade Geral

A principal atividade em física teórica é construir modelos matemáticos que capturem a essência dos fenômenos físicos que estão sendo investigados. Atualmente, grande parte destes modelos são construídos a partir de um princípio de ação, ou seja, especificando uma densidade lagrangiana a partir da qual decorre todo o resto. A principal razão para isto é que grande parte das prescrições para formular uma teoria quântica de campos requer que a teoria clássica seja posta em uma forma lagrangiana ou hamiltoniana. Por exemplo, a formulação via integrais funcionais de uma teoria quântica de campos requer um princípio de ação clássico, isto é, uma formulação lagrangiana da teoria clássica, enquanto o procedimento de quantização canônica requer que a teoria clássica seja posta em uma forma hamiltoniana. Deste modo, ambas as formulações, lagrangiana e hamiltoniana, podem desempenhar um papel importante no desenvolvimento de uma teoria quântica da gravidade.

O programa de quantização canônica, o qual será adotado aqui, é o procedimento de quantização mais direto e tem a vantagem de que apenas modos físicos são quantizados, assegurando a unitariedade da dinâmica. Em contrapartida, a invariância de Lorentz é perdida uma vez que o tempo é escolhido como coordenada especial. Este procedimento imita o desenvolvimento da mecânica quântica: a teoria clássica é posta na forma hamiltoniana, são feitas as prescrições quânticas usuais e uma equação análoga à de Schrödinger, a equação de Wheeler-DeWitt [14], é construída.

Para pôr a teoria da relatividade geral na forma hamiltoniana nós utilizaremos o formalismo desenvolvido por R. Arnowitt, S. Deser e C. W. Misner [22] nas décadas de 1950 e 1960. Neste formalismo, os verdadeiros graus de liberdade do campo gravitacional residem em hipersuperfícies espaciais que folheiam o espaço-tempo, e a dinâmica do campo gravitacional pode ser vista como a evolução no tempo dessas hipersuperfícies.

## 2.1 Decomposição 3 + 1

O primeiro passo na construção do formalismo hamiltoniano da Relatividade Geral é decompor o espaço-tempo quadridimensional  $\mathcal{M}$  em espaço e tempo. Esta decomposição é feita supondo que o espaço-tempo pode ser folheado em hipersuperfícies de Cauchy do tipo espaço  $\Sigma_t$ ,  $t = \text{constante}$ , de uma função tempo global. Assim, todo o futuro (ou a história passada) do universo pode ser previsto (ou recuperada) a partir de condições no instante de tempo representado por  $\Sigma_t$ .<sup>1</sup> Parametricamente tal folheação é dada por

$$x^\mu = x^\mu(t, \xi^i) \quad (2.1)$$

onde  $t$  rotula hipersuperfícies distintas.<sup>2</sup> O elemento de linha sobre uma dada hipersuperfície  $\Sigma_t$  é dado por

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^j} d\xi^i d\xi^j \\ &= h_{ij} d\xi^i d\xi^j \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde

$$h_{ij} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^i} \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^j} \quad (2.3)$$

é a métrica espacial induzida sobre  $\Sigma_t$ . Escolhendo coordenadas tais que

$$x^0 = t \quad \text{e} \quad x^i = \xi^i \quad (2.4)$$

---

<sup>1</sup>Um espaço-tempo com esta propriedade é dito globalmente hiperbólico. Em espaços-tempo que não tenham esta propriedade a previsibilidade é perdida no sentido de que não é suficiente ter um conhecimento completo das condições em um único "instante" para determinar a história inteira do universo. Wald [25] argumenta que todos os espaços-tempo fisicamente aceitáveis são globalmente hiperbólicos.

<sup>2</sup>Note que espaço-tempo inteiro é gerado se deixarmos  $t$  variar.

de modo que  $\Sigma_t$  é a hipersuperfície coordenada  $x^0 = \text{constante}$ , o campo vetorial normal a essa família de hipersuperfícies é dado por

$$n_\mu = -(-g^{00})^{-1/2}\delta_\mu^0 \quad (2.5)$$

com

$$n^\mu n_\mu = -1. \quad (2.6)$$

Neste ponto é útil introduzirmos o *tensor de projeção*  $h_{\mu\nu}$  definido por

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu. \quad (2.7)$$

Com a ajuda de  $h_{\mu\nu}$  podemos decompor qualquer tensor em suas partes paralela e perpendicular ao vetor  $n^\mu$ . Não é difícil mostrar que o tensor de projeção tem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} i) & h_{\mu\nu} = h_{\nu\mu}, \\ ii) & h_{\mu\nu}n^\nu = 0, \\ iii) & h_{\mu\lambda}h^\lambda{}_\nu = h_{\mu\nu}, \\ iv) & h^\mu{}_\mu = 3, \\ v) & u^\mu n_\mu = 0 \Leftrightarrow u^\mu = h^\mu{}_\nu u^\nu, \\ vi) & h_{ij} = g_{ij}, \\ vii) & h^0{}_\mu = 0, \\ viii) & h^{\mu 0} = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Definindo o *vetor fluxo do tempo*  $t^\mu$  por

$$t^\mu \nabla_\mu t = 1, \quad (2.9)$$

a *função lapso*  $N$  e o *vetor deslocamento*  $N^\mu$  por

$$N = -t^\mu n_\mu \quad (2.10)$$

e

$$N^\mu = h^\mu{}_\nu t^\nu, \quad (2.11)$$

respectivamente, o vetor normal  $n^\mu$  pode ser escrito em termos de  $N$ ,  $N^\mu$  e  $t^\mu$  na forma

$$n^\mu = \frac{1}{N}(t^\mu - N^\mu) \quad (2.12)$$

e, conseqüentemente,

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &= h^{\mu\nu} - n^\mu n^\nu \\ &= h^{\mu\nu} - \frac{1}{N^2}(t^\mu - N^\mu)(t^\nu - N^\nu). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Uma vez que  $x^0 = t$ , segue-se da definição (2.9) que  $t^\mu = \delta_0^\mu$ . Utilizando este fato e as propriedades (vii) e (viii) do tensor de projeção, resulta

$$(g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{N^2} & \frac{N^j}{N^2} \\ \frac{N^i}{N^2} & h^{ij} - \frac{N^i N^j}{N^2} \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Invertendo  $(g^{\mu\nu})$  obtemos

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} -N^2 + N_k N^k & N_j \\ N_i & h_{ij} \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

onde a métrica espacial induzida é usada para abaixar e levantar índices espaciais:  $N_k N^k = h_{jk} N^j N^k = h^{jk} N_j N_k$ ; e  $h_{ij} h^{jk} = \delta_i^k$ . A interpretação geométrica da função lapso e do vetor deslocamento está representada na figura (2.1). A função lapso mede a taxa de variação do tempo próprio  $\tau$  em relação ao tempo coordenado  $t$  sobre curvas normais à hipersuperfície; o deslocamento  $N^i dt$  mede a diferença entre os pontos em  $\Sigma_{t+dt}$  obtidos por deslocamentos de um ponto  $p \in \Sigma_t$  ao longo da curva  $x^i = \text{constante}$  ou ao longo do vetor normal  $n^\mu$ . Isto quer dizer que as coordenadas espaciais são co-móveis se  $N^i = 0$ . Nestas coordenadas demonstra-se facilmente que

$$\sqrt{-g} d^4 x = N \sqrt{h} dt d^3 x, \quad (2.16)$$

onde  $g = \det(g_{\mu\nu})$  e  $h = \det(h_{ij})$ . Como esta quantidade é um escalar, este resultado é completamente geral. Assim, toda a informação sobre o campo gravitacional é transferida para as chamadas variáveis ADM:  $N$ ,  $N^i$  e  $h_{ij}$ .

## 2.2 Curvatura Extrínseca

Levando em conta a decomposição

$$n_{\mu;\nu} = n_{\mu;\lambda}(h^\lambda{}_\nu - n^\lambda n_\nu) \quad (2.17)$$

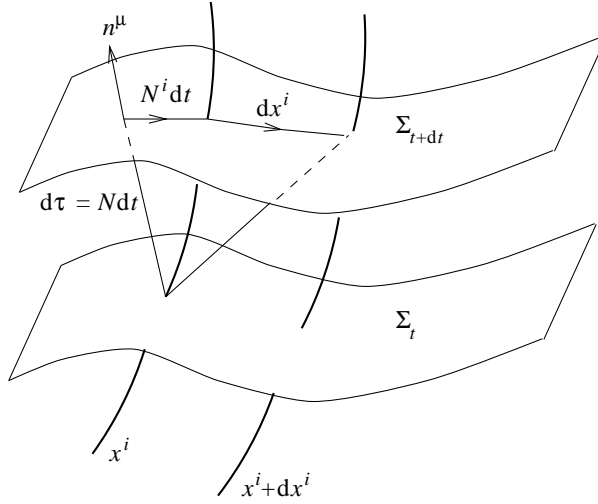


Figura 2.1: Diagrama esquemático do espaço-tempo ilustrando a decomposição 3 + 1 e o significado geométrico da função lapso e do vetor deslocamento.

da derivada covariante do vetor normal, definimos o tensor de *curvatura extrínseca* [26] como

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu} &= -n_{\mu;\lambda} h^\lambda_\nu \\ &= -n_{\mu;\nu} - n_{\mu;\lambda} n^\lambda n_\nu \end{aligned} \quad (2.18)$$

ou, de forma equivalente,

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu} &= -h^\kappa_\mu h^\lambda_\nu n_{\kappa;\lambda} \\ &= -h^i_\mu h^j_\nu n_{i;j} \\ &= -N h^i_\mu h^j_\nu \Gamma^0_{ij}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

onde  $\Gamma^0_{ij}$  são os símbolos de Christoffel. Não é difícil mostrar que

$$\begin{aligned} i) & K_{\mu\nu} = K_{\nu\mu}, \\ ii) & K_{\mu\nu} n^\mu = 0, \\ iii) & K^{\mu 0} = 0, \\ iv) & K^\mu_\mu = -n^\mu_{;\mu}, \\ v) & K^\mu_\mu = K^i_i. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Da equação (2.19) temos

$$\begin{aligned}
K_{ij} &= -N\delta_i^k\delta_j^l\Gamma_{kl}^0 = -N\Gamma_{ij}^0 \\
&= -Ng^{0\lambda}\Gamma_{\lambda ij} = -N(g^{00}\Gamma_{0ij} + g^{0k}\Gamma_{kij}) \\
&= -\frac{N}{2}[g^{00}(g_{0i,j} + g_{j0,i} - g_{ij,0}) + 2g^{0k}\Gamma_{kij}] \\
&= \frac{1}{2N}(N_{i,j} + N_{j,i} - \dot{h}_{ij} - 2N^k\Gamma_{kij}) \\
&= \frac{1}{2N}(N_{i|j} + N_{j|i} - \dot{h}_{ij})
\end{aligned} \tag{2.21}$$

onde o ponto denota a derivada parcial em relação a  $t$  e

$$N_{i|j} = N_{i,j} - {}^3\Gamma_{ji}^k N_k \tag{2.22}$$

é a derivada covariante induzida sobre a hipersuperfície.

A interpretação geométrica do tensor  $K_{\mu\nu}$  é simples e está representada na figura (2.2). Sob um deslocamento do vetor normal ao longo de uma geodésica  $x^i = x^i(u)$  conectando os pontos  $x^i$  e  $x^i + dx^i$  sobre uma dada hipersuperfície  $\Sigma_t$ , temos

$$\begin{aligned}
\frac{D}{Du}n_\mu &= n_{\mu;\nu}\frac{dx^\nu}{du} \\
&= -K_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{du} - n_{\mu;\lambda}n^\lambda n_\nu\frac{dx^\nu}{du} \\
&= -K_{\mu\nu}\frac{dx^\nu}{du},
\end{aligned} \tag{2.23}$$

onde usamos a equação (2.5) e o fato de que  $x^0 = \text{constante}$  sobre a hipersuperfície. Assim,  $K_{\mu\nu}$  mede o quanto uma hipersuperfície se curva em relação ao espaço de dimensão maior em que está imersa.

## 2.3 A Equação de Gauss

Nossa meta nesta seção é escrever o tensor de curvatura  $R_{\kappa\lambda\mu\nu}$  do espaço-tempo quadridimensional em termos de propriedades relativas às hipersuperfícies espaciais, ou seja, do tensor de curvatura tridimensional  ${}^3R_{ijkl}$ , da curvatura extrínseca  $K_{\mu\nu}$  e do vetor normal  $n^\mu$ . Para isto, considere um campo vetorial arbitrário  $v^\mu$  ortogonal a  $n^\mu$ , isto é,

$$v^\mu n_\mu = 0 \quad (\Rightarrow v^\mu = (0, v^i)). \tag{2.24}$$

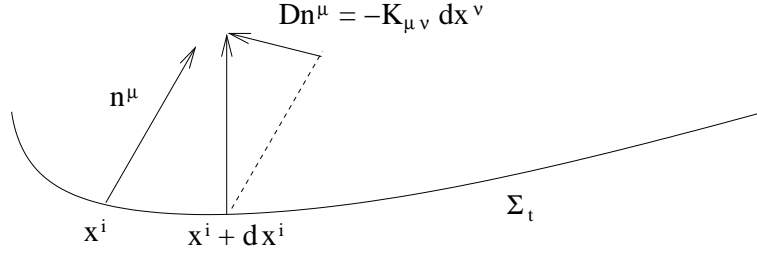


Figura 2.2: Diagrama esquemático do espaço-tempo ilustrando o significado da curvatura extrínseca. A seta tracejada corresponde ao transporte paralelo do vetor normal  $n^\mu$  em  $x^i$  ao longo da geodésica ligando  $x^i$  a  $x^i + dx^i$ . A falta de coincidência deste vetor com  $n^\mu$  em  $x^i + dx^i$  corresponde intuitivamente à curvatura de  $\Sigma_t$  no espaço-tempo em que está imersa.

Projetando a derivada covariante de  $v^\mu$  perpendicularmente a  $n^\mu$ , ou seja,

$$\begin{aligned}
 h_\rho^\mu h_\sigma^\nu v_{\mu;\nu} &= h_\rho^\mu h_\sigma^\nu (v_{\mu,\nu} - \Gamma_{\nu\mu}^\lambda v_\lambda) \\
 &= h_\rho^\mu h_\sigma^\nu (v_{\mu,\nu} - \Gamma_{\lambda\nu\mu} v^\lambda) \\
 &= h_\rho^m h_\sigma^n (v_{m,n} - \Gamma_{lnm} v^l) \\
 &= h_\rho^m h_\sigma^n (v_{m,n} - {}^3\Gamma_{nm}^l v_l) \\
 &= h_\rho^m h_\sigma^n v_{m|n} , \tag{2.25}
 \end{aligned}$$

conseguimos relacionar a derivada covariante de  $v^\mu$  calculada com a métrica do espaço-tempo quadridimensional  $g_{\mu\nu}$  com sua derivada covariante induzida sobre uma hipersuperfície qualquer pertencente à folheação do espaço-tempo. Agora, lembrando que o tensor de Riemann obedece à relação

$$R^\kappa_{\lambda\mu\nu} X_\kappa = -[\nabla_\mu, \nabla_\nu] X_\lambda \tag{2.26}$$

onde  $X^\kappa$  é um campo vetorial qualquer, a equação (2.25) nos faz suspeitar que se projetarmos

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] v_\lambda = v_{\lambda;\nu;\mu} - v_{\lambda;\mu;\nu} \tag{2.27}$$

perpendicularmente a  $n^\mu$  conseguiremos escrever o tensor de Riemann quadridimensional em termos das propriedades das hipersuperfícies espaciais.

Procedendo assim temos

$$\begin{aligned}
h_\rho^\lambda h_\sigma^\mu h_\tau^\nu v_{\lambda;\mu;\nu} &= h_\rho^\lambda h_\sigma^\mu h_\tau^\nu (v_{\lambda;\mu;\nu} - \Gamma_{\nu\lambda}^\alpha v_{\alpha;\mu} - \Gamma_{\nu\mu}^\alpha v_{\lambda;\alpha}) \\
&= h_\rho^\lambda h_\sigma^\mu h_\tau^\nu [v_{\lambda;\mu;\nu} - g^{\alpha\beta} (\Gamma_{\beta\nu\lambda} v_{\alpha;\mu} + \Gamma_{\beta\nu\mu} v_{\lambda;\alpha})] \\
&= h_\tau^\nu [(h_\rho^\lambda h_\sigma^\mu v_{\lambda;\mu})_{,\nu} - (h_\rho^\lambda h_\sigma^\mu)_{,\nu} v_{\lambda;\mu}] \\
&\quad - h_\rho^\lambda h_\sigma^\mu h_\tau^\nu [h^{\alpha\beta} (\Gamma_{\beta\nu\lambda} v_{\alpha;\mu} + \Gamma_{\beta\nu\mu} v_{\lambda;\alpha}) \\
&\quad - n_\beta \Gamma_{\nu\lambda}^\beta v_{\alpha;\mu} n^\alpha - n_\beta \Gamma_{\nu\mu}^\beta v_{\lambda;\alpha} n^\alpha] \tag{2.28}
\end{aligned}$$

onde usamos a equação (2.7). Usando as propriedades (vii) e (viii) de (2.8), as equações (2.5), (2.25) e

$$v_{\alpha;\mu} n^\alpha = -n_{;\mu}^\alpha v_\alpha = -n_{\alpha;\mu} v^\alpha = -n_{\alpha;\mu} v^\alpha \tag{2.29}$$

a equação (2.28) torna-se

$$\begin{aligned}
h_\rho^\lambda h_\sigma^\mu h_\tau^\nu v_{\lambda;\mu;\nu} &= h_\tau^n [(h_\rho^l h_\sigma^m v_{l|m})_{,n} - (h_\rho^l h_\sigma^m)_{,n} v_{l;m}] \\
&\quad - h_\rho^l h_\sigma^m h_\tau^n [h^{ab} (\Gamma_{bnl} v_{a|m} + \Gamma_{bnm} v_{l|a}) \\
&\quad + n_0 \Gamma_{nl}^0 n_{a;m} v^a - n_0 \Gamma_{nm}^0 v_{l;\alpha} n^\alpha] \\
&= h_\tau^n [h_\rho^l h_\sigma^m v_{l|m,n} + (h_\rho^l h_\sigma^m)_{,n} (v_{l|m} - v_{l;m})] \\
&\quad - h_\rho^l h_\sigma^m h_\tau^n ({}^3\Gamma_{nl}^a v_{a|m} + {}^3\Gamma_{nm}^a v_{l|a} \\
&\quad + n_0 \Gamma_{nl}^0 n_{a;m} v^a - n_0 \Gamma_{nm}^0 v_{l;\alpha} n^\alpha) \\
&= h_\rho^l h_\sigma^m h_\tau^n v_{l|m;n} + h_\tau^n (h_\rho^l h_\sigma^m)_{,n} (v_{l|m} - v_{l;m}) \\
&\quad - h_\rho^l h_\sigma^m h_\tau^n (n_0 \Gamma_{nl}^0 n_{a;m} v^a - n_0 \Gamma_{nm}^0 v_{l;\alpha} n^\alpha) \tag{2.30}
\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
h_\rho^\lambda h_\sigma^\mu h_\tau^\nu v_{\lambda;\mu;\nu} &= h_\rho^l h_\sigma^m h_\tau^n (v_{l|m;n} + K_{ln} K_{am} v^a + K_{mn} v_{l;\alpha} n^\alpha) \\
&\quad + h_\tau^n (h_\rho^l h_\sigma^m)_{,n} (v_{l|m} - v_{l;m}) \tag{2.31}
\end{aligned}$$

onde usamos

$$K_{mn} = -n_{m;n} = n_0 \Gamma_{nm}^0. \tag{2.32}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
h_\rho^\lambda h_\sigma^\mu h_\tau^\nu v_{\lambda;\nu;\mu} &= h_\rho^l h_\sigma^m h_\tau^n (v_{l|n|m} + K_{lm} K_{an} v^a + K_{nm} v_{l;\alpha} n^\alpha) \\
&\quad + h_\sigma^m (h_\rho^l h_\tau^n)_{,m} (v_{l|n} - v_{l;n}). \tag{2.33}
\end{aligned}$$



Tomando a diferença entre (2.31) e (2.33) obtemos

$$\begin{aligned}
h_\rho^\lambda h_\sigma^\mu h_\tau^\nu (v_{\lambda;\nu;\mu} - v_{\lambda;\mu;\nu}) &= h_\rho^l h_\sigma^m h_\tau^n [(v_{l|n|m} - v_{l|m|n}) \\
&\quad + (K_{lm}K_{an} - K_{ln}K_{am})v^a] \\
&\quad + [h_\tau^n (h_\rho^l h_\sigma^m)_{,n} \\
&\quad - h_\sigma^n (h_\rho^l h_\tau^m)_{,n}] (v_{l|m} - v_{l;m}) \quad (2.34)
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
-h_\rho^\lambda h_\sigma^\mu h_\tau^\nu R^\kappa_{\lambda\mu\nu} v_\kappa &= h_\rho^l h_\sigma^m h_\tau^n [-{}^3R^k_{lmn} v_k + (K_{lm}K_{an} - K_{ln}K_{am})v^a] \\
&\quad + [h_\tau^n (h_\rho^l h_\sigma^m)_{,n} - h_\sigma^n (h_\rho^l h_\tau^m)_{,n}] (v_{l|m} - v_{l;m}). \quad (2.35)
\end{aligned}$$

Usando as propriedades de simetria do tensor de Riemann e a propriedade (vii) do tensor de projeção, vem

$$\begin{aligned}
h_\rho^l h_\sigma^m h_\tau^n R_{lkmn} v^k &= h_\rho^l h_\sigma^m h_\tau^n [{}^3R_{lkmn} v^k + (K_{lm}K_{kn} - K_{ln}K_{km})v^k] \\
&\quad + [h_\tau^n (h_\rho^l h_\sigma^m)_{,n} - h_\sigma^n (h_\rho^l h_\tau^m)_{,n}] (v_{l|m} - v_{l;m}). \quad (2.36)
\end{aligned}$$

Como  $h_i^j = \delta_i^j$ , o tensor  $T_{\rho\sigma\tau} = h_\rho^l h_\sigma^m h_\tau^n R_{lkmn} v^k$  tem componentes espaciais dadas por

$$T_{ikl} = R_{ijkl} v^j = {}^3R_{ijkl} v^j + (K_{ik}K_{jl} - K_{il}K_{jk}) v^j, \quad (2.37)$$

e, como os  $v^j$ s são todos arbitrários, temos finalmente

$$R_{ijkl} = {}^3R_{ijkl} + K_{ik}K_{jl} - K_{il}K_{jk}. \quad (2.38)$$

Esta equação, conhecida como a equação de Gauss, é a relação que procurávamos.

## 2.4 Escalar de Curvatura

O último passo na direção da formulação hamiltoniana consiste em reescrever o escalar de curvatura somente em termos das propriedades das hipersuperfícies. No mesmo espírito do que foi feito na seção anterior, nós começamos a fazer isto projetando o tensor de Riemann perpendicularmente a  $n^\mu$ ,

$$\begin{aligned}
h^{\kappa\mu} h^{\lambda\nu} R_{\kappa\lambda\mu\nu} &= (g^{\kappa\mu} - n^\kappa n^\mu)(g^{\lambda\nu} + n^\lambda n^\nu) R_{\kappa\lambda\mu\nu} \\
&= R + 2R_{\lambda\nu} n^\lambda n^\nu \quad (2.39)
\end{aligned}$$

ou

$$R = h^{km}h^{ln}R_{klmn} - 2R_{\lambda\nu}n^\lambda n^\nu, \quad (2.40)$$

onde usamos a propriedade (viii) do tensor de projeção. O primeiro termo do lado direito desta equação pode ser obtido diretamente da equação de Gauss:

$$h^{km}h^{ln}R_{klmn} = {}^3R + K^2 - K_{ij}K^{ij}. \quad (2.41)$$

O segundo termo é a componente normal do tensor de Ricci, e pode ser calculado facilmente se usarmos a relação

$$R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu}X^\lambda = [\nabla_\mu, \nabla_\nu]X^\kappa, \quad (2.42)$$

onde  $X^\kappa$  é um campo vetorial qualquer. Deste modo, segue-se que

$$\begin{aligned} R_{\lambda\nu}n^\lambda n^\nu &= R^\mu{}_{\lambda\mu\nu}n^\lambda n^\nu = \delta_\kappa^\mu R^\kappa{}_{\lambda\mu\nu}n^\lambda n^\nu \\ &= \delta_\kappa^\mu ([\nabla_\mu, \nabla_\nu]n^\kappa)n^\nu = g^{\kappa\rho}g^{\sigma\nu}\delta_\kappa^\mu ([\nabla_\mu, \nabla_\nu]n_\rho)n_\sigma \\ &= g^{\mu\rho}g^{\sigma\nu}n_\sigma(\nabla_\mu\nabla_\nu n_\rho - \nabla_\nu\nabla_\mu n_\rho) \\ &= g^{\mu\rho}g^{\sigma\nu}[\nabla_\mu(n_\sigma\nabla_\nu n_\rho) - \nabla_\nu(n_\sigma\nabla_\mu n_\rho) + \\ &\quad + (\nabla_\nu n_\sigma)(\nabla_\mu n_\rho) - (\nabla_\mu n_\sigma)(\nabla_\nu n_\rho)]. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Da definição (2.18) do tensor de curvatura extrínseca temos

$$\nabla_\mu n_\rho = -K_{\rho\mu} - n_\mu n^\lambda \nabla_\lambda n_\rho, \quad (2.44)$$

e, substituindo esta equação em (2.43), vem

$$\begin{aligned} R_{\lambda\nu}n^\lambda n^\nu &= g^{\mu\rho}g^{\sigma\nu}[\nabla_\mu(n_\sigma\nabla_\nu n_\rho) - \nabla_\nu(n_\sigma\nabla_\mu n_\rho) + \\ &\quad + (K_{\sigma\nu} + n_\nu n^\kappa \nabla_\kappa n_\sigma)(K_{\rho\mu} + n_\mu n^\lambda \nabla_\lambda n_\rho) - \\ &\quad - (K_{\sigma\mu} + n_\mu n^\kappa \nabla_\kappa n_\sigma)(K_{\rho\nu} + n_\nu n^\lambda \nabla_\lambda n_\rho)] \\ &= g^{\mu\rho}g^{\sigma\nu}[\nabla_\mu(n_\sigma\nabla_\nu n_\rho) - \nabla_\nu(n_\sigma\nabla_\mu n_\rho) + \\ &\quad + K_{\sigma\nu}K_{\rho\mu} + K_{\sigma\nu}n_\mu n^\lambda \nabla_\lambda n_\rho + K_{\rho\mu}n_\nu n^\kappa \nabla_\kappa n_\sigma + \\ &\quad + n_\mu n_\nu n^\kappa n^\lambda (\nabla_\kappa n_\sigma)(\nabla_\lambda n_\rho) - K_{\sigma\mu}K_{\rho\nu} - \\ &\quad - K_{\sigma\mu}n_\nu n^\lambda \nabla_\lambda n_\rho - K_{\rho\nu}n_\mu n^\kappa \nabla_\kappa n_\sigma - \\ &\quad - n_\mu n_\nu n^\kappa n^\lambda (\nabla_\kappa n_\sigma)(\nabla_\lambda n_\rho)] \\ &= \nabla_\mu(n^\nu \nabla_\nu n^\mu) - \nabla_\nu(n^\nu \nabla_\mu n^\mu) + K^\mu{}_\mu K^\nu{}_\nu \\ &\quad + K^\nu{}_\nu n_\mu n^\lambda \nabla_\lambda n^\mu + K^\mu{}_\mu n_\nu n^\kappa \nabla_\kappa n^\nu - K^{\nu\rho}K_{\rho\nu} - \\ &\quad - K_{\sigma\mu}n^\sigma n^\lambda \nabla_\lambda n^\mu - K_{\rho\nu}n^\rho n^\kappa \nabla_\kappa n^\nu. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Usando as equações (ii) e (iii) de (2.20) podemos reescrever (2.45) como

$$R_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = \nabla_\mu(n^\nu \nabla_\nu n^\mu - n^\mu \nabla_\nu n^\nu) + K^2 - K_{ij}K^{ij} + 2Kn_\nu n^\lambda \nabla_\lambda n^\nu, \quad (2.46)$$

onde  $K = K^\mu{}_\mu = K^i{}_i$  é o traço da curvatura extrínseca. Agora da equação (2.6) temos

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_\lambda(n^\nu n_\nu) = n^\nu \nabla_\lambda n_\nu + n_\nu \nabla_\lambda n^\nu \\ &= n^\nu \nabla_\lambda n_\nu + g_{\nu\rho} n^\rho \nabla_\lambda n^\nu \\ &= n^\nu \nabla_\lambda n_\nu + n^\rho \nabla_\lambda n_\rho \\ &= 2n^\nu \nabla_\lambda n_\nu \end{aligned} \quad (2.47)$$

e, portanto,

$$R_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = \nabla_\mu(n^\nu \nabla_\nu n^\mu - n^\mu \nabla_\nu n^\nu) + K^2 - K_{ij}K^{ij}. \quad (2.48)$$

Substituindo as equações (2.41) e (2.48) na equação (2.40) e usando a propriedade (iv) do tensor de curvatura extrínseca resulta

$$R = {}^3R + K_{ij}K^{ij} - K^2 - 2\nabla_\mu(a^\mu + Kn^\mu), \quad (2.49)$$

onde  ${}^3R$  é a curvatura intrínseca da hipersuperfície espacial  $\Sigma_t$  e  $a^\mu = n^\nu \nabla_\nu n^\mu$  é a quadriaceleração de um observador viajando ao longo do vetor normal  $n^\mu$  a hipersuperfícies sucessivas.

## 2.5 Formalismo Hamiltoniano da Relatividade Geral

O princípio de ação convencional para a gravitação foi proposto por Hilbert pouco dias antes de Einstein apresentar as equações de campo da relatividade geral em sua forma final. Hilbert, motivado por trabalhos anteriores de Einstein, postulou para gravitação a ação

$$S_H = \int d^4x \mathcal{L}_H, \quad (2.50)$$

onde

$$\mathcal{L}_H = \sqrt{-g} R. \quad (2.51)$$

A extremização da ação de Hilbert com relação ao campo métrico  $g_{\mu\nu}$  fornece as equações de Einstein para o vácuo,

$$G_{\mu\nu} = 0. \quad (2.52)$$

Agora, por (2.49) temos que

$$\mathcal{L}_H = \mathcal{L}_g - 2N\sqrt{h} \nabla_\mu (a^\mu + Kn^\mu), \quad (2.53)$$

onde

$$\mathcal{L}_g = N\sqrt{h}({}^3R + K_{ij}K^{ij} - K^2) \quad (2.54)$$

é a densidade lagrangiana usual da geometrodinâmica. Uma vez que  $\mathcal{L}_H$  e  $\mathcal{L}_g$  diferem apenas por uma quadridivergência, elas dão origem às mesmas equações de campo, o que nos permite adotar  $\mathcal{L}_g$  como base do nosso princípio variacional. Introduzindo a supermétrica, um tensor de quarta ordem definido por

$$G_{ijkl} = \frac{1}{2\sqrt{h}}(h_{ik}h_{jl} + h_{il}h_{jk} - h_{ij}h_{kl}) \quad (2.55)$$

cuja inversa é

$$G^{ijkl} = \sqrt{h}[\frac{1}{2}(h^{ik}h^{jl} + h^{il}h^{jk}) - h^{ij}h^{kl}], \quad (2.56)$$

podemos reescrever (2.54) como

$$\mathcal{L}_g = N(G^{ijkl}K_{ij}K_{kl} + \sqrt{h}{}^3R), \quad (2.57)$$

forma que será mais útil para efeito de cálculo. Como usual, os momentos canonicamente conjugados a  $N$ ,  $N_i$  e  $h_{ij}$ , denotados por  $\pi^0$ ,  $\pi^i$  e  $\pi^{ij}$ , respectivamente, são dados por

$$\pi^0 = \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \dot{N}} = 0, \quad (2.58)$$

$$\pi^i = \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \dot{N}_i} = 0 \quad (2.59)$$

e

$$\begin{aligned}
\pi^{ij} &= \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \dot{h}_{ij}} \\
&= 2NG^{klmn} K_{kl} \frac{\partial K_{mn}}{\partial \dot{h}_{ij}} \\
&= -G^{ijkl} K_{kl},
\end{aligned} \tag{2.60}$$

onde usamos a equação (2.21). As equações (2.58) e (2.59) são conhecidas como vínculos primários e expressam o fato de a lagrangiana (2.57) ser independente das "velocidades"  $\dot{N}$  e  $\dot{N}_i$ . Essas "velocidades" são arbitrárias e não podem ser expressas em termos dos momentos. No entanto, elas não aparecem na densidade hamiltoniana gravitacional

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_g &= \pi^0 \dot{N} + \pi^i \dot{N}_i + \pi^{ij} \dot{h}_{ij} - \mathcal{L}_g \\
&= -G^{ijkl} K_{kl} (N_{i|j} + N_{j|i} - 2NK_{ij}) - N(G^{ijkl} K_{ij} K_{kl} + \sqrt{h} {}^3R) \\
&= N(G^{ijkl} K_{ij} K_{kl} - \sqrt{h} {}^3R) - 2\pi^{ij} N_{i|j} \\
&= N(G_{ijkl} \pi^{ij} \pi^{kl} - \sqrt{h} {}^3R) + N_i (2\pi^{ij})_{|j} - (2N_i \pi^{ij})_{|j},
\end{aligned} \tag{2.61}$$

onde usamos (2.21) e o fato de que  $G_{ijkl} G^{klmn} = \delta_{ij}^{mn}$  para inverter (2.60). Desprezando a divergência no último termo de (2.61) temos

$$\mathcal{H}_g = N\mathcal{H}_g^0 + N_i \mathcal{H}_g^i, \tag{2.62}$$

onde

$$\mathcal{H}_g^0 = G_{ijkl} \pi^{ij} \pi^{kl} - \sqrt{h} {}^3R \tag{2.63}$$

e

$$\mathcal{H}_g^i = 2\pi^i{}_{|j}. \tag{2.64}$$

Agora, uma vez que os vínculos primários devem ser mantidos em qualquer instante, derivadas em relação a  $t$  de  $\pi^0$  e  $\pi^i$  devem ser nulas, isto é,  $\dot{\pi}^0 = \{\pi^0, \mathcal{H}_g^0\} = 0$  e  $\dot{\pi}^i = \{\pi^i, \mathcal{H}_g^i\} = 0$ , de modo que

$$\mathcal{H}_g^0 = 0 \tag{2.65}$$

e

$$\mathcal{H}_g^i = 0. \tag{2.66}$$

As equações (2.65) e (2.66) são os chamados vínculos secundários. Em virtude da estrutura de  $\mathcal{H}_g^0$ , "energia cinética" mais "energia potencial" com o "quadrado" do momento  $\pi^{ij}$  desempenhando o papel de energia cinética e o negativo da curvatura intrínseca o de energia potencial, iremos nos referir a (2.65) como *vínculo hamiltoniano*.

## Capítulo 3

# Teoria Hamiltoniana de um Fluido Perfeito Relativístico

Até aqui nossos esforços concentraram-se na obtenção de uma formulação hamiltoniana apenas para o campo gravitacional. Contudo, o objeto do nosso estudo é a cosmologia e, portanto, uma descrição para o conteúdo material do Universo torna-se necessária. Especificamente estaremos preocupados em estudar situações em que efeitos quânticos tornam-se relevantes, ou seja, singularidades passadas ou futuras tais como *big bang*, *big crunch* ou *big rip*. Embora, em princípio, o conteúdo material do Universo deva ser descrito por campos fundamentais devido ao caráter quântico do problema [27], nós iremos adotar uma descrição mais simples na qual o Universo é preenchido por um fluido perfeito. A vantagem dessa abordagem fenomenológica é que soluções exatas podem ser construídas para um fluido com equação de estado  $p = \omega\rho$  [28].

Para descrever o fluido utilizaremos o formalismo desenvolvido por Schutz [23] no início da década de 1970. Nesse formalismo a quadri-velocidade é expressa em termos de cinco potenciais de velocidade, cada um dos quais obedecendo à sua própria equação de movimento. Essas equações, completamente equivalentes às equações de movimento usuais decorrentes da conservação do tensor de energia-momento, podem ser obtidas a partir da variação de uma ação cuja densidade lagrangiana é  $\mathcal{L} = \sqrt{-g}(R + p)$ , onde  $R$  é o escalar de curvatura e  $p$  a pressão do fluido. O presente capítulo consiste numa revisão do formalismo de Schutz e pode ser pulado por aqueles que já estão

familiarizados com ele.

### 3.1 Fluidos Perfeitos Relativísticos

Considere um fluido perfeito composto de bárions. Embora a massa total  $M$  de um fluido bariônico não se conserve, uma vez que possíveis decaimentos podem ocorrer, o número total  $N$  de bárions sempre é conservado. Assim, a energia do estado fundamental do fluido bariônico é definida como

$$E_0 = m_H N, \quad (3.1)$$

onde  $m_H$  é massa do átomo de hidrogênio em seu estado fundamental. Esta definição obviamente é motivada pelo fato de o bárion mais leve, o próton, ser estável. A energia interna  $U$  do fluido é definida como a diferença entre a energia total e  $E_0$ , isto é,

$$U = M - m_H N. \quad (3.2)$$

Portanto, a densidade total de matéria-energia é dada por

$$\rho = \rho_0(1 + u), \quad (3.3)$$

onde  $\rho_0$  é a densidade de matéria-energia do estado fundamental e

$$u = \frac{U}{m_H N} \quad (3.4)$$

é a energia interna específica. Suponha, agora, que o fluido seja caracterizado por uma equação de estado da forma  $p = p(\rho_0, u)$ . Então, pela primeira lei da termodinâmica, a quantidade de energia por bárion adicionada ao fluido em qualquer processo quase-estático é dada por

$$\delta q = du + pd\left(\frac{1}{\rho_0}\right). \quad (3.5)$$

Definindo a massa inercial específica como

$$\mu = \frac{\rho + p}{\rho_0} \quad (3.6)$$

temos, por (3.3) e (3.5),

$$d\mu = \delta q + \frac{1}{\rho_0} dp \quad (3.7)$$



ou, resolvendo para  $dp$  e usando fato que  $dq = T ds$ ,

$$dp = \rho_0(d\mu - Tds) \quad (3.8)$$

onde  $s = s(\rho_0, u)$  é a entropia específica do fluido e  $T = T(\rho_0, u)$  sua temperatura. Podemos ver claramente que  $\rho_0$  e  $u$  podem ser escritos em função de  $\mu$  e  $s$ , de modo que a equação de estado pode ser posta na forma

$$p = p(\mu, s), \quad (3.9)$$

a qual será melhor para trabalharmos. Agora, para definirmos completamente um fluido perfeito relativístico, é necessário, além da sua equação de estado, eq. (3.9), o seu tensor de energia-momento

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= (\rho + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu} \\ &= \mu\rho_0 u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (3.11)$$

é a quadrivelocidade do fluido, que está sujeita à seguinte condição de normalização:

$$u^\mu u_\mu = -1. \quad (3.12)$$

A conservação do número bariônico, reescrito em termos de  $\rho_0$ , está incorporada na equação

$$(\rho_0 u^\mu)_{;\mu} = 0. \quad (3.13)$$

As equações (3.12) e (3.13), juntamente com a conservação do tensor de energia-momento

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0, \quad (3.14)$$

determinam completamente o movimento de um fluido cuja equação de estado é conhecida.

O significado físico das quatro equações (3.14) torna-se mais claro se separarmos suas componentes paralelas e perpendiculares à quadrivelocidade.

Projetando paralelamente a  $u^\mu$  temos

$$\begin{aligned}
0 &= u_\mu T^{\mu\nu}_{;\nu} \\
&= u_\mu (\mu \rho_0 u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu})_{;\nu} \\
&= u_\mu (\mu \rho_0 u^\mu u^\nu)_{;\nu} + u^\nu p_{,\nu} \\
&= u_\mu (\mu u^\mu)_{;\nu} \rho_0 u^\nu + u^\nu p_{,\nu} \\
&= u^\nu (p_{,\nu} - \rho_0 \mu_{,\nu}).
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Por outro lado, da equação (3.8), temos

$$\begin{aligned}
\rho_0 T ds &= -(dp - \rho_0 d\mu) \\
&= -dx^\nu (p_{,\nu} - \rho_0 \mu_{,\nu}).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Dividindo ambos os lados desta equação por  $d\tau$  vem

$$\rho_0 T \frac{ds}{d\tau} = -u^\nu (p_{,\nu} - \rho_0 \mu_{,\nu}) \tag{3.17}$$

e, por (3.15),

$$\frac{ds}{d\tau} = u^\nu s_{,\nu} = 0. \tag{3.18}$$

Está claro desta última equação que movimentos de um fluido perfeito devem conservar a entropia por bárion. Além disso, uma vez que  $\delta q = T ds$ , não há fluxo de calor em qualquer elemento do fluido durante seu movimento.

Agora, para construirmos as três equações de movimento independentes perpendiculares a  $u^\mu$ , nós introduzimos o tensor

$$P^\lambda_\mu = \delta^\lambda_\mu + u^\lambda u_\mu, \tag{3.19}$$

o qual projeta tensores perpendicularmente a  $u^\mu$ . Note que este tensor tem as propriedades de (i) a (v) de (2.8) <sup>1</sup>. Deste modo,

$$\begin{aligned}
0 &= P^\lambda_\mu T^{\mu\nu}_{;\nu} \\
&= P^\lambda_\mu (\mu \rho_0 u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu})_{;\nu} \\
&= P^\lambda_\mu (\mu u^\mu_{;\nu} + \mu_{,\nu} u^\mu) \rho_0 u^\nu + P^{\lambda\nu} p_{,\nu} \\
&= \mu \rho_0 u^\lambda_{;\mu} u^\mu + P^{\lambda\mu} p_{,\mu}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

---

<sup>1</sup>Se adicionalmente supusermos que as coordenadas são co-móveis, então  $P^\lambda_\mu$  terá as mesmas propriedades que  $h^\lambda_\mu$ .

donde

$$-P^{\lambda\mu}p_{,\mu} = \mu\rho_0 u^\lambda_{;\mu} u^\mu. \quad (3.21)$$

Em um referencial inercial localmente co-móvel, isto é,

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \doteq 0, \quad u^\mu \doteq (-1, \vec{v}) \quad (3.22)$$

onde  $\vec{v}$  é instantaneamente igual a zero, a parte espacial de (3.21) torna-se

$$-\text{grad}p = (\rho + p) \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad (3.23)$$

que é a lei de força usual com  $(\rho + p)$  desempenhando o papel de massa inercial.

## 3.2 Representação Via Potenciais de Velocidade

As equações de movimento obedecidas por um fluido perfeito, eq. (3.14), são usualmente interpretadas em um sentido lagrangiano<sup>2</sup>: a quadrivelocidade é considerada como a taxa de variação em relação ao tempo próprio da posição da partícula. Assim, a quadrivelocidade é vista como uma pequena seta carregada pelas partículas ao longo de seu movimento e somente no limite do contínuo podem ser consideradas como um campo vetorial uma vez que o fluido é composto por partículas discretas muito próximas umas das outras. Por outro lado, a quadrivelocidade pode ser considerada como um campo vetorial sobre todo o espaço-tempo e, deste modo, pode ser representada em termos de campos escalares e seus gradientes. Enquanto as partículas movem-se através do espaço, os escalares em um dado ponto simplesmente mudam sua magnitude com o tempo. Esta representação por potenciais de velocidade conduz a uma interpretação euleriana da dinâmica do fluido.

Para obter a representação por potenciais de velocidade, considere duas funções  $\theta$  e  $\phi$  definidas por

$$\frac{d\theta}{d\tau} = T, \quad (3.24)$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = -\mu \quad (3.25)$$

---

<sup>2</sup>Os adjetivos lagrangiano e euleriano se referem respectivamente a observadores co-móveis com o fluido ou fixos em relação a algum referencial arbitrário através do qual o fluido escoou.

e o campo vetorial  $W^\mu$  definido por

$$W_\mu = \mu u_\mu - \phi_{,\mu} - \theta s_{,\mu}, \quad (3.26)$$

o qual, por (3.12), (3.18) e (3.25), é ortogonal a  $u^\mu$ :

$$u^\mu W_\mu = 0. \quad (3.27)$$

Tomando a derivada de Lie de  $W_\mu$  em relação a  $u^\mu$  vem

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_u W_\mu &= u^\lambda W_{\mu;\lambda} + W_\lambda u^\lambda_{;\mu} \\ &= u^\lambda W_{\mu;\lambda} - u^\lambda W_{\lambda;\mu} \\ &= u^\lambda (\mu u_\mu - \phi_{,\mu} - \theta s_{,\mu})_{;\lambda} - u^\lambda (\mu u_\lambda - \phi_{,\lambda} - \theta s_{,\lambda})_{;\mu} \\ &= u^\lambda (\mu u_\mu)_{;\lambda} - T s_{,\mu} + \mu_{,\mu} \\ &= u^\lambda (\mu u_\mu)_{;\lambda} + \frac{1}{\rho_0} p_{,\mu}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Por sua vez,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\rho_0} T^\lambda_{\mu;\lambda} \\ &= \frac{1}{\rho_0} (\mu \rho_0 u_\mu u^\lambda + p \delta^\lambda_\mu)_{;\lambda} \\ &= u^\lambda (\mu u_\mu)_{;\lambda} + \frac{1}{\rho_0} p_{,\mu}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

donde

$$\mathcal{L}_u W_\mu = 0. \quad (3.30)$$

Por esta equação e pela condição de ortogonalidade (3.27) temos que, em um sistema de coordenadas co-móveis ( $u^\mu = \delta^\mu_0$ ),

$$W_\mu = (0, W_i) \text{ e } W_{i,0} = 0. \quad (3.31)$$

Agora, um velho teorema sobre formas diferenciais, o teorema de Pfaff [29], diz que se  $f_i(x^k)$  são  $N$  funções de  $N$  variáveis independentes  $x^k$ , então existem funções  $\alpha_j(x^k)$ ,  $\beta_j(x^k)$  e  $\gamma_j(x^k)$  tais que

$$\sum_{i=1}^N f_i dx^i = \begin{cases} \sum_{j=1}^{N/2} \alpha_j d\beta_j & \text{se } N \text{ é par} \\ d\gamma + \sum_{j=1}^{(N-1)/2} \alpha_j d\beta_j & \text{se } N \text{ é ímpar.} \end{cases} \quad (3.32)$$

Conseqüentemente,

$$f_i(x^k) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{N/2} \alpha_j \partial_i \beta_j & \text{se } N \text{ é par} \\ \partial_i \gamma + \sum_{j=1}^{(N-1)/2} \alpha_j \partial_i \beta_j & \text{se } N \text{ é ímpar.} \end{cases} \quad (3.33)$$

Deste modo, podemos aplicar o teorema de Pfaff com  $N = 3$  para obter

$$W_i = \alpha \beta_{,i} + \gamma_{,i}. \quad (3.34)$$

Como  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  não dependem de  $x^0 = \tau$ ,

$$\frac{d\alpha}{d\tau} = \frac{d\beta}{d\tau} = \frac{d\gamma}{d\tau} = 0 \quad (3.35)$$

e

$$W_\mu = \mu u_\mu - \phi_{,\mu} - \theta s_{,\mu} = \alpha \beta_{,\mu} + \gamma_{,\mu}. \quad (3.36)$$

Uma vez que  $\phi$  é definido a menos de uma função arbitrária de  $x^i$ , podemos absorver  $\gamma$  em  $\phi$  e, resolvendo (3.36) para  $u_\mu$ , escrever a quadrivelocidade como

$$u_\mu = \frac{1}{\mu} (\phi_{,\mu} + \alpha \beta_{,\mu} + \theta s_{,\mu}). \quad (3.37)$$

Finalizando esta seção escrevemos abaixo as equações dinâmicas nesta representação (eqs.(3.13), (3.18), (3.24), (3.25) e (3.35) ):

$$\begin{aligned} i) & (\rho_0 u^\mu)_{;\mu} = 0; \\ ii) & u^\mu s_{,\mu} = 0; \\ iii) & u^\mu \theta_{,\mu} = T; \\ iv) & u^\mu \alpha_{,\mu} = 0; \\ v) & u^\mu \beta_{,\mu} = 0; \\ vi) & u^\mu \phi_{,\mu} = -\mu. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Pela condição de normalização obtemos a relação funcional entre  $\mu$  e os potenciais escalares:

$$\mu^2 = -g^{\mu\nu} (\phi_{,\mu} + \alpha \beta_{,\mu} + \theta s_{,\mu}) (\phi_{,\nu} + \alpha \beta_{,\nu} + \theta s_{,\nu}). \quad (3.39)$$

ou de forma mais concisa,

$$\mu^2 = -v^\nu v_\nu, \quad (3.40)$$

onde  $v^\mu$  é definido como

$$\begin{aligned} v_\mu &= \mu u_\mu \\ &= \phi_{,\mu} + \alpha \beta_{,\mu} + \theta s_{,\mu}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

### 3.3 O Princípio de Ação

As equações de movimento escritas no final da última seção podem ser obtidas a partir da variação da ação de Schutz

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (R + p) \quad (3.42)$$

com relação aos potenciais escalares  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $s$ ,  $\alpha$  e  $\beta$ . Nesta equação,  $g$  é o determinante da métrica e  $p$  a pressão do fluido. Para calcular variações de primeira ordem na pressão usamos a primeira lei da termodinâmica (eq.(3.8))

$$\delta p = \rho_0 \delta \mu - \rho_0 T \delta s \quad (3.43)$$

com  $\delta \mu$  sendo calculado a partir da equação (3.39). Substituindo as derivadas ordinárias por derivadas covariantes em (3.41) e denotando os potenciais escalares genericamente por  $\psi$ , de modo que  $v_\mu = v_\mu(\psi, \nabla_\lambda \psi)$ , temos por (3.40) que

$$\begin{aligned} 2\mu \delta \mu &= -2v^\nu \delta v_\nu \\ &= -2v^\nu \left[ \frac{\partial v_\nu}{\partial \psi} \delta \psi + \frac{\partial v_\nu}{\partial \nabla_\lambda \psi} \delta(\nabla_\lambda \psi) \right]. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Multiplicando ambos os lados desta equação por  $\rho_0/2\mu$ , usando (3.41) e o fato de que a derivada covariante comuta com a derivada variacional, temos

$$\begin{aligned} \rho_0 \delta \mu &= -\rho_0 u^\nu \frac{\partial v_\nu}{\partial \psi} \delta \psi - \rho_0 u^\nu \frac{\partial v_\nu}{\partial \nabla_\lambda \psi} \nabla_\lambda (\delta \psi) \\ &= -\rho_0 u^\nu \frac{\partial v_\nu}{\partial \psi} \delta \psi - \nabla_\lambda (\rho_0 u^\nu \frac{\partial v_\nu}{\partial \nabla_\lambda \psi} \delta \psi) \\ &\quad + \nabla_\lambda (\rho_0 u^\nu \frac{\partial v_\nu}{\partial \nabla_\lambda \psi}) \delta \psi. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Conseqüentemente,

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ -\rho_0 u^\nu \frac{\partial v_\nu}{\partial \psi} \delta \psi + \nabla_\lambda (\rho_0 u^\nu \frac{\partial v_\nu}{\partial \nabla_\lambda \psi}) \delta \psi - \rho_0 T \delta s \right], \quad (3.46)$$

onde descartamos os termos de superfície. Desta equação segue-se diretamente que variações em relação a  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $s$ ,  $\alpha$  e  $\beta$  dão, respectivamente, as

seguintes equações:

$$\begin{aligned}
 i) & (\rho_0 u^\mu)_{;\mu} = 0; \\
 ii) & u^\mu s_{,\mu} = 0; \\
 iii) & u^\mu \theta_{,\mu} = T; \\
 iv) & u^\mu \alpha_{,\mu} = 0; \\
 v) & u^\mu \beta_{,\mu} = 0;
 \end{aligned}$$

e utilizando a condição de normalização juntamente com as equações (ii) e (iv) temos

$$vi) u^\mu \phi_{,\mu} = -\mu.$$

Portanto, como havíamos afirmado no início da seção, as equações (3.38) podem ser obtidas partindo da ação (3.42). Para finalizar, variando a ação (3.42) com relação ao campo métrico  $g^{\mu\nu}$  vem

$$\begin{aligned}
 \delta S &= \int d^4x (\sqrt{-g} G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \delta \sqrt{-g} p + \sqrt{-g} \delta p) \\
 &= \int d^4x \sqrt{-g} (G_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} p + \rho_0 \delta \mu), \quad (3.47)
 \end{aligned}$$

onde usamos (3.43) e o resultado

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (3.48)$$

Por (3.40) temos

$$\begin{aligned}
 2\mu \delta \mu &= -v_\mu v_\nu \delta g^{\mu\nu} \\
 \Rightarrow \rho_0 \delta \mu &= -\frac{1}{2} \rho_0 \mu u_\mu u_\nu \delta g^{\mu\nu} \quad (3.49)
 \end{aligned}$$

donde,

$$\delta S = \int d^4x \sqrt{-g} \delta g^{\mu\nu} [G_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (\rho_0 \mu u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu})] = 0. \quad (3.50)$$

Usando (3.6) resulta

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} T_{\mu\nu}, \quad (3.51)$$

onde  $T_{\mu\nu}$  é o tensor de energia momento do fluido perfeito. Estas são as equações de Einstein tendo um fluido perfeito como fonte de gravitação. Deste modo, a validade do princípio variacional de Schutz está completamente estabelecida.

### 3.4 Teoria Hamiltoniana de um Fluido Perfeito Relativístico

Para finalizar este capítulo nós empregaremos o formalismo desenvolvido no primeiro capítulo para construir a hamiltoniana para o fluido. Deste modo, a ação do fluido é escrita como

$$S_m = \int dt \int d^3x N \sqrt{h} p \quad (3.52)$$

onde, como antes,  $N$  é a função lapso,  $h$  o determinante da métrica induzida sobre as hipersuperfícies  $\Sigma_t$  que folheiam o espaço-tempo  $\mathcal{M}$  e  $p$  a pressão do fluido. Assim, a densidade lagrangiana do fluido é

$$\mathcal{L}_m = N \sqrt{h} p. \quad (3.53)$$

Denotando por  $\psi_a$  os potenciais  $\phi$ ,  $\theta$ ,  $s$ ,  $\alpha$  e  $\beta$ , os momentos canonicamente conjugados a  $\psi_a$  são definidos por

$$p^a \equiv \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \dot{\psi}_a} = N \sqrt{h} \frac{\partial p}{\partial \dot{\psi}_a}, \quad (3.54)$$

uma vez que  $N$  e  $h$  não dependem dos potenciais. Por (3.8) e (3.40) temos

$$\begin{aligned} p^a &= N \sqrt{h} \frac{\partial p}{\partial \dot{\psi}_a} \\ &= N \sqrt{h} \rho_0 \frac{\partial \mu}{\partial \dot{\psi}_a} \\ &= -N \sqrt{h} \rho_0 u^\nu \frac{\partial v_\nu}{\partial \dot{\psi}_a} \end{aligned} \quad (3.55)$$

e por (3.41) segue-se imediatamente que

$$\begin{aligned} i) \quad p^\phi &= -N \sqrt{h} \rho_0 u^0; \\ ii) \quad p^\theta &= 0; \\ iii) \quad p^s &= \theta p_\phi; \\ iv) \quad p^\alpha &= 0; \\ v) \quad p^\beta &= \alpha p_\phi. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Das equações (3.56) podemos ver claramente que o único momento independente é  $p^\phi$ . Como fizemos no capítulo 1, a densidade hamiltoniana do fluido



é definida como

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_m &= p^a \dot{\psi}_a - \mathcal{L}_m \\
 &= p^\phi (\dot{\phi} + \alpha \dot{\beta} + \theta \dot{s}) - N \sqrt{h} p \\
 &= -N \sqrt{h} (\mu \rho_0 u^0 u_0 + p) \\
 &= N \mathcal{H}_m^0,
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

onde

$$\mathcal{H}_m^0 = -\sqrt{h} T_0^0. \tag{3.58}$$



## Capítulo 4

# Tratamento Quântico da Singularidade do Big Rip

Como foi dito anteriormente, nosso interesse reside em situações em que efeitos quânticos tornam-se relevantes, isto é, vizinhanças de singularidades. Singularidades são inevitáveis em relatividade geral e, do ponto de vista matemático, implicam a quebra do conceito de geometria do espaço-tempo. Fisicamente, isto significa uma incompletude da teoria e acredita-se que uma teoria futura, mais completa que a relatividade geral, possa resolver este problema. Uma vez que todas as interações fundamentais devem possuir uma descrição quântica, e a gravitacional não deve ser exceção, espera-se que a quantização do campo gravitacional seja a solução para este problema. Contudo, apesar dos esforços realizados por mais de cinco décadas por físicos de todas as partes do mundo, nenhuma teoria quântica da gravidade consistente foi construída, até o presente momento. Esta dificuldade na obtenção de uma descrição quântica do campo gravitacional tem estimulado o desenvolvimento da cosmologia quântica, um método menos completo, contudo mais tratável, de investigar a influência de efeitos quânticos sobre a evolução do Universo. Neste capítulo nós empregaremos o formalismo desenvolvido nos capítulos anteriores à quantização de um universo espacialmente plano, homogêneo e isotrópico preenchido homogeneamente por um fluido perfeito com equação de estado  $p/\rho = w$ , com  $w < -1$ . De posse do hamiltoniano do campo gravitacional e suas fontes efetuaremos o procedimento de quantização canônica obtendo assim a equação de Wheeler-DeWitt, a qual determina

o objeto central da cosmologia quântica: a função de onda do Universo.

## 4.1 A Equação de Wheeler-DeWitt

O formalismo canônico, desenvolvido nos capítulos anteriores, pode ser resumido na seguinte ação:

$$\mathcal{S} = \int dt \int d^3x (\pi^{ij} \dot{h}_{ij} + p^a \dot{\psi}_a - N\mathcal{H}^0 - N_i \mathcal{H}^i), \quad (4.1)$$

onde  $\pi^{ij}$  é o momento canonicamente conjugado a  $h_{ij}$ ,  $p^a$  o momento canonicamente conjugado aos campos de matéria  $\psi_a$ ,

$$\mathcal{H}^0 = \mathcal{H}_g^0 + \mathcal{H}_m^0 \quad (4.2)$$

e

$$\mathcal{H}^i = \mathcal{H}_g^i + \mathcal{H}_m^i, \quad (4.3)$$

com  $\mathcal{H}_g^0$  dado por (2.63),  $\mathcal{H}_m^0$  por (3.58),  $\mathcal{H}_g^i$  por (2.64) e  $\mathcal{H}_m^i = 0$ . Agora o vínculo hamiltoniano e o vínculo do momento são dados, respectivamente, por

$$\mathcal{H}^0 = 0 \quad (4.4)$$

e

$$\mathcal{H}^i = 0. \quad (4.5)$$

A transição da teoria clássica para a teoria quântica é feita efetuando-se a prescrição

$$\begin{aligned} \pi^0 &\rightarrow \hat{\pi}^0 = -i \frac{\delta}{\delta N}, & \pi^i &\rightarrow \hat{\pi}^i = -i \frac{\delta}{\delta N_i}, \\ \pi^{ij} &\rightarrow \hat{\pi}^{ij} = -i \frac{\delta}{\delta h_{ij}}, & p^a &\rightarrow \hat{p}^a = -i \frac{\delta}{\delta \psi_a} \end{aligned} \quad (4.6)$$

e substituindo as equações de vínculo clássicas (2.58), (2.59), (4.4) e (4.5) por condições sobre os estados  $\Psi$ . Assim, os vínculos primários,

$$\hat{\pi}^0 \Psi = -i \frac{\delta \Psi}{\delta N} = 0 \quad (4.7)$$

e

$$\hat{\pi}^i \Psi = -i \frac{\delta \Psi}{\delta N_i} = 0, \quad (4.8)$$

nos dizem que  $\Psi$  só depende de  $h_{ij}$  e de  $\psi_a$ ; o vínculo do momento,

$$\hat{\mathcal{H}}^i \Psi = -2i \left( \frac{\delta \Psi}{\delta h_{ij}} \right)_{|j} = 0, \quad (4.9)$$

diz que  $\Psi$  depende apenas da geometria do espaço e não das coordenadas utilizadas para descrevê-la; e o vínculo hamiltoniano,

$$\hat{\mathcal{H}}^0 \Psi = - \left( G_{ijkl} \frac{\delta}{\delta h_{ij}} \frac{\delta}{\delta h_{kl}} + \sqrt{\hbar} {}^3R + \sqrt{\hbar} \hat{T}_0^0 \right) \Psi = 0, \quad (4.10)$$

fornece a dinâmica da teoria quântica. Aqui,  $\hat{T}_0^0 = \hat{T}_0^0(\psi_a, -i\delta/\delta\psi_a)$  é o operador associado a  $T_0^0$ . Esta equação diferencial funcional de segunda ordem é conhecida como equação de Wheeler-DeWitt. A equação de Wheeler-DeWitt está definida em um espaço de dimensão infinita contendo todas as configurações possíveis da geometria espacial e dos campos de matéria, denominado *superespaço*. Isto significa que devemos resolvê-la em cada ponto  $x$  de  $\Sigma_t$  o que, pelo menos com as técnicas disponíveis no momento, não é possível.

## 4.2 Mini-superespaço

Embora seja extremamente difícil obter soluções gerais da equação de Wheeler-DeWitt no superespaço, soluções interessantes podem ser obtidas no contexto da cosmologia quântica, onde o número infinito de graus de liberdade do superespaço é reduzido a um número finito utilizando argumentos de simetria. O subespaço assim construído é denominado *mini-superespaço*. Uma forma simples de se construir um mini-superespaço é considerar universos homogêneos. Deste modo, em vez de termos uma equação de Wheeler-DeWitt em cada ponto  $x$  da hipersuperfície espacial  $\Sigma_t$  teremos uma única equação de Wheeler-DeWitt sobre  $\Sigma_t$ . No restante desta dissertação nos restringiremos ao estudo de um universo espacialmente plano, homogêneo e isotrópico descrito pelo elemento de linha

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + a^2(t) \delta_{ij} dx^i dx^j, \quad (4.11)$$

onde  $N(t)$  é a função lapso,  $a(t)$  o fator de escala e  $\delta_{ij} = \text{diag}(1, 1, 1)$ . Uma vez que estas hipóteses desempenham um papel importante em cosmologia

clássica e têm um forte suporte observacional, é possível que alguma informação importante acerca da teoria completa possa ser obtida. Entretanto, não devemos nos manter exageradamente esperançosos com respeito a isto já que enormes complexidades, que sem dúvida alguma devem ser relevantes no nível quântico, estão sendo ignoradas. Uma vez que o único grau de liberdade remanescente do campo gravitacional é o fator de escala  $a$ , podemos definir o momento canonicamente conjugado ao fator de escala por

$$\begin{aligned} p_a &= \frac{\partial \mathcal{L}_g}{\partial \dot{a}} \\ &= 2NG^{ijkl}K_{ij}\frac{\partial K_{kl}}{\partial \dot{a}} \\ &= -2N\pi^{kl}\frac{\partial K_{kl}}{\partial \dot{a}}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

onde usamos (2.54) e (2.60). Para o elemento de linha (4.11) a métrica espacial induzida sobre  $\Sigma_t$  é

$$h_{kl} = a^2(t)\delta_{kl} \quad (4.13)$$

e, por (2.21), temos que

$$K_{kl} = -\frac{\dot{h}_{kl}}{2N} = -\frac{a\dot{a}\delta_{kl}}{N}. \quad (4.14)$$

Substituindo (4.14) em (4.12) e usando a identidade  $p_a = (1/3)p_a\delta^{kl}\delta_{kl}$  temos

$$\frac{1}{3}p_a\delta^{kl}\delta_{kl} = 2a\pi^{kl}\delta_{kl} \quad (4.15)$$

donde

$$\pi^{kl} = \frac{p_a}{6a}\delta^{kl}. \quad (4.16)$$

Assim, a parte gravitacional do hamiltoniano  $\mathcal{H}^0$  torna-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_g^0 &= G_{ijkl}\pi^{ij}\pi^{kl} - \sqrt{h}{}^3R \\ &= \frac{1}{72a}p_a^2[2\delta_{ij}\delta^{ij} - (\delta_{ij}\delta^{ij})^2] \\ &= -\frac{1}{24a}p_a^2, \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde usamos o fato de que, para a métrica (4.11),  ${}^3R = 0$ .

Agora, em um referencial co-móvel, a quadrivelocidade do fluido toma a forma

$$u^\mu = -\delta_0^\mu / N, \quad (4.18)$$

de modo que  $T_0^0 = -\rho$ . Usando o fato de que  $\delta q = T ds$  e (3.3), a equação (3.5), para um fluido com equação de estado  $p = w\rho$  torna-se

$$\begin{aligned} T ds &= d\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) + w\rho d\left(\frac{1}{\rho_0}\right) \\ &= \frac{\rho}{\rho_0} d\left[\ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) - w \ln \rho_0\right], \end{aligned} \quad (4.19)$$

donde

$$T = \frac{\rho}{\rho_0}; \quad s = \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) - w \ln \rho_0. \quad (4.20)$$

Resolvendo a segunda destas equações para  $\rho$  temos

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0^{1+w} e^s \\ &= a^{-3(1+w)} p_\phi^{1+w} e^s, \end{aligned} \quad (4.21)$$

onde usamos a equação (i) de (3.52),  $Nu^0 = -1$  e  $\sqrt{h} = a^3$ . Assim, o hamiltoniano do fluido torna-se

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_m^0 &= -\sqrt{h} T_0^0 \\ &= a^{-3w} p_\phi^{1+w} e^s. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Finalmente, substituindo (4.17) e (4.22) em (4.2) resulta

$$\mathcal{H}^0 = -\frac{1}{24a} p_a^2 + a^{-3w} p_\phi^{1+w} e^s. \quad (4.23)$$

O hamiltoniano acima pode ser posto em uma forma mais adequada aos nossos propósitos se efetuarmos uma mudança de variáveis no espaço de fase  $(a, \phi, s, p_a p_\phi, p_s) \rightarrow (a, \eta, s, p_a p_\eta, p_s)$  definida por

$$\eta = -p_s p_\phi^{-(1+w)} e^{-s}, \quad p_\eta = p_\phi^{1+w} e^s. \quad (4.24)$$

Não é difícil mostrar que o parêntese de Poisson  $\{\eta, p_\eta\} = 1$  e que os demais são nulos, ou seja, que a transformação (4.24) é canônica. Deste modo, a hamiltoniana (4.23) toma a forma:

$$\mathcal{H}^0 = -\frac{1}{24a} p_a^2 + a^{-3w} p_\eta. \quad (4.25)$$

Assim, as simetrias contidas no elemento de linha (4.11) permitiram que o número infinito de graus de liberdade do superespaço fosse reduzido a apenas dois: o fator de escala do universo  $a(t)$  e  $\eta$ , o único grau de liberdade remanescente do fluido.

### 4.3 Energia Fantasma e o Big Rip

Desde que surgiram evidências convincentes de que o Universo está se expandindo a uma taxa crescente [15, 16], muitas idéias têm sido propostas para dar sentido a este descobrimento inesperado. A mais popular delas supõe que o Universo é homogeneamente preenchido por um fluido de natureza desconhecida com equação de estado  $p/\rho \equiv w < -1/3$ . Este fluido misterioso que, embora não seja observado, domina atualmente o conteúdo energético do Universo foi batizado de energia escura [17]. Dentre os principais candidatos para descrever a energia escura, a constante cosmológica  $\Lambda$ , que atua sobre as equações de Einstein como uma fonte homogênea e isotrópica com equação de estado  $w = -1$ , é, talvez, a mais atraente teoricamente e tem sido estudada extensivamente na literatura [18, 19]. Outro candidato que tem recebido crescente atenção por parte dos teóricos é a *energia fantasma*, um apelido dado a energia escura com  $w < -1$ . Exatamente como o nome sugere, propriedades inusitadas surgem ao se admitir  $w < -1$ . Por exemplo, a densidade de energia fantasma, ao invés de decrescer, cresce enquanto o Universo evolui dominando qualquer outra forma de energia e tornando-se infinita em um tempo finito a contar da época presente. Neste cenário cosmológico, todos os sistemas ligados são rompidos pela densidade de energia fantasma e o Universo termina de forma catastrófica no que foi batizado de *Big Rip* [20, 21]. O mais perturbador de tudo isso, e que torna o estudo de tal modelo de vital importância, é que as observações atuais são compatíveis com  $w < -1$  [30]. No restante deste capítulo focaremos nosso estudo nesta última possibilidade. Nosso objetivo central será investigar se efeitos quânticos gravitacionais podem ou não evitar esta singularidade futura. Antes de fazermos isto, resumiremos nesta seção as principais características do modelo cosmológico clássico de Friedmann-Robertson-Walker dominado por um fluido fantasma.



Fazendo  $N = 1$ , de modo que o tempo  $t$  no elemento de linha (4.11) é o tempo cósmico, as equações clássicas de movimento são dadas por

$$\dot{a} = \frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial p_a} = -\frac{1}{12a} p_a, \quad \dot{p}_a = -\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial a} = -\frac{1}{24a^2} + 3wa^{-3w-1} p_\eta \quad (4.26)$$

$$\dot{\eta} = \frac{\partial \mathcal{H}^0}{\partial p_\eta} = a^{-3w}, \quad \dot{p}_\eta = -\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial \eta} = 0. \quad (4.27)$$

Multiplicando a primeira equação de (4.26) por  $1/a$ , elevando ao quadrado e usando o vínculo  $\mathcal{H}^0 = 0$  somos conduzidos à equação de Friedmann

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{1}{6} a^{-3(w+1)} p_\eta, \quad (4.28)$$

onde  $H \equiv \dot{a}/a$  é o parâmetro de Hubble. Também, multiplicando a primeira equação de (4.26) por  $a$ , derivando em relação ao tempo, usando a segunda equação de (4.26) e o vínculo  $\mathcal{H}_0$  obtemos

$$a \ddot{a} + \dot{a}^2 = \frac{1}{12} (1 - 3w) a^{-3w-1} p_\eta. \quad (4.29)$$

Dividindo ambos os membros desta equação por  $a^2$  e usando (4.28), obtemos uma equação para a aceleração do fator de escala:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{12} (1 + 3w) a^{-3(1+w)} p_\eta. \quad (4.30)$$

Na realidade, a equação de Friedmann é suficiente para determinar a evolução do Universo univocamente. Contudo, a equação (4.30) é conceitualmente útil, embora raramente usada em cálculos. Outra relação extremamente importante pode ser obtida diretamente da conservação do tensor de energia-momento,  $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ , projetando o vetor  $T^{\mu\nu}_{;\nu}$  paralelamente à quadrivelocidade do fluido. Assim,

$$\begin{aligned} 0 &= u_\mu T^{\mu\nu}_{;\nu} \\ &= u_\mu [(\rho + p)u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}]_{;\nu} \\ &= -\rho_{;\nu} u^\nu - (\rho + p)u^\nu_{;\nu} \\ &= \dot{\rho} + 3H(\rho + p), \end{aligned} \quad (4.31)$$

onde usamos o fato de que  $(u_\mu u^\mu)_{;\nu} = 0$ , que  $u^\nu = -\delta_0^\nu$  e que  $\Gamma^\nu_{\nu\lambda} = (\sqrt{-g})_{,\lambda}/\sqrt{-g}$ . Esta equação implica que a expansão do Universo, especificada por  $H$ , conduz a uma evolução da densidade de energia. Para um

fluido com equação de estado  $p = w \rho$ , (4.31) nos dá:

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{a}{a_0} \right)^{-3(1+w)}, \quad (4.32)$$

onde o índice zero corresponde ao valor da quantidade em  $t = t_0$ , com  $t_0$  sendo a idade do Universo. Agora, pela segunda equação de (4.27) temos que  $p_\eta = const.$ . Portanto, fazendo  $p_\eta = \rho_0 a_0^{-3(1+w)}$  as equações (4.28) e (4.30) tornam-se:

$$H^2 = \frac{1}{6} \rho \quad (4.33)$$

e

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{12}(\rho + p). \quad (4.34)$$

Estas são as formas familiares da equação de Friedmann e da equação de aceleração largamente encontradas em livros-textos de cosmologia. Resolvendo a equação de Friedmann, facilmente encontramos

$$a = a_0 \left[ 1 + \frac{3}{2}(1+w)H_0(t-t_0) \right]^{2/3(1+w)}. \quad (4.35)$$

Para  $w < -1$ , o fator de escala (e conseqüentemente a densidade de energia) torna-se infinito em um tempo finito

$$t_{rip} - t_0 = \frac{2}{3}|1+w|^{-1}H_0^{-1} \quad (4.36)$$

a contar da época presente. Por exemplo, para  $w = -3/2$  e  $H_0^{-1} = 14$  bilhões de anos, o tempo que resta antes de o Universo terminar neste Big Rip é de aproximadamente 19 bilhões de anos. Uma conseqüência intrigante do crescimento da densidade de energia fantasma é que sistemas ligados vão se dissociando com o passar do tempo. Uma forma simples de ver como isto ocorre é a seguinte [31]: considere três galáxias separadas por distâncias tão grandes que irregularidades locais tais como o grupo local possam ser ignoradas, mas tão pequenas que efeitos relativísticos sobre a expansão sejam desprezíveis. Se o Universo se expande de forma homogênea e isotrópica, então o triângulo definido pelas três galáxias em qualquer instante deve ser semelhante ao original. Isto significa que o comprimento de cada lado deve ser proporcional a um fator  $a(t)$  quando o Universo se expande. Estendendo o argumento a uma quarta galáxia, uma quinta e assim por diante vemos que

$a(t)$  deve ser um fator de escala universal. Portanto a distância  $r(t)$  entre duas galáxias satisfaz a relação<sup>1</sup>

$$r(t) = R a(t), \quad R = \text{const.} \quad (4.37)$$

Agora imagine em algum lugar do espaço um volume esférico de raio  $r$  tal que  $GM/rc^2 \ll 1$ , onde  $M$  é a massa no interior da esfera. A matéria dentro da esfera deve obedecer às leis da mecânica newtoniana, ou seja, podemos tratar o movimento da esfera na aproximação newtoniana, de modo que o seu raio satisfaz a equação

$$\ddot{r} \simeq -\frac{1}{16\pi} \frac{M}{r^2}, \quad (4.38)$$

onde, evidentemente, a massa  $M$  da esfera é constante. Substituindo (4.37) na equação acima vem

$$r \frac{\ddot{a}}{a} \simeq \frac{1}{r} \Phi, \quad (4.39)$$

onde  $\Phi = -M/16\pi r$  é o potencial gravitacional. Multiplicando ambos os lados por  $r$  e usando (4.35) obtemos

$$\Phi \simeq -\frac{1}{12} (\rho + 3p)r^2. \quad (4.40)$$

Assim, somos conduzidos de uma forma muito simples a um resultado conhecido da relatividade geral: no limite de campo fraco a densidade de massa gravitacional ativa de um fluido é  $\rho + 3p$ . Agora, de acordo com o teorema do virial, o valor médio da energia potencial de um corpo movendo-se sob a ação de um campo de forças inversamente proporcional ao quadrado da distância é igual ao dobro do valor médio de sua energia cinética:  $U = -2T$ . A energia de ligação (energia mínima que devemos dar a um corpo para que ele seja arrancado do campo de forças) é definida como:

$$\epsilon = -(U + T). \quad (4.41)$$

Deste modo, um planeta em uma órbita circular de raio  $R$  em torno de uma estrela de massa  $M$  torna-se desligado quando  $M \simeq -(8\pi/3)(\rho + 3p)R^3$ . Se

---

<sup>1</sup>Note que a lei de Hubble,  $v = Hr$ , onde  $v$  é a velocidade de recessão da galáxia, é uma consequência imediata de (4.37), isto é, da homogeneidade e isotropia do espaço.

$-1 < w < -1/3$ ,  $-(\rho+3p)$  decresce com o tempo e portanto, se  $-(8\pi/3)(\rho+3p)R^3$  é menor do que  $M$  atualmente, assim permanecerá para sempre. Deste modo, qualquer sistema que esteja atualmente ligado (por exemplo o sistema solar, a Via Láctea, o Grupo Local, aglomerados de galáxias) permanecerá assim no futuro.

Com energia fantasma,  $-(\rho+3p)$  cresce com o tempo e assim qualquer sistema gravitacionalmente ligado se dissociará. Utilizando o teorema do virial, (4.40), (4.35) e (4.36), podemos estimar o tempo antes do Big Rip em que um corpo em uma órbita de raio  $R$  com período  $\tau$  torna-se desligado gravitacionalmente,

$$t_{rip} - t \simeq \frac{1}{3\pi} \tau \frac{\sqrt{|1+3w|}}{|1+w|}. \quad (4.42)$$

Por exemplo, para  $w = -3/2$ ,  $t_{rip} - t \simeq 0,4\tau$ . Neste caso, o Sol será arrancado da Via Láctea aproximadamente 96 milhões de anos antes do Big Rip. O sistema Terra-Sol se desligará aproximadamente 5 meses antes do fim do Universo, o sistema Terra-Lua cerca de 10 dias antes do fim e a Terra começará a se partir 35 minutos antes do fim do Universo. Argumentos análogos se aplicam a objetos ligados por forças eletromagnéticas e fortes. Assim, aproximadamente  $10^{-16}$  segundos antes do Big Rip, moléculas e átomos começarão a se desfazer. Núcleos e depois núcleons se dissociarão no tempo restante. É provável que alguma nova física, por exemplo, produção espontânea de partículas e efeitos quântico-gravitacionais tornem-se relevantes antes da singularidade final podendo até mesmo evitá-la. Entretanto, isto provavelmente ocorreria após a seqüência de eventos acima.

## 4.4 Tratamento Quântico da Singularidade do Big Rip

A gravidade, força dominante em escalas cosmológicas, é de longe a interação mais fraca do Universo. Por exemplo, no átomo de hidrogênio a força eletromagnética entre o elétron e o próton é cerca de  $10^{40}$  vezes mais intensa que a força gravitacional entre eles. Este exemplo nos dá uma noção razoavelmente boa da diferença entre os domínios quântico e gravitacional e também explica por que na maior parte dos nossos estudos cosmológicos pode-

mos separar as duas teorias sem qualquer ambigüidade. No entanto, próximo a uma singularidade, a curvatura do espaço-tempo torna-se tão grande que a intensidade do campo gravitacional torna-se comparável à das outras interações fundamentais e efeitos quântico-gravitacionais tornam-se importantes na descrição de tal estado. Especificamente, no caso que estamos querendo analisar, se  $w < -1$  a curvatura do espaço-tempo,  $R \propto a^{-3(1+w)}$ , torna-se infinita quando  $t \rightarrow t_{rip}$ . Isto significa que a singularidade do Big Rip constitui uma situação típica em que uma teoria quântica da gravidade deve ser empregada. Uma vez que em muitos casos a quantização é forte o suficiente para evitar singularidades tão terríveis como o Big Bang, é natural se perguntar se efeitos quântico-gravitacionais podem evitar a singularidade do Big Rip. As linhas a seguir, que constituem a parte original desta dissertação, são direcionadas a tentar responder a esta pergunta [24].

#### 4.4.1 Quantização com Produto Interno Especial

A equação de Wheeler-DeWitt, no mini-superespaço em que estamos trabalhando, é construída fazendo a correspondência

$$p_a \rightarrow \hat{p}_a = -i \frac{\partial}{\partial a}, \quad p_\eta \rightarrow \hat{p}_\eta = -i \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (4.43)$$

e exigindo que

$$\hat{\mathcal{H}}^0 \Psi = 0, \quad (4.44)$$

onde  $\hat{\mathcal{H}}^0$  é o operador associado à super-hamiltoniana (4.25). Ignorando por ora a ordem dos operadores não comutantes  $a$  e  $\hat{p}_a$ , (4.44) torna-se

$$-\frac{1}{24} a^{-1} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial a^2} - i a^{-3w} \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = 0. \quad (4.45)$$

Multiplicando ambos os membros desta equação por  $a^{-3w}$  e fazendo  $\eta = -\tau$  obtemos uma equação análoga a de Schrödinger,

$$\hat{H} \Psi = i \frac{\partial \Psi}{\partial \tau}, \quad (4.46)$$

onde o operador hamiltoniano é dado por

$$\hat{H} = -\frac{1}{24} a^{3w-1} \frac{\partial^2}{\partial a^2}. \quad (4.47)$$

O operador  $\hat{H}$  é auto-adjunto em  $L^2(0, \infty)$  se (1) o produto interno entre quaisquer funções  $\psi_1$  e  $\psi_2 \in L^2(0, \infty)$  é dado por

$$(\psi_1, \psi_2) = \int_0^\infty da a^{1-3w} \psi_1^*(a) \psi_2(a) \quad (4.48)$$

e (2) as funções do domínio de  $\hat{H}$  satisfazem condições de contorno apropriadas. Essas condições podem ser determinadas da seguinte forma: por (4.47) e (4.48) temos que

$$(\psi_1, \hat{H}\psi_2) = -\frac{1}{24} \int_0^\infty da \psi_1 \frac{d^2\psi_2}{da^2}. \quad (4.49)$$

Agora, integrando esta equação duas vezes por partes obtemos

$$(\psi_1, \hat{H}\psi_2) = -\frac{1}{24} \left( \psi_1^* \frac{d\psi_2}{da} - \frac{d\psi_1^*}{da} \psi_2 \right) \Big|_0^\infty + (\hat{H}\psi_1, \psi_2). \quad (4.50)$$

Assim, supondo que  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  e suas primeiras derivadas são de quadrado integrável em  $(0, \infty)$ , uma condição necessária e suficiente para que  $\hat{H}$  seja auto-adjunto é que as funções do seu domínio satisfaçam a condição de contorno

$$\left( \psi_1^* \frac{d\psi_2}{da} - \frac{d\psi_1^*}{da} \psi_2 \right) (0) = 0. \quad (4.51)$$

Para que esta equação seja satisfeita é necessário e suficiente que as funções do domínio de  $\hat{H}$  sejam tais que [32]

$$\frac{d\psi}{da}(0) = \alpha\psi(0), \quad (4.52)$$

onde  $\alpha \in (-\infty, \infty]$ . Assim, devemos buscar apenas soluções da equação de Wheeler-DeWitt que satisfaçam (4.52). Soluções estacionárias de (4.46) podem ser obtidas pelo método de separação de variáveis escrevendo a função de onda do universo na forma

$$\Psi(a, \tau) = \psi(a) e^{-iE\tau}, \quad (4.53)$$

onde  $E$  é uma constante real. A substituição de (4.53) em (4.46) resulta na equação

$$\frac{d^2\psi}{da^2} + 24Ea^{1-3w}\psi = 0 \quad (4.54)$$

cuja solução geral é dada por [33]

$$\psi(a) = \sqrt{a} \left[ C_+ J_{1/2r} \left( \frac{\sqrt{24E}}{r} a^r \right) + C_- J_{-1/2r} \left( \frac{\sqrt{24E}}{r} a^r \right) \right], \quad r \neq 0 \quad (4.55)$$

onde  $r = 3(1 - w)/2$ ,  $C_+$  e  $C_-$  são constantes arbitrárias e

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+\nu)\Gamma(k+\nu)} \left( \frac{x}{2} \right)^{2k+\nu} \quad (4.56)$$

é a função de Bessel de primeira espécie de ordem  $\nu$ . Para pequenos valores do fator de escala temos que

$$J_{1/2r} \left( \frac{\sqrt{24E}}{r} a^r \right) \sim a^{1/2} \quad (4.57)$$

e

$$J_{-1/2r} \left( \frac{\sqrt{24E}}{r} a^r \right) \sim a^{-1/2} \quad (4.58)$$

de modo que a escolha  $C_- = 0$  (4.55) satisfaz a condição de contorno (4.52) com  $\alpha = \infty$  enquanto a escolha  $C_+ = 0$  satisfaz (4.52) com  $\alpha = 0$ . Por simplicidade investigaremos apenas o caso em que  $C_- = 0$ , isto é,

$$\Psi_E = C_+ e^{-iE\tau} \sqrt{a} J_{1/2r} \left( \frac{\sqrt{24E}}{r} a^r \right). \quad (4.59)$$

A solução estacionária (4.59) tem norma infinita e, portanto, devemos superpor soluções estacionárias para construir estados de norma finita capazes de representar estados físicos. O pacote de ondas assim construído é dado por

$$\begin{aligned} \Psi(a, \tau) &= \sqrt{a} \int_0^\infty dE f(E) e^{-iE\tau} J_{1/2r} \left( \frac{\sqrt{24E}}{r} a^r \right) \\ &= \sqrt{a} \int_0^\infty dk \phi(k) e^{-ik^2 r^2 \tau / 24} J_{1/2r}(ka^r), \end{aligned} \quad (4.60)$$

onde  $k = \sqrt{24E}/r$  e

$$\phi(k) = \frac{r^2}{12} k f \left( \frac{r^2}{24} k^2 \right). \quad (4.61)$$

Fazendo a escolha [34]

$$\phi(k) = k^{1+1/2r} e^{-\gamma k^2}, \quad \gamma > 0 \quad (4.62)$$

podemos expressar  $\Psi(a, \tau)$  em termos de funções elementares [35]

$$\Psi(a, \tau) = \frac{a}{(2z)^{1+1/2r}} \exp\left(-\frac{a^{2r}}{4z}\right), \quad (4.63)$$

onde

$$z = \gamma + i\frac{r^2}{24}\tau. \quad (4.64)$$

Qualquer escolha diferente de (4.62) poderia ter sido feita. Contudo, além de (4.62) nos permitir que uma forma fechada para a integral (4.60) seja obtida, ela tem a vantagem de que as soluções assim obtidas são fisicamente interessantes. O valor esperado do fator de escala,  $\langle a \rangle$ , é definido por

$$\langle a \rangle \equiv \frac{(\Psi, a\Psi)}{(\Psi, \Psi)} = \frac{\int_0^\infty da a^{1-3w} \Psi^* a \Psi}{\int_0^\infty da a^{1-3w} \Psi^* \Psi}. \quad (4.65)$$

Calculando as integrais acima, facilmente obtemos

$$\langle a \rangle(\tau) = 2 \frac{\Gamma(1/r)}{\Gamma(1/2r)} \left( \frac{2}{\gamma} |z|^2 \right)^{1/2r}, \quad (4.66)$$

ou, usando (4.64) e lembrando que  $\tau = -\eta$ ,

$$\langle a \rangle(\eta) = 2 \frac{\Gamma(1/r)}{\Gamma(1/2r)} \left[ \frac{2}{\gamma} \left( \gamma^2 + \frac{r^4}{576} \eta^2 \right) \right]^{1/2r}. \quad (4.67)$$

Podemos ver claramente que  $\langle a \rangle$  nunca se anula, o que indica a ausência de singularidades do tipo Big Bang ou Big Crunch na teoria quântica. Para investigar se a singularidade do Big Rip persiste ou não na teoria quântica, devemos tomar  $w < -1$  ou, equivalentemente,  $r > 3$  e olhar para regiões em que  $\langle a \rangle \rightarrow \infty$ , ou seja,  $\eta \rightarrow \infty$ . Agora, lembremos que a singularidade do Big Rip é caracterizada pelo fato de o fator de escala tornar-se infinito num valor finito do tempo cósmico. Uma vez que  $\langle a \rangle$  desempenha o papel de fator de escala na teoria quântica, a relação entre o tempo cósmico  $t$  e  $\eta$  é, pela primeira equação de (4.27), dada por

$$dt = \langle a \rangle^{3-2r} d\eta, \quad (4.68)$$

ou, escolhendo uma origem comum para ambos os tempos,

$$t \propto \int_0^\eta \left( \gamma^2 + \frac{r^4}{576} \eta'^2 \right)^{3/2r-1} d\eta'. \quad (4.69)$$



Para  $\eta \gg \gamma$  a integral acima comporta-se como

$$\int^{\eta} \eta'^{3/r-2} d\eta' \propto \eta^{(3-r)/r}. \quad (4.70)$$

Se  $r > 3$  a integral é convergente e  $t \rightarrow t_{rip}$  para  $\eta \rightarrow \infty$ , onde  $t_{rip}$  é finito. Assim, exatamente como o modelo clássico, o modelo quântico apresenta uma singularidade do tipo Big Rip. Podemos suspeitar que este resultado careça de generalidade em vista de: (1) a ordem particular dos operadores não comutantes  $a$  e  $\hat{p}_a$  empregada na construção da equação de Wheeler-DeWitt (4.46); (2) a forma especial do produto interno (4.48) que, estranhamente, depende da equação de estado através de  $w$ . Nas próximas seções procuramos abordar estas questões.

#### 4.4.2 Ordenação de Operadores e Quantização com Produto Interno Usual

No processo de construção da equação de Wheeler-DeWitt (4.44), a ordenação dos operadores não comutantes  $a$  e  $\hat{p}_a$  é sempre fonte de ambigüidades. Uma vez que  $a$  e  $\hat{p}_a$  não comutam, ordenações diferentes destes operadores podem conduzir a resultados distintos. Para remover as dúvidas que pairam sobre a veracidade do resultado obtido na seção anterior devido a essa ambigüidade, nós empregaremos nesta seção uma ordenação mais geral dos operadores  $a$  e  $\hat{p}_a$ . Isso é feito associando à função hamiltoniana clássica correspondente à equação de Wheeler-DeWitt (4.46),

$$H = \frac{a^{3w-1}}{24} p_a^2, \quad (4.71)$$

o operador hamiltoniano

$$\hat{H}_{\lambda\mu\nu} = \frac{1}{24} \frac{1}{2} \left( a^\lambda \hat{p}_a a^\mu \hat{p}_a a^\nu + a^\nu \hat{p}_a a^\mu \hat{p}_a a^\lambda \right), \quad \lambda + \mu + \nu = 3w - 1, \quad (4.72)$$

o qual é formalmente auto-adjunto para qualquer valor dos parâmetros  $\lambda$ ,  $\mu$  e  $\nu$  com o produto interno padrão definido por

$$(\psi_1, \psi_2) = \int_0^\infty \psi^*(a) \psi(a) da. \quad (4.73)$$

Agora a equação de Wheeler-DeWitt toma a forma

$$\hat{H}_{\lambda\mu\nu}\Psi = i\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}, \quad (4.74)$$

cujas soluções estacionárias  $\Psi(a, \tau) = \psi(a)e^{-iE\tau}$  satisfazem a equação

$$\hat{H}_{\lambda\mu\nu}\psi - E\psi = 0. \quad (4.75)$$

Após algum trabalho algébrico, esta equação pode ser posta na forma

$$a^2\frac{d^2\psi}{da^2} + 2(1-r)a\frac{d\psi}{da} + [\epsilon + 24Ea^{2r}]\psi = 0, \quad (4.76)$$

onde  $\epsilon = [\nu(1 - \lambda - 2r) + \lambda(1 - \nu - 2r)]$  e, como antes,  $r = 3(1 - w)/2$ . A solução geral desta equação é [33]

$$\psi(a) = a^{(2r-1)/2} \left[ C_+ J_p\left(\frac{\sqrt{24E}}{r}a^r\right) + C_- J_{-p}\left(\frac{\sqrt{24E}}{r}a^r\right) \right], \quad r \neq 0 \quad (4.77)$$

onde

$$p = \frac{1}{r} \sqrt{\left(\frac{2r-1}{2}\right)^2 - \epsilon}. \quad (4.78)$$

Como antes, nós consideraremos apenas o caso em que  $C_- = 0$ , isto é,

$$\Psi_E(a, \tau) = C_+ e^{-iE\tau} a^{(2r-1)/2} J_p\left(\frac{\sqrt{24E}}{r}a^r\right). \quad (4.79)$$

Nosso próximo passo é gerar um pacote de ondas normalizável a partir da superposição das soluções (4.79) na forma

$$\begin{aligned} \Psi(a, \tau) &= a^{(2r-1)/2} \int_0^\infty dE f(E) e^{-iE\tau} J_p\left(\frac{\sqrt{24E}}{r}a^r\right) \\ &= a^{(2r-1)/2} \int_0^\infty dk \phi(k) e^{-i(r)^2 k^2 \tau / 24} J_p(ka^r), \end{aligned} \quad (4.80)$$

onde  $k$  e  $\phi(k)$  são dados por (4.61). De forma análoga ao caso naterior, escolhendo

$$\phi(k) = k^{p+1} e^{-\gamma k^2}, \quad \gamma > 0 \quad (4.81)$$

podemos calcular a integral acima exatamente e obter [35]

$$\Psi(a, \tau) = a^{-1/2} \left(\frac{a^r}{2z}\right)^{1+p} \exp\left(-\frac{a^{2r}}{4z}\right), \quad (4.82)$$

onde  $z$  é dado por (4.64). Agora o valor médio do fator de escala é dado por

$$\langle a \rangle(\tau) \equiv \frac{(\Psi, a\Psi)}{(\Psi, \Psi)} = \frac{\int_0^\infty da \Psi^* a\Psi}{\int_0^\infty da \Psi^* \Psi} \quad (4.83)$$

e um cálculo imediato fornece

$$\langle a \rangle(\tau) = \frac{\Gamma\left[\frac{2r(1+p)+1}{2r}\right]}{\Gamma(p+1)} \left(\frac{1}{2\gamma}|z|^2\right)^{1/2r}, \quad (4.84)$$

que tem a mesma forma do valor esperado do fator de escala encontrado anteriormente. Assim, uma ordenação arbitrária dos operadores não comutantes  $a$  e  $\hat{p}_a$  com produto interno padrão conduz ao mesmo resultado que é obtido quando uma ordenação especial destes operadores é escolhida, a qual exige que o produto interno tenha a forma estranha (4.48). Isto dá suporte a nossa asserção inicial de que existem estados quânticos tais que a energia fantasma dá origem a expansão acelerada e a um Big Rip.

Deve ser ressaltado que nós estamos tentando descobrir se efeitos quânticos *necessariamente* removem a singularidade futura. Se este fosse o caso, para *qualquer* estado quântico o valor esperado do fator de escala deveria permanecer finito para qualquer valor finito do tempo cósmico. Nós acabamos de apresentar um exemplo de estado quântico para o qual o valor esperado de fator de escala torna-se infinito num tempo cósmico finito. Isto mostra que, pelo menos neste modelo e para o procedimento de quantização acima, não é verdade que em geral efeitos quânticos evitem o Big Rip. Este raciocínio também justifica nossas escolhas particulares das soluções estacionárias da equação de Wheeler-DeWitt e de  $\phi(k)$ , as quais permitem que a integral seja calculada e o pacote de ondas seja expresso em termos de funções elementares, o que, por sua vez facilita o cálculo do valor médio do fator de escala.

### 4.4.3 Transformação Canônica e Outra Quantização com Produto Interno Padrão

O terceiro e último procedimento de quantização que utilizaremos para verificar a força de nosso resultado consiste em realizar a transformação no

espaço de fase  $(a, p_a) \rightarrow (x, p)$  definida por

$$x = \frac{\sqrt{12} a^r}{r}, \quad p = \frac{a^{1-r} p_a}{\sqrt{12}} \quad (4.85)$$

a qual é canônica uma vez que o parêntese de Poisson  $\{x, p\}_{(a, p_a)} = 1$ . Em termos destas novas variáveis canônicas, a hamiltoniana clássica (4.71) é reduzida à hamiltoniana da partícula livre

$$H = \frac{p^2}{2}, \quad (4.86)$$

e a correspondente equação de Wheeler-DeWitt toma a forma

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}. \quad (4.87)$$

Esta é a equação de onda de Schrödinger para a partícula livre sobre a semi-reta  $[0, \infty)$ . Para que o operador hamiltoniano seja auto-adjunto é necessário que o domínio de  $\hat{H}$  seja restrito apenas às funções de onda que satisfazem a condição de contorno (4.52). Embora o propagador para  $\alpha$  arbitrário seja conhecido [36, 37], ele é suficientemente complicado para nos impedir de construir pacotes de onda manejáveis. Então, por simplicidade, nos restringiremos apenas aos casos em que  $\alpha = \infty$  e  $\alpha = 0$ , ou seja, ou a função de onda ou sua derivada se anula em  $x = 0$ . Uma vez que estamos procurando por exemplos de estados quânticos que conduzem a uma singularidade futura, se formos bem sucedidos nossas escolhas particulares de  $\alpha$  ainda nos permitirão concluir que não é verdade que *em geral*, isto é, para um  $\alpha$  arbitrário, o Big Rip é evitado. Em resumo, nossas escolhas especiais para  $\alpha$  são tecnicamente convenientes e não prejudicam a lógica do nosso raciocínio.

Os propagadores para os casos  $\alpha = 0$  e  $\alpha = \infty$  são dados, respectivamente, por [36, 37]

$$G_0(x, x', \tau) = G(x, x', \tau) + G(x, -x', \tau), \quad (4.88)$$

$$G_\infty(x, x', \tau) = G(x, x', \tau) - G(x, -x', \tau), \quad (4.89)$$

onde  $G(x, x', \tau)$  é o propagador usual da partícula livre, o qual em nosso caso ( $m = 1$ ,  $\hbar = 1$ ) toma a forma [38]

$$G(x, x', \tau) = \left( \frac{1}{2\pi i \tau} \right)^{1/2} \exp \left[ i \frac{(x - x')^2}{2\tau} \right]. \quad (4.90)$$

Consideremos primeiro a função de onda normalizada

$$\Psi_e(x, 0) = \left(\frac{8\sigma}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\beta x^2}, \quad \beta = \sigma + i\gamma, \quad \sigma > 0, \quad (4.91)$$

que satisfaz a condição de contorno (4.52) com  $\alpha = 0$ . Portanto,

$$\Psi_e(x, \tau) = \int_0^\infty G_0(x, y, \tau) \Psi_e(y, 0) dy = \int_{-\infty}^\infty G(x, y, \tau) \Psi_e(y, 0) dy, \quad (4.92)$$

onde usamos o fato de  $\Psi_e(x, 0)$  ser uma função par para estender a integração a toda a reta real. Substituindo (4.90) e (4.91) na integral acima obtemos

$$\Psi_e(x, \tau) = \left(\frac{8\sigma}{\pi}\right)^{1/4} (1 + 2i\beta\tau)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\beta x^2}{1 + 2i\beta\tau}\right). \quad (4.93)$$

De acordo com (4.85), o valor médio do fator de escala é definido por

$$\langle a \rangle_e(\tau) = \left(\frac{r}{\sqrt{12}}\right)^{1/r} \int_0^\infty x^{1/r} |\Psi_e(x, \tau)|^2 dx, \quad (4.94)$$

e um cálculo simples nos dá

$$\langle a \rangle_e(\tau) = \frac{1}{r\sqrt{\pi}} \left(\frac{r}{\sqrt{12}}\right)^{1/r} \Gamma\left(\frac{1}{r}\right) \left[\frac{4\sigma^2\tau^2 + (1 - 2\gamma\tau)^2}{2\sigma}\right]^{1/2r}, \quad (4.95)$$

cujos comportamento assintótico é o mesmo dos casos anteriores.

Por fim, considere a função de onda normalizada

$$\Psi_o(x, 0) = \left(\frac{128\sigma^3}{\pi}\right)^{1/4} x e^{-\beta x^2}, \quad \beta = \sigma + i\gamma, \quad \sigma > 0, \quad (4.96)$$

que satisfaz a condição de contorno (4.52) com  $\alpha = \infty$ . Como no caso anterior, o fato de  $\Psi_o(x, 0)$  ser uma função ímpar nos permite escrever

$$\Psi_o(x, \tau) = \int_0^\infty G_\infty(x, y, \tau) \Psi_o(y, 0) dy = \int_{-\infty}^\infty G(x, y, \tau) \Psi_o(y, 0) dy, \quad (4.97)$$

donde

$$\Psi_o(x, \tau) = \left(\frac{128\sigma^3}{\pi}\right)^{1/4} (1 + 2i\beta\tau)^{-3/2} x \exp\left(-\frac{\beta x^2}{1 + 2i\beta\tau}\right). \quad (4.98)$$

O valor esperado do fator de escala é agora dado por

$$\langle a \rangle_o(\tau) = \left( \frac{1+r}{r} \right) \frac{1}{r\sqrt{\pi}} \left( \frac{r}{\sqrt{12}} \right)^{1/r} \Gamma\left(\frac{1}{r}\right) \left[ \frac{4\sigma^2\tau^2 + (1-2\gamma\tau)^2}{2\sigma} \right]^{1/2r}, \quad (4.99)$$

ou, equivalentemente,

$$\langle a \rangle_o(\tau) = \left( \frac{1+r}{r} \right) \langle a \rangle_e(\tau). \quad (4.100)$$

Assim, recuperamos o mesmo comportamento assintótico dos casos anteriores, que implica expansão acelerada e Big Rip.

# Capítulo 5

## Conclusões

Nesta dissertação foram investigadas as características quânticas do modelo cosmológico de Friedmann-Robertson-Walker espacialmente plano dominado por um fluido fantasma. O modelo clássico foi formulado tomando por base o formalismo canônico desenvolvido por Schutz, o qual leva em conta os graus de liberdade do fluido. Para um Universo dominado por um fluido fantasma cuja equação de estado é  $p/\rho = w < -1$ , as equações clássicas de movimento prevêem uma expansão acelerada para o Universo terminada num catastrófico Big Rip em um tempo finito a contar da época presente. Então, a fim de investigar se o Big Rip persiste na teoria quântica, o modelo foi quantizado de três formas diferentes. Primeiro a equação de Wheeler-DeWitt foi construída com uma escolha especial da ordem dos operadores não comutantes  $a$  e  $\hat{p}_a$ , a qual exige uma forma especial para o produto interno, que depende da equação de estado do fluido, para que o operador hamiltoniano seja auto-adjunto. Um pacote de ondas particular foi construído e verificou-se que, exatamente como no modelo clássico, o valor médio do fator de escala torna-se infinito num valor finito do tempo cósmico. Em seguida, uma ordem arbitrária dos operadores  $a$  e  $\hat{p}_a$  foi permitida com o objetivo de quantizar o modelo com o produto interno padrão. Após construirmos um pacote de ondas especial, constatamos que o comportamento do valor médio do fator de escala é o mesmo do caso anterior. Por fim, um terceiro método de quantização foi explorado baseado na redução da hamiltoniana clássica àquela da partícula livre por meio de uma transformação canônica. Uma vez que o propagador da equação de Schrödinger para a partícula livre na

semi-reta é conhecido, é possível, em princípio, determinar a função de onda em qualquer instante a partir de sua forma num tempo inicial. Impondo que a função de onda inicial satisfaça a mesma condição de contorno a que estava sujeita nos casos anteriores, o fator de escala tem o mesmo comportamento previsto pelos outros dois esquemas de quantização. Isto indica que nosso resultado não é um mero artefato de um procedimento de quantização espúrio. O comportamento quântico do fator de escala parece ser robusto, e suporta nossa conclusão de que, pelo menos em nosso modelo, efeitos quânticos não evitam necessariamente o Big Rip.

Não podemos afirmar que nosso resultado seja conclusivo. Para testar sua generalidade o conteúdo material do Universo deve ser enriquecido para descrever o Universo primitivo mais realisticamente, o que nós pretendemos fazer num trabalho futuro. Tendo em vista que a energia fantasma domina a dinâmica para tempos muito grandes, nós suspeitamos que o enriquecimento do conteúdo material não mudará nosso resultado, mas esta conjectura deve ser verificada. Nós podemos antecipar que este não será um trabalho fácil porque será muito mais difícil obter soluções exatas normalizáveis da equação de Wheeler-DeWitt. Não esperamos que soluções aproximadas, tais como aquelas fornecidas pelo método WKB, sejam adequadas para discutir singularidades quânticas, isto é, nós acreditamos que somente um tratamento quântico completo pode nos dar evidências concretas sobre a persistência de singularidades futuras no regime quântico de modelos cosmológicos dominados por um fluido fantasma. Nós também temos a sensação de que o estudo das trajetórias Bohmianas do fator de escala provavelmente ajudará a esclarecer se efeitos quânticos evitam o Big Rip. Esta é uma investigação que esperamos fazer num futuro próximo.

Nosso resultado difere daqueles obtidos por meio de outros formalismos [39, 40, 41, 42, 43], a saber, que o Big Rip é suavizado ou mesmo evitado por efeitos quânticos. Como existem muitas formas de se fazer cosmologia quântica e não se sabe de que modo elas estão relacionadas, nós confessamos nossa ignorância acerca das razões desta discrepância. Por outro lado, é difícil fazer afirmações categóricas sobre a presença ou ausência de singularidades cosmológicas no regime quântico uma vez que não há uma concordância geral sobre o que constitui uma singularidade quântica. Estas questões certamente merecem uma investigação mais profunda.



# Bibliografia

- [1] Milne, E. A., *Q. J. Math* **5**, 64 (1934).
- [2] Milne, E. A. e McCrea, W. H., *Q. J. Math* **5**, 73 (1934).
- [3] Einstein, A. *Ann. Physik* **17**, 891 (1905).
- [4] Einstein, A. *Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber* 844 (1915).
- [5] Einstein, A. *Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Sitzber* 142 (1917).
- [6] de Sitter, W. *Proc. Akad. Weteusch. Amasterdam* **19**, 1217 (1917).
- [7] Friedmann, A. *Z. Phys.* **10**, 377 (1922); **21**, 326 (1924).
- [8] Hubble, E., *Proc. Nat. Acad. Sci. (U.S.A.)* **15**, 168 (1929).
- [9] Gamow, G., *Phys. Rev.* **70**, 572 (1946).
- [10] Alpher, R. A., Bethe, H. A. e Gamow, G., *Phys. Rev.* **73**, 80 (1948).
- [11] Alpher, R. A. e Hermann, R. C., *Nature* **162**, 774 (1948).
- [12] Penzias, A. A. e Wilson, R. W., *Ap. J.* **142**, 419 (1965).
- [13] Hawking, S. W. e Ellis, G. R. F., *The Large Structure of Space-Time* (Cambridge University Press, Cambridge, 1973).
- [14] DeWitt, B. S., *Phys. Rev.* **160**, 1113 (1967).
- [15] Riess, A. G. *et al.*, *Astron. J.* **116**, 1009 (1998).
- [16] Perlmutter, S. *et al.*, *Astrophys. J.* **517**, 565 (1999).

- [17] Copeland, E. J., Sami, M. e Tsujikawa, S., hep-th/0603057.
- [18] Peebles, P. J. E. e Ratra, B., *Rev. Mod. Phys.* **75**, 559 (2003).
- [19] Padmanabhan, T., *Phys. Rept.* **380**, 235 (2003).
- [20] Caldwell, R. R., *Phys. Lett.* **B545**, 23 (2002).
- [21] Caldwell, R. R., Kamionkowski, M., e Weinberg, N., *Phys. Rev. Lett.* **91**, 071301 (2003).
- [22] Arnowitt, R., Deser, S. e Misner, C. W., *Gravitation: An Introduction to Current Research*, editado por Witten, L. (Wiley, New York, 1962), 227-265 [gr-qc/0405109] .
- [23] Schutz, B. F., *Phys. Rev.* **D2**, 2762 (1970); **D4**, 3559 (1971).
- [24] Barboza, E. M. e Lemos N., A., *Gen. Rel. Grav.* **38** 1609 (2006).
- [25] Wald, R. M., *General Relativity* (The University of Chicago Press, Chicago, 1984).
- [26] Stephani, H., *General Relativity: An Introduction to the Theory of the Gravitational Field 2<sup>a</sup> Edição* (Cambridge University Press, Cambridge, 1990).
- [27] Kiefer, C., *Phys. Rev.* **D38**, 1761 (1988).
- [28] Lapchinskii, V. G. e Rubakov, V. A., *Theo. Math. Phys.* **33** 1076 (1977)
- [29] Ince, E., L., *Ordinary Differential Equations* (Dover, New York, 1956).
- [30] Riess, A. G. *et al.*, *Astrophys. J.* **607**, 665 (2004).
- [31] Peebles, P. J. E. *Physical Cosmology* (Princeton University Press, NJ, 1971)
- [32] Reed, I. M. e Simon, B., *Methods of Modern Mathematical Physics Vol. II: Fourier Analysis, Self-Adjointness* (Academic, NY, 1975), Seção X.1, Exemplo 2.

- [33] Hildebrand, F. B., *Advanced Calculus for Applications* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1962), Seção 4.10.
- [34] Alvarenga, F. G., Fabris, J. C., Lemos, N. A. e Monerat, G. A., *Gen. Rel. Grav.* **34**, 651 (2002).
- [35] Gradshteyn, I. S. e Ryzhik, I. M., *Table of Integrals, Series e Products* (Academic, New York, 1980), fórmula 6.631-4.
- [36] Clark, T. E., Menikoff, R. e Sharp, D. H., *Phys. Rev.* **D22**, 3012 (1980).
- [37] Farhi, E. e Gutmann, S., *Int. J. Mod. Phys.* **A5**, 3029 (1990).
- [38] Schiff, L. I., *Quantum Mechanics*, 3<sup>a</sup> ed. (McGraw-Hill, New York, 1968), p. 65.
- [39] Elizalde, E., Nojiri, S e Odintsov, S. D., *Phys. Rev.* **D70**, 043539 (2004).
- [40] S. Nojiri e S. D. Odintsov, *Phys. Lett.* **B595**, 1 (2004); S. Nojiri e S. D. Odintsov, *Phys. Rev.* **D70**, 103522 (2004).
- [41] S. Nojiri, S. D. Odintsov e S. Tsujikawa, *ibid.* **71**, 063004 (2005).
- [42] M. Sami, P. Singh e S. Tsujikawa, gr-qc/0605113.
- [43] M. P. Dąbrowski, C. Kiefer e B. Sandhöfer, hep-th/0605229.